

ISSN 0320-7919

Том 69, Номер 4

Июль - Август 2023



АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 69, номер 4, 2023

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

Точечный источник сдвиговых SV-волн с вертикальной поляризацией в твердом слое

А. Д. Лапин 393

Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев

С. А. Назаров 398

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

Экспериментальные исследования влияния 3D-печати при 100% заполнении на упругие свойства нитевидных образцов полимера PLA

*А. Б. Володарский, А. И. Кокшайский, Н. И. Одина, А. И. Коробов,
Е. С. Михалев, Н. В. Ширгина* 410

Использование фокусированных ударно-волновых пучков для подавления эффектов диффузии при объемной тепловой абляции биоткани

П. А. Пестова, М. М. Карзова, П. В. Юлдашев, В. А. Хохлова 417

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

Возбуждение акустических мод гармониками тона отверстия в струйном осцилляторе Гельмгольца

А. А. Абдрашитов, Е. А. Марфин 430

Определение скорости и затухания акустической волны в жидкостях с различным акустическим импедансом с помощью акустического интерферометра

Б. Д. Зайцев, И. А. Бородина, А. А. Теплых, А. П. Семёнов 438

Акустические исследования плавления и кристаллизации эвтектических сплавов галлий–серебро в пористых стеклах

*А. Л. Пирозерский, Е. В. Чарная, Х. А. Абдуламонов, А. И. Недбай, Ю. А. Кумзеров,
А. В. Фокин, А. С. Хомутова* 446

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

Взаимодействие мод на киле тороса в широкой полосе частот

В. А. Григорьев, А. А. Луньков 453

Обнаружение эхо-сигналов с учетом многолучевости волновода и многобликовости отражателя

В. Н. Драченко, Г. Н. Кузнецов, А. Н. Михнюк 465

АКУСТИКА ПОМЕЩЕНИЙ. МУЗЫКАЛЬНАЯ АКУСТИКА

Моделирование и расчет влияния подрезки тональных отверстий деревянных духовых инструментов на смещение собственных частот воздушного канала

Р. А. Герасимов

478

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Информационно-статистический подход к анализу сигналов акустической эмиссии

В. И. Ерофеев, А. В. Иляхинский, В. М. Родюшкин, Д. А. Рябов, А. А. Хлыбов

490

Детектирование удаленной речи

В. Н. Сорокин

497

ИНФОРМАЦИЯ

В. А. Хохловой присуждена Серебряная медаль Рэлея—Гельмгольца

506

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.231.1

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК СДВИГОВЫХ SV-ВОЛН С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ В ТВЕРДОМ СЛОЕ

© 2023 г. А. Д. Лапин*

Акустический институт имени академика Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117209 Россия

*e-mail: lapin1932@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.

После доработки 25.11.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Найдено поле SV-источника поперечных волн в твердом однородном слое со свободными границами. На этих границах, помимо поперечных волн, возникают и продольные волны. Полное поле в слое характеризуется скалярным и векторным потенциалами. Вследствие осевой симметрии этого поля векторный потенциал имеет только угловую компоненту. Интегральное представление потенциалов получено методом Фурье–Бесселя. На основе теории вычетов поле в слое представлено в виде суперпозиции цилиндрических мод Лэмба. Рассчитаны амплитуды этих мод.

Ключевые слова: SV-источник поперечных волн, скалярный и векторный потенциал, метод Фурье–Бесселя, цилиндрические моды Лэмба

DOI: 10.31857/S0320791923600312, **EDN:** QSCGBS

ВВЕДЕНИЕ

Среди исследований полей в твердых телах можно выделить работы по расчетам полей различных точечных источников [1–8]. В работе [1] рассмотрено поле точечного источника силы в безграничной анизотропной среде. В [2] проанализировано поле SH-источника в слое. Поле вертикальной точечной, или линейной силы исследовано в [3]. Подробный анализ поля импульсного точечного силового источника в нестационарной постановке дан в [4]. Модовый анализ поля в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, при его возбуждении точечной силой проведен в [5]. Влияние ориентации точечной силы на поле в твердом полупространстве рассмотрено в [6]. В современном учебнике [7], рассматривающем асимптотические представления поля в безграничном твердом теле, перечислены, в частности, элементарные точечные источники: источник объемной скорости, источник силы и центр вращения. Наконец, в фундаментальной монографии [8] обсуждаются элементарные источники сейсмических полей. Предлагается компоновать их из точечных сил. Поля этих сил и их комбинаций содержат как потенциальную, так и вихревую компоненты. В книге пропагандируется теория двойной пары сил применительно к реальным процессам сейсмических процессов.

Настоящая работа посвящена расчету поля точечного источника сдвигового поля в твердом слое. Твердые тела отличаются от жидкостей тем,

что при деформациях в них возникают не только давления, но и сдвиговые упругие напряжения. Поэтому в твердых телах, помимо продольных волн того же типа, что и в жидкостях, могут распространяться и поперечные волны, в которых частицы колеблются перпендикулярно к направлению распространения. В сейсмологии сдвиговые волны с горизонтальной поляризацией называют SH-волнами, сдвиговые волны с вертикальной поляризацией называют SV-волнами. Элементарным точечным источником SH-волн является так называемый крутоль – сфера, замороженная в среду, совершающая колебания вокруг некоторой своей оси (рис. 1а). Элементарным точечным источником SV-волн является тор, замороженный в среду, поверхность которого совершает колебания вокруг направляющей тора (рис. 1б). Этот источник характерен тем, что его сила и момент равны нулю.

В работе *впервые* найдено поле точечного SV-источника волн в твердом однородном слое со свободными границами. Представим потенциальную часть смещения в виде градиента некоторого скаляра φ , а соленоидальную часть смещения в виде вихря векторного потенциала ψ [1, 2]:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\psi. \quad (1)$$

С учетом осевой симметрии остается только одна – угловая компонента векторного потенциала ψ и уравнение для нее также является скалярным. Источник на рис. 1а имеет как раз такую симмет-

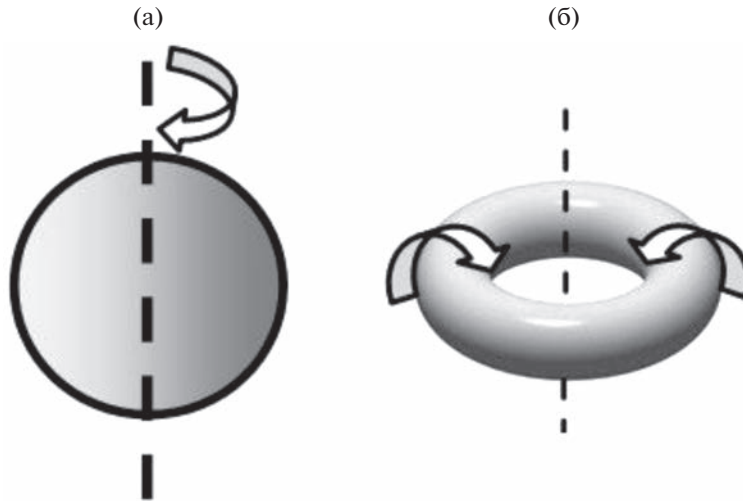


Рис. 1. (а) – Источник SH–волн, крутось, (б) – источник SV–волн, тор.

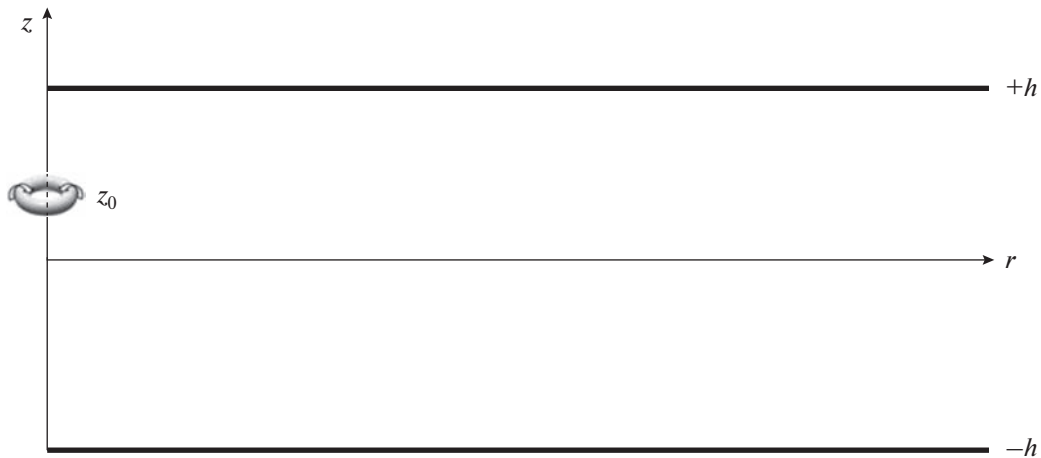


Рис. 2. Постановка задачи.

рию. При наличии свободных границ помимо поперечных волн возникнут и продольные волны.

ИЗЛУЧЕНИЕ SV-ИСТОЧНИКА ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ТВЕРДОМ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Геометрия задачи показана на рис.2. В цилиндрической системе координат (r, α, z) границы этого слоя совпадают с плоскостями $z = \pm h$. Точечный гармонический SV-источник, создающий поперечные волны с поляризацией в плоскости rz , расположен в точке $(r = 0, z = z_0)$, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Потенциал Ψ представим в виде производной $\psi \equiv \partial\phi/\partial r$. В работах [11, 12] показано, что граничные условия на свободных границах слоя просто записываются

через скалярные функции $\phi(r, z)$ и $\psi(r, z)$. Смещения в твердой среде получим по формулам

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений записываются через скаляры ϕ и ψ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \Delta\phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial\phi}{\partial z} + \Delta\phi - 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе. Условия обращения их в нуль при $z = \pm h$ дают с учетом волновых уравнений граничные условия:

$$z = \pm h, \quad k_t^2 \phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right), \quad (4)$$

$$-2 \frac{\partial \phi}{\partial z} = k_t^2 \phi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right),$$

где $k_l = \omega/c_l$ и $k_t = \omega/k_t$ — волновые числа продольной и поперечной волн.

Скалярные функции $\varphi(r, z)$ и $\phi(r, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \phi + k_t^2 \phi = F \delta(z - z_0) \delta_1(r), \quad (6)$$

где F — момент, направленный по угловому орту, вдоль образующей тора (рис. 1а). $\delta(z)$ — дельта-функция, а $\delta_1(r)$ равна нулю при $r \neq 0$ и обладает свойством

$$2\pi \int \delta_1(r) f(r) r dr = f(0). \quad (7)$$

Правая часть (6) является точечным источником поля SV-волн. Этот источник, в отличие от точечного источника силы, рассматриваемого в работах [1, 2, 4, 6], не излучает продольные Р-волны.

Используем преобразование Фурье—Бесселя

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad (8)$$

$$\phi(r, z) = \int_0^\infty \tilde{\phi}(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi,$$

$$\tilde{\varphi}(\xi, z) = \int_0^\infty \varphi(r, z) J_0(\xi r) r dr, \quad (9)$$

$$\tilde{\phi}(\xi, z) = \int_0^\infty \phi(r, z) J_0(\xi r) r dr,$$

где $J_0(\xi r)$ — функция Бесселя. Пользуясь формулами (5), (8)–(9), получим:

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} + (k_t^2 - \xi^2) \tilde{\phi} = 0. \quad (10)$$

Аналогично из формул (6)–(9) получим

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} + (k_t^2 - \xi^2) \tilde{\phi} = \frac{F}{2\pi} \delta(z - z_0). \quad (11)$$

Из граничных условий (4) при помощи преобразования Фурье—Бесселя (8), (9) получим для $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$ соотношения при $z = \pm h$:

$$(\xi^2 - k_t^2/2) \tilde{\phi} = \xi^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = (\xi^2 - k_t^2/2) \tilde{\phi}. \quad (12)$$

Рассчитаем скачок производной $\partial \tilde{\phi}/\partial z$ при $z = z_0$. Проинтегрируем уравнение (11) в пределах от $(z_0 - \varepsilon)$ до $(z_0 + \varepsilon)$, в результате получим

$$\{\partial \tilde{\phi}/\partial z\}_{z_0+0} - \{\partial \tilde{\phi}/\partial z\}_{z_0-0} = \frac{F}{2\pi}. \quad (13)$$

Сама же функция $\tilde{\phi}$ непрерывна:

$$\tilde{\phi}(\xi, z_0 + 0) = \tilde{\phi}(\xi, z_0 - 0). \quad (14)$$

Фурье-компоненты $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$ ищем в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi, z) = A(\xi) \cos(\varsigma_l z) + C(\xi) \sin(\varsigma_l z), \quad (15)$$

$$-h < z < h,$$

$$\tilde{\phi}(\xi, z) = M(\xi) \cos(\varsigma_l z) + N(\xi) \sin(\varsigma_l z), \quad (16)$$

$$-h < z < z_0,$$

$$\tilde{\phi}(\xi, z) = B(\xi) \sin(\varsigma_l z) + D(\xi) \cos(\varsigma_l z), \quad (17)$$

$$z_0 < z < h, \quad \varsigma_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2}, \quad \varsigma_t = \sqrt{k_t^2 - \xi^2}.$$

Подставляя (15)–(17) в формулы (12)–(14), получим систему алгебраических уравнений для коэффициентов A, C, M, N, B, D :

$$(\xi^2 - k_t^2/2)[A \cos(\varsigma_l h) + C \sin(\varsigma_l h)] =$$

$$= \xi^2 \varsigma_l [B \cos(\varsigma_l h) - D \sin(\varsigma_l h)],$$

$$(\xi^2 - k_t^2/2)[A \cos(\varsigma_l h) - C \sin(\varsigma_l h)] =$$

$$= \xi^2 \varsigma_l [M \cos(\varsigma_l h) + N \sin(\varsigma_l h)],$$

$$\varsigma_l [A \sin(\varsigma_l h) + C \cos(\varsigma_l h)] =$$

$$= (\xi^2 - k_t^2/2)[N \sin(\varsigma_l h) + M \cos(\varsigma_l h)],$$

$$\varsigma_l [B \cos(\varsigma_l z_0) - D \sin(\varsigma_l z_0)] -$$

$$- \varsigma_l [M \cos(\varsigma_l z_0) - N \sin(\varsigma_l z_0)] = \frac{F}{2\pi},$$

$$[B \sin(\varsigma_l z_0) + D \cos(\varsigma_l z_0)] =$$

$$= [M \sin(\varsigma_l z_0) + N \cos(\varsigma_l z_0)].$$

Вычислив эти коэффициенты и подставив их в формулы (15)–(17), получим $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$. Формулы (8), где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\phi}$ определены указанным способом, являются интегральным представлением поля в твердом слое.

Волны в твердом слое можно разделить на две группы: в одной из них смещения симметричны относительно средней плоскости слоя, т.е. имеют место равенства $u_r(z) = u_r(-z)$, $u_z(z) = -u_z(-z)$, а в другой группе смещения антисимметричны, т.е. $u_r(z) = -u_r(-z)$, $u_z(z) = u_z(-z)$. Используя свойства цилиндрических функций, получим следующие формулы для потенциалов симметричных и антисимметричных волн:

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ \varphi^{(s)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \sin(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ \varphi^{(a)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \sin(\xi_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ \varphi^{(a)}(r, z) &= 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} D(\xi) \cos(\zeta_l z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi,\end{aligned}$$

где $H_0^{(1)}(\xi r)$ – функция Ханкеля.

Рассчитаем эти потенциалы. Начнем с потенциала $\varphi^{(s)}$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(r, z) &= \frac{F}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q^{(s)}(\xi)}{\Delta^{(s)}(\xi)} \sin(\zeta_l z_0) + \cos(\zeta_l z_0) \right) \times \\ &\times \frac{\sin(\zeta_l z)}{\zeta_l} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}Q^{(s)}(\xi) &= (2k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) - 4\xi^2 \zeta_l \operatorname{tg}(\zeta_l h), \\ \Delta^{(s)}(\xi) &= (k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) + 4\xi^2 \zeta_l \operatorname{tg}(\zeta_l h).\end{aligned}$$

Замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости ξ . Поле $\varphi^{(s)}(r, z)$ получим в виде суммы вычетов в полюсах, лежащих в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned}\varphi^{(s)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(s)}(r, z), \\ \varphi_n^{(s)}(r, z) &= B_n \sin(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ B_n &= \frac{iF}{4} \left\{ \frac{\xi(k_l^2 - 2\xi^2)^2 \sin(\zeta_l z_0)}{\zeta_l \cos^2(\zeta_l h) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta^{(s)}(\xi)} \right\}_{\xi=\xi_n},\end{aligned} \quad (18)$$

где ξ_n – n -й корень уравнения $\Delta^{(s)}(\xi) = 0$.

Аналогично получим потенциал $\varphi^{(a)}$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(a)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(a)}(r, z), \\ \varphi_n^{(a)}(r, z) &= A_n \cos(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ A_n &= -B_n \left\{ \frac{2\xi^2 \zeta_l \cos(\zeta_l h)}{(k_l^2 - 2\xi^2) \cos(\zeta_l h)} \right\}_{\xi=\xi_n}.\end{aligned} \quad (19)$$

Потенциалы $\varphi_n^{(s)}, \varphi_n^{(a)}$ дают n -ю симметричную цилиндрическую моду Лэмба.

Потенциалы антисимметричного поля получим по формулам:

$$\begin{aligned}\varphi^{(a)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(a)}(r, z), \\ \varphi_n^{(a)}(r, z) &= D_n \cos(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ \varphi^{(a)}(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(a)}(r, z), \\ \varphi_n^{(a)}(r, z) &= C_n \sin(\sqrt{k_l^2 - \xi_n^2} z) H_0^{(1)}(\xi_n r), \\ D_n &= -\frac{iF}{4} \left\{ \frac{\xi(k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) \cos(\zeta_l z_0)}{\zeta_l \sin(\zeta_l h) \cos(\zeta_l h) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta^{(a)}(\xi)} \right\}_{\xi=\xi_n}, \\ C_n &= D_n \left\{ \frac{2\xi^2 \zeta_l \sin(\zeta_l h)}{(k_l^2 - 2\xi^2) \sin(\zeta_l h)} \right\}_{\xi=\xi_n},\end{aligned}$$

$$\Delta^{(a)}(\xi) = (k_l^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg}(\zeta_l h) + 4\xi^2 \zeta_l \operatorname{tg}(\zeta_l h),$$

где ξ_n – n -й корень уравнения $\Delta^{(a)}(\xi) = 0$. Потенциалы $\varphi_n^{(a)}, \varphi_n^{(a)}$ дают n -ю антисимметричную цилиндрическую моду Лэмба. Формулы для потенциалов $\varphi_n^{(s)}$ и $\varphi_n^{(a)}$ не изменяются при замене $z \leftrightarrow z_0$, и поэтому они справедливы во всем твердом слое $-h < z < h$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено поле точечного SV-источника в твердом однородном слое со свободными границами. Это поле характеризуется скалярным и векторным потенциалами. Вследствие осевой симметрии поля векторный потенциал имеет только угловую компоненту. Интегральное представление потенциалов получено методом Фурье–Бесселя. На основе теории вычетов поле этого источника представлено в виде суперпозиции цилиндрических мод Лэмба. Рассчитаны амплитуды этих мод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулин А.В., Тюриков Л.Г. Поле точечного источника в упругой однородной анизотропной среде // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 741–747.
2. Заславский Ю.М., Заславский В.Ю. Анализ акустического поля, возбуждаемого виброисточником в упругом слое и окружающей среде // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 845–852.
3. Кузнецов С.В., Терентьева Е.О. Плоская внутренняя задача Лэмба: волны в эпицентральной зоне от вертикального силового источника // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 387–399.
4. Киселев А.П., Тагирджанов А.М. Парадоксальные свойства нестационарных полей точечных источников в изотропной упругой среде // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 428–431.

5. *Nealy J.L., Collis J.M., Frank S.D.* Normal mode solutions for seismo-acoustic propagation resulting from shear and combined wave point sources // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. EL95.
6. *Yuxiang Dai, Shouguo Yan, Bixing Zhang.* Acoustic Field Excited by Single Force with Arbitrary Direction in Semi-Infinite Elastic Space // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. № 3. P. 235–245.
7. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.
8. *Аки К., Ричардс П.А.* Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 520 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
10. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
11. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
12. *Бреховских Л.М.* О волноводных явлениях в твердых слоистых средах с непрерывно изменяющимися параметрами // *Акуст. журн.* 1968. Т. 14. № 2. С. 194.

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 517.958:531.33:517.956.8

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ ПРИ РАЗЛИЧНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ УЧАСТКОВ ФИКСАЦИИ ЕЕ КРАЕВ

© 2023 г. С. А. Назаров*

Институт проблем машиноведения РАН, Большой пр. 61, В.О., Санкт-Петербург, 199034 Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Исследуются частоты собственных колебаний и захваченные волны в изотропной и однородной упругой полуполосе. При разных конфигурациях зон жесткого защемления и свободного края получена информация об отсутствии или наличии собственных частот ниже, а в некоторых случаях и выше точки отсечки непрерывного спектра. Выведены оценки кратности дискретного спектра и построены разнообразные асимптотические представления захваченных волн и их частот.

Ключевые слова: изотропная полуполоса, захваченные упругие волны, условия жесткого крепления и свободного края, асимптотика, трещина

DOI: 10.31857/S0320791923600518, **EDN:** TWHVCA

ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ О СПЕКТРЕ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях на частоте $\omega > 0$ упругой полубесконечной полосы $\Pi = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \in (0, L)\}$ (далее полуполосы; рис. 1а), изготовленной из изотропного однородного материала с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$. Вектор смещений $u = (u_1, u_2)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$-\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u = \rho \omega^2 u \text{ на } \Pi. \quad (1)$$

При этом $\nabla = \text{grad}$, $\nabla \cdot = \text{div}$ и $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа. Сведем размер $L > 0$ и плотность $\rho > 0$ к единице. На участках Γ_D и Γ_N границы $\partial \Pi$ поставим краевые условия жесткой заделки (Дирихле) и свободного края (Неймана)

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\sigma_j^{(n)}(u) := n_1 \sigma_{1j}(u) + n_2 \sigma_{2j}(u) = 0 \text{ на } \Gamma_N, \quad (3)$$

$$j = 1, 2.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали, а в формулах

$$\sigma_{jk}(u) = 2\mu \varepsilon_{jk}(u) + \lambda \delta_{j,k} (\varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u)), \quad (4)$$

$$\varepsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad j, k = 1, 2,$$

фигурируют декартовы компоненты тензоров напряжений $\sigma(u)$ и деформаций $\varepsilon(u)$, а также символ

Кroneкера $\delta_{j,k}$. Вариационная формулировка задачи (1)–(3) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E(u, \psi; \Pi) := \sum_{j,k=1,2} (\sigma_{jk}(u), \varepsilon_{jk}(\psi))_{\Pi} = \omega^2 (u, \psi)_{\Pi}, \quad (5)$$

$$\psi \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D),$$

в котором $E(u, \psi; \Pi)$ — удвоенная упругая энергия полуполосы, $(\cdot)_{\Pi}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi)$, а $H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ — пространство Соболева вектор-функций, подчиненных условиям Дирихле (2).

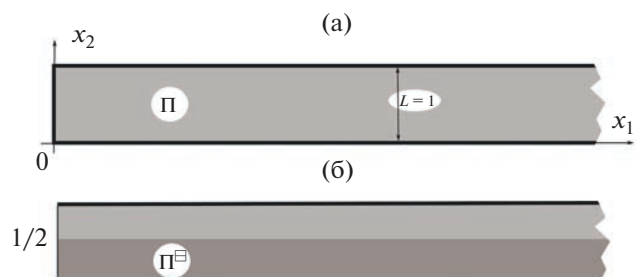


Рис. 1. Полоса Π единичной толщины и ее половина $\Pi^{\square}$. Защемленная поверхность отмечена более жирными линиями — (б) только боковые стороны и (а) вместе с торцом.

Далее будет изучен спектр $\mathfrak{p}$ задачи (1)–(3) при разных способах разбиения границы $\partial\Pi$ на участки жесткой заделки Γ_D и свободного края Γ_N .

Вопрос о наличии или отсутствии захваченных волн в упругой полуполосе, важный сам по себе, также возникает при изучении собственных колебаний тонких пластин и балок, точнее при анализе явления пограничного слоя около их кромок, и в диагностике накопления повреждений в соединительных зонах. Для скалярных задач соответствующие конструкции собственных мод вводились и обосновывались, например, в статьях [3] и [4], но для векторных задач теории упругости плановые исследования не публиковались. В данной работе рассматриваются векторные упругие поля, собственные задачам о деформации тонких упругих прокладок или плит, закрепленных вдоль одного из оснований или зажатых в малой окрестности кромки. При разрыве клеевых соединений возникают зоны отслоения пластин, которые далее называем трещинами, и для исследования их влияния на спектр применяем аппарат механики разрушения (ср. [5, 6], [7, гл. 7] и др.).

Начнем с простейших случаев $\Gamma_N = \emptyset := \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\}$ (зажаты боковые стороны; рис. 1б) и $\Gamma_N = \partial\Pi \setminus \mathfrak{w}$ (закреплен также торец полуполосы; рис. 1а). Известно (ср. расчеты в работе [8]), что в обоих случаях непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c$ задачи (5) – луч $[\omega_+, +\infty)$ с точкой отсечки

$$\omega_+ = \pi\sqrt{\mu}. \quad (6)$$

При $\Gamma_N = \emptyset$ (рис. 1а) дискретный спектр $\mathfrak{p}_d$ пуст. Воспроизведем доказательство из работы [8], основанное на классическом приеме [9]. Производная $u' = \partial u / \partial x_1$ собственной моды $u \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ попадает в пространство $H_0^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \mathfrak{w})$ благодаря условию (2) на боковых сторонах и слабой сингулярности $O(r^\Lambda)$ с показателем $\Lambda > 1$ поля смещений в угловых точках раствором $\pi/2$ (см. [10] и, например, [11, гл. III, § 8]). При помощи соотношений (2) и (4), а также формулы интегрирования по частям получаем равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int_{\mathfrak{w}} \left(\sigma_{1j}(u) u'_j - u_j \sigma_{1j}(u') \right) dx_2 = \\ &= \int_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 \right) dx_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, поле u аннулируется на торце $\mathfrak{w}$ вместе со своими первыми производными, что невозможно в силу теоремы о единственности продолжения решений системы дифференциальных уравнений Ламе (см., например, книгу [12, гл. 4]). Итак, $u = 0$ всюду в полуполосе, т.е. соб-

ственных мод не существует на любой частоте, а значит, пуст не только дискретный, но и точечный спектр $\mathfrak{p}_p$ (собственных частот нет и внутри непрерывного спектра $\mathfrak{p}_c$).

Убедимся в том, что в случае $\Gamma_N = \mathfrak{w}$ (торец свободен от внешних воздействий; рис. 1б) имеется хотя бы одна собственная частота ниже точки отсечки ω_+ . Поскольку боковые стороны полуполосы Π жестко закреплены, по-прежнему $\mathfrak{p}_c = [\omega_+, +\infty)$, а точке отсечки отвечает не зависящая от продольной координаты x_1 волна

$$w_+(x_2) = e_{(1)} \sin(\pi x_2), \quad (8)$$

где $e_{(j)}$ – орт оси x_j . Согласно минимальному принципу [13, теорема 10.2.1] нижняя грань $\mathfrak{p}$ всего спектра $\mathfrak{p}$ задачи (5) вычисляется по формуле

$$(\mathfrak{p})^2 = \inf_{u \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)} \frac{E(u, u; \Pi)}{\|u; L^2(\Pi)\|^2}. \quad (9)$$

Таким образом, соотношение $\mathfrak{p} < \omega_+$, обеспечивающее непустоту дискретного спектра $\mathfrak{p}_d$ (при этом $\omega_1 = \mathfrak{p}$ – первая, наименьшая, собственная частота), эквивалентно наличию пробной вектор-функции $u^\delta \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$, для которой выполнено неравенство

$$E(u^\delta, u^\delta; \Pi) < \omega_+^2 \|u^\delta; L^2(\Pi)\|^2. \quad (10)$$

Воспользуемся приемом из работы [14] и положим

$$u^\delta(x) = w_+(x_2) e^{-\delta x_1} + \sqrt{\delta} \psi(x), \quad (11)$$

где δ – малое положительное число, а ψ – гладкая вектор-функция с носителем в замкнутом квадрате $Q = [0, 1/2] \times [1/4, 3/4] \subset \Pi \cap \mathfrak{w}$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega_+^2 \|u^\delta; L^2(\Pi)\|^2 &= \pi^2 \mu \int_0^{+\infty} e^{-2\delta x_1} dx_1 \int_0^1 \sin^2(\pi x_2) dx_2 + \\ &+ 2\pi^2 \mu \sqrt{\delta} \int_Q w_+(x_2) \psi(x) dx + O(\delta), \\ E(u^\delta, u^\delta; \Pi) &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-2\delta x_1} dx_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \sin(\pi x_2) \right)^2 dx_2 + \\ &+ 2\sqrt{\delta} E(w_+, \psi; Q) + O(\delta). \end{aligned}$$

Подставим эти формулы в соотношение (10) и заметим, что слагаемые порядка $1/\delta$ в правой и левой частях взаимно уничтожаются. Таким образом, после интегрирования по частям само соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &> 2\sqrt{\delta} (E(w_+, \psi; Q) - \omega_+^2 (w_+, \psi)_Q) - c\delta = \\ &= -2\sqrt{\delta} \int_0^1 \sum_{j=1,2} \psi_j(0, x_2) \delta_{1j}(w_+; 0, x_2) dx_2 - c\delta. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\sigma_{11}(w_{\mp}; 0, x_2) = 0$ и $\sigma_{12}(w_{\mp}; 0, x_2) = \mu \cos(\pi x_2)$, можно подобрать компоненту ψ_2 так, чтобы последний интеграл в формуле (12) стал отрицательным, а ее правая часть — положительной при малом $\delta > 0$. Итак, для пробной функции (11) в самом деле выполнено неравенство (10) и, следовательно, дискретный спектр $\mathfrak{p}_d$ содержит собственную частоту $\omega_1 < \omega_{\mp}$.

ИСКУССТВЕННАЯ ТОЧКА ОТСЕЧКИ

Разделим полуполосу Π надвое и сузим задачу (1)–(3) на нижнюю половину $\Pi^{\square} = \{x \in \Pi : x_2 \in (0, 1/2)\}$ (тонирована на рис. 1б), назначив на средней линии $\Sigma_{1/2} = \{x : x_1 > 0, x_2 = 1/2\}$ искусственные краевые условия

$$u_1(x_1, 1/2) = 0, \quad \sigma_{22}(u; x_1, 1/2) = 0 \quad \text{при } x_1 > 0.$$

Продолжения решения $u \in H^1(\Pi^{\square})$, четное для компоненты u_2 и нечетное для компоненты u_1 , дают (гладкое) решение исходной задачи в цельной полуполосе Π , а точка отсечки непрерывного спектра задачи в $\Pi^{\square}$ равна

$$\omega_{\mp}^{\square} = \min \{2\pi\sqrt{\mu}, \pi\sqrt{\lambda + 2\mu}\}.$$

При коэффициенте Пуассона $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu) \in [0, 1/3]$ на пороге в уполовиненной полосе имеется аналогичная (6) волна

$$w_{\mp}^{1\square}(x_2) = \sin(2\pi x_2)e_{(1)},$$

а конструкции из второй части предыдущего раздела предоставляют собственную частоту $\omega_1^{\square} \in (0, \omega_{\mp}^{\square})$ задачи в $\Pi^{\square}$, причем согласно описанной процедуре продолжения собственной моды она попадает в точечный спектр $\mathfrak{p}_p$ исходной задачи в Π . Справедливо строгое неравенство $\omega_1^{\square} > \omega_1$, так как первые компоненты соответствующих собственных мод обладают разным свойством нечетности/четности относительно переменной $x_2 - 1/2$.

Если же $\nu \in (1/3, 1/2)$, то аналогичные действия с не зависящей от продольной координаты волной

$$w_{\mp}^{2\square}(x_2) = \sin(\pi x_2)e_{(2)}$$

дают собственную частоту $\omega_1^{2\square} \in (\omega_1, \omega_{\mp}^{\square})$. Для $\nu = 1/3$ полученные таким способом две частоты $\omega_1^{\square}$ и $\omega_1^{2\square}$, вообще говоря, могут совпасть.

Остается невыясненным вопрос, попадают или нет частоты $\omega_1^{i\square}$ на интервал $(0, \omega_{\mp})$, т.е. принадлежат ли они дискретному спектру $\mathfrak{p}_d$ или

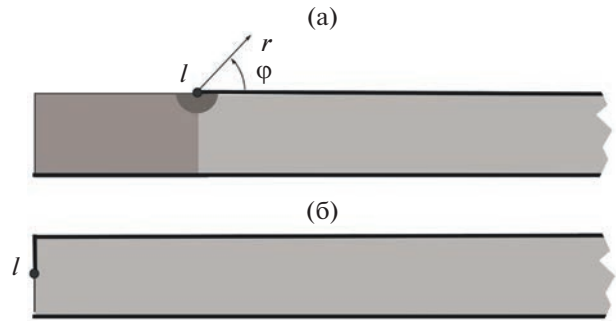


Рис. 2. (а) – Полоса с трещиной $\Upsilon(\ell)$ на верхнем основании, а также полярные координаты и вырезаемый полукруг. (б) – Трещина $\mathfrak{p}(\ell)$ длиной ℓ на торце. Жирные линии – зоны защемления границы.

оказываются вкрапленными в непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c$ задачи (1)–(3).

Отметим, что другая группа искусственных краевых условий

$$u_2(x_1, 1/2) = 0, \quad \sigma_{12}(u; x_1, 1/2) = 0 \quad \text{при } x_1 > 0 \quad (13)$$

бесполезна для обнаружения новых собственных частот посредством минимального принципа (9), так как у задачи в зауженной полуполосе $\Pi^{\square}$ с условиями (13) сохраняется точка отсечки (6).

ОТСЛОЕНИЕ ВЕРХНЕГО ОСНОВАНИЯ ПОЛУПОЛОСЫ

Пусть на рис. 2а при $\ell > 0$

$$\Gamma_D = \Sigma_- \cup \Sigma_+(\ell), \quad \Sigma_- = \{x : x_1 > 0, x_2 = 0\}, \quad (14)$$

$$\Sigma_+(\ell) = \{x : x_1 > \ell, x_2 = 1\}.$$

Иными словами, на верхнем основании $\Sigma_+ := \Sigma_+(0)$ образовалась трещина $\Upsilon(\ell) = \{x : x_1 \in (0, \ell), x_2 = 1\}$, но нижнее основание Σ_- и бесконечный участок $\Sigma_+(\ell)$ верхнего остались жестко закрепленными. Точка отсечки (6) сохранилась, а второй прием из предыдущего раздела с прежней пробной вектор-функцией (11) устанавливает непустоту дискретного спектра при всех $\ell \geq 0$. Получим дополнительную информацию о кратности $\#\mathfrak{p}_d(\ell)$ и образующих $\mathfrak{p}_d(\ell)$ собственных частотах

$$\omega_1(\ell) \leq \omega_2(\ell) \leq \dots \leq \omega_{\#\mathfrak{p}_d(\ell)}(\ell). \quad (15)$$

Они вычисляются при помощи максиминимального принципа

$$\omega_j(\ell)^2 = \max_{\mathcal{E}_j} \inf_{u \in \mathcal{E}_j \setminus \{0\}} \frac{E(u, u; \Pi)}{\|u; L^2(\Pi)\|^2}, \quad (16)$$

где $\mathcal{E}_j$ — любое подпространство в $H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ с размерностью $j - 1$, в частности, $\mathcal{E}_1 = H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$. Более точно, теорема 10.2.2 в [13] гарантирует следующее: если при некотором j величина из правой части (16) строго меньше $\omega_{\dagger}^2 = \mu\pi^2$, то, во-первых, $\#p_d(\ell) \geq j$ и, во-вторых, корень квадратный из этой величины — собственная частота с номером j из списка (15). Поскольку $\mathcal{E}_j(\ell_1) \subset \mathcal{E}_j(\ell_2)$ при $\ell_1 < \ell_2$, а дробь Рэлея в формуле (16) не зависит от способа постановки краевых условий, справедливо неравенство $\omega_j(\ell_1) > \omega_j(\ell_2)$, т.е. функции

$$\ell \mapsto \omega_j(\ell) \quad (17)$$

— монотонно убывающие на лучах $(\ell_j, +\infty)$; здесь $\ell_j \geq 0$ — длина трещины, при которой происходит приращение кратности дискретного спектра (см. ниже). Убывание строгое: собственная мода $u^j(x; \ell_1)$ не может быть пропорциональна $u^j(x; \ell_2)$, так как иначе она удовлетворяет обоим краевым условиям (2) и (3) на отрезке $Y(\ell_2) \setminus Y(\ell_1)$, что противоречит упоминавшейся теореме о единственности продолжения решения системы Ламе.

Сначала получим простую, но грубую оценку кратности $\#p_d(\ell)$ дискретного спектра. С этой целью опять применим максиминимальный принцип (16) с пробными функциями

$$u^k(x) = e_{(1)} \cos\left(\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right), \quad (18)$$

$$x_1 \in (0, \ell),$$

продолженными нулем на усеченную полуполосу $\Pi^\ell = (\ell, +\infty) \times (0, 1)$ (оставлена без глубокого тонирования на рис. 2а) при сохранении класса Соболева H^1 . Вычислим дробь Рэлея при $j \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|u^j; L^2(\Pi)\|^2 &= \frac{\ell}{4}, \quad E(u^j, u^j; \Pi) = \\ &= \mu \frac{\pi^2}{4} \int_0^\ell \cos^2\left(\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{\ell}\right) dx_1 \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) dx_2 + \\ &\quad + \frac{\lambda + 2\mu}{\ell^2} \pi^2 \left(j - \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^\ell \sin^2\left(\pi\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{x_1}{\ell}\right) \times \\ &\quad \times dx_1 \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) dx_2 = \mu \frac{\pi^2}{16} \ell + \frac{\lambda + 2\mu}{4\ell} \pi^2 \left(j - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая дробь Рэлея равна

$$\mu \frac{\pi^2}{4} + (\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2}{\ell^2} \left(j - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (19)$$

и при натуральном индексе j , подчиненном соотношению

$$j < J(\ell) := \frac{1}{2} \left(1 + \ell \sqrt{\frac{3\mu}{\lambda + 2\mu}}\right),$$

правая часть формулы (16), вычисленная для вектор-функции (18), строго меньше квадрата точки отсечки (6), т.е. теорема 10.2.2 в [13], в частности, показывает, что кратность дискретного спектра $\#p_d(\ell)$, строго меньшая $J(\ell)$, неограниченно возрастает при $\ell \rightarrow +\infty$.

Обнаруженная оценка кратности неточная и ее можно улучшить для достаточно длинных трещин, вычислив асимптотику собственных частот при $\ell \rightarrow +\infty$. Для этого построим одномерную модель длинной (тонкой после масштабирования) балки $\Xi(\ell) = (0, \ell) \times (0, 1)$ (глубоко тонирована на рис. 2а) с заземленными нижним основанием и торцом $\bar{\omega}(\ell) = \{x : x_1 = \ell, x_2 \in (0, 1)\}$. Примем асимптотический анзац для собственной моды

$$\begin{aligned} u(x) &= v(\eta) e_{(1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) + V_2(x_2) e_{(2)} \frac{1}{\ell} \frac{dv}{d\eta}(\eta) + \\ &\quad + V_1(x_2) e_{(1)} \frac{1}{\ell^2} \frac{dv}{d\eta}(\eta) + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\eta = x_2/\ell$ — растянутая продольная координата, а многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа. Подставим выражение (20) в систему (1) со спектральным параметром

$$\omega^2 = \omega_{\ddagger}^2 + \ell^{-2}\beta + \dots, \quad (21)$$

где

$$\omega_{\ddagger} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu} = \frac{1}{2} \omega_{\dagger}. \quad (22)$$

Прделаем то же с краевыми условиями при $x_1 \in (0, \ell)$ или $\eta \in (0, 1)$. Заметив, что члены, содержащие саму функцию v , взаимно уничтожаются, соберем множители при производной $\ell^{-1} dv/d\eta$ и получим следующую скалярную задачу для компоненты V_2 :

$$-(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 V_2}{dx_2^2} - \frac{\pi^2}{4} \mu V_2 = \frac{\pi}{2} (\lambda + \mu) \cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) \quad (23)$$

при $x_2 \in (0, 1)$,

$$V_2(0) = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{dV_2}{dx_2}(1) = -\lambda. \quad (24)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_2(x_2) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

а коэффициенты

$$B = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \right)^{-1} \left(2\Lambda - \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \right) > 0, \quad (26)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

включают положительные косинус и синус, причем $\sin(\pi\Lambda/2) \leq \pi\Lambda/2 < 2\Lambda$.

В силу формулы (21) коэффициенты при ℓ^{-2} в системе (21) образуют уравнение

$$\begin{aligned} & -\mu \left(\frac{d^2 V_1}{dx_2^2} + \frac{\pi^2}{4} V_1 \right) \frac{d^2 v}{d\eta^2} = \\ & = F_1 := \left((\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \beta v \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{dV_2}{dx_2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} \quad \text{при } x_2 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Это уравнение, снабженное краевыми условиями

$$V_1(0) = 0, \quad \mu \frac{dV_1}{dx_2}(1) = G_1 := -\mu V_2(1) \frac{d^2 v}{d\eta^2}, \quad (28)$$

имеет решение в том и только в том случае, если выполнено соотношение

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) F_1(x_2) dx_2 + G_1 = 0,$$

которое приобретает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$-(\mu + b) \frac{d^2 v}{d\eta^2}(\eta) = 2\beta v(\eta) \quad \text{при } \eta \in (0, 1). \quad (29)$$

Для вычисления коэффициента

$$b = \frac{4}{\pi} (\lambda + 2\mu) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \right)^{-1} \Lambda (1 + 4\Lambda^2) Y(\Lambda) \quad (30)$$

удобно воспользоваться выкладкой

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) \frac{dV_2}{dx_2}(x_2) dx_2 = \\ & = -(\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dV_2}{dx_2}(x_2) \frac{d}{dx_2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) dx_2 - \\ & - \mu \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) \frac{dV_2}{dx_2}(x_2) dx_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 ((\lambda + 2\mu) \times \\ & \times \frac{d^2 V_2}{dx_2^2}(x_2) + \omega_{\mp}^2 V_2(x_2)) \cos\left(\frac{\pi}{2}\Lambda x_2\right) dx_2 + \\ & + (\lambda + 2\mu) \frac{2}{\pi} \frac{dV_2}{dx_2}(0) - \mu V_2(1), \end{aligned}$$

в которой последнее подынтегральное выражение находится из уравнения (23), а внеинтеграль-

ные члены — при помощи формул (25) и (26). Фигурирующая в (30) функция

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Sigma \Lambda \mapsto Y(\Lambda) = \frac{4\Lambda}{1 + 4\Lambda^2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\Lambda\right) \quad (31)$$

имеет одну экстремальную точку $\Lambda_{\cap} \in (0, 1/2)$, монотонно возрастает на участке $(0, \Lambda_{\cap})$ и удовлетворяет соотношениям $Y(0) = 0$ и $Y(2^{-1/2}) > 0.04$. Таким образом, функция (31) и величина (30) положительные.

В искомой модели балки уравнение (29) снабжается краевыми условиями

$$\frac{dv}{d\eta}(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad (32)$$

а собственные пары задачи (29), (32) принимают вид

$$\begin{aligned} \beta_j &= (\mu + b)^2 \frac{\pi^2}{2} \left(j - \frac{1}{2}\right)^2, \\ v_j(\eta) &= \cos\left(\pi \left(j - \frac{1}{2}\right) \eta\right), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Обоснование построенных асимптотик собственных частот и мод проводится по стандартной схеме (см. публикации [15, 16, 8, 17]), а точное утверждение предоставляет для любого индекса $j \in \mathbb{N}$ такие величины $\ell(j)$ и $C(j)$, что при $\ell > \ell(j)$ собственная частота из списка (15) расположена ниже точки отсечки (6) и удовлетворяет оценке

$$\left| \omega_j(\ell) - \frac{\omega_{\mp}}{2} - \frac{\beta_j}{\omega_{\mp} \ell^2} \right| \leq \frac{C(j)}{\ell^3}. \quad (33)$$

Как и следовало ожидать, полученное ранее выражение (19) превосходит сумму $\omega_{\mp}^2 + \ell^{-2}\beta_j$. Подчеркнем особо, что увеличение номера j влечет за собой рост величин $\ell(j)$ и $C(j)$, т.е. асимптотическая формула (33) обслуживает на должном уровне лишь несколько первых членов в списке (15) — подробное изучение этого вопроса можно найти в книге [18, гл. 7], где, в частности, выявлена зависимость мажоранты в правой части оценки (33) от номера j .

Нетрудно построить и полные асимптотические разложения собственных частот и мод. Формальные бесконечные асимптотические ряды, в частности, включают члены типа пограничного слоя, описываемые решениями задачи в единичной полосе $\Pi_{\pm}$ с пороговым спектральным параметром

$$\begin{aligned} & -\mu \Delta w - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot w - \omega_{\mp}^2 w = f \\ & \text{в } \Pi_{\pm} = \mathbb{R} \times (0, 1), \end{aligned} \quad (34)$$

$$w = 0 \quad \text{при } x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = 1, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(w) = g_1, \quad \sigma_{22}(w) = g_2 \quad \text{при } x_1 < 0, \\ w = 0 \quad \text{при } x_1 > 0, \quad x_2 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

В последнем разделе статьи будет показано, что задача (34)–(36) с финитными правыми частями f и $g = (g_1, g_2)$ однозначно разрешима в классе вектор-функций, экспоненциально затухающих при $x_1 \rightarrow +\infty$ и подчиненных на бесконечности “условию излучения”

$$\begin{aligned} w(x) = S \sin\left(\frac{\pi}{2} x_2\right) + O(e^{\delta x_1}) \\ \text{при } x_1 \rightarrow -\infty \text{ и } \delta > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Это обстоятельство позволяет организовать итерационный процесс построения бесконечных формальных асимптотических рядов для $\omega_j(\ell)$ и $u^j(x; \ell)$ и поочередно определить их члены при решении (неоднородных) задач (29), (30) и (34)–(36). Поправки в асимптотике собственной частоты находятся при соблюдении условия разрешимости смешанных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $(0, 1) \ni \eta$, а для продолжения с прямоугольника $\Xi(\ell)$ на полуполосу $\Pi^\ell = \Pi \setminus \overline{\Xi(\ell)}$ (см. рис. 2а) их решения можно умножить на гладкую срезающую функцию $\chi(x_1 - \ell)$, равную единице при $x_1 < \ell - 1$ и нулю при $x_1 > \ell$, — именно такое действие привнесет правые части в соотношения (34) и (36). Подчеркнем, что слагаемые типа пограничного слоя, определяемые при решении задачи в Π_+ , затухают при $x_1 \rightarrow +\infty$ с экспоненциальной скоростью, а значит, какой-либо задачи в Π^ℓ решать не требуется.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЗОНЫ ОТСЛОЕНИЯ

В ситуации (14) придадим малое приращение $h > 0$ длине трещины $\Upsilon(\ell)$ на верхнем основании полуполосы Π и найдем главные поправочные члены асимптотик

$$\omega_j(\ell + h) = \omega_j(\ell) - h\omega_j'(\ell) + O(h^2) \quad (38)$$

собственных частот из списка (15). Согласно [10] (см. также [19], [11, гл. III, § 8], [7, гл. 7]) соответствующие собственные моды $u^j \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$, нормированные равенством

$$\|u^j; L^2(\Pi)\| = 1, \quad (39)$$

допускают около конца трещины представления

$$u^j(x; \ell) = \chi_0(r_\ell) \sum_{\pm} K_j^{\pm}(\ell) X^{\pm}(x_1 - \ell, x_2) + \tilde{u}^j(x; \ell). \quad (40)$$

Поясним обозначения. Прежде всего $(r_\ell, \varphi_\ell) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ — полярные координаты с центром в вершине $P(\ell) = (\ell, 1)$ трещины (рис. 2а), а χ_0 — гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки $r_\ell = 0$. Далее аргумент ℓ и индекс j по возможности не пишем. Вектор-функции

$$X^{\pm}(x) = r_\ell^{\pm ai + 1/2} \Phi^{\pm}(\varphi_\ell), \quad a > 0 \quad (41)$$

включают угловые части $\Phi^{\pm} \in C^\infty[0, \pi]$ и первый (с наименьшей положительной вещественной частью) корень $a = \pm ai + 1/2$ трансцендентного уравнения (см. [10] и [11, гл. III, § 8])

$$\sin^2(\pi a) = \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{(\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)} \in \left[1, \frac{4}{3}\right]. \quad (42)$$

Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений $K^{\pm}$ комплексные (ср., например, [20]), но, несмотря на присутствие в степенном решении (41) мнимой единицы i , собственную моду (40), разумеется, можно зафиксировать вещественной.

Вектор-функции (41) суть решения модельной задачи теории упругости в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{x : x_2 > 0\}$ с условиями (2) и (3) на лучах $\{x : x_1 > \ell, x_2 = 1\}$ и $\{x : x_1 < \ell, x_2 = 1\}$ соответственно. Согласно общим результатам [21] (см. также [7, гл. 3, § 2]) эта задача имеет еще одну пару решений

$$Y^{\pm}(x; \ell) = r_\ell^{\pm ai - 1/2} \Psi^{\pm}(\varphi_\ell), \quad (43)$$

для которых верны формулы

$$\begin{aligned} Q(X^{\pm}, Y^{\pm}) := R \int_{\pi}^{2\pi} \left(\overline{Y_r^{\pm}} \sigma_{rr}(X^{\pm}) + \overline{Y_\varphi^{\pm}} \sigma_{r\varphi}(X^{\pm}) - \right. \\ \left. - \overline{\sigma_{rr}(Y^{\pm})} X_r^{\pm} + \overline{\sigma_{r\varphi}(Y^{\pm})} X_\varphi^{\pm} \right) \Big|_{r=R} d\varphi = 1. \end{aligned} \quad (44)$$

Черта обозначает комплексное сопряжение, а подынтегральное выражение имеет порядок R^{-1} : форма Q возникла как одномерный интеграл в формуле Грина для оператора Ламе и потому не зависит от параметра R для решений модельной задачи в $\mathbb{R}_+^2$. Отсюда, в частности, вытекает, что $Q(X^{\mp}, Y^{\pm}) = 0$ из-за рассогласования показателей $\pm ai - 1/2$ и $\mp ai + 1/2$ у степенных решений $X^{\mp}$ и $Y^{\pm}$.

Методика дифференцирования вдоль трещин (см. изложение статьи [22] в книге [7, гл. 7, § 4], а также работу [23] для одной из задач механики трещин) устанавливает, что все степенные решения упомянутой модельной задачи в полуплоскости приобретают показатели $\pm ai + p + 1/2$, $p \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ и $\pm(q + 1)$, $q \in \mathbb{N}$. Кроме того,

имеет место следующая связь степенных решений (41) и (43):

$$\frac{\partial X^\pm}{\partial x_1}(x) = -AY^\pm(x), \quad A > 0. \quad (45)$$

Определение множителя A трудоемко – требуется найти корни уравнения (42), восстановить угловые части $\Phi^\pm, \Psi^\pm$ согласно формулам из [11, гл. III §8] и вычислить громоздкий интеграл из (44), однако положительность множителя A уже была проверена в [22, 23] при помощи асимптотического анализа задач о росте трещины. Воспроизведем сопутствующие выкладки в переложении для рассматриваемой задачи. Применим метод срачиваемых асимптотических разложений (см. монографии [24, 25]) и дополним понятное внешнее разложение

$$u(x; \ell + h) = u^0(x) + hu'(x) + \dots \quad (46)$$

внутренним разложением

$$u(x; \ell + h) = \sum_{\pm} K^\pm X^\pm(x_1 - \ell - h, x_2) + \dots, \quad (47)$$

приемлемым вблизи точки $P(\ell + h)$ и учитывающим представление (40), а также малый сдвиг вершины трещины. Преобразованная согласно связи (45) формула Тейлора

$$\begin{aligned} X^\pm(x_1 - \ell - h, x_2) &= X^\pm(x_1 - \ell, x_2) - \\ &- h \frac{\partial X^\pm}{\partial x_1}(x_1, x_2) + O(h^2) = \\ &= X^\pm(x_1 - \ell, x_2) + hAY^\pm(x_1 - \ell, x_2) + O(h^2) \end{aligned} \quad (48)$$

и процедура срачивания разложений на уровне h показывают, что поправочные члены в анзацах (38) и (46) удовлетворяют системе уравнений

$$-\mu \Delta u' - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u' = \omega^2 u' - 2\omega \omega' u^0 \text{ на } \Pi \quad (49)$$

и краевым условиям (2) и (3), а также вытекающим из (47), (48) и (45) условиям роста около вершины трещины

$$u'(x) = A \sum_{\pm} K^\pm Y^\pm(x_1 - \ell, x_2) + O(r_\ell^{1/2}) \quad (50)$$

при $x \rightarrow P(\ell)$.

Поскольку $\omega(\ell)$ – собственная частота, для существования сингулярного поля u' требуется соблюдения условия разрешимости сформированной задачи (49), (2), (3), (50). С целью его проверки умножим систему дифференциальных уравнений скалярно на вектор $\overline{u^0(x)} = \overline{u^j(x; \ell)}$ и применим формулу Грина в области

$$\Pi(R) = \{x \in \Pi : r_\ell > R\}$$

с вырезанным малым ($R \rightarrow +0$) полукругом (глубоко тонирован на рис. 2а). При учете соотношений (39) и (44) получаем, что

$$\begin{aligned} 2\omega\omega' &= 2\omega\omega' \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\Pi(R)} \overline{u^0} \cdot u^0 dx = \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\Pi(R)} \overline{u^0} \cdot (\mu \Delta u' + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u' + \omega^2 u') dx = \\ &= - \lim_{R \rightarrow +0} R \int_{\pi}^{2\pi} \left(\overline{u^0}_r \sigma_{rr}(u') + \overline{u^0}_\varphi \sigma_{r\varphi}(u') - \sigma_{rr}(\overline{u^0}) u'_r + \sigma_{r\varphi}(\overline{u^0}) u'_\varphi \right) \Big|_{r=R} d\varphi = \\ &= -Q(u', u^0) = \overline{Q(u^0, u')} = \overline{Q\left(\sum_{\pm} K^\pm X^\pm, A \sum_{\pm} K^\pm Y^\pm\right)} = A \sum_{\pm} |K^\pm|^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Обратим внимание на то, что комплексное сопряжение самой вектор-функции u^0 не нужно, но оно потребовалось в конце выкладки и не сказалось на результате.

Итак, получена следующая асимптотическая формула, согласованная с проверенной ранее монотонностью функций (17):

$$\omega_j(\ell + h) = \omega_j(\ell) - h \frac{A}{2 \omega_j(\ell)} \sum_{\pm} |K^\pm(\ell)|^2 + O(h^2).$$

Если оба коэффициента интенсивности напряжений обратились в нуль, то скорость $O(h)$ уменьшения собственной частоты замедляется по крайней мере до $O(h^3)$.

ПОРОГОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Ввиду устойчивости собственных частот (15), принадлежащих дискретному спектру, увеличение его кратности $\# p_d(\ell)$ при вариации параметра ℓ может происходить исключительно вследствие отщепления собственной частоты $\omega_j(\ell + h)$ от нижней грани непрерывного спектра (точки его отсечки (6)). Такое явление наблюдается в том случае, если у задачи (1)–(3) при $\ell = \ell_j$ возникает пороговый резонанс (см. статьи [26–29]), а именно, у задачи с пороговой частотой $\omega = \omega_j$ имеется (вещественное) решение

$$u_\dagger(x) = s_\dagger w_\dagger(x_2) + \tilde{u}_\dagger(x) \quad (52)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{y}_+$. Если $s_+ = 0$, то u_+ — захваченная волна, но в случае $s_+ \neq 0$ решение (52) стабилизируется при $x_1 \rightarrow +\infty$ к вектор-функции (8) поперечной переменной x_2 и резонанс называется правильным [28]. К сожалению, не удалось выяснить, обращается ли в нуль коэффициент s_+ для конкретных критических длин ℓ_j . Поэтому обсудим обе возможности и продемонстрируем, что качество порогового резонанса сказывается на процессе отцепления собственных частот.

При $s_+ = 0$ сохраним асимптотический анзац (38) для собственной частоты $\omega_j(\ell_j + h) \in \mathfrak{p}_d(\ell_j + h)$. Кроме того, для соответствующей собственной моды $u^j(x; \ell_j + h)$ принимаем прежние внешнее и внутреннее разложения (46) и (47), а для поправок $\omega_j' > 0$ и $u^{j'} \in H_0^1(\Pi; \Gamma_D)$ выводим задачу (49), (2), (3), (50) и при помощи выкладки (51) получаем окончательную формулу

$$\omega(\ell_j + h) = \omega_+ - h \frac{A}{2\omega_+} \sum_{\pm} |K^{\pm}(\ell_j)|^2 + O(h^2) \in (0, \omega_+). \quad (53)$$

Если коэффициенты интенсивности напряжений обратились в нуль (ср. соотношение (64) при $\mathfrak{D} \subset \Gamma_D$), то представление (53) становится малосодержательным и требуется построение младших асимптотических членов, а скорость $O(h)$ отцепления собственной частоты уменьшается до $O(h^3)$ (ср. асимптотические конструкции в работе [16]).

К сожалению, нельзя утверждать, что формула (53) остается в силе при $h < 0$, т.е. при уменьшении длины трещины. Дело в том, что в принципе возможно поднятие истинной собственной частоты вовнутрь непрерывного спектра, однако ее положение неустойчиво и заранее неизвестно, окажутся ли все младшие асимптотические члены в разложении (53) вещественными, или появится точка комплексного резонанса с малой мнимой частью (ср. [30, 17]). Впрочем, используя метод “точной настройки” параметров (см., например, [31, 29]) можно попытаться и при $h < 0$ поместить величину $\omega_j(\ell_j + h)$ на вещественную ось путем тщательного подбора профиля $H^h(x_2)$ искривленного торца $\mathfrak{D}_h$ полубесконечной полосы

$$\Pi(H^h) = \{x : x_2 \in (0, 1), x_1 > hH^h(x_2)\}. \quad (54)$$

В случае правильного порогового резонанса требуются более сложные вычисления. Начнем с построения одномерной модели колебаний тонкой упругой прокладки $\Xi(h)$ между двумя абсолютно жесткими полуплоскостями. В новом

асимптотическом анзаце (20), ингредиенты которого снабдим символом $\bullet$, производится замена $\sin(\pi x_2/2) \mapsto \sin(\pi x_2)$, учитывающая условия заземления (2) на обеих сторонах прокладки. Кроме того, функции V_2^* и V_1^* находятся из задач (23), (24) и (27), (28), в которых вместо дроби $\pi/2$ всюду фигурирует число π и последние условия Неймана заменены условиями Дирихле $V_2^*(1) = 0$ и $V_1^*(1) = 0$. Таким образом, получаем выражение

$$V_2^*(x_2) = \pi^{-1} (\cos(\pi x_2) - \cos(\pi \Lambda x_2) + (\sin(\pi \Lambda))^{-1} (1 + \cos(\pi \Lambda)) \sin(\pi \Lambda x_2)) \quad (55)$$

с прежним коэффициентом $\Lambda < 1$ из (26) и положительной величиной $\sin(\pi \Lambda)$. Наконец, условие разрешимости задачи для V_1 принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения (29) с новым коэффициентом

$$b^* = 4(\lambda + 2\mu) \frac{\Lambda}{\pi} \frac{1 + \cos(\pi \Lambda)}{\sin(\pi \Lambda)} > 0. \quad (56)$$

В искомой модели упругой прокладки $\Xi(\ell)$ уравнение (29) снабжается условиями в точках $\eta = 0$ и $\eta = 1$, имитирующими краевые условия на торцах $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}(\ell)$, однако далее будут востребованы два факта, которые благодаря проведенным вычислениям вытекают из общих результатов [19], [7, гл. 3, § 1] и [33, гл. 9]. Во-первых, на пороговой частоте ω_+ у задачи в цельной полосе $\Pi_+ = \mathbb{R} \times (0, 1)$ с условиями Дирихле (2) на боковых сторонах помимо ограниченной волны (8) имеется линейно растущая волна

$$w_+^1(x) = x_1 w_+(x_2) + e_{(2)} V_2^*(x_2), \quad (57)$$

но других полиномиально зависящих от переменной x_1 волн нет.

Во-вторых, у той же задачи в Π_+ на частоте

$$\omega(\ell_j + h) = \omega_+ - h^2 \omega'' + O(h^2) \in (0, \omega_+) \quad (58)$$

имеются две медленно растущие при $x_1 \rightarrow \pm\infty$ волны

$$w^{\pm}(x; h) = e^{\pm \kappa(h) x_1} W^{\pm}(x; h) e^{\pm \kappa(h) x_1} \times \\ \times (\sin(\pi x_2) e_{(1)} \pm \kappa(h) V_2^*(x_2) e_{(2)} + \\ + \kappa(h)^2 V_1^*(x_2) e_{(1)} + \dots) = \sin(\pi x_2) e_{(1)} \pm \\ \pm \kappa(h) (x_1 \sin(\pi x_2) e_{(1)} + V_2^*(x_2) e_{(2)}) + \dots, \quad (59)$$

где V_2^* — функция (55), V_1^* — решение видоизмененной указанным выше способом задачи (27), (28) и

$$\kappa(h) = \kappa_0 h + O(h^2), \quad \kappa_0 = 2 \sqrt{\frac{\omega_+ \omega''}{\mu + b^*}} > 0. \quad (60)$$

Формальная проверка того, что вектор-функции (57) и (59) удовлетворяют задачам в полосе Π_- , производится непосредственными вычислениями.

Поскольку в формуле (58) пороговой частоте ω_+ предписано возмущение $O(h^2)$, слагаемое u' из внешнего разложения (46) удовлетворяет системе (1) с параметром $\omega = \omega_+$, краевым условиям (2), (3) и условиям роста (50), полученным в результате срачивания с внутренним разложением (47) около точки $P(\ell_j + h)$. Из-за наличия ограниченного решения (52) полученная задача имеет только линейно растущее на бесконечности решение

$$u'(x) = s_1 w_+^1(x) + s_0 u_+(x) + \tilde{u}'(x) \quad (61)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{u}'$, произвольным коэффициентом s_0 и коэффициентом s_1 при линейной волне (57), вычисляемом при помощи усложненной выкладки (51). Именно,

$$\begin{aligned} 0 = & -Q(u', u^0) + \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{j=1,2} \left(\sigma_{1j}(u'; T, x_2) \overline{u_j^0(T, x_2)} - \right. \\ & \left. - \overline{\sigma_{1j}(u_j^0; T, x_2)} u_j'(T, x_2) \right) dx_2 = A \sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2 + \\ & + s_1 s_+ \int_0^1 ((\lambda + 2\mu) \sin(\pi x_2) + \\ & + \lambda \frac{dV_2}{dx_2}(x_2)) \sin(\pi x_2) - \mu \pi \cos(\pi x_2) V_2(x_2) dx_2 \end{aligned} \quad (62)$$

и, следовательно,

$$s_1 = -\frac{2}{\mu + b} \cdot \frac{A}{s_+} \sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2. \quad (63)$$

Пояснение: применили формулу Грина в прямоугольнике $\Xi(T)$ с вырезанным полукругом малого радиуса с центром $P(\ell_j)$, а интегралы по полукружности и отрезку $\{x : x_1 = T, x_2 \in (0, 1)\}$ вычислили при помощи разложений (50), (40) с коэффициентами интенсивности $K_{\mp}^{\pm}$ и представлений (52), (61), (57), причем при нахождении последнего интеграла из (62) повторили выкладку, приведшую к выражению (56).

Слагаемые u^0 и u' не затухают при $x_1 \rightarrow +\infty$, а значит, анзац (46) нуждается в исправлении на больших расстояниях от конца $P(\ell_j + h)$ трещины $\Upsilon(\ell_j + h)$. Следуя работам [16, 32], срастим его с разложением

$$u(x; \ell_j + h) = s_+(h) w^-(x; h) + \dots,$$

содержащим множитель $s_+(h) = s_+ + O(h)$ и волну (59), равную $O(e^{-\kappa(h)x_1})$ и содержащую малый, но положительный показатель (60). Таким образом, представление (61) свойственно именно захваченной волне. Соотношение $s_1 = -s_+ K_0$ (важен знак минус), появившееся в результате срачивания, в силу формул (60) и (63) предоставляет поправочный член в анзаце (58) для собственной частоты:

$$\omega'' = \frac{1}{\mu + b} \cdot \frac{1}{\omega_+} \cdot \frac{1}{s_+^2} \left(\sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2 \right)^2.$$

Итак, в случае правильного порогового резонанса собственная частота отцепляется от порога с меньшей скоростью $O(h^2)$, чем в случае захваченной волны (52), $s_+ = 0$. Если оба коэффициента интенсивности напряжений $K_{\mp}^{\pm}$ обратились в нуль, то скорость снижается по крайней мере до $O(h^4)$ — для ее вычисления требуются младшие асимптотические члены (ср. публикации [16, 32]). В рассмотренной задаче при условии $\varpi \subset \Gamma_N$ аналитически определить кратность порогового резонанса не удастся. Если же $\Gamma_N = \Upsilon(\ell)$ и $\varpi \subset \Gamma_D$, то все выкладки и рассуждения из предыдущих разделов нуждаются лишь в незначительных изменениях, например, первое краевое условие Неймана в (32) для одномерных моделей балки $\Xi(\ell)$ становится условием Дирихле $v(0) = 0$. Вместе с тем совмещение выкладок (7) и (51), примененных к ограниченному пороговому решению (52) и его производной $u'_+ = \partial u_+ / \partial x_1$, затухающей при $x_1 \rightarrow +\infty$, приводит к равенству

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 \right) dx_2 - \\ & - A \sum_{\pm} |K_{\mp}^{\pm}|^2. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким образом, оба коэффициента интенсивности напряжений у решения u_+ обратиться в нуль не могут. Следовательно, по понятной причине кратность порогового резонанса не превосходит двух.

ЧАСТИЧНОЕ ЗАКРЕПЛЕНИЕ ТОРЦА

Пусть на рис. 26

$$\Gamma_N = \mathfrak{U}(\ell) := \{x : x_1 = 0, x_2 \in (0, \ell)\} \quad (65)$$

при $\ell \in (0, 1)$,

т.е. краевое условие (3) поставлено только на части $\mathfrak{U}(\ell)$ торца ϖ полуполосы Π . В первом разделе

было показано, что при $\ell = 0$ (вся граница $\partial\Pi$ жестко закреплена) дискретный спектр $\mathfrak{p}_d(\ell)$ пустой, но при $\ell = 1$ в нем присутствуют собственные частоты (15) (однако их количество $\#\mathfrak{p}_d(\ell)$ осталось неизвестным). Подчеркнем, что в данном разделе формулам, использованным ранее при анализе отслоения верхнего основания полуполосы, теперь придается новый смысл. Например, максиминимальный принцип (16) доказывает, что функции (17) монотонно убывают на интервале $(\ell_j, 1)$, где величина $\ell_j > 0$ характеризуется поднятием собственной частоты $\omega_j(\ell)$ на порог ω_+ и образованием порогового резонанса. Таким образом, существует зависящий от коэффициента Пуассона $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu) \in [0, 1/2)$ размер $\ell_*(\nu) \in (0, 1)$, для которого $\mathfrak{p}_d(\ell) = \emptyset$ при $\ell < \ell_*(\nu)$, но $\#\mathfrak{p}_d(\ell) > 0$ при $\ell > \ell_*(\nu)$. Правомерна гипотеза: первый пороговый резонанс правильный, так как наличие быстро затухающей моды на низких частотах сомнительно. К сожалению, автор не нашел строгого подтверждения этого факта. Вычисление критического размера $\ell_*(\nu)$ — также открытый вопрос.

ЦЕЛИКОМ ОТСЛОИВШЕЕСЯ ВЕРХНЕЕ ОСНОВАНИЕ

Рассмотрим задачу (1)–(3) при условиях (убрали верхнюю жирную черту на рис. 26)

$$\Sigma_+ \cup \Upsilon(\ell) \subset \Gamma_N, \quad \Sigma_-(\ell) \subset \Gamma_D, \quad \ell \geq 0.$$

В этом случае точка отсечки принимает вид (22), но все приведенные ранее результаты и приемы анализа остаются в силе с понятными изменениями. В частности, у задачи (1)–(3) при $\Gamma_D = \Sigma_-$ имеется собственная частота ω_+ ниже точки отсечки (22). Таким образом, одномерная модель (29), (32) не полностью описывает спектр конечной балки $\Xi(\ell)$, зашечленной вдоль $\Sigma_-(\ell) \cup \mathfrak{W}(\ell)$, а именно, ниже серии собственных частот, описываемых формулами (21) и (33), обнаружена по крайней мере одна собственная частота $\omega_+ < \omega_+$ с собственной модой, сугубо локализованной около торца $\mathfrak{W}$.

В задаче о полуполосе с длинной трещиной $\Upsilon(\ell) \subset \Sigma_+$, т.е. при $\Gamma_D = \Sigma_-(\ell) = \{x : x_1 > \ell, x_2 = 0\}$, дискретный спектр становится весьма обильным, так как в модельной задаче о колебаниях балки $\Xi(\ell)$ с единственно зашечленным торцом $\mathfrak{W}(\ell)$ появляются две серии собственных частот

$$\frac{1}{\ell^2} \sqrt{\beta_j^{(2)}} + \dots \quad \text{и} \quad \frac{1}{\ell} \sqrt{\beta_j^{(1)}} + \dots,$$

в которых фигурируют собственные числа задач о поперечных и продольных колебаниях одномер-

ной балки Кирхгофа соответственно (см., например, [7, гл. 1 §3]):

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 v^{(2)}}{d\eta^4}(\eta) &= \beta^{(2)} v^{(2)}(\eta), \quad \eta \in (0, 1), \\ \frac{d^3 v^{(2)}}{d\eta^3}(0) &= \frac{d^2 v^{(2)}}{d\eta^2}(0) = 0, \\ \frac{dv^{(2)}}{d\eta}(1) &= v^{(2)}(1) = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

и

$$\begin{aligned} 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 v^{(1)}}{d\eta^2}(\eta) &= \beta^{(1)} v^{(1)}(\eta), \quad \eta \in (0, 1), \\ \frac{dv^{(1)}}{d\eta}(0) &= 0, \quad v^{(1)}(1) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $D = \frac{\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$ — цилиндрическая жесткость упругой балки-полосы.

ПОЛУПОЛОСА С ПОЛНОСТЬЮ СВОБОДНЫМ КРАЕМ

При $\Gamma_N = \partial\Pi$ и $\Gamma_D = \emptyset$ (полностью убрали жирную черту на рис. 1а) непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c$ — замкнутая полуось $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$, а дискретный спектр заведомо пуст. Вместе с тем известно [34], что при $\lambda = 0$, т.е. нулевом коэффициенте Пуассона $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$, у системы Ламе (1) в полуполосе Π с краевым условием Неймана (3) на всей ее границе $\partial\Pi$ существует собственная частота ω_+ , вкрапленная в непрерывный спектр. Вместе с тем при увеличении ν это собственное число исчезает, превращаясь в точку комплексного резонанса (см. [30, 17]), однако при малом $\nu = h \in (0, h_0]$ с некоторым $h_0 > 0$ можно предсказать (результат не опубликован) существование такого профиля H^h искривленного торца полуполосы (54) или ее боковых сторон, что в непрерывном спектре сохраняется собственная частота $\omega_+(h) = \omega_+ + O(h)$.

Стационарной ($\omega = 0$) задаче Неймана (1), (3) в прямой полуполосе $\Pi = \mathbb{R} \times (0, 1)$ удовлетворяют три жестких смещения, поворот и трансляции,

$$\theta(x) = x_1 e_{(2)} - x_2 e_{(1)} \quad \text{и} \quad e_{(1)} = (1, 0), \quad e_{(2)} = (0, 1), \quad (67)$$

а также полиномиальные поля

$$\begin{aligned}
& \frac{x_1^2}{2} e_{(1)} - x_1 x_2 e_{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{24} \right) e_{(2)} \text{ и} \\
& x_1 e_{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} x_2 e_{(2)}, \\
& \frac{x_1^3}{6} e_{(1)} - \frac{x_1^2}{2} x_2 e_{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{24} \right) x_1 e_{(2)} + \\
& + \left(\frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_2^3}{6} - \frac{11\lambda + 12\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{x_2}{24} \right) e_{(1)},
\end{aligned} \quad (68)$$

отвечающие изгибающему моменту и силам, продольной и перерезывающей. Согласно терминологии [28] наличие в списке (68) квадратичного и кубического полиномов означает, что пороговый ($\omega_{\text{г}} = 0$) резонанс в обсуждаемой задаче – вырожденный. Подчеркнем, что в рассмотренных ранее задачах резонансы на порогах (6) и (22) невырожденные, так как на пороговой частоте имеются только решения (8) и (57) с не более чем линейным ростом при $x_1 \rightarrow \infty$. Изменение качества порогового резонанса провоцирует еще один эффект при вариации данных задачи.

Как уже упоминалось в разделе, посвященном резонансам на пороге (6), околопороговая частота (53) или (58) возникает при увеличении длины трещины, и только в случае порогового резонанса, порожденного захваченной волной (52) при $s_{\text{г}} = 0$, точка $\omega_{\text{г}} \in \mathfrak{p}_p(\ell_j)$ может подняться в непрерывный спектр $\mathfrak{p}_c(\ell_j - h)$, причем для этого требуется точная настройка профиля искривленного торца полуполосы (54).

Единственно возможное “сползание вниз” собственной частоты с порога – общее свойство невырожденных собственных пороговых резонансов. По другому дело обстоит в случае вырожденного порога, а именно, в статье [32] реализован эффект “поднятия” собственной частоты с нулевого порога, вырожденного в силу богатого набора (67), (68) решений задачи (1), (3) в полуполосе Π .

Поясним природу неожиданного феномена. В случае невырожденного порога на околопороговых частотах $\omega = \omega_{\text{г}} + \beta$, т.е. при малом $\beta > 0$, решением одномерной модели (52) (уравнение второго порядка) служат только осциллирующие волны $e^{\pm i x_1 \sqrt{2\beta/(\mu+b)}}$, из которых соорудить захваченную волну невозможно. Вместе с тем в модели Кирхгофа список решений уравнения (66) четвертого порядка с параметром $\beta^{(2)} = \omega^4$

$$e^{\pm i \omega x_1 \sqrt[4]{1/D}} \text{ и } e^{\pm \omega x_1 \sqrt[4]{1/D}}$$

содержит одно затухающее при $x_1 \rightarrow +\infty$ – именно оно и служит зачинателем захваченной волны. Поскольку в рассматриваемом случае собственная частота принадлежит непрерывному спектру $\mathfrak{p}_c = [0, +\infty)$, для ее сохранения потребовалась точная настройка параметров задачи, а именно, – тщательно подобранные искривленный торец полуполосы (54) и переменная плотность материала $\rho(x; \omega)$ на конечной ее части (подробности см. в статье [32]). Многие вопросы спектрального анализа вырожденных порогов остаются открытыми.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

На первый взгляд кажется, что заимствованный из статьи [8] и восходящий к работе [9] прием дифференцирования по переменной x_1 указывает на отсутствие захваченных волн в задаче (1)–(3) при $\Gamma_N = \Upsilon(\ell)$. Этот факт противоречил бы проверенной непустоте дискретного спектра $\mathfrak{p}_a(\ell)$. Однако прежняя аргументация не годится из-за корневой сингулярности производной u' в вершине трещины: неприемлемое соотношение (7) превращается во вполне возможное (64). В случае $\Gamma_D = \{x \in \partial\Pi : x_1 < \ell\}$ благодаря перемене позиций зон Неймана и Дирихле формула (64) снова превращается в непозволительное равенство

$$0 = \int_0^1 \left((\lambda + 2\mu) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 + \frac{\mu}{2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0, x_2) \right|^2 \right) dx_2 + A \sum_{\pm} |K^{\pm}|^2. \quad (69)$$

Таким образом, при жесткой заделке торца полуполосы или его окрестности захваченных мод нет на любой частоте. Наконец, для трещины $\Gamma_N = \{x : x_1 \in (a, a + \ell), x_2 = 0\}$, удаленной ($a > 0$) от торца, появление собственных частот в дискретном спектре действительно возможно, так как в аналогичном (64) и (69) равенстве возникают суммы квадратов модулей коэффициентов ин-

тенсивности в точках $(a, 1)$ и $(a + \ell, 1)$ с разными знаками.

Дифференцирование по переменной x_1 полезно и при исследовании задачи о пограничном слое около вершины трещины. Эта задача (34)–(36) в цельной полосе $\Pi_{\infty} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ с финитными правыми частями f и g имеет решение (37) в том и только в том случае, если нет захваченных волн.

Пусть $u \in H^1(\Pi_-)$ — такая волна, конечно же, не-тривиальная. Выкладка (7) для вектор-функций u и $u' = \partial u / \partial x_1$ в области $\{x \in \Pi_- : r > R\}$ показывает, что $A|K^+(\ell)|^2 + A|K^-(\ell)|^2 = 0$. Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений у волны u равны нулю, и поэтому ее производная u' остается в классе Соболева $H^1(\Pi_-)$ и становится захваченной волной. У нее опять-таки нулевые коэффициенты интенсивности, т.е. в разложении вектор-функции u около начала координат $\mathcal{O}$ отсутствуют слагаемые порядка $r^{\pm ia+3/2}$. По индукции проверяем, что все члены (сходящегося) ряда по степеням радиальной переменной (см. комментарии, предшествовавшие формуле (45)) аннулируются, т.е. $u = 0$ в окрестности точки $\mathcal{O}$, что невозможно в силу уже неоднократно упоминавшейся теоремы о единственности продолжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
2. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. Камоцкий И.В., Назаров С.А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга, 1999. С. 105–148.
4. Cardone G., Durante T., Nazarov S.A. The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends // SIAM J. Math. Anal. 2010. V. 42. 6. P. 25812013–2609.
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
6. Слепян Л.И. Механика трещин. М.: Судостроение, 1981.
7. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
8. Назаров С.А. Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. 5. С. 8792013–895.
9. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
10. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension // J. Appl. Mech. 1952. V.19. 4. P. 526–528.
11. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
12. Leis R. Initial boundary value problems of mathematical physics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1986.
13. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 4 с.
14. Камоцкий И.В., Назаров С.А. Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // Матем. заметки. 2003. Т. 73. 1. С. 138–140.
15. Назаров С.А. Локализованные волны в Т-образном волноводе // Акуст. журн. 2010. Т. 56. 6. С. 747–758.
16. Назаров С.А. Волны, захваченные тонким искривленным экраном в волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58. 6. С. 6832013–691.
17. Назаров С.А. Обострение и сглаживание околополюсовых аномалий Вуда в акустическом волноводе // Акуст. журн. 2018. Т. 64. 5. С. 5342013–546.
18. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002. 408 с.
19. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
20. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. Stress-intensity factors and complex path-independent integrals // Transactions of the ASME. 1980. V. 47. P. 342–346.
21. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
22. Назаров С.А. Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
23. Назаров С.А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности упругих полей и критерии разрушения при контакте берегов // Прикладная матем. и механика. 2005. Т. 69. 3. С. 520–532.
24. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
25. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 36 с.
26. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. 2. P. 5332013–559.
27. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. 3. P. 718–752.
28. Назаров С.А. Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. 6. С. 73–130.
29. Назаров С.А. Аномалии рассеяния акустических волн вблизи точек отсечки непрерывного спектра (обзор) // Акуст. журн. 2020. Т. 66. 5. С. 4892013–508.
30. Aslanyan A., Parnovski L., Vassiliev D. Complex resonances in acoustic waveguides // Q. J. Mech. Appl. Math. 2000. V. 53. P. 429–447.
31. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. 3. С. 37–53.
32. Назаров С.А. Построение захваченной волны на низких частотах в упругом волноводе // Функциональный анализ и его приложения. 2020. Т. 54. 1. С. 41–57.
33. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. R8 с.
34. Roitberg I., Vassiliev D., Weidl T. Edge resonance in an elastic semi-strip // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51. 1. P. 1–13.

УДК 534.2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ 3D-ПЕЧАТИ ПРИ 100% ЗАПОЛНЕНИИ НА УПРУГИЕ СВОЙСТВА НИТЕВИДНЫХ ОБРАЗЦОВ ПОЛИМЕРА PLA

© 2023 г. А. Б. Володарский^а, А. И. Кокшайский^а, Н. И. Одина^а, А. И. Коробов^{а, *},
Е. С. Михалев^а, Н. В. Ширгина^а

^аМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет,
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 ГСП-1 Россия

*e-mail: aikor42@mail.ru

Поступила в редакцию 14.12.2022 г.

После доработки 10.03.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Приведены результаты экспериментальных исследований влияния 3D-печати при 100% заполнении на упругие свойства нитевидных образцов полимера PLA. Статическим методом и методом Терстона–Браггера одновременно измерены зависимость деформации и относительного изменения скорости упругих волн от приложенного механического напряжения (вплоть до разрыва) для исходного и 3D-напечатанного образцов полимера PLA. По результатам измерений рассчитаны линейный и нелинейный модули Юнга и акустический нелинейный параметр второго порядка. Установлено, что 3D-печать приводит к ухудшению прочностных и пластических характеристик полимера PLA. Обнаружено разное поведение нелинейных параметров исходного и 3D-напечатанного образцов полимера PLA в области нагрузки и разгрузки, которое связывается с изменением внутренней структуры образца, вызванным 3D-печатью.

Ключевые слова: полимер PLA, 3D-печать, коэффициент упругости третьего порядка, нелинейный упругий параметр

DOI: 10.31857/S0320791922600536, **EDN:** QRMALS

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие все более востребованной становится технология 3D-печати различных материалов, которая активно применяется не только в лабораториях и на фабриках с высокоточным и массовым производством, но и на бытовом уровне. 3D-печать открывает возможности создания новых композитных образцов, в том числе метаматериалов, из различных материалов, как полимеров [1–5], так и металлических сплавов [6–8]. В общем смысле 3D-принтер представляет собой станок с программным управлением, использующий при изготовлении детали различные физические принципы [9]. Перечислим основные виды 3D-печати. Существует SLA-печать (stereolithography, лазерная стереолитография), позволяющая печатать с очень высокой точностью образцы из фотополимеров [10]. Принтер для SLA-печати и расходные материалы к нему доступны по цене, что способствует их широкому распространению. В ряде технологий 3D-печати, таких как DMLS (direct metal laser sintering), SLS (selective laser sintering), SLM (selective laser melting) используется сплавление либо спекание металлов

при помощи мощных лазеров [11]. Расходные материалы и принтеры для этих видов печати являются самыми дорогими на рынке, поэтому применяют их в основном в лабораториях и при ограниченном производстве сложных деталей. К этим же видам печати относится EBM (electron-beam melting) печать, где вместо лазера применяется электронно-лучевая трубка [12]. Сферы применения этого вида печати ограничены медицинскими приложениями, аэрокосмической областью и мелкосерийным производством деталей сложной формы. Самой же распространенной технологией является FDM (fused deposition modeling) печать, позволяющая печатать объемные модели из полимеров при помощи послойного наплавления [13, 14]. Широкий выбор полимеров для печати позволяет покрыть огромный спектр различных приложений — они используются для изготовления гибких или жестких, устойчивых к ультрафиолету или ацетону, обладающих повышенной температурой размягчения изделий. Доступная цена принтеров и расходных материалов обеспечивает им широкое распространение во всех при-

ложениях, в которых не требуется повышенная точность или прочность, сравнимая с металлами.

Одним из термопластических полимеров, широко используемых при 3D-печати, является PLA (polylactic acid, полилактид). Будучи нетоксичным и имея хорошие механические свойства, PLA используется для производства различных компонентов и объектов пищевой и медицинской промышленности, в том числе биомедицинских устройств [15–19].

Одним из важных преимуществ PLA является то, что детали из него можно легко изготовить методом FDM с помощью простых и недорогих коммерческих 3D-принтеров. На механические свойства аддитивно изготовленного PLA существенно влияют как параметры 3D-печати, такие как размер сопла, процент и схема заполнения, температура и скорость печати [20, 21], так и химический состав (например, пигменты, вводимые для изменения окраски, также влияют на механические свойства и на уровень кристалличности PLA) [22].

Многочисленные исследования показывают, что 3D-печать приводит к существенному изменению механических характеристик PLA [23–26]. Так, если предел прочности исходного литого PLA может достигать 60 МПа [23], то для 3D-напечатанных материалов предел прочности может значительно уменьшаться (вплоть до 50%) в зависимости от ориентации нитей заполнения [24–26].

Сравнение механических характеристик 3D-напечатанного и литого PLA, измеренных статическим методом, было произведено в работе [27]. Было обнаружено, что для исследованных образцов PLA 3D-печать приводит к существенному уменьшению предела прочности (с примерно 52 до 44 МПа), уменьшению модуля Юнга (с примерно 3.2 до 3 ГПа) и предела текучести (с примерно 12.7 до 10.5 МПа); в то же время предельная деформация при разрыве, наоборот, незначительно увеличилась для напечатанных образцов (с 1.65 до 1.74%).

Такое изменение механических свойств является следствием изменения микроструктуры полимеров, вызванного термомеханическими воздействиями, возникающими при 3D-печати: возникает текстура, определяемая способом укладки нити, возникают дефекты, обусловленные особенностями и несовершенством адгезии нитей, пористость в случае отсутствия дегазации [27], может изменяться соотношение кристаллической и аморфной фаз, могут изменяться или возникать упорядоченные субструктуры [23].

Линейные акустические методы применялись ранее для исследования процессов стеклования [28] и деградации [29] полимеров на основе PLA. В работе [30] были исследованы линейные акустические свойства образцов 3D-напечатанных

восьюми коммерчески доступных термопластических полимеров, включая PLA. Стандартными эхо-импульсными методами на отражение и прохождение были измерены коэффициент затухания, скорость звука и рассчитан акустический импеданс.

Нелинейные акустические методы для исследования полимеров на основе PLA применялись в работе [23]. Методом генерации гармоник измерялся нелинейный акустический параметр третьего порядка при изгибной деформации образцов PLA, подвергавшихся химическим и физическим воздействиям. Установлено, что наибольшее воздействие на изменение величины нелинейного акустического параметра оказывает введение примеси, а также сочетанное применение всех использовавшихся методов обработки.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментальных исследований ультразвуковым и статическим методами влияния 3D-печати на линейные и нелинейные упругие свойства нитевидных образцов полимера PLA марки eSun. Были исследованы как линейные упругие свойства образцов полимера PLA (статическим методом, т.е. по нагрузочной кривой механическое напряжение σ –деформация ϵ вплоть до разрыва), так и нелинейные (с использованием модифицированного метода Терстона–Браггера, который заключается в измерении зависимости относительного изменения скорости упругих волн в образце от величины приложенного к нему механического напряжения растяжения).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОБРАЗЦЫ, УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Автоматизированная установка, использовавшаяся для одновременного измерения статическим методом и методом Терстона–Браггера зависимости деформации и относительного изменения скорости упругих волн от приложенного механического напряжения, ранее подробно была описана в [31]. Она включала в себя механическую (для создания механического напряжения растяжения) и ультразвуковую части. Для измерения относительного изменения скорости упругих волн использовалась автоматизированная импульсная ультразвуковая установка, которая была разработана на базе ультразвуковой автоматизированной системы Ritec RAM-5000. Для генерации и приема продольных акустических волн были использованы пьезоэлектрические преобразователи с резонансной частотой 300 кГц. Преобразователи прикреплялись с помощью подпружиненных зажимов к торцам усеченных конусов, в которых были закреплены концы образцов. Для устранения высокочастотных компонент зондирующий сигнал пропусклся через фильтр нижних частот.

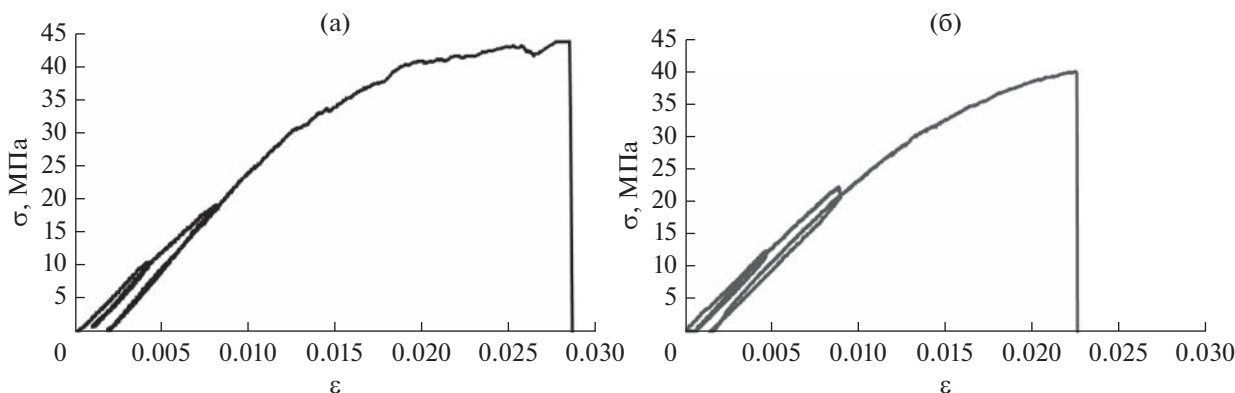


Рис. 1. Экспериментально измеренная нагрузочная кривая $\sigma(\epsilon)$ для (а) — исходного и (б) — 3D-напечатанного образцов PLA.

Для управления ходом эксперимента и обработки полученных данных использовался специально разработанный пакет программ с графическим интерфейсом. Он был установлен на персональном компьютере и обеспечивал возможность одновременного проведения статических и ультразвуковых измерений с дальнейшим их архивированием и обработкой.

Для проведения исследований были изготовлены два образца полимера PLA. Первый (называемый далее “исходным”) был вырезан из нити коммерческого полимера PLA марки eSun без дополнительной термической или иной обработки. Он имел форму тонкого цилиндра длиной $L = 121.7$ мм и диаметром $D = 1.7$ мм.

Второй образец (называемый далее “напечатанным”) был напечатан на 3D-принтере из той же нити полимера PLA марки eSun. Он имел форму тонкой прямой призмы длиной 118 мм с основанием в форме правильного шестиугольника с длиной стороны 1.05 мм. Печать производилась методом послойного наплавления на самодельном 3D-принтере, близком по параметрам к модели “3DQ Mini”, при температуре 160°C , 100% заполнении и диаметре сопла 0.05 мм, ориентация нити — вдоль длинной оси призмы.

По результатам измерений были рассчитаны по методике, описанной в [31], как линейные (линейный модуль Юнга E), так и нелинейные упругие параметры (нелинейный модуль Юнга E_N и нелинейный параметр второго порядка N) для нитевидных образцов как исходного образца PLA марки eSun, так и для образца PLA, изготовленного методом 3D-печати из исходного материала.

Линейный модуль Юнга (коэффициент упругости второго порядка) E определялся из нагрузочной кривой механическое напряжение—деформация по формуле:

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}. \quad (1)$$

Нелинейный модуль Юнга (коэффициент упругости третьего порядка) E_N определялся из зависимости относительного изменения скорости от приложенного механического напряжения по формуле:

$$E_N = \frac{2E}{\Delta\epsilon_{\text{ст}}} \left(\frac{\Delta V}{V} \right). \quad (2)$$

Акустический нелинейный параметр второго порядка N рассчитывался по формуле:

$$N = \frac{E_N}{E}. \quad (3)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ АНАЛИЗ

В результате серии экспериментов была получена информация о линейных и нелинейных упругих свойствах исследуемых образцов исходного и 3D-напечатанного образцов полимера PLA и влиянии на них периодических процессов циклов механической нагрузки-разгрузки. Общее время каждого эксперимента составляло 4.5 ч, таким образом, процесс нагружения можно считать близким к квазистатическому.

Результаты измерения зависимости напряжение—деформация $\sigma = \sigma(\epsilon)$ в исследуемых образцах для двух с половиной циклов периодического изменения приложенного к нему механического напряжения приведены на рис. 1 для (а) исходного и (б) 3D-напечатанного образцов. Для каждого цикла нагрузки-разгрузки наблюдалась значительная гистерезисная зависимость $\sigma = \sigma(\epsilon)$. После первого цикла остаточные деформации составляли $\epsilon \sim 0.0010 \pm 0.0003$ для исходного образца и $\epsilon \sim 0.0003 \pm 0.0003$ для напечатанного, после второго — $\epsilon \sim 0.0019 \pm 0.0003$ для исходного образца и $\epsilon \sim 0.0014 \pm 0.0003$ для напечатанного.

Проведенные экспериментальные измерения зависимости напряжение—деформация позволи-

Таблица 1. Прочностные и пластические характеристики исходного и 3D-напечатанного образцов PLA

	Исходный	3D-напечатанный
Модуль Юнга, ГПа	2.6 ± 0.1	2.7 ± 0.1
Предел прочности, МПа	44 ± 1	40 ± 1
Деформация при разрыве, %	2.9 ± 0.1	2.3 ± 0.1

ли определить механические характеристики исследуемых образцов (предел прочности, остаточная деформация при разрыве, модуль Юнга). Модуль Юнга определялся на линейных участках нагрузочных кривых по методике, описанной в работе [31]. Рассчитанные по экспериментальным данным значения механических параметров исходного и 3D-напечатанного образцов PLA представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, механические свойства напечатанного образца полимера PLA несколько ухудшились: он имеет несколько меньший предел прочности и меньшую остаточную деформацию при разрыве.

По формуле (1) были рассчитаны линейные модули Юнга в обоих исследуемых образцах при их нагрузке и разгрузке. Линейная часть второго цикла нагрузки-разгрузки, по которой рассчитывался модуль Юнга методом наименьших квадратов, приведена на рис. 2.

Значения линейных модулей Юнга в исследуемых образцах PLA для всех циклов нагрузки и разгрузки приведены в табл. 2. Видно, что модули Юнга как исходного, так и напечатанного образцов несколько увеличиваются при нагружении образцов, что можно объяснить их упрочнением. На первом цикле нагрузки-разгрузки, в линейной области нагрузочной кривой, различие модулей Юнга исходного и напечатанного образцов порядка погрешности измерения. На втором цикле нагрузки-разгрузки, который уже выходил за пределы линейной области, исходный и напечатанный

образец ведут себя различным образом: модуль Юнга исходного образца остается почти неизменным, а напечатанного незначительно уменьшается после нагрузки.

В ходе эксперимента одновременно с измерением нагрузочной кривой $\sigma(\epsilon)$ были измерены зависимости относительного изменения скорости продольной упругой волны $(\Delta V/V)$ в образце от величины его статической деформации $\epsilon_{ст}$ в процессе нагрузки-разгрузки. Полученные зависимости представлены на графиках (рис. 3).

Видно, что при малых деформациях (до 0.01) зависимость относительного изменения скорости упругих волн от деформации при нагрузке-разгрузке образцов близка к линейной. Это позволило рассчитать значения модулей Юнга третьего порядка с помощью формулы (2) с использованием метода наименьших квадратов. Пример линейной части зависимости относительного изменения скорости от деформации для первого цикла нагрузки-разгрузки для исходного и напечатанного образцов приведен на рис. 4. Отметим, что различное поведение относительного изменения скорости звука при нагрузке и разгрузке видно уже после первого цикла нагружения.

Значения коэффициентов упругости третьего порядка для всех циклов нагрузки и разгрузки представлены в табл. 3. Видно, что нагружение как исходного, так и напечатанного образцов приводит к росту нелинейного модуля Юнга, и этот рост одного порядка для исходного и напеча-

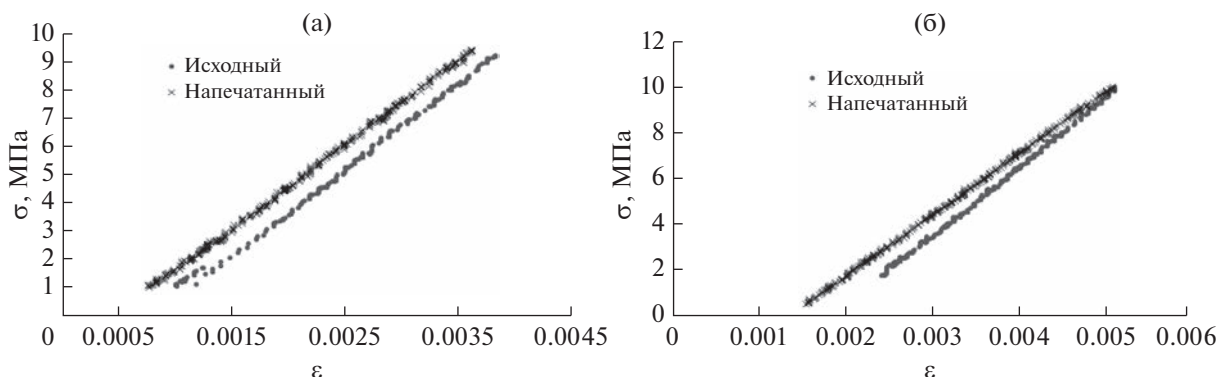


Рис. 2. Экспериментально измеренные нагрузочные кривые $\sigma(\epsilon)$ для второго цикла при (а) — нагрузке и (б) — разгрузке исходного и 3D-напечатанного образцов PLA.

танного образцов. Но если нелинейный модуль Юнга исходного образца возрастает почти монотонно, то его поведение для 3D-напечатанного образца немонотонное: он несколько увеличивается в области нагрузки и уменьшается в области разгрузки.

Используя полученные значения коэффициентов упругости второго и третьего порядков, по формуле (3) был рассчитан акустический нелинейный параметр N , значения которого представлены в табл. 4. Видно, что нелинейный параметр как для исходного, так и для напечатанного образцов ведет себя немонотонно по мере нагружения. Однако нелинейный параметр исходного образца сильно увеличивается после первого нагружения, а потом меняется слабо. Нелинейный же параметр напечатанного образца растет и при первом, и при втором нагружениях, а на второй разгрузке падает. Такое различие можно связать с различием внутренней структуры исходного и 3D-напечатанного образцов.

Данных об абсолютном значении нелинейного параметра PLA в литературе нами не обнаружено. В предшествующей статье авторов по определению упругих модулей и нелинейного параметра образцов PLA [31] была допущена ошибка при вычислении относительного изменения скорости звука, что привело к существенному занижению абсолютных значений нелинейного модуля упругости и нелинейного параметра. Скорректированные значения нелинейного параметра приведены в [32] и составляют от 5.0 ± 0.4 до 5.9 ± 0.5 в сопоставимом диапазоне деформаций, что в пределах погрешности близко к значениям, полученным в данной работе. Небольшое различие может быть связано со старением второго образца, который исследовался на 2 года позже.

Средние значения нелинейного параметра B/A для ряда полимеров (полистирол, акрил, полиэтилентерефталат, поливинилхлорид, поликарбонат), измеренные методом фокусированного

Таблица 2. Линейный модуль Юнга исходного и 3D-напечатанного образцов PLA при нагрузке-разгрузке

Модуль Юнга, ГПа	Исходный	3D-напечатанный
1 цикл, нагрузка	2.6 ± 0.1	2.7 ± 0.1
1 цикл, разгрузка	2.7 ± 0.1	2.8 ± 0.1
2 цикл, нагрузка	3.0 ± 0.1	2.9 ± 0.1
2 цикл, разгрузка	3.0 ± 0.1	2.7 ± 0.1
3 цикл, нагрузка	3.1 ± 0.1	3.2 ± 0.1

Таблица 3. Коэффициенты упругости третьего порядка исходного и 3D-напечатанного образцов PLA при нагрузке-разгрузке

Коэффициент упругости третьего порядка, ГПа	Исходный	3D-напечатанный
1 цикл, нагрузка	14.4 ± 0.7	14.6 ± 0.7
1 цикл, разгрузка	19.0 ± 0.9	16.9 ± 0.8
2 цикл, нагрузка	18.8 ± 0.9	19.7 ± 0.9
2 цикл, разгрузка	20 ± 1	16.2 ± 0.8
3 цикл, нагрузка	21 ± 1	22 ± 1

ультразвука, достигают 9–11 [33]. Поведение нелинейного параметра при механическом нагружении полипропилена исследовалось в работе [34]. На начальном участке растяжения чистого полипропилена его нелинейный параметр второго порядка $-\frac{\partial V(\epsilon)}{\partial \epsilon} / V$ вел себя немонотонно: в линейной части он падал с 7.5 до 5, при выходе на начальную стадию пластической области снова возрос до 7.5, а при дальнейшем растяжении снова стал уменьшаться. Таким образом, можно сделать вывод о том, что величина нелинейного параметра полимера меняется в зависимости от то-

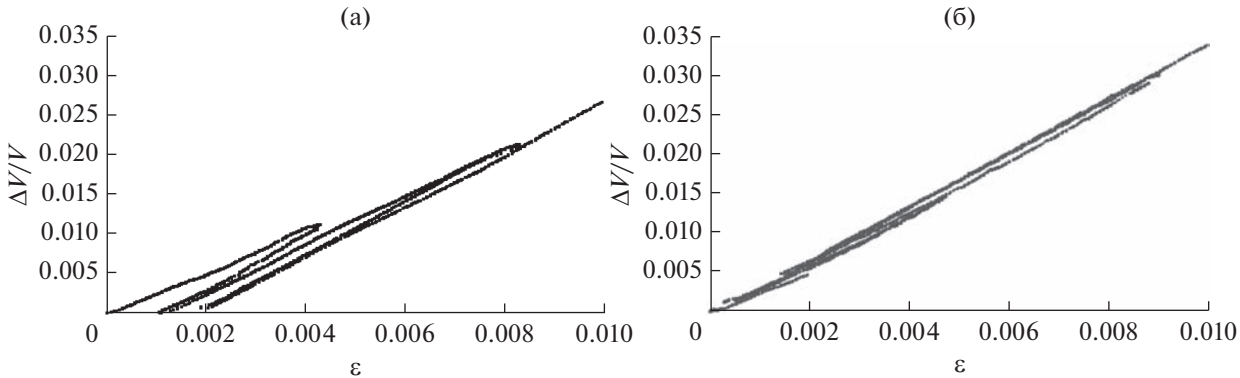


Рис. 3. Экспериментально измеренные зависимости относительного изменения скорости продольной волны от статической деформации для (а) — исходного и (б) — 3D-напечатанного образцов PLA.

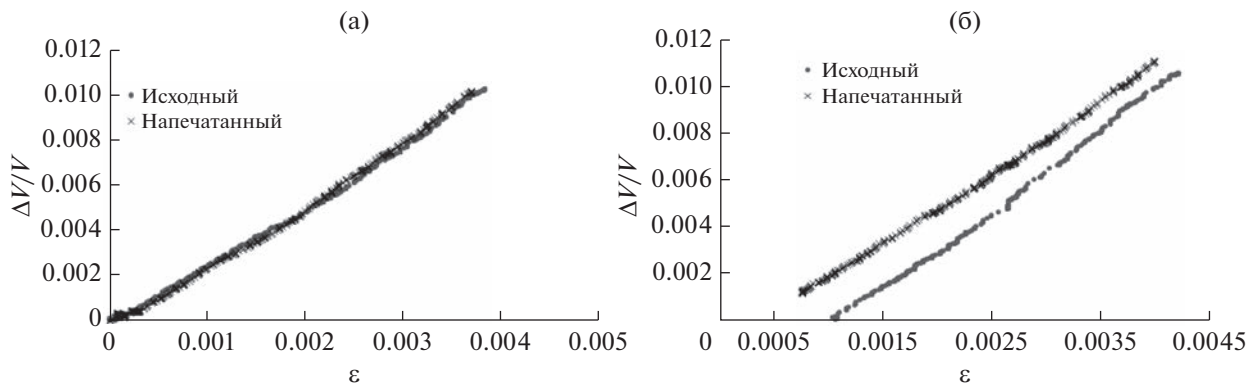


Рис. 4. Экспериментально измеренные зависимости относительного изменения скорости продольной волны от статической деформации для первого цикла при (а) – нагрузке и (б) – разгрузке исходного и 3D-напечатанного образцов PLA.

Таблица 4. Нелинейный акустический параметр исходного и 3D-напечатанного образцов PLA при нагрузке-разгрузке

Нелинейный акустический параметр	Исходный	3D-напечатанный
1 цикл, нагрузка	5.5 ± 0.4	5.4 ± 0.4
1 цикл, разгрузка	7.0 ± 0.6	6.0 ± 0.5
2 цикл, нагрузка	6.3 ± 0.5	6.8 ± 0.5
2 цикл, разгрузка	6.7 ± 0.5	6.1 ± 0.5
3 цикл, нагрузка	6.8 ± 0.5	6.9 ± 0.5

го, на каком участке нагрузочной кривой он измеряется. Это может служить основой для нелинейного акустического контроля нагружаемых полимеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально исследовано влияние 3D-печати при 100% заполнении на механические, линейные и нелинейные упругие параметры образца промышленного полимера PLA марки eSun.

Для 3D-напечатанного образца PLA обнаружено уменьшение предела прочности примерно на 10% и величины остаточной деформации при разрыве примерно на 20%.

Установлено, что периодические нагрузки-разгрузки образца приводят к незначительному увеличению величины модуля Юнга E как для исходного, так и для напечатанного образцов.

Обнаружено немонотонное поведение нелинейного модуля упругости и нелинейного параметра по мере нагружения, характер которого отличается для исходного и для напечатанного образцов. Это различие связывается с различием

внутренней структуры исходного и 3D-напечатанного образцов.

Полученные результаты дают информацию о влиянии 3D-печати при 100% заполнении на механические, линейные и нелинейные упругие свойства полимера PLA и могут быть использованы при создании образцов композитов и метаматериалов в технологии 3D-печати, а также служить основой для развития методов нелинейного акустического контроля нагружаемых полимеров.

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-12-00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schumacher C., Bickel B., Rys J., Marschner S., Daraio C., Gross M. Microstructures to control elasticity in 3D printing // *ACM Trans. Graph.* 2015. V. 34. P. 136:1–136:13.
2. Cantrell J., Rohde S., Damiani D., Gurnani R., DiSandro L., Anton J., Young A., Jerez A., Steinbach D., Kroeze C., Ifju P. Experimental Characterization of the Mechanical Properties of 3D Printed ABS and Polycarbonate Parts // *Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics*. 2017. V. 3. P. 89–105.
3. Kao Y., Zhang Y., Wang J., Tai B.L. Loading–unloading cycles of three-dimensional-printed built bimaterial structures with ceramic and elastomer // *J. Manuf. Sci. Eng.* 2016. V. 139. P. 041006–041006-6.
4. Zou R., Xia Y., Liu S., Hu P., Hou W., Hu Q., Shan C. Isotropic and anisotropic elasticity and yielding of 3D printed material // *Compos. Part B Eng.* 2016. V. 99. P. 506–513.
5. Бошняк В.А., Языков А.В. Оценка возможности применения изделий из пластмасс, созданных посредством послойной наплавки материала, в силовой оснастке лабораторных установок // *Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2016. С. 311–320.
6. Martin J.H., Yahata B.D., Hundley J.M., Mayer J.A., Schaedler T.A., Pollock T.M. 3D printing of high-

- strength aluminium alloys // *Nature*. 2017. V. 549. P. 365–369.
7. Ma C., Dong Y., Ye C. Improving surface finish of 3D-printed metals by ultrasonic nanocrystal surface modification // *Procedia CIRP*. 2016. V. 45. P. 319–322.
 8. Schulze C., Weinmann M., Schweigel C., Keßler O., Badler R. Mechanical properties of a newly additive manufactured implant material based on Ti–42Nb // *Materials* (Basel). 2018. V. 11. P. 13–16.
 9. Ланцова Ю.А., Павленко Т.Г. 3D принтеры // Физика и современные технологии в АПК: материалы XI Всероссийской молодежной конференции молодых ученых, студентов и школьников с международным участием, Орел, 19 февраля 2020 г. Орловский государственный аграрный университет им. Н.В. Парахина. Орел: ООО Полиграфическая фирма “Картуш”, 2020. С. 45–48.
 10. Wang J., Goyanes A., Gaisford S., Basit A.W. Stereolithographic (SLA) 3D printing of oral modified-release dosage forms // *Int. J. Pharmaceutics*. 2016. V. 503. P. 207–212.
 11. Msallem B., Sharma N., Cao S., Halbeisen F.S., Zeilhofer H.F., Thieringer F.M. Evaluation of the dimensional accuracy of 3D-printed anatomical mandibular models using FFF, SLA, SLS, MJ, and BJ printing technology // *J. clinical medicine*. 2020. V. 9. P. 817.
 12. Murr L.E., Martinez E., Amato K.N., Gaytan S.M., Hernandez J., Ramirez D.A., Shindo P.W., Ryan F.M., Wicker R.B. Fabrication of metal and alloy components by additive manufacturing: examples of 3D materials science // *J. Materials Research and technology*. 2012. V. 1. P. 42–54.
 13. Doshi M., Mahale A., Singh S.K., Deshmukh S. Printing parameters and materials affecting mechanical properties of FDM-3D printed Parts: Perspective and prospects // *Materials Today: Proc.* 2021. V. 50. P. 2269–2275.
 14. Wickramasinghe S., Do T., Tran P. FDM-based 3D printing of polymer and associated composite: A review on mechanical properties, defects and treatments // *Polymers*. 2020. V. 12. P. 1529.
 15. Lim L.T., Auras R., Rubino M. Processing technologies for poly(lactic acid) // *Prog. Polym. Sci.* 2008. V. 33. P. 820–852.
 16. Nakatsuka T. Polylactic Acid-Coated Cable // *Fujikura Tech. Rev.* 2011. P. 39–46.
 17. Farah S., Anderson D.G., Langer R. Reviews Physical and mechanical properties of PLA, and their functions in widespread applications – A comprehensive review // *Advanced Drug Delivery*. 2016. V. 107. P. 367–392.
 18. La Mantia F.L., Morreale M. Green composites: A brief review. Composites, Part A // *Appl. Sci. Manuf.* 2011. V. 42. P. 579–588.
 19. Hamad K., Kaseem M., Ayyoob M., Joo J., Deri F. Polylactic acid blends: The future of green, light and tough // *Progress in Polymer Science*. 2018. V. 85. P. 83–127.
 20. de Ciurana J., Serenó L., Vallès E. Selecting Process Parameters in RepRap Additive Manufacturing System for PLA Scaffolds Manufacture // *Procedia CIRP*. 2013. V. 5. P. 152–157.
 21. Fernandez-Vicente M., Calle W., Ferrandiz S., Conejero A. Effect of Infill Parameters on Tensile Mechanical Behavior in Desktop 3D Printing // *3D Printing and Additive Manufacturing*. 2016. V. 3. P. 183–192.
 22. Wittbrodt B., Pearce J.M. The effects of PLA color on material properties of 3-D printed components // *Additive Manufacturing*. 2015. V. 8. P. 110–116.
 23. Zhao G., Gomes F.P.C., Marway H., Thompson M.R., Zhu Zh. Physical Aging as the Driving Force for Brittle–Ductile Transition of Polylactic Acid // *Macromol. Chem. Phys.* 2020. V. 221. P. 1900475.
 24. Lanzotti A., Grasso M., Staiano G., Martorelli M. The impact of process parameters on mechanical properties of parts fabricated in PLA with an open-source 3-D printer // *Rapid Prototyping Journal*. 2015. V. 21. P. 604–617.
 25. Afrose M.F., Masood S.H., Iovenitti P., Nikzad M., Sbarski I. Effects of part build orientations on fatigue behaviour of FDM-processed PLA material // *Progress in Additive Manufacturing*. 2016. V. 1. P. 21–28.
 26. Ahmed A.A., Susmel L. Additively Manufactured PLA under static loading: strength/cracking behaviour vs deposition angle // *Procedia Structural Integrity*. 2017. V. 3. P. 407–507.
 27. Oztan C., Karkkainen R., Fittipaldi M., Nygren G., Roberson L., Lane M., Celik E. Microstructure and mechanical properties of three dimensional-printed continuous fiber composites // *J. Composite Materials*. 2019. V. 53. P. 271–280.
 28. Parker N., Mather M.L., Morgan S.P., Povey M. J. Longitudinal acoustic properties of poly(lactic acid) and poly(lactic-co-glycolic acid) // *Biomedical Materials*. 2010. V. 5. P. 055004.
 29. Wua H.-C., Shenb F.-W., Honga X., Changa W.V., Winet H. Monitoring the degradation process of biopolymers by ultrasonic longitudinal wave pulse-echo technique // *Biomaterials*. 2003. V. 24. P. 3871–3876.
 30. Antoniou A., Evripidou N., Giannakou M., Constantinides G., Damianou C. Acoustical properties of 3D printed thermoplastics // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. V. 149. P. 2854–2864.
 31. Коробов А.И., Кокшайский А.И., Михалев Е.С., Одина Н.И., Ширгина Н.В. Исследования упругих свойств полимера PLA статическими и ультразвуковыми методами // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 4. С. 387–394.
 32. Коробов А.И., Кокшайский А.И., Михалев Е.С., Одина Н.И., Ширгина Н.В. Поправки к “Исследования упругих свойств полимера PLA статическими и ультразвуковыми методами” [Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 4. С. 387–394] // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 3. С. 390.
 33. Saito S. Nonlinearity Parameter Measurement for Polymer Plates Using Focused Ultrasound // *AIP Conf. Proc.* 2008. V. 1022. P. 561–564.
 34. Solodov I., Pfleiderer K., Gerhard H., Busse G. Nonlinear acoustic approach to material characterization of polymers and composites in tensile tests // *Ultrasonics*. 2004. V. 42. P. 1011–1015.

УДК 534.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОКУСИРОВАННЫХ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ЭФФЕКТОВ ДИФФУЗИИ ПРИ ОБЪЕМНОЙ ТЕПЛОВОЙ АБЛЯЦИИ БИОТКАНИ

© 2023 г. П. А. Пестова^a, *, М. М. Карзова^a, П. В. Юлдашев^a, В. А. Хохлова^a

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991 Россия

*e-mail: ppolina-98@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 01.03.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Представлены результаты численного моделирования, имитирующего эксперимент по облучению ткани говяжьей печени *ex vivo* мощным фокусированным ультразвуком с помощью терапевтической решетки клинической системы MR-HIFU (Sonalleve V1 3.0T, Profound Medical Corp., Canada). Рассмотрены и сравниваются непрерывный квазилинейный и импульсно-периодические ударно-волновые режимы облучения с одинаковой средней по времени мощностью. Объемные тепловые разрушения создавались путем перемещения фокуса излучателя в его фокальной плоскости по дискретным траекториям, состоящим из двух либо четырех concentрических окружностей с максимальным радиусом 4 мм. Проанализировано влияние критерия контроля тепловой дозы в процессе облучения и критерия остановки воздействия ультразвуком на форму, объем и время создания теплового разрушения. Акустическое поле в ткани рассчитывалось с помощью уравнения Вестервельта, температурное поле моделировалось с помощью неоднородного уравнения теплопроводности, граница разрушения определялась в соответствии с порогом тепловой дозы. В квазилинейном режиме, соответствующем клиническому, тепловая диффузия приводит к удлинению формы разрушения в 2–3 раза вдоль оси ультразвукового пучка по сравнению с поперечным размером траектории. Использование импульсно-периодических ударно-волновых режимов облучения с отключением внутренних окружностей траектории по мере достижения на них порогового значения тепловой дозы позволяет существенно подавить эффекты тепловой диффузии в аксиальном направлении пучка и получить локализованные тепловые разрушения заданной формы с сопоставимой клиническому случаю скоростью тепловой абляции.

Ключевые слова: мощный фокусированный ультразвук, ударный фронт, тепловая диффузия, нелинейные эффекты, тепловая абляция, численное моделирование, тепловая доза

DOI: 10.31857/S0320791922600585, **EDN:** STCCNT

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия быстро развивается технология HIFU (от англ. аббревиатуры High Intensity Focused Ultrasound) неинвазивной хирургии, при которой локальное разрушение пораженных тканей органа происходит без хирургического вмешательства под действием высокоинтенсивного сфокусированного ультразвука [1–4]. В клинической практике основным механизмом разрушения тканей с помощью технологии HIFU является тепловая абляция ткани при ее облучении квазигармоническими ультразвуковыми волнами. Принцип такого воздействия заключается в фокусировке ультразвукового пучка в предполагаемую область разрушения, где поглощенная акустическая энергия переходит в тепло, вызывая тепловой некроз ткани [3, 5]. Далее в статье теп-

ловой некроз (абляция), вызываемый нагреванием биологической ткани, будем называть тепловым разрушением ткани или просто разрушением.

Для создания объемных тепловых разрушений в клинических системах HIFU производится последовательное перемещение единичного фокуса излучателя по задаваемой траектории [6, 7]. Так, в рассматриваемой в данной работе клинической системе MR-HIFU Sonalleve V1 за счет электронной фазировки фокус терапевтической решетки перемещается дискретным образом по точкам, расположенным на concentрических окружностях с радиусами 2, 4, 6 и 8 мм (рис. 1а) [6, 10, 11]. При этом порядок облучения единичных фокусов на каждой окружности выбирается так, чтобы последовательно облучаемые точки располагались максимально далеко друг от друга (показано схе-

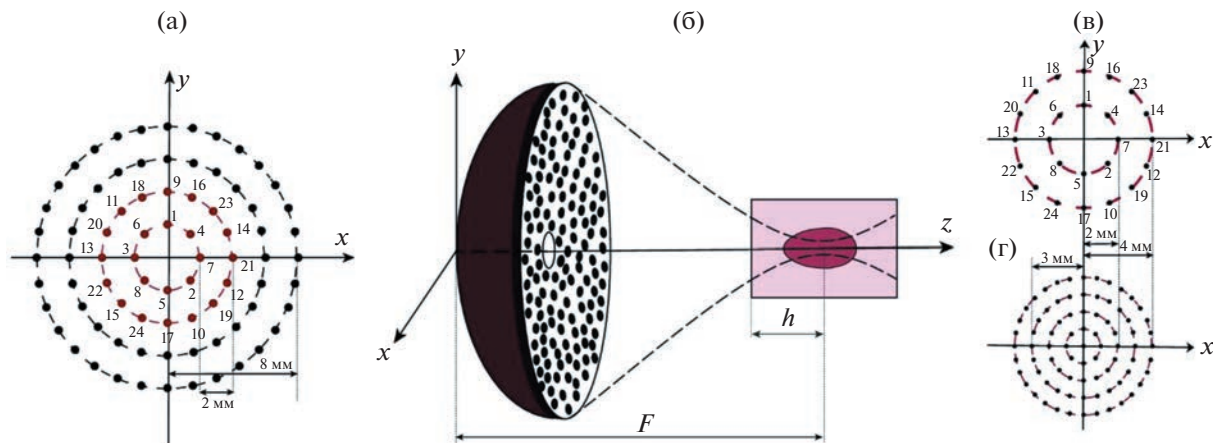


Рис. 1. (а) — Используемая в клинике траектория перемещения единичного фокуса, состоящая из 4 concentric окружностей с радиусами 2, 4, 6 и 8 мм. Последовательность электронного перемещения фокуса решетки отмечена числами. (б) — Схема проведения численного моделирования, имитирующего эксперимент. Ультразвуковой пучок создается HIFU-решеткой, состоящей из 256 элементов диаметром 6.6 мм с рабочей частотой 1.2 МГц; диаметр решетки равен 128 мм; фокусное расстояние $F = 120$ мм; фокусировка происходит на глубину $h = 2.5$ см в образец ткани говяжьей печени; излучатель и образец ткани помещены в воду. (в, г) — Две траектории дискретного перемещения фокуса ультразвукового пучка: (в) — первая траектория “2, 4 мм” состоит из 2 concentric окружностей с радиусами 2 и 4 мм, межфокусное расстояние на каждой окружности составляет 1.56 мм; (г) — вторая — “1, 2, 3, 4 мм” — из 4 окружностей радиусами 1, 2, 3, 4 мм, в этом случае расстояние между фокусами на окружностях уменьшается в 2 раза (0.78 мм).

матично на двух внутренних окружностях с помощью нумерации на рис. 1а). В зависимости от планируемого размера разрушения в протокол облучения включается от одной до четырех окружностей траектории. При необходимости создания разрушений большего размера излучатель или облучаемая область перемещаются механически в новое местоположение и процесс облучения повторяется заново [13].

Характерными для клинической практики HIFU являются протоколы непрерывного облучения квазилинейными волнами с акустической мощностью ультразвукового пучка в диапазоне 90–300 Вт [14, 15], при этом облучение каждого дискретного фокуса происходит в течение десятков миллисекунд (50 мс для Sonalleve V1) [6, 11]. Контроль создаваемого объема теплового разрушения производится путем встроенного МРТ-мониторинга, который отображает в режиме реального времени температуру в области разрушения. По кривой роста температуры в каждом пространственном вокселе облучаемого объема происходит расчет тепловой дозы, а затем по ее пороговому значению, соответствующему полному некрозу ткани (240 эквивалентных минут при температуре 43°C), определяется контур разрушенной области [14]. Облучение начинается с внутренней окружности, которая многократно облучается до тех пор, пока на ней не достигнется пороговое значение тепловой дозы. После этого начинается многократное облучение точек следующей окружности и т.д. Характерное время облу-

чения всей траектории составляет несколько десятков секунд [6, 11, 12].

Формирование однородного объемного теплового разрушения, состоящего из множества единичных разрушений, происходит за счет тепловой диффузии. При этом эффекты диффузии тепла проявляются не только в облучаемой плоскости траектории, но и в аксиальном направлении ультразвукового пучка, что определяет окончательные форму и объем разрушения. Тепловые объемные разрушения, наблюдаемые в лабораторных экспериментах и в клинической практике, полученные в традиционных для HIFU квазилинейных режимах облучения, имеют эллипсоидальную форму и вытянуты в аксиальном направлении в 2–3 раза по сравнению с поперечным размером траектории [6, 11, 12, 16]. Существенное вытягивание формы объемного разрушения вдоль оси пучка за счет эффектов диффузии делает невозможным получение локализованных разрушений и может повлечь нежелательные повреждения близкорасположенных к заданной области критических структур, таких как кости или сосуды [17–19]. Последние, в свою очередь, за счет перфузии кровотока уносят тепло, что также увеличивает неопределенность конечной формы теплового разрушения.

Для создания предсказуемых локализованных разрушений недавно было предложено использовать ударно-волновые импульсно-периодические режимы облучения, при которых увеличение пиковой мощности излучателя сопровождается

уменьшением коэффициента заполнения для каждого из импульсов, посылаемых в точки дискретной траектории перемещения фокуса. При этом средняя по времени мощность пучка остается такой же, как при облучении в принятых клинических режимах непрерывного режима излучения решеткой [20–24]. Присутствие высокоамплитудного ударного фронта в профиле волны в фокусе сопровождается резким увеличением поглощения энергии пучка на образовавшемся разрыве [20–22]. Высокая степень фокусировки ударных фронтов в сочетании с быстрым нагревом приводят к тому, что одиночные тепловые разрушения формируются в течение миллисекунд, а эффекты тепловой диффузии в аксиальном направлении не успевают проявиться [23, 24]. Вследствие этого можно говорить об уменьшении степени проявления эффектов тепловой диффузии вдоль оси пучка и получении хорошо локализованных разрушений заданной формы.

Целью данной работы являлось сравнение степени проявления эффектов диффузии тепла при облучении мощным фокусированным ультразвуком в клинической системе Sonalleve V1 в непрерывном квазилинейном либо в импульсно-периодических ударно-волновых режимах облучения с одинаковой средней по времени мощностью. В работе проанализировано влияние начальной пиковой интенсивности ультразвука при трех различных критериях контроля достижения пороговой тепловой дозы вдоль траектории облучения на форму и объем полученного разрушения ткани и скорость объемной тепловой абляции. Исследовано также влияние шага между точками дискретной траектории на равномерность температурного поля в квазилинейном режиме облучения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема проведения численного моделирования, имитирующего физический эксперимент *ex vivo*, показана на рис. 1б. Моделирование проводилось для терапевтической решетки клинической системы MR-HIFU (Sonalleve V1 3.0T, Profound Medical Corp., Canada). Излучателем ультразвуковых волн являлась мощная фазированная решетка, состоящая из 256 элементов круглой формы с диаметром 6.6 мм, расположенных рандомизировано на сферической поверхности с апертурой 128 мм и фокусным расстоянием $F = 120$ мм, рабочая частота составляла 1.2 МГц [25].

Ультразвуковой пучок проходил через согласующую среду (воду) и фокусировался на глубину $h = 2.5$ см в образец говяжьей печени (рис. 1б). Для получения объемных разрушений фокус излучателя перемещался в его фокальной плоскости ($x, y, z = F$) по дискретной траектории, состоящей из фокусов, расположенных на концентрических окружностях.

В данной работе для моделирования облучения, близкого к клиническому случаю *in situ*, был выбран квазилинейный режим с начальной интенсивностью на элементах решетки $I_0 = 1.2$ Вт/см², соответствующей начальной акустической мощности ультразвукового пучка 105 Вт. Облучение происходило непрерывно, время переключения между единичными фокусами составляло 20 мс, что является предельно возможным временем электронной перефокусировки для клинической системы Sonalleve V1. Были проведены расчеты для двух траекторий облучения с целью выявления влияния шага между точками дискретной траектории на равномерность температурных распределений в ткани образца при создании тепловых разрушений одинакового поперечного размера. Первая траектория являлась традиционной клинической траекторией и представляла собой две окружности с радиусами 2 и 4 мм (рис. 1в). Вторая траектория была получена пространственным масштабированием клинической траектории в два раза в сторону уменьшения расстояний между фокусами и состояла из четырех окружностей с радиусами 1, 2, 3 и 4 мм (рис. 1г). Для обеих траекторий число точек на внутренней окружности было равным восьми, а на каждой последующей возрастало еще на восемь, таким образом всего на первой траектории располагалось 24 единичных фокуса, а на второй 80 фокусов. Последовательность облучения единичных фокусов в обоих случаях соответствовала нумерации, показанной на рис. 1а, 1в. Пространственные шаги между фокусами вдоль каждой из окружностей составляли 1.56 мм для первой и 0.78 мм для второй траектории. Моделирование ударно-волновых импульсно-периодических режимов облучения, позволяющих подавить аксиальное вытягивание формы объемного разрушения и снизить проявление эффектов тепловой диффузии, проводилось для двух начальных пиковых интенсивностей на элементах решетки $I_0 = 8$ и $I_0 = 15$ Вт/см². При этом для обеспечения одинаковой средней по времени мощности пучка, такой же как и в квазилинейном случае (105 Вт), длительность воздействия на единичный фокус составляла $t_{\text{heat}} = 3$ мс для $I_0 = 8$ Вт/см² и $t_{\text{heat}} = 1.6$ мс для $I_0 = 15$ Вт/см², а интервал переключения между единичными фокусами был таким же (20 мс), как в квазилинейном случае. Ударно-волновой режим с начальной пиковой интенсивностью на элементах решетки $I_0 = 8$ Вт/см² соответствовал случаю образования развитого разрыва в фокальном профиле волны, а случай $I_0 = 15$ Вт/см² соответствовал режиму насыщения, предельно достижимому в исследовательских целях в системе HIFU Sonalleve V1. Пиковые акустические мощности терапевтической решетки при выбранных уровнях начальной пиковой интенсивности $I_0 = 8$

и $I_0 = 15$ Вт/см² на ее элементах составляли 700 и 1300 Вт, соответственно.

В ударно-волновых режимах облучения мощность тепловых источников концентрируется в меньшем объеме вокруг фокуса по сравнению со случаем облучения квазигармоническими волнами [20]. Основываясь на этом факте, для моделирования процесса создания объемного теплового разрушения в ударно-волновых режимах была выбрана вторая траектория облучения с уменьшенным по сравнению с клиническим случаем пространственным шагом (рис. 1г), при этом в траекторию была добавлена центральная точка.

Влияние критерия окончания воздействия ультразвуком на степень проявления диффузии тепла в квазилинейном, а затем и в ударно-волновых режимах, анализировалось по результатам моделирования трех протоколов облучения, отличие которых заключалось в различных критериях контроля тепловой дозы:

1) Протокол 1 (клинический): облучение каждой окружности происходит до тех пор, пока на ней не будет достигнуто пороговое значение тепловой дозы, после достижения которого начинается облучение следующей окружности.

2) Протокол 2 (с отключением внутренних кругов): облучение начинает происходить по всем окружностям траектории, однако по мере достижения тепловой дозы внутри каждого круга производится последовательное отключение внутренних кругов.

3) Протокол 3 (контроль тепловой дозы на внешнем круге): облучение происходит по всем окружностям траектории до тех пор, пока пороговое значение дозы не будет достигнуто на внешнем круге.

По результатам моделирования были получены значения объемов тепловых разрушений V и скорости объемной тепловой абляции. При этом скорость тепловой абляции рассчитывалась как отношение объема разрушения ко времени облучения, а объем разрушения определялся после остывания образца по области, в которой тепловая доза достигла порогового значения. Время остывания в каждом режиме облучения определялось моментом прекращения увеличения размеров теплового разрушения за счет продолжающейся после окончания воздействия диффузии тепла.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Ультразвуковое поле и тепловые источники

Фокусировка ультразвукового пучка в воде, а затем в образце говяжьей печени описывалась с помощью модифицированного уравнения Вестер-

вельта, учитывающего нелинейные и дифракционные эффекты, а также поглощение в ткани [22]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + L(p), \quad (1)$$

где $p = p(x, y, z, \tau)$ — давление, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, z — координата, вдоль которой происходит фокусировка пучка, $\tau = t - z/c_0$ — время в сопровождающей системе координат, параметры c_0 , β , ρ_0 и δ — скорость звука, коэффициент нелинейности, плотность среды и коэффициент термовязкого поглощения в среде, соответственно. Значения указанных физических параметров для воды были равны $\rho_0 = 998$ кг/м³, $c_0 = 1485$ м/с, $\beta = 3.5$, а для ткани говяжьей печени $\rho_0 = 1050$ кг/м³, $c_0 = 1580$ м/с, $\beta = 4.0$ [24, 26, 27]. Коэффициент термовязкого поглощения в обеих средах был выбран одинаковым и составлял $\delta = 4.33 \times 10^{-6}$ м²/с.

В дополнение к термовязкому поглощению для расчета поглощения в ткани печени использовался оператор $L(p)$, который соответствовал линейной зависимости от частоты коэффициента поглощения, равного 8.43 м⁻¹ на частоте 1.2 МГц, и логарифмическому закону дисперсии $(c(f) - c_0)/c_0 = (c_0 \alpha_0)/(\pi^2 f_0) \ln(f/f_0)$ [20, 22].

Моделирование уравнения Вестервельта (1) проводилось с использованием численного алгоритма, развитого ранее в работе [28], а затем неоднократно применяемого для расчетов мощных ультразвуковых полей различных медицинских излучателей [22, 25, 29, 30]. Для постановки граничного условия использовалась модель идеализированной решетки Sonalleve V1 [25], где сначала граничные условия задавались на сферической поверхности решетки в виде равномерного распределения колебательной скорости на ее элементах, а затем с помощью интеграла Рэлея переносились на плоскость, касательную к центру излучателя.

Результаты моделирования уравнения (1) использовались для нахождения пространственного распределения плотности мощности тепловых источников $Q(x, y, z)$ в ткани печени. Для этого профиль давления в каждой точке пространства сначала представлялся в виде разложения в ряд Фурье, а затем находилась полная интенсивность волны I как сумма интенсивностей всех гармоник ($N_{\text{harm}} \leq 800$) с комплексными амплитудами давления. Мощность тепловыделения Q в среде за счет поглощения энергии волны рассчитывалась как скорость убыли интенсивности при вычислении оператора нелинейности и поглощения на каждом шаге сетки dz [24]:

$$Q(x, y, z) = -\frac{I(x, y, z + dz) - I(x, y, z)}{dz}. \quad (2)$$

Тепловые источники рассчитывались в узлах пространственной сетки с поперечными шагами $dx = dy = 0.025$ мм, продольным шагом $dz = 0.1$ мм и выводились в окне размерами $[-8, 8]$ мм по осям x и y и $[100, 140]$ мм по оси z .

Температурное поле

Полученные в результате акустического расчета пространственные распределения плотности мощности тепловых источников Q в ткани использовались для нахождения температурного поля при моделировании неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{Q}{C_v}, \quad (3)$$

где T – температура, t – время, χ – коэффициент температуропроводности, C_v – теплоемкость образца, Q – плотность мощности тепловых источников в ткани, рассчитанных на основе уравнения Вестервелта. Значения физических параметров в уравнении (3) соответствовали ткани печени и были равны $\chi = 1.93 \times 10^{-7}$ м²/с, $C_v = 3.06 \times 10^6$ Дж/(м³ °С) [22, 24, 26, 27].

Алгоритм решения уравнения (3) подробно описан в работе [24] и включал в себя использование аналитического решения уравнения теплопроводности в **k**-пространстве:

$$\hat{T}(\mathbf{k}, t) = \hat{T}_0(\mathbf{k}) \exp(-4\pi^2 \mathbf{k}^2 \chi t) + \frac{\hat{Q}(\mathbf{k})}{4\pi^2 \mathbf{k}^2 \chi C_v} [1 - \exp(-4\pi^2 \mathbf{k}^2 \chi t)], \quad (4)$$

где $\hat{T}(\mathbf{k}, t)$, $\hat{T}_0(\mathbf{k})$, $\hat{Q}(\mathbf{k})$ – пространственные Фурье-спектры от соответствующих величин $T(x, y, z, t)$, $T_0(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, а $T_0(x, y, z)$ – начальное распределение температуры в рассматриваемом объеме. Переходы между декартовыми координатами и **k**-пространством осуществлялись с помощью операций быстрого преобразования Фурье (БПФ), входящих в стандартную библиотеку FFTW языка программирования Fortran.

Решение уравнения теплопроводности (3) происходило в два этапа. Сначала с использованием решения (4) в течение 20 мс рассчитывалось температурное поле в единичном фокусе, причем в расчет входили его нагрев до момента времени t_{heat} и дальнейшее остывание. После нахождения нагрева единичного фокуса, проводился расчет объемного теплового разрушения от начальной температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Свойство линейности уравнения (3) позволило независимо добавлять

заранее рассчитанное решение для температурного поля при единичном воздействии в разные точки траектории с временным шагом 20 мс, равным времени перемещения фокуса по траектории облучения, что существенно оптимизировало длительность расчетов. После окончания облучения моделировался процесс остывания образца в течение 12 с для начальной пиковой интенсивности $I_0 = 1.2$ Вт/см², 10 с для $I_0 = 8$ Вт/см² и 7 с для $I_0 = 15$ Вт/см² для учета увеличения объема разрушения за счет продолжающейся диффузии тепла.

Решение для температурного поля единичного воздействия рассчитывалось с шагами $dx = dy = 0.025$ мм и $dz = 0.1$ мм. Ранее было показано, что для корректного описания температурного поля объемного разрушения поперечный размер численного окна единичного воздействия должен не менее, чем в два раза превышать диаметр внешней окружности траектории [31]. Исходя из этого, единичное воздействие рассчитывалось в окне размерами $[-8, 8]$ мм по осям x и y и $[100, 140]$ мм по оси z . Для дальнейшего расчета температуры при объемных разрушениях во избежание эффекта наложения частот при взятии операций БПФ размеры пространственных окон подбирались таким образом, чтобы на границе окна не происходило повышения температуры. Решение для объемного разрушения бралось в поперечном окне $[-15, 15]$ мм.

Тепловая доза

В качестве критерия теплового некроза ткани использовалась интегральная величина тепловой дозы:

$$t_{56.0} = \int_0^{t_{\text{heat}}} R_0^{56.0 - T(\mathbf{r}, t)} dt \geq 1.76, \quad (5)$$

где коэффициент R_0 принимает значение 0.5 при $T(\mathbf{r}, t) \geq 43^\circ\text{C}$ и 0.25 при $T(\mathbf{r}, t) < 43^\circ\text{C}$ [32], $t_{56.0}$ – обычно используемый в высокоинтенсивных режимах HIFU временной эквивалент пороговой разрушающей тепловой дозы, составляющей 240 минут при температуре 43°C , и равный 1.76 с в случае его определения относительно температуры 56°C [1, 14, 24, 33]. Подробный алгоритм моделирования тепловой дозы описан в работе [24]. Пространственные окна, используемые при расчете распределения единичной тепловой дозы, соответствовали пространственному окну при расчете распределения температуры в единичном фокусе.

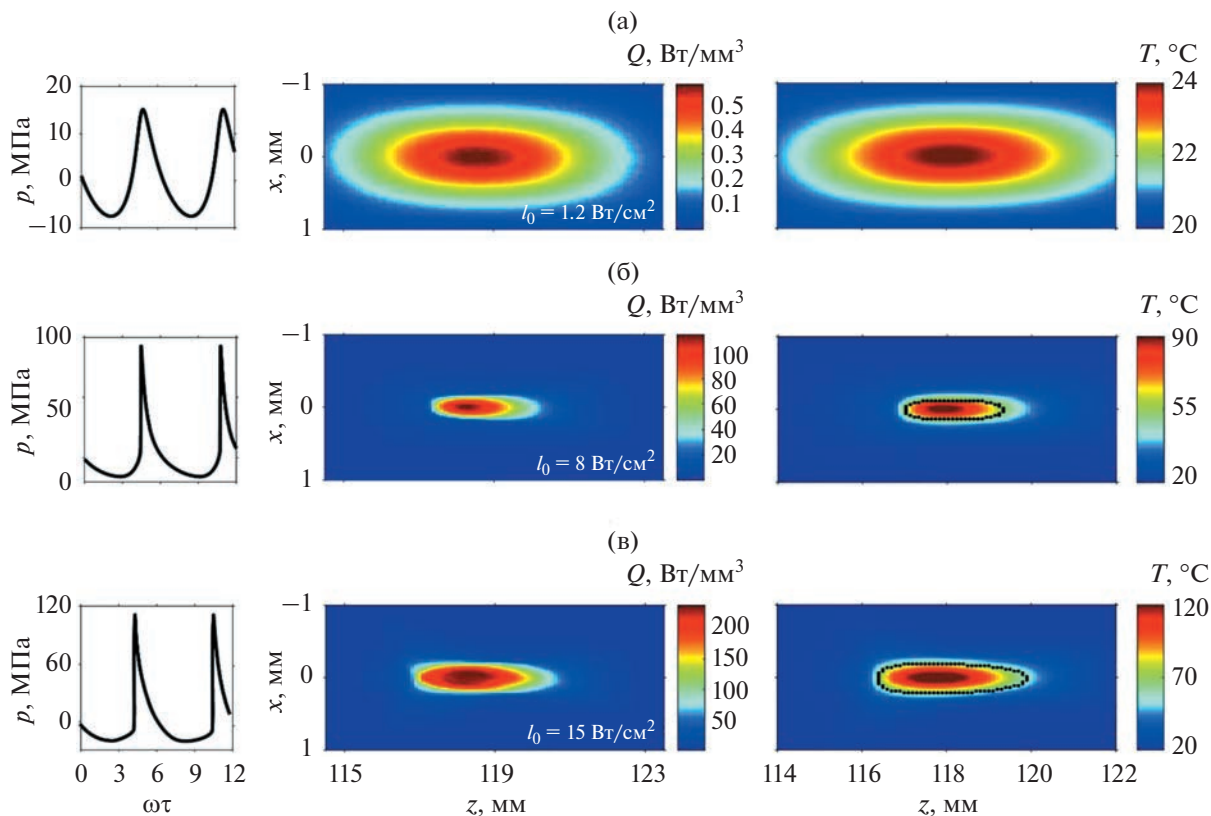


Рис. 2. Профили давления в фокусе (левый столбец), пространственные распределения плотности мощности тепловых источников в ткани (средний столбец) и температурные распределения (правый столбец) на момент перемещения фокуса (20 мс) в аксиальных (x , z) плоскостях пучка для (а) – квазигармонического режима облучения с интенсивностью на элементах решетки $I_0 = 1.2$ Вт/см², (б) – режима с формированием развитого разрыва ($I_0 = 8$ Вт/см²) и (в) – режима насыщения ($I_0 = 15$ Вт/см²). Черным контуром обозначена область, внутри которой тепловая доза превысила свое пороговое значение после остывания образца.

РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Акустическое поле

На рис. 2а–2в (левый столбец) представлены рассчитанные с помощью уравнения Вестервельта (1) профили давления в фокусе NIFU-решетки, соответствующие начальным пиковым интенсивностям на ее элементах (а) $I_0 = 1.2$ Вт/см², (б) $I_0 = 8$ Вт/см², (в) $I_0 = 15$ Вт/см² при фокусировке в середину образца ткани печени на глубину 2.5 см.

Режим с начальной интенсивностью $I_0 = 1.2$ Вт/см² соответствует квазилинейному распространению, определяемому по критерию перехода не более 10% энергии волны в фокусе в высшие гармоники в фокусе излучателя [34]. В этом случае в профиле волны уже проявляется асимметричность, уровень пикового положительного давления становится выше, чем пикового отрицательного, однако нелинейные эффекты еще не являются существенными для теплового воздействия (рис. 2а). По мере увеличения пиковой интенсивности на элементах решетки фокальный профиль

волны искажается с последующим формированием ударного фронта (разрыва), причем разрыв начинает формироваться в верхней части профиля, а затем нижняя граница разрыва постепенно смещается “вниз” и уходит в область отрицательного давления [35]. При начальной пиковой интенсивности $I_0 = 8$ Вт/см² нижняя граница разрыва находится вблизи нулевого уровня давления (рис. 2б), что является отличительной особенностью так называемого развитого разрыва [36]. Случай формирования развитого разрыва интересен тем, что для него отношение амплитуды разрыва A_{sh} (скачка давления на ударном фронте) к начальной амплитуде давления волны на излучателе p_0 достигает своего максимума, т.е. фокусировка является наиболее эффективной [36]. В этом случае значение амплитуды разрыва и пикового положительного давления совпадают. При дальнейшем увеличении интенсивности на элементах решетки рост отношения A_{sh}/p_0 замедляется и можно говорить о наступлении режима насыщения ($I_0 = 15$ Вт/см², рис. 2в) [37].

Для начальных пиковых интенсивностей $I_0 = 8$ и $I_0 = 15$ Вт/см² амплитуды разрыва составили $A_{sh} = 90$ и $A_{sh} = 120$ МПа, соответственно. Теоретическая оценка времени вскипания ткани $t_{boil} = (6\rho_0^2 c_0^4 C_V \Delta T) / (\beta f_0 A_{sh}^3)$ при используемых в расчете параметрах ткани и достигаемых амплитудах ударного фронта составляет $t_{boil} = 2.9$ мс для $I_0 = 8$ Вт/см² и 1.2 мс для $I_0 = 15$ Вт/см². Таким образом, в рассматриваемых в данной работе ударно-волновых режимах облучения вскипание ткани и сопутствующее формирование теплового разрушения следует ожидать уже в течение времени нагрева t_{heat} единичного фокуса.

Распределения плотности мощности тепловых источников Q (рис. 2, средний столбец) существенно отличаются в случае квазилинейного нагрева (рис. 2а) и ударно-волновых режимов (рис. 2б, 2в). Максимальное значение Q в случае развитого разрыва в 200 раз превышает соответствующее значение в квазилинейном случае, а в режиме насыщения аналогичное отношение увеличивается до 414 раз.

Во всех трех случаях рефракция ультразвукового пучка на границе вода–ткань приводит к смещению максимума поля из геометрического фокуса $F = 120$ мм в сторону к излучателю на 2 мм. Поперечные и аксиальные размеры теплового пятна, рассчитанные по уровню e^{-1} от пикового значения, составляют $1.2 \times 1.2 \times 7$ мм при квазилинейном нагреве (рис. 2а, средний столбец) и значительно превышают соответствующие размеры в ударно-волновых режимах (рис. 2б, 2в, средний столбец). В случае формирования развитого разрыва $I_0 = 8$ Вт/см² поглощение акустической энергии тканью локализовано в очень малом объеме (всего $0.3 \times 0.3 \times 2.7$ мм по уровню e^{-1} от пикового значения). Данная локализация объясняется присутствием ударных фронтов в профиле волны, которые приводят к острой фокусировке акустического поля и эффективному поглощению акустической энергии в фокальной области малых размеров. Однако при дальнейшем увеличении интенсивности на элементах решетки ударный фронт формируется в более широком объеме вокруг фокуса, что приводит к увеличению области тепловых источников (рис. 2в). Характерные размеры теплового пятна для режима насыщения $I_0 = 15$ Вт/см² составляют $0.4 \times 0.4 \times 3.6$ мм. Таким образом, наблюдается немонотонность изменения размеров области повышенного поглощения энергии волны. Важно отметить, что в отличие от приложений гистотрипсии с кипением [31, 36, 38], где основную роль играет высокая амплитуда ударного фронта, для получения тепловых HIFU-разрушений в ударно-волновых режимах существенным является также объем во-

круг фокуса, в котором произошло формирование разрывов.

2. Температурное поле единичного воздействия

Численный расчет уравнения теплопроводности (3) с использованием решения (4) показал, что для облучения единичного фокуса в квазилинейном режиме нагрев образца от начальной температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$ составляет порядка 4°C в текущем единичном фокусе к моменту начала облучения следующего (20 мс), причем достижения порога тепловой дозы не происходит ни в одной точке (рис. 2а, правый столбец). В ударно-волновых режимах остаточный нагрев к моменту времени 20 мс составляет 93 и 126°C в случае $I_0 = 8$ и $I_0 = 15$ Вт/см² (рис. 2б, 2в, правый столбец), соответственно, а размеры температурных пятен повторяют соответствующие размеры тепловых источников. При этом за время электронного перемещения фокуса решетки происходит формирование единичных тепловых разрушений с размерами $0.25 \times 0.25 \times 2.3$ и $0.4 \times 0.4 \times 3.5$ мм для $I_0 = 8$ и $I_0 = 15$ Вт/см², соответственно (рис. 2б, 2в, правый столбец).

Таким образом, более острая фокусировка ударных фронтов, сопровождающаяся эффективным поглощением акустической энергии, позволяет получить быстрое единичное предсказуемое локализованное тепловое разрушение небольшого размера с незначительными эффектами тепловой диффузии.

3. Получение объемного разрушения в квазилинейном режиме облучения

Результаты облучения объема ткани в квазилинейном режиме с использованием традиционной клинической траектории из двух окружностей с радиусами 2 и 4 мм представлены на рис. 3 в виде пространственных температурных распределений в момент окончания нагрева для трех указанных выше протоколов облучения.

В случае облучения по протоколу 1, используемому в клинической практике, для достижения порогового значения тепловой дозы потребовалось сначала совершить 41 обход по внутренней окружности (2 мм), а затем 24 раза облучить внешнюю окружность (4 мм). За время облучения 14.24 с форма разрушения в аксиальном направлении несимметрично “вытягивалась” за счет эффектов тепловой диффузии: аксиальный размер аблированного объема после остывания составил 16.8 мм, что в 2.4 раза превышает аксиальный размер единичного теплового пятна (7 мм), а скорость тепловой абляции составила 2.2 см³/мин, что соответствует известным численным и экспериментальным данным [12, 39].

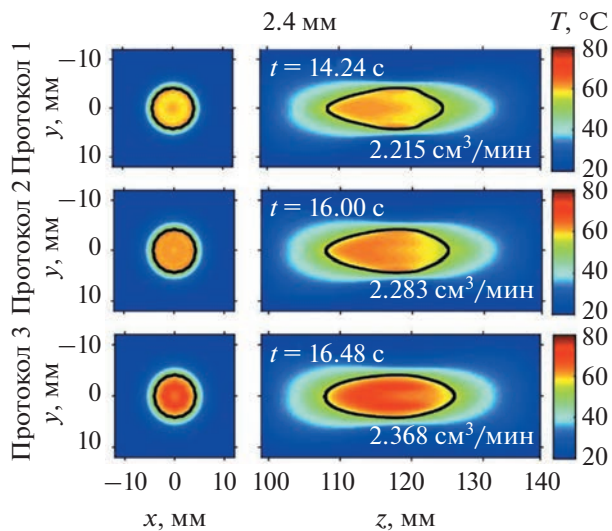


Рис. 3. Пространственные распределения температуры при облучении по траектории, состоящей из 2 окружностей с радиусами 2, 4 мм в момент окончания облучения ткани при начальной интенсивности $I_0 = 1.2$ Вт/см². Черным контуром обозначена область, внутри которой тепловая доза превысила свое пороговое значение после остывания образца. Верхний ряд соответствует облучению по “клиническому” протоколу, средний ряд – по протоколу с “отключением внутренних кругов”, а нижний ряд описывает протокол с “контролем тепловой дозы на внешнем круге”. На каждом пространственном распределении температуры показаны время окончания нагрева и достигнутая скорость объемной тепловой абляции.

В рассматриваемых двух других протоколах облучение по траектории начинается одинаково: две окружности облучаются по очереди 30 раз до момента достижения порогового значения тепловой дозы на внутренней окружности. Затем в протоколе 2 исключалось перемещение фокуса по внутренней окружности, а внешняя окружность облучалась еще 5 раз до достижения на ней порога тепловой дозы. В протоколе 3 контроль тепловой дозы производился только на внешней окружности, поэтому облучение продолжалось по всей

траектории, в результате чего суммарно было совершено еще 4 обхода по внешней окружности и 5 по внутренней. В данном случае дополнительное воздействие на центральную область после формирования в ней теплового некроза приводит к перегреву центральной области разрушения и к повышенной средней температуре в области разрушения по сравнению с клиническим протоколом (63 против 59°C). Следствием этого является достижение большего объема разрушения с более симметричной формой и более высокой скоростью тепловой абляции по сравнению с облучением по другим протоколам (табл. 1, столбец “траектория 2, 4 мм”).

Предположение о выгоде перегрева центра облучаемой области для повышения скорости тепловой абляции ткани обсуждалось ранее в работах [6, 11]. Качественно данное предположение можно объяснить тем, что большую часть времени нагрева (около 10 с) происходит постепенное прогревание заданного объема до формирования теплового разрушения, т.е. на этом отрезке времени “мгновенная скорость” тепловой абляции равна нулю. Затем, по мере роста температуры до 56–58°C происходит тепловая абляция заданного объема за секунды. При этом увеличение времени воздействия на уже прогретую или даже разрушенную область оказывается эффективным с точки зрения скорости абляции, поскольку за счет диффузии тепла происходит абляция соседней предварительно нагретой области. С учетом геометрии задачи, наибольшему влиянию процесса диффузии тепла при воздействии на различные точки траектории подвержена центральная область траектории, поэтому ее перегрев в совокупности с более длительным временем облучения заданного объема увеличивает скорость абляции.

Уменьшение пространственного шага между единичными фокусами в два раза с сохранением максимального поперечного размера траектории привело к более равномерному нагреву облучаемой области для каждого из трех протоколов об-

Таблица 1. Параметры облучения образца ткани говяжьей печени в квазилинейном режиме с начальной пиковой интенсивностью на элементах решетки $I_0 = 1.2$ Вт/см² по круговым траекториям для 3 протоколов. N_i – количество совершенных обходов по окружности с радиусом i мм. Скорость тепловой абляции рассчитывалась как отношение полученного объема разрушения ко времени воздействия. V – конечный объем полученного разрушения

$I_0 = 1.2$ Вт/см ²	Траектория 2, 4 мм; шаг 2 мм				Траектория 1, 2, 3, 4 мм; шаг 1 мм					
	N_2	N_4	скорость, см ³ /мин	V , мм ³	N_1	N_2	N_3	N_4	скорость, см ³ /мин	V , мм ³
Протокол 1	41	24	2.215	526	11	9	8	8	2.270	514
Протокол 2	30	35	2.283	610	7	7	9	13	2.284	566
Протокол 3	35	34	2.368	651	11	11	11	11	2.787	817

лучения (рис. 4). При облучении по протоколу 3 наблюдались наиболее заметные отличия по пиковой температуре и форме: пиковая температура возросла с 68 до 82°C (средняя по области с 63 до 70°C), тепловое разрушение приняло более симметричную эллипсоидальную форму, увеличились объем разрушения (817 против 651 мм³) и скорость тепловой абляции (2.8 против 2.4 см³/мин).

Анализ количества совершенных обходов N_i по каждой из окружностей траекторий (табл. 1) показал, что для клинического протокола 1 характерно уменьшение N_i по мере увеличения размера окружности, что объясняется эффектами тепловой диффузии. Обратная тенденция наблюдается для протокола 2, а для протокола 3 количество совершенных обходов N_i одинаково для всех окружностей.

С точки зрения скорости объемной тепловой абляции и величины конечного объема полученного теплового разрушения наиболее выигрышным для квазилинейного случая оказался протокол 3 с использованием второй траектории облучения с уменьшенным пространственным шагом (табл. 1, “траектория 1, 2, 3, 4 мм”). По сравнению с клиническим случаем (протокол 1, “траектория 2, 4 мм”) выигрыш в скорости составил 26%, а объем полученного разрушения увеличился на 55%.

Стоит также отметить, что аналог протокола 3, заключающийся в последовательном облучении всех точек траектории и многократном повторении таких полных обходов, используется в клинической системе HIFU Sonalleve в задачах гипертермии, где целью является равномерное поддержание температуры в диапазоне 40–45°C внутри заданного объема в течение длительного времени (порядка часа) [13].

Таким образом, результаты численного эксперимента показали, что 1) при облучении ткани в квазилинейном режиме диффузия тепла играет существенную роль в формировании конечной формы объемного теплового разрушения вдоль оси решетки; 2) уменьшение пространственного шага траектории позволяет получить более равномерный нагрев; 3) для квазилинейного режима облучения наиболее выигрышным с точки зрения скорости тепловой абляции и получения симметричной формы разрушения является протокол, в котором облучение всех точек траектории происходит до момента достижения пороговой тепловой дозы на внешнем круге.

Однако использование квазилинейного режима вне зависимости от протокола облучения неизбежно приводит к “вытягиванию” формы разрушения в 2–3 раза вдоль оси ультразвукового пучка по сравнению с размером единичных тепловых источников. Данная особенность делает невозможным создание предсказуемых локализованных в аксиальном направлении объемных

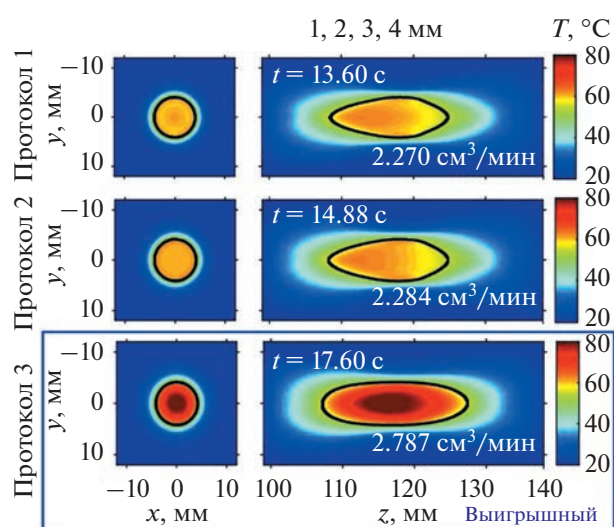


Рис. 4. Пространственные распределения температуры при облучении по траектории, состоящей из 4 окружностей с радиусами 1, 2, 3, 4 мм в момент окончания облучения ткани при начальной интенсивности $I_0 = 1.2$ Вт/см². Описание рисунка аналогично подписи к рис. 3.

тепловых разрушений и может приводить к повреждению близлежащих критических структур.

4. Получение объемного разрушения в ударно-волновых режимах облучения

Для подавления удлинения формы объемного разрушения и сопутствующего получения тонких, хорошо локализованных разрушений в данной работе были рассмотрены ударно-волновые импульсно-периодические режимы облучения. Поскольку, в отличие от традиционных квазилинейных режимов HIFU, использование ударно-волновых режимов позволяет получить одиночное разрушение малого размера в результате однократного воздействия (рис. 2б, 2в), то для подавления эффектов тепловой диффузии рассмотрение траектории с уменьшенным пространственным шагом является априори наиболее выигрышным. Результаты моделирования облучения ткани для двух ударно-волновых режимов с начальными пиковыми интенсивностями 8 и 15 Вт/см² по траектории с уменьшенным шагом показаны на рис. 5 для трех рассмотренных ранее протоколов.

В случае развитого разрыва ($I_0 = 8$ Вт/см²) наиболее выигрышным для квазилинейного случая протокол 3 оказался наименее оптимальным (рис. 5, нижний ряд, слева) с точки зрения локализации теплового разрушения: его форма вытянута в аксиальной плоскости в 3.8 раза по сравнению с соответствующим размером единичного разрушения (8.8 против 2.3 мм). Наряду с этим дополнительный перегрев центральной области

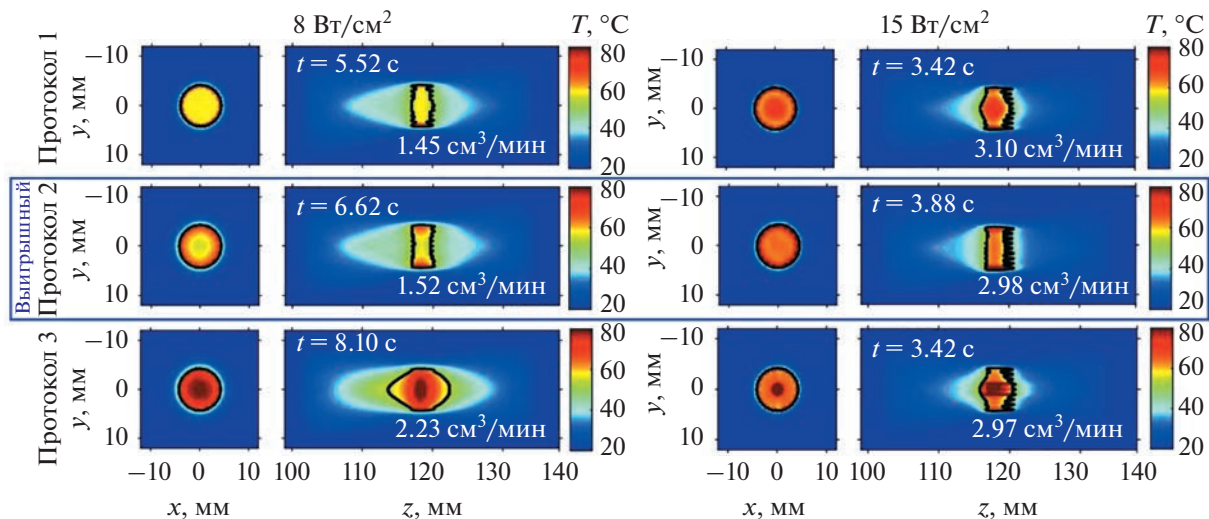


Рис. 5. Пространственные распределения температуры при ударно-волновом облучении с начальной пиковой интенсивностью на элементах решетки 8 Вт/см² (слева) и 15 Вт/см² (справа) по траектории, состоящей из 4 окружностей с радиусами 1, 2, 3, 4 мм. Описание рисунка аналогично подписи к рис. 3.

по-прежнему приводит к достижению наибольшей скорости тепловой абляции (табл. 2, столбец “8”), однако не удовлетворяет цели подавления эффектов тепловой диффузии. В двух других протоколах (протоколы 1, 2) облучение внутренней окружности происходит меньшее количество раз, в результате чего “вытягивания” формы не происходит (рис. 5, верхний и средний ряды). Влияние эффектов тепловой диффузии значительно подавляется: аксиальный размер объемных разрушений (3.2 мм) всего в 1.4 раза превышает соответствующий аксиальный размер единичного разрушения (рис. 2б), а форма разрушений становится более локализованной и предсказуемой по сравнению с квазилинейным случаем. При этом скорость тепловой абляции при облучении по протоколу 2 оказалась выше, чем в случае протокола 1, а стенки разрушения ровнее.

В режиме насыщения с начальной пиковой интенсивностью 15 Вт/см² поглощение энергии ультразвукового пучка на образовавшихся разрывах происходит в области, превышающей по своим размерам тепловые источники, соответствующие случаю $I_0 = 8$ Вт/см², поэтому для получения объемного теплового разрушения требуется меньшее время облучения и меньшее количество обходов по окружностям траектории (табл. 2). Стоит также обратить внимание на то, что в зависимости от протокола либо внутренняя, либо внешняя окружность суммарно облучаются три раза, а остальные по два (табл. 2, столбец “15”). Следствием этого являются похожесть формы разрушения, полученной в протоколах 1, 3 с трехкратным облучением внутренней окружности, а также качественное отличие разрушения в случае протокола 2, оказавшегося наиболее выигрышным для ударно-волнового воздействия (рис. 5,

Таблица 2. Параметры облучения образца говяжьей печени в ударно-волновых импульсно-периодических режимах с начальными пиковыми интенсивностями $I_0 = 8$ и $I_0 = 15$ Вт/см² для 3 протоколов облучения. Фокус излучателя перемещался по круговой траектории, состоящей из 4 окружностей с радиусами 1, 2, 3 и 4 мм. N_i – количество совершенных обходов по окружности с радиусом i мм. Скорость тепловой абляции рассчитывалась как отношение полученного разрушения на время воздействия. V – конечный объем полученного разрушения

I_0 , Вт/см ²	8						15					
	N_1	N_2	N_3	N_4	скорость, см ³ /мин	V , мм ³	N_1	N_2	N_3	N_4	скорость, см ³ /мин	V , мм ³
Протокол 1	3	3	4	3	1.45	133	3	2	2	2	3.10	179
Протокол 2	3	3	4	5	1.52	167	2	2	2	3	2.98	192
Протокол 3	5	5	5	5	2.23	302	3	2	2	2	2.97	169

справа). Протокол 2 позволил подавить “вытягивание” формы объемного разрушения и уменьшить проявление тепловой диффузии. Так, результаты расчетов показали, что аксиальный размер объемного разрушения (3.6 мм) повторяет соответствующий размер (3.5 мм) единичного разрушения. Отключение внутренних окружностей в протоколе 2 в течение облучения позволило получить более равномерное температурное распределение без перегрева центральной области, который наблюдался в протоколах 1, 3.

Сравнение двух ударно-волновых импульсно-периодических режимов облучения с начальными пиковыми интенсивностями 8 и 15 Вт/см² показало, что при увеличении начальной пиковой интенсивности на элементах решетки скорость тепловой абляции увеличивается, а проявление эффектов диффузии тепла от нагреваемой области в окружающие слои ткани в аксиальном направлении уменьшается. Для обоих режимов облучения наиболее выигрышным является протокол 2, позволяющий получить предсказуемые по форме объемные тепловые разрушения с резкими краями и прямыми передними стенками. В этом случае объемы полученных разрушений, времена воздействия и скорости тепловой абляции составили, соответственно, 167 мм³, 6.62 с и 1.52 см³/мин для $I_0 = 8$ Вт/см² и 192 мм³, 3.88 с и 2.98 см³/мин для $I_0 = 15$ Вт/см². Стоит отметить, что в рассматриваемом режиме насыщения (15 Вт/см²) скорость тепловой абляции была в 2 раза выше соответствующей скорости в режиме развитого разрыва (8 Вт/см²) и в 1.4 раза выше, чем в клиническом квазилинейном режиме (1.2 Вт/см²), поэтому наиболее выигрышным является облучение в режиме насыщения.

Таким образом, было показано, что использование импульсно-периодических ударно-волновых режимов облучения с отключением внутренних окружностей траектории по мере достижения на них порогового значения тепловой дозы позволяет подавить эффекты тепловой диффузии вдоль оси ультразвукового пучка и получить хорошо локализованные тепловые разрушения заданной формы с сопоставимыми клиническому случаю скоростями тепловой абляции. Для клинической системы Sonalleve V1 реализация такого облучения представляется наиболее выигрышной при использовании предельных пиковых мощностей системы.

ВЫВОДЫ

На основании полученных результатов могут быть сделаны следующие выводы:

1) использование квазилинейного режима (105 Вт), характерного для клинической практики *in situ* рассмотренной в данной работе HIFU-системы,

вне зависимости от протокола облучения приводит к удлинению теплового разрушения вдоль оси пучка в 2.5 раза по сравнению с аксиальными размерами тепловых источников и с поперечным размером траектории; максимальная скорость тепловой абляции и наибольший объем теплового разрушения достигаются при облучении по траектории с уменьшенным шагом (1 мм) и контролем тепловой дозы только на внешней окружности;

2) в ударно-волновых импульсно-периодических режимах (пиковые мощности 700 и 1300 Вт) за счет быстрого нагревания подавляется “вытягивание” объемного теплового разрушения вдоль оси пучка; скорость тепловой абляции при облучении по траектории с уменьшенным шагом (1 мм) увеличивается в 1.4 раза (1300 Вт) по сравнению с клиническим квазилинейным режимом, а тепловую дозу предпочтительно контролировать на каждой окружности траектории, отключая внутренние окружности по мере достижения на них порогового значения дозы;

3) при выборе ударно-волнового режима облучения важно учитывать, в какой области вокруг фокуса происходит формирование разрывов, поскольку для подавления эффектов тепловой диффузии существенную роль играет размер единичного разрушения. В клинической системе HIFU Sonalleve V1 наибольшее ускорение тепловой абляции и получение наиболее предсказуемых локализованных тепловых разрушений с резкими краями достигается в максимально достижимом по пиковой мощности ударно-волновом режиме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана перспективность использования ударно-волновых режимов для быстрого получения предсказуемых и локализованных объемных тепловых разрушений биологической ткани с подавленным эффектом тепловой диффузии вдоль оси излучателя по сравнению с квазилинейным случаем. В режимах, близких к клиническим, для получения симметричного разрушения объема порядка 1 см³ с наибольшей скоростью абляции пороговое значение тепловой дозы наиболее выигрышно контролировать на внешней окружности траектории облучения.

Для быстрого получения хорошо локализованного малого объема разрушения (0.2 см³) в форме слоя толщиной около 4 мм рекомендуется облучать ткань в ударно-волновом режиме по траектории с уменьшенным шагом и отключением внутренних окружностей в процессе контроля тепловой дозы. Такой подход позволяет получать предсказуемые формы теплового разрушения с резкими краями. Однако, несмотря на эффективное подавление проявления эффектов тепловой

диффузии в аксиальном направлении, формирование объемного разрушения из слияния единичных фокусов в поперечном направлении все еще происходит за счет диффузии тепла. Данный аспект будет учтен при проведении дальнейших исследований, в которых планируется исследовать облучение по равномерно заполненной фокусами траектории различной геометрии с однократным ударно-волновым воздействием на каждый фокус. Кроме того, для создания объемных тепловых разрушений, сопоставимых по размеру с клиническими (несколько см³), представляется перспективной разработка ударно-волновых протоколов послойного облучения ткани.

В качестве практических рекомендаций из результатов данной работы следует, что облучение биологических тканей в импульсно-периодическом ударно-волновом режиме с использованием максимально достижимой пиковой мощности HIFU-источника имеет несомненные преимущества и может быть осуществимо в существующей клинической установке HIFU Sonalleve. Также данный результат может быть обобщен на другие клинические системы HIFU, подобные Sonalleve.

Авторы выражают благодарность Л.Р. Гаврилову за ценные замечания при обсуждении результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №22-72-00047.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл К.Р., Бэмбер Дж. Ультразвук в медицине. Физические основы применения. Под ред. тер Хаар Г. Пер. с англ. М.: Физматлит, 2008.
2. Гаврилов Л.Р. Фокусированный ультразвук высокой интенсивности в медицине. М.: Фазис, 2013.
3. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Каргл С.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 437–464.
4. Dubinsky T.J., Cuevas C., Dighe M.K., Kolokythas O., Hwang J.H. High-intensity focused ultrasound: current potential and oncologic applications // AJR. Am. J. Roentgenol. 2008. V. 19. P. 191–199.
5. Wu F., Wang Z.B., Chen W.Z., Wang W., Gui Y., Zhang M., Zheng G., Zhou Y., Xu G., Li M., Zhang C., Ye H., Feng R. Extracorporeal high intensity focused ultrasound ablation in the treatment of 1038 patients with solid carcinomas in China: An overview // Ultrason. Sonochem. 2004. V. 11. P. 149–154.
6. Köhler M.O., Mougenot C., Quesson B., Enholm J., Le Bail B., Laurent C., Moonen C.T.W., Ehnholm G.J. Volumetric HIFU ablation under 3D guidance of rapid MRI thermometry // Med. Phys. 2009. V. 36. № 8. P. 3521–3535.
7. Salomir R., Palussière J., Vimeux F.C., de Zwart J.A., Quesson B., Gauchet M., Lelong P., Pergrale J., Grenier N., Moonen C.T.W. Local hyperthermia with MR-guided focused ultrasound: Spiral trajectory of the focal point optimized for temperature uniformity in the target region // J. Magn. Reson. Imaging. 2000. V. 12. P. 571–583.
8. Mougenot C., Salomir R., Palussière J., Grenier N., Moonen C.T.W. Automatic spatial and temporal temperature control for MR-guided focused ultrasound using fast 3D MR thermometry and multispiral trajectory of the focal point // Magn. Reson. Med. 2004. V. 52. P. 1005–1015.
9. Khokhlova V.A., Maxwell A.D., Khokhlova T., Kreider W., Bailey M., Partanen A., Farr N., Sapozhnikov O.A. Generation of volumetric boiling histotripsy lesions in tissue using a multi-element array of a clinical HIFU system // Abstract Book of 14th Int. Symp. for Therapeutic Ultrasound. Las Vegas, Nevada, USA. 2014.
10. Ramaekers P., De Greef M., Van Breugel J.M.M., Moonen C.T.W., Ries M. Increasing the HIFU ablation rate through an MRI-guided sonication strategy using shock waves: Feasibility in the in vivo porcine liver // Phys. Med. Biol. 2016. V. 61. P. 1057–1077.
11. Enholm J.K., Köhler M.O., Quesson B., Mougenot C., Moonen C.T., Sokka S.D. Improved volumetric MR-HIFU ablation by robust binary feedback control // IEEE Trans. Biomed. Eng. 2010. V. 57. № 1. P. 103–113.
12. Kim Y.S., Keserci B., Partanen A., Rhim H., Lim H.K., Park M.J., Köhler M.O. Volumetric MR-HIFU ablation of uterine fibroids: role of treatment cell size in the improvement of energy efficiency // Eur. J. Radiol. 2012. V. 81. № 11. P. 3652–3659.
13. Tillander M., Hokland S., Koskela J., Dam H., Andersen N.P., Pedersen M., Tanderup K., Ylihautala M., Köhler M. High intensity focused ultrasound induced in vivo large volume hyperthermia under 3D MRI temperature control // Med. Phys. 2016. V. 43. № 3. P. 1539–1549.
14. Venkatesan A.M., Partanen A., Pulanic T.K., Dreher M.R., Fischer J., Zurawin R.K., Muthupillai R., Sokka S., Nieminen H.J., Sinaii N., Merino M., Wood B.J., Stratton P. Magnetic resonance imaging-guided volumetric ablation of symptomatic leiomyomata: correlation of imaging with histology // J. Vasc. Interv. Radiol. 2012. V. 23. № 6. P. 786–794.
15. Giles S.L., Imseeh G., Rivens I., Ter Haar G.R., Taylor A., deSouza N.M. Magnetic resonance guided high intensity focused ultrasound (MrgHIFU) for treating recurrent gynaecological tumours: effect of pre-focal tissue characteristics on target heating // J. Interv. Radiol. 2020. V. 3. № 1:1. P. 1–10.
16. Sapozhnikov O.A., Khokhlova T.D., Kreider W., Partanen A., Wang Y.-N., Karzova M.M., Khokhlova V.A. The use of shockwave exposures for enhancing volumetric thermal ablation of ex vivo bovine liver on a clinical MRI-guided HIFU system // Abstract book. 19th Int. Society for Therapeutic Ultrasound (ISTU) and the European Focused Ultrasound Charitable Society (EUFUS).
17. Mougenot C., Köhler M.O., Enholm J., Quesson B., Moonen C. Quantification of near-field heating during volumetric MR-HIFU ablation // Med. Phys. 2011. V.38. P. 272–282.
18. Quesson B., Merle M., Köhler M.O., Mougenot C., Roujol S., de Senneville B.D., Moonen C.T. A method for

- MRI guidance of intercostal high intensity focused ultrasound ablation in the liver // *Med. Phys.* 2010. V. 37. № 6. P. 2533–2540.
19. Aubry J.-F., Pernot M., Marquet F., Tanter M., Fink M. Transcostal high-intensity-focused ultrasound: ex vivo adaptive focusing feasibility study // *Phys. Med. Biol.* 2008. V. 53. № 11. P. 2937–2951.
 20. Филоненко Е.А., Хохлова В.А. Эффекты акустической нелинейности при терапевтическом воздействии мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. №4. С. 541–549.
 21. Khokhlova V.A., Bailey M.R., Reed J.A., Cunitz B.W., Kaczkowski P.J., Crum L.A. Effects of nonlinear propagation, cavitation, and boiling in lesion formation by high intensity focused ultrasound in a gel phantom // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. V. 119. № 3. P. 1834–1848.
 22. Yuldashev P., Shmeleva S., Ilyin S., Sapozhnikov O., Gavrilov L., Khokhlova V. The role of acoustic nonlinearity in tissue heating behind the rib cage using high intensity focused ultrasound phased array // *Phys. Med. Biol.* 2013. V. 58. № 8. P. 2537–2559.
 23. Khokhlova V.A. Use of shock-wave exposures for accelerating thermal ablation of targeted tissue volumes // *Focused Ultrasound Foundation Final Report*. June 5. 2019.
 24. Андрияшина Ю.С., Карзова М.М., Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Ускорение тепловой абляции объемов биологической ткани с использованием фокусированных ультразвуковых пучков с ударными фронтами // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 2. С. 1–12.
 25. Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Farr N., Partanen A., Bailey M.R., Khokhlova V.A. Characterization of a multi-element clinical HIFU system using acoustic holography and nonlinear modeling // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2013. V. 60. № 8. P. 1683–1698.
 26. Duck F.A. *Physical Properties of Tissue*. London: Academic Press, 1990.
 27. <https://itis.swiss/virtual-population/tissue-properties/database/acoustic-properties/>
 28. Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 337–347.
 29. Karzova M.M., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Cunitz B.W., Kreider W., Bailey M.R. Shock formation and nonlinear saturation effects in the ultrasound field of a diagnostic curvilinear probe // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 4. P. 2327–2337.
 30. Maxwell A.D., Yuldashev P.V., Kreider W., Khokhlova T.D., Schade G.R., Hall T.L., Sapozhnikov O.A., Bailey M.R., Khokhlova V.A. A prototype therapy system for transcuteaneous application of boiling histotripsy // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2017. V. 64. № 10. P. 1542–1557.
 31. Пестова П.А., Карзова М.М., Юлдашев П.В., Крайдер У., Хохлова В.А. Влияние траектории перемещения фокуса на равномерность температурного поля при импульсном воздействии мощного ультразвукового пучка на биологическую ткань // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 3. С. 250–259.
 32. Sapareto S.A., Dewey W.C. Thermal dose determination in cancer therapy // *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.* 1984. V. 10. № 6. P. 787–800.
 33. Fan X., Hynynen K. Ultrasound surgery using multiple sonications – treatment time considerations // *Ultrasound Med. Biol.* 1996. V. 22. № 4. P. 471–482.
 34. Ultrasonics-Field Characterization-In Situ Exposure Estimation in Finite-Amplitude Ultrasonic Beams, document IEC/TS 61949. 2007.
 35. Yuldashev P.V., Karzova M.M., Kreider W., Rosnitskiy P.B., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A. HIFU beam: a simulator for predicting axially symmetric nonlinear acoustic fields generated by focused transducers in a layered medium // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr.* 2021. V. 68. № 9. P. 2837–2852.
 36. Rosnitskiy P.B., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Maxwell A.D., Kreider W., Bailey M.R., Khokhlova V.A. Design of HIFU transducers for generating specified nonlinear ultrasound fields // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr.* 2017. V. 64. № 2. P. 374–390.
 37. Карзова М.М., Аверьянов М.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Механизмы насыщения в нелинейных фокусированных импульсных и периодических акустических пучках // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 1. С. 93–102.
 38. Khokhlova V.A., Fowlkes J.B., Roberts W.W., Schade G.R., Xu Z., Khokhlova T.D., Hall T.L., Maxwell A.D., Wang Y.N., Cain C.C. Histotripsy methods in mechanical desintegration of tissue: towards clinical applications // *Int. J. Hyperthermia.* 2015. V. 31. № 2. P. 145–162.
 39. Karzova M.M., Kreider W., Partanen A., Sapozhnikov O.A., Khokhlova T.D., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A. Mapping clinical HIFU thermal tissue ablation using simulation and MR-imaging // *Abstract book of the 19th Int. Symp. of ISTU / 5th European Symp. of EUFUS. Barcelona, Spain, 2019. P. 235.*

УДК 541.183.5

ВОЗБУЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ МОД ГАРМОНИКАМИ ТОНА ОТВЕРСТИЯ В СТРУЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2023 г. А. А. Абдрашитов^a, *, Е. А. Марфин^a^aИнститут энергетики и перспективных технологий ФИЦ Казанский научный центр РАН, Лобачевского ул. 2/31, Казань, 420111 Россия

*e-mail: abbdary@mail.ru

Поступила в редакцию 24.05.2022 г.

После доработки 10.03.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Проведено экспериментальное исследование возбуждения периодических колебаний давления в модели струйного осциллятора Гельмгольца с цилиндрической камерой при натекании круглой струи воздуха на острую кромку выходного отверстия. Исследовалась эволюция амплитудно-частотного спектра тона отверстия от его возникновения при скорости струи около 2 м/с до возбуждения первой моды акустического резонанса на частоте Гельмгольца. Тон отверстия представлял собой семейство гармоник, последовательно усложняющееся по мере увеличения длины и скорости струи. Изучено последовательное возникновение семейства акустических мод на гармониках струйного тона при дальнейшем увеличении скорости струи. Моды на частоте Гельмгольца возникали поочередно на гармониках тона отверстия в полосе усиления резонатора, начиная с наивысшей гармоники. Первая мода возникала на наивысшей гармонике, вторая мода возникала на предыдущей гармонике и т.д. Завершающая мода возникала на основной гармонике тона отверстия и имела максимальную амплитуду. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса периодические колебания давления переходили в неупорядоченные турбулентные пульсации. При достаточном размере камеры и скорости струи на наивысшей гармонике тона отверстия возникал азимутальный и полуволновой резонансы. Наибольшее число Рейнольдса, при котором наблюдался резонанс на частоте Гельмгольца, составляло 10^5 .

Ключевые слова: аэроакустика, струйный тон, акустика струи, резонанс камеры

DOI: 10.31857/S0320791922600329, **EDN:** BYGNTE

ВВЕДЕНИЕ

Струйный осциллятор Гельмгольца (СОГ) – проточный излучатель колебаний, позволяющий генерировать интенсивные колебания в потоке жидкости. Его конструкция представляет собой комбинацию двух элементов: струйного генератора и объемного резонатора [1]. Струйный генератор представляет собой систему “сопло–струя–кромка” и является источником тона отверстия. Объемный резонатор состоит из цилиндрической камеры, закрытой с торцов крышками, в центре каждой из которых выполнены соосные отверстия. Отверстие в передней крышке является соплом для формирования струи в резонансной камере. При натекании этой струи на острую кромку отверстия в задней крышке генерируются первичные колебания небольшой амплитуды – тон отверстия. При совпадении частоты тона отверстия с частотой собственных колебаний объемного резонатора (f_N)

происходит резонанс, и из выходного отверстия излучается интенсивный звук [2, 3].

Система “сопло–струя–отверстие” имеет много общего с системой “щель–плоская струя–клин”, и обе системы принадлежат к одному семейству генераторов кромочных тонов. Из многочисленных исследований плоской системы [1, 4–9] стало понятно, что нельзя “просто” использовать длину L в качестве характерного размера и скорость струи W и вычислить с их помощью частоту колебаний давления в системе [10] ($f \sim W/L$), как делается в случае свободной затопленной струи [11–13], где характерный размер L – это толщина щели. По ходу экспериментов стало понятно, что плавное изменение скорости или длины струи не приводит к такому же плавному изменению частоты тона отверстия. Исследователи заметили, что при плавном изменении скорости или длины струи интервалы генерации колебаний давления – стадии (stage [1]) – чередуются с интервалами полной тишины, нарушаемой лишь

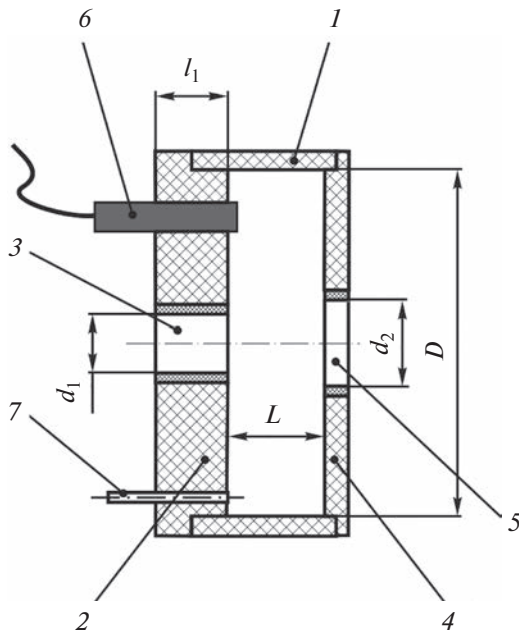


Рис. 1. Схема сборки модели СОГ.

турбулентным “шипением”. Такую смену режимов стали объяснять наличием в струйных системах механизма обратной связи, который, в конечном счете, и определяет частоту струйного тона [10]. Было отмечено [1, 5], что в пределах стадий число Струхала ($St = fL/W$) изменяется плавно при плавном изменении числа Рейнольдса ($Re = LW/\nu$). На границах стадий небольшое изменение Re приводит к резкому изменению St .

Описание механизма генерации колебаний давления в системе “сопло—струя—кромка” предложено Крюгером [14] и схематически выглядит следующим образом. Вокруг струи в камере за острой кромкой сопла образуется тороидальный пульсирующий вихрь, от которого с определенной периодичностью отделяются кольцеобразные вихревые структуры. Эти вихри, увеличиваясь в размере и увлекаясь струей, перемещаются со скоростью W_c к выходному отверстию. Соударяясь с острой кромкой выходного отверстия, они деформируются и разрушаются с генерацией импульса давления, который распространяется вверх по потоку. Когда импульсы давления достигают области пульсирующего вихря, они участвуют в формировании новых вихревых структур и увеличивают их энергию.

В условиях синфазности начинает работать механизм положительной обратной связи и увеличивается амплитуда тона отверстия. На частоте обратной связи (частоте автоколебательной системы “сопло—струя—кромка”) (f_{fb}) генерируется наиболее громкий звук. Прямое измерение частоты

обратной связи (f_{fb}) в экспериментах не представлялось возможным ранее, и не представляется возможным в настоящее время. Выполняется косвенное измерение посредством измерения частоты возбужденной гармоники – тона с преимущественной амплитудой. Но недостаточная чувствительность измерительной аппаратуры не позволяла прежде уверенно определить связь между частотой возбужденной гармоники и частотами других гармоник в спектре измеренного сигнала [15].

Морель [16] считал, что в струйной системе “сопло—струя—отверстие” каждому участку тона с плавным изменением частоты – стадии – соответствует свое число Струхала и определенное количество вихревых колец в интервале между срезом сопла и острой выходной кромкой. Вследствие этого положения, соседние стадии различаются, прежде всего, на одно вихревое кольцо, перемещающееся в интервале между срезом сопла и выходным отверстием. Он наблюдал возникновение первого пика в амплитудно-частотном спектре при скорости струи порядка 2 м/с.

В результате представленного ряда исследований были получены противоречивые результаты, а некоторые интересные умозаключения не нашли своего экспериментального подтверждения. Отсутствуют работы по расшифровке динамики амплитудно-частотного спектра струйного тона при плавном увеличении скорости струи. Нумерация гармоник в спектре вызывает затруднение. В связи с этим, авторы всех известных работ не затрагивают вопрос о наличии гармонической связи между элементами спектра. Не получил достаточного освещения механизм возбуждения акустических мод. В представленной статье гидродинамика струи не исследуется. Исследуется ее результат – генерация колебаний давления в осцилляторе и их поведение при плавном увеличении скорости струи. Цель работы – исследование возникновения элементов частотного спектра струйного тона и выявление происхождения мод акустического резонанса.

МЕТОДИКА И ЭКСПЕРИМЕНТ

На рис. 1 представлена схема модели струйного осциллятора Гельмгольца (СОГ), которая была изготовлена из отрезка пластиковой трубы 1 с пластиковыми крышками 2 и 4. В крышках были выполнены отверстия 3 и 5 для прокачки воздуха через камеру [16]. В передней крышке монтировался измерительный микрофон 6 и штуцер 7 для замера статического давления внутри камеры (рис. 1).

Модель осциллятора 1 была вмонтирована в крышку вакуумируемой камеры 2 (рис. 2). Воздух

из камеры отсасывался вакуумным насосом, создавая необходимый для формирования струи перепад давления. Соотношение объемов вакуумируемой камеры 2 и резонансной камеры осциллятора было достаточным, чтобы резонансная камера была акустически не связана с другими объемами, например, подводными шлангами. Исследование собственных колебаний резонатора методом озвучивания динамиком показало, что их частота при таком расположении не меняется.

Скорость струи рассчитывалась по перепаду давления на сопле ($W = (2\Delta p/\rho)^{1/2}$). Для измерения перепада давления на входном сопле использовался преобразователь давления ПД 150-ДВ300 с выходным сигналом 4–20 мА. С помощью микрофона RFT MV 221 Robotron с чувствительностью 54 мВ/Па регистрировались колебания давления в резонансной камере. Данные сигналы поступали на 14-битный аналого-цифровой преобразователь Е14-440. В экспериментах частота дискретизации составляла 10 кГц. Для записи и обработки сигналов использовалась программа Power Graph 3.3.10. Калибровка частоты и амплитуды колебаний давления осуществлялась с помощью пистонфона Robotron RFT 05 001.

Числа Струхала ($St_L = fL/W$) и Рейнольдса ($Re_L = LW/\nu$), где ν — кинематическая вязкость воздуха, в настоящей работе рассчитывались по идеальной скорости струи [17]. Сборка модели, экспериментальный стенд, система измерений и обработки результатов экспериментов описаны в работах [18–20].

Для возбуждения тона отверстия и акустического резонанса использовался СОГ с цилиндрическими соплами диаметром $d_1 = 12$ мм и длиной $(0.56–2)d_1$. Выходное отверстие имело длину 10 мм, диаметр изменялся в интервале $d_2 = (1–1.5)d_1$. Диаметр камеры составлял $D = 6.5d_1$, и длина изменялась в интервале $L = (0.75–2)d_1$. Осциллятор с различными соотношениями размеров также изучался в работе [21]. Камера резонатора по Росситеру [22] — глубокая ($0.8 > 2L/D > 0.2$).

В каждом эксперименте выполнялось плавное увеличение скорости струи от нулевого значения. Значения перепада давления на сопле и колебаний давления в камере записывались программой во временной области в виде осциллограммы. Выполнялось оконное преобразование Фурье сигнала с микрофона, соответствующего колебаниям давления в камере, и преобразование параметров из временной области в частотную. Затем производился анализ частотных спектров. Была разработана методика идентификации и нумерации элементов частотного спектра (гармоник).

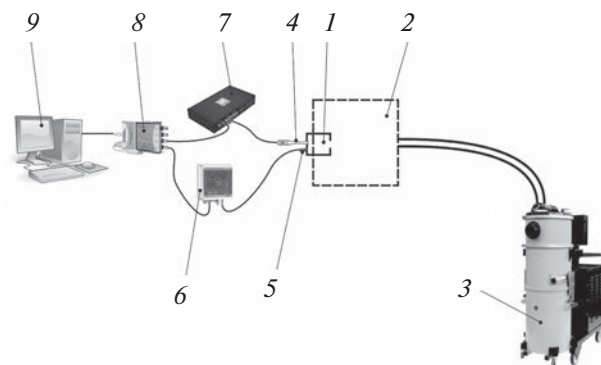


Рис. 2. Блок-схема экспериментального стенда: 1 — модель СОГ, 2 — вакууммируемая камера, 3 — вакуум-насос, 4 — микрофон, 5 — штуцер замера давления, 6 — преобразователь давления, 7 — микрофонный усилитель, 8 — аналого-цифровой преобразователь, 9 — персональный компьютер.

Комбинационный звук, возбуждаемый струей, натекающей на острую кромку, называется тоном и состоит из гармоник: основной и высших.

Тон разделяется на устойчивые участки — стадии [stage] со скачками частоты и амплитуды на границах участков при плавном изменении Re . Те же стадии при резонансе называем модами [mode].

РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ

На следующих рисунках представлены характерные особенности возникновения кромочного тона и последующего резонанса в цилиндрической камере с двумя отверстиями при продувке воздухом, на примере осциллятора диаметром 78 мм и длиной 12 мм с соплом $d_1 = 12 \times 16$ мм и выходным отверстием $d_2 = 12 \times 10$ мм. Частота собственных колебаний (ЧСК) при возбуждении динамиком $f_N = 712$ Гц.

Вначале кратковременно записывался сигнал с преобразователя давления и микрофона — осциллограмма при нулевой скорости потока для нахождения и введения поправок. При плавном увеличении скорости струи до величины $W \sim 1.8$ м/с в камере возникали периодические колебания давления на частоте F_0 в несколько десятков герц — возникал тон отверстия (рис. 3а). Его частота была значительно меньше f_N камеры и резонанс не возникал. Появление в амплитудно-частотном спектре первого выраженного пика означает начало функционирования механизма усиления в струе на частоте обратной связи f_{fb} . Единственная гармоника в спектре означает синусоидальную форму исследуемого сигнала и согласование обратной связи по частоте и фазе с параметрами образования первичных возмущений давления на острой выходной кромке. Амплитуда тона в пер-

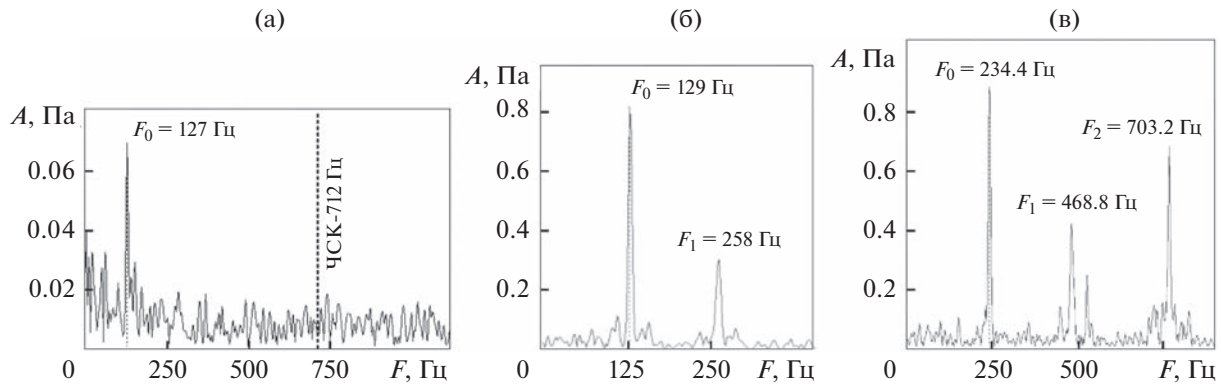


Рис. 3. Возникновение и развитие гармоник струйного тона: (а) — $W = 1.8$ м/с, (б) — $W = 3.4$ м/с, (в) — $W = 5.2$ м/с.

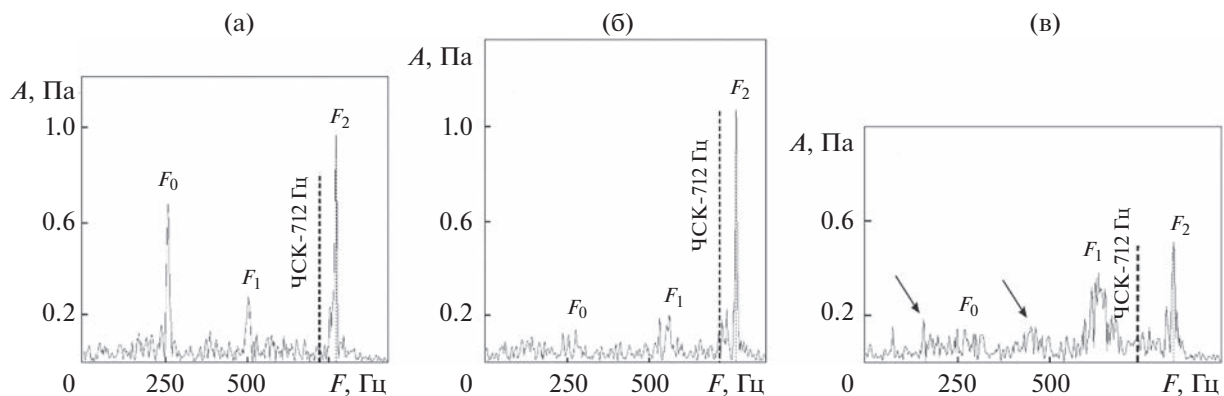


Рис. 4. Возникновение и развитие первой акустической моды: (а) — $W = 5.7$ м/с, (б) — $W = 6.5$ м/с, (в) — $W = 6.7$ м/с.

вый момент незначительно превышала наименьший значащий бит (LSB).

При увеличении скорости струи до 3.4 м/с амплитуда первого пика по оси ординат стремительно возрастала (см. масштаб ординаты), и пик смещался по частоте на оси абсцисс вправо — в сторону увеличения частоты. Возникла первая гармоника F_1 на удвоенной частоте основной гармоники F_0 (рис. 3б). При дальнейшем увеличении скорости до 5.2 м/с возникала вторая гармоника F_2 на частоте, кратной частоте основной гармоники (рис. 3в). Появление в сигнале высших гармоник означает искажение формы сигнала от первоначальной синусоиды при нарушении синфазности этапов возбуждения тона отверстия. Преимущественная амплитуда при изменении скорости струи могла перескочить на одну из высших гармоник, частота и фаза которой лучше соответствовала параметрам обратной связи в струе. Основная гармоника при этом не исчезала, как и остальные гармоники, просто они не получали усиление по механизму обратной связи. При плавном увеличении скорости струи все семейство гармоник смещалось в сторону увеличения

частоты по оси абсцисс, а преимущественная амплитуда могла перескакивать с одной на другую.

При достижении гармоникой F_2 по частоте нижнего края полосы усиления резонатора ΔF становилось заметно увеличение ее амплитуды (рис. 4а), начинался резонанс — амплитуда гармоники увеличивалась многократно. Остальные частоты в первый момент просто приглушались (рис. 4б), а в середине полосы усиления исчезали из наблюдения совершенно, что соответствует природе резонанса. При дальнейшем незначительном увеличении скорости струи частота этой гармоники выходила за верхний край полосы усиления, и она затухала (рис. 4в). На рис. 4в также наблюдается затухание остальных гармоник. Но это два самостоятельных явления: резонанс определяет амплитуду той гармоники, которая попадает в полосу усиления, но усилить другие гармоники он не может, хотя может подавить. Амплитуду остальных гармоник определяет близость их частоты и фазы к параметрам обратной связи. На рис. 4б частота или фаза обратной связи попадают между гармониками F_0 и F_1 .

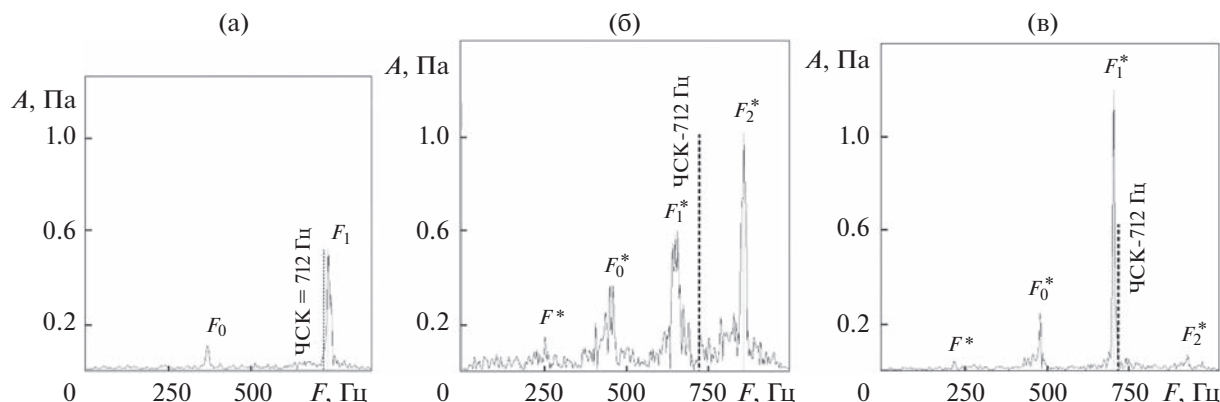


Рис. 5. Возникновение и развитие второй акустической моды: (а) — $W = 8$ м/с, (б) — $W = 10.2$ м/с, (в) — $W = 11.2$ м/с.

На рис. 4а все гармоники струйного тона хорошо видны, поскольку резонанс еще только наметился и не подавил все остальные элементы спектра, частота которых не попадала в полосу усиления резонатора. В момент возникновения первой моды, как правило, наблюдалось все семейство гармоник струйного тона, начиная с основной гармоники F_0 и заканчивая той высшей гармоникой, на которой собиралась развиваться первая акустическая мода. Таким образом становилось очевидным количество мод, которые можно было ожидать и которые впоследствии разовьются последовательно при плавном увеличении скорости струи. Судя по рис. 4а и 4в, можно ожидать последовательное возникновение трех мод на гармониках F_2 , F_1 и F_0 . Но на рис. 4в, когда ни одна из гармоник не попадает в резонанс и подавление остальных частот не работает, видны всплески по амплитуде, обозначенные стрелочками.

При дальнейшем увеличении скорости струи частота второй гармоники струйного тона F_2 выходила за верхний край полосы усиления резонатора и первая мода плавно затухала (рис. 5а). Но возникала вторая мода на первой гармонике F_1 . При этом, общая картина на рис. 5а просматривается следующим образом. Частоты, соответствующие основной F_0 и первой F_1 гармоникам струйного тона, можно проследить визуально. Первая гармоника попадает в полосу усиления резонатора и производит вторую моду. Основная гармоника F_0 наблюдается в силу того, что получает усиление по механизму обратной связи в струе.

Небольшое увеличение скорости усиливает рассогласование частоты и фазы первичных возмущений давления и параметров обратной связи, которое наметилось на рис. 4в. На рис. 5б видно, что все семейство гармоник перестроилось для наилучшего согласования внутренних параметров. Частота основной гармоники F_0 и первой

гармоники F_1 по величине не изменились. Но основная гармоника F_0 стала теперь первой гармоникой F_0^* , а первая гармоника F_1 стала второй гармоникой F_2^* в новом семействе. Из всплеска амплитуды на рис. 4в, отмеченного стрелочками, возникли новые гармоники F^* и F_1^* . Частота тона стала вдвое меньше. Это связано с тем, что увеличение частоты обратной связи f_{fb} при увеличении скорости струи отстает от увеличения частоты производства первичных возмущений давления на выходной кромке. Происходит скачок частоты вниз на графике с осями $W \rightarrow F$. Эти скачки частоты вниз отмечаются всеми исследователями клинового тона [1, 4–9].

Анализируя рис. 5б, можно ожидать в дальнейшем последовательное возникновение четырех мод при увеличении скорости струи из четырех наблюдаемых гармоник. На рис. 5в видно, что вторая мода на гармонике F_2^* выходит из полосы усиления и затухает, а третья мода на гармонике F_1^* — на максимуме амплитуды.

На рис. 6а и 6б видно, как незначительное увеличение скорости струи приводит к затуханию третьей моды на гармонике F_1^* и возникновению четвертой моды на гармонике F_0^* . При дальнейшем увеличении скорости затухает последняя мода на гармонике F_0^* . Мода на гармонике F^* не возникла. Возможно, что ее мощности не хватило, чтобы “раскачать” резонатор.

При дальнейшем увеличении скорости струи и достаточной длине камеры на высшей гармонике струйного тона возникнет азимутальный [23] и полуволновой резонанс [24].

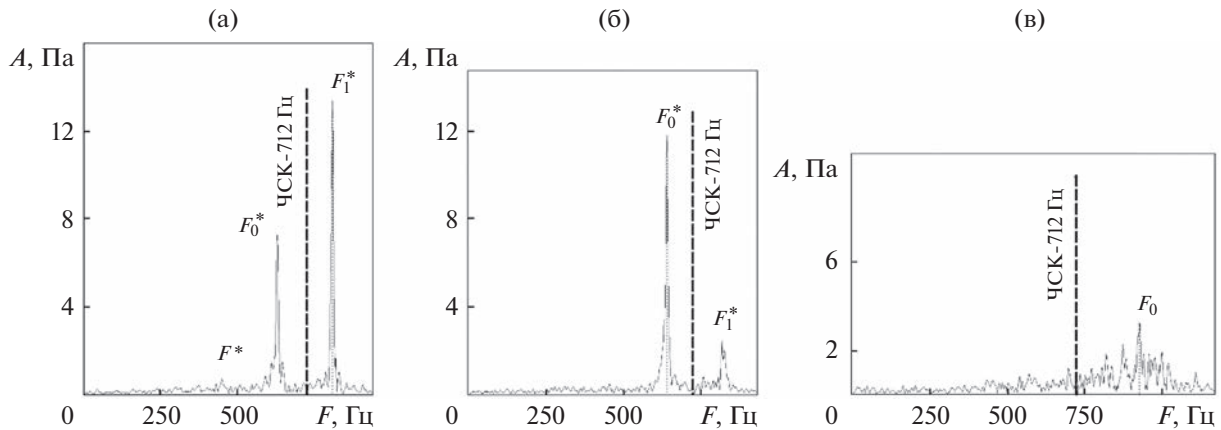


Рис. 6. Возникновение и развитие четвертой акустической моды: (а) — $W = 14.3$ м/с, (б) — $W = 14.5$ м/с, (в) — $W = 28$ м/с.

В комплексном виде возникновение струйного тона и развитие мод изображено на рис. 7. На этом рисунке изображено развитие струйного тона и отклик осциллятора на гармоники. Лучи, выходящие из начала координат, представляют собой характеристические линии $St = \text{const}$. Такое представление используется во многих работах [7–9].

Каждый луч $St = \text{const}$ соответствует той гармонике, которая возбудила данную моду, поскольку характеризовать акустическую моду числом Струхала нельзя. Мода — это резонанс — акустическое явление, а в определение числа Струхала входит гидродинамический параметр — скорость. Но, формально, вычисление числа Струхала для моды можно произвести и даже получить в результате некоторую величину, которой в дальнейшем удобно оперировать.

В пределах моды величина числа Струхала не постоянная. При увеличении скорости струи ча-

стота соответствующей гармонике также увеличивается, но отстает от роста скорости. Поэтому величина числа Струхала в пределах моды уменьшается при увеличении скорости струи (см. рис. 7).

ОБСУЖДЕНИЕ

Можно заметить, что на рис. 3 частота высших гармоник F_1 и F_2 тона отверстия кратна частоте основной гармонике F_0 . В начале первой моды на рис. 4а частоты гармоник также кратны. Но в конце моды на рис. 4б кратность нарушается. Возрастание частоты первой гармонике F_1 при увеличении скорости струи происходит одновременно с основной гармоникой F_0 . А увеличение частоты второй гармонике F_2 отстает от первых двух — первая гармоника F_1 догоняет вторую F_2 , образующую моду. Во второй моде это явление менее заметно вследствие возникновения двух новых гармоник и уменьшения интервалов между ними (см. рис. 5в). Но в третьей и четвертой модах это явление заметно очень хорошо, причем в четвертой моде — с самого начала моды (см. рис. 6). Частота гармонике, формирующей моду, увеличивается медленнее, нежели частоты остальных гармоник, удаленных от частоты резонанса. Это явление изображено на рис. 8. В литературе это явление описано [16], но объяснения ему еще не найдено.

Появление высших гармоник означает искажение сигнала по форме от синусоиды вследствие нарушения синфазности обратной связи. Первая мода развивалась на самой высшей гармонике и далее по убывающей. Завершающая мода возникала на основной гармонике, когда ее частота достигала полосы усиления резонатора. Дальнейшее увеличение скорости струи при завершении моды, опирающейся на основную гармонике, уже ни к чему не приводило.

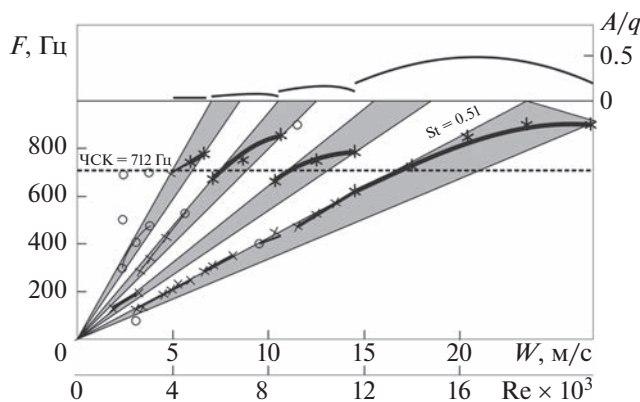


Рис. 7. Развитие струйного тона и акустических мод на характеристических линиях ($St = \text{const}$). $\times$ — гармоника тона отверстия с преимущественной амплитудой, $*$ — акустическая мода.

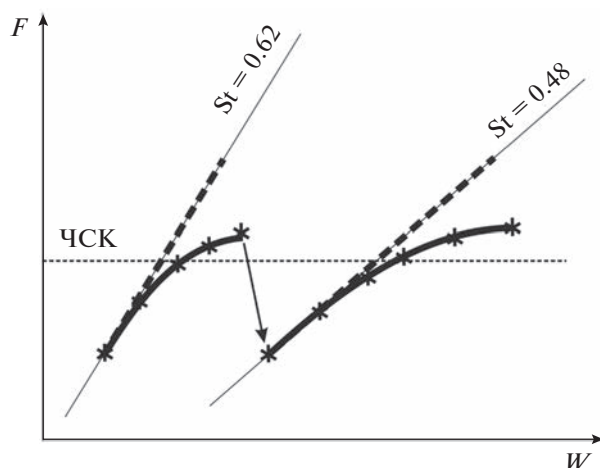


Рис. 8. Искажение частоты акустических мод относительно линии $St = \text{const}$ при плавном увеличении скорости струи W .

ВЫВОДЫ

Проведенные эксперименты показали, что все элементы тона отверстия и моды акустического резонанса, последовательно возникающие в частотном спектре при плавном увеличении числа Рейнольдса, являются гармонически связанными. Гармоники, кратные частоте Гельмгольца камеры f_N , в интервале числа Рейнольдса $0-10^5$ не замечены. Гармоника тона отверстия с преимущественной амплитудой не обязательно является основной гармоникой, просто ее частота совпадает с частотой обратной связи в струйной системе.

Гармоники тона отверстия с частотой, попадающей в полосу усиления резонатора, производят акустические моды на частоте собственных колебаний резонатора. Акустическая мода не может характеризоваться числом Струхала, поскольку мода — это акустическое явление, а в определение числа Струхала входит гидродинамический параметр — скорость.

Первая акустическая мода всегда возникает на высшей из гармоник, существующих в спектре тона отверстия. Завершающая акустическая мода всегда возникает на основной гармонике тона отверстия. В системе «сопло—струя—кромка—резонатор» существует единственная последовательность вихревых формаций, перемещающаяся вместе со струей и производящая весь спектр гармоник тона отверстия и мод акустического резонанса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nyborg W.L., Woodbridge C.L., Schilling H.K. Characteristics of jet-edge-resonator whistles // J. Acoust.

Soc. Am. 1953. V. 25. № 1. P. 138–146.
<https://doi.org/10.1121/1.1906988>

2. Sami S., Anderson C. Helmholtz oscillator for the self-modulation of a jet // Proc. 7th Int. Symp. on jet cutting technology. BHRA. Cranfield. Bedford. England. 1984. P. 91–98.
3. Sami S., Memar H. Self-sustained pressure oscillations in two-dimensional cavity // J. Hydraul. Eng. 1987. V. 113. № 8. P. 1055–1061.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1987\)113:8\(1055\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1987)113:8(1055))
4. Brackenridge J.B., Nyborg W.L. Acoustical characteristics of oscillating jet-edge systems in water // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. № 4. P. 459–463.
<https://doi.org/10.1121/1.1908928>
5. Powell A. On the edgetone // J. Acoust. Soc. of Am. 1961. V. 33. № 4. P. 395–409.
<https://doi.org/10.1121/1.1908677>
6. Vaik I., Varga R., Paal G. Frequency and phase characteristics of the edge-tone // Period. Polytech. Mech. Eng. 2014. V. 58. № 1. P. 55–67.
<https://doi.org/10.3311/PPme.7031>
7. Khosropour R., Millet P. Excitation of a Helmholtz resonator by an air jet // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 88. № 3. P. 1211–1221.
<https://doi.org/10.1121/1.399698>
8. Panton R.L., Miller J.M. Resonant frequencies of cylindrical Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. of Am. 1975. V. 57. № 6. P. 1533–1535.
<https://doi.org/10.1121/1.380596>
9. Блохинцев Д.И. Возбуждение резонаторов потоком воздуха // Журн. технической физики. 1945. Т. 15. С. 63–70.
10. Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.—Л.: ОГИЗ, 1944. 477 с.
11. Chan Y.Y. Spatial waves in turbulent jets // Phys. Fluid. 1974. V. 17. № 1. P. 46–53.
<https://doi.org/10.1063/1.1694612>
12. Liu J.T.C. Nonlinear development of an instability wave in a turbulent wake // Phys. Fluid. 1971. V. 14. № 11. P. 2251–2257.
<https://doi.org/10.1063/1.1693325>
13. Dushin N.S., Mikheev A.N., Mikheev N.I., Molochnikov V.M. Experimental setup for visualization of pulsating turbulent flows // Instrum. Exp. Tech. 2014. V. 57. № 4. P. 499–502.
<https://doi.org/10.1134/S0020441214030154>
14. Krüger F. Theorie der Schneidentöne // Ann. der Phys. 1920. V. 367. № 16. P. 673–690.
<https://doi.org/10.1002/andp.19203671602>
15. Anderson A.B.C. A jet-tone orifice number for orifices of small thickness-diameter ratio // J. Acoust. Soc. Am. 1954. V. 26. № 1. P. 21–25.
<https://doi.org/10.1121/1.1907284>
16. Morel Th. Experimental study of a jet-driven Helmholtz oscillator // J. Fluid Eng. 1979. V. 101. № 3. P. 383–390.
<https://doi.org/10.1115/1.3448983>
17. Schlichting H. Boundary-layer theory. New York: McGraw Hill, 1955. 535 p.

18. *Abdrashitov A.A., Marfin E.A.* Nozzle length effect on the performance of the jet-driven Helmholtz oscillator // *Fluid Dyn.* 2021. V. 56. № 1. P. 142–151.
<https://doi.org/10.1134/S0015462821010018>
19. *Абдрашитов А.А., Марфин Е.А., Чачков Д.В.* Экспериментальное изучение скважинного акустического излучателя с кольцом в длинной цилиндрической камере // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 2. С. 241–249.
20. *Абдрашитов А.А., Марфин Е.А., Чачков Д.В., Чефанов В.М.* Влияние формы сопла на амплитуду генерации в скважинном акустическом излучателе // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 4. С. 488–498.
21. *Марфин Е.А., Кравцов Я.И.* Выбор оптимальных геометрических параметров излучателя на основе резонатора Гельмгольца // *Известия РАН. Энергетика.* 2005. № 6. С. 108–113.
22. *Rossiter J.E.* Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Reports and Memoranda № 3438. London. 1964. 36 p.
<https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/handle/1826.2/4020>
23. *Ziada S., Bolduc M., Lafon P.* Flow-excited resonance of diametral acoustic modes in ducted rectangular cavities // *AIAA J.* 2017. V. 55. № 11. P. 3817–3830.
<https://doi.org/10.2514/1.J056010>
24. *Bennett G.J., Stephens D.B., Rodrigues Verdugo F.* Resonant mode characterisation of a cylindrical Helmholtz cavity excited by a shear layer // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 1. P. 7–18.

УДК 534.231.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И ЗАТУХАНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ С РАЗЛИЧНЫМ АКУСТИЧЕСКИМ ИМПЕДАНСОМ С ПОМОЩЬЮ АКУСТИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

© 2023 г. Б. Д. Зайцев^а, *, И. А. Бородина^а, А. А. Теплых^а, А. П. Семёнов^а

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, Саратовский филиал, ул. Зеленая 38, Саратов, 410019 Россия

*e-mail: zai-boris@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.04.2023 г.

После доработки 16.05.2023 г.

Принята к публикации 18.05.2023 г.

Теоретически и экспериментально исследованы особенности применения акустического интерферометра для определения скорости и затухания акустической волны в жидкостях с различным акустическим импедансом. Впервые показано, что указанный импеданс определяет отношение резонансных величин максимума и минимума коэффициента прохождения S_{12} для одной и той же пары излучатель—приемник на зависимости коэффициента прохождения от расстояния между преобразователями. Разработана методика определения затухания жидкости, свободная от влияния “кажущегося” затухания, связанного с уходом части акустической мощности в преобразователи.

Ключевые слова: акустический интерферометр, скорость и затухание акустической волны в жидкости, акустический импеданс, коэффициент прохождения S_{12} , пьезоэлектрические преобразователи продольных акустических волн

DOI: 10.31857/S0320791923600403, **EDN:** APUGLL

ВВЕДЕНИЕ

Акустические методы широко используются для изучения механических и электрических свойств различных жидкостей [1, 2], включая реологические [3, 4] и биологические [5, 6]. Особое место занимает исследование скорости и затухания звука, которые являются фундаментальными свойствами твердых, жидких и газообразных сред. Несмотря на то, что проблемой измерения скорости и затухания звука в жидкости ученые занимаются более 70 лет [7, 8], задача экспериментального определения этих параметров в жидких и газообразных средах остается актуальной и в наши дни [9]. Научный и технический интерес представляют данные по скорости звука в таких веществах как сжиженные газы, органические масла, высокомолекулярные парафины и хладагенты и т.д.

Скорость звука является важной характеристикой также в медицине и биологии для определения параметров биологических тканей, жидких клеточных суспензий, различных раковых клеток, суспензий микроводорослей и т.д. [10–13]. Суспензии, содержащие различную концентрацию микро- и наночастиц, имеют разную скорость звука, и эта информация используется в

ультразвуковой спектроскопии для измерения концентрации и размера взвешенных частиц [14–16].

Существующие методы измерения акустических параметров в жидких средах можно разбить на две основные группы:

1. Прямые методы, в которых для измерения скорости и затухания акустических волн используются короткие по сравнению с временем прохождения волны через образец акустические импульсы. В этом случае задача сводится к точному измерению расстояния между преобразователями и измерению времени задержки.

2. Косвенные методы, в которых используется непрерывный акустический сигнал и измеряется длина звуковой волны на заданной частоте или изменение фазы при изменении частоты или расстояния между преобразователями.

При реализации импульсного метода электроакустический преобразователь посылает короткие звуковые импульсы в исследуемую жидкость, которые принимаются выходным преобразователем [17]. По измеренному времени распространения этих импульсов вдоль известной длины акустической базы определяется скорость волны. При использовании этого метода существует ошибка измерения времени задержки, связанная

с конечной длительностью фронта принимаемого задержанного сигнала и необходимостью выбора реперной точки на этом импульсе. При изменении длины акустической базы можно также определить затухание волны в жидкости по изменению амплитуды прошедшего импульса независимо от коэффициента преобразования электрического импульса в акустический [17]. Существует также вариант с двойным или многократным прохождением сигнала вдоль акустической базы — от излучателя к отражателю и обратно, причем при возвращении отраженных импульсов к излучателю последний работает как приемник [17–19]. В этом случае можно получить целую серию задержанных эхо-импульсов, амплитуда которых уменьшается с ростом номера импульса. По времени задержки между импульсами можно определить скорость акустической волны. По уменьшению амплитуды эхо-импульсов можно найти затухание волны при условии линейности приемника акустических импульсов.

В импульсных измерителях скорости звука в жидкости весьма перспективным является использование акустической базы, выполненной из пьезоэлектрического цилиндра [20]. Акустическая база представляет собой внутренность тонкостенного цилиндрического пьезоэлемента с общим электродом, нанесенным на всю внутреннюю его поверхность и двумя электродами на внешней поверхности.

Существует также разновидность импульсного метода, в котором акустическая волна от преобразователя к преобразователю проходит по двум акустическим каналам [21]. Один канал — это твердотельный звукопровод, имеющий акустический контакт с преобразователями, второй канал образуется исследуемой жидкостью. Акустический импульс, проходя по этим каналам, создает в приемной аппаратуре два задержанных импульса. По известной разнице времени задержки и по известной скорости волны в твердотельном звукопроводе можно определить скорость волны в жидкости. К недостатку метода можно отнести необходимость обеспечения условия распространения плоской волны в каждом канале.

К настоящему времени для измерения скорости и затухания акустической волны в жидкости разработаны и созданы серийно выпускаемые приборы. К ним относятся широко используемый цифровой измеритель скорости звука в жидкостях в судовой серийной аппаратуре [22–24]. В цифровом импульсном методе в общем случае используются многократные отражения акустического импульса от отражателя и акустического преобразователя.

Разработаны также малогабаритные измерители скорости акустической волны в жидкости, состоящие из излучающего и принимающего пре-

образователей продольной волны, находящиеся в жидкостном контейнере [25]. После заполнения контейнера исследуемой жидкостью скорость волны высвечивается на цифровом мониторе.

Поскольку главный недостаток импульсного метода — это погрешность при определении времени задержки, то современные работы по этой проблеме связаны, в основном, с модернизацией аппаратуры для точного определения времени задержки импульса [26, 27].

Среди методов измерения скорости акустической волны в жидкостях с акустической волной в непрерывном режиме можно выделить фазовые и интерферометрические методы.

Фазовый метод [28, 29] заключается в следующем. Излучающий преобразователь в непрерывном режиме излучает в жидкость акустическую волну, которая преобразуется в электрический сигнал, фаза которого регистрируется прибором. По наклону зависимости фазы от частоты при фиксированном расстоянии между преобразователями можно определить время задержки и соответственно скорость волны. Скорость волны можно также найти по наклону зависимости фазы от расстояния между преобразователями. Главная проблема в этих методах — обеспечение линейности фазы от частоты или от расстояния между преобразователями, что является непростой задачей.

Ультразвуковые интерферометры разделяются на интерферометры с переменной базой или с переменной частотой [17]. В обоих случаях обеспечивается резонансное расстояние между излучающим и приемным преобразователями или между излучающим преобразователем и отражателем. Искомая длина волны и, следовательно, искомая скорость акустической волны определяется по расстоянию между отдельными резонансными пиками или по их разности частот. Коэффициент затухания можно определить, измеряя изменение амплитуды резонансных пиков от расстояния или по ширине резонансной кривой. Метод импульсного интерферометра переменной акустической базы, описанный в [30–32], сводится к измерению длины ультразвуковой волны в исследуемой среде и основан на использовании резонансных свойств столба исследуемой жидкости, заключенного между излучателем и приемником ультразвуковых волн. В результате образования стоячих волн ультразвуковое давление в исследуемой среде периодически повторяется вдоль акустической базы через половину длины волны. Для измерения затухания волны предлагается определять изменение максимального значения амплитуды на заданном расстоянии. Однако в этом случае существует “кажущееся” затухание, связанное с уходом части мощности в преобразователи, которое необходимо каким-то образом учитывать.

В работе [33] описан метод акустического интерферометра постоянной длины, реализованный в акустическом анализаторе биологических сред. Работа прибора основана на том, что столбик исследуемой жидкости, находящейся в цилиндрической полости между двумя пьезопреобразователями, является механическим резонатором, собственные частоты которого линейно связаны со скоростью ультразвука в исследуемой среде. Измерение скорости ультразвука в жидкости, заполняющей ячейку, сводится к определению частоты заданного резонансного пика по максимуму амплитудно-частотной характеристики или по точке перегиба на фазово-частотной характеристике. В этом случае также существует “кажущееся” затухание, связанное с тем, что исследуется не собственная добротность столба жидкости, а нагруженная добротность, связанная с уходом части мощности в преобразователи.

В настоящей работе с помощью акустического интерферометра определена скорость акустической волны в жидкостях с различным акустическим импедансом. Впервые показано, что отношение резонансных величин максимума и минимума коэффициента прохождения S_{12} для одной и той же пары излучатель—приемник зависит от акустического импеданса изучаемой жидкости. Теоретический анализ, проведенный впервые, позволил определить механический импеданс в плоскости “преобразователь—жидкость” в зависимости от акустического импеданса жидкости. На основе теоретического анализа разработана методика определения затухания акустической волны в жидкости, свободная от влияния “кажущегося” затухания, связанного с уходом части акустической мощности в преобразователи.

ОПИСАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Для проведения экспериментов была создана измерительная установка, состоящая из двух преобразователей продольной акустической волны с частотой ~ 1.057 МГц (рис. 1). Эти преобразователи, представляющие собой металлические цилиндры диаметром 32 мм, с плоскими, излучающими/принимающими плоскостями располагались друг над другом. Положение нижнего преобразователя было фиксированным, а второй преобразователь с помощью прецизионного устройства мог перемещаться в пределах 0–7 мм с точностью 10 мкм. Прецизионное устройство обеспечивало параллельность излучающих/принимающих плоскостей преобразователей. Верхняя часть нижнего преобразователя располагалась в жидкостном контейнере. Преобразователи подключались к измерителю S -параметров E5071C (Agilent) в режиме измерения параметра S_{12} на частоте ~ 1.057 МГц. Контейнер заполнялся

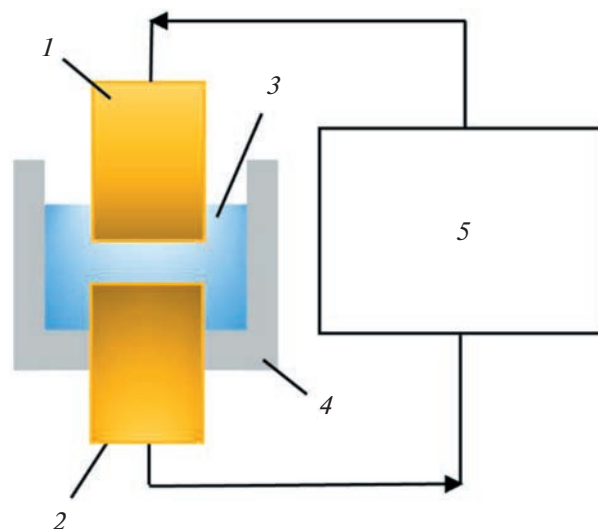


Рис. 1. Схема эксперимента: 1, 2 — пьезоэлектрические преобразователи; 3 — исследуемая жидкость; 4 — жидкостный контейнер; 5 — измеритель S -параметров.

исследуемой жидкостью, и зазор d между преобразователями увеличивался с шагом 50 мкм. На каждом шаге измерялось значение параметра S_{12} на указанной частоте. В результате была построена зависимость величины S_{12} от зазора между преобразователями, которая использовалась для определения скорости и затухания продольной акустической волны.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

С помощью описанной измерительной установки исследовались следующие жидкости: дистиллированная вода, этиловый спирт, смесь этилового спирта с дистиллированной водой (50 : 50 по объему), три смеси дистиллированной воды с глицерином в соотношении 50 : 50, 20 : 80 и 5 : 95 и чистый глицерин. Соотношения для смеси “вода—глицерин” указаны по массе. Все измерения проводились при температуре $T = 25^\circ\text{C}$. В табл. 1 представлены плотности исследуемых жидкостей. Плотность измерялась путем взвешивания 1 мл жидкости на аналитических весах PA-214C (Pioneer, OHAUS Corporation). Объем жидкости 1 мл обеспечивался с помощью прецизионной лабораторной пипетки (Колор, Ленпипет).

Поскольку измеренные зависимости коэффициента прохождения S_{12} от величины зазора между преобразователями для перечисленных выше образцов жидкости оказались качественно похожими, на рис. 2а–4а приведены данные для этилового спирта, воды и глицерина. Видно, что в каждом случае зависимость представляет собой периодическую функцию с чередующимися максимальными и минимальными значениями. Та-

Таблица 1. Плотность исследуемых водных смесей при температуре 25°C

Исследуемая жидкость	Этиловый спирт	Этиловый спирт с водой 50 : 50	Вода	Вода с глицерином, 50 : 50	Вода с глицерином, 20 : 80	Вода с глицерином, 5 : 95	Глицерин
Плотность, кг/м ³	830	900	965	1080.8	1173.4	1223.9	1236.6

Таблица 2. Длина волны на частоте 1.057 МГц и скорость продольной акустической волны, а также удельный механический импеданс и модуль упругости исследуемых водных смесей при температуре 25°C

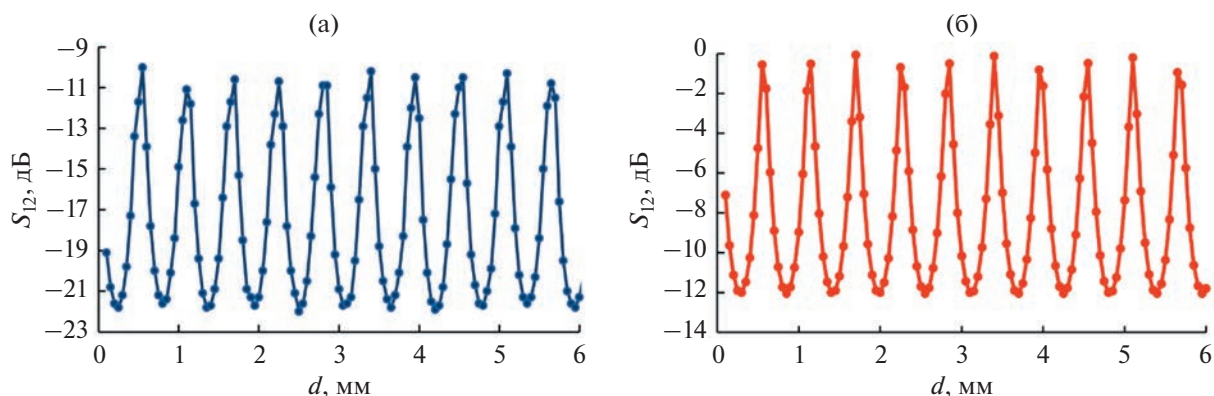
Исследуемая жидкость	Этиловый спирт	Этиловый спирт с водой 50 : 50	Вода	Вода с глицерином 50 : 50	Вода с глицерином 20 : 80	Вода с глицерином 5 : 95	Глицерин
Длина волны, мм	1.13 ± 2.2%	1.44 ± 3.7%	1.41 ± 1.73%	1.6 ± 3.17%	1.76 ± 3.11%	1.8	1.8
Скорость, м/с	1197.6 ± 2.2%	1525.1 ± 3.7%	1494.9 ± 1.73%	1726.1 ± 3.17%	1860.3 ± 3.11%	1902.6	1902.6
Удельный механический импеданс, 10 ⁵ кг/(м ² с)	9.94	13.73	14.43	18.66	21.83	23.29	23.53
Модуль упругости, 10 ⁹ Па	1.12	2.09	2.157	3.22	4.06	4.43	4.47

кая зависимость объясняется тем, что слой жидкости представляет собой резонатор, который резонирует в том случае, когда вдоль слоя укладывается целое число полуволн. Поэтому расстояния между ближайшими максимальными или минимальными значениями указанной зависимости равны половине длины волны. Были определены значения длины волны для каждой смеси, которые приведены в табл. 2. Здесь же приведены значения скорости продольной акустической волны, удельного механического импеданса и продольные модули упругости для каждого образца жидкости. Удельный механический импеданс определялся как произведение скорости волны V на плотность материала ρ .

Было установлено, что зависимости параметра S_{12} от расстояния между преобразователями для всех жидкостей кроме глицерина представляют

собой периодическую функцию с чередующимися максимальными и минимальными значениями одинаковой величины. Это означает, что затухание акустической волны на частоте 1.057 МГц для этих жидкостей пренебрежимо мало. Однако для чистого глицерина (рис. 4а) с ростом зазора d между преобразователями максимальные значения плавно уменьшаются. В дальнейшем будет показано, как в этом случае будет извлечена информация о затухании волны.

Было также установлено, что изменение параметра S_{12} от максимума до минимума (ΔS_{12}) зависит от удельного механического импеданса исследуемой жидкости. На рис. 5а представлена зависимость ΔS_{12} от удельного импеданса жидкости ρV . Видно, что с ростом импеданса жидкости величина ΔS_{12} монотонно уменьшается от 11.2 до 6.9 дБ.

**Рис. 2.** (а) — Экспериментальная и (б) — теоретическая зависимости параметра S_{12} от расстояния d между пьезопреобразователями для этилового спирта.

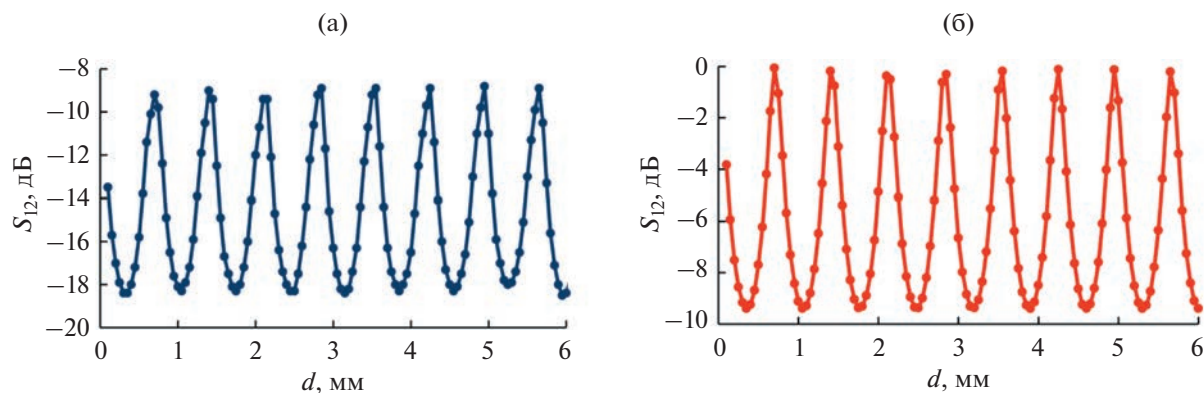


Рис. 3. (а) – Экспериментальная и (б) – теоретическая зависимости параметра S_{12} от расстояния d между пьезопреобразователями для дистиллированной воды.

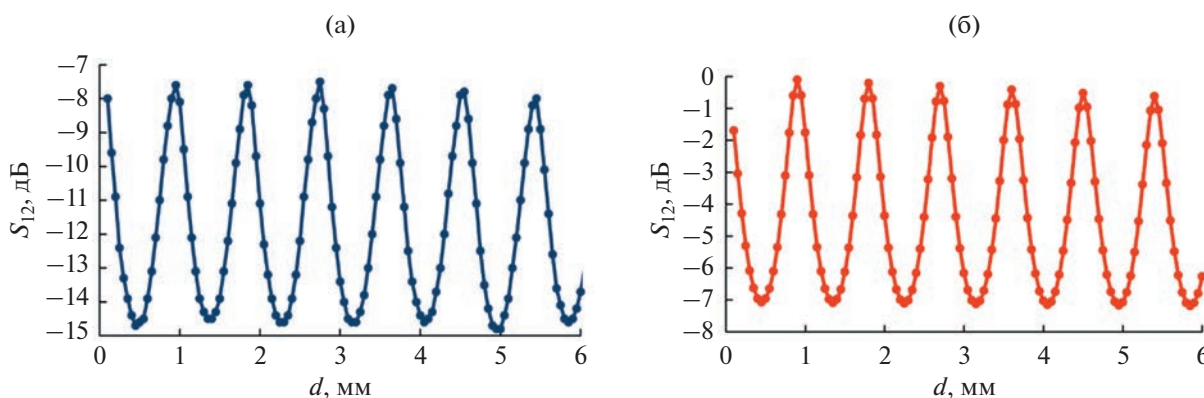


Рис. 4. (а) – Экспериментальная и (б) – теоретическая зависимости параметра S_{12} от расстояния d между пьезопреобразователями для чистого глицерина.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

Теоретический анализ особенностей интерференционного метода при измерении скорости и

затухания акустической волны в жидкостях с различным механическим импедансом был проведен с помощью механической эквивалентной схемы. На рис. 6 представлена механическая эквивалентная схема слоя жидкости, заключенного между преобразователями [34]. Значения сопро-

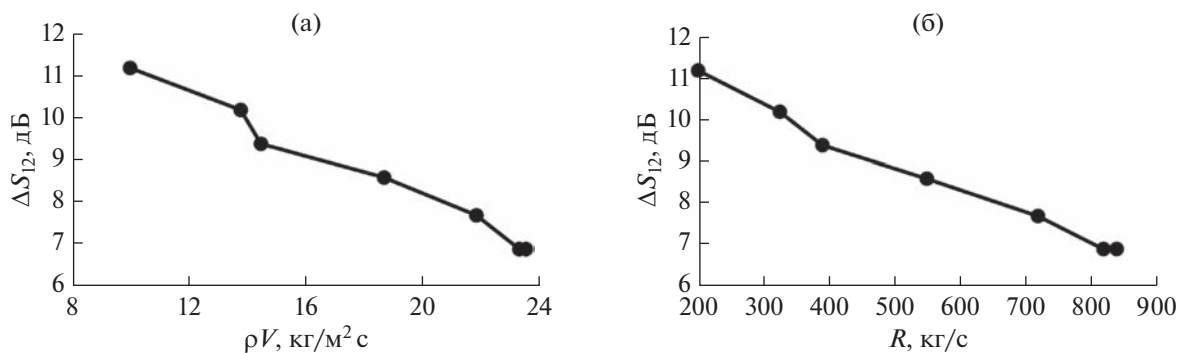


Рис. 5. Зависимости величины изменения параметра S_{12} от максимума до минимума (ΔS_{12}) (а) – от удельного механического импеданса жидкости ρV и (б) – от сопротивления R в плоскости преобразователей.

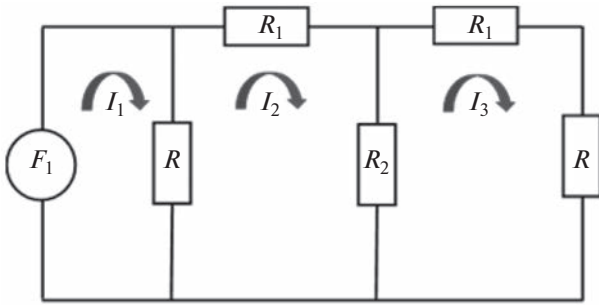


Рис. 6. Механическая эквивалентная схема слоя жидкости между преобразователями.

тивлений R_1 и R_2 определялись следующим образом [34]:

$$R_1 = jZt \operatorname{tg}\left(\frac{kd}{2}\right), \quad (1)$$

$$R_2 = -jZ/\sin(kd). \quad (2)$$

Здесь $Z = \rho VS$ – полный механический импеданс жидкости, ρ – плотность жидкости, V – скорость акустической волны, S – площадь преобразователей, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны. Нагрузки R с обеих сторон соответствуют преобразователям. Механическая “ЭДС” излучающего преобразователя представлена источником F_1 , который генерирует механическую силу, приложенную к левому краю слоя жидкости по закону

$$F_1 = F_0 \exp(j2\pi ft), \quad (3)$$

где f – частота, F_0 – амплитуда, t – время. Расчет проводился с помощью метода контурных токов I_1 , I_2 и I_3 для каждого контура. Стандартный прием позволил найти ток I_3 в третьем контуре

$$I_3 = F_1 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_2 + R) - R_2^2} \quad (4)$$

и силу F_{out} , действующую на выходной преобразователь

$$F_{\text{out}} = I_3 R. \quad (5)$$

Отсюда коэффициент передачи S_{12} определялся как

$$S_{12} = 20 \lg \frac{I_3 R}{F_1}. \quad (6)$$

Были найдены теоретические зависимости коэффициента прохождения S_{12} от зазора d между преобразователями для исследуемых образцов жидкости. Для всех образцов жидкости расстояния между максимальными значениями параметра S_{12} оказались в точности равными экспериментальным значениям. Это подтверждается рис. 26–46 для этилового спирта, воды и глицерина. Видно также, что максимальные теоретиче-

ские значения S_{12} во всех случаях близки к 0, в то время как в эксперименте максимум S_{12} меняется от -11 до -7 дБ. Это связано с тем, что в теории не учитывается коэффициент двойного преобразования электрического сигнала в акустический и наоборот, который лежит в указанных выше пределах. Изменения ΔS_{12} для всех жидкостей в случае теоретического анализа также в точности соответствовали экспериментальным величинам. Однако для обеспечения этого соответствия было проделано следующее. Известно, что коэффициент преобразования электрического сигнала в акустический и наоборот для пластинчатых пьезопреобразователей зависит не только от коэффициента электромеханической связи пластины, но и от механического импеданса контактирующей среды [34]. Поэтому величина сопротивления R в плоскости преобразователей определяется не только параметрами преобразователя, но и механическим импедансом исследуемой жидкости. На рис. 5б представлена зависимость ΔS_{12} от сопротивления R . Именно использование этой зависимости привело к тому, что теоретические значения ΔS_{12} для всех жидкостей оказались равными экспериментальным величинам.

На рис. 4б представлена теоретическая зависимость коэффициента прохождения S_{12} от зазора d между преобразователями для чистого глицерина. Как уже отмечалось, на экспериментальной зависимости коэффициента прохождения S_{12} от зазора d между преобразователями для чистого глицерина видно, что с ростом величины этого зазора максимальное значение S_{12} плавно уменьшается. Очевидно, что это связано с заметным затуханием акустической волны в глицерине. Путем перебора величины удельного затухания волны было найдено такое ее значение, которое привело к совпадению теоретической и экспериментальной зависимостей S_{12} от зазора d . Затухание оказалось равным $\operatorname{Im} k = 6 \text{ Нп/м} = 0.52 \text{ дБ/см}$. Поскольку [3]

$$\operatorname{Im} k = \frac{2\pi^2 f^2 \eta_{11}}{Vc}, \quad (7)$$

отсюда продольная вязкость $\eta_{11} = 2.32 \text{ Па с}$. Следует отметить, что при таком подходе автоматически устраняется “кажущееся” затухание, связанное с не равным 1 коэффициентом отражения волны от преобразователей. В этом случае, как уже отмечалось, к собственной добротности слоя жидкости добавляется нагруженная добротность, приводящая к “кажущемуся” затуханию. Поэтому, если в соответствии с методом [32] определить затухание как разность максимальных значений S_{12} ($8-7.6 \text{ дБ}$), отнесенных к известному расстоянию ($5.45-0.95 \text{ мм}$), мы получим $\operatorname{Im} k = 0.89 \text{ дБ/см}$. Это значение выше, чем полученное $\operatorname{Im} k = 0.52 \text{ дБ/см}$ в связи с наличием “кажущегося” затухания, свя-

занного с уходом акустической мощности в преобразователи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью акустического интерферометра определена скорость акустической волны в жидкостях с различным акустическим импедансом. Впервые показано, что указанный импеданс определяет отношение резонансных величин максимума и минимума коэффициента прохождения S_{12} для одной и той же пары “излучатель—приемник” на зависимости коэффициента прохождения от расстояния между преобразователями. Впервые проведенный теоретический анализ позволил определить механический импеданс в плоскости “преобразователь—жидкость” в зависимости от акустического импеданса жидкости. На основе теоретического анализа разработана методика определения затухания жидкости, свободная от влияния “кажущегося” затухания, связанного с уходом части акустической мощности в преобразователи. Затухание продольной акустической волны, оцененное в глицерине по известной методике [32], включающей указанное “кажущееся” затухание, оказалось равным 0.89 дБ/см. С учетом этого источника ошибки истинное затухание равно 0.52 дБ/см.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант № 23-22-00134).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимкин В.И., Воронова Н.В. Особенности генерации нормальных акустических волн высших порядков в тонких пьезоэлектрических пластинах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 3–7.
2. Borodina I.A., Zaitsev B.D., Teplykh A.A. Influence of the conductivity of a liquid contacting with a lateral electric field excited resonator based on PZT ceramics on its characteristics // Ultrasonics. 2020. V. 102. P. 106059. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2019.106059>
3. Минаков А.В., Пряжников М.И., Дамдинов Б.Б., Немцев И.В. Исследование объемной вязкости наносuspензий методом акустической спектроскопии // Акуст. журн. 2022. Т. 69. № 2. С. 182–189.
4. Шамсутдинова Е.С., Анисимкин В.И., Фионов А.С., Смирнов А.В., Колесов В.В., Кузнецова И.Е. Совершенствование методов исследования электрофизических и вязкостных свойств жидкостей // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 1. С. 56–62.
5. Anisimkin V.I., Kuznetsova I.E., Kolesov V.V., Pyataikin I.I., Sorokin V.V., Skladnev D.A. Plate acoustic wave sensor for detection of small amounts of bacterial cells in micro-litre liquid samples // Ultrasonics. 2015. V. 62. № 9. P. 156–159. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.05.012>
6. Borodina I.A., Zaitsev B.D., Alsovzidi A.K.M., Караваева О.А., Гулий О.И. Биологический датчик на основе акустической щелевой моды с использованием микробных клеток для определения ампициллина // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 6. С. 583–588.
7. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Под ред. Голяминой И.П. М.: Советская энциклопедия, 2011. 400 с.
8. Бабий В.И. О метрологии скорости звука в жидкости // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 3. С. 261–264.
9. Неручев Ю.А., Болотников М.Ф., Зотов В.В. Исследования скорости ультразвука в органических жидкостях на линии насыщения // ТВТ. 2005. Т. 43. № 2. С. 274–316.
10. Feldman M.K., Katyal S., Blackwood M.S. US artifacts // Radio Graphics. 2009. V. 29. № 4. P. 1179–1189. <https://doi.org/10.1148/rg.294085199>
11. Dudley N.J., Gibson N.M., Fleckney M.J., Clark P.D. The effect of speed of sound in ultrasound test objects on lateral resolution // Ultrasound Med. Biol. 2002. V. 28. № 11–12. P. 1561–1564. [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(02\)00648-8](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(02)00648-8)
12. Cushing K.W., Garofalo F., Magnusson C., Ekblad L., Bruus H., Laurell T. Ultrasound characterization of microbead and cell suspensions by speed of sound measurements of neutrally buoyant samples // Anal. Chem. 2017. V. 89. № 17. P. 8917–8923. <https://doi.org/10.1021/acs.analchem.7b01388>
13. Hincapié Gómez E., Tryner J., Aligata A.J., Quinn J.C., Marchese A.J. Measurement of acoustic properties of microalgae and implications for the performance of ultrasonic harvesting systems // Algal. Res. 2018. V. 31. P. 77–86. <https://doi.org/10.1016/j.algal.2018.01.01>
14. Mahmoud B., Rice H.P., Mortimer L., Fairweather M., Peakall J., Harbottle D. Acoustic method for determination of the thermal properties of nanofluids // Ind. Eng. Chem. Res. 2019. V. 58. № 42. P. 19719–19731. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b02983>
15. Zafarani-Moattar M.T., Majdan-Cegincara R. Effect of temperature on volumetric and transport properties of nanofluids containing ZnO nanoparticles poly(ethylene glycol) and water // J. Chem. Thermodyn. 2012. V. 54. P. 55–67. <https://doi.org/10.1016/j.jct.2012.03.010>
16. Povey M.J.W. Ultrasound particle sizing: A review // Particuology. 2013. V. 11. № 2. P. 135–147. <https://doi.org/10.1016/j.partic.2012.05.010>
17. Physical Principles of Medical Ultrasonics: 2nd Edition. Eds. Hill C.R., Bamber J.C., ter Haar G.R. 2004. John Wiley & Sons, Ltd. 528 p. <https://doi.org/10.1002/0470093978>
18. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 403 с.
19. Бабий В.И. Проблемы и перспективы измерения скорости звука в океане // Морской гидрофизический институт НАН Украины. Севастополь: НПП “ЭКОСИ-Гидрофизика”, 2009. 142 с.
20. Микушин И.И., Серавин Г.Н., Чернов В.П. Цилиндрическая акустическая база импульсного измерителя скорости звука в жидкости // Труды X Всероссийской конференции “Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики (ГА-2010)”. СПб.: Наука, 2010. С. 114–118.

21. *Salo H., Oy J.* Method and apparatus for measuring sound velocity in liquid, United States Patent. № 5, 936, 160, Aug. 10, 1999.
22. *Полканов К.И., Романов В.Ю., Смелов Д.А.* Патент 2208223 РФ. МКИ G01H 5/00. Измеритель скорости звука в жидких средах. Оpubл. 10.07.2003. Б.И. № 19.
https://patents.s3.yandex.net/RU2208223C2_20030710.pdf (дата обращения 25.05.2023 г.)
23. *Васильев С.А., Полканов К.И., Романов В.Ю., Серавин Г.Н., Смелов Д.А.* Высокоточный импульсный измеритель скорости звука в воде // Труды VII Международной конференции “Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики (ГА-2004)”. СПб.: Наука, 2004. С. 38–41.
24. *Жилина Н.А., Полканов К.И., Романов В.Ю., Васильев С.А., Смелов Д.А.* Измеритель скорости звука в морской воде // Навигация и гидрография. 2005. № 20–21. С. 97–101.
25. *Meister E.C.* Measurement of the temperature and concentration dependent sound velocity in ethanol-water liquid mixtures // *Physicalisch-Chemisches Praktikum Spring Semester. Zurich. January 15, 2015.* P. 1–7.
https://analytik.ethz.ch/praktika/phys_anal/Musterbericht.pdf (дата обращения 25.05.2023 г.)
26. *Приленко П.А.* Патент 2773980 РФ. МПК G01H 5/00. Метод измерения скорости звука в жидкости. Оpubл. 14.06.2022. Б.И. № 17.
https://patents.s3.yandex.net/RU2773980C1_20220614.pdf (дата обращения 25.05.2023 г.)
27. *Серавин Г.Н., Микушин И.И., Лобанов В.Н.* Прямые импульсные методы измерения скорости звука в жидкости // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск. 2011. № 9(122). С. 238–243.
28. *Коробов А.И., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Цысарь С.А.* Измерение скорости звука в жидкостях. Методическая разработка специального физического практикума кафедры акустики. М.: Физический факультет МГУ, 2010. С. 1–37.
29. *Егошина В.Д., Гонгальский М.Б., Цурикова У.А., Свиридов А.П., Осминкина Л.А., Андреев В.Г.* Кавитационная активность водных суспензий пористых кремниевых наночастиц с различной степенью гидрофобности поверхности // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 1. С. 92–100.
30. *Бергман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: Изд. иностр. лит., 1957. 727 с.
31. *Кольцова И.С., Хомутова А.С., Дейнега М.А.* Скорость ультразвуковых волн при структурных перестройках дисперсных сред // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 2. С. 187–193.
32. *Рудин А.В., Горбунов А.И.* Исследование акустических свойств жидких сред методом интерферометра переменной акустической базы // Материалы XI Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов “Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем”, Россия, г. Пенза, 30 мая–1 июня 2017 // Издат. ПГУ. 2017. С. 184–189.
33. *Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Клемина А.В., Клемин В.А.* Акустический анализ состава крови человека // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 496–505.
34. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic waves in solids II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications. Berlin: Springer, 1999. 446 p.

УДК 548.5.01;534.86

АКУСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАВЛЕНИЯ И КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ЭВТЕКТИЧЕСКИХ СПЛАВОВ ГАЛЛИЙ–СЕРЕБРО В ПОРИСТЫХ СТЕКЛАХ

© 2023 г. А. Л. Пирозерский^а, *, Е. В. Чарная^{а,**}, Х. А. Абдуламонов^а, А. И. Недбай^а,
Ю. А. Кумзеров^б, А. В. Фокин^б, А. С. Хомутова^а

^аСанкт-Петербургский государственный университет, Физический факультет,
ул. Ульяновская 1, Санкт-Петербург, Петродворец, 198504 Россия

^бФизико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН,
ул. Политехническая 26, Санкт-Петербург, 194021 Россия

*e-mail: piroz@yandex.ru,

**e-mail: charnaya@mail.ru

Поступила в редакцию 09.01.2023 г.

После доработки 09.01.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Представлены результаты акустических исследований процессов плавления и кристаллизации сплавов Ag–Ga с содержанием серебра 1.5 и 3 ат. %, внедренных в пористые стекла со средним размером пор 13 нм. Измерены температурные зависимости скорости продольных ультразвуковых волн модифицированным импульсно-фазовым методом на частоте 7 МГц в диапазоне 200–325 К при полных и частичных циклах охлаждения-нагрев. На температурных зависимостях скорости ультразвука наблюдались области, соответствующие фазовым переходам. Выявлены существенные изменения фазовой диаграммы объемного сплава вследствие наноструктурирования. Показано, что при разных составах сплава в порах формируются сегрегаты с различной кристаллической структурой.

Ключевые слова: эвтектический сплав Ag–Ga, плавление и кристаллизация, нанокompозиты, фазовая диаграмма, полиморфизм, пористые стекла, физическая акустика

DOI: 10.31857/S0320791923600014, **EDN:** ZGMSPM

1. ВВЕДЕНИЕ

Особенности фазовых переходов (ФП) плавления и кристаллизации для материалов, внедренных в поры нанопористых матриц, вызывают значительный интерес в современной физике низкоразмерных систем [1–3]. К настоящему времени достаточно хорошо изучен случай однокомпонентных систем: органических и простых жидкостей [4, 5] и легкоплавких металлов [6–9]. Для большей части материалов наблюдался сдвиг температур ФП, а также значительное размытие переходов, которое увеличивалось с уменьшением размеров пор, и воспроизводимый температурный гистерезис между плавлением и кристаллизацией [10]. Наряду с общими закономерностями, были обнаружены особенности, специфические для конкретных материалов. Так, например, для ртути и олова в силикатных матрицах сообщалось о формировании жидкого слоя на поверхности частиц [7, 9], что может быть описано в рамках модели “жидкой шубы”, разработанной ранее для изолированных малых частиц [11]. В зависимости от ряда факторов в нанопорах формиро-

вались различные кристаллические модификации галлия [12, 13], в том числе структуры, метастабильные или не образующиеся в объеме.

В то же время особенности процессов плавления и кристаллизации в условиях ограниченной геометрии для бинарных и многокомпонентных систем и, в частности, для эвтектических сплавов практически не изучены. Наиболее подробная информация была получена с использованием методов физической акустики, ЯМР и малоуглового рассеяния нейтронов для бинарного эвтектического сплава галлия и индия различного состава, введенного в силикатные опаловые матрицы и пористые стекла [14–19]. Эвтектические металлические сплавы имеют широкий спектр практических применений от гибкой робототехники и медицинского приборостроения до самовосстанавливающихся сверхпроводниковых контактов, вследствие чего исследование влияния наноструктурирования на их свойства имеет большое прикладное значение [20]. Этот вопрос представляется важным и в фундаментальном плане для изучения роли размерных эффектов и

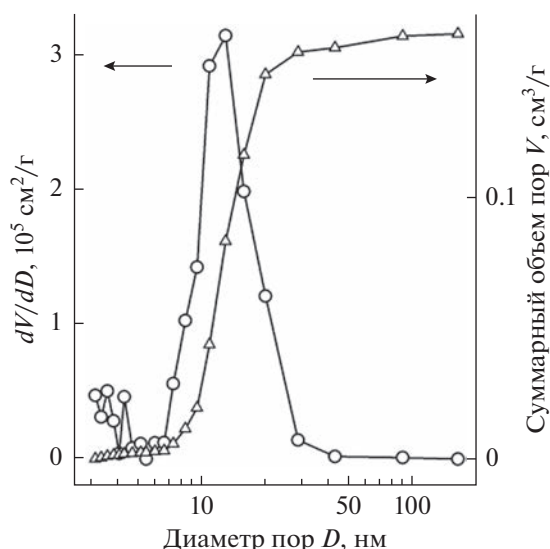


Рис. 1. Дифференциальная (кружки) и интегральная (треугольники) функции распределения пор по размерам по данным азотной порометрии.

взаимодействия со стенками пор в изменении фазовых диаграмм многокомпонентных систем.

В настоящей работе методами физической акустики проведены исследования плавления и кристаллизации эвтектических сплавов Ag—Ga с долей серебра 1.5 и 3 ат. % в нанокompозитах на основе пористых стеклянных матриц со средним размером пор около 13 нм.

2. ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Пористые стеклянные матрицы изготавливались из термообработанных заготовок натрий-боросиликатного стекла ДВ-1 (состав: Na_2O — 7 мол. %, B_2O_3 — 23 мол. %, SiO_2 — 70 мол. %). Получение пористых матриц включало следующие этапы: выщелачивание в 3М растворе соляной кислоты, промывание в дистиллированной воде, щелочное травление в растворе гидроксида калия, промывание в дистиллированной воде и высушивание.

Изготовленные пористые матрицы тестировались на азотном порометре Quadrasorb SI. Дифференциальная и интегральная функции распределения пор по размерам представлены на рис. 1. Средний размер пор составлял 13 нм, удельная пористость — $0.16 \text{ см}^3/\text{г}$, удельная площадь поверхности — $48 \text{ м}^2/\text{г}$.

Для приготовления нанокompозитов использовались сплавы галлий—серебро с долей серебра 1.5 и 3 ат. %. Сплавы вводились в поры в расплавленном состоянии под давлением до 1 ГПа. Из полученных нанокompозитов были изготовлены образцы для исследований в форме прямоуголь-

ных плоскопараллельных пластин толщиной 2 мм с поперечным сечением $5 \times 7 \text{ мм}$. Образцы в дальнейшем обозначаются как C-Ag1.5 и C-Ag3, в соответствии с концентрацией серебра в сплавах.

Измерения скорости ультразвука проводились модифицированным импульсно-фазовым методом [21]. Информация о плавлении и кристаллизации сплавов в порах получалась на основе анализа температурных зависимостей скорости ультразвука при нагреве и охлаждении. Отметим преимущества акустических методов: высокую чувствительность к изменению состояния вещества в порах, широкие возможности выбора тех или иных температурных режимов измерений и быстроту получения данных при фиксированной температуре. Поскольку исследуемые образцы представляют собой сильнопоглощающие среды, применялся одноимпульсный вариант акустического тракта [22] с двумя одинаковыми звукопроводами. Метод основан на определении разности фаз электрических сигналов, возбуждаемых двумя акустическими импульсами, один из которых прошел через оба звукопровода и исследуемый образец, а второй отразился от передней грани образца и прошел дважды через первый звукопровод. В отличие от метода [22], который является вариантом импульсного фазового интерферометра с интерференцией в электрических каналах, измерения модифицированным методом [21] проводятся на фиксированной частоте, что исключает ошибки, связанные с фазочастотной характеристикой акустического и электрического тракта. Для устранения погрешности, обусловленной нетождественностью звукопроводов, каждое измерение скорости проводилось дважды, с переключением функций пьезопреобразователей — излучающий-принимающий и только принимающий, и вычислялось среднее арифметическое обратных скоростей.

Ячейка для температурных измерений представляла собой цилиндрическую теплоизолированную камеру, в которой размещался теплообменник типа “труба в трубе”, охлаждаемый парами азота, с дополнительным резистивным нагревателем. Звукопроводы из кварцевого стекла длиной 200 мм входят в теплообменник через верхний и нижний фланцы камеры на расстояние около 30 мм. Держатель нижнего звукопровода крепится неподвижно на нижнем фланце, держатель верхнего — через сильфонный компенсатор. На внешние торцы звукопроводов закрепляются пьезопреобразователи из ниобата лития, срез Y + 36°. Акустический контакт звукопроводов с образцом и пьезопреобразователями обеспечивается вакуумной смазкой Apiezon N.

Ультразвуковые измерения проводились на продольных волнах с частотой 7 МГц при непрерывном изменении температуры. Скорость изме-

нения температуры, за исключением области выхода на режим и областей стабилизации температуры, составляла около 0.6 К/мин.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 представлены температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука $\Delta v/v_0 \equiv (v(T) - v_0)/v_0$, ($v(T)$ и v_0 — скорости ультразвука при температурах T и 323 К соответственно) в образце С-Ag3. Образец предварительно нагревался от комнатной температуры до 326 К, после чего проводились измерения в процессе охлаждения до 245 К и последующего нагрева до 324 К. Такой режим соответствовал изменению состояния сплава от полностью расплавленного до полностью закристаллизованного и снова полностью расплавленного. Области значительного изменения скорости отвечают фазовым превращениям в образце [5, 14–16]. При охлаждении вплоть до 287.2 К наблюдалось слабое, практически линейное уменьшение скорости. Затем начиналась кристаллизация, при этом скорость ультразвука скачком возрастала почти на 10%, а из-за выделения скрытой теплоты образец нагревался на ~0.5 К. На графике температурной зависимости производной относительного изме-

нения скорости по температуре $u(T) \equiv \frac{1}{v_0} \frac{dv(T)}{dT}$, приведенном на вставке на рис. 2, имеются два минимума, что указывает на двухстадийный характер кристаллизации. Учитывая, что распределение пор по размерам не является бимодальным, можно предположить, что наличие двух этапов кристаллизации связано с образованием обогащенных галлием твердых фаз с различной кристаллической структурой.

Температуры окончания кристаллизации и начала плавления равны приблизительно 260 и 280 К соответственно. При нагреве на графике температурной зависимости $u(T)$ наблюдается только один минимум, однако около 295 К имеется небольшой излом (отмечен стрелкой на вставке к рис. 2). Эту аномалию можно интерпретировать как наличие двух сильно перекрывающихся по температуре этапов плавления, соответствующих разным кристаллическим модификациям обогащенного галлием сегрегата. Окончание плавления при нагреве (~301 К) почти совпадает с температурой минимума производной (рис. 2). Однако в области окончания плавления на температурной зависимости скорости наблюдался небольшой минимум, по-видимому, связанный с релаксацией механических напряжений в матрице [5]. При дальнейшем нагреве до 324 К скорость ультразвука изменялась незначительно. Следует отметить, что, начиная со второго полного цикла охлаждения-нагрев,

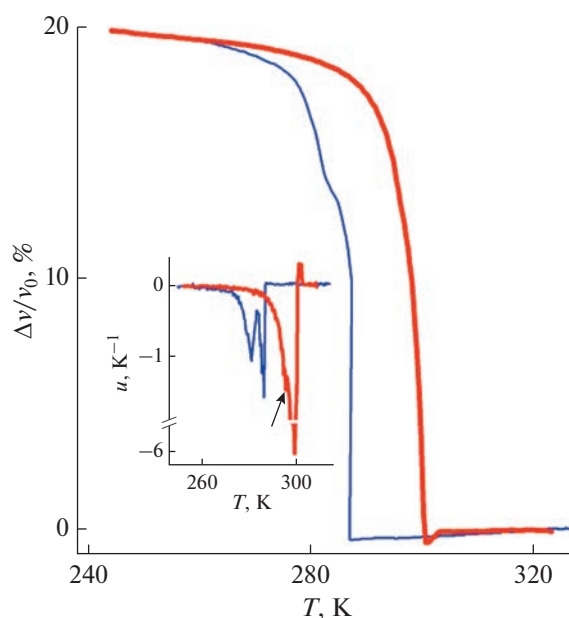


Рис. 2. Температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука в образце С-Ag3 при полном температурном цикле. Тонкие линии — охлаждение, жирные — нагрев. На вставке — температурная зависимость производной $u(T)$ (скачок скорости при охлаждении исключен при расчете). Стрелкой указана аномалия $u(T)$ при нагреве, обсуждаемая в тексте.

вид температурных зависимостей скорости для полных циклов практически не менялся.

Мы проводили также измерения при частичных температурных циклах, при которых охлаждение или нагрев прекращались до полного окончания процесса кристаллизации или плавления сплава в порах. Температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука в частичных циклах для образца С-Ag3 показаны на рис. 3.

Для частичного цикла на рис. 3а после нагрева до 296.8 К образец выдерживался при постоянной температуре в течение 70 мин. За это время относительное изменение скорости составило менее 0.4%, что свидетельствует о достижении равновесия. Затем образец снова охлаждался до 230 К. Как видно на рис. 3а, ветвь охлаждения частичного цикла проходит между ветвями охлаждения и нагрева полного цикла, что соответствует частичной обратимости процесса плавления. Частичная обратимость плавления связана, вероятно, с влиянием нерасплавленной части вещества в порах, которая служит центрами кристаллизации.

Частичный цикл, показанный на рис. 3а, завершался нагревом до 325 К. Ниже 301 К температурная зависимость скорости ультразвука практически совпадала с ветвью нагрева полного цикла, однако в интервале 301–306 К наблюдалась аномалия в виде ступеньки (отмечена стрелкой на

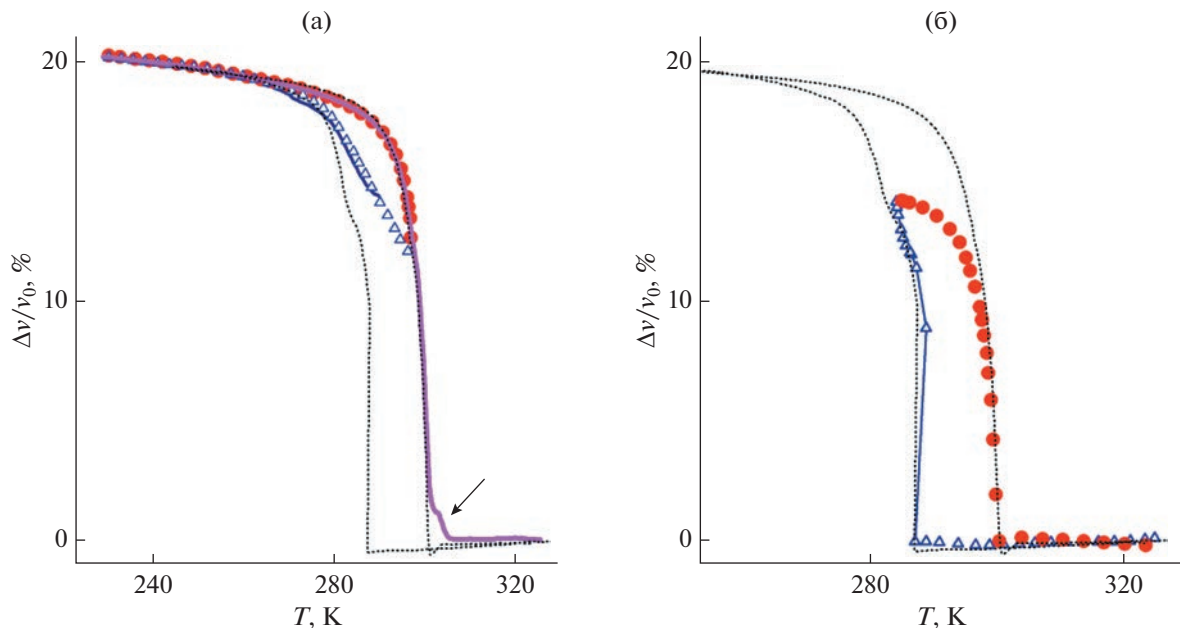


Рис. 3. Температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука для образца С-Ag3 при частичных температурных циклах. Пунктирной линией показан полный цикл (рис. 2). (а) Предварительное охлаждение от комнатной температуры до 230 К — тонкая синяя линия, красные кружки — нагрев до 296.8 К, синие треугольники — охлаждение до 230 К после стабилизации температуры (см. текст). Жирная пурпурная линия — нагрев. Стрелкой отмечена аномалия, обсуждаемая в тексте. (б) Охлаждение — синие треугольники, нагрев после стабилизации температуры — красные кружки.

рис. 3а). Можно предположить, что она связана с образованием при кристаллизации обогащенной галлием кристаллической фазы, температура плавления которой лежит выше температуры плавления α -Ga. Ранее высокотемпературная тетрагональная фаза галлия была обнаружена в работе [23] при исследовании плавления и кристаллизации галлия в пористом стекле с размером пор 4 нм. Эта тетрагональная модификация была обозначена λ -Ga в работе [12]. Высокотемпературные фазы также наблюдались при акустических исследованиях плавления и кристаллизации сплава Ga—In с долей индия 9 ат. % в пористом стекле с размером пор 7 нм [18].

Результаты, полученные при другом частичном цикле охлаждения-нагрев, представлены на рис. 3б. Образец охлаждался от 325 до 284.4 К. Кристаллизация части сплава в порах происходила скачком при 287.3 К. При этом образец нагревался на 1.8 К. При 284.4 К охлаждение прекращалось и температура оставалась постоянной в течение 45 мин. За это время скорость ультразвука менялась менее чем на 0.2%. Затем образец нагревался до первоначальной температуры. Как следует из рис. 3б, ветвь нагрева частичного цикла приближалась к соответствующей ветви полного цикла лишь вблизи температуры окончания плавления, что означает частичную обратимость процесса кристаллизации. Отметим, что кристал-

лическая фаза с высокой температурой плавления в данном цикле не возникала.

Температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука в образце С-Ag1.5 при полных и частичных температурных циклах, показанные на рис. 4 и рис. 5, несколько отличаются от данных для образца С-Ag3. Как видно на рис. 4, петли гистерезиса в полных циклах не полностью стабилизируются после первого цикла. Температура начала кристаллизации (269 К) сдвигалась в третьем цикле на 6 К относительно начала кристаллизации (263 К) во втором цикле. Кроме того, происходило постепенное уменьшение максимального значения $\Delta v/v_0$. Температуры окончания кристаллизации и начала плавления сплава в порах для образца С-Ag1.5 были существенно ниже, чем соответствующие температуры для образца С-Ag3. При некоторых полных и частичных температурных циклах на ветвях нагрева наблюдалась аномальная ступенька, указанная стрелками на рис. 4 и 5. Как и для С-Ag3, результаты измерений при частичных циклах для С-Ag1.5 (рис. 5) указывают на частичную обратимость процессов плавления и кристаллизации.

Характерные температуры областей плавления и кристаллизации основной части сплавов в порах (без учета отмеченных стрелками аномалий при плавлении) для обоих образцов, определенные исходя из измерений скорости ультразвука, приведены в табл. 1.

Полученные данные о плавлении и кристаллизации сплава в порах следует сопоставить с соответствующими данными для объемного сплава. Имеющиеся в литературе сведения о фазовой диаграмме объемной системы Ag-Ga являются в значительной степени противоречивыми [24–28]. Во всех исследованиях отмечается существование эвтектической точки в области малого содержания серебра. Однако данные по значениям концентрации сплава в эвтектической точке и температуры солидуса различаются. Согласно [24] концентрация серебра в эвтектической точке составляет 3.2 ат. %, а температура солидуса равна 25°C. По данным [25] эвтектической точке соответствует меньшая концентрация серебра 1.7 ат. % и температура солидуса на один градус выше, 26°C.

В объемных эвтектических сплавах ниже линии солидуса имеется сегрегация на две различные кристаллические фазы. В случае системы Ag-Ga при низкой концентрации серебра сегрегатами являются обогащенный галлием твердый раствор со структурой α -Ga и интерметаллическое соединение Ag_3Ga_2 , состав которого недавно был уточнен в работе [28].

На рис. 6 показан участок фазовой диаграммы объемной системы Ag-Ga по данным [24] и [25] в области малых концентраций серебра и отмечены интервалы плавления сплавов в образцах С-Ag3 и С-Ag1.5 согласно табл. 1. Видно, что интервалы плавления для сплавов в порах значительно уширены по сравнению с разницей температур ликвидуса и солидуса для тех же составов объемных сплавов. Температуры начала плавления сплавов в порах различаются для двух образцов, хотя для приготовления нанокмпозитов использовалась одна и та же пористая матрица. Таким образом, обнаруженное различие температур начала плавления не может быть обусловлено размерными эффектами. Поскольку начало плавления сплава должно соответствовать положению линии солидуса, которое не зависит от концентрации компонент для конкретной морфологии сегрегатов, то полученный результат однозначно свидетельствует о формировании в исследованных образцах сегрегатов с различной структурой. Учитывая склонность галлия к полиморфизму, можно предположить, что в образцах С-Ag3 и С-Ag1.5 образуются разные обогащенные галлием фазы, не считая появления фазы со структурой λ -Ga. Возможно, что в образце С-Ag3 кристаллизуется

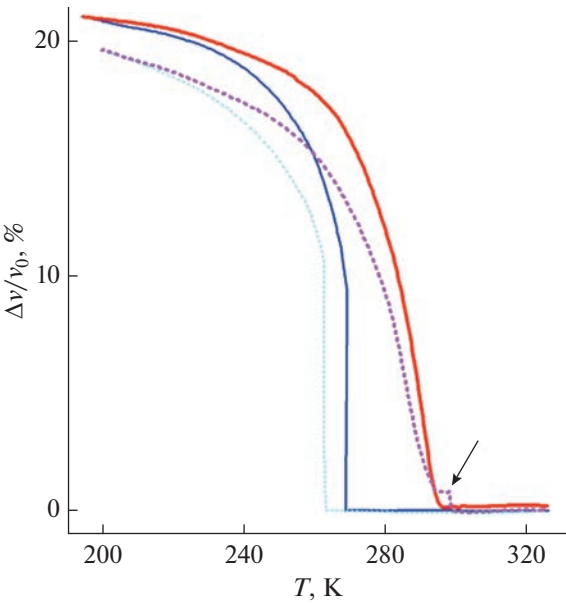


Рис. 4. Температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука в образце С-Ag1.5 при полных циклах. Тонкие линии – охлаждение, жирные – нагрев. Сплошные линии – второй цикл, пунктирные – третий. Стрелкой указана аномалия, обсуждаемая в тексте.

фаза со структурой α -Ga. С таким предположением согласуется температура окончания плавления в этом образце, превышающая температуру солидуса в объемном сплаве. Кроме того, в этом образце возникает и обогащенный галлием сегрегат со структурой, отличной от α -Ga, о чем свидетельствует двухступенчатый процесс кристаллизации. Температура окончания плавления в образце С-Ag1.5 не сильно снижена по сравнению с образцом С-Ag3. Мы можем предположить, что в образце С-Ag1.5 часть обогащенных галлием сегрегатов также имеет структуру α -Ga, а остальная часть кристаллизуется в структуру со значительно меньшей температурой плавления. В рамках такого предположения результаты, показанные на рис. 6, свидетельствуют о понижении линии солидуса при введении сплава Ag-Ga в нанопоры и о близости состава сплава в образце С-Ag1.5 к эвтектической точке в условиях ограниченной геометрии. Для подтверждения кристаллической структуры сегрегатов необходимо проведение температурных рентгеновских исследований.

Таблица 1. Температуры T_l и T_p начала и окончания кристаллизации, соответственно, и T_{m1} и T_{m2} начала и окончания плавления, соответственно, для сплавов, находящихся в нанопорах

Образец	T_l , К	T_p , К	T_{m1} , К	T_{m2} , К
С-Ag3	287.5 ± 0.5	260 ± 3	280 ± 3	301.0 ± 0.5
С-Ag1.5	263.0 ± 0.5	225 ± 10	230 ± 10	295 ± 1
	269.0 ± 0.5			297 ± 1

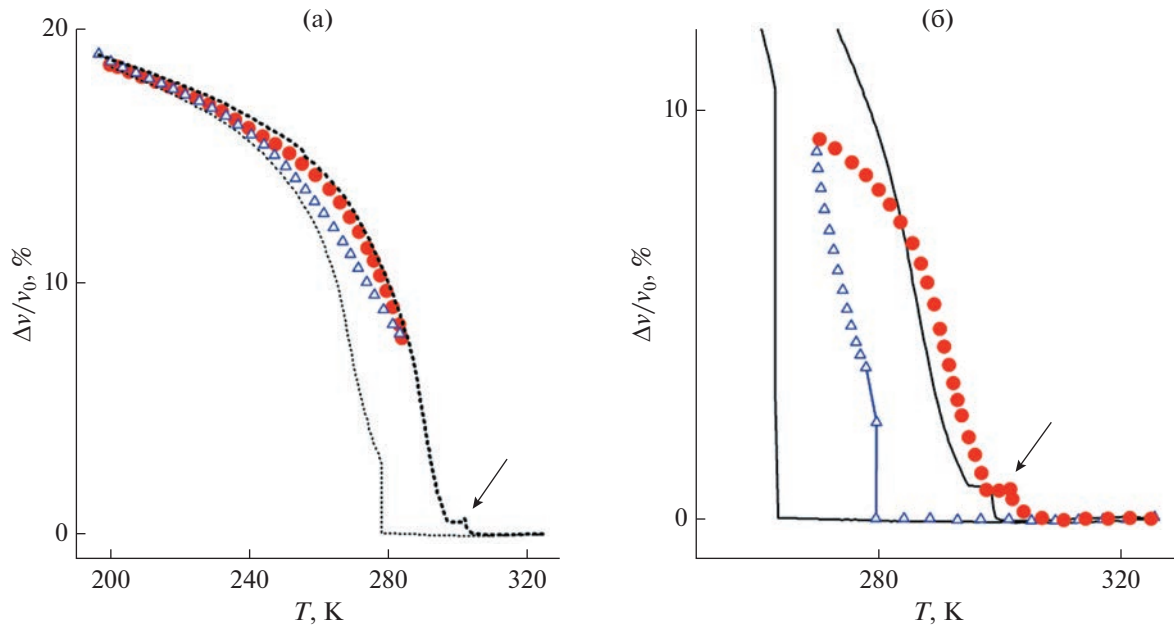


Рис. 5. Температурные зависимости относительного изменения скорости ультразвука для образца C-Ag1.5 при частичных циклах. Стрелками указаны аномалии, обсуждаемые в тексте. (а) Тонкая пунктирная линия – предварительное охлаждение до 199.8 К, красные кружки – нагрев до 283.9 К, синие треугольники – охлаждение после стабилизации температуры до 196.4 К, жирная пунктирная линия – нагрев. (б) Синие треугольники – охлаждение от 325.4 до 269.8 К, красные кружки – нагрев после стабилизации температуры до 324.8 К. Сплошной линией обозначена часть третьего полного цикла, показанного на рис. 4.

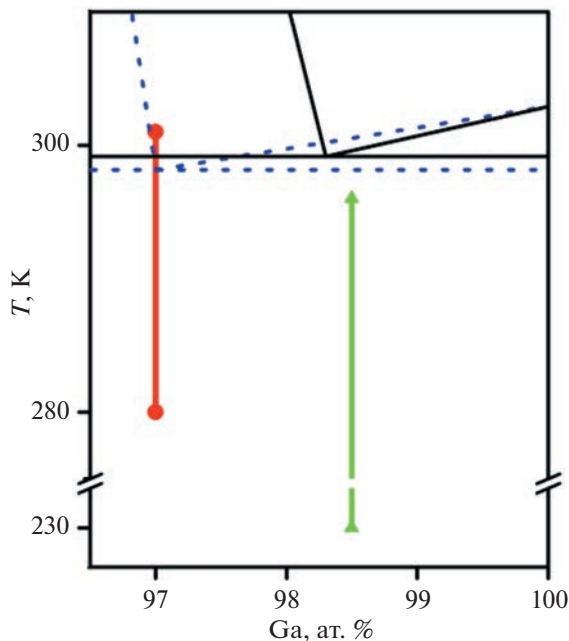


Рис. 6. Фрагмент фазовой диаграммы объемного сплава Ag–Ga по данным работ [24] (синие пунктирные линии) и [25] (черные сплошные линии) и интервалы плавления сплава в порах для образцов C-Ag3 (красные кружки и жирная линия) и C-Ag1.5 (зеленые треугольники и жирная линия). Символы обозначают границы интервалов плавления.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные ультразвуковые исследования процессов плавления и кристаллизации эвтектических сплавов галлий–серебро с долей серебра 1.5 и 3 ат. % в пористых стеклах с размером пор около 13 нм показали, что при разных составах основная часть сплавов в порах кристаллизуется с образованием различных обогащенных галлием сегрегатов. Выявлено значительное уширение интервалов плавления и кристаллизации, в основном за счет понижения температур начала этих процессов. Сравнение полученных результатов с фазовой диаграммой объемного сплава Ag–Ga позволило сделать предположение о понижении температуры солидуса для сегрегатов со структурой α -Ga, находящихся в нанопорах, и о близости сплава с концентрацией серебра 1.5 ат. % к эвтектической точке. Выявлена частичная обратимость плавления и кристаллизации в обоих исследованных нанокompозитах. Проведенные исследования подтверждают высокую информативность ультразвуковых методов при исследованиях фазовых переходов в наноструктурированных материалах.

Определение характеристик пористых матриц методом азотной порометрии проводилось на оборудовании Ресурсного центра СПбГУ “Центр диагностики функциональных материалов для медицины, фармакологии и нанoeлектроники”.

Жидкий азот предоставлен Криогенным отделом Научного парка СПбГУ.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21-72-20038.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huber P. Soft matter in hard confinement: phase transition thermodynamics, structure, texture, diffusion and flow in nanoporous media // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2015. V. 27. Art. №. 103102.
2. Christenson H.K. Confinement effects on freezing and melting // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2001. V. 13. № 11. P. R95–R133.
3. Alba-Simionesco C., Coasne B., Dosseh G., Dudziak G., Gubbins K.E., Radhakrishnan R., Sliwinski-Bartkowiak M. Effects of confinement on freezing and melting // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2006. V. 18. P. R15–R68.
4. Jackson C.L., McKenna G.B. The melting behavior of organic materials confined in porous solids // *J. Chem. Phys.* 1990. V. 93. № 12. P. 9002–9011.
5. Molz E., Wong A.P.Y., Chan M.H.W., Beamish J.R. Freezing and melting of liquids in porous glasses // *Phys. Rev. B*. 1993. V. 48. № 9. P. 5741–5750.
6. Dereppe J.M., Борисов Б.Ф., Чарная Е.В., Шеляпин А.В., Нассар М.М., Кумзеров Ю.А. Акустические исследования плавления и затвердевания галлия, введенного в матрицу опала // *ФТТ*. 2000. Т. 42. № 1. С. 184–187.
7. Charnaya E.V., Tien C., Lee M.K., Kumzerov Yu.A. NMR studies of metallic tin confined within porous matrices // *Phys. Rev. B*. 2007. V. 75. № 14. Art. № 144101.
8. Charnaya E.V., Tien C., Lee M.K., Kumzerov Yu.A. Slowdown of self-diffusion induced by partial freezing in confined liquid indium // *Phys. Rev. B*. 2007. V. 75. № 21. Art. № 212202.
9. Charnaya E.V., Plotnikov P.G., Michel D., Tien C., Borisov B.F., Sorina I.G., Martynova E.I. Acoustic studies of melting and freezing for mercury embedded into Vycor glass // *Physica B*. 2001. V. 299. № 1–2. P. 56–63.
10. Чарная Е.В. Акустические исследования фазовых переходов в кристаллах и нанокompозитах // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 6. С. 926–938.
11. Kofman R., Cheyssac P., Aouaj A., Lereah Y., Deutscher G., Ben-David T., Penisson J.M., Bourret A. Surface melting enhanced by curvature effects // *Surf. Sci.* 1994. V. 303. P. 231–246.
12. Charnaya E.V., Tien C., Lee M.K., Kumzerov Yu.A. Superconductivity and structure of gallium under nanoconfinement // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2009. V. 21. № 45. Art. № 455304.
13. Lee M.K., Tien C., Charnaya E.V., Sheu H.-S., Kumzerov Yu.A. Structural variations in nanosized confined gallium // *Phys. Lett. A*. 2010. V. 374. № 13–14. P. 1570–1573.
14. Пирозерский А.Л., Чарная Е.В., Латышева Е.Н., Недбай А.И., Кумзеров Ю.А., Бугаев А.С. Акустические исследования плавления и кристаллизации индий-галлиевого сплава в пористом стекле // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 5. С. 618–622.
15. Латышева Е.Н., Пирозерский А.Л., Чарная Е.В., Кумзеров Ю.А., Фокин А.В., Недбай А.И., Бугаев А.С. Полиморфизм сплавов Ga-In в условиях наноконфайнмента // *ФТТ*. 2015. Т. 57. № 1. С. 124–128.
16. Пирозерский А.Л., Чарная Е.В., Lee M.K., Chang L.J., Недбай А.И., Кумзеров Ю.А., Фокин А.В., Самойлович М.И., Лебедева Е.Л., Бугаев А.С. Акустические и ЯМР исследования плавления и кристаллизации индий-галлиевых сплавов в порах синтетических опаловых матриц // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 3. С. 295–301.
17. Pirozerskii A.L., Nedbai A.I., Kumzerov Yu.A., Fokin A.V., Lebedeva E.L. Melting and crystallization of a Ga-In alloy confined in a porous glass // *IJAER*. 2017. V. 12. № 21. P. 11107–11113.
18. Пирозерский А.Л., Чарная Е.В., Недбай А.И. Акустические исследования фазовых переходов плавления и кристаллизация в индий-галлиевых сплавах, внедренных в поры мезопористых силикатных матриц // *Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физич.* 2020. Т. 84. № 6. С. 803–807.
19. Uskov A.V., Charnaya E.V., Kuklin A.I., Lee M.-K., Chang L.-J., Kumzerov Y.A., Fokin A.V. SANS studies of the gallium–indium alloy structure within regular nanopores // *Nanomaterials*. 2022. V. 12. № 13. Art. № 2245.
20. Xiong Y., Lu X. *Metallic Nanostructures. From Controlled Synthesis to Applications* // Springer International Publishing: Cham, Switzerland. 2015.
21. Pirozerski A.L., Charnaya E.V., Baryshnikov S.V., Nedbai A.I., Borisov B.F., Mikushev V.M., Lebedeva E.L., Khomutova A.S., Dolgova M.V. Acoustic studies of the ferroelastic phase transition in LiCsSO₄/MCM-41 nanocomposite using longitudinal ultrasonic waves // *IJAER*. 2016. V. 11. № 5. P. 3309–3313.
22. Гутис М.Б., Михайлов И.Г., Шутилов В.А. Измерение температурной зависимости скорости звука в твердых образцах малых размеров // *Акуст. журн.* 1969. Т. 15. № 1. С. 28–32.
23. Сороина И.Г., Тьен С., Чарная Е.В., Кумзеров Ю.А., Смирнов Л.А. Структурные особенности твердого галлия в микропористом стекле // *ФТТ*. 1998. Т. 40. № 8. С. 1552–1553.
24. Weibke F., Meisel K., Weigels L. Das Zustandsdiagramm des systems Silber-Gallium // *Z. Anorg. Allg. Chem.* 1932. V. 226. P. 201–208.
25. Predel B., Stein D.W. Bildungsenthalpien binärer verbindungen des galliums mit kupfer, silber und gold sowie analyse der thermodynamischen eigenschaften von 3/2-elektronen-erbindungent // *Metallurgica*. 1972. V. 20. P. 681–692.
26. Baren M.R. The Ag-Ga (Silver-Gallium) System // *Bulletin of Alloy Phase Diagrams*. 1990. V. 11. № 4. P. 334–339.
27. Okamoto H. Ag-Ga (Silver-Gallium) // *J. Phase Equilibria*. 1992. V. 13 № 3. P. 324–325.
28. Zhang Y., Li J.-B., Liang J.K., Liu Q.L., Xiao Y.G., Zhang Q., Rao G.H., Li C.R. Thermodynamic assessment of the Ag–Ga system // *Computer Coupling of Phase Diagrams and Thermochemistry*. 2006. V. 30. P. 316–322.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД НА КИЛЕ ТОРОСА В ШИРОКОЙ ПОЛОСЕ ЧАСТОТ

© 2023 г. В. А. Григорьев^{a, b, *}, А. А. Луньков^{b, c}

^aВоронежский государственный университет,
Университетская пл. 1, Воронеж, 394018 Россия

^bИнститут общей физики им. А.М. Прохорова Российской Академии наук,
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

^cМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская 5, Москва, 105005 Россия

*e-mail: grig4@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 09.02.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

В рамках численного моделирования исследуется возможность дистанционного акустического мониторинга килей торосов в мелководных волноводах, покрытых льдом. Рассматривается среднестатистический для арктического региона торос с осадкой киля 8 м, помещенный в волновод глубиной 40 м. Предполагается, что гряда тороса перпендикулярна акустической трассе, длина которой 10 км. Используется точечный широкополосный источник и вертикальная приемная антенна, необходимая для выделения модальных амплитуд. Показано, что взаимодействие мод на киле достаточно ярко проявляется в модуляции амплитуд мод в широкой полосе частот. Предложена методика анализа этой модуляции с помощью построения кепстрограмм (спектрограмм от спектра). На кепстрограммах выявляются дисперсионные кривые, соответствующие парам взаимодействующих мод. Затем по расположению дисперсионных кривых на кепстрограмме можно оценить местоположение киля на трассе.

Ключевые слова: мелкое море, модуляция амплитуды моды, кепстрограмма, дисперсионная кривая

DOI: 10.31857/S0320791923600178, **EDN:** AFIOKL

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью арктического ледяного покрова являются торосы — хаотические нагромождения обломков льда, образующиеся в результате давления ледяных полей друг на друга. Торосы возникают при разломах льдов небольшой толщины (молодых или однолетних) и формируют на ледяном покрове протяженные гряды. В поперечном сечении гряды торосов состоят из надводной и подводной частей (паруса и киля), причем осадка киля в 3–5 раз больше высоты паруса [1] (рис. 1).

Масса льда в торосах составляет около 40% от всей массы льда Арктики [2]. По этой причине торосы играют важную роль в процессах теплообмена между океаном и атмосферой, оказывают влияние на климатические изменения в целом [3]. Кроме того, большая концентрация льда в торосах, особенно в киле, достигающего порою дна, представляет серьезную проблему для судоходства, угрожает эксплуатации нефтегазовых платформ, подводных трубопроводов и линий связи.

Обычно торосы имеют осадку киля около 10 м [1, 4]. Наблюдаются также экстремальные кили с осадкой до 40–50 м [2, 5]. Двигаясь в составе дрейфующих льдов на морских акваториях с глубинами до 50 м, кили торосов цепляют дно и пропахивают глубокие борозды [6]. Заметим, что айсберги в отличие от торосов имеют большие размеры килей. Кили крупных айсбергов оставляют следы на дне до глубин 150 м [6].

Исследования распространения звука в арктических волноводах при наличии неоднородного ледового покрова начали проводиться достаточно давно [7, 8], но продолжают оставаться актуальными и в настоящее время [9, 10]. Это связано с активным освоением арктического региона в последнее десятилетие, что требует адаптации алгоритмов звукоподводной связи [11] и методов акустического мониторинга подледной среды [12]. Отметим, что в указанных выше работах в основном рассматриваются условия глубокого океана и/или решается прямая задача оценки дополнительных потерь при распространении, связанных с наличием килей на протяженных трассах.



Рис. 1. Схема поперечного сечения гряды тороса.

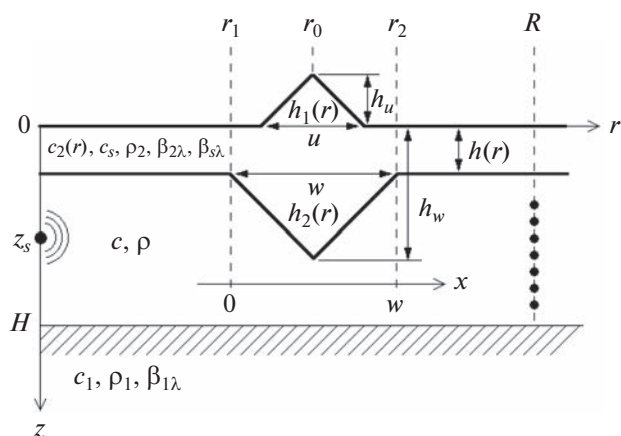


Рис. 2. Модель тороса и волновода.

В настоящей работе в рамках численного моделирования исследуется возможность решения обратной задачи, а именно дистанционного акустического мониторинга килей торосов в шельфовой зоне. В качестве первого приближения будет рассматриваться один среднестатистический торос с осадкой киля 8 м, помещенный в однородный по горизонтали волновод глубиной 40 м. (Средняя глубина Арктического шельфа России не превышает 50 м). Гряда тороса перпендикулярна акустической трассе, длина которой 10 км. Наличие тороса, прежде всего киля, нарушает однородность волновода по горизонтали, что в рамках модового описания распространения звука приводит к взаимодействию мод на киле. В результате на приемнике наблюдается возмущенное звуковое поле, отличное от невозмущенного поля в отсутствие тороса. В частотной области возмущение проявляется в модуляции амплитуд отдельных мод, подобно тому, как это наблюдалось в численных экспериментах [13] при взаимодействии мод на сосредоточенной неоднородности в виде солитона внутренних волн или локаль-

ном поднятии дна. Анализируя период этой модуляции, можно выделить информацию о местоположении киля на трассе.

1. МОДЕЛЬ ТОРОСА И ВОЛНОВОДА

1.1. Модель тороса

На рис. 1 показана схема поперечного сечения тороса. Парус и киль состоят из нагромождения ледяных блоков, между которыми имеются пустоты, заполненные воздухом (в парусе) и водой (в киле). Вода в верхней части киля на уровне поверхностного льда замерзает, образуя консолидированный слой, состоящий только из льда.

Используем простейшую геометрическую модель тороса в виде двух равнобедренных треугольников [14] с вершинами на одной вертикали (рис. 2). Параметры треугольников выберем в соответствии с [1] как средние параметры торосов, измеренные в ряде районов Мирового океана Северного полушария: $h_u = 2$ м, $h_w = 8$ м, $u = 12$ м, $w = 36$ м (обозначения указаны на рис. 2). Толщину льда за пределами тороса примем равной $h_0 = 1$ м.

Пусть центр тороса находится на горизонтальном расстоянии r_0 от начала координат (рис. 2). Введем обозначения: $r_1 = r_0 - w/2$, $r_2 = r_0 + w/2$. Тогда верхняя $h_1(r)$ и нижняя $h_2(r)$ границы льда описываются формулами:

$$h_1(r) = \begin{cases} -2h_u u^{-1}(r - r_0) - h_u, & r_0 - u/2 \leq r \leq r_0, \\ 2h_u u^{-1}(r - r_0) - h_u, & r_0 \leq r \leq r_0 + u/2, \\ 0, & r \notin [r_0 - u/2, r_0 + u/2], \end{cases} \quad (1)$$

$$h_2(r) = \begin{cases} 2(h_w - h_0)w^{-1}(r - r_0) + h_w, & r_1 \leq r \leq r_0, \\ -2(h_w - h_0)w^{-1}(r - r_0) + h_w, & r_0 \leq r \leq r_2, \\ h_0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases} \quad (2)$$

Акустические параметры льда за пределами тороса возьмем из [15]: $c_2^0 = 3500$ м/с — скорость продольных волн, $c_s = 1800$ м/с — скорость поперечных волн, $\rho_2 = 900$ кг/м³ — плотность льда, $\beta_{2\lambda} = 0.3$ дБ/λ — коэффициент затухания продольных волн, $\beta_{s\lambda} = 1$ дБ/λ — коэффициент затухания поперечных волн.

Акустические параметры тороса будем считать соответствующими приведенным выше параметрам сплошного льда за исключением скорости продольных волн. Полагаем, что она зависит от горизонтальной координаты r и линейно меняется от $c_2^0 = 3500$ м/с на краях тороса до $c_2^1 = 2600$ м/с в центре. Таким образом, скорость $c_2(r)$ продольных волн в торосе и за его пределами описывается формулой:

$$c_2(r) = \begin{cases} -2(c_2^0 - c_2^1)w^{-1}(r - r_0) + c_2^1, & r_1 \leq r \leq r_0, \\ 2(c_2^0 - c_2^1)w^{-1}(r - r_0) + c_2^1, & r_0 \leq r \leq r_2, \\ c_2^0, & r \notin [r_1, r_2]. \end{cases} \quad (3)$$

Объясним выбор приведенных выше параметров внутри торося. Средняя пористость торося составляет около 0.2 [1] (объем незанятого льдом пространства 20%, объем льда 80%). Лды торося можно считать неподвижными для звука и составляющими жесткий каркас. По этой причине скорость поперечных волн в торося можно считать примерно такой же, как в сплошном льду. Скорость продольных волн в торося оценим по подводной части киля в рамках двухкомпонентной модели среды лед–вода, пренебрегая меньшими по объему парусом и консолидированным слоем. Согласно [16] для двухкомпонентной среды имеем следующее выражение для скорости продольных волн:

$$c_p = [((1 - \kappa)\rho_2 + \kappa\rho)((1 - \kappa)K_2 + \kappa K)]^{-1/2}, \quad (4)$$

где κ – пористость торося, ρ – плотность воды, K и K_2 – коэффициент сжимаемости воды и льда. Для чистой воды безо льда имеем $\kappa = 1$ и при заданных значениях для воды $\rho = 1000$ кг/м³, $c_p = c = 1460$ м/с (см. раздел 1.2) из (4) получаем $K = 4.7 \times 10^{-10}$ м²/Н. Для сплошного льда без воды имеем $\kappa = 0$ и при заданных выше значениях для льда $\rho_2 = 900$ кг/м³, $c_p = c_2^0 = 3500$ м/с из (4) получаем $K_2 = 9 \times 10^{-11}$ м²/Н. Вычисленные коэффициенты K и K_2 соответствуют экспериментальным значениям. Используя эти K и K_2 при пористости $\kappa = 0.2$, из (4) получаем $c_p = 2600$ м/с. Это значение скорости продольных волн примем в центре торося: $c_2(r_0) = c_2^1 = 2600$ м/с.

Ввиду малого значения средней пористости торося другие его акустические параметры (плотность, коэффициенты затухания продольных и поперечных волн) полагаем соответствующими сплошному льду.

1.2. Модель волновода

Модель волновода, покрытого льдом и содержащего один торося, представим в каждом поперечном сечении как трехслойное полупространство: лед–вода–дно.

Лед: $h_1(r) \leq z < h_2(r)$, $c_2(r)$ – скорость продольных волн, c_s – скорость поперечных волн, ρ_2 – плотность, $\beta_{2\lambda}$ и $\beta_{s\lambda}$ – коэффициенты затухания продольных и поперечных волн. Значения указанных параметров приведены в разделе 1.1.

Вода: $h_2(r) \leq z \leq H$, $H = 40$ м, $c = 1460$ м/с – скорость звука, $\rho = 1000$ кг/м³ – плотность.

Дно: $z > H$, $c_1 = 1600$ м/с – скорость звука, $\rho_1 = 1600$ кг/м³ – плотность, $\beta_{1\lambda} = 0.33$ дБ/λ – коэффициент затухания звука в дне.

2. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ В ВОДНОМ СЛОЕ

Пусть в системе координат (r, z) (рис. 2) координаты точечного источника $(0, z_s)$, где $h_0 < z_s < H$, а координаты приемника (R, z) . Запишем акустическое давление в точке приема на частоте $\omega = 2\pi f$ в виде: $p = \text{Re}\{P \exp(-i\omega t)\}$, где P – комплексная амплитуда давления, t – время. Согласно модовой теории в пренебрежении горизонтальной рефракцией поле P для неоднородного волновода (неоднородность – это торося) представляется в виде [17]

$$P = \sum_{m=1}^M C_m(R) \frac{\psi_m(R, z)}{\sqrt{q_m(R)R}} \exp\left(i \int_0^R q_m(r) dr\right), \quad (5)$$

где M – учитываемое число мод, $C_m(r)$ – модовые коэффициенты, $\psi_m(r, z)$ и $\xi_m(r) = q_m(r) + i\sigma_m(r)$ – нормированные собственные функции и собственные значения, определяемые из решения задачи Штурма–Лиувилля [18]:

$$\begin{aligned} \psi_m'' + \epsilon_m^2 \psi_m &= 0, \quad h_2 < z < H, \\ \psi_m(h_2) + g_{2m} \psi_m'(h_2) &= 0, \\ \psi_m(H) + g_m \psi_m'(H) &= 0, \\ \int_{h_2}^H \psi_m^2(z) dz + b_m \psi_m^2(H) &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрих означает производную по z , величины в аргументах функций соответствуют значениям переменной z ; ϵ_m , g_{2m} , g_m , b_m – значения функций $\epsilon(\xi)$, $g_2(\xi)$, $g(\xi)$, $b(\xi)$ при $\xi = \xi_m$:

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi) &= \sqrt{k^2 - \xi^2}, \\ g_2 &= \frac{m_2 a^2 (A_{41} + A_{42}) + 2d(aA_{44} - D)}{k_s^4 2aA_{32} + 2dA_{34} - D}, \\ g &= \frac{im_1}{\epsilon_1}, \quad b(\xi) = \frac{i}{2m_1 \epsilon_1}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \\ k_{1,2,s} &= \frac{\omega}{\dot{c}_{1,2,s}}, \quad \dot{c}_{1,2,s} = \frac{c_{1,2,s}}{1 + i\alpha_{1,2,s}/2}, \\ \alpha_{1,2,s} &= \frac{\beta_{1\lambda, 2\lambda, s\lambda} [\text{дБ}/\lambda]}{27.3}, \quad m_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{\rho}, \\ \epsilon_1 &= i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad \epsilon_{2,s} = \sqrt{k_{2,s}^2 - \xi^2}, \\ a &= k_s^2 - 2\xi^2, \quad d = 2i\epsilon_s \xi^2, \\ E_{2,s} &= \exp(i\epsilon_{2,s} h), \quad h = h_2 - h_1, \end{aligned}$$

$D = \det \mathbf{A}$ — определитель матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2i\varepsilon_2 E_2^{-1} & 2i\varepsilon_2 E_2 & aE_S^{-1} & aE_S \\ aE_2^{-1} & aE_2 & -dE_S^{-1} & dE_S \\ a & a & -d & d \\ i\varepsilon_2 & -i\varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы $\mathbf{A}$ (первый индекс — строка, второй индекс — столбец, M_{ij} — минор матрицы $\mathbf{A}$, равный определителю оставшейся матрицы при вычеркивании i -й строки и j -го столбца).

Все радикалы $\sqrt{*}$ в приведенных выше формулах и далее по тексту понимаются однозначно как главное значение¹ комплексного квадратного корня, у которого $\operatorname{Re} \sqrt{*} > 0$. Если $\operatorname{Re} \sqrt{*} = 0$, то выбирается значение, у которого $\operatorname{Im} \sqrt{*} > 0$. Данное правило соответствует функции `sqrt` в пакете прикладных программ MATLAB. В соответствии с данным правилом принципиальная при решении (6) величина ε_1 выбрана в виде $\varepsilon_1 = i\sqrt{\xi^2 - k_1^2}$, что приводит к EJP-разрезу на комплексной плоскости ξ (гипербола $\operatorname{Im} \xi = \operatorname{Re} k_1 \operatorname{Im} k_1 / \operatorname{Re} \xi$ при $\operatorname{Re} \xi \leq \operatorname{Re} k_1$). EJP-разрез дает полное и конечное число нормальных мод в результате решения (6). Заметим, что выбор величины ε_1 в виде $\varepsilon_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$ приводит к M-разрезу (гипербола $\operatorname{Im} \xi = \operatorname{Re} k_1 \operatorname{Im} k_1 / \operatorname{Re} \xi$ при $\operatorname{Re} \xi \geq \operatorname{Re} k_1$), что дает при решении (6) не только нормальные моды, но и квазимоды. Однако в данной работе квазимоды не учитываются ввиду их малого вклада. Запись поля в виде (5) означает также, что не учитывается непрерывный спектр. Подробнее о различных разрезах и классификации мод см. в [19, 20].

Поскольку $c = \text{const}$, то из (6) находим уравнение на собственные значения ξ_m :

$$(1 + g_{2m} g_m \varepsilon_m^2) \sin(\varepsilon_m H_w) + \varepsilon_m (g_m - g_{2m}) \cos(\varepsilon_m H_w) = 0, \quad (7)$$

где $H_w = H - h_2$ — толщина водного слоя. Собственные функции при $h_2 \leq z \leq H$ равны:

$$\begin{aligned} \psi_m(z) &= N_m \bar{\psi}_m(z), \\ \bar{\psi}_m(z) &= \sin[\varepsilon_m(z - h_2)] - \\ &- g_{2m} \varepsilon_m \cos[\varepsilon_m(z - h_2)], \\ N_m &= \left[\int_{h_2}^H \bar{\psi}_m^2(z) dz + b_m \bar{\psi}_m^2(H) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

¹ Второе, не главное значение комплексного квадратного корня отличается от главного значения знаком.

Заметим, что везде в области вне тороса ($r \notin [r_1, r_2]$) собственные функции и собственные значения не зависят от r . Обозначим их соответственно: $\psi_m^0(z)$ и $\xi_m^0 = q_m^0 + i\sigma_m^0$. Для области внутри тороса ($r \in [r_1, r_2]$) удобно ввести новую переменную: $x = r - r_1$, $0 \leq x \leq w$. Тогда в (5) имеем: $\psi_m(R, z) = \psi_m^0(z)$, $q_m(R) = q_m^0$,

$$\begin{aligned} \int_0^R q_m(r) dr &= \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^{r_2} + \int_{r_2}^R = \\ &= q_m^0(R - w) + \int_0^w q_m^x(x) dx, \end{aligned}$$

где $q_m^x(x)$ — реальная часть собственных значений внутри тороса как функция x .

Коэффициенты $C_m(r)$ находятся из решения системы дифференциальных уравнений взаимодействия мод в неоднородном волноводе. Воспользуемся уравнениями, полученными в [21], которые применительно к нашему случаю имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M [(\delta_{mn} - I_{mn}) Q_n] \frac{dC_n}{dr} = \\ = - \sum_{n=1}^M C_n [V_{mn} + \sigma_n (\delta_{mn} - I_{mn})] Q_n, \end{aligned} \quad (9)$$

где $m = 1, \dots, M$, $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$,

$$I_{mn} = \frac{i\psi_m(r, H)\psi_n(r, H)}{m_1(\varepsilon_{1m} + \varepsilon_{1n})},$$

$$Q_n = \sqrt{q_n(r)} \exp \left(i \int_0^r q_n(r') dr' \right),$$

$$V_{mn} = \int_{h_2(r)}^H \psi_m \frac{\partial \psi_n}{\partial r} dz$$

— коэффициенты взаимодействия мод. Начальные условия для системы (9) при $r = 0$ задаются формулой: $C_m(0) = \sqrt{\rho c W} \exp(i\pi/4) \psi_m^0(z_s)$, где W — мощность источника (при расчетах $W = \text{const}$ для всех рассматриваемых частот звука).

Заметим, что коэффициенты взаимодействия мод в (9) выражаются через интегралы в конечных пределах (по водному слою). Это удобнее с вычислительной точки зрения, чем использование коэффициентов взаимодействия мод, выражающихся через интегралы в бесконечных пределах (по водному слою и дну), что имеет место в других известных уравнениях взаимодействия мод, аналогичных (9) [21]. Другое преимущество

системы (9) состоит в возможности учета взаимодействия не только нормальных мод, но и квазимод [21]. (В нашем случае это преимущество не используется, т.к. квазимоды не рассматриваются).

Заметим также, что в [21] система вида (9) была получена для неоднородного волновода с горизонтальными границами раздела сред. В нашем случае граница льда на киле не горизонтальна и к сделанным в [21] стандартным приближениям в процессе вывода (9) нужно добавить допущение о возможности замены компонент поля вдоль нормали к границе льда на компоненты вдоль оси z в исходных граничных условиях (выражения (A5) в [18]). Только в этом случае мы приходим к собственным числам и собственным функциям волновода сравнения (6), через которые выражаются коэффициенты $C_m(r)$ согласно (9).

С физической точки зрения игнорирование угла между нормалью к границе льда и вертикалью означает неучет отраженного в обратном направлении поля от кия. Таким образом, выражения (5) и (9) учитывают только прямое поле и не учитывают отраженного поля. При выбранных выше параметрах тороса вектор нормали к боковой грани кия отклонен от вертикали на 21° . Это нельзя назвать малой величиной, поэтому отражение от кия может быть заметно. Вместе с этим, киль занимает 20% ширины водного слоя. При крайнем допущении полного отражения поля от кия (что недостижимо даже для кия с вертикальными стенками) прямое поле в волноводе все равно будет доминировать на 80%, и выражения (5) и (9) можно считать вполне адекватными (см. также замечание в конце раздела 3).

Введем в (9) матричные обозначения: $\mathbf{X} = ((\delta_{mn} - I_{mn})Q_n)$, $\mathbf{W} = (-V_{mn}Q_n)$, $\mathbf{Y} = \text{diag}(\sigma_n)$, $\mathbf{C} = (C_m)$, где m – номер строки, n – номер столбца, $\mathbf{Y}$ – диагональная матрица, составленная из строки (σ_n) . Тогда (9) приобретает вид:

$$\mathbf{X} \frac{d\mathbf{C}}{dr} = (\mathbf{W} - \mathbf{XY})\mathbf{C},$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{C}}{dr} = \mathbf{BC}, \quad (10)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{W} - \mathbf{Y}$.

Рассмотрим три области:

1) $0 \leq r \leq r_1$. Здесь нет взаимодействия мод, т.е. $V_{mn} = 0$, $\mathbf{W} = 0$, $\mathbf{B} = -\mathbf{Y}$. Получаем систему независимых уравнений $\frac{d\mathbf{C}}{dr} = -\mathbf{YC}$, что эквивалентно

$\frac{dC_m}{dr} = -\sigma_m^0 C_m$. Тогда решение имеет вид

$$C_m(r) = C_m(0) \exp(-\sigma_m^0 r), \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad (11)$$

которое при $r = r_1$ равно

$$C_m(r_1) = C_m(0) \exp(-\sigma_m^0 r_1). \quad (12)$$

2) $r_1 \leq r \leq r_2$. Здесь необходимо решить (9) или (10) с начальным условием (12). Перейдем к переменной $x = r - r_1$, $0 \leq x \leq w$. Система (9) при этом приобретает вид:

$$\sum_{n=1}^M [(\delta_{mn} - I_{mn}^x) Q_n^x] \frac{dC_n^x}{dx} = - \sum_{n=1}^M C_n^x [V_{mn}^x + \sigma_n^x (\delta_{mn} - I_{mn}^x)] Q_n^x, \quad (13)$$

где

$$I_{mn}^x = \frac{i\Psi_m^x(x, H)\Psi_n^x(x, H)}{m_1(\epsilon_{lm} + \epsilon_{ln})},$$

$$Q_n^x = \sqrt{q_n^x(x)} \exp\left(i \int_0^x q_n^x(x') dx'\right),$$

$$V_{mn}^x = \int_{h_2(x)}^H \Psi_m^x \frac{\partial \Psi_n^x}{\partial x} dz,$$

$C_m^x(x) = C_m(x + r_1) \exp(iq_m^0 r_1)$, $\Psi_m^x(x, z)$ и $\xi_m^x(x) = q_m^x(x) + i\sigma_m^x(x)$ – собственные функции и собственные значения внутри тороса, как функции x . Начальные условия для системы (13): $C_m^x(0) = C_m(r_1) \exp(iq_m^0 r_1)$. Введем матрицы: $\mathbf{X}_x = ((\delta_{mn} - I_{mn}^x)Q_n^x)$, $\mathbf{W}_x = (-V_{mn}^x Q_n^x)$, $\mathbf{Y}_x = \text{diag}(\sigma_n^x)$, $\mathbf{C}_x = (C_m^x)$. Тогда (13) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{C}_x}{dx} = \mathbf{B}_x \mathbf{C}_x, \quad (14)$$

где $\mathbf{B}_x = \mathbf{X}_x^{-1}\mathbf{W}_x - \mathbf{Y}_x$. Если $\mathbf{S}(x)$ – матрица фундаментальных решений [22]:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dx} = \mathbf{B}_x \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{I}, \quad (15)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, то $\mathbf{C}_x(x) = \mathbf{S}(x)\mathbf{C}_x(0)$ или при $x = w$: $\mathbf{C}_x(w) = \mathbf{S}(w)\mathbf{C}_x(0)$. Переходя к исходным коэффициентам C_m и переменной r , получаем

$$C_m(r) = \sum_{n=1}^M S_{mn}(r - r_1) C_n(r_1) \exp\left[i(q_n^0 - q_m^0)r_1\right], \quad (16)$$

$$r_1 \leq r \leq r_2,$$

что при $r = r_2$ равно

$$C_m(r_2) = \sum_{n=1}^M S_{mn}(w) C_n(r_1) \exp\left[i(q_n^0 - q_m^0)r_1\right]. \quad (17)$$

3) $r_2 \leq r \leq R$. Здесь нет взаимодействия мод, поэтому аналогично области 1 получаем:

$$C_m(r) = C_m(r_2) \exp[-\sigma_m^0(r - r_2)], \quad (18)$$

$$r_2 \leq r \leq R,$$

что при $r = R$ равно

$$C_m(R) = C_m(r_2) \exp[-\sigma_m^0(R - r_2)] \quad (19)$$

или в развернутом виде

$$C_m(R) = \left\{ \sum_{n=1}^M S_{mn}(w) C_n(0) \exp[i(\xi_n^0 - \xi_m^0)r_1] \right\} \times \exp[-\sigma_m^0(R - w)]. \quad (20)$$

Таким образом, выражение (5) принимает вид:

$$P = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{n=1}^M S_{mn}(w) C_n(0) \exp[i(\xi_n^0 - \xi_m^0)r_1] \right\} \times \frac{\Psi_m^0(z)}{\sqrt{q_m^0 R}} \exp\left[i \int_0^w q_m^0(x) dx + i\xi_m^0(R - w)\right]. \quad (21)$$

3. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Запишем (21) в виде

$$P = \sum_{m=1}^{M(\omega)} A_m(\omega, r_0) \Psi_m^0(\omega, z), \quad (22)$$

где явно введены зависимости от частоты ω и от положения r_0 тороса, $A_m(\omega, r_0)$ — модальные амплитуды (или коэффициенты возбуждения мод), соответствующие (21).

Найдем квадраты модуля модальных амплитуд

$$J_m(\omega, r_0) = |A_m(\omega, r_0)|^2:$$

$$J_m(\omega, r_0) = \left| \sum_{n=1}^{M(\omega)} S_{mn}(\omega, w) C_n(\omega, 0) \exp[i(\xi_n^0(\omega) - \xi_m^0(\omega))r_1] \right|^2 \frac{\exp[-2\sigma_m^0(\omega)(R - w)]}{q_m^0(\omega) R}, \quad (23)$$

которые кратко можно записать в виде

$$J_m(\omega, r_0) = \frac{|C_m(\omega, r_0, R)|^2}{q_m^0(\omega) R}, \quad (24)$$

где $C_m(\omega, r_0, R)$ — модовые коэффициенты (20) с указанными зависимостями от ω и r_0 .

Заметим, что для волновода без тороса квадраты модуля модальных амплитуд $J_m^0(\omega) = |A_m^0(\omega)|^2$ имеют вид

$$J_m^0(\omega) = \frac{\rho c W |\Psi_m^0(\omega, z_s)|^2 \exp[-2\sigma_m^0(\omega)R]}{q_m^0(\omega) R}. \quad (25)$$

Выражения (23) вычислим при $R = 10$ км, различных глубинах источника z_s и в полосе частот от десятков до сотен Гц.

Далее, проведем анализ с целью определения положения r_0 кия по зависимостям $J_m(\omega, r_0)$. Для этого предлагается рассмотреть кепстрограмму (скользящее преобразование Фурье с окном $\Delta\omega$ от спектра):

$$G_m(\Omega, \omega_0; r_0) = \left| \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} [J_m(\omega, r_0) - \bar{J}_m(\omega_0, r_0)] \exp(i\Omega\omega) d\omega \right|, \quad (26)$$

$$\text{где } \bar{J}_m(\omega_0, r_0) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} J_m(\omega, r_0) d\omega.$$

Пусть величина $\Delta\omega$ такова, что в этой полосе в выражении (23) можно считать все переменные константами, кроме осциллирующего члена $\exp[i(q_n^0(\omega) - q_m^0(\omega))r_1]$, в котором полагаем линей-

ную зависимость $q_m^0(\omega) = \frac{dq_m^0}{d\omega}(\omega - \omega_0) + q_m^0(\omega_0)$,

где производная берется при ω_0 . Тогда (23) можно записать в виде

$$J_m = \left| \sum_{n=1}^M a_{mn} \exp\left[i\left(\frac{dq_n^0}{d\omega} - \frac{dq_m^0}{d\omega}\right)r_1\omega\right] \right|^2 \approx \left| \sum_{n=1}^M a_{mn} \exp(-i\Omega_{mn}\omega) \right|^2 = \sum_{n,l=1}^M a_{mn} a_{ml}^* \exp(i\Omega_{nl}\omega), \quad (27)$$

где учтено $r_1 \approx r_0$, $\Omega_{mn} = \left(\frac{dq_m^0}{d\omega} - \frac{dq_n^0}{d\omega}\right)r_0$, a_{mn} — комплексные константы, определяемые из (23), звездочка означает комплексное сопряжение. Константы a_{mn} представляют собой почти единичную матрицу, что связано с почти единичной матрицей S_{mn} . По этой причине $|a_{mn} a_{ml}^*| \ll |a_{mm} a_{ml}^*|$ и $|a_{mn} a_{ml}^*| \ll |a_{mn} a_{mm}^*|$, где $n \neq m$, $l \neq m$. Оставляя в (27) только значимые слагаемые, получаем

$$\begin{aligned}
J_m &\approx \sum_{n=1}^M a_{mn} a_{mn}^* \exp(i\Omega_{mn}\omega) + \\
&+ \sum_{n=1}^M a_{mn} a_{mm}^* \exp(i\Omega_{nm}\omega) = \\
&= \sum_{n=1}^M b_{mn} \cos(\Omega_{mn}\omega + \varphi_{mn}),
\end{aligned} \quad (28)$$

где $b_{mn} = 2|a_{mn}a_{mn}|$, $\varphi_{mn} = \arg(a_{mn}) - \arg(a_{mm})$.

Выражение (28) показывает, что в кепстрограмме $G_m(\Omega, \omega_0; r_0)$ будут наблюдаться частоты модуляций амплитуд мод вида

$$|\Omega_{mn}| = \left| \frac{dq_m^0}{d\omega} - \frac{dq_n^0}{d\omega} \right| r_0. \quad (29)$$

На плоскости (Ω, ω_0) эти частоты модуляций представляют собой некоторые линии, которые будем называть дисперсионными кривыми. Зависимость от r_0 проявляется в пропорциональном масштабировании (растягивании) кепстрограммы вдоль оси Ω .

Заметим, что дисперсионные кривые определяются параметрами волновода без тороса и не зависят от свойств самого тороса (или любой другой локальной неоднородности), кроме расстояния r_0 от источника. По этой причине обсуждаемый в разделе 2 вопрос точности описания поля (неучет отраженного поля от кия) важен для решения прямой задачи, но не играет принципиальной роли для решения обратной задачи. Действительно, более или менее точное решение прямой задачи приведет только к изменению яркости кепстрограммы на дисперсионных кривых, но не изменит расположения самих кривых, по которым оценивается положение кия на трассе.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

4.1. Модальные амплитуды

Расчеты модальных амплитуд проводились в полосе 80–520 Гц с шагом 1 Гц. Учитывались только те моды, которые являются распространяющимися (т.е. удовлетворяющими условию $\text{Re } k_1 < \text{Re } \xi_m < k$ и имеющими минимальное затухание) на протяжении всего канала, включая самый узкий участок под пиком кия. Например, для частоты 300 Гц число распространяющихся мод вне кия равно 7, а в сечении, проходящем через пик кия, таких мод 5. Поэтому при расчетах по формуле (23) бралось 5 мод. Количество учитываемых мод во всех диапазонах частот приведено в табл. 1.

На рис. 3 приведены примеры вычисленных согласно (23) и (25) частотных зависимостей $J_m(\omega, r_0)$ для волновода с торосом (синяя линия) и

Таблица 1. Количество учитываемых мод

Диапазон частот, Гц	Число мод
80–160	2
161–208	3
209–252	4
253–308	5
309–363	6
364–419	7
420–475	8
476–520	9

$J_m^0(\omega)$ для волновода без тороса (красная линия). Наблюдающаяся в присутствии тороса модуляция амплитуд мод содержит информацию о местоположении r_0 кия. Кроме того, картина модуляции зависит от глубины источника z_s , поскольку глубина источника задает тот или иной набор мод в канале.

На рис. 4 для волновода без тороса показаны величины J_m^0 на частоте 300 Гц для всех распространяющихся мод и различных глубин источника. Хорошо видно, как меняется распределение энергии по модам в зависимости от глубины источника. Рис. 4 позволяет предсказать, какие частоты модуляции из полного спектра (29) будут наблюдаться в волноводе с торосом. Например, при $z_s = 10$ м в канале доминируют первые три моды. Если смотреть спектр модуляции первой моды, то в нем будут доминировать частоты (дисперсионные кривые) $|\Omega_{12}|$ и $|\Omega_{13}|$. При $z_s = 15$ м рассмотрение спектра модуляции второй моды должно обнаруживать частоты $|\Omega_{21}| = |\Omega_{12}|$ и $|\Omega_{24}|$.

На рис. 5 показаны примеры расчета кепстрограмм $G_m(\Omega, \omega_0; r_0)$ согласно (26). При этом была подобрана полоса $\Delta\omega/(2\pi) = 80$ Гц так, чтобы линии в кепстрограмме выглядели наиболее отчетливо. Соответствующие дисперсионные кривые, рассмотренные в предыдущем абзаце, хорошо ложатся на наблюдаемые частоты модуляции. На рис. 5а–5в рассматривается одна и та же ситуация ($m = 1$, $z_s = 10$ м), но при разных положениях кия на трассе: $r_0 = 7.5, 5, 2.5$ км (длина трассы 10 км). Видно, что по мере приближения кия к источнику звука (по мере уменьшения r_0) кепстрограмма пропорционально сжимается вдоль горизонтальной оси. При этом на рис. 5в две близкорасположенные дисперсионные кривые сливаются в одну, что необходимо учитывать при определении величины r_0 . В этом случае следует ограничить максимальную частоту сигнала до 250 Гц или выбрать глубину источника так, чтобы не наблюда-

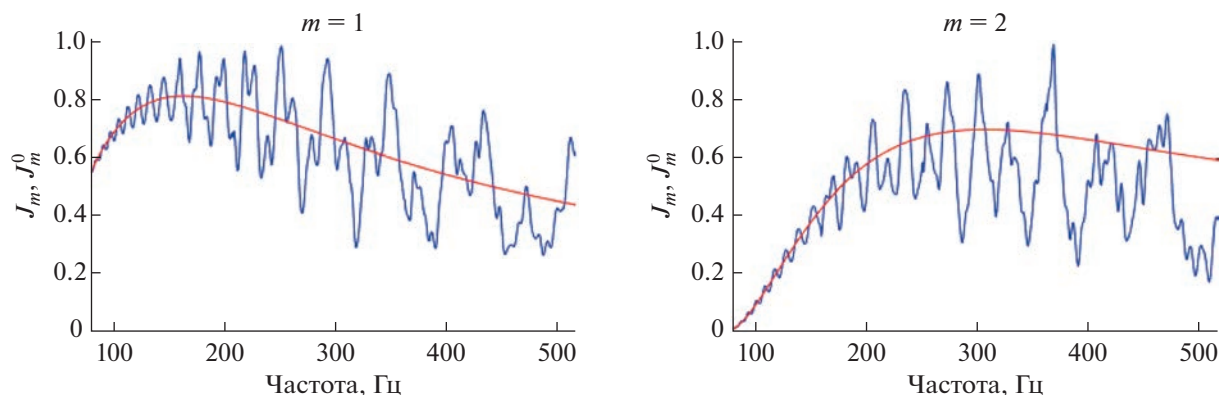


Рис. 3. Зависимости $J_m(\omega, r_0)$ для волновода с торосом (синяя линия) и $J_m^0(\omega)$ для волновода без торося (красная линия). Моды $m = 1$ и $m = 2$, $z_s = 10$ м, $r_0 = 7.5$ км.

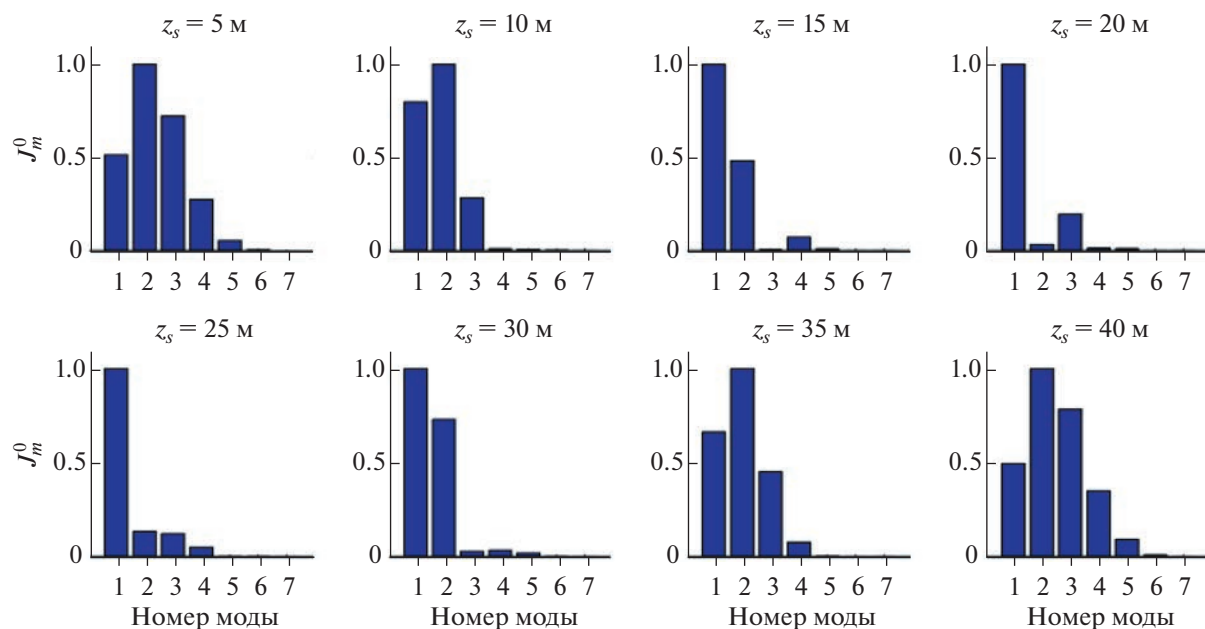


Рис. 4. Квадраты модуля модальных амплитуд J_m^0 в волноводе без торося на расстоянии 10 км на частоте 300 Гц при различных глубинах источника.

лись две близкорасположенные дисперсионные кривые, которые могли бы слиться (например, при $z_s = 20$ м в кепстрограмме первой моды наблюдается одна кривая $|\Omega_{13}|$). Можно использовать также способ, предложенный в [13], — анализировать интервал между соседними максимумами непосредственно по картине модуляции амплитуды моды, без взятия кепстрограммы.

4.2. Выделение модальных амплитуд

Зададимся вопросом, насколько хорошо модальные амплитуды A_m могут быть выделены с помощью вертикальной антенны. Пусть на неко-

торой частоте ω имеем значения комплексной амплитуды $P(z_n)$, принимаемые на глубине z_n :

$$\sum_{m=1}^M A_m \psi_m^0(z_n) = P(z_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (30)$$

Значения собственных функций $\psi_m^0(z_n)$ известны. Требуется найти A_m .

Используем метод псевдообратной матрицы. Запишем (30) в матричном виде:

$$\Psi \hat{A} = P, \quad (31)$$

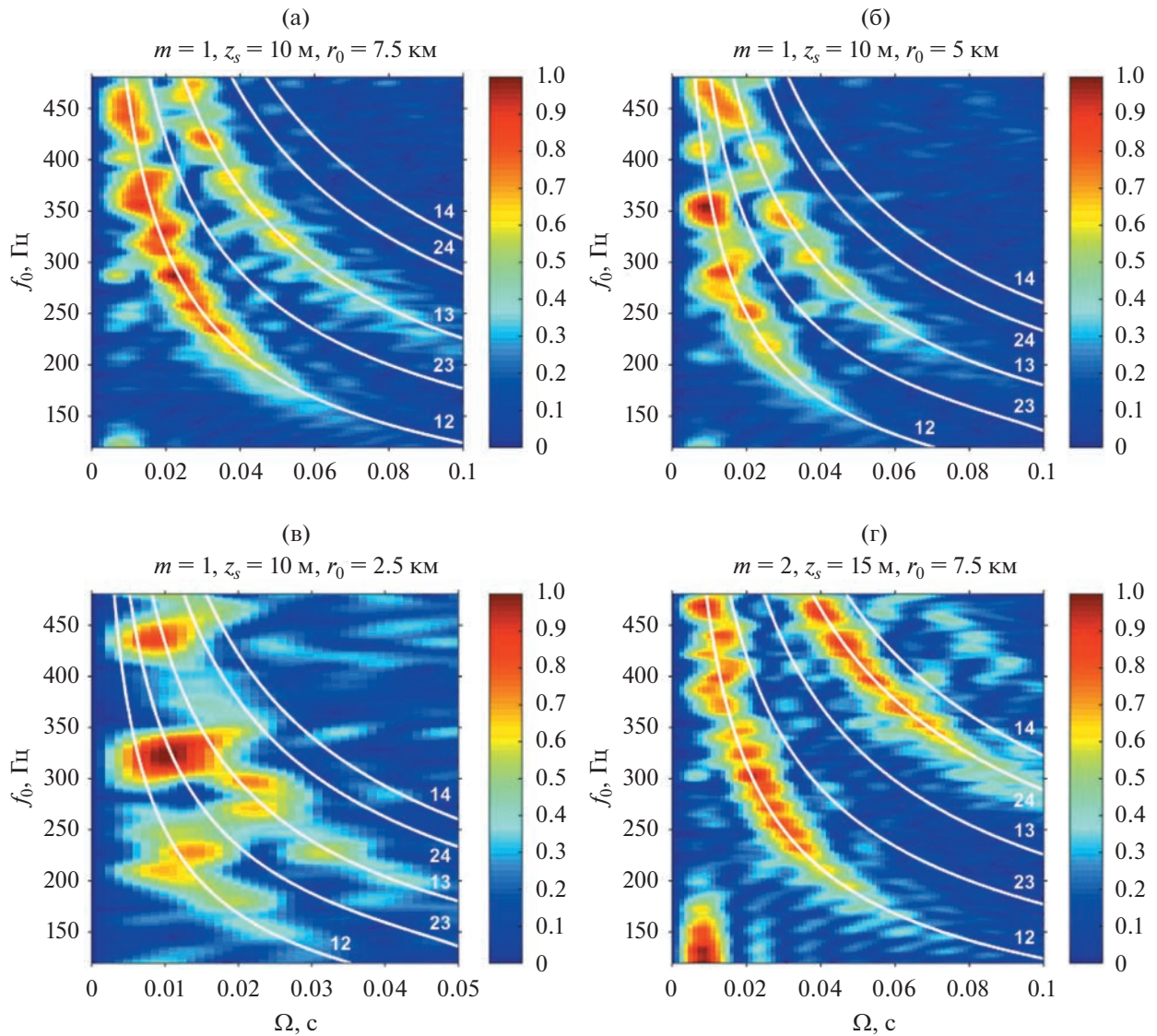


Рис. 5. Примеры кепстрограмм $G_m(\Omega, \omega_0; r_0)$ при указанных на рисунке параметрах, где $\omega_0 = 2\pi f_0$. Белые линии – дисперсионные кривые $|\Omega_{mn}|$. На рис. 5в масштаб вдоль Ω в два раза увеличен.

где $\Psi = (\psi_m^0(z_n))$ – матрица размера $N \times M$, $\hat{\mathbf{A}} = (A_m)$ – столбец размера $M \times 1$, $\mathbf{P} = (P(z_n))$ – столбец размера $N \times 1$.

Если Ψ^+ – псевдообратная матрица размера $M \times N$, то

$$\hat{\mathbf{A}} = \Psi^+ \mathbf{P}. \quad (32)$$

Заметим, что решение в виде (32) минимизирует норму $\|\Psi \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\|$ [23]. В MATLAB псевдообратная матрица вычисляется процедурой `pinv`.

Протестируем описанный выше метод выделения модальных амплитуд или, говоря иначе, метод выделения мод. Для этого сформируем со-

гласно (22) принимаемое поле. Затем выделим из этого поля пять значений A_m на каждой фиксированной частоте, используя метод псевдообратной матрицы. Расчеты показывают, что использование антенн с разным числом элементов, начиная от 40 ($z_n = 1 : 1 : 40$ м) до 5 ($z_n = 2 : 8 : 34$ м) не меняют визуального качества выделения первых пяти модальных амплитуд. При использовании 4 элементов антенны ($z_n = 2 : 10 : 32$ м) хорошо выделяются только 1 и 2 моды. Соответственно, картины кепстрограмм для 1 и 2 мод, полученные после выделения мод антенной с числом элементов более трех, практически неотличимы от идеальных кепстрограмм, вычисленных без выделения мод антенной.

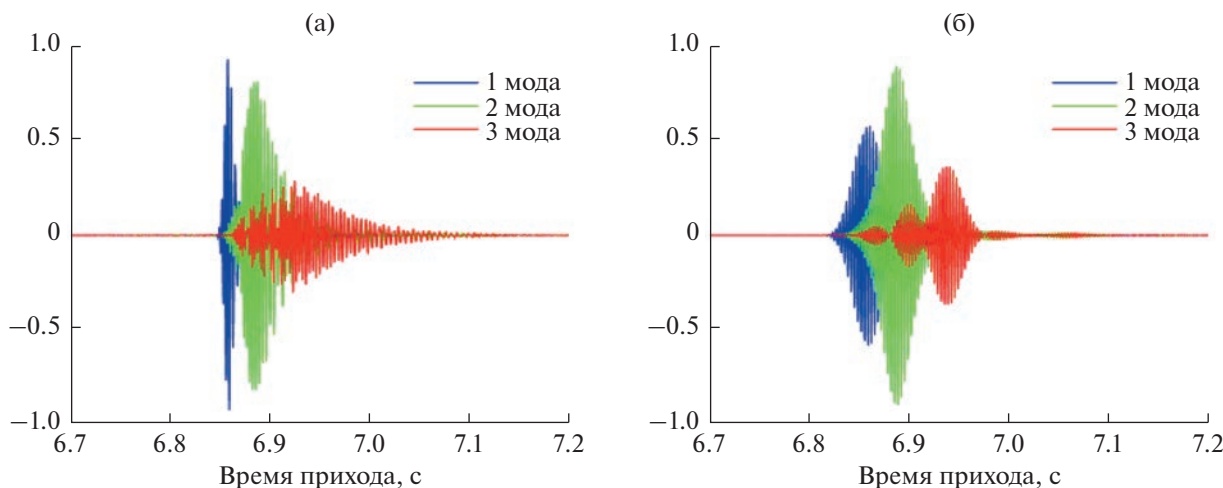


Рис. 6. Модовые импульсы в диапазонах: (а) – 300 ± 220 Гц, (б) – 300 ± 40 Гц.

4.3. Модовые импульсы

Если с помощью вертикальной антенны моды выделяются хорошо (раздел 4.2), то по времени прихода модовых импульсов на дальности 10 км моды не разделяются (рис. 6).

Поясним, как получен рис. 6. Предполагается, что излучается сигнал (импульс), амплитудный спектр которого в диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$ представляет собой колоколообразную форму с центром колокола на центральной частоте. При этом амплитуда гармоник излучаемого сигнала описывается окном Чебышева $w(\omega)$ с уровнем боковых лепестков 100 дБ (процедура `chebwin` в MATLAB), фазовый спектр излучаемого сигнала равен нулю. Во временной области амплитуда излучаемого сигнала также имеет колоколообразную форму с максимумом при $t = 0$. Принимаемый модовый импульс описывается выражением

$$p_m(t) = \operatorname{Re} \int_{\omega_1}^{\omega_2} P_m(\omega) w(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (33)$$

где $P_m(\omega) = A_m(\omega, r_0) \psi_m^0(\omega, z)$ – комплексная амплитуда m -й моды (см. (22)).

На рис. 6 показаны принимаемые на расстоянии $R = 10$ км модовые импульсы первых трех мод, полученные при излучении импульса в диапазонах 300 ± 220 Гц и 300 ± 40 Гц. Другие параметры расчетов: $r_0 = 7.5$ км, $z_s = z = 10$ м. Видно, что модовые импульсы значительно пересекаются независимо от рассматриваемой полосы частот. Следовательно, моды не могут быть успешно разделены по времени прихода для рассматриваемого расстояния между источником и приемником.

На рис. 6б обращает на себя внимание модовый импульс третьей моды. Он состоит из трех от-

дельных импульсов с разным временем прихода. Объясняется это следующим образом. В канале при рассматриваемой глубине источника доминируют первые три моды (рис. 4). Групповые скорости первых трех мод (на частоте 300 Гц) равны:

$$v_1 = 1458.0 \text{ м/с}, \quad v_2 = 1451.9 \text{ м/с}, \\ v_3 = 1441.4 \text{ м/с}.$$

Времена прихода основных по амплитуде модовых импульсов для этих трех мод соответственно равны: $t_1 = R/v_1$, $t_2 = R/v_2$, $t_3 = R/v_3$. Вместе с этим, моды 1 и 2, первоначально имеющие групповые скорости v_1 и v_2 , взаимодействуют с килем тороса и порождают другие моды, в частности,

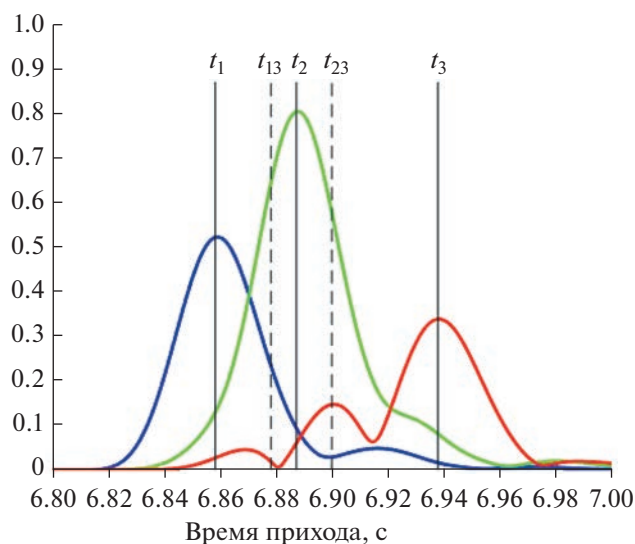


Рис. 7. Огибающие модовых импульсов, показанных на рис. 6б, с вычисленными с помощью групповых скоростей временами прихода.

моду 3, распространяющуюся после своего появления со скоростью v_3 . Таким образом, принимаемые импульсы третьей моды, порожденные от импульсов первой и второй мод, имеют времена прихода соответственно равные: $t_{13} = r_0/v_1 + (R - r_0)/v_3$, $t_{23} = r_0/v_2 + (R - r_0)/v_3$. На рис. 7 изображены огибающие модовых импульсов и показаны времена прихода, вычисленные по приведенным выше формулам. Некоторое несогласование наблюдается только между временем t_{13} и соответствующим максимумом.

Здесь следует отметить, что подход к мониторингу неоднородной подводной среды, основанный на регистрации времен прихода первичных и вторичных модовых импульсов, был впервые предложен и аналитически обоснован в работах [24, 25]. Применительно к мониторингу солитонов внутренних волн в эксперименте SWARM95 данный подход рассматривался в [26, 27]. При этом качественный анализ модовых импульсов требует применения как приемных, так и излучающих антенн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, результаты моделирования показывают возможность дистанционного акустического мониторинга килей торосов в мелководных волноводах. Физической основой такой возможности является взаимодействие мод на киле, достаточно ярко проявляющееся в модуляции амплитуд мод в широкой полосе частот. Предложена методика анализа этой модуляции с помощью построения кепстрограмм. На кепстрограммах выявляются дисперсионные кривые, соответствующие взаимодействующим модам. Затем по расположению дисперсионных кривых на кепстрограмме можно определить местоположение килея на трассе. С практической точки зрения для мониторинга торосов достаточно источника, излучающего широкополосный сигнал, и приемной вертикальной антенны, расположенной на расстоянии нескольких километров.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-10121, <https://rscf.ru/project/22-72-10121/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strub-Klein L., Sudom D.* A comprehensive analysis of the morphology of first-year sea ice ridges // *Cold Regions Science and Technology*. 2012. V. 82. P. 94–109.
2. *Wadhams P.* A farewell to ice: a report from the Arctic. Oxford University Press, 2017. 240 p.
3. *Иванов Б.В.* Особенности турбулентного теплообмена вблизи восторженных участков морского льда // *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2020. Т. 66. № 3. С. 364–380.
4. *Огородов С.А., Баранская А.В., Белова Н.Г., Кокин О.В., Маслаков А.А., Алексютина Д.М., Мазнев С.В., Новикова А.В., Селюженко В.В., Шабанова Н.Н., Вергун А.П., Кондратьева Д.М.* Атлас абразионной и ледово-экскавационной опасности прибрежно-шельфовой зоны Российской Арктики. МГУ, 2020. <https://arcticcoast.ru/>
5. *Порубаев В.С.* Максимальная осадка килей гряд торосов в глубоководной части Северного Ледовитого океана // *Проблемы Арктики и Антарктики*. 2014. № 2 (100). С. 75–81.
6. *Огородов С.А., Баранская А.В., Белова Н.Г., Богатова Д.М., Кокин О.В., Маслаков А.А., Шабанова Н.Н., Мазнев С.В., Новикова А.В., Кондратьева Д.М., Вергун А.П.* Атлас абразионной и ледово-экскавационной опасности прибрежно-шельфовой зоны российской Арктики // *Современные исследования трансформации криосферы и вопросы геотехнической безопасности сооружений в Арктике* / Под ред. Мельникова В.П. и Садуртдинова М.Р. Салехард: 2021. С. 315–318.
7. *Diachok O.I.* Effects of sea-ice ridges on sound propagation in the Arctic Ocean // *J. Acoust. Soc. Am.* 1976. V. 59. № 5. P. 1110–1120.
8. *Кудряшов В.М.* Расчет звукового поля в арктическом волноводе // *Акуст. журн.* 1996. Т. 42. № 3. С. 438–442.
9. *Hope G., Sagen H., Storheim E., Hobaek H.* Measured and modeled acoustic propagation underneath the rough Arctic sea-ice // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 142. № 3. P. 1619–1633.
10. *Ballard M.S.* Three-dimensional acoustic propagation effects induced by the sea ice canopy // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 146. № 4. P. EL364–EL368.
11. *Балакин Р.А., Вилков Г.И.* Адаптация гидроакустического канала связи с технологией OFDM к негативному влиянию дрейфующего ледяного покрова // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 2. С. 223–231.
12. *Mikhalevsky P.N., Gavrilov A.N.* Acoustic thermometry in the Arctic Ocean // *Polar Research*. 2001. V. 20. № 2. P. 185–192.
13. *Луньков А.А., Шерменева М.А.* Взаимодействие мод на сосредоточенной неоднородности в мелководном акустическом волноводе в широкой полосе частот // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 5. С. 510–519.
14. *Андреев О.М.* Учет внутренней структуры килея тороса при термодинамических расчетах эволюции консолидированного слоя // *Лед и снег*. 2020. Т. 60. № 4. С. 547–556.
15. *Collis J.M., Frank S.D., Metzler A.M., Preston K.S.* Elastic parabolic equation and normal mode solutions for seismo-acoustic propagation in underwater environments with ice covers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 5. P. 2672–2682.
16. *Рожин Ф.В., Тонаканов О.С.* Общая гидроакустика. М.: Издательство Московского университета, 1988. 160 с.
17. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of Shallow Water Acoustics. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012. 540 p.
18. *Григорьев В.А., Кучер К.М., Луньков А.А., Макаров М.М., Петников В.Г.* Акустические характеристики дна

- озера Байкал // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 5. С. 517–526.
19. Григорьев В.А., Петников В.Г. О возможности представления акустического поля в мелком море в виде суммы нормальных мод и квазимод // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 681–698.
20. Григорьев В.А. Оценка скорости звука в газонасыщенном слое осадков по времени прихода сигнала послевестника // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 3. С. 288–299.
21. Grigor'ev V.A., Lunkov A.A., Petnikov V.G. Effect of Sound-Speed Inhomogeneities in Sea Bottom on the Acoustic Wave Propagation in Shallow Water // Physics of Wave Phenomena. 2020. V. 28. № 3. P. 255–266.
22. Тихонов А.Н., Васильева А.Д., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.
23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 559 с.
24. Нечаев А.Г., Хилько А.И. Дифференциальная акустическая диагностика случайных неоднородностей океана // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 285–289.
25. Нечаев А.Г., Хилько А.И. Определение локальных характеристик океанических неоднородностей, распределенных вдоль акустической трассы // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 694–699.
26. Katsnelson B.G., Grigorev V., Badiey M., Lynch J.F. Temporal sound field fluctuations in the presence of internal solitary waves in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2009. V. 126. № 1. P. EL41–EL48.
27. Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Бадиев М., Lynch J. Акустические эффекты, обусловленные взаимодействием мод при распространении звука в мелком море в присутствии внутренних солитонов // Сборник трудов XIX сессии Российского акустического общества. Т. 2. М.: ГЕОС, 2007. С. 183–186.

ОБНАРУЖЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛОВ С УЧЕТОМ МНОГОЛУЧЕВОСТИ ВОЛНОВОДА И МНОГООБЛИКОВОСТИ ОТРАЖАТЕЛЯ

© 2023 г. В. Н. Драченко^а, Г. Н. Кузнецов^{а, *}, А. Н. Михнюк^б

^аИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

^бРоссийский университет дружбы народов (РУДН), ул. Миклухо-Маклая 6, Москва, 117198 Россия

*e-mail: skbmortex@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.

После доработки 22.03.2023 г.

Принята к публикации 18.05.2023 г.

В шельфовой зоне выполнено экспериментальное исследование возможности повышения вероятности обнаружения эхо-сигналов на фоне помех в результате учета многолучевой модели волновода и конструктивных особенностей отражателя. Экспериментально обоснована возможность увеличения дальности сопровождения и уменьшения вероятности ложных тревог при использовании алгоритма, использующего продолжительность временного интервала, в течение которого наблюдается последовательность отраженных от одного отражателя сигналов в связи с многолучевостью распространения сигналов и многообликностью отраженного сигнала, если структура цели сложная и включает несколько разнесенных в пространстве отражателей. Даны рекомендации по выбору интервалов — длин реализации, в пределах которых возможно суммирование энергии отраженных сигналов. Показано, что в результате накопления мощности сигнала с использованием алгоритма, частично учитывающего модель эхо-сигнала, увеличивается время сопровождения цели и уменьшаются ложные тревоги.

Ключевые слова: модель многолучевого акустического канала, многообликность отражателя, обнаружение и сопровождение цели с использованием накопления мощности на интервале наблюдения отраженных сигналов, моделирование, эксперимент, уменьшение ложных тревог, увеличение дальности сопровождения

DOI: 10.31857/S032079192360049X, **EDN:** BWGFON

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных организациях выполняется разработка быстро развертываемых гидролокационных станций (ГЛС) обнаружения малоразмерных тел. Их назначение — охрана особо важных объектов, расположенных в прибрежных районах, и защита хозяйственных субъектов со стороны прилегающей акватории. Целевым назначением подобных комплексов является обнаружение несанкционированного проникновения к охраняемому объекту пловцов на ластах или средствах движения, а также обнаружение и сопровождение автономных необитаемых подводных аппаратов и подвижных морских роботов. Защищаемыми объектами могут быть промышленные, энергетические, хозяйственные, спортивные, военные и государственные объекты и учреждения, имеющие водные границы.

При обработке сигналов следует учитывать, что при работе гидролокатора в реальном морском волноводе эхо-сигналы, отраженные от обнаруживаемой цели, приходят на приемную антенну в виде совокупности лучей, параметры которых определя-

ются акустико-гидрологическими условиями распространения и свойствами отражателя. Оптимальный алгоритм обнаружения многолучевого эхо-сигнала соответствует обработке, согласованной с параметрами моделей излучаемого сигнала, волновода и отражателя, и учитывающей корреляционные свойства помехи. Такой алгоритм по существу сводится к взвешенному суммированию решающей статистики (РС) на выходе сформированного в пространстве углового канала, после чего выполняется согласованная фильтрация принятого сигнала с эталонной копией излучаемого сигнала. Число сумм определяется числом лучей эхо-сигнала, веса которых определяются амплитудами и фазами этих сигналов, а задержки — их относительными задержками в гидроакустическом канале. Данной проблеме за последние десятилетия посвящены ряд работ, среди которых можно выделить публикации [1–3], имеющие теоретическое значение. Обзор методов обработки сигналов с учетом многолучевой модели волновода для обнаружения и оценки координат источников представлен в [4]. В [5, 6] выполнено экспериментальное исследование и

анализ применения согласованной с передаточной функцией волновода обработки для повышения эффективности обнаружения и оценки координат источника в пассивном режиме с использованием буксируемой или стационарной векторно-скалярной антенны. В [7, 8] исследована помехоустойчивость обнаружения и эффективность оценки координат маломощных источников с использованием алгоритма оценки максимумов корреляционной функции широкополосных сигналов, распространяющихся в многолучевом волноводе.

Следует также особо отметить дополнительное влияние многобликовости цели, при которой каждый отражающий элемент создает свою суперпозицию лучей — эхо-сигналов, и которую также необходимо учитывать при обработке. Многобликовость создает из-за недостатка информации о размерах отражателя, его ориентации и направлении движения существенную неопределенность модели принятых сигналов и усложняет обработку. Некоторые вопросы влияния многобликовости исследованы в [9, 10]. В частности, отмечается, что даже при большом отношении сигнал/помеха затруднительно использовать многобликовую структуру эхо-сигналов для решения задачи классификации.

Отсюда следует, что реализация оптимального алгоритма, согласованного с локальными условиями распространения и со свойствами отражателя, и одновременно учитывающего свойства помех, требует точного знания лучевой (или модовой) модели поля и аналитического представления многобликовой частотно-угловой структуры индикатрисы рассеяния цели. Причем эти данные необходимы “здесь и сейчас” — на момент решения задачи обнаружения, т.е. в реальном времени, что практически невозможно при непрерывном изменении условий приема сигналов, отраженных от движущейся цели, и сводит “на нет” возможные преимущества согласованной обработки. В таких условиях представляется полезным использовать квазисогласованные (квазиоптимальные) алгоритмы обработки, частично учитывающие модели сигнала и отражателя — такие “загрубленные” алгоритмы обычно бывают более устойчивыми к изменению характеристик эхо-сигналов и помех и не требуют детального знания передаточной функции волновода в точке приема сигналов.

2. АНАЛИЗ ТЕХНИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ И ХАРАКТЕРИСТИК ГЛС

Перечисленные выше малоразмерные объекты наблюдения являются малозумными, а их обнаружение и сопровождение необходимо производить в шельфовой зоне, для которой характерно наличие многочисленных локальных источников помех и отражателей. В связи с этим было принято решение о необходимости использования ГЛС, обеспечивающих освещение подводной обстановки и обнаружение целей в актив-

ном режиме. Этим определяются технические требования к ГЛС — по назначению и свойствам:

- системы освещения подводной обстановки должны включать ГЛС кругового или секторного обзора, предназначенные для работы в различных акваториях и построения в этих акваториях зон контроля заданной геометрии с размещением в этой зоне одной или нескольких однотипных станций;
- излучаемые и обрабатываемые сигналы должны иметь максимально возможную ширину рабочей полосы частот для уменьшения реверберационных помех, повышения точности целеуказания и снижения требуемой мощности зондирующего сигнала;
- ГЛС должны обладать направленностью приемных и излучающих антенн для эффективного подавления окружающих шумов и реверберационной помехи (ложников);
- минимальные энергопотребление и габариты каждой ГЛС, максимальная простота и быстрота постановки и подъема на акватории, минимизация стоимости и требований к плавсредствам технического обеспечения;
- использование стандартного интерфейса Ethernet для передачи данных целеуказания на верхний уровень охранного комплекса.

В исследованном далее макете ГЛС учитываются эти требования и используются: а) излучающая антенна в виде линейной вертикальной антенной решетки, формирующей направленное в вертикальной плоскости и ненаправленное излучение в горизонтальной плоскости, и б) приемная антенна — цилиндрическая многоканальная антенная решетка, обладающая небольшой направленностью в вертикальной плоскости, но формирующей в горизонтальной плоскости веер узких стационарных характеристик направленности, одновременно принимающих отраженные сигналы со всех горизонтальных направлений. Совокупная вертикальная и горизонтальная направленность уменьшают влияние распределенных морских шумов и реверберационной помехи, а также обеспечивают возможность непрерывного наблюдения во всей зоне обзора. Как следствие, производится обнаружение, пеленгование и сопровождение целей.

В 2010 г. была принята модульная архитектура приемного тракта, которая позволила создать линейку однотипных станций-модулей “Тритон” с различными приемными апертурами и разным числом приемных элементов — 64, 96 и 128. Фотографии¹ установленных на штативах станций “Тритон-64” и “Тритон-128” приведены на рис. 1. Диапазон рабочих частот 60–90 кГц, диаметр из-

¹ На 3-м международном форуме “Морская индустрия России” в 2013 г. НЦВИ ИОФРАН за малогабаритные гидроакустические модули “Тритон” был награжден золотой медалью в номинации “Научные исследования и изыскания”.

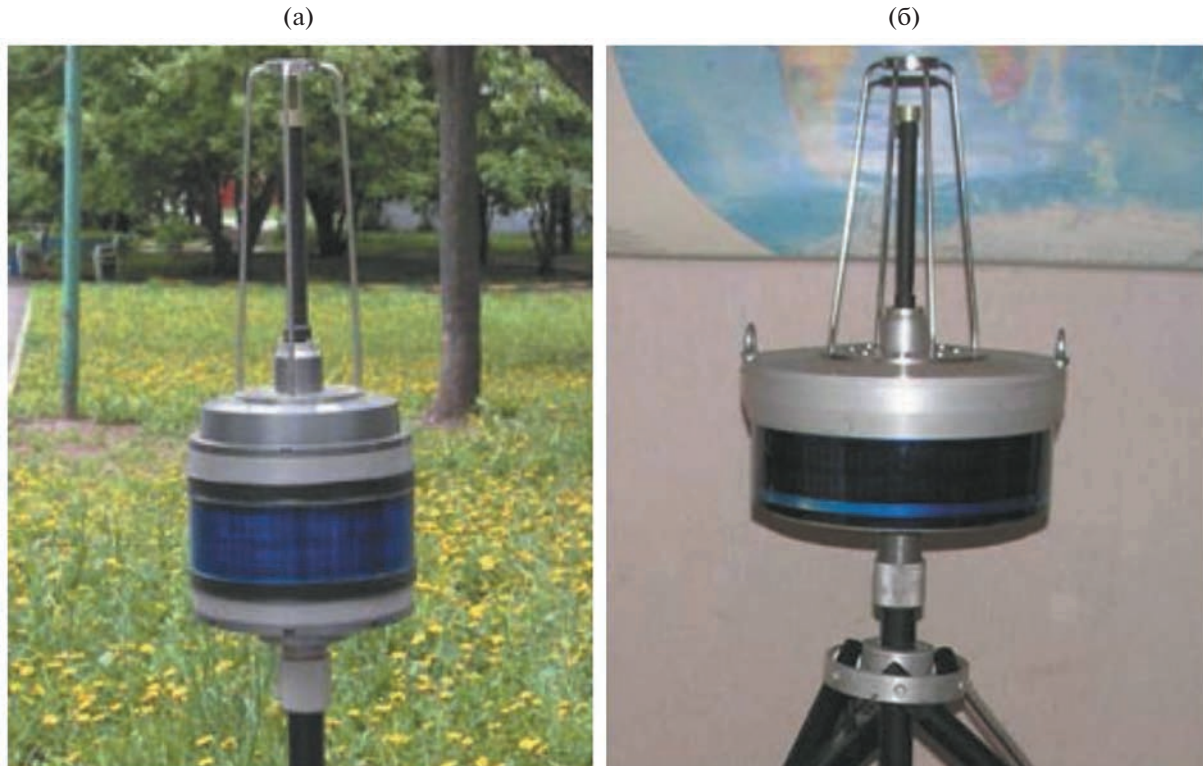


Рис. 1. Фотографии ГЛС, включающих вертикальную линейную излучающую антенну и цилиндрическую многоканальную приемную антенну: (а) – “Тритон-64” и (б) – “Тритон-128”.

лучателя 2 см, диаметр приемных антенн от 21 до 32 см, высота излучающих антенн около 20 см и приемных – около 10 см.

3. АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ

Алгоритмы обработки эхо-сигналов разработаны применительно к макетам “Тритон-64” и “Тритон-128”. В качестве исходных данных приняты модели сигналов и помех, характеристики которых изложены ниже. Модель принимаемых ГЛС сигналов имеет вид:

$$p(\mathbf{r}_s, t) = \varepsilon p_T(\mathbf{r}_s, t) + p_N(\mathbf{r}_s, t), \\ s = 1, \dots, N_R, \quad t \in (0, T),$$

где $p(\mathbf{r}_s, t)$ – измеренное приемной антенной распределение давления в точках $\mathbf{r}_s$, которое складывается из $p_N(\mathbf{r}_s, t)$ – давления поля помехи, состоящей из шумов окружающей среды, реверберации и приведенных по входу шумов аппаратуры, $p_T(\mathbf{r}_s, t)$ – давление поля эхо-сигнала ($\varepsilon = 0$, когда отражателя нет, и $\varepsilon = 1$, когда отражатель присутствует), N_R – число преобразователей в приемной антенне, T – время наблюдения.

Поле эхо-сигнала определяется функцией Грина морского волновода, параметрами излучающей антенны, формой зондирующего сигнала и, кроме того, объемной индикатрисой рассеяния отражателя:

$$p_T(\mathbf{r}_s, \omega) = \sum_{\mu=1}^M \sum_{\mu'=1}^{M'} A_{\mu}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) A_{\mu'}(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_S) \times \\ \times \exp \left\{ i\omega \left[(1 + \beta^{(R)}) t_{\mu}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_T) + (1 + \beta^{(S)}) t_{\mu'}(\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_S) + i \frac{1 + \beta^{(R)}}{c} (\mathbf{e}_{\mu}^{(R)}, \mathbf{r}_r - \mathbf{r}_R) \right] \right\} \times \\ \times \frac{R_T(\mathbf{e}_{\mu}^{(T)}, \mathbf{e}_{\mu'}^{(T)}, \omega)}{2} \mathbf{P}_S(\omega, \mathbf{e}_S - \mathbf{e}_{\mu'}^{(S)}) S(\omega(1 + \beta^{(\Sigma)})) \sqrt{\frac{W \rho c \gamma_S}{4\pi}}, \quad (1)$$



Рис. 2. Блок-схема алгоритма обработки сигналов в ГЛС.

где M и M' — число лучей, соединяющих фазовые центры излучающей и приемной антенны с точкой $\mathbf{r}_T$, где находится отражатель, $A_\mu, A_{\mu'}, t_\mu, t_{\mu'}, \mathbf{e}_\mu^{(R)}, \mathbf{e}_\mu^{(T)}, \mathbf{e}_{\mu'}^{(S)}, \mathbf{e}_{\mu'}^{(T)}$ — параметры этих лучей, а $R_T(\mathbf{e}_\mu^{(T)}, \mathbf{e}_{\mu'}^{(T)}, \omega)$ — эквивалентный радиус отражателя в зависимости от направления падения $\mathbf{e}_\mu^{(T)}$ и рассеяния $\mathbf{e}_{\mu'}^{(T)}, \beta^{(R)}, \beta^{(S)}, \beta^{(Z)}$ — доплеровские параметры.

Вектор-функцию $p_N(\mathbf{r}_s, t)$, описывающую помехи, будем считать распределенной по нормальному закону с нулевым средним и с некоторой пространственно-временной корреляционной матрицей $K_N(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s, t, t')$, которая является суммой матриц, определяемых суперпозицией помех. Далее при разработке алгоритма обработки сигналов использовались модели помех, описанные в [5, 6], и в данной работе они не обсуждаются.

Обработку принимаемых ГЛС сигналов, которая реализует обнаружение и оценку параметров движущихся объектов с использованием выражений (1)–(3), можно условно разбить на этапы предварительной, первичной и вторичной обработки (рис. 2). К предварительной обработке (рис. 2, 1) обычно относят аналоговую фильтрацию и усиление принятых сигналов, аналого-цифровое преобразование и цифровую полосовую фильтрацию с децимацией. На этапе первичной обработки (рис. 2, 2) происходят формирование характеристик направленности, фильтрация,

согласованная с формой зондирующего сигнала, и обнаружение первичных отметок цели. К вторичной обработке (рис. 2, 3) относят траекторную фильтрацию и классификацию.

В работе далее исследуется этап обнаружения отметок цели, так как именно на данном этапе более всего сказывается многолучевость и многобликовость. Индикаторный процесс (ИП) определяется массивом $I(u, n) = |q_u(t_n)|, n = 1, \dots, N_t, u = 1, \dots, N_u$, а каждая ячейка $(\Delta\varphi, \Delta t)$ — элементом пространственного разрешения (ЭПР). Для обнаружения отметок выполняется селекция движущейся цели [11], т.е. в каждом ЭПР на выходе первичной обработки формируется текущее значение отношения сигнал–помеха (ОСП), которое автоматически корректируется в процессе работы станции. Для данного ЭПР и в данный момент времени величина ОСП формируется следующим образом:

- с помощью экспоненциального фильтра для каждого момента времени p вычисляются матожидания ИП и его среднеквадратичные отклонения:

$$\begin{aligned} \bar{I}_p(u, n) &= \left(1 - \frac{1}{N_p}\right) \bar{I}_{p-1}(u, n) + \frac{1}{N_p} I_p(u, n), \\ \bar{I}_p^2(u, n) &= \left(1 - \frac{1}{N_p}\right) \bar{I}_{p-1}^2(u, n) + \frac{1}{N_p} I_p^2(u, n), \\ \sigma_p(u, n) &= \sqrt{\bar{I}_p^2(u, n) - \bar{I}_p^2(u, n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

• отношение разности значения индикаторного процесса в этом ЭПР и его математического ожидания и является текущим значением ОСП, которое сравнивается с заданным порогом:

$$\frac{I_{p+1}(u, n) - \bar{I}_p(u, n)}{\sigma_p(u, n)} > K. \quad (3)$$

Если выполняется верхнее неравенство, отметка считается обнаруженной. В этих выражениях N_p — число циклов, за которое происходит оценка параметров, K — пороговое ОСП, вычисляемое из вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги.

4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МНОГОЛУЧЕВОСТИ И МНОГОБЛИКОВОСТИ НА ОТКЛИК АНТЕННЫ

Для первичной обработки на практике обычно используется известный алгоритм Бартлетта [5, 6] с формированием в горизонтально-вертикальной плоскости веера характеристик направленности. На выходе этого алгоритма для выделения (обнаружения) отраженных сигналов, превышающих заданный порог, в каждом ЭПР устанавливаются динамические пороги. В результате при стандартной обработке учитывается только наиболее энергонесущий луч, дающий максимальный отклик в решающей статистике. Естественно, подобная обработка существенно проигрывает оптимальной.

Ниже рассматривается вариант построения алгоритма частично согласованной обработки, учитывающей из набора различных характеристик передаточной функции волновода [2, 6] лишь диапазон возможных значений задержек приходов сигналов по отдельным лучам, а из характеристик цели — возможное пространственное разнесение отдельных отражателей, каждый из которых создает “семейство” отраженных сигналов в виде лучевых структур, в совокупности формирующих многобликовый сигнал.

Для построения алгоритмов с использованием суммарной энергии предварительно исследуем экспериментальные данные, полученные в контролируемых условиях, когда число отражателей известно. С этой целью рассмотрим характеристики эхо-сигналов от известных отражателей, которые отличаются возможностью формировать многобликовый эхо-сигнал. Это позволяет сравнить результаты обработки экспериментальных данных от различных отражателей и дать соответствующие рекомендации.

На рис. 3 показаны отрезки индикаторного процесса (ИП) в стационарном угловом горизонтальном канале приемной антенны, полученные в трех последовательных циклах локации при движении на удаление простейшего имитатора

цели — стандартного уголкового отражателя с длиной ребра 10 см. При этом имитатор облучался вертикально ориентированным излучателем, но при движении не выходил из стационарной характеристики направленности, сформированной приемной горизонтальной цилиндрической антенной. В этих условиях в угловом канале приемной антенны выполняется обработка последовательных групп отраженных от имитатора лучей, сформированных в вертикальной плоскости. Эти лучи (сигналы) приходят в точку приема с различными задержками и образуют пакеты импульсов, разнесенных на оси времени.

Учитывая простую конструкцию уголкового отражателя и существование в каждом направлении единственной отражающей зоны, можно утверждать, что на этом рисунке состав пакета сигнальных пиков и его изменчивость обусловлены не многобликовостью, а только многолучевостью.

На рис. 4 приведены отрезки ИП в угловом канале, полученные в трех последовательных циклах локации при движении более сложного отражателя — автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА), движущегося под углом около 40–45 градусов к направлению, соединяющему источник эхо-сигналов и отражатель.

Видно, что количество пиков и расстояния между ними существенно увеличились. В этой структуре откликов кроме многолучевости проявляется и многобликовость, которая приводит к дополнительным задержкам и увеличению числа отраженных сигналов — и, как следствие, увеличению общей длительности отраженного сигнала. Естественно, что при усложнении конструкции и протяженности имитатора и увеличении числа разнесенных в пространстве отражателей возрастает количество отраженных импульсов, а из-за разнесения в горизонтальной плоскости локальных отражателей возрастет общая временная протяженность волнового (сигнального) пакета.

Из сравнения результатов, представленных на рис. 3 и 4, видно, что длительности отраженного импульса и пакета группы импульсов хорошо согласуются с исходными данными о конструкции и протяженности отражателей. Ранее возможность идентификации целей и оценки горизонтального размера отражателя по длительности отраженного сигнала отмечалась в [9, 10].

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что учет при обработке даже максимального пика из всех наблюдаемых использует лишь часть энергии эхо-сигнала, отраженного от цели. Более полная энергия и отношение сигнал/помеха определяются суммарной энергией суперпозиции лучей с учетом многолучевости и вероятной многобликовости. Сложение энергии пришедших по разным лучам сигналов, отраженных раз-

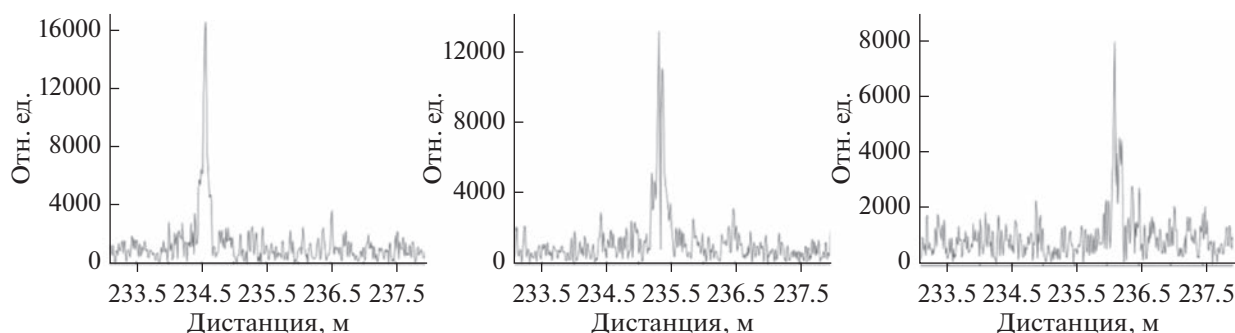


Рис. 3. Отрезки индикаторного процесса в “угловом” канале, уголкового отражателя.

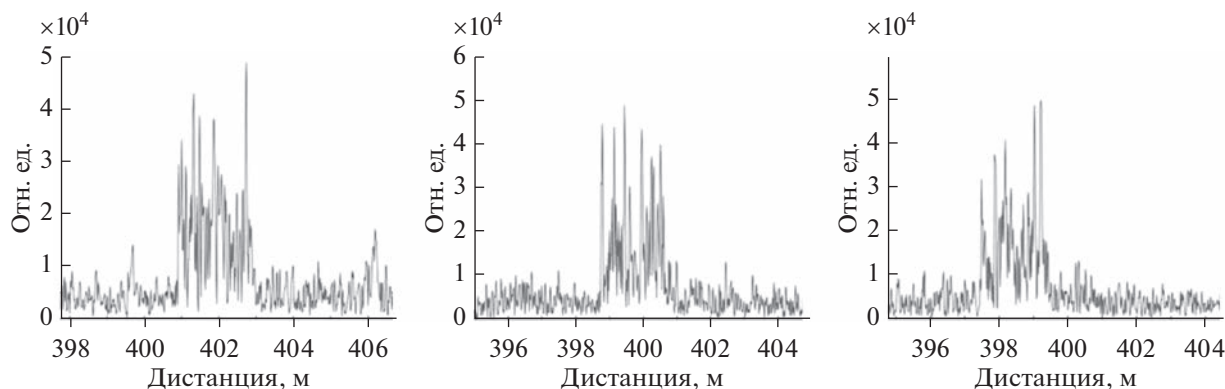


Рис. 4. Отрезки индикаторного процесса в угловом канале для АНПА длиной 3 м.

несенными в пространстве локальными отражателями, и их совместный учет должны увеличить отношение сигнала/помеха и, соответственно, дальность обнаружения.

5. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ

Решающая статистика (РС) при стандартной обработке представляет собой в каждом угловом канале выход фильтра, согласованного с формой излучаемого сигнала. Как известно [3, 12–15], выход согласованного фильтра пропорционален оценке амплитуды принятого эхо-сигнала. В случае разрешения во временной области приходов сигналов по разным лучам значения максимумов отдельных пиков в РС будут пропорциональны амплитудам этих сигналов (лучей).

В ЭПР, содержащем эхо-сигнал цели, значение РС будет определяться суммой помеховой и сигнальной составляющих. Тогда на основании (3) для оценки значения ОСП по амплитуде сигнала на выходе первичной обработки можно записать:

$$\rho = (U_i - \bar{U}_{in}) / \sigma_{in}, \quad (4)$$

где U_i — экспериментальное значение РС в i -м ЭПР, $\bar{U}_{in}$ — математическое ожидание и σ_{in} — экспериментальное среднее квадратичное отклонение (СКО) помехи в этом же ЭПР.

Величина ρ является экспериментальной оценкой ОСП на выходе алгоритма первичной обработки. Поскольку временные разбеги лучей и отдельных бликов от одиночной цели не велики, можно сделать предположение, что на этом интервале математическое ожидание и СКО пространственного отклика, обусловленного помеховой составляющей, стационарны или изменяются незначительно. Тогда суммарное ОСП по всем приходам (пикам) полезного эхо-сигнала по аналогии с (4) можно записать как

$$\rho = \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U}_n) / \sigma_n, \quad (5)$$

где K — количество выделенных сигнальных пиков.

Для примера рассмотрим семейство рабочих характеристик обнаружителя в активном режиме, приведенное на рис. 5. Данные графики рассчитаны в предположении, что помеха распределена по закону Рэлея с параметром масштаба $\sigma = 1$, а сигнал (отклик на эхо-сигнал) распределен по за-

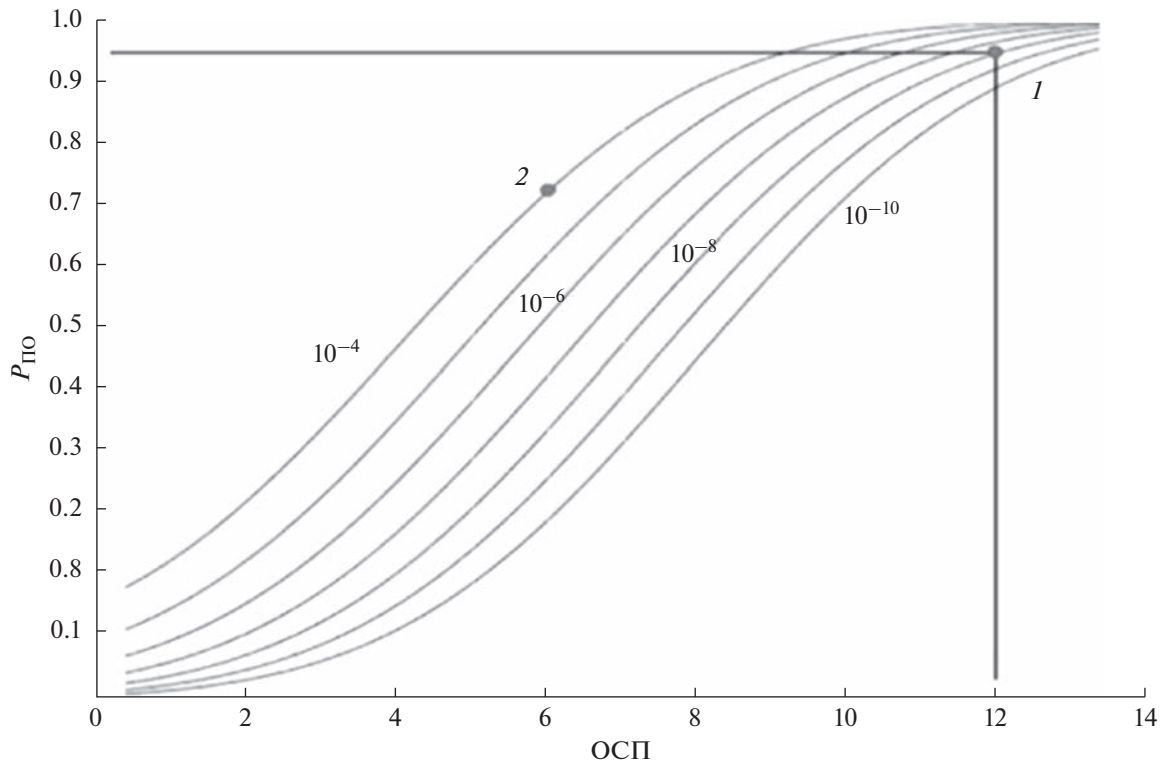


Рис. 5. Рабочие характеристики гидролокатора. Требования к эффективности обнаружения обозначены точками.

кону Райса с параметрами $\sigma = 2$ и ν , изменяющимся в соответствии со значением ОСП [12–14].

Например, требуется разработать ГЛС и алгоритм, обеспечивающие вероятность правильного обнаружения $P_{\text{по}} = 0.95$ при вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт}} = 10^{-8}$. Тогда из графиков на рис. 5 получаем необходимую величину порогового отношения сигнал/помеха $\rho_0 = 12$ (точка 1). Предположим, что в строке по времени возможной задержки между пиками ИП будут обнаружены два пика с ОСП, равными $\rho_1 = 6$. Тогда, как видно из рис. 5, для каждого из этих пиков вероятность правильного обнаружения $P_{\text{по}}^0 = 0.73$ при вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт}}^0 = 10^{-4}$, что явно недостаточно (точка 2).

Полагая, что обнаруженные пики — это составляющие двух эхо-сигналов, отраженных от одной цели, мы имеем право суммировать их мощности для получения мощности суммарного сигнала. Тогда, учитывая введенное ранее определение ОСП, для результирующего ОСП будем иметь значение $\rho_0 = 12$. Поскольку обнаружение каждого пика является независимым событием, то для вероятности ложной тревоги совместного события имеем $P_{\text{лт}} = P_{\text{лт}1}^0 * P_{\text{лт}2}^0 = 10^{-8}$. А вероятность правильного обнаружения при ОСП $\rho_0 = 12$

равна 0.95. Таким образом, мы удовлетворили исходным требованиям по вероятностям правильного обнаружения и ложной тревоги.

С учетом изложенного выше сформулируем эвристический квазиоптимальный алгоритм обработки, обеспечивающий групповую обработку нескольких разрешающихся эхо-сигналов с учетом наиболее вероятной ориентации движущегося отражателя.

1. Порог обнаружения ρ_0 задается стандартно — исходя из условия достижения требуемых значений вероятностей правильного обнаружения и ложной тревоги.

2. Исходя из практических соображений, учитывая условия распространения и вероятные конструктивные характеристики целей, задаем диапазон интервалов между задержками по времени Δt . Далее на этой основе рассчитываем соответствующий диапазон интервалов дистанций ΔR для независимых приходов эхо-сигналов по лучам.

3. Задаем величину начального порога обнаружения $\rho_1 < \rho_0$, что резко увеличивает вероятность ложных тревог.

4. На скользящем пространственно-временном окне ΔR находим значения пиков ИП, превышающих начальный порог $U_{i\text{max}} \geq \rho_1$ и вычис-

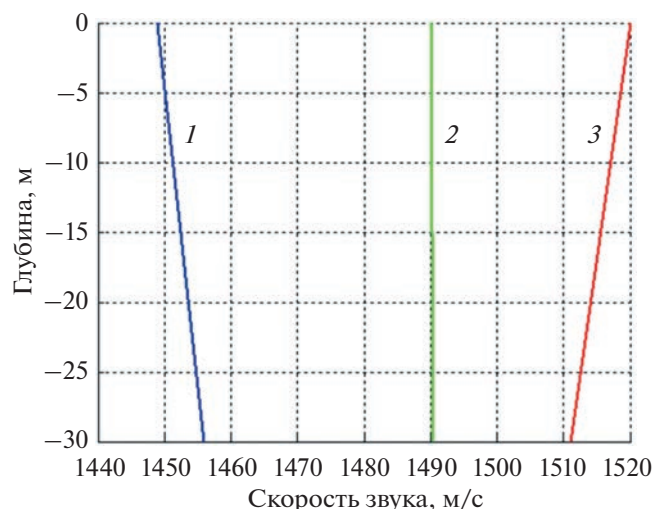


Рис. 6. ВРСЗ, для которых выполнялись расчеты.

ляем их сумму ρ , которая повторно сравнивается с требуемым порогом ρ_0 .

5. При превышении суммарным значением сигнала заданного порога ρ_0 определяется дистанция до обнаруженной цели — по одному пику с использованием его максимального значения или по средневзвешенному значению суммы всех пиков, превысивших пороги обнаружения ρ_1 и ρ_0 . При этом подавляются ложные тревоги.

Таким образом, для квазиоптимального алгоритма необходимы предварительные расчеты лучевой структуры с целью оценки только вероятных временных интервалов между временами прихода сигналов по разным лучам — при отражении одним или несколькими отражателями. При этом ни угловые и временные спектры, ни амплитудно-фазовые характеристики сигналов, пришедших по разным лучам, не рассчитываются и не используются. В этом принципиальное отличие предлагаемого алгоритма от алгоритма согласованной фильтрации [1–4]. Корреляционная обработка применяется только для сличения отраженных сигналов с излучаемым эталонным сигналом. Для максимального учета моделей сигналов и помех рекомендуется использовать выражения (1)–(3).

6. РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ НАКОПЛЕНИЯ МОЩНОСТИ СИГНАЛА

Рассмотрим результаты расчетов задержек между эхо-лучами для морского волновода глубиной 30 м в зависимости от дистанции до подводного объекта. Указанная глубина постановки рекомендуется для данной разновидности ГЛС и мониторинга прибрежных зон. Расчеты выполне-

ны для трех вариантов вертикального распределения скорости звука (ВРСЗ) в районе работ (рис. 6): 1) температура у поверхности 0°C , у дна 5°C (зимние условия); 2) температура не зависит от глубины и равна 10°C (отдельные месяцы весной и осенью); 3) температура у поверхности 24°C , у дна 10°C (летние условия). При всех расчетах глубины ГЛС и отражателя равны половине глубины волновода. Из полученных результатов на рис. 7 видно, что величины задержек между лучами зависят от номера луча, дистанции до отражателя и различаются при различных ВРСЗ. Однако возможные интервалы изменения задержек не превышают 3–4 мс для всех трех рассмотренных вариантов ВРСЗ. Для оценки зависимости интервала задержек от глубины волновода выполнены также расчеты для ВРСЗ № 2 при глубинах 20 и 10 м (рис. 8). Из результатов расчетов видно, что с уменьшением глубины волновода интервал возможных задержек между эхо-лучами также уменьшается.

Приведенные выше результаты соответствуют простому (одиночному) отражателю. Результирующий эхо-сигнал от многобликового объекта представляет собой сумму эхо-сигналов от отдельных бликов — одиночных разнесенных отражателей.

Для примера рассмотрим простейшие сложные отражатели, состоящие из двух, разнесенных на 5 м, или трех простых отражателей, разнесенных на 2.5 и 5 м. На рис. 9 изображены задержки эхо-лучей от первого (ближайшего) отражателя (кривые 1) и от второго удаленного на 5 м (кривые 2). Кривые 3 соответствуют задержке от третьего отражателя, расположенного между первым и вторым на расстояниях 2.5 м. Видно, что расширение интервала задержек эхо-лучей от сложного отражателя соответствует формуле $\Delta t_L = 2L/c$, где L — радиальный (продольный) размер объекта, c — скорость звука.

7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЭФФЕКТИВНОСТИ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА

На рис. 10 приведены индикаторные процессы, полученные расчетным путем согласно (4) и (5). Данные результаты рассчитаны на основании анализа эхо-сигналов при движении одиночной цели — малогабаритного подводного аппарата (см. рис. 4).

Индикаторный процесс, приведенный на рис. 10б, получен при следующих параметрах предлагаемого алгоритма: $\rho_0 = 10$, $\rho_1 = 5$, $\tau = 2$ мс (или $\Delta R = 1.5$ м). Из рисунка следует, что ОСП, соответствующее эхо-сигналу, полученному с помощью частично согласованного (квазиоптимального) алгоритма, — ОСП = 55, т.е. увеличи-

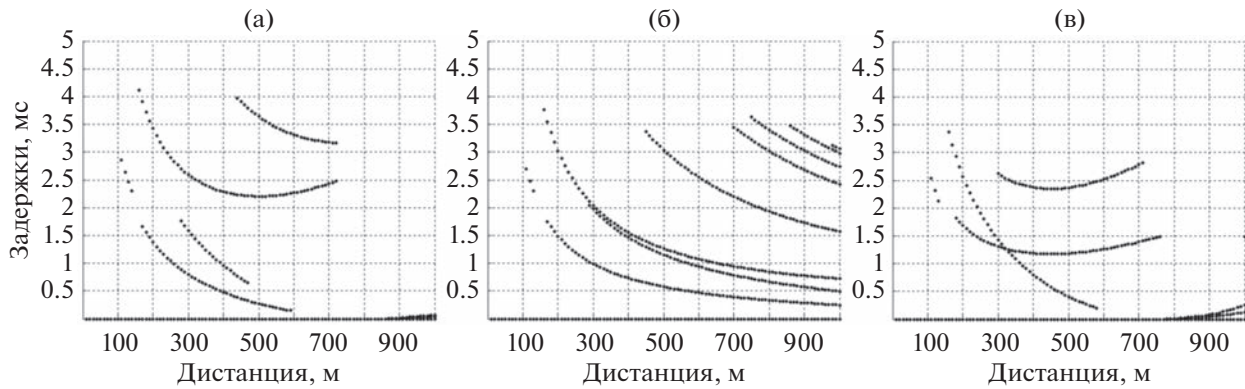


Рис. 7. Величины задержек между лучами при трех типах ВРСЗ: (а) – № 1, (б) – № 2 и (в) – № 3.

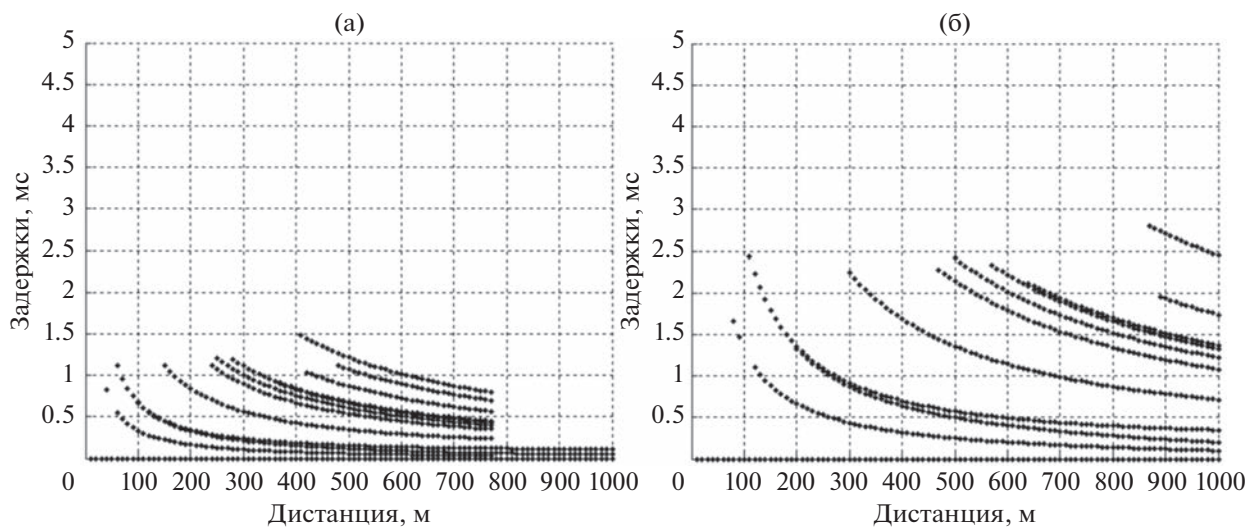


Рис. 8. Интервалы задержек в точке приема между временами прихода по разным лучам сигналов при глубинах волновода (а) – 20 м и (б) – 10 м. Один отражатель.

лось более чем в 4 раза по отношению к ОСП, полученному стандартным методом по одиночным пикам – $ОСП = 12$ (рис. 10а).

На рис. 11 приведены результаты, полученные при использовании предлагаемого частично согласованного алгоритма при обработке экспериментальных записей с приемной антенны ГЛС (рис. 1) обнаружения малоразмерных объектов [15]. Результаты получены при движении в зоне обзора малогабаритного АНПА или буксировке углового отражателя при сложности используемого зондирующего сигнала $B = \Delta FT = 600$. На этих графиках представлены зависимости ОСП отметок, обнаруженных и идентифицированных как отметки цели и отнесенных к соответствующей траектории – в зависимости от номера цикла локации (времени) в трех разных экспериментах. Кривые 1 соответствуют зависимостям, полученным по разработанному квазиоптимальному ме-

тоду, кривые 2 – получены по стандартному алгоритму (по одиночному пику). Обработка выполнялась с использованием следующих параметров: для (а, б) $\rho_0 = 15$, $\rho_1 = 7.5$, $\tau = 2$ мс; для (в) – $\rho_0 = 10$, $\rho_1 = 5.6$, $\tau = 2$ мс.

Графики на рис. 11а и 11б относятся к разным галсам АНПА. График на рис. 11в (кривая 2) получен при протяжке малогабаритного углового отражателя.

Как видно из этих графиков, во всех случаях среднее значение ОСП существенно возрастает, а количество пропусков цели уменьшается, если использовать квазиоптимальный алгоритм, частично учитывающий свойства модели сигнала.

Отметим, что на рис. 11а нет увеличения длительности сопровождения цели, поскольку на всех этапах этой обработки – по всем даже одиночным достаточно мощным эхо-сигналам отражатель уверенно обнаруживался и сопровождался

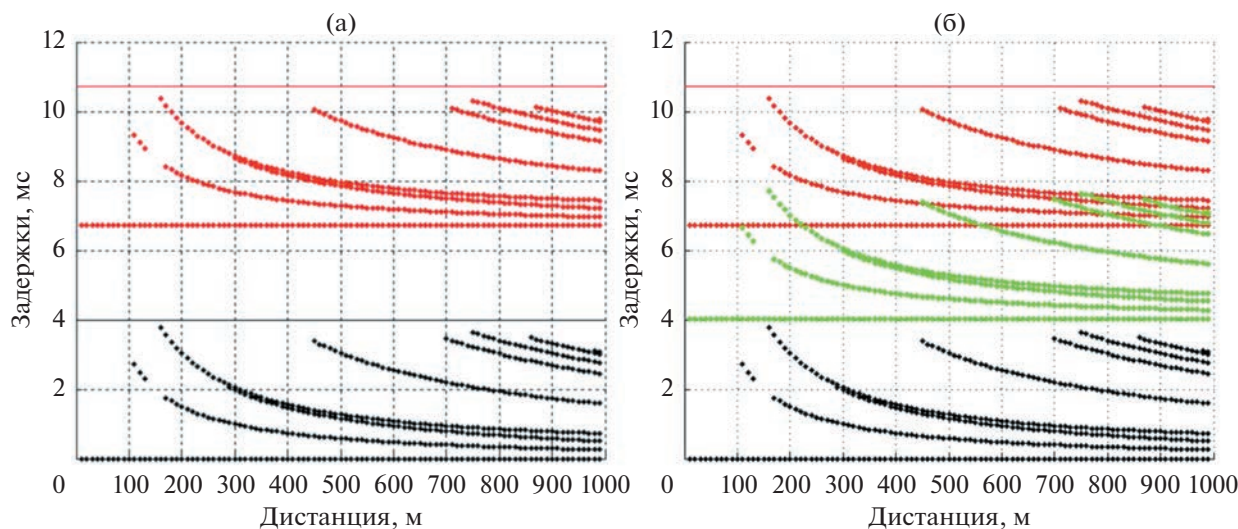


Рис. 9. Задержки между временами прихода в одном и том же волноводе при использовании двойного и тройного отражателей, размещенных на одном движущемся объекте (ВРСЗ № 2, глубина моря 30 м).

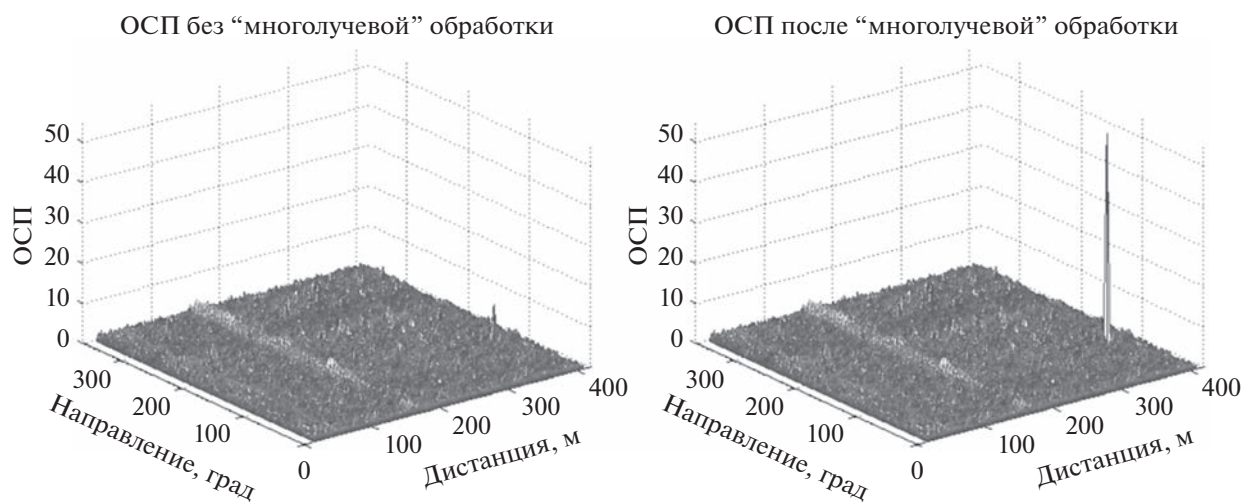


Рис. 10. Изображения индикаторного процесса, полученные (а) – стандартным методом и (б) – при использовании квазиоптимального алгоритма.

от входа в зону обнаружения до выхода из нее. Но на рис. 11б при его движении на удаление и, соответственно, уменьшении ОСП хорошо видно увеличение дальности сопровождения при использовании частично согласованного с моделью алгоритма обработки (кривая 1) по сравнению с алгоритмом, использующим только одиночные импульсы (кривая 2).

Рассмотрим по реализации на рис. 11б зависимость увеличения ОСП по квазиоптимальному алгоритму от диапазона возможных задержек по времени Δt (рис. 12). Видно, что ОСП заметно возрастает при увеличении интервала задержек эхо-сигналов и времени накопления мощности.

При достижении интервала задержек по времени 2 мс рост ОСП прекращается. Это говорит о том, что в данной экспериментальной реализации все пики, соответствующие эхо-сигналам от нескольких (трех) характеризующих АНПА локальных отражателей, расположены в пределах строка с интервалом времен ± 2 мс и уже “просуммированы”. На этой основе, учитывая, что отражатель перемещался под углом около 40–45 градусов к направлению, соединяющему источник эхо-сигналов и отражатель, легко получить оценку горизонтального размера отражателя – 3–4 м, что согласуется с известными исходными данными.

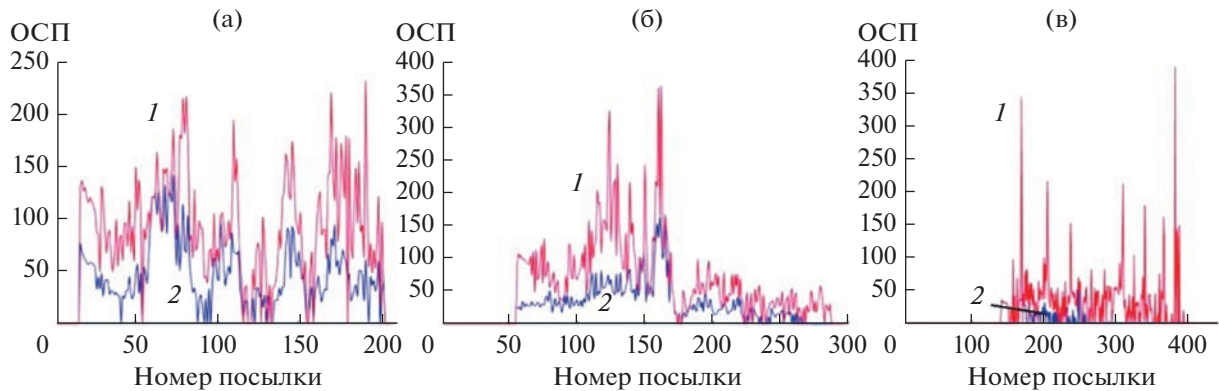


Рис. 11. (а), (б) – Зависимости ОСП на разных интервалах сопровождения отражателей двух типов – АНПА с разными временами накопления мощности, а также (в) – уголкового отражателя (кривая 2).

8. ОБНАРУЖЕНИЕ И СОПРОВОЖДЕНИЕ ЦЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРАЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Из полученных экспериментальных данных следует, что при высокой информативности последовательности отметок обнаруживаемых целей формальная интерпретация получаемого изображения усложняется при наличии отражений от “местников” и ложных отметок целей. Как следует из литературы, для повышения эффективности обнаружения и идентификации целей необходимо выполнять их сопровождение и траекторную фильтрацию. Один из широко используемых алгоритмов траекторного анализа основан на применении калмановской фильтрации отметок целей [12–14]. Как следствие, общий тракт моделирования или обработки дополняется вторичной обработкой, на этапе которой прово-

дится траекторный анализ. Упрощенная блок-схема вторичной обработки представлена на рис. 13.

Не останавливаясь на аналитическом представлении способов моделирования алгоритма обнаружения с использованием формул (1)–(3) и детальном процессе калмановской фильтрации, который хорошо описан в [12–14], изложим основные этапы обработки:

- Из тракта первичной обработки или моделирования по формулам (1)–(3) принимаются и анализируются формуляры одиночных отметок (ФОО) сопровождаемых целей.
- Текущие значения параметров трасс экстраполируются на следующий шаг.
- Производится идентификация пришедших ФОО с каждой из целей, взятых на сопровождение. Каждая сопровождаемая цель отождествляется только с одной отметкой. Формируются формуляры неотожествленных отметок (ФНО).
- Идентифицируются ФОО и оставшиеся ФНО. Производится завязка новых трасс, оставшиеся ФОО переводятся в ФНО. Для всех сопровождаемых трасс производится повторная оценка вероятности обнаружения цели.
- В случае превышения заданного значения вероятности трасса и ее параметры выводятся на экран, и подается предупреждающий сигнал (зуммер и световой сигнал).

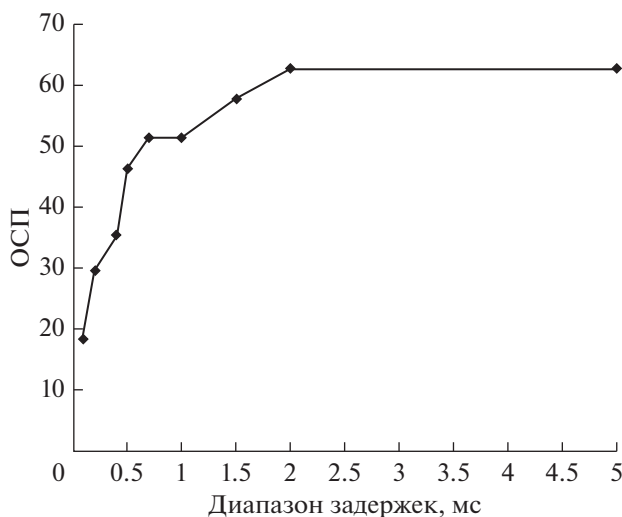


Рис. 12. Зависимость ОСП от величины диапазона задержек по времени.



Рис. 13. Блок-схема вторичной обработки информации, $Q_i(t_n)$ – формуляры обнаруженных целей, содержащие их текущие параметры – координаты и скорость движения цели.



Рис. 14. Результаты обнаружения и оценки координат от движущегося отражателя в натурном эксперименте, полученные на выходе алгоритмов (а) — обнаружения одиночных импульсов и (б) — с квазиоптимальным накоплением.

- Переход к началу нового цикла обзора пространства в выбранной зоне.

Пример реализации алгоритма обработки результатов натурного эксперимента с учетом траекторного анализа и предлагаемого метода накопления мощности сигналов приведен на рис. 14, на котором в полярной системе координат на экране индикатора ГЛС кругового обзора представлены две траектории движения отражателя. Слева приведена траектория при стандартном использовании одиночных обнаруженных отметок, а справа — траектория, полученная с использованием рекомендуемой квазиоптимальной обработки. Центр экрана обозначен точкой (слева вверх).

Из результатов, представленных на рис. 14, видно, что применение предлагаемого алгоритма позволяет более устойчиво обнаруживать отражатель. При этом отсутствуют зоны потери контакта, дальность сопровождения увеличивается. Сопровождение цели прекращается только после выхода за пределы зоны обзора ГЛС — в данном эксперименте за пределы 400 м, что для малогабаритных ГЛС является хорошим результатом.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный квазиоптимальный эвристический алгоритм, частично учитывающий свойства модели эхо-сигнала, повышает отношение сигнал/помеха на выходе системы обработки за счет учета мощности многолучевых эхо-сигналов, отраженных от обнаруживаемой многобликовой цели. Для реализации алгоритма на первом этапе устанавливается “заниженный начальный порог” обнаружения, с использованием которого обнаруживаются несколько дополнительных “пиков” — эхо-сигналов, отраженных от цели. Одновременно обнаруживаются множественные ложные тревоги. Объединение нескольких эхо-

сигналов на выбранном интервале расстояний (временном интервале) и их суммирование позволяет при сличении с “завышенным порогом” повысить вероятность правильного обнаружения и подавить ложные тревоги.

Для корректного выбора временного интервала, в пределах которого суммируются амплитуды эхо-лучей в соответствии с предлагаемым алгоритмом, нужно на основании имеющихся характеристик волновода выполнить расчеты интервалов задержек эхо-лучей для простого отражателя и расширить его на величину Δt_L , которая определяется вероятными размерами обнаруживаемых объектов и направлением их движения.

Авторы рекомендуют с целью повышения вероятности обнаружения применять разработанный достаточно простой алгоритм для частичного учета свойств среды и отражателя. Рекомендуется его использовать совместно с траекторным накоплением.

Авторы выражают особую признательность нашему товарищу по работе и другу д. ф.-м. н. В.В. Бородину — инициатору и руководителю данных разработок, внесшему основополагающий вклад в создание подобных систем, но не дожившему до их реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bangs W.J., Shultheiss P.M.* Space-time processing for optimal parameter estimation // *Signal Processing*. Eds. by Griffiths J., Stocklin P., Schooneveld C. London: Academic, 1973. P. 577–591.
2. *Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Schmidt H.* Matched field processing: Source localization in correlated noise as optimum parameter estimation problem // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. V. 83. № 2. P. 571–587.
3. *Малышкин Г.С.* Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов. СПб.: ОАО “Концерн “ЦНИИ “Электрон””, 2011. Т. 1, 2.

4. *Клячкин В.И., Подгайский Ю.П.* Адаптивная обработка многолучевых сигналов в задачах обнаружения и оценивания: по данным отечественной и зарубежной печати за 1980–1990 гг. Обзор. Л.: ЦНИИ Румб, 1991. 48 с.
5. *Михнюк А.Н.* Идентификация и уточнение координат целей, обнаруживаемых мультистатической системой подводного наблюдения // *Гидроакустика*. 2013. Вып. 18(2). С. 81–89.
6. *Кузнецов Г.Н., Михнюк А.Н., Полканов К.И.* Использование буксируемого векторно-скалярного модуля и согласованной фильтрации для однозначной оценки координат широкополосного источника в пассивном режиме // *Гидроакустика*. 2015. Вып. 24(4). С. 36–51.
7. *Машошин А.И.* Помехоустойчивость выделения максимумов в корреляционной функции широкополосного шумового сигнала морского объекта, обусловленных многолучевым распространением сигнала в водной среде // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. № 6. С. 823–829.
8. *Машошин А.И.* Исследование условий применимости корреляционной функции широкополосного многолучевого сигнала для оценки координат источника // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 3. С. 307–313.
9. *Тимошенков В.Г.* Оценка вероятности правильного обнаружения бликовой структуры портрета цели по эхосигналу для гидролокатора освещения ближней обстановки // *Гидроакустика*. 2017. Вып. 32(4). С. 51–55.
10. *Тимошенков В.Г.* Боковое поле функции неопределенности многобликового псевдошумового сигнала // *Гидроакустика*. 2018. Вып. 36(4). С. 50–55.
11. *Гринюк А.В., Кравченко В.Н., Трофимов А.Т., Трусова О.И., Тихомиров М.М., Хилько А.А., Малеханов А.И., Коваленко В.В., Хилько А.И.* Высококачественное акустическое наблюдение неоднородностей в мелком море с неровным дном в присутствии сильной реверберации // *Акуст. журн.* 2001. Т. 57. № 5. С. 642–648.
12. *Гусев В.Г.* Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации. Л.: Судостроение, 1988. 283 с.
13. *Middleton D.* An Introduction to Statistical Communication Theory. New York: McGraw-Hill, 1960.
14. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
15. *Драченко В.Н., Кузнецов Г.Н.* Исследование эффективности малогабаритных гидролокационных станций для обнаружения пловцов в шельфовой зоне // *Гидроакустика*. 2020. Вып. 43(3). С. 31–41.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПОДРЕЗКИ ТОНАЛЬНЫХ ОТВЕРСТИЙ ДЕРЕВЯННЫХ ДУХОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ НА СМЕЩЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ВОЗДУШНОГО КАНАЛА

© 2023 г. Р. А. Герасимов*

*Военный ордена Жукова университет радиоэлектроники,
Советский пр. 126, Череповец, 162622 Россия*

**e-mail: roman-gerasimoff@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.

После доработки 19.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Рассмотрено влияние наличия и величины радиуса кривизны в местах соединения тональных отверстий деревянных духовых инструментов с основным воздушным каналом (подрезка) на смещение его собственных частот. Приведена методика и формулы для численного расчета, позволяющие определять величину эффективного радиуса для открытого и закрытого тональных отверстий с переменным поперечным сечением. На основе полученных зависимостей с помощью метода передаточных матриц осуществлен расчет собственных частот воздушного канала с одним отверстием и проведено сравнение с результатами компьютерного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 5.6. Показано, что увеличение степени подрезки звукового отверстия приводит к росту его эффективного радиуса, что повышает резонансные частоты в случае открытого отверстия и понижает в случае закрытого. Усреднение акустической массы (для открытого) и объема (для закрытого) по продольным сечениям отверстия, не обладающего вращательной круговой симметрией в области соединения с основным каналом, дает лучшие результаты при нахождении резонансных частот в сравнении с моделированием.

Ключевые слова: духовые музыкальные инструменты, подрезка тональных отверстий, метод передаточных матриц, метод конечных элементов, расчет собственных частот

DOI: 10.31857/S0320791923600257, **EDN:** QRYMZA

ВВЕДЕНИЕ

Акустические свойства деревянных духовых инструментов в основном являются следствием их геометрии. Диаметр и высота звуковых отверстий, их расположение вдоль основного ствола канала и его геометрия, а также высота клапанов с подушками над отверстиями являются первостепенными факторами при определении резонансных частот, тембра, игровых характеристик и возможностей инструмента. Кривизна основного ствола воздушного канала, а также такие небольшие детали как толщина стенок тональных отверстий, наличие радиуса кривизны на границе соединения отверстия с основным каналом, тип подушек и резонатора, тоже оказывают влияние на положение собственных частот инструмента. Следует помнить, что любые незначительные изменения формы канала — расширения, сужения, разрывы, шероховатости, изгибы и т.д. — будут влиять на форму волны, распространяющейся вдоль канала, а следовательно, и на ее амплитудно-частотную характеристику, определяющую

тембр воспроизводимой ноты. Незначительные, на порядок меньше миллиметра, изменения геометрии корпуса могут оказать заметное влияние на результирующий звук и ощущения музыканта.

Глубокое и детальное изучение акустических характеристик воздушных каналов деревянных духовых инструментов увеличивает понимание их исторической эволюции и взаимосвязей между основными изменениями в конструкции и процессами генерации и передачи звука в модифицированных каналах. Это помогает также определять пертурбативные свойства дизайна, которые отличают инструменты одной и той же общей конструкции друг от друга, например, связь между изменениями в звуковых отверстиях или канале и откликом инструмента на исполнителя. Поскольку такие свойства зависят даже от небольших изменений в воздушном столбе, необходимо создавать подробные и точные модели, чтобы делать надежные прогнозы игровых характеристик инструмента.

В работах по изучению акустических характеристик воздушных каналов с тональными отверстиями обычно рассматривается только простая геометрия, когда основной канал представляет собой прямой цилиндр с боковым отростком (одним или несколькими) в виде такого же прямого цилиндра меньших размеров [1–8]. На практике деревянные духовые инструменты часто имеют радиус кривизны на стыке между боковым отверстием и основным каналом.

Подрезка тональных отверстий — это метод, который веками использовался производителями деревянных духовых инструментов для улучшения их игровых характеристик. Известен факт, что у звуковых отверстий хороших инструментов из дерева, таких как кларнеты, гобои и флейты эпохи Возрождения был удален материал из-под звукового отверстия, что эффективно уменьшало резкость краев. Подрезка подразумевает расширение звукового отверстия в области его соединения с основным воздушным каналом инструмента, при этом внешний размер отверстия остается неизменным. Данная процедура может включать в себя все, что угодно — от минимального закругления внутренних краев отверстия до изменения радиуса на большей части его высоты. Есть две основные причины для подрезания звукового отверстия: регулировка высоты ноты, сыгранной с ним как с первым открытым отверстием, и улучшение качества этой ноты, описывающей ее тембр, громкость или легкость исполнения.

В работе [9] экспериментально измерялся входной акустический импеданс специально изготовленных кларнетов со сменными звуковыми отверстиями как с острыми, так и с подрезанными краями, а также были проведены эксперименты, в ходе которых восемнадцать кларнетистов оценивали инструменты со скошенными и закругленными краями. При этом подавляющее большинство участников охарактеризовали инструменты с некоторой степенью подрезания или закругления как более качественные, чем с острыми краями. Несмотря на это, теме подрезки звуковых отверстий деревянных духовых инструментов посвящена очень небольшая часть литературы по музыкальной акустике. В работе [10] говорится, что закругление внутренних краев звуковых отверстий инструмента уменьшает турбулентность в колеблющемся потоке, идущем через них. Используя линейную акустическую теорию, в работе [11] описывается влияние подрезки на настройку нот в разных регистрах. Автор [11] называет также одним из результатов подрезки снижение потерь энергии, идущей на образование вихрей в потоке через отверстие. Влияние закругления краев боковых отверстий на нелинейные эффекты рассматривалось в случае волн с большими амплитудами в работе [12] и для различных уровней звука в [13] на прямоугольной геометрии

с расширением отверстия в виде усеченного конуса. Авторы [14] представляют метод экспериментального определения последовательного и шунтирующего акустического импеданса открытого звукового отверстия с подрезанием, рассматривая также конусообразное расширение отверстия.

Как видно, наличие сглаженности краев тонального отверстия оказывает влияние на частоту и тембр воспроизводимых нот, уменьшает локальные нелинейные явления потока (отрыв пограничного слоя и образование струй и вихрей) в звуковом отверстии, улучшая игровые характеристики инструмента. Но ни в одной из вышеперечисленных работ не приводится конкретного алгоритма расчета собственных частот воздушного канала с отверстием, имеющим переменное поперечное сечение, и влияния степени подрезки на смещение этих частот. В данной работе будут приведены методика и формулы для численного расчета, позволяющие определять величину эффективного радиуса для закрытого и открытого тональных отверстий, имеющих некоторый радиус кривизны (закругление) на стыке с основным каналом. На основе полученных зависимостей с помощью метода передаточных матриц будет осуществлен расчет собственных частот воздушного канала с одним отверстием и проведено сравнение с результатами компьютерного моделирования в программе COMSOL Multiphysics 5.6.

МОДЕЛЬ

В работе рассматривался цилиндрический воздушный канал длиной L и радиусом a , в центре которого расположено перпендикулярное боковое отверстие высотой t и радиусом b , имеющее некоторый радиус кривизны r в месте сочленения отверстия с основным каналом (рис. 1).

Для нахождения собственных частот канала с перпендикулярным боковым отверстием использовался метод передаточных матриц. В данном методе каждая секция волновода (воздушного канала инструмента) представляется в виде матрицы T , связывающей звуковое давление p и объемную скорость U звуковых колебаний воздуха на входной и выходной плоскостях поперечного сечения S канала, и выражается как:

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ Z_0 U_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{out} \\ Z_0 U_{out} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $Z_0 = \rho c / S$ — акустическое сопротивление (импеданс) цилиндрического канала (трубы) площадью $S = \pi a^2$, ρ — плотность воздуха, c — скорость звука в среде. Характеристики системы в целом рассчитываются на основе каждой передаточной матрицы и приведенного импеданса излучения открытого конца $\bar{Z}_{rad} = p_{out} / Z_0 U_{out}$:

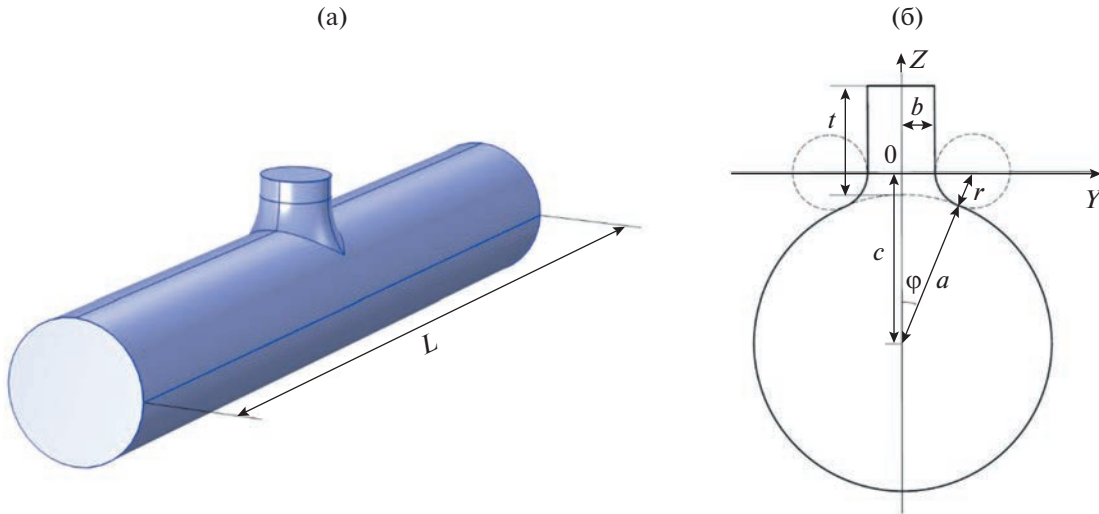


Рис. 1. (а) – Схематический вид прямого цилиндра длиной L с перпендикулярным боковым отверстием со скругленными краями, (б) – схема поперечного сечения цилиндра в плоскости ZOY в месте расположения бокового отверстия.

$$\begin{bmatrix} p_{in} \\ Z_0 U_{in} \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=1}^n T_i \right) \begin{bmatrix} \bar{Z}_{rad} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а затем рассчитывается входной импеданс $\bar{Z}_{in} = p_{in}/Z_0 U_{in}$.

Воздушные каналы деревянных духовых инструментов представляют собой волноводы, состоящие из цилиндрических или конических секций с открытыми или закрытыми звуковыми отверстиями. Теоретическое выражение передаточной матрицы цилиндра длиной L без учета потерь энергии определяется как:

$$T_{cyl} = \begin{bmatrix} \cos kL & j \sin kL \\ j \sin kL & \cos kL \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $k = 2\pi f/c$ – волновое число, $j = \sqrt{-1}$.

Тональное отверстие может быть представлено в виде симметричной Т-образной секции (рис. 2), характеристики которой зависят от двух параметров: шунтирующего $\bar{Z}_s = Z_s/Z_0$ и последовательного $\bar{Z}_a = Z_a/Z_0$ импедансов. Передаточная матрица звукового отверстия имеет вид [1]

$$\begin{aligned} T_{hole} &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_a/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\bar{Z}_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_a/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{Z}_a}{2\bar{Z}_s} & \bar{Z}_a \left(1 + \frac{\bar{Z}_a}{4\bar{Z}_s} \right) \\ \frac{1}{\bar{Z}_s} & 1 + \frac{\bar{Z}_a}{2\bar{Z}_s} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Импедансы $\bar{Z}_s$ и $\bar{Z}_a$ рассматриваются для открытого (о) и закрытого (с) состояний звукового отверстия и зависят от геометрических параметров

и частоты колебаний. Шунтирующий импеданс может быть представлен как [3, 11]

$$\bar{Z}_s^{(o)} = \frac{1}{\delta^2} (jkt_s^{(o)} + \xi_s), \quad (5)$$

$$\bar{Z}_s^{(c)} = -j \frac{1}{\delta^2 kt_s^{(c)}}, \quad (6)$$

где ξ_s – характерное шунтирующее сопротивление открытого отверстия, t_s – эквивалентная длина звукового отверстия, параметр $\delta = b/a$ – отношение радиуса тонального отверстия к радиусу основного канала воздушного столба. Шунтирующее сопротивление ξ_s не влияет на расчетные резонансные частоты деревянных духовых инструментов, поэтому большинство исследований сосредоточено на определении поправки на эквивалентную длину t_s , которую в случае открытого отверстия авторы [12] представляют в виде

$$kt_s^{(o)} = kt_i + \text{tg}[k(t + t_m + t_r)],$$

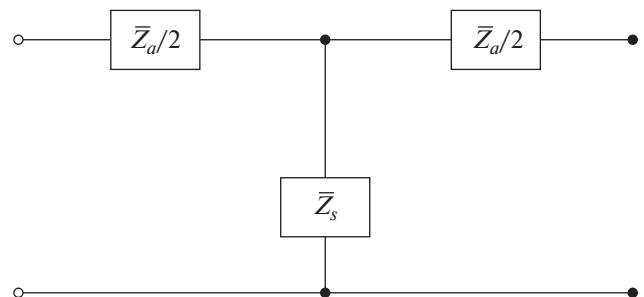


Рис. 2. Эквивалентная блок-схема тонального отверстия.

где t — геометрическая высота отверстия (рис. 1б), t_i — коррекция внутренней длины, t_m — эквивалентная длина, соответствующая дополнительно объему звукового отверстия, возникающему на стыке с основным каналом, t_r — поправка на длину, соответствующая дополнительному затуханию колебаний в связи с излучением и инерцией среды. В низкочастотном приближении ($k(t + t_m + t_r) \ll 1$) можно записать

$$t_s^{(o)} = t_i + t + t_m + t_r. \quad (7)$$

Для параметра t_i (при условии $t > b$) в литературе существует ряд формул. В данной работе при расчетах было использовано выражение авторов [5]

$$t_i = (0.82 - 1.4\delta^2 + 0.75\delta^{2.7})b. \quad (8)$$

Для длины t_m в случае острых краев те же авторы дают достаточно точное приближение

$$t_m = \frac{b\delta}{8}(1 + 0.207\delta^3). \quad (9)$$

Поправка t_r , соответствующая излучению, зависит от частоты колебаний и внешней геометрии окончания отверстия. В низкочастотном приближении ($k(t + t_m + t_r) \ll 1$) это может быть

$$t_r = 0.6133b \text{ (труба без фланца)}, \quad (10)$$

$t_r = 0.8216b$ (труба с бесконечным фланцем) (11) либо другое промежуточное значение для более сложных ситуаций [15].

В случае закрытого бокового отверстия эквивалентную длину можно представить в виде

$$kt_s^{(c)} = \text{tg}[k(t + t_m)].$$

Коррекция внутренней длины также может быть рассмотрена для закрытого отверстия, но ее влияние невелико и становится значительным только на высоких частотах, поэтому в случае низких частот ($k(t + t_m) \ll 1$) можно записать

$$t_s^{(c)} = t + t_m. \quad (12)$$

Последовательный импеданс звукового отверстия представляет собой небольшую отрицательную акустическую инертность

$$\bar{Z}_a^{(o/c)} = -jkt_a^{(o/c)}, \quad (13)$$

что немного уменьшает эффективную длину инструмента, увеличивая резонансные частоты. В уравнении (13) соответствующая поправка на длину t_a имеет ряд выражений, полученных разными авторами. В данной работе в случае открытого отверстия использовалось соотношение авторов [5]

$$t_a^{(o)} = 0.28b\delta^2, \quad (14)$$

в случае закрытого отверстия [6]

$$t_a^{(c)} = \frac{b\delta^2}{1.78 \text{cth}(1.84t/b) + 0.940 + 0.540\delta + 0.285\delta^2}. \quad (15)$$

В целом для цилиндрического канала с одним отверстием, основываясь на методе передаточных матриц, можно записать

$$\begin{bmatrix} p_{\text{in}} \\ Z_0 U_{\text{in}} \end{bmatrix} = T_{\text{cyl}} T_{\text{hole}} T_{\text{cyl}} \begin{bmatrix} \bar{Z}_{\text{rad}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где импеданс излучения $\bar{Z}_{\text{rad}}$ открытого конца в общем случае зависит от частоты колебаний и для трубы без фланца в низкочастотном приближении ($ka \ll 1$) имеет вид [16]

$$\bar{Z}_{\text{rad}} = \frac{(ka)^2}{4} + jk(0.6133a), \quad (17)$$

а для трубы с фланцем [17]

$$\bar{Z}_{\text{rad}} = \frac{(ka)^2}{2} + jk(0.8216a). \quad (18)$$

При условии $\bar{Z}_{\text{in}} = p_{\text{in}}/Z_0 U_{\text{in}} \rightarrow \infty$ можно определить резонансные частоты канала.

Появление радиуса кривизны r на стыке тонального отверстия с основным каналом влечет изменение его радиуса и смещение резонансных частот. Расчет собственных частот воздушного канала в данном случае можно осуществить по описанным выше формулам, заменив боковое отверстие на акустически ему эквивалентное с острыми краями и эффективным радиусом b_{eff} .

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Радиус b_{eff} можно определить из равенства шунтирующих импедансов Z_s отверстий с острыми и скругленными краями. Открытое тональное отверстие в основном эквивалентно акустической инертности [18], поэтому

$$Z_s^{(o)} = j\omega m_a. \quad (19)$$

Акустическую массу m_a в случае переменного поперечного сечения можно рассчитать как

$$m_a = \rho \int_{L_h} \frac{1}{S(z)} dz, \quad (20)$$

где ρ — плотность воздуха, $S(z)$ — площадь поперечного сечения отверстия на уровне z , L_h — высота отверстия.

Закрытое отверстие, имеющее объем V , в основном ведет себя как акустическая податливость c_a [18], поэтому

$$Z_s^{(c)} = -j \frac{1}{\omega c_a}, \quad (21)$$

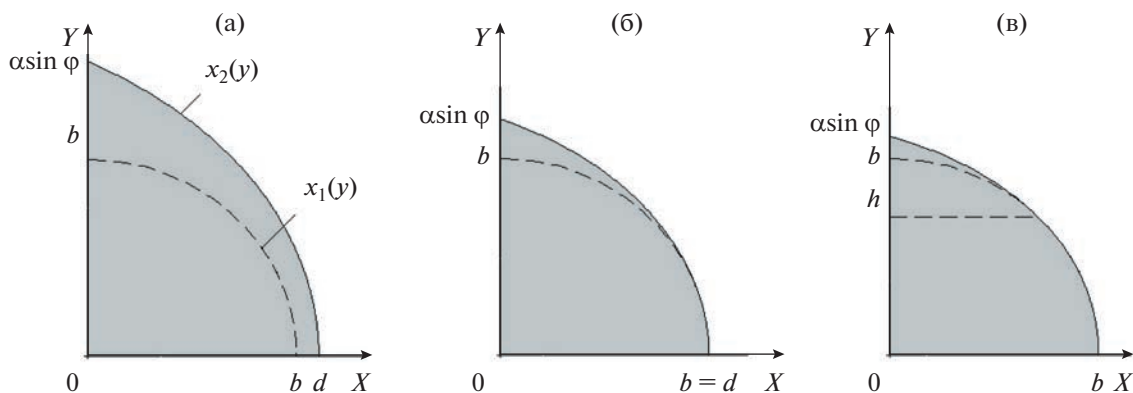


Рис. 3. Поперечное сечение тонального отверстия в плоскости основания ($z = -r \cos \varphi$): (а) — при $r > r_0$, (б) — при $r = r_0$, (в) — при $r < r_0$.

где

$$c_a = \frac{V}{\rho c^2}. \quad (22)$$

Для дальнейшего численного расчета необходимо записать уравнения поверхностей, ограничивающих тональное отверстие.

Основной канал, расположенный перпендикулярно плоскости рис. 1б вдоль оси X , определяется уравнением

$$(z + c)^2 + y^2 = a^2, \quad (23)$$

где параметр $c = (a + r) \cos \varphi$.

Сглаженность соединения звукового отверстия с основным каналом можно представить как наличие тора с образующей окружностью радиуса r , “опоясывающего” цилиндрическое отверстие. Его уравнение будет иметь вид

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2, \quad (24)$$

где $R = b + r$ — расстояние от оси Z до центра образующей окружности. При любом радиусе кривизны r высота t тонального отверстия над каналом остается неизменной, а тор в плоскости сечения ZOY касается основного канала, поэтому в данной плоскости происходит плавный переход от канала к отверстию, в отличие от всех остальных вертикальных плоскостей сечения, где будет существовать некий угол на стыке (рис. 1).

Уравнение бокового отверстия имеет вид $x^2 + y^2 = b^2$, откуда

$$x_1(y) = \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Решив совместно (23) и (24), определим уравнение линии пересечения нижней части тора и основного канала

$$x_2(y) = \sqrt{(R - \sqrt{r^2 - (\sqrt{a^2 - y^2} - c)^2})^2 - y^2}.$$

В зависимости от величины радиуса кривизны r отверстие в плоскости основания ($z = -r \cos \varphi$) будет иметь различные формы поперечного сечения (рис. 3). Параметр d (рис. 3а) находится из условия

$$d = x_2(0) = R - \sqrt{r^2 - (a - c)^2},$$

откуда при $d = b$ (рис. 3б) можно получить граничное значение приведенного радиуса кривизны ($\epsilon = r/b$)

$$\epsilon_0 = \frac{\delta}{2(1 - \delta)}.$$

При дальнейшем уменьшении радиуса r закругленность краев отверстия будет начинаться только на некотором расстоянии h от оси основного канала (рис. 3в), определяемого условием $x_1(h) = x_2(h)$, откуда

$$h = \sqrt{b^2 - 2r(a - b)}.$$

В общем площадь поперечного сечения тонального отверстия зависит от координаты z и в случае $r > r_0$ имеет три различных для вычисления области (рис. 4а). При $-r \cos \varphi \leq z < -(c - a)$ (рис. 4б)

$$S_{11}(z) = S'_1(z) + S''_1(z) = 4 \left(\int_0^{y_1(z)} \int_0^{x_2(y)} dx dy + \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy \right), \quad (25)$$

где $y_1(z) = \sqrt{a^2 - (z + c)^2}$ находится из (23), а пределы $x_3(y, z) = \sqrt{(R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 - y^2}$, $y_2(z)|_{x=0} = R - \sqrt{r^2 - z^2}$ выражаются из (24). При

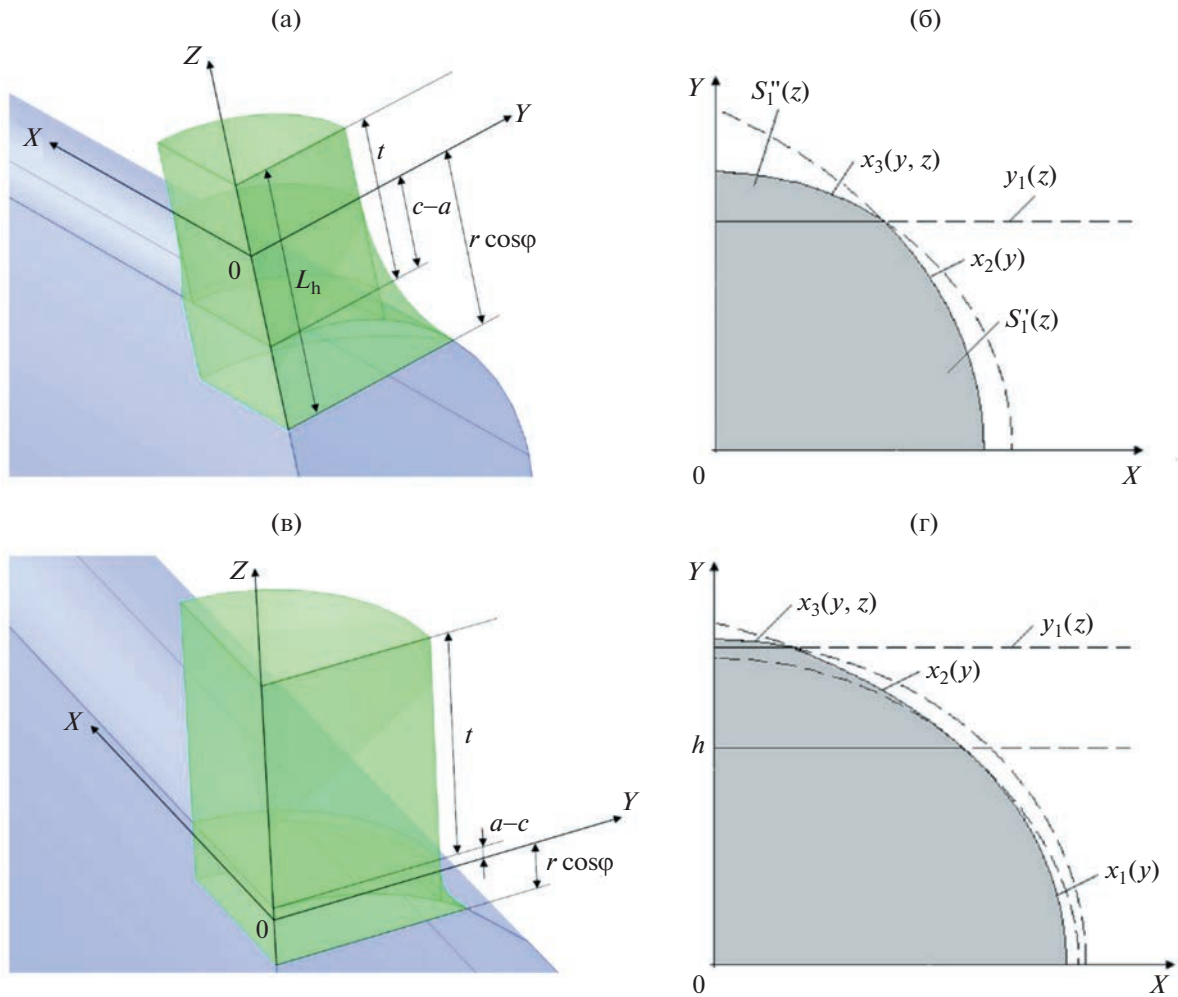


Рис. 4. (а) – Полный объем тонального отверстия при $r > r_0$, (б) – поперечное сечение отверстия вблизи основания на уровне $-r \cos \varphi \leq z < -(c-a)$ при $r > r_0$, (в) – объем тонального отверстия при $r < r_0$, (г) – поперечное сечение отверстия вблизи основания на уровне $-r \cos \varphi \leq z < -(c-a)$ при $r < r_0$.

$-(c-a) \leq z < 0$ поперечное сечение представляет собой окружность с постепенно уменьшающимся от d до b радиусом

$$S_2(z) = 4 \int_0^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy, \quad (26)$$

а при $0 \leq z \leq t-(c-a)$ – окружность постоянно-го радиуса b ,

$$S_3(z) = \pi b^2.$$

В случае малых радиусов кривизны ($r \leq r_0$, рис. 4в) отверстие не будет иметь поперечного сечения с площадью $S_2(z)$, а площадь сечения в области основания (рис. 4г) при $-r \cos \varphi \leq z < -(c-a)$ будет равна

$$S_{12}(z) = 4 \left(\int_0^h \int_0^{x_1(y)} dx dy + \int_h^{y_2(z)} \int_0^{x_2(y)} dx dy + \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y,z)} dx dy \right). \quad (27)$$

Интегрирование в формулах (25)–(27) проводится в пределах первой четверти.

Акустическую массу всего объема отверстия при $r > r_0$ можно рассчитать как

$$m_{al} = \rho \left[\int_{-r \cos \varphi}^{-(c-a)} \frac{1}{S_{11}(z)} dz + \int_{-(c-a)}^0 \frac{1}{S_2(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right], \quad (28)$$

а при $r \leq r_0$

$$m_{a2} = \rho \left[\int_{-r \cos \varphi}^0 \frac{1}{S_{12}(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right]. \quad (29)$$

Тональное отверстие, имеющее закругленные края, в отличие от отверстия с острыми краями, не обладает вращательной круговой симметрией в области соединения с основным каналом (сечения S_{11} и S_{12}), что также должно оказывать влияние на смещение резонансных частот. Чтобы учесть указанную несимметричность, в данной работе дополнительно было проведено усреднение акустических масс (28)–(29) по центральным продольным сечениям отверстия. Зависимость формы вертикального сечения отверстия от угла поворота секущей плоскости эквивалентна зависимости от координаты z_1 , выше которой площадь поперечного сечения S_{11} или S_{12} изменяется, а ниже z_1 — остается постоянной (рис. 4а, 4в), т.е.

$$m_{a1}(z_1) = \rho \left[\int_{-r \cos \varphi}^{z_1} \frac{1}{S_{11}(z_1)} dz + \int_{z_1}^{-(c-a)} \frac{1}{S_{11}(z)} dz + \int_{-(c-a)}^0 \frac{1}{S_2(z)} dz + \int_0^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right], \quad r > r_0,$$

$$m_{a2}(z_1) = \rho \left[\int_{-r \cos \varphi}^{z_1} \frac{1}{S_{12}(z_1)} dz + \int_{z_1}^{t-(c-a)} \frac{1}{S_3(z)} dz \right], \quad r \leq r_0.$$

Усредненные акустические массы

$$m_{a1}^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi - (c-a)} \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-a)} m_{a1}(z_1) dz_1, \quad r > r_0, \quad (30)$$

$$m_{a2}^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi} \int_{-r \cos \varphi}^0 m_{a2}(z_1) dz_1, \quad r \leq r_0. \quad (31)$$

Следует также учитывать, что изменение радиуса, обусловленное наличием подрезки у тонального отверстия, затрагивает и другие параметры, связанные с ним. Поэтому некорректно было бы искать эффективный радиус b_{eff} , рассматривая только изменившуюся геометрию отверстия и связанную с ней акустическую массу (30)–(31). Данные выражения должны включать все величины, входящие в эквивалентную длину t_s (см. формулу (7)) открытого отверстия, поэтому

$$m_a' = m_a^{\text{av}} + \rho \int_0^{t_i+t_m+t_r} \frac{1}{S_3(z)} dz, \quad (32)$$

где t_i , t_m и t_r определяются зависимостями (8), (9) и (10)–(11) соответственно.

Эквивалентное отверстие с острыми краями и радиусом b_{eff} представляет собой прямой цилиндр с акустической массой

$$m_a^{\text{eq}} = \rho \frac{t_i(b_{\text{eff}}) + L_h + t_m(b_{\text{eff}}) + t_r(b_{\text{eff}})}{\pi b_{\text{eff}}^2}, \quad (33)$$

где $L_h = t - (c-a) + r \cos \varphi$ — полная геометрическая высота отверстия. Приравнивая массы (32) и (33) (а значит, и шунтирующие импедансы отверстий), можно найти эффективный радиус b_{eff} и рассчитать резонансные частоты воздушного канала с открытым отверстием при различных радиусах кривизны r .

Объем тонального отверстия, исключаяющий объем основного канала (рис. 5а, 5б), будет определяться выражениями

$$V_1 = \int_{-r \cos \varphi}^{-(c-a)} S_1''(z) dz + \int_{-(c-a)}^0 S_2(z) dz + \int_0^{t-(c-a)} S_3(z) dz, \quad r > r_0, \quad (34)$$

$$V_2 = \int_{-r \cos \varphi}^0 S_1''(z) dz + \int_0^{a-c} S_4(z) dz + \int_{a-c}^{t+(a-c)} S_3(z) dz, \quad r \leq r_0, \quad (35)$$

где площадь поперечного сечения $S_4(z) = 4 \int_{y_1(z)}^b \int_0^{x_1(y)} dx dy$. Аналогичным образом можно учесть отсутствие круговой симметрии у отверстия в области его соединения с основным каналом и использовать вместо выражений (34)–(35) усредненные объемы. Процедура усреднения должна затрагивать только дополнительный объем V_m' , обусловленный наличием радиуса кривизны на стыке цилиндра и канала, поэтому необходимо записать выражение для собственного объема отверстия, выделив отдельно слагаемое V_m' (рис. 5а, 5б).

Объем цилиндрического отверстия с острыми краями ($r = 0$, при этом $c = c_0 = \sqrt{a^2 - b^2}$) равен

$$V_0 = \int_0^{a-c_0} S_4(z) dz + \pi b^2 t, \quad (36)$$

где первое слагаемое определяет дополнительный объем V_m в области сочленения отверстия и основного канала.

Поперечные сечения дополнительного объема V_m' при $r > r_0$ ($c \neq c_0$) имеют три различные для вы-

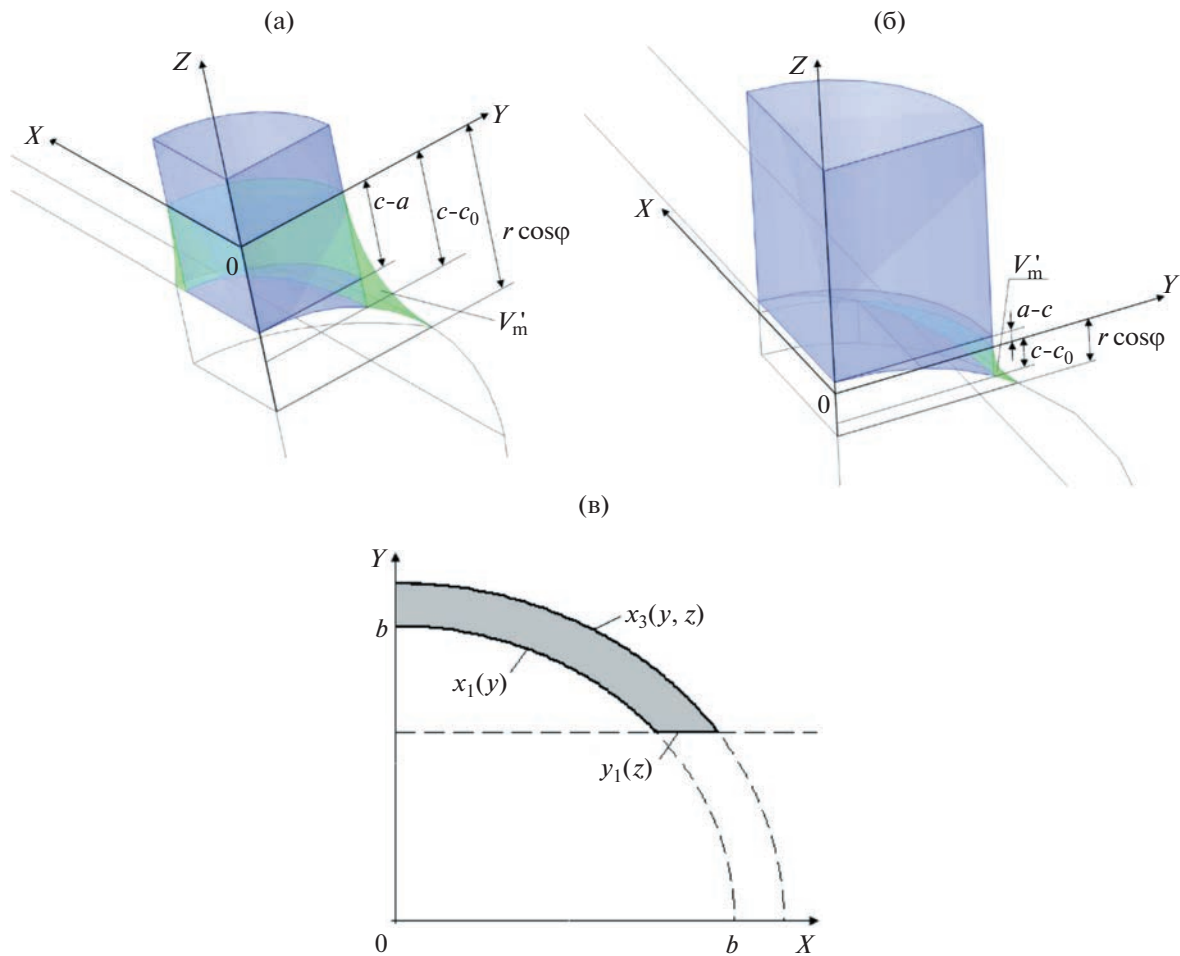


Рис. 5. (а) – Тональное отверстие с выделенным дополнительным объемом V'_m при $r > r_0$, (б) – в случае $r < r_0$, (в) – поперечное сечение объема V'_m на уровне $-(c - c_0) \leq z < -(c - a)$.

числения области. При $-r \cos \varphi \leq z < -(c - c_0)$ (рис. 4б)

$$S_{lm}(z) = S_l''(z), \quad (37)$$

при $-(c - c_0) \leq z < -(c - a)$ сечение имеет вид кольцевого элемента (рис. 5в)

$$S_{2m}(z) = 4 \left[\int_{y_1(z)}^b \int_{x_1(y)}^{x_3(y, z)} dx dy + \int_b^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y, z)} dx dy \right], \quad (38)$$

а при $-(c - a) \leq z < 0$ представляет кольцо с постепенно уменьшающимся до величины b радиусом внешней окружности (рис. 5а)

$$S_{3m}(z) = 4 \left[\int_0^b \int_{x_1(y)}^{x_3(y, z)} dx dy + \int_b^{y_2(z)} \int_0^{x_3(y, z)} dx dy \right]. \quad (39)$$

Интегрирование в формулах (37)–(39) проводится в пределах первой четверти.

Собственный объем тонального отверстия при $r > r_0$ в зависимости от координаты его нижнего уровня z_1 будет иметь вид

$$V_1(z_1) = V_0 + \int_{z_1}^{-(c-c_0)} S_{lm}(z) dz + \int_{-(c-c_0)}^{-(c-a)} S_{2m}(z) dz + \int_{-(c-a)}^0 S_{3m}(z) dz$$

для $-r \cos \varphi \leq z_1 < -(c - c_0)$ либо

$$V_2(z_1) = V_0 + \int_{z_1}^{-(c-a)} S_{2m}(z) dz + \int_{-(c-a)}^0 S_{3m}(z) dz$$

при $-(c - c_0) \leq z_1 < -(c - a)$. Среднее значение объема тонального отверстия

$$V_1^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi - (c - a)} \times \times \left[\int_{-r \cos \varphi}^{-(c-c_0)} V_1(z_1) dz_1 + \int_{-(c-c_0)}^{-(c-a)} V_2(z_1) dz_1 \right]. \quad (40)$$

В случае малых радиусов кривизны ($r \leq r_0$) площадь $S_{3m}(z) = 0$, а средний объем

$$V_2^{\text{av}} = \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\int_{-r \cos \varphi}^{-(c-c_0)} V_1(z_1) dz_1 + \int_{-(c-c_0)}^0 V_2(z_1) dz_1 \right]. \quad (41)$$

Шунтирующий импеданс (6) эквивалентного отверстия с острыми краями в низкочастотном приближении будет иметь вид

$$Z_s^{(c)} = -j \frac{\rho c}{\pi b_{\text{eff}}^2 k (t + t_m(b_{\text{eff}}))}. \quad (42)$$

Приравнявая импедансы (42) и (21), учитывая, что $k = \omega/c$, а также выражение (22), получим уравнение

$$\pi b_{\text{eff}}^2 (t + t_m(b_{\text{eff}})) = V, \quad (43)$$

позволяющее определить эффективный радиус b_{eff} и рассчитать резонансные частоты воздушно-го канала с закрытым отверстием при различных радиусах кривизны r . Правая часть выражения (43) предполагает использование усредненных объемов (40)–(41).

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Оценка входного импеданса и, соответственно, резонансных частот деревянных духовых инструментов с помощью метода конечных элементов (МКЭ) включает построение трехмерной модели столба воздуха, окруженного сферой, принимающей излучение, и решение уравнения

Гельмгольца $\nabla^2 p + k^2 p = 0$ для ряда выбранных частот. Сетка конечных элементов должна занимать объем как внутри, так и снаружи моделируемой части инструмента, а окружающая сферическая область должна иметь неотражающие граничные условия. В данном случае для увеличения степени точности моделирования и выделения зависимости собственной частоты канала именно от величины радиуса кривизны r и обусловленного им дополнительного объема V_m' можно отказаться от построения сферической области, увеличив длину канала и тонального отверстия на соответствующий параметр коррекции (10) либо (11), связанный с излучением открытых концов. Отсутствие окружающей сферической области позволит без существенного ущерба для результата, оставаясь в рамках ограниченных вычисли-

тельных мощностей, увеличить качество разбиения интересующих нас областей.

В качестве моделируемого объекта был взят воздушный канал (труба) длиной $L = 10$ см и радиусом $a = 8$ мм. Канал имел одно центральное перпендикулярное боковое цилиндрическое отверстие с радиусом $b = 4$ мм и высотой $t = 5.6$ мм ($\delta = 0.5$; $\epsilon_0 = 0.5$). Высота отверстия t над каналом сохранялась неизменной при любом радиусе кривизны r (рис. 16). Моделирование проводилось для открытого с одной стороны канала без фланца. Открытое отверстие также имело бесфланцевое окончание. С учетом симметрии рассматривалась только половина модели, поэтому на плоскости симметрии было задано граничное условие, определяющее нулевое нормальное ускорение ($a_n = 0$). В случае открытых торцов (основного канала и отверстия) на границе задавалось нулевое значение по акустическому давлению ($p = 0$). Канал с отверстием содержал три домена — две цилиндрических области (основной канал и отверстие), а также выделенную область дополнительного объема V_m' (рис. 6). Для дискретизации геометрии и решения во всех доменах использовались криволинейные элементы Лагранжа второго порядка. На рис. 6 представлено разбиение воздушного канала сеткой тетраэдрических конечных элементов в районе тонального отверстия. Плотность сетки была увеличена в области дополнительного объема V_m' для лучшего выявления оказываемого им влияния на смещение собственной частоты канала. Количество степеней свободы (DOF) в пределах моделируемого объема составляло около $(2...3) \times 10^5$, что существенно превосходит минимально рекомендуемое на кубический метр $(1728/\lambda_{\min}^3)$, где $\lambda_{\min}$ — наименьшая длина волны в моделировании [19]. В данном случае $\lambda_{\min} \approx 28.6$ см, что соответствует $f_{\max} = 1.2 \times 10^3$ Гц. Все эксперименты были выполнены в программе COMSOL Multiphysics 5.6 с использованием встроенного модуля “Pressure Acoustics”. Влияние термовязкостных потерь незначительно для большинства тональных отверстий деревянных духовых инструментов, поэтому при моделировании и в расчетах они не учитывались.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 7 показаны зависимости эффективно-го радиуса b_{eff} (рис. 7а) и частоты f основного тона (рис. 7б) воздушного канала от приведенного радиуса кривизны r/b краев для открытого тонального отверстия. Видно, что с увеличением степени подрезки краев отверстия растет его эффективный радиус, за счет чего происходит некоторое уменьшение длины канала и смещение

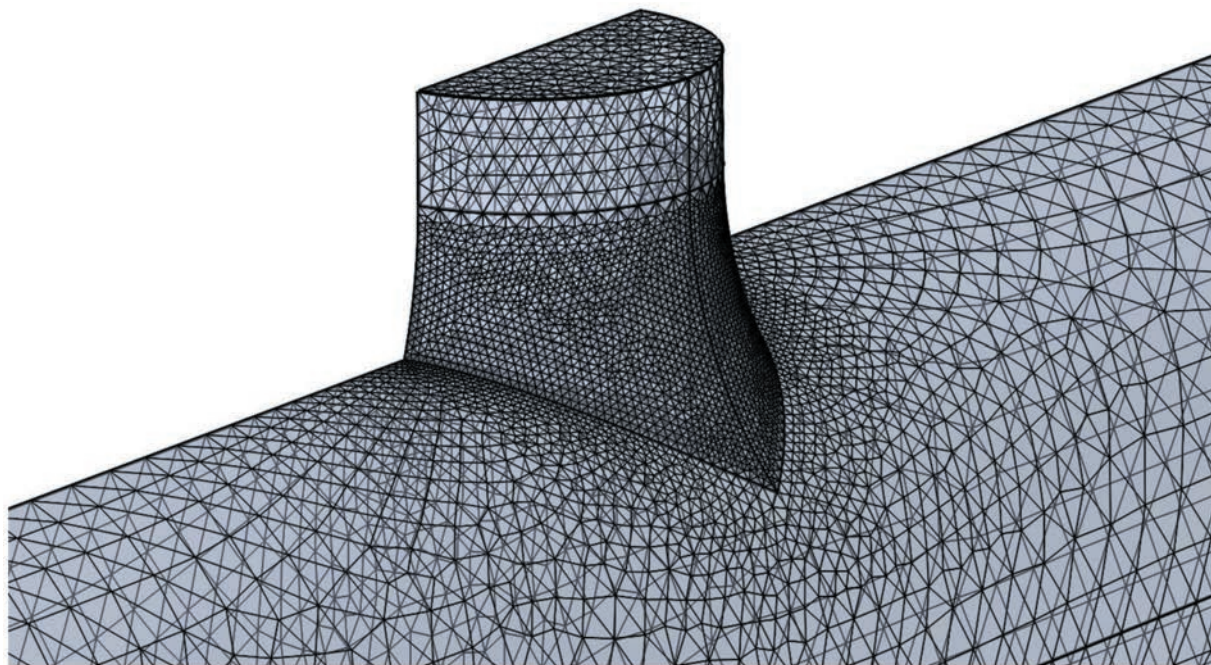


Рис. 6. Визуализация сетки конечных элементов в области тонального отверстия и дополнительного объема V'_m .

резонансной частоты. Для сравнения частоты были рассчитаны в разных приближениях. В самом грубом приближении эффективный радиус b_{eff} находился из равенства акустических масс отверстия (28)–(29) и эквивалентного ему цилиндра с массой $m_a = \rho L_h / \pi b_{\text{eff}}^2$ (рис. 7а, 7б, кривые 1). Остальные зависимости на рис. 7 построены с учетом изменения параметров t_i , t_m и t_r без усреднения (кривые 2) либо с использованием усреднения (30)–(31) акустической массы отверстия (кривые 3). Видно, что расчетные зависимости (кривые 2 и 3) коррелируют с результатами компьютерного моделирования (кривая 4), которые могут быть несколько завышены из-за отсутствия окружающей канал сферической области воздушного пространства и замены ее на соответствующую поправку (10) к длинам канала и отверстия. В расчетах не учитывалось также влияние изменения эффективного радиуса отверстия на поправку t_a , связанную с последовательным импедансом звукового отверстия Z_a . Корректировка длины $t_a \sim 10^{-4}$ м, что на порядок меньше высоты t и поправок t_i и t_r , определяющих Z_s , поэтому при нахождении эффективного шунтирующего импеданса отверстия $Z_s^{\text{eff}} = Z_s - Z_a/4$ вторым слагаемым можно было пренебречь. Несмотря на указанные допущения, видно, что результаты компьютерного моделирования ближе к расчетным с учетом усреднения акустической массы отверстия при $r/b \geq 1.4$. Учитывая возможную за-

вышенность результатов моделирования, можно сделать вывод о том, что большее соответствие будет и при $r/b < 1.4$, если использовать усреднение (30)–(31). Отметим при этом, что наименьшая разница частот двух последовательных тонов, которую может обнаружить слушатель, составляет примерно $c_1 = 8$ центов (0.5%) на частоте 200 Гц и уменьшается до $c_2 = 3$ центов (0.2%) на частоте 1 кГц [20]. Относительный интервал (в процентах) между двумя тонами f_1 и f_2 определяется как

$$\frac{\Delta f}{f_1} = (2^{\frac{c}{1200}} - 1) \times 100\%,$$

где c – разность частот тонов, выраженная в центах. Из приведенных зависимостей можно установить, что слышимая разность в 0.2% ($\Delta f \approx 2$ Гц, $f_1 = 1100$ Гц) будет достигаться при значениях приведенного радиуса кривизны $r/b > 0.8$. Поэтому использование на практике подрезки тональных отверстий с малыми значениями параметра ϵ ($\epsilon \leq \epsilon_0$) для корректировки высоты нот не будет иметь должного эффекта.

На рис. 8 показаны зависимости радиуса b_{eff} (рис. 8а) и частоты f основного тона (рис. 8б) воздушного канала от отношения r/b для закрытого тонального отверстия. С увеличением степени подрезки краев отверстия аналогичным образом растет его эффективный радиус, за счет чего происходит увеличение объема воздушного канала и

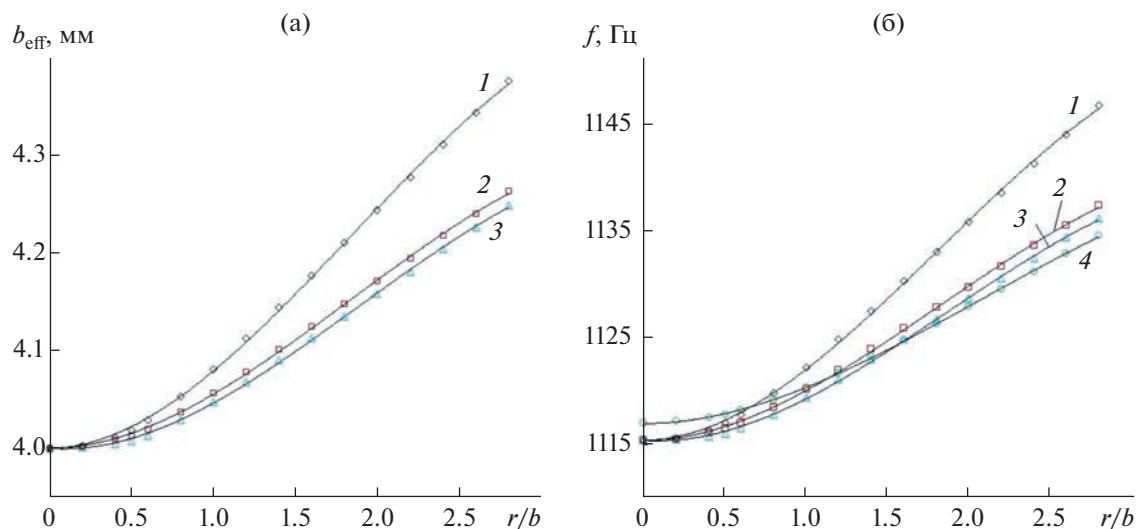


Рис. 7. (а) – Зависимость эффективного радиуса b_{eff} открытого тонального отверстия от отношения r/b , (б) – сравнение зависимостей частоты f основного тона воздушного канала от приведенного радиуса кривизны r/b краев открытого звукового отверстия. 1 – Расчеты с использованием акустической массы (28)–(29), 2 – по формуле (32) без усреднения (30)–(31), 3 – по формуле (32) с использованием усреднения (30)–(31), 4 – результаты компьютерного моделирования. Сплошные линии – кубические аппроксимации расчетных данных и результатов моделирования.

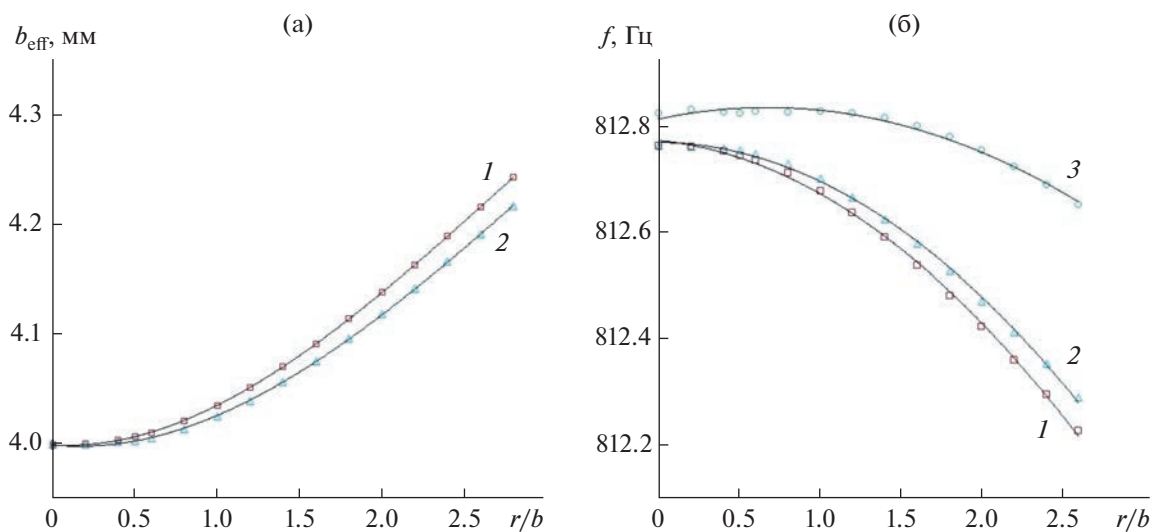


Рис. 8. (а) – Зависимость эффективного радиуса b_{eff} закрытого тонального отверстия от отношения r/b , (б) – сравнение зависимостей частоты f основного тона воздушного канала от приведенного радиуса кривизны r/b краев закрытого звукового отверстия. 1 – Расчеты без усреднения объема (с использованием (34)–(35)), 2 – расчеты с усреднением объема (с использованием (40)–(41)), 3 – результаты компьютерного моделирования. Сплошные линии – кубические аппроксимации расчетных данных и результатов моделирования.

соответствующее понижение его резонансной частоты. Отметим, что изменение частоты в данном случае в рамках моделирования незначительно (≈ 0.15 Гц). Расхождение между моделированием и численными расчетами имеет тот же порядок и, возможно, обусловлено несколько завышенными значениями компьютерного эксперимента. Мож-

но также заметить, что результаты моделирования ближе к расчетным с учетом усреднения (40)–(41) собственного объема отверстия. Малые изменения частоты ($\sim 10^{-1}$ Гц) не могут быть обнаружены слушателем, но стоит помнить, что кумулятивный эффект от ряда тональных отверстий, имеющих какую-либо степень подрезки,

уже может оказать заметное влияние на характеристики инструмента.

Приведенный в данной работе алгоритм расчета эффективных радиусов тональных отверстий и определения собственных частот воздушного канала может быть применен для любых видов симметричной подрезки, применяющихся при изготовлении духовых инструментов и подробно описанных в исследовании [9]. Следует также помнить, что не существует простого способа вычисления положения и размеров каждого звукового отверстия по отдельности. Это означает, что небольшое изменение геометрии одной части инструмента, например, формы тонального отверстия для исправления определенной ноты, может оказать неожиданное и, чаще всего, неблагоприятное влияние на другие ноты (резонансные частоты) с точки зрения высоты тона, тембра, стабильности и т.д. Решение этой задачи дополнительно должно включать в себя использование некоторого алгоритма глобальной оптимизации, с помощью которого можно вычислить расположение, размеры и форму тональных отверстий инструмента для всевозможных аппликатур.

Другая сложность, ограничивающая точность любых расчетов и моделирований, заключается в количественной оценке механико-акустических свойств амбушюра слушателя. Тем не менее в рамках разумных предположений, основанных на экспериментах, математические модели музыкальной акустики могут быть решены, чтобы предсказать поведение и расширить области разработки и проектирования качественных музыкальных инструментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Keefe D.* Woodwind tonehole acoustics and the spectrum transformation function / Ph.D. thesis, Case Western Reserve University, 1981.
2. *Keefe D.* Experiments on the single woodwind tonehole // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V. 72. № 3. P. 688–699. <https://doi.org/10.1121/1.388249>
3. *Keefe D.* Theory of the single woodwind tonehole // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V. 72. № 3. P. 676–687. <https://doi.org/10.1121/1.388248>
4. *Keefe D.* Woodwind air column models // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 88. № 1. P. 35–51. <https://doi.org/10.1121/1.399911>
5. *Nederveen C., Jansen J., van Hassel R.R.* Corrections for woodwind tonehole calculations // *Acustica*. 1998. V. 84. P. 957–966.
6. *Dubos V., Kergomard J., Khettabi A., Dalmont J., Keefe D., Nederveen C.* Theory of sound propagation in a duct with a branched tube using modal decomposition // *Acustica*. 1999. V. 85. P. 153–169.
7. *Lefebvre A., Scavone G.P.* Characterization of woodwind instrument toneholes with the finite element method // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131. № 4. P. 3153–3163. <https://doi.org/10.1121/1.3685481>
8. *Lefebvre A., Scavone G.P., Kergomard J.* External tone-hole interactions in woodwind instruments // *Acta Acust. United Ac.* 2013. V. 99. № 6. P. 975–985. <https://doi.org/10.3813/aaa.918676>
9. *Greenham A.C.* Clarinet Toneholes: A Study of Undercutting and its Effects / PhD thesis, London Metropolitan University, United Kingdom, 2003. <https://repository.londonmet.ac.uk/7273/>
10. *Benade A.H.* Fundamentals of musical acoustics. Oxford University Press, 1976. <https://doi.org/10.1063/1.3037454>
11. *Nederveen C.* Acoustical aspects of woodwind instruments (Revised ed.). Illinois: Northern Illinois University Press, 1998. (Original work published 1969) <https://doi.org/10.2307/842089>
12. *Dalmont J., Nederveen C., Dubos V., Ollivier S., Meserette V., te Sligte E.* Experimental determination of the equivalent circuit of an open side hole: Linear and non-linear behavior // *Acustica*. 2002. V. 88. P. 567–575.
13. *MacDonald R.* A Study of the Undercutting of Woodwind Toneholes Using Particle Image Velocimetry / PhD thesis, University of Edinburgh, United Kingdom, 2009. <http://www.acoustics.ed.ac.uk/research/phd-theses/>
14. *Garcia Mayen H., Kergomard J., Vergez C., Guillemain P., Jousserand M., Pachebat M., Sanchez P.* Characterization of open woodwind toneholes by the tube reversed method // *J. Acoust. Soc. Am.* 2021. V. 150. № 5. P. 3763–3772. <https://doi.org/10.1121/10.0007131>
15. *Dalmont J., Nederveen C., Joly N.* Radiation impedance of tubes with different flanges: numerical and experimental investigations // *J. Sound Vib.* 2001. V. 244. № 3. P. 505–534. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3487>
16. *Levine H., Schwinger J.* On the radiation of sound from an unflanged circular pipe // *Phys. Rev.* 1948. V. 73. P. 383–406. <https://doi.org/10.1103/physrev.73.383>
17. *Nomura Y., Yamamura I., Inawashiro S.* On the acoustic radiation from a flanged circular pipe // *J. Phys. Soc. Japan*. 1960. V. 15. № 3. P. 510–517. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.15.510>
18. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
19. *Lefebvre A.* Computational Acoustic Methods for the Design of Woodwind Instruments / PhD thesis, Computational Acoustic Modeling Laboratory McGill University, Montreal, Canada, 2010. (Дата обращения 18.03.2023 г.) https://www.music.mcgill.ca/caml/lib/exe/fetch.php?media=publications:phd_lefebvre_2010.pdf
20. *Hartmann W.M.* Pitch, periodicity, and auditory organization // *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 100. № 6. P. 3491–3502. <https://doi.org/10.1121/1.417248>

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 620.179;534.6;519.24

ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ СИГНАЛОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

© 2023 г. В. И. Ерофеев^а, А. В. Иляхинский^{а, *}, В. М. Родюшкин^а, Д. А. Рябов^{б, **}, А. А. Хлыбов^б

^аИнститут проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук”, ул. Белинского 85, Нижний Новгород, 603024 Россия

^бФГБОУ ВО “Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева”, ул. Минина 24, Нижний Новгород, 603155 Россия

*e-mail: ilyahinsky-aleks@bk.ru

**e-mail: ryabovdm1996@gmail.com

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.

После доработки 17.02.2023 г.

Принята к публикации 16.03.2023 г.

Предложен новый информационно-статистический подход, позволяющий рассматривать акустическую эмиссию (АЭ) с позиции синергетики на основе представления процессов, определяющих состояние исследуемого объекта, статистической моделью (образом) в виде функции плотности вероятностей. Показано, что многомерное распределение Дирихле обладает совокупностью свойств, дающих возможность использовать его для определения интегральной меры оценки по наблюдаемым сигналам АЭ процесса пластической деформации. В качестве количественной меры при анализе процесса пластической деформации по сигналам АЭ предлагается использовать параметр самоорганизации. На примере штатных механических испытаний конструкционной углеродистой стали 20 с перлитно-ферритной структурой показано, что информационно-статистический параметр самоорганизации является наиболее информативным при описании процессов, связанных с АЭ.

Ключевые слова: акустическая эмиссия, временные ряды, статистическая модель, функция плотности вероятностей, распределение Дирихле, энтропия, самоорганизация

DOI: 10.31857/S032079192360018X, **EDN:** ZVAWWB

ВВЕДЕНИЕ

Акустическая эмиссия (АЭ) представляет собой излучение акустических (упругих) волн в твердых телах, возникающее в результате высвобождения накопленной упругой энергии в широком диапазоне материалов, структур и процессов [1]. Наиболее крупномасштабная АЭ связана с существованием сейсмических волн, в то время как наименьший масштабный уровень эмиссии вызывается дислокационным движением в нагруженных структурах материала. Частотный диапазон излучаемых упругих волн занимает диапазон от единиц Гц до десятков МГц. Инфразвуковой диапазон частот (единицы Гц), называемый также сейсмическим, применяется в сейсморазведке [2]. Ультразвуковой диапазон частот от сотен кГц до десятков МГц используется в промышленности для раннего распознавания деформаций, зарождения и развития трещин, процессов структурной деградации материалов [3–5]. В геофизике этот частотный диапазон используется для изучения механизмов трещинообразова-

ния горных пород [6]. Звуковой диапазон от сотен Гц до десятков кГц занимает промежуточное положение и играет важную роль в формировании предвестников землетрясений различной природы [7, 8].

Временные ряды — одна из наиболее распространенных форм представления мониторинга исследуемых характеристик АЭ, которые отражают как внутреннюю динамику и взаимные связи исследуемых процессов, так и изменчивость этой динамики и связей во времени. В одном случае основная задача анализа сигнала АЭ — понять, под действием каких компонент и как формируется значение временного ряда сигнала АЭ. В другом случае — как по косвенным проявлениям процесса или по наблюдаемым следствиям определить причины этих наблюдений. Решение задачи определения причин появления сигналов АЭ, анализа процессов, лежащих в основе их появления, зависит как от качества и количества полученной из эксперимента информации, так и от параметров выбранной модели исследуемого процесса [3, 9]. К сожалению, сложившиеся к на-

стоящему времени методы математической обработки параметров АЭ, использующие модели параметров временного ряда [9, 10], в том числе степенные законы Омори и Гутенберга—Рихтера [11] и модель Палмера—Хилда [12] не всегда позволяют связать результаты анализа с состоянием исследуемого объекта или природного явления. Это приводит к необходимости разработки новых методов анализа сигналов АЭ, основанных на механизме этого явления. В данной статье предлагается информационно-статистический подход к количественной интерпретации экспериментальных данных по наблюдениям сигналов АЭ при разрушении образца стали 20.

ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД И МЕТОДИКА АНАЛИЗА СИГНАЛОВ АЭ

Известно [13, 14], что качественное изменение свойств материала в результате внешнего воздействия связано с комплексом взаимосвязанных процессов механической и физико-химической природы, которые обнаруживают вероятностную природу, начиная с атомно-молекулярного уровня и заканчивая уровнем деталей и узлов, а также уровнем зон трещиноватости и дробления горных пород, разломов, надвигов и прочее. Это означает, что параметры сигналов АЭ, являющиеся отображением указанных процессов, определяются совокупностью случайных ситуаций и могут быть представлены статистической моделью (образом) в виде распределения вероятностей.

Распределение вероятностей как модель изучаемого явления должно быть информационно эквивалентно объекту исследования путем соблюдения следующих условий [15]:

- распределение, выбранное в качестве статистической модели, должно быть определено на ограниченном интервале;
- энтропия распределения должна состоять из производства и потока;
- распределения, определенные на одномерных симплексах, должны допускать переход к распределению, определенному на многомерном симплексе.

В известной формулировке В.В. Налимова о выборе распределения вероятностей в качестве статистической модели это звучит так: “Выбор распределения должен базироваться, прежде всего, на понимании механизма изучаемого явления” [16]. Следует отметить, что определенное на неограниченном интервале нормальное распределение, как статистическая модель исследуемого процесса, предполагает наличие у исследуемого объекта физических свойств, параметры которых стремятся к неограниченно большой или малой величине. Очевидно, что таких свойств нет.

Ограниченная конечным интервалом изменения случайной величины $0 \leq \sum x_i \leq 1$ статистическая модель в виде многомерного распределения Дирихле оказалась полезной при исследовании процессов в многоуровневых распределенных системах [17]. Функция плотности вероятности распределения Дирихле, определенная на k -мерном симплексе, равна

$$D(x_1, \dots, x_k) = \frac{\Gamma(a_n)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(v_i)} \prod_{i=1}^k x_i^{v_i-1} \left(1 - \sum_{i=1}^k x_i\right)^{v_n-1},$$

$$0 \leq \sum x_i \leq 1; \quad v_i \geq 0, \dots, v_n \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^n v_i = a_n; \quad n = k + 1. \quad (1)$$

Распределение (1) как модель отражает результат совместной реализации $n - 1$ независимых процессов x_j , протекающих со скоростями (интенсивностями) v_j , и противоположного им по смыслу процесса $1 - \sum_{i=1}^k x_i$, протекающего со скоростью v_n [15]. В этом смысле распределение информационно эквивалентно объекту любой природы и степени сложности. Если рассматривать состояние исследуемого объекта как результат совместной реализации двух независимых и противоположных по смыслу процессов: x , протекающего со скоростью (интенсивностью) v_1 , и противоположного ему процесса $1 - x$, протекающего со скоростью v_2 , то в качестве статистической модели такой системы может быть выбрано определенное на одномерном симплексе распределение Дирихле — бета-распределение с функцией плотности вероятности

$$Be(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)} x^{v_1-1} (1-x)^{v_2-1},$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad v_1 > 0, \quad v_2 > 0, \quad \alpha = v_1 + v_2.$$

В (1) и (2) $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Выражение для энтропии функции плотности вероятностей распределения Дирихле в соответствии с определением [18]

$$H = - \int_x \varphi(x) \lg_{\alpha} \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ — функция плотности вероятности распределения случайной величины, можно представить выражением [19]

$$H(v_1, \dots, v_n) = \ln \prod_{i=1}^n \Gamma(v_i) - \ln \Gamma(\alpha_n) +$$

$$+ (\alpha_n - n) \psi(\alpha_n) - \sum_{i=1}^n (v_i - 1) \psi(v_i), \quad (3)$$

в котором слагаемое

$$H_i(v_1, \dots, v_n) = \ln \prod_{i=1}^n \Gamma(v_i) - \sum_{i=1}^n (v_i - 1) \psi(v_i) \quad (4)$$

представляет собой отвечающее второму закону термодинамики производство энтропии, а слагаемое

$$H_e(\alpha_n) = -\ln \Gamma(\alpha_n) + (\alpha_n - n) \psi(\alpha_n) \quad (5)$$

представляет собой поток энтропии, характеризующий процессы взаимодействия с внешней средой. Здесь $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции (пси-функция Эйлера). При $n = 2$ (случай бета-распределения) поток энтропии (5) имеет положительное значение при любых значениях α_n , а при $n \geq 3$ он может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Поскольку для возникновения согласованного во времени поведения необходимы тримолекулярные реакции или процессы более высокого порядка [20, 21], то условие $H_e(\alpha_n) < 0$ при $n \geq 3$ для энтропии (5) может быть использовано для построения критериев процессов самоорганизации и процессов возникновения диссипативных структур, характеризующих определенный уровень в иерархическом описании системы. Поэтому за диагностический критерий состояния процессов был принят параметр самоорганизации, в качестве которого выбрано отношение

$$K_c = \frac{\sum i Q_{d-}^i}{\sum i Q_{d-}^i + \sum j Q_{d+}^j}, \quad (6)$$

в котором $\sum i Q_{d-}^i$ — суммарно взвешенное количество Q выявленных в анализируемом числовом ряде зарегистрированного сигнала АЭ моделей Дирихле i -ой размерности, имеющих отрицательное значение внешней (потока) энтропии (5), а $\sum i Q_{d-}^i + \sum j Q_{d+}^j$ — сумма суммарно взвешенного количества моделей Дирихле, имеющих отрицательное и положительное значение внешней энтропии. В качестве меры структуры параметра самоорганизации принята величина K_{ci} вклада в значение параметра самоорганизации моделей Дирихле каждой i -ой размерности

$$K_{ci} = \frac{i Q_{d-}^i}{\sum i Q_{d-}^i + \sum j Q_{d+}^j}. \quad (7)$$

Так как распределение (1) полностью определено скоростями независимых процессов v_i , то построенный на его базе критерий состояния инвариантен не только к виду состояния, но и типу процессов, обеспечивая единство оценочного ал-

горитма для различных целевых состояний системы (см. например, [22, 23]).

Методически результат вычисления диагностического параметра самоорганизации состояния процесса с использованием распределения Дирихле достигается тем, что предварительно оцифрованный временной ряд объема N непрерывно-скользящим смещением с шагом на одно значение выборки m разбивается на последовательность выборок m_i , где $i = 1 \dots N - m$. Для каждой выборки m_i определяются показатели асимметрии $\beta_{1(i)} = \mu_3^2 / \mu_2^3$ и показатель эксцесса $\beta_{2(i)} = \mu_4 / \mu_2^2$, для которых μ_2, μ_3 и μ_4 — выборочные значения второго, третьего и четвертого центральных моментов, соответственно. По полученным значениям $\beta_{1(i)}$ и $\beta_{2(i)}$ для выборок m_i проводят оценку параметров формы бета-распределений (одномерных распределений Дирихле) как [15]

$$\alpha_i = \frac{6(\beta_{2(i)} - \beta_{1(i)} - 1)}{6 + 3\beta_{1(i)} - 2\beta_{2(i)}}. \quad (8)$$

Если значение (8) меньше нуля, то начальная выборка m_i смещается на один шаг, и операции вычисления повторяются до момента выполнения условия $\alpha_i > 0$ (“захват модели”). Далее операции смещения выборки и вычисления параметра α_i повторяются до окончания числовой последовательности временного ряда. Если при смещении выборки после “захвата модели” имеет место $\alpha_i < 0$, то операции вычисления (8) проводятся с исключением и заменой последнего значения выборки следующим за ним значением числового ряда x_{n+1} до момента $\alpha_i > 0$. Используя свойство распределения Дирихле, согласно которому [24] если $(x_1 \dots x_k)$ — векторная случайная величина имеет k -мерное распределение Дирихле $D(x_1 \dots x_k)$, то сумма $x_1 + \dots + x_k$ имеет бета-распределение $Be(x_1 + \dots + x_k)$. При этом осуществляют переход от последовательности бета-распределений к многомерным распределениям Дирихле. Этот переход проводят путем формирования выборок m_j , каждый член которой y_i равен сумме одноименных членов исходных m_i выборок $y_i = x_1^i + \dots + x_n^i$, с последующим вычислением значений параметра формы α_i для бета-распределения $Be(x_1 + \dots + x_k)$ в соответствии с (8) и для распределения Дирихле $D(x_1 \dots x_k)$ в соответствии с внешней энтропией (5). Формирование выборок, каждый член которой равен сумме одноименных членов $x_1^i, x_2^i, x_3^i \dots x_n^i$, продолжается до получения значения внешней энтропии (8) распределения Дирихле нужной размерности.

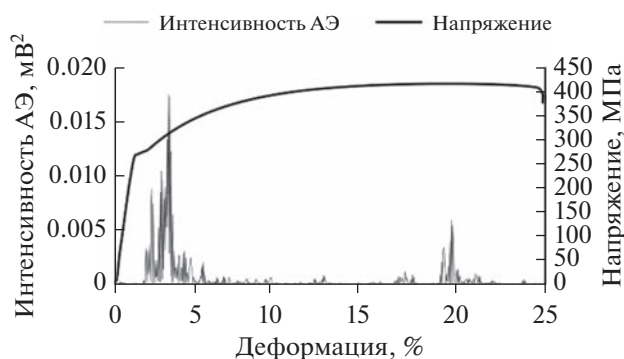


Рис. 1. Диаграмма деформирования стали 20 и интенсивность сигнала АЭ.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Информационно-статистический метод был апробирован при анализе сигналов АЭ ультразвукового диапазона, сформировавшихся при статическом нагружении плоского образца № 21 по ГОСТ 1497-84 из стали 20 в нормализованном состоянии с перлитно-ферритной структурой. Измеренные механические характеристики объекта исследования составили: предел прочности $\sigma_b = 442$ МПа; условный предел текучести $\sigma_{0.2} = 275$ МПа; относительное удлинение $\delta = 27\%$. Химический состав исследуемого материала в процентном соотношении: C = 0.19%, Mn = 0.45%, Si = 0.2%, Cr = 0.08%, Ni = 0.06%, Cu = 0.05%, S = 0.02%, P = 0.01%.

Испытание на растяжение с одновременной регистрацией акустической эмиссии проводили на универсальной испытательной машине фирмы Tinius Ollsen Ltd, модель H100KU при скорости перемещения активного захвата 0.05 м/мин. Изменение во времени действующего на испытуемый образец напряжения регистрировалось с точностью 0.5% средствами испытательной машины. Деформация образца измерялась экстензометром модели 3542 с базой 50 мм и разрешающей способностью системы измерения деформации 0.0001 мм. Регистрация сигналов АЭ проводилась широкополосным датчиком GT350 фирмы Global Test с рабочим диапазоном частот 100–800 кГц. Полученный сигнал оцифровывался с помощью шестнадцатиканальной платы сбора данных National Instruments NI 6363 с частотой дискретизации 1 МГц/канал с последующим сохранением результатов в виде временного ряда в памяти компьютера.

Объем зарегистрированного временного ряда сигнала АЭ за время испытания составил 1048576 значений. В качестве информативного параметра для последующей обработки использовали равную квадрату амплитуды интенсивность АЭ излучения. После отсека шумовой компоненты

порогом 0.001 мВ² (максимально зарегистрированная интенсивность АЭ сигнала без механического воздействия на образец) временной ряд сигналов АЭ сократился до 578 значений.

Значительное превышение квадрата амплитуды сигнала АЭ над уровнем шума до 12 и 8 дБ обнаружено в области начала пластической деформации (площадка текучести) и в зоне максимального деформационного упрочнения (рис. 1). На начальной стадии пластической деформации происходит увеличение плотности дислокаций, их самоорганизация и формирование дислокационной ячеистой структуры с критической плотностью дислокаций. Область максимального деформационного упрочнения характеризуется возникновением несплошностей, деструкцией материала и образованием фрагментированной мезоструктуры [25].

Сравнительный анализ сигнала АЭ для области начала пластической деформации и области максимального деформационного упрочнения проводился по величине информационной энтропии, фрактальной размерности и параметру самоорганизации.

Расчет информационной энтропии сигнала проводился по стандартному алгоритму [26]:

$$S_{\text{inf}} = -\sum p_i \ln p_i, \quad (9)$$

где p_i – вероятность i -го уровня квадрата амплитуды сигнала. Средствами Microsoft Excel были построены гистограммы распределения по вероятности квадрата амплитуды сигнала АЭ для зоны площадки текучести и зоны максимального упрочнения, которые представлены на рис. 2, где по оси абсцисс отображены интервалы разбиения выборки сигнала АЭ, а по оси ординат вероятности попадания значений сигнала АЭ в этот интервал.

Определение фрактальной размерности квадрата амплитуды сигнала АЭ указанных выше зон пластической деформации производилось по алгоритму $D = 2 - H$, где D – фрактальная размерность, а H – показатель Херста, который определяется методом нормированного размаха [27] как

$$H = \frac{\ln R/S}{\ln \pi n/2}, \quad (10)$$

где S – стандартное отклонение, n – объем значений анализируемого числового ряда, R представляет собой разность между максимальным и минимальным отклонениями значений числового ряда A_i от среднего A_{cp} :

$$R = \max(A_i - A_{cp}) - \min(A_i - A_{cp}). \quad (11)$$

Вычисление значения параметра самоорганизации проводилось по методике, изложенной выше в соответствии с (6), а его структуры как (7) при объеме выборки m , равном 24.

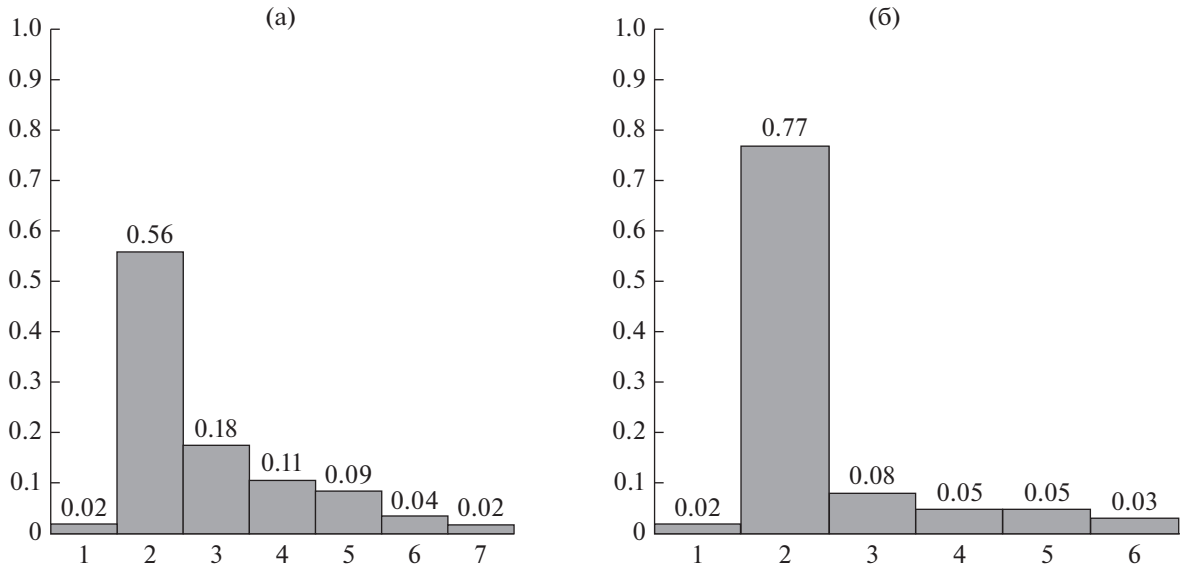


Рис. 2. Гистограммы распределения по вероятности сигналов АЭ: (а) – область площадки текучести, (б) – область максимального упрочнения.

Следует отметить, что значения информационной энтропии, фрактальной размерности и параметра самоорганизации амплитудного распределения отличаются техническими, количественными и качественными характеристиками. Поэтому для исключения влияния физической сущности и размерности критериев на результаты сравнения параметров сигнала АЭ полученные натуральные значения были преобразованы с использованием функции Харрингтона в единую безразмерную шкалу желательности по формуле [28]

$$d = \exp \left(-\exp \left(-\left(9 \left(\frac{Y-b}{c-b} \right)^{1.927} - 2 \right) \right) \right). \quad (12)$$

Здесь Y – натуральное значение параметра, b – минимально возможное, а c – максимально возможное его значение. Для параметра самоорганизации $0 \leq K_c \leq 1$, фрактальной размерности $1 \leq D \leq 2$ и информационной энтропии $0 \leq S_{\text{inf}} \leq \ln(n)$, где n – число состояний. Для области начала пластической деформации (см. рис. 2) $n = 7$, а для зоны максимального деформационного упрочнения $n = 6$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные значения информационной энтропии S_{inf} , фрактальной размерности D и параметра самоорганизации K_c амплитудного распределения сигнала АЭ для области площадки текучести и области максимального упрочнения в натуральном выражении и обобщенных интегральных показателях приведены в табл. 1.

На рис. 3 представлена структура параметра самоорганизации амплитудного распределения сигнала АЭ для области площадки текучести и области максимального упрочнения.

Как видно из результатов, приведенных в табл. 1, информационная энтропия S_{inf} , фрактальная размерность D и параметр самоорганизации K_c сигнала АЭ для области максимального упрочнения имеют меньшие значения, чем в области пластической деформации. Однако, за значимые изменения можно принять только изменения для информационной энтропии S_{inf} и параметра самоорганизации K_c , так как значения этих величин для области пластической деформации и области максимального упрочнения определяются разными значениями на “сильной” шкале Харрингтона. Причем, если значения S_{inf} различаются как

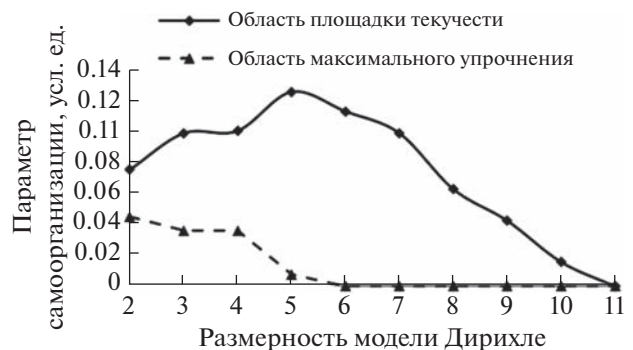


Рис. 3. Структура параметра самоорганизации амплитудного распределения сигнала АЭ для области площадки текучести и области максимального упрочнения.

Таблица 1. Статистические параметры сигнала АЭ для области площадки текучести и области максимального упрочнения.

Исследуемая зона	Параметры сигнала АЭ		Обобщенная функция желательности	
			значение	характеристика
Область пластической деформации	Информационная энтропия, S_{inf}	1.34	0.91	Очень хорошо
	Фрактальная размерность, D	1.69	0.91	Очень хорошо
	Параметр самоорганизации, K_c	0.74	0.95	Очень хорошо
Область максимального упрочнения	Информационная энтропия, S_{inf}	0.88	0.48	Удовлетворительно
	Фрактальная размерность, D	1.67	0.89	Очень хорошо
	Параметр самоорганизации, K_c	0.12	0.001	Очень плохо

очень хорошо-удовлетворительно, то значения параметра самоорганизации K_c различаются сильнее как *очень хорошо-очень плохо*.

Уменьшение информационной энтропии S_{inf} и фрактальной размерности D свидетельствует о том, что в результате деформационного упрочнения сигнал АЭ становится менее хаотичным и менее кластеризованным. Это подтверждает и внешний вид гистограмм на рис. 3. В то же время, если рассматривать сигнал АЭ как отображение сменяемости стадий процесса самоорганизации дислокационной структуры, то уменьшение значения параметра самоорганизации K_c свидетельствует о снижении способности фрагментированной структуры материала зоны разрушения к самоорганизации в результате внешнего воздействия.

При переходе в зону максимального упрочнения изменяются механизм пластической деформации и условия формирования сигнала АЭ. В области площадки текучести за формирование параметра самоорганизации K_c сигнала АЭ отвечает десятимерная модель — одиннадцать процессов рождения-гибели n в терминах распределения Дирихле (рис. 3). В зоне максимального упрочнения формирование параметра самоорганизации K_c определяется только вкладом пятимерной модели — шести процессов рождения-гибели. Последнее свидетельствует о том, что формирование фрагментированной мезоструктуры в области максимального упрочнения снижает количество процессов, связанных с высвобождением накопленной упругой энергии и ответственных за формирование сигнала АЭ.

ВЫВОДЫ

1. Настоящая работа дает основание предложить новый информационно-статистический подход, позволяющий рассматривать АЭ с позиции синергетики на основе структурно-информационных критериев и их связи с процессами деформационного упрочнения.

2. Проведенное исследование свидетельствует о возможности применения статистической модели распределения Дирихле в качестве модели процессов, связанных с появлением сигналов АЭ от источников зарождающихся и развивающихся дефектов, что позволяет использовать его для определения количественной интегральной меры оценки по наблюдаемым сигналам АЭ процесса пластической деформации.

3. Предложенные интегральные информационно-статистические параметры самоорганизации являются наиболее информативными при описании процессов, связанных с АЭ, и могут быть использованы при штатных испытаниях изделий из конструкционных углеродистых сталей с перлитно-ферритной структурой.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2021–2023 гг. по теме № 0030-2021-0025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. Клюева В.В. Т. 7: В 2 кн. Кн. 1: Иванов В.И., Власов И.Э. Метод акустической эмиссии. М.: Машиностроение, 2005. 829 с.
2. Шериф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка / пер. с англ. М.: Мир, 1987. Т. 1. 448 с.
3. Беликов В.Т., Рывкин Д.Г. Использование результатов наблюдений акустической эмиссии для изучения структурных характеристик твердого тела // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 622–630.
4. Хлыбов А.А., Рябов Д.А., Пичков С.Н., Шишулин Д.Н., Захаров Д.А. Разработка акустического метода определения степени наводороживания в конструкциях из титановых сплавов // Дефектоскопия. 2019. № 4. С. 8–14.
5. Салита Д.С., Поляков В.В. Акустическая эмиссия при пластической деформации сплавов системы Pb–Sn // Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. № 2. С. 84–93.

6. Лавров А.В., Шкурятник В.Л. Акустическая эмиссия при деформировании и разрушении горных пород (обзор) // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 7. С. 6–18.
7. Сасорова Е.В., Левин Б.В. Низкочастотные сейсмические сигналы как региональные признаки подготовки землетрясений // Вулканология и сейсмология. 1999. № 4–5. С. 126–133.
8. Paparo G., Gregori G.P., Coppa U., De Ritis R., Taloni A. Acoustic Emission (AE) as a diagnostic tool in geophysics // Annals of Geophysics. 2002. V. 45. № 2. P. 401–416.
9. Робсман В.А. Нелинейная трансформация вероятностных распределений сигналов акустической эмиссии при эволюции ансамбля дефектов в твердом теле // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 846–852.
10. Aggelis D.G., Kordatos E.Z., Matikas T.E. Monitoring of metal fatigue damage using acoustic emission and thermography // J. Acoustic Emission. 2011. V. 29. P. 113–122.
11. Остапчук А.А., Павлов Д.В., Марков В.К., Крашенинников А.В. Исследование сигналов акустической эмиссии при сдвиговом деформировании трещины // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 4. С. 503–512.
12. Барат В.А., Елизаров С.В., Иванов В.И. Эмпирический подход к оценке вероятности обнаружения усталостных трещин методом акустической эмиссии // Сборник материалов Всероссийской конференции с международным участием “Актуальные проблемы метода акустической эмиссии” (АПМАЭ-2021). Санкт-Петербург, 13–16 апреля 2021 г. СПб.: Свен, 2021. С. 107–108.
13. Буйло С.И. Физико-механические, статистические и химические аспекты акустико-эмиссионной диагностики: монография. Ростов-на-Дону, Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2017. 184 с.
14. Dimitrios G.A., Evangelios Z.K., Theodore E.M. Monitoring of metal fatigue damage using acoustic emission and thermography // J. Acoustic Emission. 2011. V. 29. P. 113–122.
15. Серeda Ю.С. Проблемы информационно-статистической теории. Н. Новгород: ООО “Типография “Поволжье””, 2007. 356 с.
16. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. Пер. с англ. Коваленко Е.Г.; под ред. Налимова В.В. М.: Мир, 1969. 395 с.
17. Богатиков В.Н., Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Лопатин А.Г. Информационно-статистический метод исследования процессов в многоуровневых и распределенных системах в условиях реально доступной информации на примере процесса суспензионной полимеризации стирола // Вестник научно-технического развития. 2020. № 7(115). С. 5–13.
18. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. иностр. лит., 2002. 829 с.
19. Серeda Ю.С. Проблемы информационно-статистической теории. М.: Космосинформ, 1998. 274 с.
20. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
21. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. М.: Мир, 2002. 461 с.
22. Ерофеев В.И., Иляхинский А.В., Никитина Е.А., Родюшкин В.М. Распределение Дирихле в задаче оценки состояния металла методом акустического зондирования // Дефектоскопия. 2018. № 2. С. 11–14.
23. Иляхинский А.В., Паховов П.А., Ануфриев М.А., Мухина И.В. Информационно-статистические показатели самоорганизации систем регуляции сердечной деятельности в оценке вариабельности ритма сердца // Физиология человека. 2017. Т. 43. № 2. С. 1–7.
24. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
25. Трефилов В.И., Моисеев В.Ф., Печковский Э.П., Горная И.Д., Васильев А.Д. Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов: научное издание. Под ред. Трефилова В.И. 2-е изд. перераб. и доп. Киев: Наук. Думка, 1989. 256 с.
26. Голдман С. Теория информации. М.: Изд. иностр. лит., 1957. 446 с.
27. Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770–799.
28. Федорченко С.Г., Федорченко Г.С. Интегральная мера оценки состояния энергетической безопасности // Проблемы региональной энергетики. 2014. Т. 24. № 1. С. 1–16.

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 612.85

ДЕТЕКТИРОВАНИЕ УДАЛЕННОЙ РЕЧИ

© 2023 г. В. Н. Сорокин*

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук,
Большой Каретный пер. 19, стр. 1, Москва, 127051 Россия*

**e-mail: vns@iitp.ru*

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.

После доработки 09.11.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Исследуются амплитудные и фазовые характеристики речевых сигналов, записанных на разном расстоянии от диктора микрофонами различных типов, в свободном пространстве и замкнутом помещении. Отношения средней энергии амплитудного спектра в различных диапазонах частот и средний наклон линейной компоненты фазы демонстрируют различия для слога, записанного вблизи микрофона, и такого же слога, записанного на удалении, и вновь воспроизведенного вблизи от микрофона. Наибольшее различие наблюдается в отношениях средней энергии в диапазонах частот 0–1 и 1–8 кГц, а также 3–4 и 4–6 кГц. Наклон линейной компоненты вычисляется в диапазоне 4–8 кГц. Степень различия зависит от гласного звука.

Ключевые слова: уязвимость верификации диктора, спектр удаленного сигнала, фаза удаленного сигнала, воспроизведение удаленного сигнала

DOI: 10.31857/S0320791923600282, **EDN:** QRPVJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Подтверждение личности по голосу (верификация, аутентификация) является важным элементом систем удаленного доступа к источникам информации, управления финансовыми или технологическими процессами. К алгоритмам верификации предъявляются противоречивые требования, такие как удобство для пользователя, устойчивость к изменениям голоса пользователя и характеристикам микрофонов, а также противодействие подмене голоса пользователя самозванцем.

Существует несколько способов взлома (spoofing) системы верификации диктора помимо вторжения в процесс принятия решения на конечном этапе:

1. имитация голоса целевого пользователя другим человеком,
2. запись речи целевого пользователя с последующим воспроизведением,
3. перехват речевого сигнала в канале связи,
4. преобразование голоса самозванца к голосу целевого пользователя с помощью вокодерной технологии или машинного обучения (Voice Conversion),
5. формирование модели голоса целевого диктора методами машинного обучения с помощью компиляционного синтезатора.

Методы борьбы (anti-spoofing) с попытками взлома систем верификации рассматриваются в [1–5]. Очевидно, что не может быть создано абсолютно надежной защиты от проникновения самозванца в систему верификации. Можно лишь рассчитывать на разработку такой защиты, преодоление которой обойдется злоумышленнику дороже, чем ожидаемая выгода. Необходимо также располагать системами защиты различной сложности с тем, чтобы учитывать риск, т.е. вероятность попытки взлома и возможные потери.

Имитация голоса пользователя не требует специальных технических средств, за исключением формирования речевой базы для тренировки имитатора. Такая имитация наиболее опасна для систем, в которых для верификации используются параметры голосового источника, в том числе и частота основного тона. Эта частота довольно легко воспроизводится, увеличивая риск пропуска самозванца. При этом успех имитации зависит не только от способностей имитатора, но и от особенностей голоса целевого пользователя [6, 7]. Преобразование голоса самозванца в голос целевого пользователя и синтез голоса целевого пользователя наиболее сложны с технической точки зрения, но и наиболее опасны, поскольку методы машинного обучения позволяют воспроизвести характерные особенности голоса [8, 9].

Воспроизведение подслушанной речи пользователя (replay) требует минимум технических

средств. Этот прием особенно опасен для систем верификации с фиксированным паролем, и даже для произвольных паролей ошибка может достигать до 100% [10–13]. Разработка методов противодействия атаке системы верификации диктора посредством воспроизведения подслушанного сигнала должна основываться на объективных различиях сигналов, записанных и воспроизведенных на разных расстояниях. Такие различия, как правило, ищут экспериментально, перебирая варианты формирования параметров речевого сигнала.

Обзор параметров, влияющих на восприятие расстояния до источника звука в помещении, был представлен в [14]. В [15–17] сообщается, что на восприятие расстояния влияет энергия в спектральной области ниже 500 Гц и отношение энергии прямого сигнала к реверберирующему.

Реверберация помещения тем больше искажает сигнал, чем на большем расстоянии от диктора производится запись. В [18] установлено, что в помещении с умеренной реверберацией (с задержкой около 6 мс) гистограмма энергии речевых сигналов длительностью 2 с смещается в сторону низких частот, а степень реверберации можно оценить по распределению энергии сигнал-остатка при линейном предсказании.

Вместе с тем, эксперименты по восприятию расстояния в ближнем (< 1 м) и дальнем акустическом поле в свободном пространстве и помещениях с реверберацией демонстрируют противоречивые результаты в зависимости от спектра звука и отношения энергии в полосе частот ниже 3 кГц к энергии в высокочастотной области [19]. В других экспериментах обнаруживается, что важно не только относительное изменение объективных параметров речевого сигнала в зависимости от расстояния до источника звука. Так, в [20] было установлено, что оценка человеком расстояния до источника неизвестного звука выполняется с большой погрешностью, тогда как для известных звуков погрешность заметно меньше. Парное восприятие одного и того же слова, записанного на разных расстояниях от диктора, обычно позволяет лучше ощутить разницу в условиях записи.

Простейший детектор попытки воспроизведения состоит в сравнении принятого пароля с одним из сохраненных в базе обучения пользователя. Если мера сходства оказывается выше некоторого порога, то регистрируется попытка взлома. В системе [21] с этой целью пользователю предлагается дважды произнести одно и то же слово в парольной фразе. Этот прием основан на том факте, что многократно произнесенные слова всегда несколько отличаются друг от друга. Если записанные самозванцем сигналы не подвергаются преднамеренному небольшому искажению или не используется многократная запись одного

и того же пароля, то вероятность успеха такой атаки существенно снижается. Другой детектор попытки воспроизведения записанного сигнала основан на искажении этого сигнала вследствие повторного наложения шумов и реверберации помещения (особенно в случае записи в одном помещении, а воспроизведения – в другом), в результате чего искажается амплитудный спектр сигнала и пауз [12].

Детектирование воспроизведения записанного речевого сигнала выполняется либо путем статистического анализа различных амплитудно-частотных характеристик, либо на основе различия в акустике исходного и воспроизведенного сигнала. В [22] обращают внимание на двойное преобразование аналог-цифра и цифра-аналог при записи и воспроизведении речевого сигнала, что приводит к искажению спектра в полосе частот 6–8 кГц при частоте отсчетов 16 кГц. В [23] рассматриваются характеристики амплитудной и частотной модуляции на выходе гребенки фильтров Габора. Такая же гребенка фильтров используется в [24], где исследуется влияние реверберации на характеристики так называемого нелинейного оператора Тигера [25]. В [26] сравниваются пики траекторий гармоник исходного и записанного сигналов. Наряду с параметрами кратковременного спектра мощности, для детектирования воспроизведения применяются и фазовые характеристики, такие как групповая задержка с нормировкой фазы [27, 28]. В [29] исследовалась роль линейной компоненты фазы в оценке параметров речевого сигнала.

Несмотря на значительные усилия по разработке методов противодействия взлому системы верификации диктора с помощью воспроизведения записанного сигнала, эта проблема требует дальнейшего теоретического и экспериментального исследования. Одно из перспективных направлений состоит в анализе фазовых характеристик.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Анализ акустики ближнего и дальнего поля может указать на параметры речевого сигнала, которые наиболее перспективны для обнаружения записанного сигнала. Предположим, что при атаке на систему верификации записанный сигнал воспроизводится примерно на том же расстоянии от микрофона системы, что и целевой диктор при стандартной процедуре. Тогда отличие заключается в расстоянии до микрофона злоумышленника. Кроме того, тип микрофона злоумышленника может отличаться от типа микрофона системы верификации. Рассмотрим случай, когда при обучении и верификации расстояние от пользователя до микрофона не больше 20 см, а расстояние до микрофона злоумышленника существенно больше 20 см.

В качестве приемников звука используются различные виды микрофонов: угольные, пьезоэлектрические, электродинамические, электромагнитные, ленточные и конденсаторные; прямого и дифференциального действия. В зависимости от конструкции микрофон может быть приемником звукового давления, градиента давления, скорости или ускорения колебаний воздушных частиц. Наиболее качественные микрофоны представлены конденсаторным типом, в котором электрический сигнал создается изменением емкости конденсатора, представляющего собой две мембраны. Если одна из мембран неподвижна, а другая колеблется под воздействием акустической волны, то такой микрофон является приемником давления. Если и другая мембрана колеблется под влиянием акустической волны, приходящей с обратной стороны микрофона, то такой микрофон является приемником градиента давления.

В качестве модели механизма распространения речевого сигнала в пространстве примем модель колебаний поверхности сферы. Уравнение сферической распространяющейся волны акустического давления P есть

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \quad r > r_0, \quad (1)$$

где r — расстояние от центра сферы, r_0 — радиус сферы, t — время, c_0 — скорость звука в воздухе. Акустическое давление P и радиальная скорость колебаний воздушных частиц V связаны соотношениями

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\rho_0 c_0^2}{r^2} \frac{\partial(r^2 V)}{\partial r}, \quad (3)$$

ρ_0 — плотность воздуха. Решение уравнения (1) для расходящихся волн давления и скорости имеет вид:

$$P = \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial f(t - r/c_0)}{\partial t}, \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{r^2} f(t - r/c_0) + \frac{1}{rc_0} \frac{\partial f(t - r/c_0)}{\partial t}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получается связь между скоростью и давлением в расходящейся волне

$$\rho_0 V = \frac{P}{c_0} + \frac{1}{r} \int_{-\infty}^t P dt. \quad (6)$$

Из (6) следует, что скорость частиц воздуха V на больших расстояниях от поверхности сферы при $r \rightarrow \infty$ почти пропорциональна акустическому давлению P , тогда как на малых расстояниях V

зависит и от давления и от его интеграла. Интегрирование в (6) приводит также и к сдвигу фазы волны. Сравнение (4) и (5) позволяет уточнить эти выводы. Дифференцирование по времени эквивалентно умножению на частоту в спектральной области. Поэтому на высоких частотах в (5) доминирует второй член, и на всех расстояниях разница между давлением и скоростью мала, что препятствует обнаружению разницы в расстоянии микрофона от диктора. На низких частотах в (5) доминирует первый член, и скорость существенно отличается от давления. Более конкретная оценка диапазона частот, в котором эта разница может быть обнаружена, основана на понятиях ближнего и дальнего акустического поля, которые описывают эффекты дифракции акустических волн в зависимости от размера источника звука и длины волны.

Пусть сфера радиуса r_0 пульсирует по гармоническому закону как $v_r(t) = v_0 e^{-jKc_0 t}$, где $v_r(t)$ — радиальная скорость ее поверхности, а K — волновое число, $K = \omega/c_0$, ω — частота. Тогда для гармонических колебаний решение волнового уравнения (1) относительно давления и скорости при произвольном K есть [30]

$$P = \frac{r_0 v_0 \rho_0 c_0}{r} \frac{jKr_0}{1 + jKr_0} e^{-jK(r-r_0)}, \quad (7)$$

$$V = \frac{r_0 v_0}{r} \frac{jKr_0}{1 + jKr_0} \frac{1 - jKr}{jKr} e^{-jK(r-r_0)}. \quad (8)$$

В ближнем акустическом поле, т.е. при $Kr_0 \ll 1$,

$$\frac{jKr_0}{1 + jKr_0} \xrightarrow{Kr_0 \rightarrow 0} jKr_0.$$

Конкретизируя условие ближнего поля как $Kr_0 = 0.1$, оценим максимальную частоту $F_{\max} = 0.1c_0/2\pi a$, для которой выполняется условие ближнего поля. При $r_0 = 10$ см (что примерно соответствует среднему радиусу головы), $F_{\max} \approx 54$ Гц, а при $r_0 = 1$ см (что примерно соответствует эквивалентному радиусу ротового отверстия), $F_{\max} \approx 540$ Гц. Последняя оценка близка к данным [15], согласно которым восприятие человеком расстояния до источника звука определяется компонентами сигнала в диапазоне частот ниже 500 Гц. На рис. 1 показаны амплитудно-частотные характеристики отношения $jKr_0/(1 + jKr_0)$, из которых следует, что в свободном пространстве высокочастотные компоненты давления (7) и скорости (8) для удаленного сигнала значительно ниже, чем в ближнем поле. Отношение средней амплитуды в диапазоне частот от 4–8 кГц к средней амплитуде в диапазоне частот ниже 500 Гц для дальнего поля равно 23.1, а для ближнего поля — 11.5. На очень

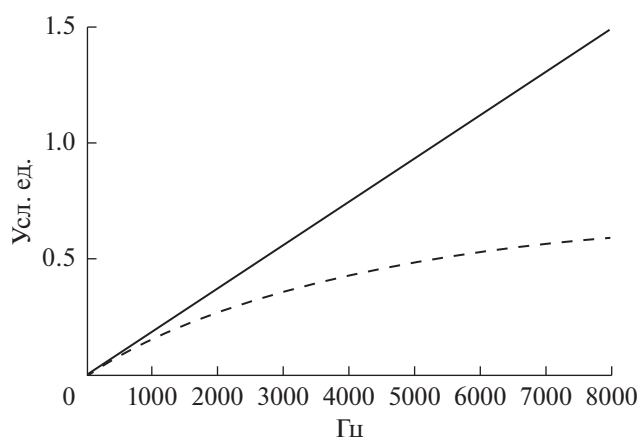


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика компонент акустической волны в ближнем поле (—) и дальнем поле (---). По оси ординат — условные единицы.

малых расстояниях скорость (8) обратно пропорциональна расстоянию, поскольку

$$\frac{1 - jKr}{jKr} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty.$$

Еще одно отличие оригинального сигнала от воспроизведенного состоит в искажении характеристик излучения. Поскольку отношение радиуса ротового отверстия к диаметру головы находится в диапазоне 0.08–0.14 [30], то свойства излучения речевого сигнала из ротового отверстия близки к свойствам излучения поршня, вставленного в бесконечный экран. Удельный безразмерный импеданс такого излучения, по [31], аппроксимируется как

$$Z = 1 - \frac{J_1(Kh)}{Kh} - j \frac{K_1(2Kh)}{2(Kh)^2}, \quad (9)$$

где h — эквивалентный радиус ротового отверстия, J_1 — функция Бесселя первого рода, K_1 — функция Бесселя второго рода. С погрешностью около 10% (9) приводится к равенству, которое легко интерпретируется

$$Z = \frac{(\omega h)^2}{2c_0} - j \frac{8\omega h}{3\pi c_0}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что потери на излучение, а следовательно, и затухание компонент сигнала пропорциональны квадрату частоты и эквивалентному радиусу раскрытия ротового отверстия. В то же время, умножение на ω соответствует дифференцированию сигнала, что приводит к возрастанию амплитуд частотных компонент сигнала пропорционально частоте и сдвигу фаз.

Новый подход к разработке систем детектирования попытки проникновения в систему верификации диктора может быть основан на свой-

ствах уравнения (6). Из этого уравнения следует, что разница в расстояниях до близкого и удаленного микрофона обнаруживается, если речевой сигнал принимается одновременно двумя микрофонами — приемниками звукового давления и скорости колебаний. Тогда, обозначив разность между нормированными сигналами, пропорциональными давлению P и V , как $\Delta_{PV} = V - P/\rho_0 c_0$, получим оценку расстояния до источника звука

$$r = \frac{1}{\rho_0 \Delta_{PV}} \int_{-\infty}^t P dt.$$

В воспроизводимом сигнале на характеристики излучения оригинального сигнала накладываются характеристики излучения динамика воспроизводящего устройства. Поэтому в спектрах оригинального и воспроизведенного речевого сигнала следует ожидать различия в высокочастотной области спектра.

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Эксперименты по обнаружению отличий между речевыми сигналами выполнялись на записях вблизи от микрофона и на некотором удалении от него. Эти записи производились в осеннем лесу и жилой комнате с размерами $12 \times 3 \times 2.5$ м. Использовались три типа микрофонов: профессиональный направленный микрофон с шумоподавлением и встроенным преобразователем аналог-цифра, встроенный микрофон ноутбука и смартфон.

При этом расстояние от диктора до микрофона ноутбука составляло около 20 см. Для симуляции подслушивания использовались направленный микрофон и смартфон, расположенные на расстоянии около 5, 20 и 80 см от диктора. В экспериментах по воспроизведению записанных на смартфон речевых сигналов на расстоянии около 80 см, эти сигналы записывались либо на направленный микрофон, либо на микрофон ноутбука при положении ноутбука на расстоянии около 20 см.

Речевой материал состоял из последовательности слогов /ата этэ ото уту ити ыты/ с ударением на последнем гласном. Последовательность звуков произносилась как одна фраза с небольшими паузами между слогами. В комнате запись выполнялась параллельно на пары микрофонов “направленный микрофон/смартфон” и “ноутбук/смартфон” на разных расстояниях от диктора и друг от друга. В записях участвовал один диктор мужского пола. Обработка речевого сигнала заключалась в вычислении кратковременного спектра Фурье (КПФ) с гауссовым окном на интервале в 256 отсчетов при частоте отсчетов 16 кГц со сдвигом окна на 1 отсчет на всем сегменте последнего гласного каждого слога и последующем анализе параметров амплитудного и фазового спектра.

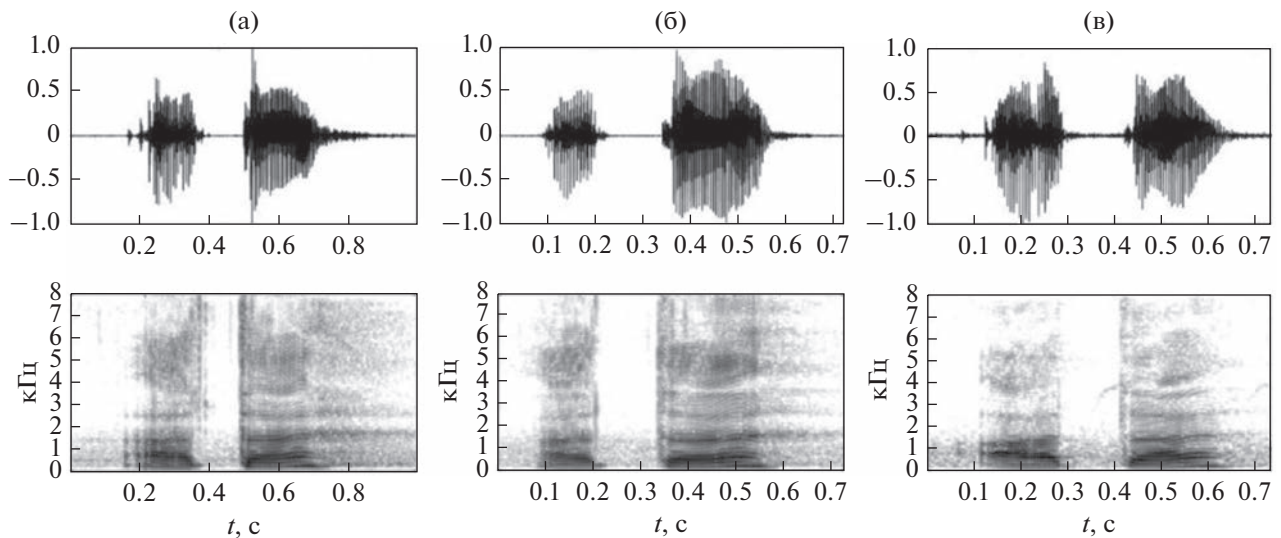


Рис. 2. Сонограммы трех произнесений слога /ama/ на разных расстояниях от микрофона: (а) — $r = 5$ см, (б) — $r = 20$ см, (в) — $r = 80$ см.

При записи речевых сигналов в лесу для каждого положения микрофона фраза с последовательностью слогов произносилась заново. Поэтому в характеристиках звуков могли присутствовать естественные различия в длительности записи и параметрах речевого сигнала (рис. 2, слог /ama/). При записи в помещении одно и то же произнесение одновременно регистрировалось двумя микрофонами на разных расстояниях от диктора. Это исключает естественные вариации произнесения при поиске наиболее информативных различий, связанных с типом и расположением подслушивающего микрофона.

Первый цикл экспериментов был выполнен для записей в лесу. Цель этих экспериментов состояла в оценке различий в амплитудном и фазовом спектре при распространении речевого сигнала в свободном пространстве без влияния реверберации.

На рис. 3 показаны амплитудные и фазовые спектры последнего (ударного) гласного /a/ в слогах, записанных в лесу на расстоянии 5, 20 и 80 см. На интервале гласного амплитудный спектр усреднялся, нормировался к максимуму, и затем из него вычиталась постоянная составляющая, равная 0.3. Фазовые спектры вычислялись двумя способами. В первом способе фаза находилась также по комплексному спектру кратковременного преобразования Фурье (КПФ), и затем усреднялась на интервале гласного. Во втором способе комплексный спектр вычислялся через быстрое преобразование Фурье (БПФ) на всем интервале гласного.

В экспериментах с записью речевых сигналов в лесу было обнаружено, что наибольшее отличие амплитудных спектров гласных заключается в от-

ношении среднего уровня амплитуд в диапазоне частот 4–6 и 3–4 кГц. Фазовые спектры различаются по среднему наклону в диапазоне частот 4–8 кГц. В соответствии с этим явлением были сформированы параметры $\delta A_r = 1 - (\bar{A}_{4,6} / \bar{A}_{3,4})$ и m_r , где $\bar{A}_{3,4}$ — среднее значение амплитудного спектра в диапазоне частот 3–4 кГц, $\bar{A}_{4,6}$ — среднее значение амплитудного спектра в диапазоне частот 4–6 кГц, m_r — средний наклон фазы, вычисленной по БПФ в диапазоне частот 4–8 кГц, $r = 5, 20$ и 80 см. Этот параметр лучше описывает нелинейность фазового спектра. Различие между фазовыми спектрами, вычисленными по КПФ, оказалось незначительным. Поэтому в табл. 1 эти параметры не показаны.

Представленные в табл. 1 данные свидетельствуют о заметном различии параметров δA_r и m_r для сигналов, записанных на разных расстояниях, но характер и степень различия зависит от типа гласного.

Таблица 1. Параметры амплитудных и фазовых спектров в свободном пространстве, δA , %

Лес	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
δA_5	4.0	6.2	−2.6	−23.7	1.8	−3.6
δA_{20}	13.2	10.9	7.8	0.9	7.8	5.6
δA_{80}	20.0	23.1	−12.2	−7.3	17.5	9.8
m_5	17.4	18.1	11.7	15.5	11.6	4.8
m_{20}	25.2	29.6	19.5	29.9	22.1	15.0
m_{80}	28.1	27.6	24.3	18.5	13.4	17.7

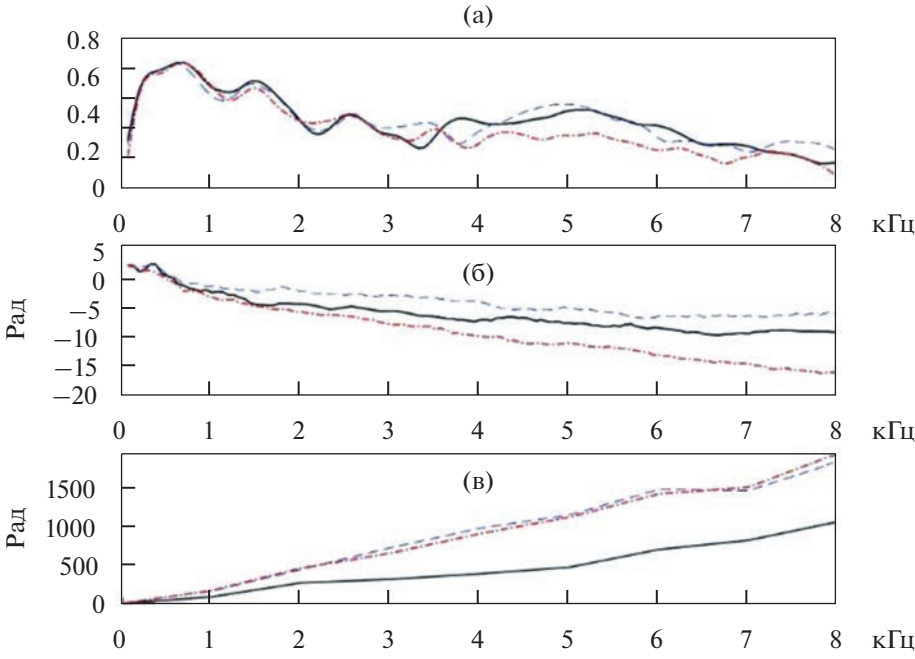


Рис. 3. Слог /а/: (а) – амплитудный спектр; (б) – фазовый спектр по КПФ; (в) – фазовый спектр по БПФ. Микрофон на расстоянии 5 см (—), 20 см (---), 80 см (- · -).

Таблица 2. Параметры амплитудных и фазовых спектров в помещении. Смартфон, δA , %

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
δA_{20}	11, 24	18, 36	17, 29	–19, –3	–1, 21	–19, –4
δA_{100}	11, 34	18, 23	18, 26	–19, 2	–1, 13	–22, 6
m_{20}	11, 19	20, 35	13, 26	7, 14	14 , 19	11, 14
m_{100}	15, 34	15, 33	14, 18	7, 14	9, 20	9, 13

Таблица 3. Одновременная запись через направленный микрофон и смартфон. Расстояние до диктора около 20 см. δA , %

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
δA_{20}	20.9	30.8	29.2	–3.0	21.1	–8.5
δA_{80}	11.4	18.2	20.6	–18.8	–0.8	–19.4
m_{20}	18.6	34.7	18.2	14.5	18.2	14.1
m_{80}	17.3	31.1	18.1	7.3	10.9	11.9

Таблица 4. Одновременная запись через направленный микрофон на расстоянии около 20 см и смартфон на расстоянии около 80 см. δA , %

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
δA_{20}	14.9	16.2	21.4	–20.0	7.4	–5.3
δA_{80}	16.6	18.8	20.4	–19.5	–1.1	–22.4
m_{20}	30.8	30.9	26.8	16.5	29.8	13.2
m_{80}	29.9	32.9	13.9	9.5	9.5	9.5

Если в помещении микрофон расположен достаточно далеко от диктора, то обычно возникает субъективное ощущение отклика помещения (реверберации). При этом характеристики одного и того же слога при многократном произнесении различаются не только в силу естественной вариации артикуляции, но также и из-за вариации расстояния и направления на микрофон. В табл. 2 приведены диапазоны оценок амплитудных и фазовых параметров речевых сигналов, записанных через смартфон, который находится на расстоянии около 20 или 80 см от диктора. Видно, что эти диапазоны в значительной степени перекрываются, но для некоторых гласных одна из границ заметно смещена в зависимости от расстояния до микрофона.

Различие между разными типами микрофонов при одновременной записи речевого сигнала иллюстрируется табл. 3–6, где жирными цифрами отмечены параметры, отличающиеся примерно в 1.5 раза. Здесь наибольшее различие в типах микрофона обнаруживается на малом расстоянии от диктора.

В дополнение к параметрам, описывающим отношение средних амплитуд в диапазонах 3–4 и 4–8 кГц между оригинальной и воспроизведенной записью (δA_{orig} и δA_{repl}), при анализе характеристик воспроизведенного сигнала обнаружилась разница средних амплитуд в диапазонах 0–1 и 1–8 кГц (rA_{orig} и rA_{repl}), где $rA_r = 1 - (\bar{A}_{0,1}/\bar{A}_{1,8})$ (рис. 4). Это связано с отмеченной в разделе 2 раз-

Таблица 5. Одновременная запись через микрофон ноутбука и смартфон. Расстояние до диктора около 20 см. δA , %

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
δA_{20}	11.6	22.9	24.1	4.5	8.6	3.4
δA_{80}	20.2	30.2	17.6	14.4	12.4	-3.7
m_{20}	21.3	20.7	6.1	11.1	23.5	19.7
m_{80}	11.1	18.0	16.6	10.8	13.0	11.1

Таблица 6. Одновременная запись через микрофон ноутбука на расстоянии около 20 см и смартфон на расстоянии около 100 см. δA , %

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
δA_{20}	18.1	18.9	29.2	3.9	21.8	-3.7
δA_{80}	10.7	22.4	18.4	-14.7	12.6	-13.8
m_{20}	26.2	20.2	17.3	5.1	21.9	8.9
m_{80}	15.1	15.7	15.2	14.1	20.0	10.8

ницей в уровне низкочастотных компонент в ближнем и дальнем поле.

Сравнительные характеристики записи через направленный микрофон и микрофон ноутбука при воспроизведении на расстоянии около 20 см сигналов от смартфона, записанных на расстоянии около 1 м, показаны в табл. 7 и 8. Здесь параметры δA_{orig} , rA_{orig} и m_{orig} представлены дважды

для двух независимых сессий, так что отображаются естественные вариации параметров разных произнесений.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Обнаруженные особенности амплитудного спектра в зависимости от расстояния между микрофоном и диктором согласуются с высказанными ранее предположениями о роли низкочастотных и высокочастотных компонент в восприятии расстояния до источника звука [15]. Подтверждаются также результаты экспериментов [20], свидетельствующие о возможности оценки расстояния до источника звука при сопоставлении характеристик конкретного звукового образа. На это указывает зависимость параметров речевого сигнала от типа гласного, которая найдена в описанных экспериментах.

Помимо амплитудных характеристик, найдена и зависимость линейной составляющей фазы от расстояния до источника звука. Из сравнения табл. 1 и 2 следует, что, в отличие от распространения звука в свободном пространстве, реверберация замкнутого помещения приводит к ухудшению различия амплитудных характеристик в зависимости от расстояния до источника звука. При этом различимость фазовых параметров не ухудшается.

В результате формируется трехмерное пространство признаков $(rA, \delta A, m)$, в котором можно попытаться детектировать попытку взлома системы верификации с помощью воспроизведения

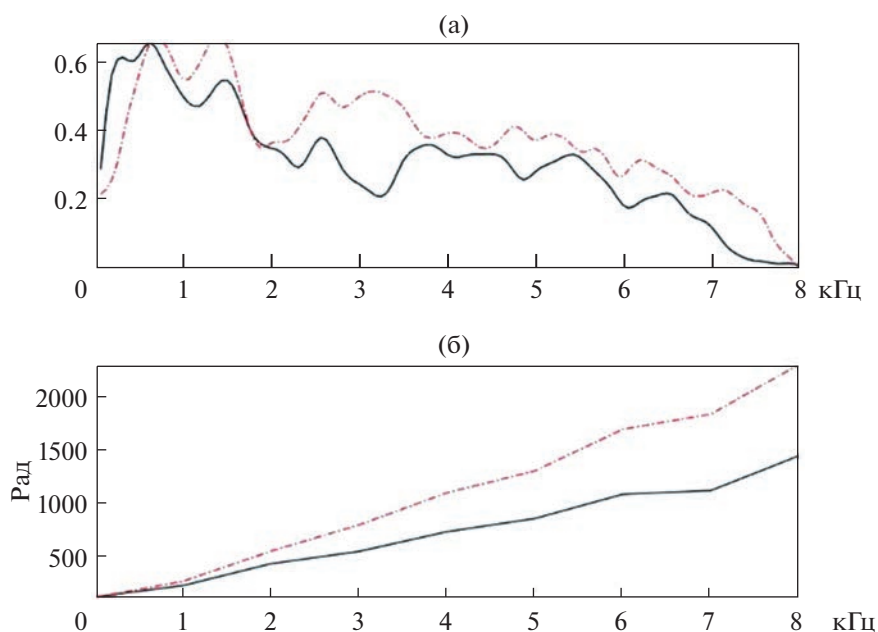


Рис. 4. Слог /ama/: (а) — амплитудный спектр; (б) — фазовый спектр. Микрофон на расстоянии 20 см (—), 80 см (- - -).

Таблица 7. Параметры двух записей через направленный микрофон на расстоянии 20 см (rA_{orig} , δA_{orig} , m_{orig}) и воспроизведения удаленной записи на смартфон на расстоянии 20 см от микрофона (rA_{repl} , δA_{repl} , m_{repl})

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
rA_{orig}	51.1, 44.5	46.0, 46.9	62.3, 58.1	65.3, 63.3	48.9, 31.7	42.3, 44.7
rA_{repl}	25.6	26.9	54.8	51.7	13.0	11.1
δA_{orig}	20.8, 14.9	30.8, 16.1	29.2, 21.4	−3.1, −20.0	21.1, 7.4	−8.6, −5.2
δA_{repl}	25.9	35.1	7.8	−10.1	4.3	0.6
m_{orig}	18.6, 30.8	34.7, 30.9	18.2, 26.8	14.5, 16.5	18.2, 29.8	14.1, 13.2
m_{repl}	31.5	24.3	18.3	5.2	13.0	15.6

Таблица 8. Параметры двух записей через микрофон ноутбука на расстоянии 20 см (rA_{orig} , δA_{orig} , m_{orig}) и воспроизведения удаленной записи на смартфон на расстоянии 20 см от ноутбука (rA_{repl} , δA_{repl} , m_{repl})

Комната	<i>a</i>	<i>э</i>	<i>о</i>	<i>у</i>	<i>и</i>	<i>ы</i>
rA_{orig}	46.9, 44.7	44.2, 47.1	66.8, 61.6	66.3, 63.5	34.7, 39.4	44.8, 48.2
rA_{repl}	20.3	20.7	38.5	45.5	5.1	8.9
δA_{orig}	11.6, 18.1	22.9, 18.9	24.1, 29.2	4.5, 3.9	8.6, 21.8	3.3, −3.7
δA_{repl}	19.8	6.1	19.8	−5.1	7.2	5.8
m_{orig}	21.3, 26.2	20.7, 20.2	6.1, 17.3	11.1, 5.1	23.5, 21.9	19.7, 8.9
m_{repl}	36.0	23.5	24.3	5.6	16.7	14.6

речевого сигнала, подслушанного на удалении от диктора. Две компоненты этого пространства зависят только от амплитудного спектра принятого сигнала. Это отношение среднего уровня амплитуд $\bar{A}_{0,1}/\bar{A}_{4,8}$ в диапазоне частот 0–1 и 4–8 кГц, и отношение $\bar{A}_{4,6}/\bar{A}_{3,4}$ в диапазоне частот 4–6 и 3–4 кГц. Третья компонента представляет собой линейную составляющую среднего фазового спектра на интервале частот 4–8 кГц. При этом необходимо учитывать неоднократно отмеченную в речевых исследованиях сильную зависимость фазового спектра от параметров алгоритма преобразования Фурье. Как показано на рис. 3, вид фазового спектра может отличаться и диапазоном значений, и даже знаком. Это пространство признаков должно быть сформировано отдельно для каждого гласного, который используется в голосовом пароле.

В дополнение к рассмотренным выше амплитудным и фазовым параметрам, эта оценка может послужить еще одним признаком при формировании детектора попытки взлома системы верификации диктора с помощью воспроизведения подслушанного речевого сигнала.

Следует отметить, что даже тот крайне ограниченный объем речевых данных, который использовался в описанных экспериментах, указывает

на заметное перекрытие диапазонов параметров, перспективных для обнаружения речевого сигнала, записанного на большом расстоянии. Для того чтобы оценить возможность успешного применения найденных параметров для защиты систем верификации диктора, необходимо выполнить статистически достоверные исследования с различными типами микрофонов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наблюдается различие в параметрах речевого сигнала, записанного в ближнем акустическом поле, и параметров этого же сигнала, записанного в дальнем акустическом поле и воспроизведенного в ближнем поле. В число этих параметров входят относительные значения энергии спектра в диапазонах низких, средних и высоких частот, а также средний наклон линейной компоненты фазового спектра в высокочастотной области. Степень различия зависит от типа гласного звука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu Z., Evans N., Kinnunen T., Yamagishi J., Alegre F., Li H. Spoofing and countermeasures for speaker verification: A survey // Speech Communication. 2015. V. 66. P. 130–153.

2. Kinnunen T., Sahidullah M., Delgado H., Todisco M., Evans N., Yamagishi J., Lee K.A. The ASVspoof 2017 Challenge: Assessing the Limits of Replay Spoofing Attack Detection // *InterSpeech* 2017.
3. Sahidullah M., Delgado H., Todisco M., Kinnunen T., Evans N., Yamagishi J., Lee K.A. Introduction to voice presentation attack detection and recent advances // *Handbook of Biometric Anti-Spoofing*. 2019. P. 321–361. Springer, Cham.
4. Lee K.A., Sadjadi O., Li H., Reynolds D. Two decades into Speaker Recognition. Evaluation – are we there yet? // *Computer Speech & Language*. 2020. V. 61. 101058.
5. Kamble M.R., Sailor H.B., Patil H.A., Li H. Advances in anti-spoofing: from the perspective of ASVspoof challenges // *APSIPA Transactions on Signal and Information Processing*. 2020. V. 9. № 1. e2. <https://doi.org/10.1017/ATSIP.2019.21>
6. Lau Y.W., Wagner M., Tran D. Vulnerability of speaker verification to voice mimicking // *IEEE Int. Symp. Intelligent Multimedia, Video and Speech Proc.* 2004. P. 145–148. Hong Kong, 2004.
7. Campbell J.P. Speaker recognition: a tutorial // *Proc. IEEE*. 1997. V. 85. P. 1437–1462.
8. Khodabakhsh A., Mohammadi A., Demiroglu C. Spoofing voice verification systems with statistical speech synthesis using limited adaptation data // *Computer Speech and Language*. 2017. V. 42. P. 20–37.
9. Sisman B., Yamagishi J., King S., Li H. An Overview of Voice Conversion and Its Challenges: From Statistical Modeling to Deep Learning // *IEEE/ACM Trans. on Audio, Speech and Language Proc.* 2021. V. 29. P. 132–157.
10. Lindberg J., Blomberg M. Vulnerability in speaker verification – A study of technical impostor techniques // *Proc. European Conference on Speech Communication and Technology (Eurospeech)*. 1999. P. 1211–1244.
11. Villalba J., Lleida E. Preventing replay attacks on speaker verification systems // *IEEE Int. Carnahan Conf. on Security Technology (ICCST)*. 2011. <https://doi.org/10.1109/CCST.2011.6095943>
12. Wang Z.F., Wei G., He Q.H. Channel pattern noise based playback attack detection algorithm for speaker recognition // *Proc. IEEE Int. Conf. Machine Learning and Cybernetics (ICMLC)*. 2011. P. 1708–1713.
13. Gałka J., Grzywacz M., Samborski R. Playback attack detection for text-dependent speaker verification over telephone channels // *Speech Comm.* 2015. V. 67. P. 143–153.
14. Kolarik A.J., Moore B.C.J., Zahori P., Cirstea S., Pardhan S. Auditory distance perception in humans: A review of cues, development, neuronal bases, and effects of sensory loss // *Atten., Percept. Psychophys.* 2016. V. 2. № 78. P. 373–395.
15. Скучик Е. Основы акустики. М.: ИИЛ, 1959. Т. 2.
16. Kopco N., Shinn-Cunningham B.G. Effect of stimulus spectrum on distance perception for nearby sources // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 130. № 3. P. 1530–1541.
17. Prud'homme L., Lavandier M. Do we need two ears to perceive the distance of a virtual frontal sound source? // *J. Acoust. Soc. Am.* 2020. V. 148. № 3. P. 614–1623.
18. Georganti E., May T., Par S.V.D., Harma A., Mourjopoulos J. Speaker distance detection using a single microphone // *IEEE Trans. Audio Speech Lang. Process.* 2011. V. 19. P. 1949–1961. <https://doi.org/10.1109/TASL.2011.2104953>
19. Spiousas I., Etchemendy P.E., Eguia M.C., Calcagno E.R., Abregú E., Vergara R.O. Sound spectrum influences auditory distance perception of sound sources located in a room environment // *Frontiers in Psychology*. 2017. V. 8. P. 969.
20. Coleman P.D. Failure to localize the source distance of an unfamiliar sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. V. 34. P. 345–346.
21. Сорокин В.Н., Цыплихин А.И. Верификация диктора по спектрально-временным параметрам речевого сигнала // *Информационные процессы*. 2010. Т. 10. № 2. С. 87–104.
22. Witkowski M., Kacprzak S., Zelasko P., Kowalczyk K., Gałka J. Audio replay attack detection using high-frequency features // *InterSpeech*. 2017. P. 27–31.
23. Kamble M.R., Tak H., Patil H.A. Amplitude and frequency modulation-based features for detection of replay spoof speech // *Speech Communication*. 2020. V. 125. P. 114–127.
24. Kamble M.R., Patil H.A. Detection of replay spoof speech using Teager energy feature cues // *Computer Speech & Language*. 2021. V. 65. 101140.
25. Teager H. Some observations on oral airflow during phonation // *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.* 1980. V. 28. № 5. P. 599–601.
26. Shang W., Stevenson M. Detection of speech playback attacks using robust harmonic trajectories // *Computer Speech & Language*. 2021. V. 65. 101133.
27. Oo Z., Wang L., Phapatanaburi K., Liu M., Nakagawa S., Iwahashi M., Dang J. Replay attack detection with auditory filter-based relative phase features // *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music*. 2019. Art. number 8.
28. Liu M., Wang L., Danga J., Lee K.A., Nakagawa S. Replay attack detection using variable-frequency resolution phase and magnitude features // *Computer Speech & Language Volume*. 2021. V. 66. 101161.
29. Сорокин В.Н., Леонов А.С. Фазовые модуляции в речевом сигнале // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 2. С. 218–232.
30. Фланаган Дж. Анализ, синтез и восприятие речи. М.: Связь, 1968.
31. Морз Ф. Колебания и звук. М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.

ИНФОРМАЦИЯ

В. А. ХОХЛОВОЙ ПРИСУЖДЕНА СЕРЕБРЯНАЯ МЕДАЛЬ РЭЛЕЯ–ГЕЛЬМГОЛЬЦА

DOI: 10.31857/S0320791923350010, EDN: ZMGOTS



Вера Александровна Хохлова, доктор физико-математических наук, соруководитель Лаборатории медицинского и промышленного ультразвука МГУ им. М.В. Ломоносова в мае 2023 г. удостоена почетной награды Акустического общества Америки (ASA) — Серебряной медали Рэля–Гельмгольца — за достижения в области биомедицинской и физической акустики. ASA объединяет более 7000 ученых из разных стран и является во многом наиболее авторитетным сообществом акустиков. Серебряная медаль Рэля–Гельмгольца присуждается ученым как из США, так и из других стран за выдающиеся успехи в междисциплинарных исследованиях по акустике. За тридцать с лишним лет существования медали Рэля–Гельмгольца ею впервые удостоен ученый, живущий и работающий в России. Этой наградой были отмечены многолетние успешные исследования В.А. Хохловой по использованию нелинейных акустических эффектов в медицинских приложениях ультразвука.

Вера Александровна поступила на физический факультет МГУ после окончания в 1979 г. с золотой медалью специальной физико-математической школы № 2 г. Москвы и, еще будучи студенткой, присоединилась к научной группе О.В. Руденко, ныне заведующего кафедрой акустики, академика РАН. Группа специализировалась на нелинейной акустике, которая стала основной областью научной деятельности Веры Александровны. В 1991 г. она защитила кандидатскую диссертацию, посвященную статистическим свойствам дифрагирующих и разрывных акустических волн

высокой интенсивности, а в 2012 г. — докторскую диссертацию, в которой обобщила свои исследования по нелинейным волновым эффектам в фокусированных пучках и неоднородных средах применительно к задачам медицинской и атмосферной акустики. В настоящее время В.А. Хохлова является признанным международным экспертом в области биомедицинских приложений высокоинтенсивного ультразвука и нелинейных задач атмосферной акустики. Ее отличительной сильной стороной является способность сочетать физический эксперимент и методы численного моделирования при решении важных задач, связанных с общими свойствами и применением нелинейных акустических волн. Научные интересы Веры Александровны чрезвычайно многообразны, однако особенно она известна своими исследованиями в области неинвазивной хирургии с помощью высокоинтенсивного фокусированного ультразвука (HIFU) — одного из наиболее важных практических применений нелинейной акустики. В частности, она является изобретателем нового метода механического разрушения биологических тканей (гистотрипсии с кипением), применяемого в различных медицинских приложениях. Результаты исследований В.А. Хохловой опубликованы в более чем 450 статьях в реферируемых журналах, 2-х книгах; ею получено 7 патентов. Вера Александровна постоянный автор Акустического журнала. В.А. Хохлова является членом Правления Российского акустического общества, входит в редколлегия журнала *International Journal of Hyperthermia*, в течение 15 лет являлась членом редколлегии журнала *IEEE TUFFC*, многократно выступала с приглашенными докладами и входила в программные комитеты наиболее престижных международных и российских конференций по акустике, являлась организатором международных школ по терапевтическому ультразвуку. Под ее руководством было защищено 10 кандидатских диссертаций и 40 дипломных работ на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова.

Коллеги и редколлегия Акустического журнала сердечно поздравляют Веру Александровну с заслуженной наградой и желают ей здоровья, благополучия и новых достижений в науке.