

УДК 534.2

ОСОБЕННОСТИ ДЕМОДУЛЯЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЖИМАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

© 2024 г. А. В. Квашенникова^{a, *}, М. С. Сергеева^a, П. В. Юлдашев^a,
И. Б. Есипов^b, В. А. Хохлова^a

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет,
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991 Россия

^bРоссийский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина,
Ленинский проспект 65, Москва, 119991 Россия

*e-mail: kvashennikovaav@my.msu.ru

Поступила в редакцию 24.06.2024 г.

После доработки 24.06.2024 г.

Принята к публикации 05.09.2024 г.

Рассмотрена одномерная нелинейная задача о параметрической генерации низкочастотного излучения в случае импульсного высокочастотного начального возбуждения, способного образовать ударные фронты в профиле волны. Развита численный алгоритм решения уравнения Бюргерса во временном представлении с использованием удароулавливающей схемы типа Годунова. Рассмотрены примеры распространения модельных частотно-модулированных сигналов с различной формой огибающей при различном соотношении нелинейных и диссипативных эффектов, ограничивающих длину взаимодействия волн накачки. Приводятся примеры эволюции профилей и спектров сигналов при самодемодуляции высокочастотного сигнала накачки, которая проявляется на меньших расстояниях при сильном проявлении нелинейных эффектов за счет дополнительного затухания энергии волны на образующихся ударных фронтах. Показано, что эффективность генерации низкочастотного излучения в ударноволновых режимах увеличивается.

Ключевые слова: параметрические взаимодействия, импульсная накачка, самодемодуляция, уравнение Бюргерса, схема Годунова

DOI: 10.31857/S0320791924050019, EDN: XCRORJ

ВВЕДЕНИЕ

При распространении в нелинейной среде двух интенсивных гармонических волн с близкими частотами происходит генерация множества новых спектральных компонент как вверх, так и вниз по спектру. На некотором расстоянии от источника, которое определяется затуханием высокочастотных волн накачки, сформированное низкочастотное излучение, включающее в себя разностную частоту и другие комбинационные низкочастотные составляющие спектра, начинает распространяться независимо от начального возбуждения. В этом случае нелинейная среда выполняет роль параметрической антенны бегущей волны [1–2], что обеспечивает высокую, в пределах нескольких градусов, направленность сгенерированного низкочастотного излучения, низкий уровень боковых лепестков диаграммы направленности, а также возможность

использования излучателей небольших размеров по сравнению с длиной волны низкочастотного излучения. Наряду с важными практическими преимуществами такого подхода, его недостаток связан с небольшой эффективностью преобразования энергии волн накачки в энергию волны разностной частоты [2].

При возбуждении среды мощными высокочастотными импульсами происходит генерация низкочастотного импульсного излучения, т.е. проявляется эффект нелинейной самодемодуляции [3]. Ряд особенностей импульсной генерации низкочастотного звука делает параметрический подход одним из важных инструментов теоретических и экспериментальных исследований в области подводной [2–4], воздушной [5–7] и медицинской акустики [8–10]. Так, в подводной акустике важным свойством низкочастотного излучения является его способность

узконаправленно распространяться на дальние расстояния, что используется в акустической томографии водной среды, для зондирования дна океана и осуществления подводной связи [11–12]. В библиотеках, музеях или вендинговых аппаратах параметрические громкоговорители могут передавать информацию только для одного конкретного посетителя в результате генерации пучка слышимого звука высокой направленности [13]. В медицинских приложениях параметрически сгенерированное низкочастотное излучение используется, например, в задачах визуализации тканей и обнаружения опухолей [8–9], а также для ультразвуковой визуализации с использованием контрастных агентов [10].

Основные результаты теоретических и численных исследований нелинейной самодемодуляции до последнего времени были получены в квазилинейном приближении, т.е. в условиях слабого проявления нелинейных эффектов [2–3, 14]. Главным фактором, ограничивающим область параметрических взаимодействий в этом случае, являются диссипативные эффекты, приводящие к уменьшению с расстоянием амплитуды волн накачки. В случае сильнонелинейных режимов распространения, когда в профиле волны формируются ударные фронты, происходит дополнительное уменьшение области генерации низкочастотного излучения за счет эффективного поглощения энергии волны на разрывах и соответствующего дополнительно уменьшения амплитуды взаимодействующих волн накачки. Рассмотрение ударноволновых режимов параметрических взаимодействий представляет несомненный интерес. Несмотря на то, что поглощение энергии волны на разрывах укорачивает область нелинейных взаимодействий, их эффективность растет, что обеспечивает потенциальный механизм получения больших уровней низкочастотных сигналов. Такие задачи исследованы гораздо менее полно, поскольку связаны с необходимостью разработки специальных численных подходов, учитывающих совместное влияние нелинейных и диссипативных эффектов, использования больших объемов компьютерной памяти и длительностью расчетов [10, 15]. В данной работе реализован новый численный алгоритм для исследования процессов генерации и распространения низкочастотного излучения в режимах сильного проявления нелинейных эффектов на основе одномерного уравнения Бюргерса [16].

Наиболее сложным для численного решения уравнения Бюргерса, а также более общих нелинейно-дифракционных уравнений Хохлова-Заболотской-Кузнецова [17] и Вестервельта [18], является оператор нелинейности, который может рассматриваться как в спектральном [19–21], так и во временном представлении [15, 22–25]. В спектральном подходе, при образовании ударного фронта в профиле исходно гармонической волны, для корректного описания ее распространения

необходимо учитывать порядка тысячи спектральных компонент (гармоник основной частоты) [21, 26]. В случае двухчастотного параметрического взаимодействия волн накачки число необходимых спектральных компонент в алгоритме увеличивается до нескольких тысяч или даже десятков тысяч [27]. Поскольку количество операций в спектральном алгоритме пропорционально квадрату числа гармоник [20], это существенно затрудняет вычисления и делает их фактически невозможными, например, в трехмерной постановке задачи. На данный момент были реализованы оптимизированные спектральные алгоритмы, предназначенные для описания двухчастотного взаимодействия гармонических волн накачки и основанные на идее отсечения слабоамплитудных спектральных компонент, дающих малый вклад в генерацию низкочастотного сигнала [27–29]. Данный подход позволил уменьшить число гармоник на порядки и был применен для решения задачи о параметрическом взаимодействии в трехмерном волновом пучке с мощной бигармонической накачкой [29].

Для импульсных сигналов с широким исходным спектром количество спектральных компонент возрастает в десятки раз по сравнению с двухчастотным возбуждением, и спектральный подход становится неприменим. Целью данной работы являлась реализация и верификация временного алгоритма расчета нелинейного оператора при импульсной генерации низкочастотного излучения, в том числе в ударноволновых режимах распространения. Такая задача исследовалась ранее [10, 15] с использованием нелинейного алгоритма [22–24], построенного на основе точного решения уравнения простых волн в неявном виде [16]. Однако для описания профиля волны в режимах образования ударных фронтов такой нелинейный алгоритм требует использования порядка 50 узлов временной сетки на ударном фронте [30] и, следовательно, нескольких тысяч узлов только на один высокочастотный период импульсного сигнала, что делает решение трехмерных задач практически нереализуемым. В данной работе используется удароуправляющая схема типа Годунова [31], для которой требуется всего лишь 2–3 узла временной сетки на ударный фронт волны при решении одномерных нелинейных задач [30, 32–33] и несколько больше, 7–8 узлов, при решении дифракционных задач для корректного описания больших пространственных градиентов поля давления в поперечном к оси пучка направлении [34].

Предварительная верификация построенного временного алгоритма была проведена ранее на примере параметрического взаимодействия двух плоских гармонических волн накачки. Сравнились результаты моделирования уравнения Бюргерса, полученные с использованием спектрального и временного подходов [35]. Для временного алгоритма был отмечен выигрыш по времени вычислений в сотни раз по сравнению со спектральным

алгоритмом без его оптимизации и в несколько раз по сравнению с оптимизированным спектральным алгоритмом [27–28]. В данной работе с использованием развитого временного алгоритма демонстрируются особенности параметрической генерации низкочастотного излучения при импульсной накачке с различной формой огибающей импульсов.

1. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ВО ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В приближении плоских волн задача о параметрической генерации низкочастотного излучения высокочастотной импульсной накачкой описывается одномерным нелинейным уравнением Бюргера, которое в безразмерном виде можно записать следующим образом [16]:

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{1}{2\Gamma} \frac{\partial P^2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

Здесь $P = p/p_0$ — акустическое давление, нормированное на максимальную величину давления в начальном импульсном сигнале, $Z = z/l_{\text{abs}}$ — координата распространения волны в единицах длин поглощения, $l_{\text{abs}} = 2c_0^3/\delta\omega_0^2$, на характерной частоте исходного сигнала $f_0 = \omega_0/2\pi$, $\theta = \omega_0(t - z/c_0)$ — время в бегущей системе координат, $\Gamma = \delta\rho_0\omega_0/(2\beta p_0) = l_{\text{sh}}/l_{\text{abs}}$ — число Гольдберга, равное отношению длины нелинейности $l_{\text{sh}} = \rho_0 c_0^3/\beta\omega_0 p_0$ к длине поглощения l_{abs} , c_0 — скорость звука в среде, ρ_0 — плотность среды, β и δ — коэффициенты нелинейности и термовязкого поглощения, соответственно.

Уравнение Бюргера (1) моделировалось во временном представлении с помощью явной шеститочечной консервативной схемы типа Годунова [31] второго порядка точности по времени θ , шаблон которой представлен на рис. 1а. Преимущество этой удароулавливающей схемы заключается в том, что она позволяет с высокой точностью описывать разрывные решения (1) с использованием 2–3 узлов временной сетки на ударном фронте волны [30, 32–33] (рис. 1б). Решение уравнения (1) на каждом последующем шаге ($n + 1$) по координате распространения волны Z для всех временных узлов j строилось следующим образом [31]:

$$P_j^{n+1} = P_j^n + \frac{1}{\Gamma} \frac{\Delta Z}{\Delta \theta} \left(H_{j+\frac{1}{2}}^n(Z) - H_{j-\frac{1}{2}}^n(Z) \right) + \frac{\Delta Z}{\Delta \theta^2} (P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n). \quad (2)$$

В численной схеме (2) ΔZ и $\Delta \theta$ — шаги сетки по координате распространения волны и времени, соответственно; $H_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ — потоки через центры ячеек, которые вычисляются как

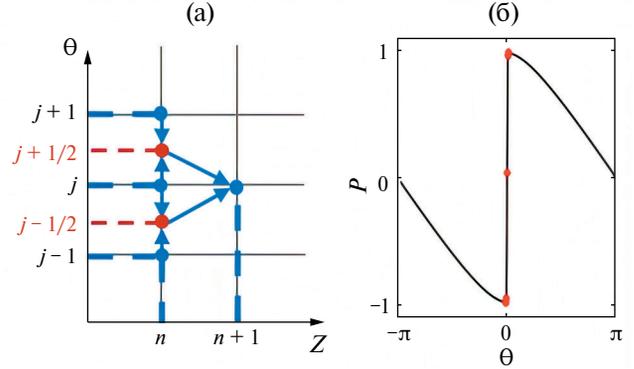


Рис. 1. (а) — Шаблон удароулавливающей шеститочечной схемы типа Годунова и (б) — пример одного периода профиля нелинейной волны с ударным фронтом, полученного при моделировании с использованием 3 узлов временной сетки на разрыв.

$$H_{j\pm\frac{1}{2}}^n(Z) = \frac{1}{4} \left(\left(P_{j\pm\frac{1}{2}}^+ \right)^2 + \left(P_{j\pm\frac{1}{2}}^- \right)^2 \right) + \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}^n(Z)}{2} \left(P_{j\pm\frac{1}{2}}^+ - P_{j\pm\frac{1}{2}}^- \right),$$

где $a_{j\pm\frac{1}{2}}^n(Z) = \max \left| P_{j\pm\frac{1}{2}}^+, P_{j\pm\frac{1}{2}}^- \right|$ — локальная скорость распространения волны в центре ячейки, а давления справа и слева от узла сетки (n, j) равны, соответственно:

$$\begin{aligned} P_{j+\frac{1}{2}}^+ &= P_{j+1}^n(Z) - \frac{\Delta \theta}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_{j+1}^n, \\ P_{j+\frac{1}{2}}^- &= P_j^n(Z) + \frac{\Delta \theta}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_j^n, \\ P_{j-\frac{1}{2}}^+ &= P_j^n(Z) - \frac{\Delta \theta}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_j^n, \\ P_{j-\frac{1}{2}}^- &= P_{j-1}^n(Z) + \frac{\Delta \theta}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_{j-1}^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Производные $\left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_{j,j\pm 1}^n$ в выражении (3) для повышения устойчивости алгоритма рассчитывались следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_j^n &= \min \text{mod} \left(\frac{\eta(P_j^n - P_{j-1}^n)}{\Delta \theta}, \right. \\ &\quad \left. \frac{P_{j+1}^n - P_{j-1}^n}{2\Delta \theta}, \frac{\eta(P_{j+1}^n - P_j^n)}{\Delta \theta} \right), \end{aligned}$$

при этом значение весового коэффициента η выбирается из промежутка $1 \leq \eta \leq 2$. В данной работе было выбрано $\eta = 2$, что обеспечивает наиболее точное решение при минимальном сеточном поглощении, в то время как $\eta = 1$ соответствует наибольшему сеточному поглощению и, следовательно, более устойчивому численному алгоритму.

Третье слагаемое в схеме (2) является центрально-разностной аппроксимацией оператора поглощения в уравнении Бюргерса (1). Введенная таким образом явная численная схема имеет второй порядок точности по времени θ и первый — по координате распространения волны Z . Отметим, что повысить точность численного решения уравнения (1) можно с помощью метода расщепления по физическим факторам [22], например, вычисляя решение на каждом шаге сетки по Z как $P(\theta, Z+\Delta Z) = L_{A,\Delta Z/2} L_{N,\Delta Z} L_{A,\Delta Z/2} P(\theta, Z)$. Операторы поглощения L_A и нелинейности L_N при этом расщепляются независимо с использованием своих оптимальных численных схем, а итоговый алгоритм приобретает второй порядок точности по координате Z за счет дробления полного шага ΔZ на подшаги. В этом случае диссипативную задачу удобно решать в спектральном представлении, поскольку для каждой гармоники поля давления существует точное аналитическое решение в виде затухающей экспоненты [21]. Сравнение расчетов для оператора поглощения, записанного в частотном и временном представлениях, показало различие менее чем на 1%, поэтому в этой работе было решено использовать полностью временной конечно-разностный алгоритм, как для оператора нелинейности, так и для оператора поглощения.

2. НАЧАЛЬНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИГНАЛЫ И ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование задачи о параметрической генерации низкочастотного излучения высокочастотной импульсной накачкой проводилось на примере трех характерных начальных сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) и различными типами огибающей. Для верификации алгоритма и возможности сравнения полученных в работе результатов с более ранними исследованиями [15] были рассмотрены два примера модельных импульсов с ЛЧМ, центральной частотой $f_0 = 3.5$ МГц и гауссовской и гипергауссовской функциями огибающей:

$$\begin{aligned} P(\theta, Z = 0) &= E(\theta) \sin(\theta + \varphi(\theta)) = \\ &= \exp\left(-\left[\frac{2\theta}{50\pi}\right]^{2m}\right) \sin\left(\theta + \frac{\theta^2}{275\pi}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $m = 1$ и $m = 5$ соответствуют огибающим в виде гаусса и гипергаусса (рис. 2а и 2б). В качестве

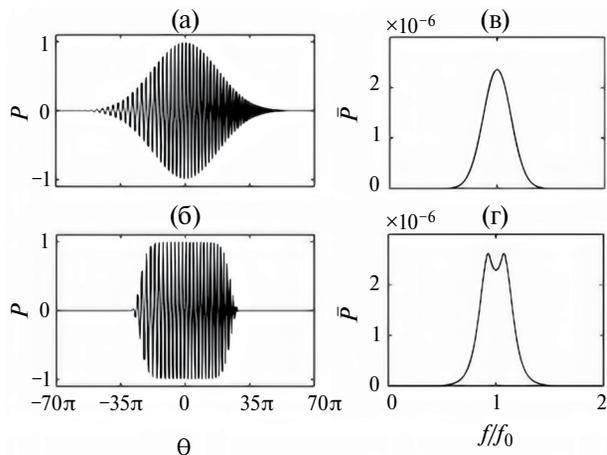


Рис. 2. (а, б) — Начальные профили и (в, г) — спектры частотно-модулированных сигналов с (а, в) — гауссовской и (б, г) — гипергауссовской огибающей и линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).

третьего примера был рассмотрен импульсный сигнал с прямоугольной огибающей, состоящий из суммы гармонической волны на частоте $f_0 = 150$ кГц и волны с ЛЧМ в диапазоне 135–145 кГц (рис. 3а), характерный для работы подводной параметрической антенной решетки [11]. Первый и последний циклы под его огибающей, демонстрирующие изменение частоты от начала к концу импульса, представлены на рис. 3в. Отметим, что для всех трех импульсных сигналов частота осцилляций увеличивается от начала к концу импульса. На рисунках 2в, 2г и 3б представлены начальные спектры P описанных выше импульсных сигналов. Относительная ширина ЛЧМ спектра прямоугольного

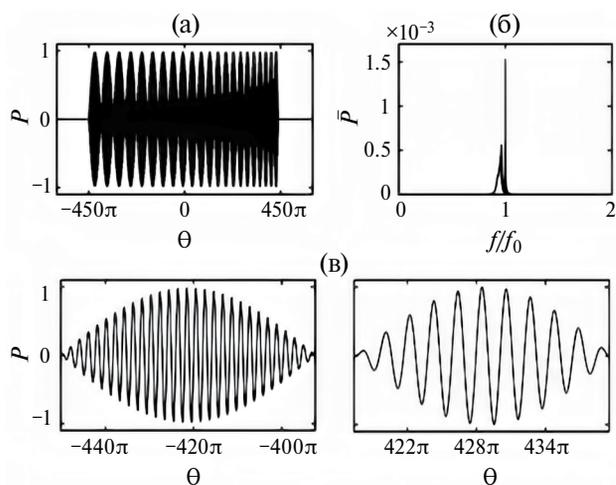


Рис. 3. (а) — Начальный профиль и (б) — спектр импульсного сигнала в виде суммы гармонической волны и волны с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). (в) — Первый и последний циклы под прямоугольной огибающей импульса.

Таблица 1. Физические параметры среды распространения для различных типов начального импульсного возбуждения.

	среда	c_0 , м/с	ρ_0 , кг/м ³	β	δ , м ² /с
Модельные ЛЧМ импульсы	глицерин	1920	1260	5.4	2×10^{-5}
Гарм. волна + ЛЧМ	вода	1502.25	996.81	3.5	4.42×10^{-4}

Таблица 2. Максимальная амплитуда давления в импульсе, характерные величины длин поглощения l_{abs} и нелинейности l_{sh} и их отношения $\Gamma = l_{\text{sh}}/l_{\text{abs}}$.

	p_0 , МПа	l_{sh} , м	l_{abs} , м	Γ
Модельные ЛЧМ импульсы	0.051–0.51	0.15–1.5	1.5	0.1–1
Гарм. волна + ЛЧМ	0.06–0.6	1.7–17	17	0.1–1

Таблица 3. Параметры численного алгоритма.

	ΔZ	$\Delta\theta$	M	N
Модельные ЛЧМ импульсы	$(1.3–5.3) \times 10^{-4}$	0.06	120	12000
Гарм. волна + ЛЧМ	$(3.1–7.8) \times 10^{-4}$	0.08	80	72000

импульса в области $f < f_0$ (рис. 3б) меньше, чем у модельных спектров импульсов с гауссовской и гипергауссовской временными огибающими (рис. 2в и 2г), которые имеют близкую по величине ширину и сосредоточены симметрично вокруг центральной частоты f_0 .

При моделировании распространения модельных ЛЧМ импульсов и смешанного гармонического с ЛЧМ сигнала использовались физические параметры сред, приведенные в табл. 1 и соответствующие предшествующим исследованиям [11, 15, 27–29, 35]: глицерин (более диссипативная среда) и вода (менее диссипативная среда).

Были рассчитаны характерные длины образования разрыва l_{sh} для периодов с максимальной амплитудой давления p_0 в профиле волн накачки, длины поглощения l_{abs} высокочастотной накачки на центральной частоте f_0 и числа Гольдберга Γ . Значения этих величин, а также параметры численного алгоритма, такие как безразмерные шаги пространственной (ΔZ) и временной ($\Delta\theta$) численных сеток, число точек M на период волны накачки на частоте f_0 и общее число точек временного окна N приведены в табл. 2 и 3, соответственно. Пространственный шаг ΔZ варьировался в зависимости от режима распространения для обеспечения устойчивости численного алгоритма (2). Также был промоделирован предельный случай $\Gamma = 0$, когда механизмом, ограничивающим длину

параметрических взаимодействий, является только поглощение на ударных фронтах, реализуемое внутри самой численной схемы для нелинейного оператора (сеточное поглощение). Время расчетов на персональном компьютере с 64 Гб оперативной памяти и восьмиядерным процессором [29] составляло 10–30 минут в режиме слабой нелинейности ($\Gamma = 1$) и 30–100 минут в ударноволновом режиме ($\Gamma = 0.1$) при распространении сигналов до расстояния $Z = 25$.

Для определения наиболее выигрышных режимов излучения волн накачки также был исследован вопрос об эффективности параметрической генерации низкочастотного излучения для описанных выше трех случаев импульсного начального возбуждения. Во-первых, рассматривалось отношение амплитуды демодулированных импульсов к амплитуде исходных импульсов накачки. В качестве второй метрики рассчитывалась энергия низкочастотного излучения E_{low} как сумма квадратов модулей дискретных низкочастотных спектральных компонент с номерами $n = 1 \dots n_{\text{max}}$, амплитуда которых спадала в 10^5 раз относительно максимума низкочастотной части спектра, отнесенная к полной энергии начального сигнала E_0 , рассчитанной путем суммирования энергии всех дискретных гармоник в спектре $n = 1 \dots N_{\text{max}}$:

$$E_{\text{low}} = \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} |\bar{P}_n|^2, E_0 = \sum_{n=1}^{N_{\text{max}}} |\bar{P}_{n,0}|^2. \quad (5)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для первичной апробации работы численного алгоритма в случае импульсной накачки результаты моделирования распространения гауссовского и гипергауссовского высокочастотных импульсов сравнивались с известным аналитическим решением на больших расстояниях $Z \gg 1$, полученным в квазилинейном приближении [15]. В этом случае, при наличии частотной модуляции, решение для низкочастотного демодулированного импульса в квазилинейном приближении определяется формой исходной огибающей $E(\theta)$ и видом фазомодулирующей функции $\varphi(\theta)$ и пропорционально функции

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{E(\theta)}{1 + d\varphi/d\theta} \right)^2. \quad (6)$$

На рис. 4 представлены результаты такого сравнения нормированных на максимум давления, отличающийся для различных режимов распространения, безразмерных профилей давления модельных гауссовского (рис. 4а) и гипергауссовского (рис. 4б) импульсов [15] на расстоянии 25 длин поглощения l_{abs} ($Z = 25$). Как видно из рисунка, численные решения, полученные для случая слабой нелинейности ($\Gamma = 1$) в отсутствие частотной модуляции (черные штриховые кривые) и с ЛЧМ (синие штриховые кривые), в точности совпадают с соответствующими аналитическими решениями (серые и голубые кривые, соответственно), что свидетельствует о корректности работы алгоритма. В случае сильного проявления нелинейных эффектов для ЛЧМ импульсов ($\Gamma = 0.1$, ударноволновой режим, красные кривые) численные решения качественно повторяют поведение аналитического. Отметим, что для импульса с гипергауссовской огибающей

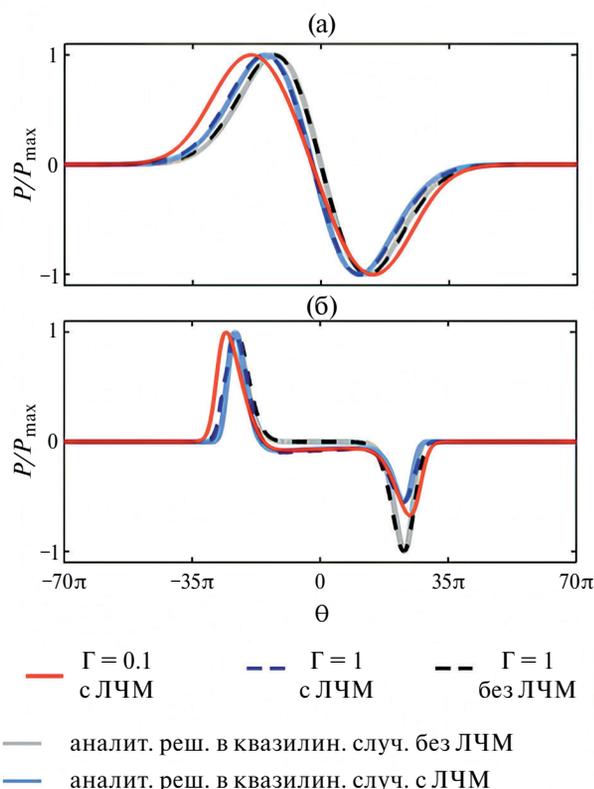


Рис. 4. Сравнение аналитического квазилинейного решения с результатами численного моделирования для профилей модельных импульсных сигналов а) — гауссовской и б) — гипергауссовской огибающими на расстоянии $Z = 25$: аналитическое решение в отсутствие ($\Gamma = 1$, серые кривые) и при наличии линейной частотной модуляции (ЛЧМ) ($\Gamma = 1$, голубые кривые), численное решение без ЛЧМ ($\Gamma = 1$, черные штриховые кривые), численные решения с ЛЧМ в квазилинейном ($\Gamma = 1$, синие штриховые кривые) и ударноволновом ($\Gamma = 0.1$, красные кривые) режимах распространения.

(рис. 2б) наблюдается более несимметричная форма демодулированного импульса (рис. 4б): амплитуда положительной фазы импульса больше, чем амплитуда следующей за ней отрицательной фазы. Асимметрия демодулированного профиля объясняется увеличением частоты сигнала от начала к концу исходного импульса накачки, что приводит к усилению нелинейных эффектов, более раннему формированию ударных фронтов и дополнительному к линейному поглощению энергии высокочастотной волны в конце импульса. Бóльшая асимметрия для исходного импульса с гипергауссовской огибающей (рис. 4б) по сравнению с гауссовской (рис. 4а) обусловлена наличием бóльшего числа высокоамплитудных высокочастотных периодов в конце начального профиля волны.

На рис. 5 показана эволюция безразмерных спектров P гауссовского (рис. 5а, 5б) и гипергауссовского (рис. 5в, 5г) импульсов при прохождении различных расстояний $Z = z/l_{\text{abs}}$, равных 0 (серые кривые), 0.1 (черные кривые), 0.5 (розовые кривые), 1 (синие кривые), 3 (зеленые кривые) и 25 (красные кривые), для различных режимов распространения волны: квазилинейный режим ($\Gamma = 1$) и ударноволновой режим ($\Gamma = 0.1$). Как видно из рис. 5, с увеличением расстояния исходно высокочастотный спектр обоих типов сигналов переходит в область низких частот, что является демонстрацией эффекта самодемодуляции [3]. Насыщение низкочастотной части спектра происходит на расстояниях порядка $Z = 1$ в ударноволновом ($\Gamma = 0.1$) и $Z = 3$ квазилинейном ($\Gamma = 1$) режимах распространения. При этом амплитуда высокочастотной накачки на этих расстояниях еще велика по сравнению с амплитудой низкочастотного излучения и становится сравнимой с ней лишь при $Z = 3$ для $\Gamma = 0.1$ и $Z = 6$ для $\Gamma = 1$. Тенденция более раннего насыщения в ударноволновом режиме ($\Gamma = 0.1$) связана с дополнительным, помимо линейного, поглощением энергии волны накачки на образующихся в профиле волны разрывах. Однако, несмотря на такое уменьшение длины параметрических взаимодействий, максимальная безразмерная амплитуда низкочастотной части спектра в этом случае приблизительно в 5–6 раз больше, чем для квазилинейного режима. Таким образом, с точки зрения максимально достижимой амплитуды давления низкочастотного излучения, его генерация происходит более эффективно в ударноволновом режиме. Отметим, что при распространении от $Z = 3$ (рис. 5, зеленые кривые) до $Z = 25$ длин поглощения (рис. 5, красные кривые) форма низкочастотной части спектра практически не меняется, но для демодулированного спектра гипергаусса (рис. 5в, 5г) начинают сказываться эффекты поглощения в области высоких частот.

На рис. 6 показана эволюция формы безразмерных профилей импульсов с исходно гауссовской

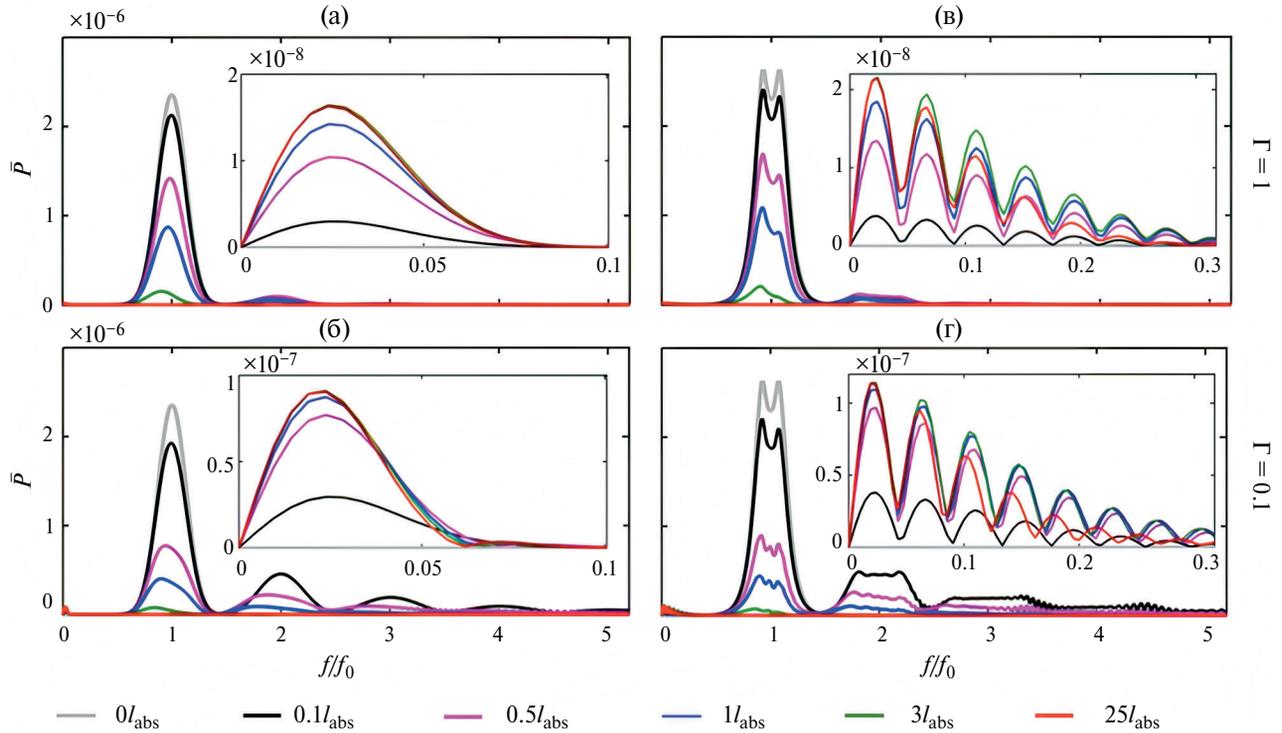


Рис. 5. Спектры импульсных сигналов с (а, б) — гауссовской и (в, г) — гипергауссовской огибающими для случаев (а, в) — квазилинейного ($\Gamma = 1$) и (б, г) — ударноволнового ($\Gamma = 0.1$) режимов распространения, построенные на различных расстояниях $Z = z/l_{\text{abs}}$: 0 (серые кривые), 0.1 (черные кривые), 0.5 (розовые кривые), 1 (синие кривые), 3 (зеленые кривые) и 25 (красные кривые). На вставках представлена низкочастотная часть спектров.

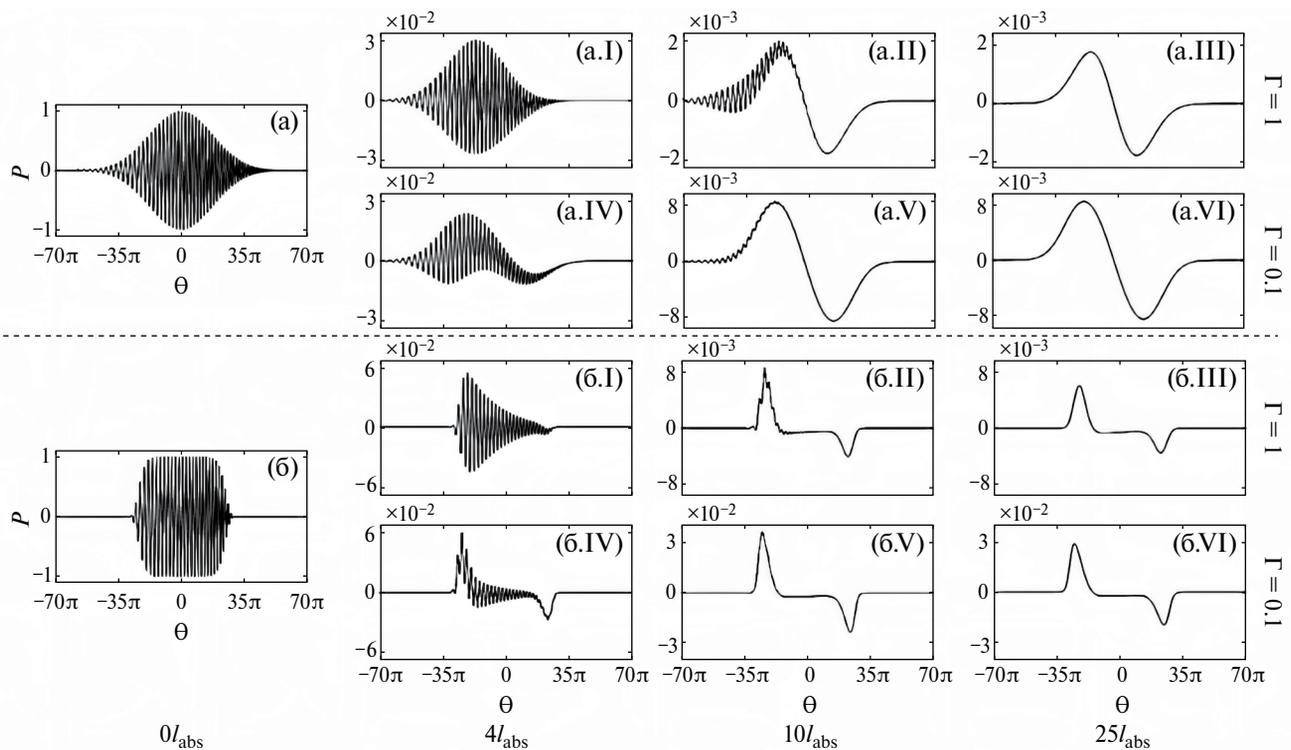


Рис. 6. Эволюция безразмерных профилей импульсных сигналов с (а) — гауссовской и (б) — гипергауссовской огибающими в квазилинейном ($\Gamma = 1$) и ударноволновом ($\Gamma = 0.1$) режимах распространения на различных расстояниях $Z = z/l_{\text{abs}}$: 0, 4, 10 и 25.

(рис. 6а) и гипергауссовской (рис. 6б) огибающими при прохождении расстояний $Z = z/l_{\text{abs}}$, равных 0, 4, 10 и 25, для квазилинейного ($\Gamma = 1$) и ударноволнового ($\Gamma = 0.1$) режимов распространения волны. Как и в случае спектров, здесь также видно, что проявление самодемпирования происходит на меньших расстояниях в ударноволновом режиме ($\Gamma = 0.1$) по сравнению с квазилинейным ($\Gamma = 1$). Отметим, что высокочастотные осцилляции на профиле демодулированного импульса ($Z = 4$) в ударноволновых режимах ($\Gamma = 0.1$, а.IV и б.IV) гораздо менее выражены по сравнению с квазилинейным случаем (рис. 6, а.I, а.IV, б.I и б.IV). Можно также заметить, что поскольку частота осцилляций увеличивается к правому краю исходных импульсов (рис. 6а, бб), то сигнал там раньше становится демодулированным за счет более раннего поглощения одиночных периодов, в то время как с левого края высокочастотные осцилляции сохраняются дольше. На расстояниях порядка $Z = 10$ в режиме сильной нелинейности ($\Gamma = 0.1$) профили демодулированных сигналов уже практически гладкие (рис. 6, а.V, б.V) и имеют в 4 раза большую амплитуду, чем в квазилинейном режиме ($\Gamma = 1$), где еще сохраняются высокочастотные осцилляции с левого края импульсов, достигая 20% от максимума (рис. 6, а.II, б.II). При распространении от $Z = 10$ до $Z = 25$ демодулированные импульсы практически не меняют своей формы

(рис. 6, а.II–а.III и а.V–а.VI, б.II–б.III и б.V–б.VI), однако для гипергауссовских импульсов эффекты линейного поглощения проявляются несколько сильнее, что также наблюдалось и в соответствующих спектрах (рис. 5в, 5г).

Результаты численного моделирования распространения прямоугольного импульса смешанных сигналов (гармонического + ЛЧМ) [11] в двух характерных режимах показаны на рис. 7 для расстояний $Z = z/l_{\text{abs}} = 0$ (серые кривые), 0.1 (синие кривые), 4 (черные кривые) и 25 (красные кривые). Как и в случае с модельными сигналами, в спектре импульса (рис. 7а, 7б) по мере его распространения наблюдается формирование разностных низкочастотных компонент исходно высокочастотной волны [3] с большей максимальной амплитудой в случае разрывного режима. Хотя безразмерная начальная ширина спектра прямоугольного ЛЧМ сигнала уже начального спектра обоих модельных импульсов, в силу значительной разницы между максимальной частотой f_0 и минимальной частотой в этом спектре, ширина его низкочастотной части при $Z > 0$ оказывается сравнимой с модельными сигналами. Стоит отметить, что в профиле смешанного импульса (рис. 7в, 7г) самодемпирование происходит внутри каждого цикла исходной огибающей, при этом наблюдается рост амплитуды демодулированных периодов огибающей (черные и красные кривые) по мере увеличения частоты колебаний к концу импульса. Это

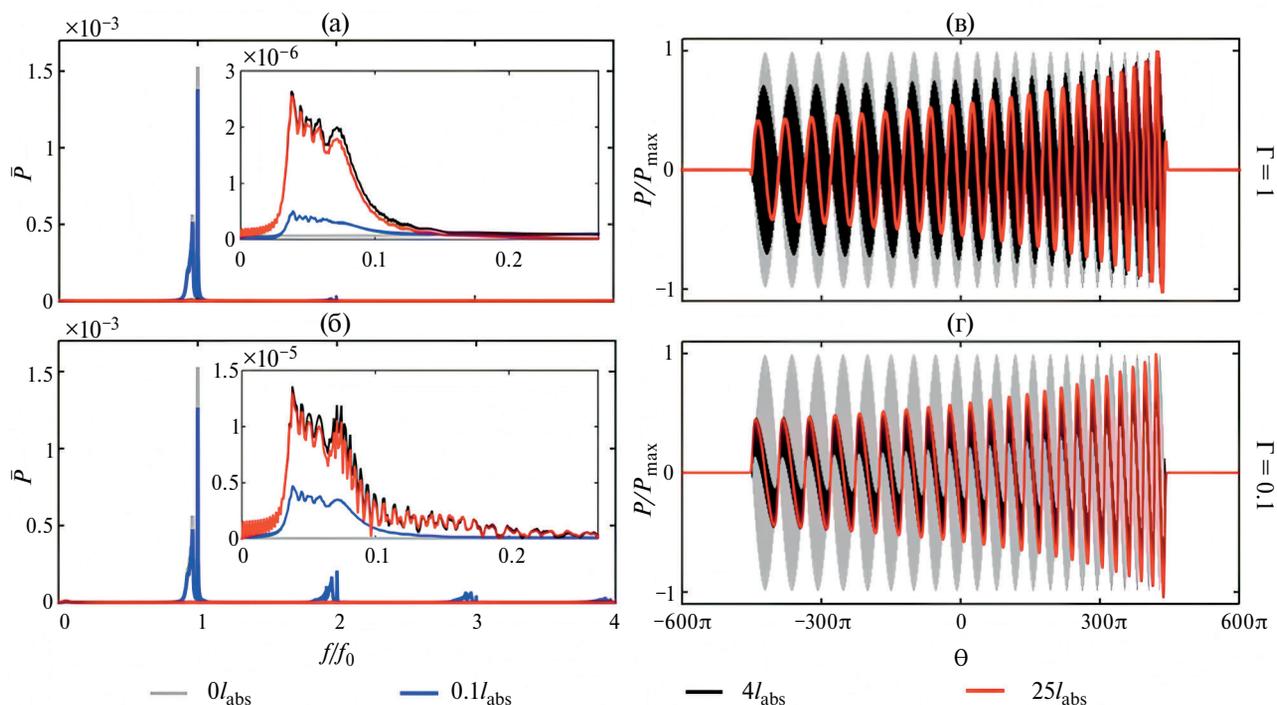


Рис. 7. (а, б) — Спектры и (в, г) — нормированные на максимум профили прямоугольного ЛЧМ + гарм. волна импульса для случаев (а, в) — квазилинейного ($\Gamma = 1$) и (б, г) — ударноволнового ($\Gamma = 0.1$) распространения на различных расстояниях $Z = z/l_{\text{abs}}$: 0 (серые кривые), 0.1 (синие кривые), 4 (черные кривые) и 25 (красные кривые).

связано с тем, что, в отличие от модельных сигналов, в исходном смешанном импульсе при $Z = 0$ все циклы огибающей имели одинаковую амплитуду, а с увеличением частот накачки нелинейные эффекты проявляются сильнее.

Расчет эффективности параметрической генерации низкочастотного излучения был проведен для рассматриваемых трех случаев импульсного начального возбуждения и различных режимов распространения волны ($\Gamma = 0.1, 0.3$ и 0.5). На рис. 8а построены графики зависимости введенной выше безразмерной метрики эффективности, E_{low}/E_0 (5), от пройденного безразмерного расстояния Z для гауссовского ЛЧМ импульса (красные кривые, которым соответствует шкала слева, выделенная красным цветом), гипергауссовского ЛЧМ импульса (черные штриховые кривые, шкала справа) и прямоугольного ЛЧМ импульса (черные пунктирные кривые, шкала справа). Как видно из рис. 8а, на малых расстояниях, пока нелинейные эффекты сказываются слабо, энергия низкочастотного сигнала зависит квадратично от расстояния Z , в соответствии с квазилинейным приближением [2]. Затем рост энергии замедляется. На

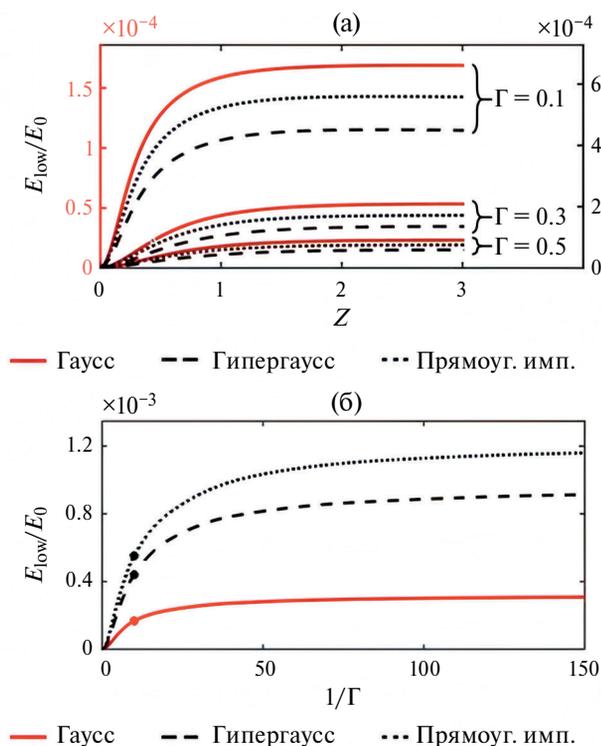


Рис. 8. Зависимость эффективности генерации низкочастотного излучения, E_{low}/E_0 , (а) — от безразмерного расстояния $Z = z/l_{\text{abs}}$ при $\Gamma = 0.1, \Gamma = 0.3$ и $\Gamma = 0.5$ и (б) — от обратного числа Гольдберга $1/\Gamma$ для гауссовского ЛЧМ импульса (красные кривые) — шкала слева, гипергауссовского ЛЧМ импульса (черные штриховые кривые) и прямоугольного ЛЧМ + гарм. волна импульса (черные пунктирные кривые) — шкала справа.

расстояниях порядка $Z = 1-1.5$, в зависимости от режима работы излучателя, происходит установление режима насыщения эффективности. При этом в ударноволновых режимах насыщение происходит раньше, чем в квазилинейных, что коррелирует с меньшими расстояниями установления формы и амплитуды низкочастотной части спектра относительно квазилинейного режима. Для гипергауссовского импульса эффективность генерации низкочастотного излучения примерно в 3 раза больше по сравнению с гауссовским импульсом, что связано с присутствием большего числа высокоамплитудных периодов заполнения огибающей исходного импульса накачки и, соответственно, более сильным проявлением нелинейных эффектов. Эффективность перекачки энергии в низкие частоты для прямоугольного ЛЧМ + гармоническая волна импульса близка к случаю сигнала с гипергауссовской огибающей. Отметим, что в рассматриваемых примерах конечная доля энергии, трансформируемой от высокочастотной накачки в низкочастотное излучение, в 30 раз больше для разрывного режима генерации ($\Gamma = 0.1$), чем для квазилинейного ($\Gamma = 1$). Таким образом, использование ударноволновых режимов позволяет существенно повысить эффективность параметрической генерации низкочастотного излучения.

На рис. 8б представлены зависимости эффективности генерации низкочастотного излучения E_{low}/E_0 от обратного числа Гольдберга $1/\Gamma \sim p_0$. Точками отмечены значения эффективности для рассматриваемых в работе ударноволновых режимов при $\Gamma = 0.1$, достижимых в работе исследованных ранее параметрических излучателей [11, 15]. В данной работе расчеты были выполнены вплоть до $\Gamma = 0.1/30$, т.е. с увеличением давления на излучателе в 30 раз, и в предельном случае $\Gamma = 0$. Как следует из рис. 8б, с ростом $1/\Gamma$ величина E_{low}/E_0 сначала растет согласно квазилинейному приближению как $1/\Gamma^2$ (квадратично) [2], затем рост переходит в линейный, а в пределе очень сильной нелинейности происходит насыщение. Максимальные значения эффективности в 1.2×10^{-3} , 0.9×10^{-3} и 0.3×10^{-3} (прямоугольный ЛЧМ + гармоническая волна, гипергауссовский и гауссовский ЛЧМ импульсы, соответственно) достигаются при $\Gamma = 0$, когда длина параметрических взаимодействий ограничивается только поглощением на ударных фронтах, и примерно в 2 раза превышают эффективность при $\Gamma = 0.1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе исследованы особенности нелинейной демодуляции высокочастотных импульсных сигналов при распространении плоских волн в среде, когда длина параметрических взаимодействий ограничивается как термовязким поглощением, так и дополнительным поглощением энергии волны на образующихся в профиле высокочастотных

волн накачки ударных фронтов, при разной степени проявления линейного и нелинейного поглощения.

Для описания нелинейного распространения импульсного сигнала и параметрических процессов в одномерной постановке, была разработана численная модель решения уравнения Бюргера во временном представлении. Моделирование нелинейного оператора проводилось на основе удароуправляющей схемы типа Годунова [31], поскольку спектральный подход, реализованный авторами ранее [27–29], требует учета большого числа гармоник и может быть оптимизирован лишь для двухчастотного параметрического взаимодействия, но не для случая импульсной накачки.

По сравнению со спектральным методом без оптимизации, построенный временной алгоритм позволяет описывать нелинейные и диссипативные эффекты при параметрических взаимодействиях в импульсных полях с выигрышем в сотни раз [27]. Рассмотренные примеры различных импульсных сигналов показали, что для режимов слабого проявления нелинейных эффектов установившаяся форма численно рассчитанных демодулированных профилей совпадает с соответствующими аналитическими выражениями, полученными в квазилинейном приближении как в отсутствие, так и при наличии частотной модуляции [2, 15], и качественно соответствует им в ударноволновых режимах.

Было также показано, что эффект нелинейной демодуляции высокочастотных импульсов различных типов и установления стационарного по форме и амплитуде низкочастотного импульса достигается в квазилинейном режиме на расстоянии порядка трех длин линейного поглощения высокочастотной накачки, а в ударноволновом режиме — на меньших расстояниях, порядка одной длины поглощения, при расстоянии образования ударного фронта, равном 0.1 от длины линейного поглощения ($\Gamma = 0.1$). При этом амплитуды спектральных компонент исходных ВЧ импульсов на этих расстояниях еще достаточно велики по сравнению с амплитудами НЧ части спектра и становятся сравнимыми с ней на дистанциях шести и трех длин поглощения для квазилинейного и ударноволнового режимов, соответственно. В предельном случае доминирующего влияния поглощения на ударных фронтах установление профиля низкочастотного импульса происходит на расстояниях порядка 20–30 характерных длин образования разрыва (наименьшее расстояние — для гауссовского импульса).

Эффективность генерации низкочастотных импульсов определялась по величинам достигаемых амплитуд демодулированного импульса и его энергии относительно соответствующих параметров исходных импульсов накачки. Так, установившаяся амплитуда давления низкочастотного импульса, нормированная к амплитуде исходного импульса

накачки, в ударноволновом случае ($\Gamma = 0.1$) была почти на порядок больше, чем в квазилинейном режиме ($\Gamma = 1$), несмотря на наличие дополнительного поглощения на образующихся в профиле волны разрывах. Продемонстрировано, что наличие у исходного сигнала более равномерной и близкой к прямоугольной огибающей, и, как следствие, более широкого спектра или же больших различий между минимальными и максимальными взаимодействующими частотами, способствует лучшей перекачки энергии в область низких частот. Относительная доля энергии E_{low}/E_0 , трансформируемой от высокочастотной накачки в область низких частот, в ударноволновых режимах существенно выше и составляет порядка 0.06% ($\Gamma = 0.1$) по сравнению с 0.002% в квазилинейном режиме ($\Gamma = 1$). В предельном случае $\Gamma \rightarrow 0$, когда параметрические эффекты ограничиваются только нелинейным поглощением на разрывах в профиле волны, эта величина дополнительно увеличивается в 2 раза.

Таким образом, при параметрической генерации низкочастотного импульса абсолютные величины его амплитуды и энергии возрастают при увеличении амплитуды исходных импульсов накачки и усилении нелинейных эффектов, демонстрируя, что переход к ударноволновым режимам распространения способствует более эффективному протеканию параметрических процессов. Развитый в работе временной алгоритм представляется перспективным при описании эффектов нелинейной демодуляции импульсных сигналов в разрывных режимах.

Работа выполнена при поддержке студенческих стипендий фонда «БАЗИС» 23-2-1-46-1 и 20-2-2-21-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зверев В.А.* Как зарождалась идея параметрической акустической антенны // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 5. С. 685–692.
2. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
3. *Berkhay H.O.* Possible exploitation of non-linear acoustics in underwater transmitting applications // *J. Sound Vib.* 1965. V. 2. № 4. P. 435–461.
4. *Zhou H., Huang S.H., Li W.* Parametric acoustic array and its application in underwater acoustic engineering // *Sensors.* 2020. V. 20. № 7. P. 2148.
5. *Yoneyama M., Fujimoto J., Kawamo Y., Sasabe S.* The audio spotlight: an application of nonlinear interaction of sound waves to a new type of loudspeaker design // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. V. 73. № 5. P. 1532–1536.
6. *Ji P., Tan E.-L., Gan W.-S., Yang J.* A comparative analysis of preprocessing methods for the parametric loudspeaker based on the Khokhlov-Zabolot-skaya-Kuznetsov equation for speech reproduction // *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.* 2011. V. 19. № 4. P. 937–946.

7. Gan W.-S., Yang J., Kamakura T. A review of parametric acoustic array in air // *Appl. Acoust.* 2012. V. 73. № 12. P. 1211–1219.
8. Li Y., Polyak D., Johnson E., Yecies D., Shevidi S., de la Zerda A., Gephart M.H., Chu S. Difference-frequency ultrasound imaging with non-linear contrast // *IEEE Trans. Med. Imaging.* 2020. V. 39. № 5. P. 1759–1766.
9. Chiou S.-Y., Forsberg F., Fox T.B., Needleman L. Comparing differential tissue harmonic imaging with tissue harmonic and fundamental gray scale imaging of the liver // *J. Ultrasound Med.* 2007. V. 26. № 11. P. 1557–1563.
10. Vos H.J., Goertz D.E., de Jong N. Self-demodulation of high-frequency ultrasound // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127. № 3. P. 1208–1217.
11. Esipov I., Naugolnykh K., Timoshenko V. The parametric array and long-range ocean research // *Acoustics today.* 2010. V. 6. № 2. P. 20–26.
12. Cheng Y., Zhao A., Hui J., An T., Zhou B. Parametric underwater transmission based on pattern time delay shift coding system // *Math. Probl. Eng.* 2018. V. 3. № 1. P. 8249245.
13. Shi C., Gan W.-S. Development of a parametric loud-speaker: a novel directional sound generation technology // *IEEE Potentials.* 2010. V. 29. № 6. P. 20–24.
14. Cervenka P., Alais P. Fourier formalism for describing nonlinear self-demodulation of a primary narrow ultrasonic beam // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 88. № 1. P. 473–481.
15. Averkiou M.A., Lee Y.-S., Hamilton M.F. Self-demodulation of amplitude- and frequency-modulated pulses in athermoviscous fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. № 5. P. 2876–2883.
16. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
17. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // *Акуст. журн.* 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
18. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
19. Aanonsen S.I. Numerical computation of the nearfield of a finite amplitude sound beam // *Tech. Rep.* № 73. 1983. Dept. of Math., Univ. of Bergen, Norway.
20. Tjøtta J.N., Tjøtta S., Vefring E.H. Propagation and interaction of two collimated finite amplitude sound beams // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 88. № 6. P. 2859–2870.
21. Khokhlova V.A., Souchon R., Tavakkoli J., Sapozhnikov O.A., Cathignol D. Numerical modeling of finite amplitude sound beams: Shock formation in the near-field of a cw plane piston source // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. № 1. P. 95–108.
22. Lee Y.S., Hamilton M.F. Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 97. № 2. P. 906–917.
23. Cleveland R.O., Hamilton M.F., Blackstock D.T. Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 99. № 6. P. 3312–3318.
24. Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 4. С. 560–570.
25. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков и предельные значения параметров разрывных волн // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 445–456.
26. Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 337–347.
27. Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Есинов И.Б., Хохлова В.А. Численная модель спектрального описания генерации ультразвуковой волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 2. С. 152–161.
28. Сергеева М.С., Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Метод численного расчета генерации ультразвуковых волн разностной частоты в условиях формирования ударного фронта // *Уч. зап. физ. фак. Мос. ун-та.* 2022. № 4. С. 2240101.
29. Kvashennikova A.V., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A., Esipov I.B. Fully nonlinear three-dimensional modeling of parametric interactions in the field of a dual-frequency acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 2024. V. 155. № 3. P. 1682–1693.
30. Аверьянов М.В. Экспериментальная и численная модель распространения нелинейных акустических сигналов в турбулентной атмосфере. Дисс. на соискание степ. канд. физ.-мат. наук. МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2008.
31. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // *J. Comp. Phys.* 2000. V. 160. № 1. P. 241–282.
32. Юлдашев П.В., Аверьянов М.В., Хохлова В.А., Оливьер С., Блан-Бенон Ф. Сферически расходящиеся ударные импульсы в нелинейной релаксирующей среде // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 1. С. 40–50.
33. Коннова Е.О., Хохлова В.А., Юлдашев П.В. Использование графических ускорителей при моделировании нелинейных ультразвуковых пучков с ударными фронтами на основе уравнения Вестервельта // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 1. С. 13–21.
34. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Метод определения параметров акустического поля в биологической ткани для терапевтических применений мощного фокусированного ультразвука // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 3. С. 380–390.
35. Сергеева М.С., Кващенко А.В. Моделирование во временном представлении генерации волны разностной частоты при взаимодействии интенсивных ультразвуковых волн накачки // *Сборник трудов Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2023».* М.: МАКС Пресс, 2023. С. 22–24.

Demodulation of pulsed acoustic signals in strongly nonlinear propagation regimes

**A. V. Kvashennikova^{a,*}, M. S. Sergeeva^a, P. V. Yuldashev^a,
I. B. Esipov^b, V. A. Khokhlova^a**

^a *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory 1, Moscow, 119991 Russia*

^b *Gubkin State University of Oil and Gas, Leninsky ave. 65, Moscow, 119991 Russia*

** e-mail: kvashennikovaav@my.msu.ru*

A one-dimensional nonlinear problem of parametric generation of low-frequency radiation is considered in the case of a pulsed high-frequency initial excitation capable of forming shock fronts in the wave profile. A numerical algorithm for solving the Burgers equation in the time domain using a Godunov-type shock-capturing scheme is developed. Examples of the propagation of model frequency-modulated signals with different envelope shapes at different ratios of nonlinear and dissipative effects, which limit the interaction length of pump waves are considered. Examples of waveforms and spectra evolution during self-demodulation of a high-frequency pump signal are given, with self-demodulation manifesting at shorter distances in strongly nonlinear propagation regimes due to additional attenuation of the wave energy at shock fronts. It is shown that the efficiency of low-frequency radiation generation increases in shockwave propagation modes.

Keywords: parametric interactions, pulsed pump waves, self-demodulation, Burgers equation, Godunov scheme