

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 517.958:531.33:517.956.8

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ ПРИ РАЗЛИЧНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ УЧАСТКОВ ФИКСАЦИИ ЕЕ КРАЕВ

© 2023 г. С. А. Назаров*

Институт проблем машиноведения РАН, Большой пр. 61, В.О., Санкт-Петербург, 199034 Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Исследуются частоты собственных колебаний и захваченные волны в изотропной и однородной упругой полуполосе. При разных конфигурациях зон жесткого защемления и свободного края получена информация об отсутствии или наличии собственных частот ниже, а в некоторых случаях и выше точки отсечки непрерывного спектра. Выведены оценки кратности дискретного спектра и построены разнообразные асимптотические представления захваченных волн и их частот.

Ключевые слова: изотропная полуполоса, захваченные упругие волны, условия жесткого крепления и свободного края, асимптотика, трещина

DOI: 10.31857/S0320791923600518, **EDN:** TWHVCA

ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ О СПЕКТРЕ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях на частоте $\omega > 0$ упругой полубесконечной полосы $\Pi = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \in (0, L)\}$ (далее полуполосы; рис. 1а), изготовленной из изотропного однородного материала с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$. Вектор смещений $u = (u_1, u_2)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$-\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u = \rho \omega^2 u \text{ на } \Pi. \quad (1)$$

При этом $\nabla = \text{grad}$, $\nabla \cdot = \text{div}$ и $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа. Сведем размер $L > 0$ и плотность $\rho > 0$ к единице. На участках Γ_D и Γ_N границы $\partial \Pi$ поставим краевые условия жесткой заделки (Дирихле) и свободного края (Неймана)

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\sigma_j^{(n)}(u) := n_1 \sigma_{1j}(u) + n_2 \sigma_{2j}(u) = 0 \text{ на } \Gamma_N, \quad (3)$$

$$j = 1, 2.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали, а в формулах

$$\sigma_{jk}(u) = 2\mu \varepsilon_{jk}(u) + \lambda \delta_{j,k} (\varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u)), \quad (4)$$

$$\varepsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad j, k = 1, 2,$$

фигурируют декартовы компоненты тензоров напряжений $\sigma(u)$ и деформаций $\varepsilon(u)$, а также символ

Кroneкера $\delta_{j,k}$. Вариационная формулировка задачи (1)–(3) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E(u, \psi; \Pi) := \sum_{j,k=1,2} (\sigma_{jk}(u), \varepsilon_{jk}(\psi))_{\Pi} = \omega^2 (u, \psi)_{\Pi}, \quad (5)$$

$$\psi \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D),$$

в котором $E(u, \psi; \Pi)$ — удвоенная упругая энергия полуполосы, $(\cdot)_{\Pi}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi)$, а $H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ — пространство Соболева вектор-функций, подчиненных условиям Дирихле (2).

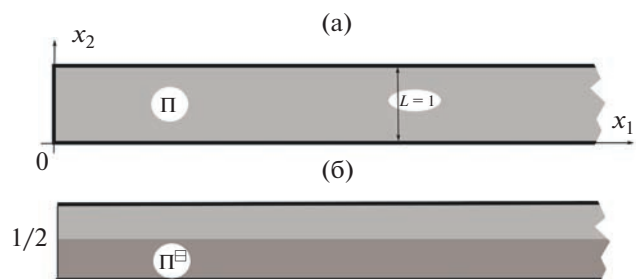


Рис. 1. Полоса Π единичной толщины и ее половина $\Pi^{\square}$. Защемленная поверхность отмечена более жирными линиями — (б) только боковые стороны и (а) вместе с торцом.

Далее будет изучен спектр $\mathfrak{p}$ задачи (1)–(3) при разных способах разбиения границы $\partial\P$ на участки жесткой заделки Γ_D и свободного края Γ_N .

Вопрос о наличии или отсутствии захваченных волн в упругой полуполосе, важный сам по себе, также возникает при изучении собственных колебаний тонких пластин и балок, точнее при анализе явления пограничного слоя около их кромок, и в диагностике накопления повреждений в соединительных зонах. Для скалярных задач соответствующие конструкции собственных мод вводились и обосновывались, например, в статьях [3] и [4], но для векторных задач теории упругости плановые исследования не публиковались. В данной работе рассматриваются векторные упругие поля, собственные задачам о деформации тонких упругих прокладок или плит, закрепленных вдоль одного из оснований или зажатых в малой окрестности кромки. При разрыве клеевых соединений возникают зоны отслоения пластин, которые далее называем трещинами, и для исследования их влияния на спектр применяем аппарат механики разрушения (ср. [5, 6], [7, гл. 7] и др.).

Начнем с простейших случаев $\Gamma_N = \emptyset := \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\}$ (зажаты боковые стороны; рис. 1б) и $\Gamma_N = \partial\P$ (закреплен также торец полуполосы; рис. 1а). Известно (ср. расчеты в работе [8]), что в обоих случаях непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c$ задачи (5) – луч $[\omega_+, +\infty)$ с точкой отсечки

$$\omega_+ = \pi\sqrt{\mu}. \quad (6)$$

При $\Gamma_N = \emptyset$ (рис. 1а) дискретный спектр $\mathfrak{p}_d$ пуст. Воспроизведем доказательство из работы [8], основанное на классическом приеме [9]. Производная $u' = \partial u / \partial x_1$ собственной моды $u \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ попадает в пространство $H_0^1(\Pi; \partial\P \setminus \emptyset)$ благодаря условию (2) на боковых сторонах и слабой сингулярности $O(r^\Lambda)$ с показателем $\Lambda > 1$ поля смещений в угловых точках раствором $\pi/2$ (см. [10] и, например, [11, гл. III, § 8]). При помощи соотношений (2) и (4), а также формулы интегрирования по частям получаем равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int_{\emptyset, j=1,2} \left(\sigma_{1j}(u) u'_j - u_j \sigma_{1j}(u') \right) dx_2 = \\ &= \int_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 \right) dx_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, поле u аннулируется на торце $\emptyset$ вместе со своими первыми производными, что невозможно в силу теоремы о единственности продолжения решений системы дифференциальных уравнений Ламе (см., например, книгу [12, гл. 4]). Итак, $u = 0$ всюду в полуполосе, т.е. соб-

ственных мод не существует на любой частоте, а значит, пуст не только дискретный, но и точечный спектр $\mathfrak{p}_p$ (собственных частот нет и внутри непрерывного спектра $\mathfrak{p}_c$).

Убедимся в том, что в случае $\Gamma_N = \emptyset$ (торец свободен от внешних воздействий; рис. 1б) имеется хотя бы одна собственная частота ниже точки отсечки ω_+ . Поскольку боковые стороны полуполосы Π жестко закреплены, по-прежнему $\mathfrak{p}_c = [\omega_+, +\infty)$, а точке отсечки отвечает не зависящая от продольной координаты x_1 волна

$$w_+(x_2) = e_{(1)} \sin(\pi x_2), \quad (8)$$

где $e_{(j)}$ – орт оси x_j . Согласно минимальному принципу [13, теорема 10.2.1] нижняя грань $\mathfrak{p}$ всего спектра $\mathfrak{p}$ задачи (5) вычисляется по формуле

$$(\mathfrak{p})^2 = \inf_{u \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)} \frac{E(u, u; \Pi)}{\|u; L^2(\Pi)\|^2}. \quad (9)$$

Таким образом, соотношение $\mathfrak{p} < \omega_+$, обеспечивающее непустоту дискретного спектра $\mathfrak{p}_d$ (при этом $\omega_1 = \mathfrak{p}$ – первая, наименьшая, собственная частота), эквивалентно наличию пробной вектор-функции $u^\delta \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$, для которой выполнено неравенство

$$E(u^\delta, u^\delta; \Pi) < \omega_+^2 \|u^\delta; L^2(\Pi)\|^2. \quad (10)$$

Воспользуемся приемом из работы [14] и положим

$$u^\delta(x) = w_+(x_2) e^{-\delta x_1} + \sqrt{\delta} \psi(x), \quad (11)$$

где δ – малое положительное число, а ψ – гладкая вектор-функция с носителем в замкнутом квадрате $Q = [0, 1/2] \times [1/4, 3/4] \subset \Pi \cup \emptyset$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega_+^2 \|u^\delta; L^2(\Pi)\|^2 &= \pi^2 \mu \int_0^{+\infty} e^{-2\delta x_1} dx_1 \int_0^1 \sin^2(\pi x_2) dx_2 + \\ &+ 2\pi^2 \mu \sqrt{\delta} \int_Q w_+(x_2) \psi(x) dx + O(\delta), \\ E(u^\delta, u^\delta; \Pi) &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-2\delta x_1} dx_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \sin(\pi x_2) \right)^2 dx_2 + \\ &+ 2\sqrt{\delta} E(w_+, \psi; Q) + O(\delta). \end{aligned}$$

Подставим эти формулы в соотношение (10) и заметим, что слагаемые порядка $1/\delta$ в правой и левой частях взаимно уничтожаются. Таким образом, после интегрирования по частям само соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &> 2\sqrt{\delta} (E(w_+, \psi; Q) - \omega_+^2 (w_+, \psi)_Q) - c\delta = \\ &= -2\sqrt{\delta} \int_0^1 \sum_{j=1,2} \psi_j(0, x_2) \delta_{1j}(w_+; 0, x_2) dx_2 - c\delta. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\sigma_{11}(w_{\mp}; 0, x_2) = 0$ и $\sigma_{12}(w_{\mp}; 0, x_2) = \mu \cos(\pi x_2)$, можно подобрать компоненту ψ_2 так, чтобы последний интеграл в формуле (12) стал отрицательным, а ее правая часть — положительной при малом $\delta > 0$. Итак, для пробной функции (11) в самом деле выполнено неравенство (10) и, следовательно, дискретный спектр $\mathfrak{p}_d$ содержит собственную частоту $\omega_1 < \omega_{\mp}$.

ИСКУССТВЕННАЯ ТОЧКА ОТСЕЧКИ

Разделим полуполосу Π надвое и сузим задачу (1)–(3) на нижнюю половину $\Pi^{\square} = \{x \in \Pi : x_2 \in (0, 1/2)\}$ (тонирована на рис. 1б), назначив на средней линии $\Sigma_{1/2} = \{x : x_1 > 0, x_2 = 1/2\}$ искусственные краевые условия

$$u_1(x_1, 1/2) = 0, \quad \sigma_{22}(u; x_1, 1/2) = 0 \quad \text{при } x_1 > 0.$$

Продолжения решения $u \in H^1(\Pi^{\square})$, четное для компоненты u_2 и нечетное для компоненты u_1 , дают (гладкое) решение исходной задачи в цельной полуполосе Π , а точка отсечки непрерывного спектра задачи в $\Pi^{\square}$ равна

$$\omega_{\mp}^{\square} = \min \{2\pi\sqrt{\mu}, \pi\sqrt{\lambda + 2\mu}\}.$$

При коэффициенте Пуассона $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu) \in [0, 1/3]$ на пороге в уполовиненной полосе имеется аналогичная (6) волна

$$w_{\mp}^{1\square}(x_2) = \sin(2\pi x_2)e_{(1)},$$

а конструкции из второй части предыдущего раздела предоставляют собственную частоту $\omega_1^{1\square} \in (0, \omega_{\mp}^{\square})$ задачи в $\Pi^{\square}$, причем согласно описанной процедуре продолжения собственной моды она попадает в точечный спектр $\mathfrak{p}_p$ исходной задачи в Π . Справедливо строгое неравенство $\omega_1^{1\square} > \omega_1$, так как первые компоненты соответствующих собственных мод обладают разным свойством нечетности/четности относительно переменной $x_2 - 1/2$.

Если же $\nu \in (1/3, 1/2)$, то аналогичные действия с не зависящей от продольной координаты волной

$$w_{\mp}^{2\square}(x_2) = \sin(\pi x_2)e_{(2)}$$

дают собственную частоту $\omega_1^{2\square} \in (\omega_1, \omega_{\mp}^{\square})$. Для $\nu = 1/3$ полученные таким способом две частоты $\omega_1^{1\square}$ и $\omega_1^{2\square}$, вообще говоря, могут совпасть.

Остается невыясненным вопрос, попадают или нет частоты $\omega_1^{i\square}$ на интервал $(0, \omega_{\mp})$, т.е. принадлежат ли они дискретному спектру $\mathfrak{p}_d$ или

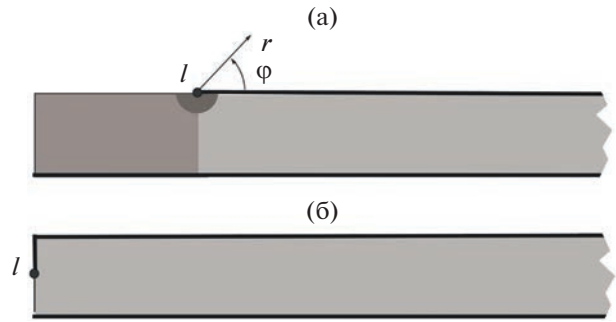


Рис. 2. (а) – Полоса с трещиной $\Upsilon(\ell)$ на верхнем основании, а также полярные координаты и вырезаемый полукруг. (б) – Трещина $\mathfrak{p}(\ell)$ длиной ℓ на торце. Жирные линии – зоны защемления границы.

оказываются вкрапленными в непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c$ задачи (1)–(3).

Отметим, что другая группа искусственных краевых условий

$$u_2(x_1, 1/2) = 0, \quad \sigma_{12}(u; x_1, 1/2) = 0 \quad \text{при } x_1 > 0 \quad (13)$$

бесполезна для обнаружения новых собственных частот посредством минимального принципа (9), так как у задачи в зауженной полуполосе $\Pi^{\square}$ с условиями (13) сохраняется точка отсечки (6).

ОТСЛОЕНИЕ ВЕРХНЕГО ОСНОВАНИЯ ПОЛУПОЛОСЫ

Пусть на рис. 2а при $\ell > 0$

$$\Gamma_D = \Sigma_- \cup \Sigma_+(\ell), \quad \Sigma_- = \{x : x_1 > 0, x_2 = 0\}, \quad (14)$$

$$\Sigma_+(\ell) = \{x : x_1 > \ell, x_2 = 1\}.$$

Иными словами, на верхнем основании $\Sigma_+ := \Sigma_+(0)$ образовалась трещина $\Upsilon(\ell) = \{x : x_1 \in (0, \ell), x_2 = 1\}$, но нижнее основание Σ_- и бесконечный участок $\Sigma_+(\ell)$ верхнего остались жестко закрепленными. Точка отсечки (6) сохранилась, а второй прием из предыдущего раздела с прежней пробной вектор-функцией (11) устанавливает непустоту дискретного спектра при всех $\ell \geq 0$. Получим дополнительную информацию о кратности $\#\mathfrak{p}_d(\ell)$ и образующих $\mathfrak{p}_d(\ell)$ собственных частотах

$$\omega_1(\ell) \leq \omega_2(\ell) \leq \dots \leq \omega_{\#\mathfrak{p}_d(\ell)}(\ell). \quad (15)$$

Они вычисляются при помощи максиминимального принципа

$$\omega_j(\ell)^2 = \max_{\mathcal{E}_j} \inf_{u \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}} \frac{E(u, u; \Pi)}{\|u; L^2(\Pi)\|^2}, \quad (16)$$

где $\mathcal{E}_j$ — любое подпространство в $H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ с размерностью $j - 1$, в частности, $\mathcal{E}_1 = H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$. Более точно, теорема 10.2.2 в [13] гарантирует следующее: если при некотором j величина из правой части (16) строго меньше $\omega_{\ddagger}^2 = \mu\pi^2$, то, во-первых, $\#p_d(\ell) \geq j$ и, во-вторых, корень квадратный из этой величины — собственная частота с номером j из списка (15). Поскольку $\mathcal{E}_j(\ell_1) \subset \mathcal{E}_j(\ell_2)$ при $\ell_1 < \ell_2$, а дробь Рэлея в формуле (16) не зависит от способа постановки краевых условий, справедливо неравенство $\omega_j(\ell_1) > \omega_j(\ell_2)$, т.е. функции

$$\ell \mapsto \omega_j(\ell) \quad (17)$$

— монотонно убывающие на лучах $(\ell_j, +\infty)$; здесь $\ell_j \geq 0$ — длина трещины, при которой происходит приращение кратности дискретного спектра (см. ниже). Убывание строгое: собственная мода $u^j(x; \ell_1)$ не может быть пропорциональна $u^j(x; \ell_2)$, так как иначе она удовлетворяет обоим краевым условиям (2) и (3) на отрезке $Y(\ell_2) \setminus Y(\ell_1)$, что противоречит упоминавшейся теореме о единственности продолжения решения системы Ламе.

Сначала получим простую, но грубую оценку кратности $\#p_d(\ell)$ дискретного спектра. С этой целью опять применим максиминимальный принцип (16) с пробными функциями

$$u^k(x) = e_{(1)} \cos\left(\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right), \quad (18)$$

$$x_1 \in (0, \ell),$$

продолженными нулем на усеченную полуполосу $\Pi^\ell = (\ell, +\infty) \times (0, 1)$ (оставлена без глубокого тонирования на рис. 2а) при сохранении класса Соболева H^1 . Вычислим дробь Рэлея при $j \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|u^j; L^2(\Pi)\|^2 &= \frac{\ell}{4}, \quad E(u^j, u^j; \Pi) = \\ &= \mu \frac{\pi^2}{4} \int_0^\ell \cos^2\left(\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{\ell}\right) dx_1 \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) dx_2 + \\ &\quad + \frac{\lambda + 2\mu}{\ell^2} \pi^2 \left(j - \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^\ell \sin^2\left(\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{\ell}\right) \times \\ &\quad \times dx_1 \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) dx_2 = \mu \frac{\pi^2}{16} \ell + \frac{\lambda + 2\mu}{4\ell} \pi^2 \left(j - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая дробь Рэлея равна

$$\mu \frac{\pi^2}{4} + (\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2}{\ell^2} \left(j - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (19)$$

и при натуральном индексе j , подчиненном соотношению

$$j < J(\ell) := \frac{1}{2} \left(1 + \ell \sqrt{\frac{3\mu}{\lambda + 2\mu}} \right),$$

правая часть формулы (16), вычисленная для вектор-функции (18), строго меньше квадрата точки отсечки (6), т.е. теорема 10.2.2 в [13], в частности, показывает, что кратность дискретного спектра $\#p_d(\ell)$, строго меньшая $J(\ell)$, неограниченно возрастает при $\ell \rightarrow +\infty$.

Обнаруженная оценка кратности неточная и ее можно улучшить для достаточно длинных трещин, вычислив асимптотику собственных частот при $\ell \rightarrow +\infty$. Для этого построим одномерную модель длинной (тонкой после масштабирования) балки $\Xi(\ell) = (0, \ell) \times (0, 1)$ (глубоко тонирована на рис. 2а) с защемленными нижним основанием и торцом $\bar{\omega}(\ell) = \{x : x_1 = \ell, x_2 \in (0, 1)\}$. Примем асимптотический анзац для собственной моды

$$\begin{aligned} u(x) &= v(\eta) e_{(1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) + V_2(x_2) e_{(2)} \frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\eta}(\eta) + \\ &\quad + V_1(x_2) e_{(1)} \frac{1}{\ell^2} \frac{dv}{d\eta}(\eta) + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\eta = x_2/\ell$ — растянутая продольная координата, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа. Подставим выражение (20) в систему (1) со спектральным параметром

$$\omega^2 = \omega_{\ddagger}^2 + \ell^{-2}\beta + \dots, \quad (21)$$

где

$$\omega_{\ddagger} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu} = \frac{1}{2} \omega_{\ddagger}. \quad (22)$$

Прделаем то же с краевыми условиями при $x_1 \in (0, \ell)$ или $\eta \in (0, 1)$. Заметив, что члены, содержащие саму функцию v , взаимно уничтожаются, соберем множители при производной $\ell^{-1} dv/d\eta$ и получим следующую скалярную задачу для компоненты V_2 :

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 V_2}{dx_2^2} - \frac{\pi^2}{4} \mu V_2 = \frac{\pi}{2} (\lambda + \mu) \cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) \quad (23)$$

при $x_2 \in (0, 1)$,

$$V_2(0) = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{dV_2}{dx_2}(1) = -\lambda. \quad (24)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_2(x_2) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

а коэффициенты

$$B = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \right)^{-1} \left(2\Lambda - \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \right) > 0, \quad (26)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

включают положительные косинус и синус, причем $\sin(\pi\Lambda/2) \leq \pi\Lambda/2 < 2\Lambda$.

В силу формулы (21) коэффициенты при ℓ^{-2} в системе (21) образуют уравнение

$$\begin{aligned} & -\mu \left(\frac{d^2 V_1}{dx_2^2} + \frac{\pi^2}{4} V_1 \right) \frac{d^2 v}{d\eta^2} = \\ & = F_1 := \left((\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \beta v \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{dV_2}{dx_2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} \quad \text{при } x_2 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Это уравнение, снабженное краевыми условиями

$$V_1(0) = 0, \quad \mu \frac{dV_1}{dx_2}(1) = G_1 := -\mu V_2(1) \frac{d^2 v}{d\eta^2}, \quad (28)$$

имеет решение в том и только в том случае, если выполнено соотношение

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) F_1(x_2) dx_2 + G_1 = 0,$$

которое приобретает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$-(\mu + b) \frac{d^2 v}{d\eta^2}(\eta) = 2\beta v(\eta) \quad \text{при } \eta \in (0, 1). \quad (29)$$

Для вычисления коэффициента

$$b = \frac{4}{\pi} (\lambda + 2\mu) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \right)^{-1} \Lambda (1 + 4\Lambda^2) Y(\Lambda) \quad (30)$$

удобно воспользоваться выкладкой

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) \frac{dV_2}{dx_2}(x_2) dx_2 = \\ & = -(\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dV_2}{dx_2}(x_2) \frac{d}{dx_2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) dx_2 - \\ & - \mu \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) \frac{dV_2}{dx_2}(x_2) dx_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 ((\lambda + 2\mu) \times \\ & \times \frac{d^2 V_2}{dx_2^2}(x_2) + \omega_{\mp}^2 V_2(x_2)) \cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) dx_2 + \\ & + (\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} \frac{dV_2}{dx_2}(0) - \mu V_2(1), \end{aligned}$$

в которой последнее подынтегральное выражение находится из уравнения (23), а внеинтеграль-

ные члены — при помощи формул (25) и (26). Фигурирующая в (30) функция

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Sigma \Lambda \mapsto Y(\Lambda) = \frac{4\Lambda}{1 + 4\Lambda^2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \quad (31)$$

имеет одну экстремальную точку $\Lambda_{\cap} \in (0, 1/2)$, монотонно возрастает на участке $(0, \Lambda_{\cap})$ и удовлетворяет соотношениям $Y(0) = 0$ и $Y(2^{-1/2}) > 0.04$. Таким образом, функция (31) и величина (30) положительные.

В искомой модели балки уравнение (29) снабжается краевыми условиями

$$\frac{dv}{d\eta}(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad (32)$$

а собственные пары задачи (29), (32) принимают вид

$$\begin{aligned} \beta_j &= (\mu + b)^2 \frac{\pi^2}{2} \left(j - \frac{1}{2}\right)^2, \\ v_j(\eta) &= \cos\left(\pi \left(j - \frac{1}{2}\right) \eta\right), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Обоснование построенных асимптотик собственных частот и мод проводится по стандартной схеме (см. публикации [15, 16, 8, 17]), а точное утверждение предоставляет для любого индекса $j \in \mathbb{N}$ такие величины $\ell(j)$ и $C(j)$, что при $\ell > \ell(j)$ собственная частота из списка (15) расположена ниже точки отсечки (6) и удовлетворяет оценке

$$\left| \omega_j(\ell) - \frac{\omega_{\mp}}{2} - \frac{\beta_j}{\omega_{\mp} \ell^2} \right| \leq \frac{C(j)}{\ell^3}. \quad (33)$$

Как и следовало ожидать, полученное ранее выражение (19) превосходит сумму $\omega_{\mp}^2 + \ell^{-2}\beta_j$. Подчеркнем особо, что увеличение номера j влечет за собой рост величин $\ell(j)$ и $C(j)$, т.е. асимптотическая формула (33) обслуживает на должном уровне лишь несколько первых членов в списке (15) — подробное изучение этого вопроса можно найти в книге [18, гл. 7], где, в частности, выявлена зависимость мажоранты в правой части оценки (33) от номера j .

Нетрудно построить и полные асимптотические разложения собственных частот и мод. Формальные бесконечные асимптотические ряды, в частности, включают члены типа пограничного слоя, описываемые решениями задачи в единичной полосе $\Pi_{\pm}$ с пороговым спектральным параметром

$$\begin{aligned} & -\mu \Delta w - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot w - \omega_{\mp}^2 w = f \\ & \text{в } \Pi_{\pm} = \mathbb{R} \times (0, 1), \end{aligned} \quad (34)$$

$$w = 0 \quad \text{при } x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = 1, \quad (35)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}(w) = g_1, \quad \sigma_{22}(w) = g_2 \quad \text{при } x_1 < 0, \\ w = 0 \quad \text{при } x_1 > 0, \quad x_2 = 0.\end{aligned}\quad (36)$$

В последнем разделе статьи будет показано, что задача (34)–(36) с финитными правыми частями f и $g = (g_1, g_2)$ однозначно разрешима в классе вектор-функций, экспоненциально затухающих при $x_1 \rightarrow +\infty$ и подчиненных на бесконечности “условию излучения”

$$\begin{aligned}w(x) = S \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) + O(e^{\delta x_1}) \\ \text{при } x_1 \rightarrow -\infty \text{ и } \delta > 0.\end{aligned}\quad (37)$$

Это обстоятельство позволяет организовать итерационный процесс построения бесконечных формальных асимптотических рядов для $\omega_j(\ell)$ и $u^j(x; \ell)$ и поочередно определить их члены при решении (неоднородных) задач (29), (30) и (34)–(36). Поправки в асимптотике собственной частоты находятся при соблюдении условия разрешимости смешанных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $(0, 1) \ni \eta$, а для продолжения с прямоугольника $\Xi(\ell)$ на полуполосу $\Pi^\ell = \Pi \setminus \overline{\Xi(\ell)}$ (см. рис. 2а) их решения можно умножить на гладкую срезающую функцию $\chi(x_1 - \ell)$, равную единице при $x_1 < \ell - 1$ и нулю при $x_1 > \ell$, — именно такое действие привнесет правые части в соотношения (34) и (36). Подчеркнем, что слагаемые типа пограничного слоя, определяемые при решении задачи в $\Pi_\pm$, затухают при $x_1 \rightarrow +\infty$ с экспоненциальной скоростью, а значит, какой-либо задачи в Π^ℓ решать не требуется.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЗОНЫ ОТСЛОЕНИЯ

В ситуации (14) придадим малое приращение $h > 0$ длине трещины $\Upsilon(\ell)$ на верхнем основании полуполосы Π и найдем главные поправочные члены асимптотик

$$\omega_j(\ell + h) = \omega_j(\ell) - h\omega_j'(\ell) + O(h^2) \quad (38)$$

собственных частот из списка (15). Согласно [10] (см. также [19], [11, гл. III, § 8], [7, гл. 7]) соответствующие собственные моды $u^j \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$, нормированные равенством

$$\|u^j; L^2(\Pi)\| = 1, \quad (39)$$

допускают около конца трещины представления

$$u^j(x; \ell) = \chi_0(r_\ell) \sum_{\pm} K_j^{\pm}(\ell) X^{\pm}(x_1 - \ell, x_2) + \tilde{u}^j(x; \ell). \quad (40)$$

Поясним обозначения. Прежде всего $(r_\ell, \varphi_\ell) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ — полярные координаты с центром в вершине $P(\ell) = (\ell, 1)$ трещины (рис. 2а), а χ_0 — гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки $r_\ell = 0$. Далее аргумент ℓ и индекс j по возможности не пишем. Вектор-функции

$$X^{\pm}(x) = r_\ell^{\pm ai + 1/2} \Phi^{\pm}(\varphi_\ell), \quad a > 0 \quad (41)$$

включают угловые части $\Phi^{\pm} \in C^\infty[0, \pi]$ и первый (с наименьшей положительной вещественной частью) корень $a = \pm ai + 1/2$ трансцендентного уравнения (см. [10] и [11, гл. III, § 8])

$$\sin^2(\pi a) = \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{(\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)} \in \left[1, \frac{4}{3}\right]. \quad (42)$$

Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений $K^{\pm}$ комплексные (ср., например, [20]), но, несмотря на присутствие в степенном решении (41) мнимой единицы i , собственную моду (40), разумеется, можно зафиксировать вещественной.

Вектор-функции (41) суть решения модельной задачи теории упругости в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{x : x_2 > 0\}$ с условиями (2) и (3) на лучах $\{x : x_1 > \ell, x_2 = 1\}$ и $\{x : x_1 < \ell, x_2 = 1\}$ соответственно. Согласно общим результатам [21] (см. также [7, гл. 3, § 2]) эта задача имеет еще одну пару решений

$$Y^{\pm}(x; \ell) = r_\ell^{\pm ai - 1/2} \Psi^{\pm}(\varphi_\ell), \quad (43)$$

для которых верны формулы

$$\begin{aligned}Q(X^{\pm}, Y^{\pm}) := R \int_{\pi}^{2\pi} \left(\overline{Y_r^{\pm}} \sigma_{rr}(X^{\pm}) + \overline{Y_\varphi^{\pm}} \sigma_{r\varphi}(X^{\pm}) - \right. \\ \left. - \overline{\sigma_{rr}(Y^{\pm})} X_r^{\pm} + \overline{\sigma_{r\varphi}(Y^{\pm})} X_\varphi^{\pm} \right) \Big|_{r=R} d\varphi = 1.\end{aligned}\quad (44)$$

Черта обозначает комплексное сопряжение, а подынтегральное выражение имеет порядок R^{-1} : форма Q возникла как одномерный интеграл в формуле Грина для оператора Ламе и потому не зависит от параметра R для решений модельной задачи в $\mathbb{R}_+^2$. Отсюда, в частности, вытекает, что $Q(X^{\mp}, Y^{\pm}) = 0$ из-за рассогласования показателей $\pm ai - 1/2$ и $\mp ai + 1/2$ у степенных решений $X^{\mp}$ и $Y^{\pm}$.

Методика дифференцирования вдоль трещин (см. изложение статьи [22] в книге [7, гл. 7, § 4], а также работу [23] для одной из задач механики трещин) устанавливает, что все степенные решения упомянутой модельной задачи в полуплоскости приобретают показатели $\pm ai + p + 1/2$, $p \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ и $\pm(q + 1)$, $q \in \mathbb{N}$. Кроме того,

имеет место следующая связь степенных решений (41) и (43):

$$\frac{\partial X^\pm}{\partial x_1}(x) = -AY^\pm(x), \quad A > 0. \quad (45)$$

Определение множителя A трудоемко – требуется найти корни уравнения (42), восстановить угловые части $\Phi^\pm, \Psi^\pm$ согласно формулам из [11, гл. III §8] и вычислить громоздкий интеграл из (44), однако положительность множителя A уже была проверена в [22, 23] при помощи асимптотического анализа задач о росте трещины. Воспроизведем сопутствующие выкладки в переложении для рассматриваемой задачи. Применим метод срачиваемых асимптотических разложений (см. монографии [24, 25]) и дополним понятное внешнее разложение

$$u(x; \ell + h) = u^0(x) + hu'(x) + \dots \quad (46)$$

внутренним разложением

$$u(x; \ell + h) = \sum_{\pm} K^\pm X^\pm(x_1 - \ell - h, x_2) + \dots, \quad (47)$$

приемлемым вблизи точки $P(\ell + h)$ и учитывающим представление (40), а также малый сдвиг вершины трещины. Преобразованная согласно связи (45) формула Тейлора

$$\begin{aligned} X^\pm(x_1 - \ell - h, x_2) &= X^\pm(x_1 - \ell, x_2) - \\ &- h \frac{\partial X^\pm}{\partial x_1}(x_1, x_2) + O(h^2) = \\ &= X^\pm(x_1 - \ell, x_2) + hAY^\pm(x_1 - \ell, x_2) + O(h^2) \end{aligned} \quad (48)$$

и процедура срачивания разложений на уровне h показывают, что поправочные члены в анзацах (38) и (46) удовлетворяют системе уравнений

$$-\mu \Delta u' - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u' = \omega^2 u' - 2\omega \omega' u^0 \text{ на } \Pi \quad (49)$$

и краевым условиям (2) и (3), а также вытекающим из (47), (48) и (45) условиям роста около вершины трещины

$$u'(x) = A \sum_{\pm} K^\pm Y^\pm(x_1 - \ell, x_2) + O(r_\ell^{1/2}) \quad (50)$$

при $x \rightarrow P(\ell)$.

Поскольку $\omega(\ell)$ – собственная частота, для существования сингулярного поля u' требуется соблюдения условия разрешимости сформированной задачи (49), (2), (3), (50). С целью его проверки умножим систему дифференциальных уравнений скалярно на вектор $\overline{u^0(x)} = \overline{u^j(x; \ell)}$ и применим формулу Грина в области

$$\Pi(R) = \{x \in \Pi : r_\ell > R\}$$

с вырезанным малым ($R \rightarrow +0$) полукругом (глубоко тонирован на рис. 2а). При учете соотношений (39) и (44) получаем, что

$$\begin{aligned} 2\omega\omega' &= 2\omega\omega' \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\Pi(R)} \overline{u^0} \cdot u^0 dx = \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\Pi(R)} \overline{u^0} \cdot (\mu \Delta u' + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u' + \omega^2 u') dx = \\ &= - \lim_{R \rightarrow +0} R \int_{\pi}^{2\pi} \left(\overline{u^0}_r \sigma_{rr}(u') + \overline{u^0}_\varphi \sigma_{r\varphi}(u') - \sigma_{rr}(\overline{u^0}) u'_r + \sigma_{r\varphi}(\overline{u^0}) u'_\varphi \right) \Big|_{r=R} d\varphi = \\ &= -Q(u', u^0) = \overline{Q(u^0, u')} = \overline{Q\left(\sum_{\pm} K^\pm X^\pm, A \sum_{\pm} K^\pm Y^\pm\right)} = A \sum_{\pm} |K^\pm|^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Обратим внимание на то, что комплексное сопряжение самой вектор-функции u^0 не нужно, но оно потребовалось в конце выкладки и не сказалось на результате.

Итак, получена следующая асимптотическая формула, согласованная с проверенной ранее монотонностью функций (17):

$$\omega_j(\ell + h) = \omega_j(\ell) - h \frac{A}{2 \omega_j(\ell)} \sum_{\pm} |K^\pm(\ell)|^2 + O(h^2).$$

Если оба коэффициента интенсивности напряжений обратились в нуль, то скорость $O(h)$ уменьшения собственной частоты замедляется по крайней мере до $O(h^3)$.

ПОРОГОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Ввиду устойчивости собственных частот (15), принадлежащих дискретному спектру, увеличение его кратности $\# p_d(\ell)$ при вариации параметра ℓ может происходить исключительно вследствие отщепления собственной частоты $\omega_j(\ell + h)$ от нижней грани непрерывного спектра (точки его отсечки (6)). Такое явление наблюдается в том случае, если у задачи (1)–(3) при $\ell = \ell_j$ возникает пороговый резонанс (см. статьи [26–29]), а именно, у задачи с пороговой частотой $\omega = \omega_j$ имеется (вещественное) решение

$$u_\dagger(x) = s_\dagger w_\dagger(x_2) + \tilde{u}_\dagger(x) \quad (52)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{y}_+$. Если $s_+ = 0$, то u_+ — захваченная волна, но в случае $s_+ \neq 0$ решение (52) стабилизируется при $x_1 \rightarrow +\infty$ к вектор-функции (8) поперечной переменной x_2 и резонанс называется правильным [28]. К сожалению, не удалось выяснить, обращается ли в нуль коэффициент s_+ для конкретных критических длин ℓ_j . Поэтому обсудим обе возможности и продемонстрируем, что качество порогового резонанса сказывается на процессе отцепления собственных частот.

При $s_+ = 0$ сохраним асимптотический анзац (38) для собственной частоты $\omega_j(\ell_j + h) \in \mathfrak{p}_d(\ell_j + h)$. Кроме того, для соответствующей собственной моды $u^j(x; \ell_j + h)$ принимаем прежние внешнее и внутреннее разложения (46) и (47), а для поправок $\omega_j' > 0$ и $u^{j'} \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ выводим задачу (49), (2), (3), (50) и при помощи выкладки (51) получаем окончательную формулу

$$\omega(\ell_j + h) = \omega_+ - h \frac{A}{2\omega_+} \sum_{\pm} |K^{\pm}(\ell_j)|^2 + O(h^2) \in (0, \omega_+). \quad (53)$$

Если коэффициенты интенсивности напряжений обратились в нуль (ср. соотношение (64) при $\mathfrak{D} \subset \Gamma_D$), то представление (53) становится малосодержательным и требуется построение младших асимптотических членов, а скорость $O(h)$ отцепления собственной частоты уменьшается до $O(h^3)$ (ср. асимптотические конструкции в работе [16]).

К сожалению, нельзя утверждать, что формула (53) остается в силе при $h < 0$, т.е. при уменьшении длины трещины. Дело в том, что в принципе возможно поднятие истинной собственной частоты вовнутрь непрерывного спектра, однако ее положение неустойчиво и заранее неизвестно, окажутся ли все младшие асимптотические члены в разложении (53) вещественными, или появится точка комплексного резонанса с малой мнимой частью (ср. [30, 17]). Впрочем, используя метод “точной настройки” параметров (см., например, [31, 29]) можно попытаться и при $h < 0$ поместить величину $\omega_j(\ell_j + h)$ на вещественную ось путем тщательного подбора профиля $H^h(x_2)$ искривленного торца $\mathfrak{D}_h$ полубесконечной полосы

$$\Pi(H^h) = \{x : x_2 \in (0, 1), x_1 > hH^h(x_2)\}. \quad (54)$$

В случае правильного порогового резонанса требуются более сложные вычисления. Начнем с построения одномерной модели колебаний тонкой упругой прокладки $\Xi(h)$ между двумя абсолютно жесткими полуплоскостями. В новом

асимптотическом анзаце (20), ингредиенты которого снабдим символом $\bullet$, производится замена $\sin(\pi x_2/2) \mapsto \sin(\pi x_2)$, учитывающая условия заземления (2) на обеих сторонах прокладки. Кроме того, функции V_2^* и V_1^* находятся из задач (23), (24) и (27), (28), в которых вместо дроби $\pi/2$ всюду фигурирует число π и последние условия Неймана заменены условиями Дирихле $V_2^*(1) = 0$ и $V_1^*(1) = 0$. Таким образом, получаем выражение

$$V_2^*(x_2) = \pi^{-1} (\cos(\pi x_2) - \cos(\pi \Lambda x_2) + (\sin(\pi \Lambda))^{-1} (1 + \cos(\pi \Lambda)) \sin(\pi \Lambda x_2)) \quad (55)$$

с прежним коэффициентом $\Lambda < 1$ из (26) и положительной величиной $\sin(\pi \Lambda)$. Наконец, условие разрешимости задачи для V_1 принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения (29) с новым коэффициентом

$$b^* = 4(\lambda + 2\mu) \frac{\Lambda}{\pi} \frac{1 + \cos(\pi \Lambda)}{\sin(\pi \Lambda)} > 0. \quad (56)$$

В искомой модели упругой прокладки $\Xi(\ell)$ уравнение (29) снабжается условиями в точках $\eta = 0$ и $\eta = 1$, имитирующими краевые условия на торцах $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}(\ell)$, однако далее будут востребованы два факта, которые благодаря проведенным вычислениям вытекают из общих результатов [19], [7, гл. 3, § 1] и [33, гл. 9]. Во-первых, на пороговой частоте ω_+ у задачи в цельной полосе $\Pi_+ = \mathbb{R} \times (0, 1)$ с условиями Дирихле (2) на боковых сторонах помимо ограниченной волны (8) имеется линейно растущая волна

$$w_+^1(x) = x_1 w_+(x_2) + e_{(2)} V_2^*(x_2), \quad (57)$$

но других полиномиально зависящих от переменной x_1 волн нет.

Во-вторых, у той же задачи в Π_+ на частоте

$$\omega(\ell_j + h) = \omega_+ - h^2 \omega'' + O(h^2) \in (0, \omega_+) \quad (58)$$

имеются две медленно растущие при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ волны

$$w^{\pm}(x; h) = e^{\pm \kappa(h) x_1} W^{\pm}(x; h) e^{\pm \kappa(h) x_1} \times (\sin(\pi x_2) e_{(1)} \pm \kappa(h) V_2^*(x_2) e_{(2)} + \kappa(h)^2 V_1^*(x_2) e_{(1)} + \dots) = \sin(\pi x_2) e_{(1)} \pm \kappa(h) (x_1 \sin(\pi x_2) e_{(1)} + V_2^*(x_2) e_{(2)}) + \dots, \quad (59)$$

где V_2^* — функция (55), V_1^* — решение видоизмененной указанным выше способом задачи (27), (28) и

$$\kappa(h) = \kappa_0 h + O(h^2), \quad \kappa_0 = 2 \sqrt{\frac{\omega_+ \omega''}{\mu + b^*}} > 0. \quad (60)$$

Формальная проверка того, что вектор-функции (57) и (59) удовлетворяют задачам в полосе Π_- , производится непосредственными вычислениями.

Поскольку в формуле (58) пороговой частоте ω_+ предписано возмущение $O(h^2)$, слагаемое u' из внешнего разложения (46) удовлетворяет системе (1) с параметром $\omega = \omega_+$, краевым условиям (2), (3) и условиям роста (50), полученным в результате срачивания с внутренним разложением (47) около точки $P(\ell_j + h)$. Из-за наличия ограниченного решения (52) полученная задача имеет только линейно растущее на бесконечности решение

$$u'(x) = s_1 w_+^1(x) + s_0 u_+(x) + \tilde{u}'(x) \quad (61)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{u}'$, произвольным коэффициентом s_0 и коэффициентом s_1 при линейной волне (57), вычисляемом при помощи усложненной выкладки (51). Именно,

$$\begin{aligned} 0 = & -Q(u', u^0) + \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{j=1,2} \left(\sigma_{1j}(u'; T, x_2) \overline{u_j^0(T, x_2)} - \right. \\ & \left. - \overline{\sigma_{1j}(u_j^0; T, x_2)} u_j'(T, x_2) \right) dx_2 = A \sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2 + \\ & + s_1 s_+ \int_0^1 ((\lambda + 2\mu) \sin(\pi x_2) + \\ & + \lambda \frac{dV_2}{dx_2}(x_2)) \sin(\pi x_2) - \mu \pi \cos(\pi x_2) V_2(x_2) dx_2 \end{aligned} \quad (62)$$

и, следовательно,

$$s_1 = -\frac{2}{\mu + b} \cdot \frac{A}{s_+} \sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2. \quad (63)$$

Пояснение: применили формулу Грина в прямоугольнике $\Xi(T)$ с вырезанным полукругом малого радиуса с центром $P(\ell_j)$, а интегралы по полукружности и отрезку $\{x : x_1 = T, x_2 \in (0, 1)\}$ вычислили при помощи разложений (50), (40) с коэффициентами интенсивности $K_{\mp}^{\pm}$ и представлений (52), (61), (57), причем при нахождении последнего интеграла из (62) повторили выкладку, приведшую к выражению (56).

Слагаемые u^0 и u' не затухают при $x_1 \rightarrow +\infty$, а значит, анзац (46) нуждается в исправлении на больших расстояниях от конца $P(\ell_j + h)$ трещины $\Upsilon(\ell_j + h)$. Следуя работам [16, 32], срастим его с разложением

$$u(x; \ell_j + h) = s_+(h) w^-(x; h) + \dots,$$

содержащим множитель $s_+(h) = s_+ + O(h)$ и волну (59), равную $O(e^{-\kappa(h)x_1})$ и содержащую малый, но положительный показатель (60). Таким образом, представление (61) свойственно именно захваченной волне. Соотношение $s_1 = -s_+ K_0$ (важен знак минус), появившееся в результате срачивания, в силу формул (60) и (63) предоставляет поправочный член в анзаце (58) для собственной частоты:

$$\omega'' = \frac{1}{\mu + b} \cdot \frac{1}{\omega_+} \cdot \frac{1}{s_+^2} \left(\sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2 \right)^2.$$

Итак, в случае правильного порогового резонанса собственная частота отцепляется от порога с меньшей скоростью $O(h^2)$, чем в случае захваченной волны (52), $s_+ = 0$. Если оба коэффициента интенсивности напряжений $K_{\mp}^{\pm}$ обратились в нуль, то скорость снижается по крайней мере до $O(h^4)$ — для ее вычисления требуются младшие асимптотические члены (ср. публикации [16, 32]). В рассмотренной задаче при условии $\mathfrak{D} \subset \Gamma_N$ аналитически определить кратность порогового резонанса не удастся. Если же $\Gamma_N = \Upsilon(\ell)$ и $\mathfrak{D} \subset \Gamma_D$, то все выкладки и рассуждения из предыдущих разделов нуждаются лишь в незначительных изменениях, например, первое краевое условие Неймана в (32) для одномерных моделей балки $\Xi(\ell)$ становится условием Дирихле $v(0) = 0$. Вместе с тем совмещение выкладок (7) и (51), примененных к ограниченному пороговому решению (52) и его производной $u'_+ = \partial u_+ / \partial x_1$, затухающей при $x_1 \rightarrow +\infty$, приводит к равенству

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 \right) dx_2 - \\ & - A \sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, оба коэффициента интенсивности напряжений у решения u_+ обратиться в нуль не могут. Следовательно, по понятной причине кратность порогового резонанса не превосходит двух.

ЧАСТИЧНОЕ ЗАКРЕПЛЕНИЕ ТОРЦА

Пусть на рис. 26

$$\Gamma_N = \mathfrak{U}(\ell) := \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, \ell)\} \quad (65)$$

при $\ell \in (0, 1)$,

т.е. краевое условие (3) поставлено только на части $\mathfrak{U}(\ell)$ торца $\mathfrak{D}$ полуполосы Π . В первом разделе

было показано, что при $\ell = 0$ (вся граница $\partial\Pi$ жестко закреплена) дискретный спектр $\mathfrak{p}_d(\ell)$ пустой, но при $\ell = 1$ в нем присутствуют собственные частоты (15) (однако их количество $\#\mathfrak{p}_d(\ell)$ осталось неизвестным). Подчеркнем, что в данном разделе формулам, использованным ранее при анализе отслоения верхнего основания полуполосы, теперь придается новый смысл. Например, максиминимальный принцип (16) доказывает, что функции (17) монотонно убывают на интервале $(\ell_j, 1)$, где величина $\ell_j > 0$ характеризуется поднятием собственной частоты $\omega_j(\ell)$ на порог ω_+ и образованием порогового резонанса. Таким образом, существует зависящий от коэффициента Пуассона $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu) \in [0, 1/2)$ размер $\ell_*(\nu) \in (0, 1)$, для которого $\mathfrak{p}_d(\ell) = \emptyset$ при $\ell < \ell_*(\nu)$, но $\#\mathfrak{p}_d(\ell) > 0$ при $\ell > \ell_*(\nu)$. Правомерна гипотеза: первый пороговый резонанс правильный, так как наличие быстро затухающей моды на низких частотах сомнительно. К сожалению, автор не нашел строгого подтверждения этого факта. Вычисление критического размера $\ell_*(\nu)$ — также открытый вопрос.

ЦЕЛИКОМ ОТСЛОИВШЕЕСЯ ВЕРХНЕЕ ОСНОВАНИЕ

Рассмотрим задачу (1)–(3) при условиях (убрали верхнюю жирную черту на рис. 26)

$$\Sigma_+ \cup \Upsilon(\ell) \subset \Gamma_N, \quad \Sigma_-(\ell) \subset \Gamma_D, \quad \ell \geq 0.$$

В этом случае точка отсечки принимает вид (22), но все приведенные ранее результаты и приемы анализа остаются в силе с понятными изменениями. В частности, у задачи (1)–(3) при $\Gamma_D = \Sigma_-$ имеется собственная частота ω_+ ниже точки отсечки (22). Таким образом, одномерная модель (29), (32) не полностью описывает спектр конечной балки $\Xi(\ell)$, зашечленной вдоль $\Sigma_-(\ell) \cup \mathfrak{W}(\ell)$, а именно, ниже серии собственных частот, описываемых формулами (21) и (33), обнаружена по крайней мере одна собственная частота $\omega_+ < \omega_+$ с собственной модой, сугубо локализованной около торца $\mathfrak{W}$.

В задаче о полуполосе с длинной трещиной $\Upsilon(\ell) \subset \Sigma_+$, т.е. при $\Gamma_D = \Sigma_-(\ell) = \{x : x_1 > \ell, x_2 = 0\}$, дискретный спектр становится весьма обильным, так как в модельной задаче о колебаниях балки $\Xi(\ell)$ с единственно зашечленным торцом $\mathfrak{W}(\ell)$ появляются две серии собственных частот

$$\frac{1}{\ell^2} \sqrt{\beta_j^{(2)}} + \dots \quad \text{и} \quad \frac{1}{\ell} \sqrt{\beta_j^{(1)}} + \dots,$$

в которых фигурируют собственные числа задач о поперечных и продольных колебаниях одномер-

ной балки Кирхгофа соответственно (см., например, [7, гл. 1 §3]):

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 v^{(2)}}{d\eta^4}(\eta) &= \beta^{(2)} v^{(2)}(\eta), \quad \eta \in (0, 1), \\ \frac{d^3 v^{(2)}}{d\eta^3}(0) &= \frac{d^2 v^{(2)}}{d\eta^2}(0) = 0, \\ \frac{dv^{(2)}}{d\eta}(1) &= v^{(2)}(1) = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

и

$$\begin{aligned} 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 v^{(1)}}{d\eta^2}(\eta) &= \beta^{(1)} v^{(1)}(\eta), \quad \eta \in (0, 1), \\ \frac{dv^{(1)}}{d\eta}(0) &= 0, \quad v^{(1)}(1) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $D = \frac{\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$ — цилиндрическая жесткость упругой балки-полосы.

ПОЛУПОЛОСА С ПОЛНОСТЬЮ СВОБОДНЫМ КРАЕМ

При $\Gamma_N = \partial\Pi$ и $\Gamma_D = \emptyset$ (полностью убрали жирную черту на рис. 1а) непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c$ — замкнутая полуось $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$, а дискретный спектр заведомо пуст. Вместе с тем известно [34], что при $\lambda = 0$, т.е. нулевом коэффициенте Пуассона $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$, у системы Ламе (1) в полуполосе Π с краевым условием Неймана (3) на всей ее границе $\partial\Pi$ существует собственная частота ω_+ , вкрапленная в непрерывный спектр. Вместе с тем при увеличении ν это собственное число исчезает, превращаясь в точку комплексного резонанса (см. [30, 17]), однако при малом $\nu = h \in (0, h_0]$ с некоторым $h_0 > 0$ можно предсказать (результат не опубликован) существование такого профиля H^h искривленного торца полуполосы (54) или ее боковых сторон, что в непрерывном спектре сохраняется собственная частота $\omega_+(h) = \omega_+ + O(h)$.

Стационарной ($\omega = 0$) задаче Неймана (1), (3) в прямой полуполосе $\Pi = \mathbb{R} \times (0, 1)$ удовлетворяют три жестких смещения, поворот и трансляции,

$$\theta(x) = x_1 e_{(2)} - x_2 e_{(1)} \quad \text{и} \quad e_{(1)} = (1, 0), \quad e_{(2)} = (0, 1), \quad (67)$$

а также полиномиальные поля

$$\begin{aligned}
& \frac{x_1^2}{2} e_{(1)} - x_1 x_2 e_{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{24} \right) e_{(2)} \text{ и} \\
& x_1 e_{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} x_2 e_{(2)}, \\
& \frac{x_1^3}{6} e_{(1)} - \frac{x_1^2}{2} x_2 e_{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{24} \right) x_1 e_{(2)} + \\
& + \left(\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_2^3}{6} - \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_2}{24} \right) e_{(1)},
\end{aligned} \quad (68)$$

отвечающие изгибающему моменту и силам, продольной и перерезывающей. Согласно терминологии [28] наличие в списке (68) квадратичного и кубического полиномов означает, что пороговый ($\omega_{\text{г}} = 0$) резонанс в обсуждаемой задаче – вырожденный. Подчеркнем, что в рассмотренных ранее задачах резонансы на порогах (6) и (22) невырожденные, так как на пороговой частоте имеются только решения (8) и (57) с не более чем линейным ростом при $x_1 \rightarrow \infty$. Изменение качества порогового резонанса провоцирует еще один эффект при вариации данных задачи.

Как уже упоминалось в разделе, посвященном резонансам на пороге (6), околопороговая частота (53) или (58) возникает при увеличении длины трещины, и только в случае порогового резонанса, порожденного захваченной волной (52) при $s_{\text{г}} = 0$, точка $\omega_{\text{г}} \in \mathfrak{p}_p(\ell_j)$ может подняться в непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c(\ell_j - h)$, причем для этого требуется точная настройка профиля искривленного торца полуполосы (54).

Единственно возможное “сползание вниз” собственной частоты с порога – общее свойство невырожденных собственных пороговых резонансов. По другому дело обстоит в случае вырожденного порога, а именно, в статье [32] реализован эффект “поднятия” собственной частоты с нулевого порога, вырожденного в силу богатого набора (67), (68) решений задачи (1), (3) в полуполосе Π .

Поясним природу неожиданного феномена. В случае невырожденного порога на околопороговых частотах $\omega = \omega_{\text{г}} + \beta$, т.е. при малом $\beta > 0$, решением одномерной модели (52) (уравнение второго порядка) служат только осциллирующие волны $e^{\pm i x_1 \sqrt{2\beta/(\mu+b)}}$, из которых соорудить захваченную волну невозможно. Вместе с тем в модели Кирхгофа список решений уравнения (66) четвертого порядка с параметром $\beta^{(2)} = \omega^4$

$$e^{\pm i \omega x_1 \sqrt[4]{1/D}} \text{ и } e^{\pm \omega x_1 \sqrt[4]{1/D}}$$

содержит одно затухающее при $x_1 \rightarrow +\infty$ – именно оно и служит начинателем захваченной волны. Поскольку в рассматриваемом случае собственная частота принадлежит непрерывному спектру $\mathfrak{p}_c = [0, +\infty)$, для ее сохранения потребовалась точная настройка параметров задачи, а именно, – тщательно подобранные искривленный торец полуполосы (54) и переменная плотность материала $\rho(x; \omega)$ на конечной ее части (подробности см. в статье [32]). Многие вопросы спектрального анализа вырожденных порогов остаются открытыми.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

На первый взгляд кажется, что заимствованный из статьи [8] и восходящий к работе [9] прием дифференцирования по переменной x_1 указывает на отсутствие захваченных волн в задаче (1)–(3) при $\Gamma_N = \Upsilon(\ell)$. Этот факт противоречил бы проверенной непустоте дискретного спектра $\mathfrak{p}_a(\ell)$. Однако прежняя аргументация не годится из-за корневой сингулярности производной u' в вершине трещины: неприемлемое соотношение (7) превращается во вполне возможное (64). В случае $\Gamma_D = \{x \in \partial\Pi : x_1 < \ell\}$ благодаря перемене позиций зон Неймана и Дирихле формула (64) снова превращается в непозволительное равенство

$$0 = \int_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 + \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 \right) dx_2 + A \sum_{\pm} |K^{\pm}|^2. \quad (69)$$

Таким образом, при жесткой заделке торца полуполосы или его окрестности захваченных мод нет на любой частоте. Наконец, для трещины $\Gamma_N = \{x : x_1 \in (a, a + \ell), x_2 = 0\}$, удаленной ($a > 0$) от торца, появление собственных частот в дискретном спектре действительно возможно, так как в аналогичном (64) и (69) равенстве возникают суммы квадратов модулей коэффициентов ин-

тенсивности в точках $(a, 1)$ и $(a + \ell, 1)$ с разными знаками.

Дифференцирование по переменной x_1 полезно и при исследовании задачи о пограничном слое около вершины трещины. Эта задача (34)–(36) в цельной полосе $\Pi_{\infty} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ с финитными правыми частями f и g имеет решение (37) в том и только в том случае, если нет захваченных волн.

Пусть $u \in H^1(\Pi_-)$ – такая волна, конечно же, не-тривиальная. Выкладка (7) для вектор-функций u и $u' = \partial u / \partial x_1$ в области $\{x \in \Pi_- : r > R\}$ показывает, что $A|K^+(\ell)|^2 + A|K^-(\ell)|^2 = 0$. Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений у волны u , равны нулю, и поэтому ее производная u' остается в классе Соболева $H^1(\Pi_-)$ и становится захваченной волной. У нее опять-таки нулевые коэффициенты интенсивности, т.е. в разложении вектор-функции u , около начала координат $\mathcal{O}$ отсутствуют и слагаемые порядка $r^{\pm ia+3/2}$. По индукции проверяем, что все члены (сходящегося) ряда по степеням радиальной переменной (см. комментарии, предшествовавшие формуле (45)) аннулируются, т.е. $u = 0$ в окрестности точки $\mathcal{O}$, что невозможно в силу уже неоднократно упоминавшейся теоремы о единственности продолжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. Камоцкий И.В., Назаров С.А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга, 1999. С. 105–148.
4. Cardone G., Durante T., Nazarov S.A. The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends // SIAM J. Math. Anal. 2010. V. 42. 6. P. 25812013–2609.
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
6. Слепян Л.И. Механика трещин. М.: Судостроение, 1981.
7. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
8. Назаров С.А. Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. 5. С. 8792013–895.
9. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
10. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension // J. Appl. Mech. 1952. V.19. 4. P. 526–528.
11. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
12. Leis R. Initial boundary value problems of mathematical physics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1986.
13. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 4 с.
14. Камоцкий И.В., Назаров С.А. Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // Матем. заметки. 2003. Т. 73. 1. С. 138–140.
15. Назаров С.А. Локализованные волны в Т-образном волноводе // Акуст. журн. 2010. Т. 56. 6. С. 747–758.
16. Назаров С.А. Волны, захваченные тонким искривленным экраном в волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58. 6. С. 6832013–691.
17. Назаров С.А. Обострение и сглаживание околополюсовых аномалий Вуда в акустическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. 5. С. 5342013–546.
18. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002. 408 с.
19. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
20. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. Stress-intensity factors and complex path-independent integrals // Transactions of the ASME. 1980. V. 47. P. 342–346.
21. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
22. Назаров С.А. Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
23. Назаров С.А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикладная матем. и механика. 2005. Т. 69. 3. С. 520–532.
24. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
25. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 36 с.
26. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. 2. P. 5332013–559.
27. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. 3. P. 718–752.
28. Назаров С.А. Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. 6. С. 73–130.
29. Назаров С.А. Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор) // Акуст. журн. 2020. Т. 66. 5. С. 4892013–508.
30. Aslanyan A., Parnovski L., Vassiliev D. Complex resonances in acoustic waveguides // Q. J. Mech. Appl. Math. 2000. V. 53. P. 429–447.
31. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. 3. С. 37–53.
32. Назаров С.А. Построение захваченной волны на низких частотах в упругом волноводе // Функциональный анализ и его приложения. 2020. Т. 54. 1. С. 41–57.
33. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. R8 с.
34. Roitberg I., Vassiliev D., Weidl T. Edge resonance in an elastic semi-strip // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51. 1. P. 1–13.