

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1,539.3

ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ ЛЭМБА ДЛЯ БОЛЬШИХ ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ

© 2024 г. В. В. Мокряков*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, пр-т Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия

*e-mail: mokr@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 27.08.2023 г.

После доработки 13.12.2023 г.

Принята к публикации 19.12.2023 г.

Рассмотрены симметричные волны Лэмба с фазовой скоростью, превышающей скорость волн расширения в бесконечной среде. Доказано, что в этом диапазоне фазовых скоростей возможны внутренние волны, т.е. решения волнового уравнения, которые имеют нулевые значения компонент деформаций и напряжений на поверхности и при этом ненулевые их значения внутри пластины. Вычислены параметры внутренних волн (фазовая скорость, частота, длина волны), а также доказано, что частоты внутренних волн одной фазовой скорости образуют арифметическую прогрессию. Рассмотрены несколько внутренних волн, представлены сечения соответствующих деформированных пластин, распределения максимальных величин растяжения и сдвига.

Ключевые слова: волна Лэмба, внутренняя волна, упругость, коэффициент Пуассона, напряженно-деформированное состояние, неограниченная пластина, локализация напряжений

DOI: 10.31857/S0320791924020025, EDN: YNWND0

ОБОЗНАЧЕНИЯ:			
i	мнимая единица	u_i	компоненты вектора смещений
x, y, z	координаты декартовой системы координат	ε_{ij}	компоненты тензора деформаций
a	полутолщина пластины	Δ	первый инвариант тензора деформаций
ρ	плотность материала пластины	σ_{ij}	компоненты тензора напряжений
E	модуль Юнга	σ_1	первое главное напряжение (максимальное растяжение)
ν	коэффициент Пуассона	σ_l	максимальный сдвиг
λ, μ	параметры Ламе	u_z	поверхностная амплитуда волны
ω	круговая частота	Также используются следующие сокращения и соотношения:	
γ	круговое волновое число		
l	длина волны		
$\Omega = \gamma x - \omega t$	фаза волны в точке x в момент t		
$c = \omega/\gamma$	фазовая скорость		
$c_0 = \sqrt{E/\rho}$	скорость бесконечно длинных волн в бесконечном стержне		
$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$	скорость волн расширения в бесконечной среде		
$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$	скорость волн сдвига в бесконечной среде		
$c_L = c_2\sqrt{2}$	скорость Ламе		
c_R	скорость волн Рэлея (поверхностных волн в полупространстве)		

$$\alpha = \gamma\sqrt{c^2/c_1^2 - 1}, \quad \beta = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1}, \quad (1)$$

$$c_1^2 = c_0^2 \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{c_0^2}{2(1 + \nu)}, \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \rho(c_1^2 - 2c_2^2); \quad (3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \rho c_2^2.$$

ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные тензодатчики [1, 2] широко используются для контроля напряженно-деформированного состояния. Исходя из их устройства, их применение оптимально для измерения деформаций статических или медленно меняющихся. Использование поверхностных тензодатчиков обосновано тем, что статические и квазистатические уравнения теории линейной упругости являются эллиптическими, т.е. максимальные значения компонент напряжений и деформаций находятся на границе рассчитываемой области, иначе говоря, на поверхности контролируемого объекта [3].

Тем не менее, если компоненты деформации изменяются быстро, влиянием инерции материала пренебречь нельзя. Волновые уравнения упругости являются гиперболическими, т.е. деформации и напряжения могут локализоваться в глубине материала, многократно превышая значения на поверхности.

В работе [4] обнаружено семейство симметричных волн Лэмба, фазовая скорость которых соответствует скорости Ламе [5], и обладающих отличительным свойством: их напряжения и деформации на поверхности пластины равны нулю (далее такие волны называются внутренними).

Уравнения, полученные Лэмбом [6], описывают поведение упругой волны, распространяющейся в неограниченной толстой пластине. Их подробное решение можно найти у более поздних авторов, например, [7–9].

Поскольку пластины широко используются как конструкционный элемент, ряд исследователей изучает распространение волн Лэмба в средах с различными свойствами, таких как анизотропность [10] или анизотропность [11]. Представляет интерес также поведение упругих волн в неоднородных средах: функционально-градиентных [12, 13], многослойных [14–16] и пр. К классу таких задач можно отнести задачи о пластине, погруженной в жидкую или газообразную среду [17].

Кроме того, волны Лэмба могут применяться для обследования конструкций [1]. Многие исследователи (например, [18–23]) изучают поведение упругих волн в пластинах, содержащих разнообразные дефекты.

Внутренние волны Лэмба, такие как в [4], могут создавать концентрации напряжений в толще пластины и не вызывать поверхностных напряжений и деформаций, иначе говоря, поверхностные датчики могут не обнаружить их распространение.

В представленной работе доказано существование внутренних симметричных волн Лэмба с фазовыми скоростями больших значений, чем обнаруженные в [4], проведен расчет их характеристик и отмечены их особенности.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для симметричных волн Лэмба (в данном исследовании ограничиваемся положительными значениями коэффициента Пуассона) смещения могут быть представлены следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} u_x &= [-A\gamma \cos(\alpha z) + iB\beta \cos(\beta z)] \sin \Omega, \\ u_z &= [-A\alpha \sin(\alpha z) - iB\gamma \sin(\beta z)] \cos \Omega, \\ u_y &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В данной работе рассматриваются волны с фазовой скоростью, большей c_1 , поэтому величины α и β действительны, отсюда константы A и iB также должны быть действительны.

Исходя из определения деформаций, получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= [-A\gamma^2 \cos(\alpha z) + iB\gamma\beta \cos(\beta z)] \cos \Omega, \\ \varepsilon_{zz} &= [-A\alpha^2 \cos(\alpha z) - iB\gamma\beta \cos(\beta z)] \cos \Omega, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xz} = \left[A\gamma\alpha \sin(\alpha z) - \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2)iB \sin(\beta z) \right] \sin \Omega,$$

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -A(\gamma^2 + \alpha^2) \cos(\alpha z) \cos \Omega.$$

Из закона Гука получаем выражения для распределения напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu \left[-A(\beta^2 - 2\alpha^2 + \gamma^2) \cos(\alpha z) + 2iB\gamma\beta \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{yy} &= -A\mu(\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2) \cos(\alpha z) \cos \Omega, \\ \sigma_{zz} &= \mu \left[A(\gamma^2 - \beta^2) \cos(\alpha z) - 2iB\gamma\beta \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{xz} &= \mu \left[2A\gamma\alpha \sin(\alpha z) + iB(\gamma^2 - \beta^2) \sin(\beta z) \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Дисперсионное соотношение находится из граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=\pm a} &= -\mu \left[A(\beta^2 - \gamma^2) \cos(\alpha a) + 2iB\gamma\beta \cos(\beta a) \right] \cos \Omega = 0, \\ \sigma_{xz}|_{z=\pm a} &= \mp \mu \left[2A\gamma\alpha \sin(\alpha a) - iB(\beta^2 - \gamma^2) \sin(\beta a) \right] \sin \Omega = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда получаем отношение коэффициентов:

$$\frac{A}{iB} = -\frac{2\gamma\beta\cos(\beta a)}{(\beta^2 - \gamma^2)\cos(\alpha a)} = \frac{(\beta^2 - \gamma^2)\sin(\beta a)}{2\gamma\alpha\sin(\alpha a)} \quad (8)$$

и дисперсионное соотношение (ДС):

$$\begin{aligned} & (\beta^2 - \gamma^2)^2 \cos(\alpha a) \sin(\beta a) + \\ & + 4\gamma^2 \alpha \beta \sin(\alpha a) \cos(\beta a) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

РАСЧЕТ СМЕЩЕНИЙ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ

Чтобы получить внутренние волны, нужно приравнять к нулю на поверхности ($z = \pm a$) не только σ_{zz} , σ_{xz} , но и σ_{xx} , σ_{yy} :

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx}|_{z=\pm a} = \\ & = \mu \left[-A(\beta^2 - 2\alpha^2 + \gamma^2)\cos(\alpha a) + \right. \\ & \quad \left. + 2iB\gamma\beta\cos(\beta a) \right] \cos\Omega = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{yy}|_{z=\pm a} = -A\mu(\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2) \times \\ & \quad \times \cos(\alpha a) \cos\Omega = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -A(\beta^2 - 2\alpha^2 + \gamma^2)\cos(\alpha a) + 2iB\gamma\beta\cos(\beta a) = 0, \\ A(\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2)\cos(\alpha a) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим второе уравнение. Оно представляет собой произведение трех множителей, соответственно, приравнивание любого из множителей к нулю дает его решение.

Приравнивание к нулю множителя A приводит к тому, что, исходя из ДС, B тоже должно быть равно нулю, но тогда получаем тривиальное решение, не представляющее интереса.

Множитель

$$\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2 = \gamma^2 \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 2\frac{c^2}{c_1^2} \right) = \gamma^2 \frac{c^2}{c_2^2} \frac{v}{1-v} \quad (12)$$

положителен, так как в данной работе рассматриваются материалы с положительным коэффициентом Пуассона.

Тогда единственное нетривиальное решение второго уравнения имеет вид

$$\cos(\alpha a) = 0. \quad (13)$$

Отсюда из первого уравнения получаем

$$\cos(\beta a) = 0. \quad (14)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \alpha a &= \frac{\pi}{2}(2n_1 + 1) = \frac{\pi}{2}N_1; \\ \beta a &= \frac{\pi}{2}(2n_2 + 1) = \frac{\pi}{2}N_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где n_1, n_2 — неотрицательные целые числа, N_1, N_2 — нечетные натуральные числа.

Отметим, что

$$\sin(\alpha a) = (-1)^{n_1}; \quad \sin(\beta a) = (-1)^{n_2}. \quad (16)$$

Учитывая (1), получаем выражения для фазовой скорости, волнового числа и круговой частоты внутренней волны:

$$c^2 = c_1^2 c_2^2 \frac{N_2^2 - N_1^2}{c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2}, \quad (17)$$

$$\gamma^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2}{c_1^2 - c_2^2}, \quad (18)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{4a^2} c_1^2 c_2^2 \frac{N_2^2 - N_1^2}{c_1^2 - c_2^2}. \quad (19)$$

Из формулы (18) делаем вывод, что отношение индексов должно удовлетворять следующему неравенству:

$$c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2 > 0 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} > \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2-2v}{1-2v}}. \quad (20)$$

Из формул (8) и (16) получим отношение коэффициентов A и iB для внутренней волны:

$$\frac{A}{iB} = \frac{(\beta^2 - \gamma^2)(-1)^{n_2}}{2\gamma\alpha(-1)^{n_1}} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma\alpha} (-1)^{n_1+n_2}. \quad (21)$$

Рассмотрим смещения в данном случае:

$$\begin{aligned} u_x &= -A\gamma \left[\cos(\alpha z) - \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 - \gamma^2} \times \right. \\ & \quad \left. \times (-1)^{n_1+n_2} \cos(\beta z) \right] \sin\Omega, \\ u_z &= -A\alpha \left[\sin(\alpha z) + \frac{2\gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \times \right. \\ & \quad \left. \times (-1)^{n_1+n_2} \sin(\beta z) \right] \cos\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая (13) и (14), получаем, что на поверхности u_x также равно нулю, как и деформации и напряжения. На поверхности остается единственная ненулевая компонента:

$$u_z|_{z=\pm a} = -A(-1)^{n_1} \alpha \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \cos \Omega. \quad (23)$$

Обозначим амплитуду волны на поверхности как $\hat{u}_z$ (для простоты допустим отрицательную величину амплитуды, в этом случае будем считать, что волна находится в противофазе):

$$\hat{u}_z = -A(-1)^{n_1} \alpha \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2}. \quad (24)$$

Соответственно

$$A = -\hat{u}_z \frac{(-1)^{n_1}}{\alpha} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}; \quad (25)$$

$$iB = -\hat{u}_z (-1)^{n_2} \frac{2\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Теперь можно записать смещения через поверхностную амплитуду $\hat{u}_z$:

$$u_x = \frac{\hat{u}_z \gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \left[\frac{(-1)^{n_1}}{\alpha} (\beta^2 - \gamma^2) \cos(\alpha z) - \right. \left. -2\beta(-1)^{n_2} \cos(\beta z) \right] \sin \Omega, \quad (26)$$

$$u_z = \frac{\hat{u}_z}{\beta^2 + \gamma^2} \left[\frac{(-1)^{n_1}}{\alpha} (\beta^2 - \gamma^2) \sin(\alpha z) + \right. \left. +2\gamma^2(-1)^{n_2} \sin(\beta z) \right] \cos \Omega.$$

Используя формулы (15) и (18), получаем:

$$u_x = \hat{u}_z \frac{\sqrt{(c_1^2 - c_2^2)(c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2)}}{c_1^2 (N_2^2 - N_1^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{c_1^2 N_1^2 + (c_1^2 - 2c_2^2) N_2^2}{(c_1^2 - c_2^2) N_1} (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) - \right. \left. -2N_2(-1)^{n_2} \cos(\beta z) \right] \sin \Omega, \quad (27)$$

$$u_z = \frac{\hat{u}_z}{c_1^2 (N_2^2 - N_1^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{c_1^2 N_1^2 + (c_1^2 - 2c_2^2) N_2^2}{(c_1^2 - c_2^2) N_1} (-1)^{n_1} \sin(\alpha z) + \right. \left. +2(c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2) (-1)^{n_2} \sin(\beta z) \right] \cos \Omega.$$

Применяя (2), также можно получить смещения в зависимости от коэффициента Пуассона:

$$u_x = \hat{u}_z \frac{\sqrt{(1-2\nu)N_2^2 - (2-2\nu)N_1^2}}{(1-\nu)N_1(N_2^2 - N_1^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{((1-\nu)N_1^2 + \nu N_2^2)(-1)^{n_1} \cos(\alpha z) -}{-N_1 N_2 (-1)^{n_2} \cos(\beta z)} \right] \sin \Omega, \quad (28)$$

$$u_z = \frac{\hat{u}_z}{(1-\nu)(N_2^2 - N_1^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{((1-\nu)N_1^2 + \nu N_2^2) \times}{\times (-1)^{n_1} \sin(\alpha z) +} \right. \left. + \frac{((1-2\nu)N_2^2 - (2-2\nu)N_1^2) \times}{\times (-1)^{n_2} \sin(\beta z)} \right] \cos \Omega.$$

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ

Используя формулы (25), получим следующий вид напряжений:

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu \hat{u}_z}{\beta^2 + \gamma^2} \left[\frac{1}{\alpha} (\beta^2 - \gamma^2) (\beta^2 - 2\alpha^2 + \gamma^2) \times \right. \left. \times (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) - \right. \left. -4\gamma^2 \beta (-1)^{n_2} \cos(\beta z) \right] \cos \Omega,$$

$$\sigma_{yy} = \mu \hat{u}_z \frac{1}{\alpha} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} (\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2) \times$$

$$\times (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) \cos \Omega, \quad (29)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu \hat{u}_z}{\beta^2 + \gamma^2} \left[\frac{1}{\alpha} (\beta^2 - \gamma^2)^2 (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) + \right. \left. +4\gamma^2 \beta (-1)^{n_2} \cos(\beta z) \right] \cos \Omega,$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{2\mu \hat{u}_z \gamma}{\beta^2 + \gamma^2} (\beta^2 - \gamma^2) \times$$

$$\times [(-1)^{n_1} \sin(\alpha z) - (-1)^{n_2} \sin(\beta z)] \sin \Omega.$$

Далее применим (15) и (18) и упростим выражения с помощью (2):

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\pi}{a} \frac{\hat{\mu} \hat{u}_z}{(1-v)(N_2^2 - N_1^2)} \times \\
&\times \left[\begin{aligned} &\frac{1}{N_1} \left((1-v)N_1^2 + vN_2^2 \right) \times \\ &\times \left((1-v)N_2^2 - (2-v)N_1^2 \right) \times \\ &\times (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) - \\ &- \left((1-2v)N_2^2 - 2(1-v)N_1^2 \right) \times \\ &\times N_2 (-1)^{n_2} \cos(\beta z) \end{aligned} \right] \cos \Omega, \\
\sigma_{yy} &= \frac{\pi}{a} \hat{\mu} \hat{u}_z \frac{v}{1-v} \frac{1}{N_1} \times \\
&\times \left((1-v)N_1^2 + vN_2^2 \right) (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) \cos \Omega, \\
\sigma_{zz} &= \frac{\pi}{a} \frac{\hat{\mu} \hat{u}_z}{(1-v)(N_2^2 - N_1^2)} \times \\
&\times \left[\begin{aligned} &\left((1-v)N_1^2 + vN_2^2 \right)^2 \frac{1}{N_1} (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) + \\ &+ \left((1-2v)N_2^2 - 2(1-v)N_1^2 \right) \times \\ &\times N_2 (-1)^{n_2} \cos(\beta z) \end{aligned} \right] \cos \Omega, \\
\sigma_{xz} &= -\frac{\pi}{a} \hat{\mu} \hat{u}_z \sqrt{(1-2v)N_2^2 - 2(1-v)N_1^2} \times \\
&\times \frac{(1-v)N_1^2 + vN_2^2}{(1-v)(N_2^2 - N_1^2)} \times \\
&\times \left[(-1)^{n_1} \sin(\alpha z) - (-1)^{n_2} \sin(\beta z) \right] \sin \Omega.
\end{aligned} \tag{30}$$

Нетрудно убедиться, что напряжения на поверхности равны нулю, т.е. соответствуют свойствам внутренней волны.

Представляет также интерес проанализировать, как изменяется волна при малом отклонении параметров от значений внутренней волны. Пусть есть внутренняя волна с параметрами $(c^*, \gamma^*, \omega^*)$. Рассмотрим теперь волну, имеющую параметры близкие к параметрам внутренней: $(c^* + dc, \gamma^* + d\gamma, \omega^* + d\omega)$. Взяв выражение дисперсионного соотношения (9), используя формулы (15) и ограничившись малыми величинами первого порядка, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&\left(d\gamma + \gamma^* \frac{c^* dc}{c^{*2} - c_1^2} \right) \left(\frac{\pi^2}{4\gamma^{*2} a^2} N_2^2 - 1 \right)^2 = \\
&= -\frac{\pi^2}{\gamma^{*2} a^2} N_2^2 \left(d\gamma + \gamma^* \frac{c^* dc}{c^{*2} - c_2^2} \right).
\end{aligned} \tag{31}$$

Учитывая соотношения (17) и (18), получаем

$$\begin{aligned}
&2N_1^2 c_1^4 (c_1^2 - c_2^2)^{3/2} (N_2^2 - N_1^2)^{3/2} c_1 c_2 \frac{a}{\pi} d\gamma = \\
&= (c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2) \times \\
&\times \left[4(c_1^2 - c_2^2) (c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2)^2 - c_2^4 c_1^4 (N_2^2 - N_1^2)^2 \right] dc.
\end{aligned} \tag{32}$$

Для краткости введем величину:

$$N' = \sqrt{\frac{c_2^2 N_2^2 - c_1^2 N_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}. \tag{33}$$

Тогда (32) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
d\gamma &= \frac{\pi}{a} \left[\frac{4N'^4 (c_1^2 - c_2^2)^3}{c_1^4 (N_2^2 - N_1^2)^2} - c_2^2 \right] \times \\
&\times \frac{N'^2}{2c_1 c_2 N_1^2} \sqrt{\frac{N_2^2 - N_1^2}{c_1^2 - c_2^2}} dc.
\end{aligned} \tag{34}$$

Малое изменение частоты можно найти следующим образом:

$$d\omega = c^* d\gamma + \gamma^* dc. \tag{35}$$

Тогда, после ряда преобразований получаем:

$$d\omega = \frac{\pi}{2a} \frac{N'^3}{N_1^2} \left[\frac{4N'^2 (c_1^2 - c_2^2)^2}{c_1^4 (N_2^2 - N_1^2)} - 1 \right] dc. \tag{36}$$

Выражения (34) и (36) показывают, что выражение дисперсионного соотношения в точках, соответствующих внутренним волнам, остается непрерывным и гладким.

СВОЙСТВО КРАТНОСТИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Перепишем выражение для фазовой скорости (17) следующим образом:

$$c = c_1 c_2 \sqrt{\frac{(N_2^2/N_1^2) - 1}{c_2^2(N_2^2/N_1^2) - c_1^2}} = c_1 c_2 \sqrt{\frac{Q^2 - 1}{c_2^2 Q^2 - c_1^2}}, \quad (37)$$

здесь $Q = N_2/N_1$ — отношение индексов волны.

Отсюда можно сделать вывод, что существует бесконечное число внутренних симметричных волн для каждого допустимого значения Q . Действительно, пусть существует внутренняя волна с индексами (N_1, N_2) . Если умножить индексы на некоторое нечетное число, то новые значения индексов также будут соответствовать ограничению (20), и при этом их отношение Q не изменится. Следовательно, если существует хотя бы одна внутренняя волна с отношением Q (т.е. с соответствующим значением фазовой скорости (37)), то существует бесконечное количество внутренних волн с таким Q .

Далее, если существует ряд внутренних волн с отношением Q , то первая волна из ряда имеет минимальные значения индексов, и любая другая волна из этого ряда имеет индексы, равные индексам первой волны, умноженные на нечетное число.

Исходя из формул (18), (19), можно получить выражения для волнового числа и круговой частоты:

$$\gamma = \frac{\pi}{2a} N_1 \sqrt{\frac{c_2^2 Q^2 - c_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}, \quad (38)$$

$$\omega = \frac{\pi}{2a} c_1 c_2 N_1 \sqrt{\frac{Q^2 - 1}{c_1^2 - c_2^2}}. \quad (39)$$

Таким образом, для ряда внутренних волн с одинаковой фазовой скоростью частота и волновое число пропорциональны N_1 , иначе говоря, являются арифметической прогрессией.

Рассмотрим теперь длину волны:

$$\begin{aligned} l = \frac{2\pi}{\gamma} &= \frac{4a}{N_1} \sqrt{\frac{c_1^2 - c_2^2}{c_2^2 Q^2 - c_1^2}} = \\ &= \frac{4a}{N_1 \sqrt{Q^2(1 - 2\nu) - 2 + 2\nu}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно (40), длина волна обратно пропорциональна N_1 . Поскольку N_1 не может быть меньше 1,

то для каждого значения Q длина волны не может превышать величину $4a/\sqrt{Q^2(1 - 2\nu) - 2 + 2\nu}$.

На рис. 1 представлено дисперсионное соотношение безразмерной фазовой скорости c/c_0 относительно безразмерной частоты $\omega a/c_0$ для $\nu = 0.3$; штриховые и пунктирные линии соответствуют выражениям (13) и (14), точки их пересечения (и пересечения с линиями ДС) соответствуют внутренним волнам. Белыми точками отмечены уже известные внутренние волны с фазовой скоростью, равной скорости Ламе [4], далее такие волны будем называть внутренними волнами типа I. Черными точками отмечены обнаруженные в этой работе внутренние волны с большими фазовыми скоростями (больше c_1), далее такие волны будем называть внутренними волнами типа II. Горизонтальные черные прямые на рис. 1 соединяют точки волн типа II, имеющие одну фазовую скорость, т.е. принадлежащие одному ряду.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНЕ

С точки зрения прочности конструкции важна локализация максимальных растягивающих и сдвиговых напряжений, так как именно в этих точках наиболее вероятно инициализация разрушения. Так как у внутренней волны напряжения на поверхности равны нулю, то концентрация напряжений находится в толще пластины.

Рассмотрим распределения напряжений в некоторых внутренних волнах (параметры пластины: полутолщина $a = 1$ см, модуль Юнга $E = 2$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$). Прежде всего для сравнения представим распределения для первой внутренней волны типа I фундаментальной моды [4]: на рис. 2а представлен вид продольного сечения деформированной пластины в условном масштабе (сегмент ограничен одним периодом волны); на рис. 2б и 2в — распределения первого главного напряжения (что соответствует максимальному растягивающему напряжению) и максимального сдвига соответственно. Свойства внутренней волны типа I таковы, что и максимальное растяжение, и максимальный сдвиг между собой равны. Кроме того, материал находится в состоянии чистого сдвига. Максимальные напряжения локализуются на срединной плоскости пластины ($z = 0$).

Далее на рис. 3, 4 и 5 представлены сечения деформированной пластины и распределения максимальных растяжения и сдвига для внутренних волн типа II для пар индексов $(N_1, N_2) = (1, 3), (1, 5), (3, 7)$.

Сравнение максимальных напряжений в этих случаях показывает, что общего правила для локализации напряжений нет. Действительно, в случае волны (1, 3) максимальное растяжение и максимальный сдвиг находятся на срединной плоскости

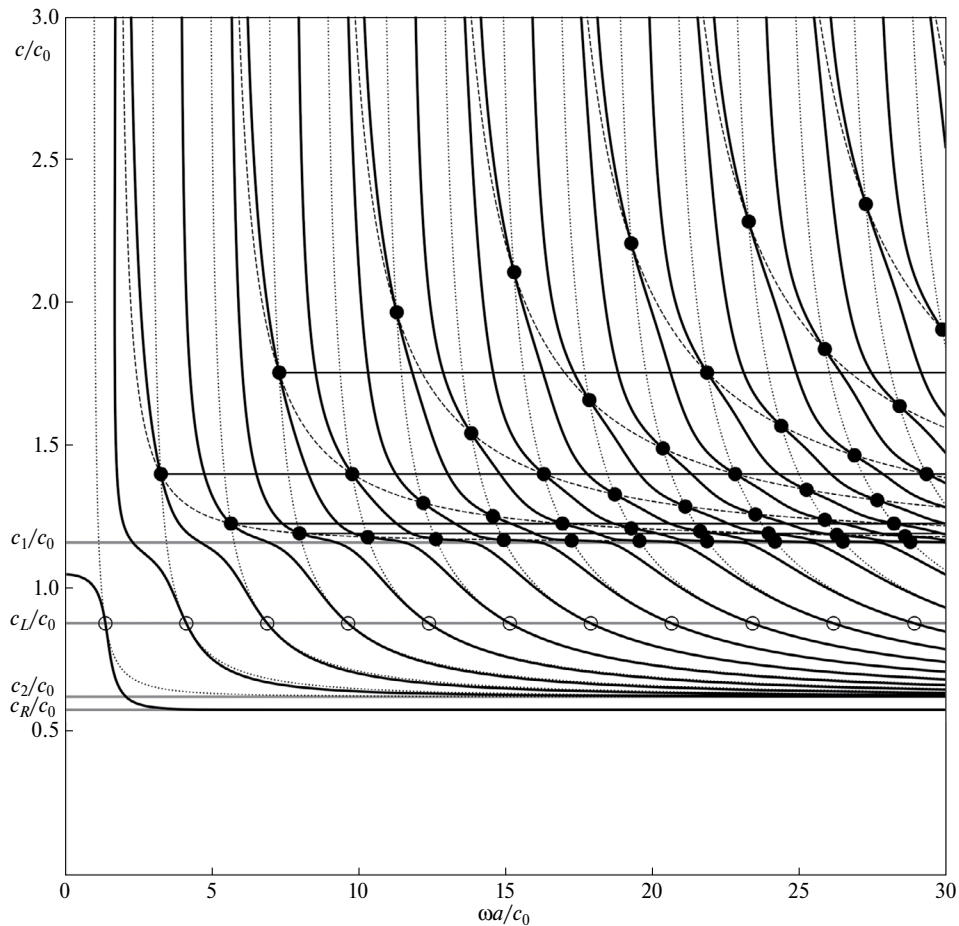


Рис. 1. Зависимость c/c_0 от $\omega a/c_0$ для $\nu = 0.3$, с отмеченными внутренними волнами.

пластины, как и в случае волн типа I (однако точек локализации сдвига вдвое больше, чем точек локализации растяжения, и уже поэтому они не могут всегда совпадать, см. рис. 3).

В случае волны (1, 5) и максимальное растяжение, и максимальный сдвиг локализуются не на срединной плоскости, а на глубине $z \approx \pm 0.4a$ (рис. 4). В случае же волны (3, 7), максимальное растяжение локализуется на срединной плоскости ($z = 0$), а максимальный сдвиг — на глубине $z \approx \pm 0.4a$, т.е. их локализации полностью не совпадают (рис. 5).

Далее, исходя из (30), среднее напряжение имеет следующий вид:

$$\Delta\sigma = \frac{\pi}{3a} \frac{\hat{\mu}\hat{u}_z}{N_1} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left((1-\nu)N_1^2 + \nu N_2^2 \right) \times (-1)^{n_1} \cos(\alpha z) \cos \Omega. \quad (41)$$

Отсюда получаем, что среднее напряжение ненулевое, следовательно, напряженно-деформированное состояние не соответствует состоянию чистого

сдвига, что является еще одним отличием между волнами типа I и II.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение симметричных решений волновых уравнений Лэмба при больших фазовых скоростях ($c > c_1$) показало, что в этом диапазоне существует семейство решений (внутренние волны типа II), которые имеют нулевые напряжения и деформации на поверхности пластины, как и внутренние волны с фазовой скоростью Ламе (тип I). Однако волны типа II отличаются от волн типа I рядом свойств, таких, например, как ненулевое значение среднего напряжения и иная локализация максимальных напряжений.

В то же время, волны типа II (как и тип I) обладают свойством кратности частоты и волнового числа. Аналитически доказано, что если существует внутренняя волна с фазовой скоростью c , то существует бесконечное количество волн с такой же фазовой скоростью, при этом их частоты и волновые числа образуют арифметическую прогрессию.

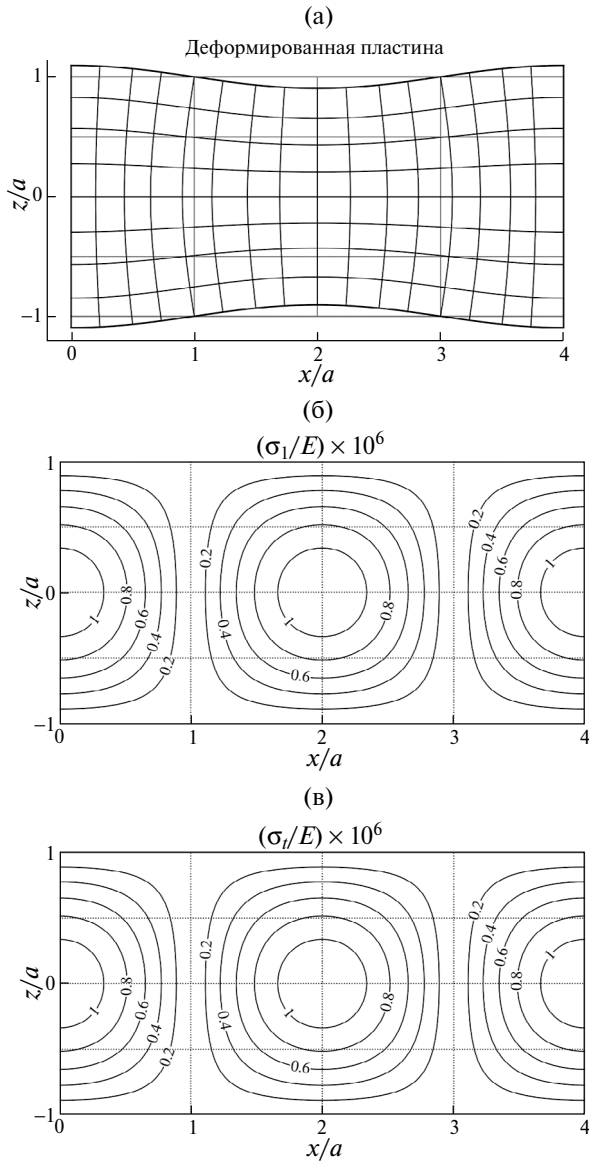


Рис. 2. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа I для фундаментальной моды.

Существование внутренних волн Лэмба показывает, что проведение контроля деформаций конструкции посредством поверхностных тензодатчиков в этом случае может быть неэффективным, таким образом необходимо совершенствовать применяемые методы контроля надежности.

Работа выполнена по теме Государственного задания № госрегистрации 124012500437-9 “Вопросы фундаментальной механики и оптимизации процессов деформирования, разрушения, трения и износа, аддитивного роста конструкций и их элементов, работающих в нормальных и экстремальных условиях”.

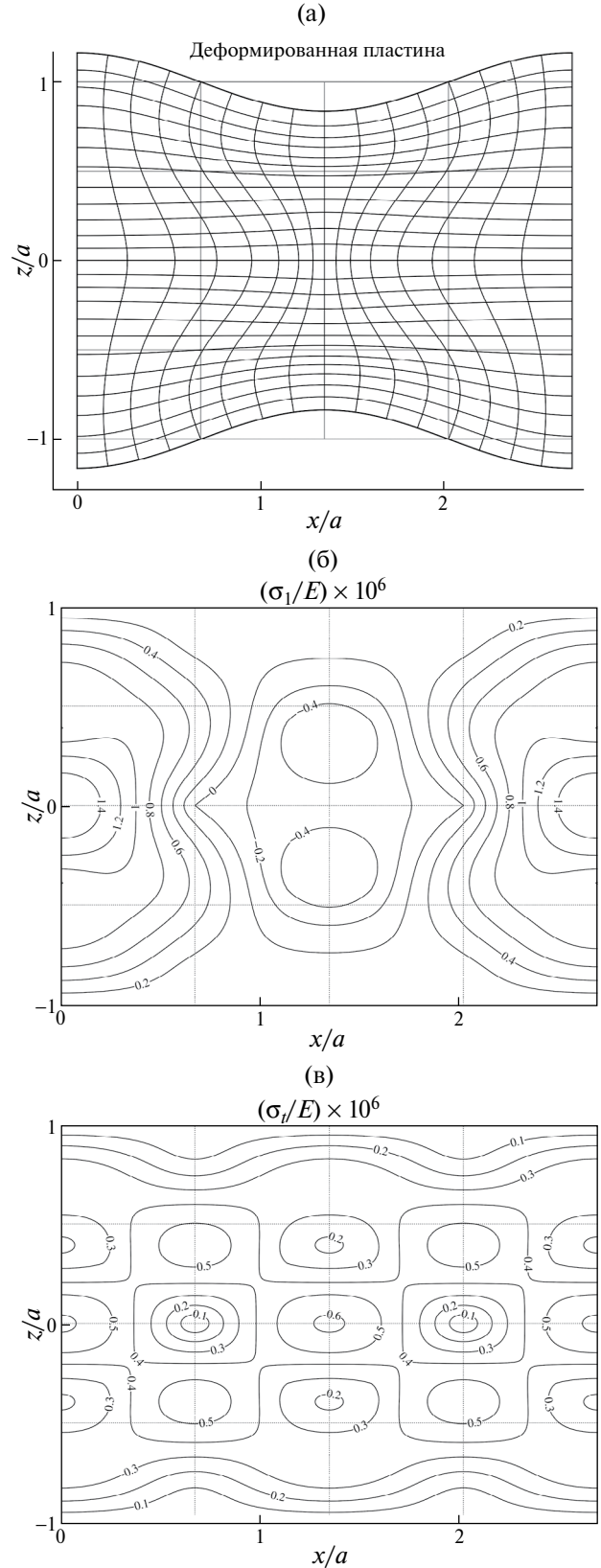


Рис. 3. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа II с индексами $(N_1, N_2) = (1, 3)$.

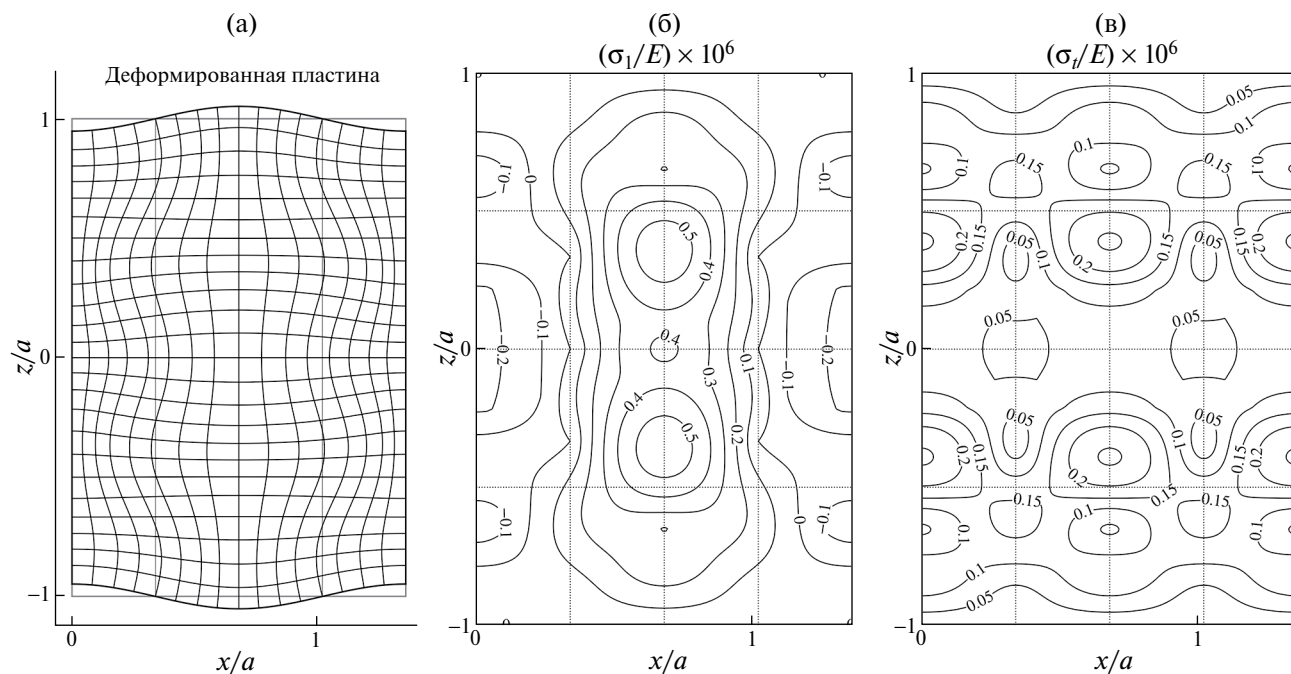


Рис. 4. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа II с индексами $(N_1, N_2) = (1, 5)$.

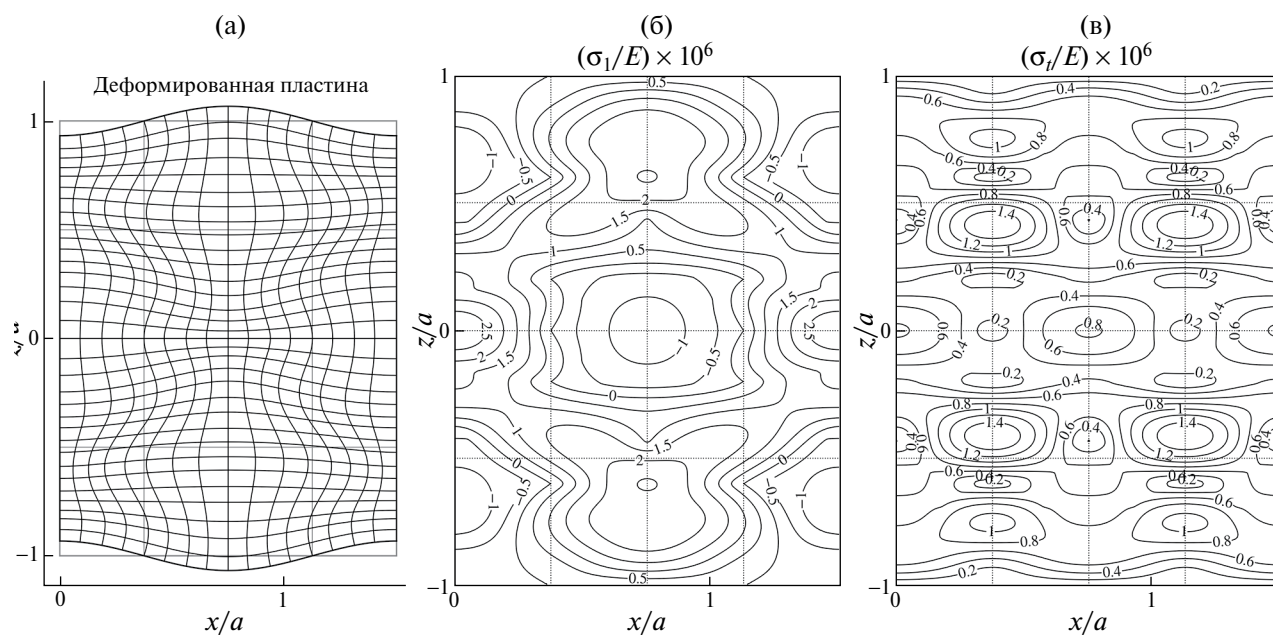


Рис. 5. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа II с индексами $(N_1, N_2) = (3, 7)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Su Zh., Ye L.* Identification of damage using Lamb waves. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 357 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-784-4>
2. *Зудин В.Л., Жуков Ю.П., Маланов А.Г.* Датчики: измерение перемещений, деформаций и усилий. М.: Изд-во Юрайт, 2020. 199 с.
3. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: “Высшая школа”, 1977. 431 с.
4. *Мокряков В.В.* Напряжения в симметричной волне Лэмба среднего диапазона. Исследование внутренней волны // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 2. С. 119–128. <https://doi.org/10.31857/S032079192202006X>
5. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // Физическая акустика. Т. 1. ч. А. / Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. С. 140–203.
6. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. R. Soc. A. 1917. V. 93. P. 293–312.
7. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
8. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973. 431 pp.
9. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 649 p.
10. *Huang T.T., Ren X., Zeng Y., Zhang Y., Luo C., Zhang X.Y., Xie Y.M.* Based on auxetic foam: A novel type of seismic metamaterial for Lamb waves // Engng. Struct. 2021. V. 246. 112976. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112976>
11. *Кузнецов С.В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 90–100. <https://doi.org/10.7868/S0320791914010092>
12. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // J. Vibr. Control. 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
13. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Lamb waves in functionally graded and laminated composites // J. Theor. Comp. Acoust. 2020. V. 28. № 3. P. 1950021. <https://doi.org/10.1142/S259172851950021X>
14. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1957. 390 p.
15. *Квашнин Г.М., Сорокин Б.П., Бурков С.И.* Возбуждение поверхностных акустических волн и волн Лэмба на СВЧ в пьезоэлектрической слоистой структуре на основании алмаза // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 45–54. <https://doi.org/10.31857/S0320791921010020>
16. *Квашнин Г.М., Сорокин Б.П., Бурков С.И.* Анализ распространения СВЧ волн Лэмба в пьезоэлектрической слоистой структуре на основании алмаза // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 6. С. 595–602. <https://doi.org/10.31857/S0320791921060058>
17. *Athanassiadis A.G., Hart D.P.* Broadband leaky Lamb waves excited by optical breakdown in water // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 146. № 2. P. 885–892. <https://doi.org/10.1121/1.5120182>
18. *Alleyne D., Cawley P.* The Interaction of Lamb Waves with Defects // IEEE Transactions on Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr. 1992. V. 39. № 3. P. 381–397. <https://doi.org/10.1109/58.143172>
19. *Alleyne D., Cawley P.* The use of Lamb waves for the long range inspection of large structures // Ultrasonics. 1996. V. 34. P. 287–290. [https://doi.org/10.1016/0041-624X\(96\)00024-8](https://doi.org/10.1016/0041-624X(96)00024-8)
20. *Зверев А.Я., Черных В.В.* Экспериментальное определение акустических и виброакустических характеристик многослойных композитных панелей // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 727–736. <https://doi.org/10.1134/S0320791918060151>
21. *Mebarki M., Laidoudi F., Boubenider F.* Numerical Study of S0 Lamb Mode Resonator based on c-BN/AlN for 5G Operating Acoustic Devices // Acoust. Phys. 2021. V. 67. № 5. P. 457–464.
22. *Муякшин С.И., Диденкулов И.Н., Вьюгин П.Н., Чернов В.В., Денисов Д.М.* Исследование метода обнаружения и локализации неоднородностей в пластинах с использованием волн Лэмба // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 3. С. 270–274. <https://doi.org/10.31857/S0320791921030114>
23. *Rose L.R.F., Vien B.S., Chiu W.K.* Analytical solutions for crack-like scatterers and sources in isotropic elastic plates // Wave Motion. 2020. V. 93. P. 102476. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102476>

Internal Symmetrical Lamb Waves for High Phase Velocities

V. V. Mokryakov*

*Federal State Budgetary Institution of Science Institute of Problems of Mechanics named after. A.Yu. Ishlinsky
Russian Academy of Sciences, Vernadsky Ave. 101, bldg. 1, Moscow, 119526 Russia*

**e-mail: mokr@ipmnet.ru*

Symmetrical Lamb waves with a phase velocity exceeding the velocity of expansion waves in an infinite medium are considered. It has been proven that internal waves are possible in this range of phase velocities, i.e. solutions to the wave equation that have zero values of the strain and stress components on the surface and, at the same time, their non-zero values inside the plate. The parameters of internal waves (phase velocity, frequency, wavelength) were calculated, and it was also proven that the frequencies of internal waves of the same phase velocity form an arithmetic progression. Several internal waves are considered, sections of the corresponding deformed plates, and distributions of maximum values of tension and shear are presented.

Keywords: Lamb wave, internal wave, elasticity, Poisson's ratio, stress-strain state, unbounded plate, stress localization