

УДК 52-17::521.182::523.44

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МУЛЬТИПЛЕТОВ ОРБИТАЛЬНЫХ РЕЗОНАНСОВ АСТЕРОИДОВ С МАЛЫМИ ПЕРИГЕЛИЙНЫМИ РАССТОЯНИЯМИ

© 2024 г. Т. Ю. Галушина*, О. Н. Летнер, О. М. Сюсина

Томский государственный университет, Томск, Россия

**e-mail: tatyana.galushina@mail.tsu.ru*

Поступила в редакцию 15.11.2023 г.

После доработки 03.12.2023 г.

Принята к печати 15.01.2024 г.

Исследование орбитальных резонансов в динамике астероидов и больших планет имеет важное значение с точки зрения решения проблемы астероидной опасности. В ходе подобных исследований часто возникает необходимость анализа большого числа временных рядов резонансных (критических) аргументов, поскольку для полноты картины необходимо рассматривать не только основной аргумент, но и весь мультиплет. Для работы с мультиплетом нами были разработаны алгоритм и программа классификации поведения резонансного аргумента, которые были применены к изучению динамики резонансных объектов с малыми перигелийными расстояниями. В работе приводятся результаты построения и анализа резонансных мультиплетов для 13 таких астероидов. Исследование показало, что для выявления особенностей резонансного взаимодействия исследуемых астероидов с планетами в большинстве случаев достаточно рассматривать поведение основного критического аргумента. Использование программы автоматизации процесса классификации поведения аргументов значительно сократило временные затраты и вероятность случайных ошибок в процессе обработки полученных данных.

Ключевые слова: астероиды с малыми перигелийными расстояниями, орбитальный резонанс, мультиплет, машинный анализ, автоматизация

DOI: 10.31857/S0320930X24030062, **EDN:** NEBRQF

ВВЕДЕНИЕ

Орбитальные резонансы с планетами Солнечной системы, возникающие в движении астероидов, являются одной из важных особенностей их динамики, так как характер этого взаимодействия оказывает значительное влияние на поведение этих малых объектов в процессе эволюции. В движении астероидов встречается два вида орбитальных резонансов: двухтельный и трехтельный. Двухтельный орбитальный резонанс имеет место при возникновении соизмеримости орбитальных периодов астероида и одной планеты. В случае трехтельного орбитального резонанса возникает соизмеримость средних движений трех тел: астероида и двух планет. Сохранение этой соизмеримости на рассматриваемом интервале времени характеризует устойчивый тип взаимодействия, и если говорить в качестве примера о двухтельном резонансном взаимодействии, то устойчивая геометрическая конфигурация “астероид—планета” способна служить защитным механизмом от тесных сближений с взаимодействующим телом.

При периодическом разрушении этой соизмеримости имеет место неустойчивый резонанс, который повышает риск тесных сближений астероида с планетой (Мюррей, Дермотт, 2009). Неустойчивый резонанс и, как следствие, сближения с планетой способны привести к значительным изменениям параметров орбиты исследуемого объекта, что весьма важно при исследовании динамики астероидов, сближающихся с Землей (АСЗ).

Для астероидов Главного пояса, помимо двухтельных орбитальных резонансов, стоит отметить важность исследования трехтельных взаимодействий с большими планетами, которые вносят существенный вклад в формирование динамической структуры Главного пояса (Murray и др., 1998; Nesvorný, Morbidelli, 1998a, 1998b)

Процесс выявления соизмеримостей средних движений и оценки типа резонансного взаимодействия часто является весьма трудоемким, так как обычно рассматривается так называемый мультиплет резонансных аргументов, когда определенной соизмеримости средних движений вза-

имедействующих тел соответствуют несколько резонансных аргументов. В ходе подобных исследований часто возникает необходимость анализа большого числа временных рядов резонансных аргументов. В связи с этим встает актуальный вопрос разработки программ и комплексов автоматизации этих процессов.

Среди работ, посвященных разработке алгоритмов и программ для автоматического отождествления орбитальных двухтельных и трехтельных резонансов в динамике астероидов Главного пояса, стоит отметить цикл дополняющих друг друга статей (Smirnov, Shevchenko, 2013; Smirnov, Markov, 2017; Smirnov, 2017; 2023; Smirnov, Dovgalev, 2018; Smirnov и др., 2018). Авторы представляют результаты построения идентификационной матрицы больших полуосей, соответствующих различным соизмеримостям средних движений. На основе данных из каталога AstDyS (Asteroids – DynamicSite, <http://hamilton.dm.unipi.it/cgi-bin/astdys/>) производится идентификация орбитальных резонансов астероидов Главного пояса по следующему алгоритму. По результатам интегрирования орбит астероидов производится сопоставление усредненных значений больших полуосей с матрицей резонансов и определяются соизмеримости средних движений. Затем выполняется численный анализ набора резонансных аргументов (мультиплета). В работе (Smirnov, Markov, 2017) авторы предлагают методы машинного обучения, не требующие численного интегрирования, для идентификации трехтельных резонансов астероидов Главного пояса. И как продолжение этого исследования в работе (Smirnov, 2023) представляется программный пакет, разработанный на языке Python, позволяющий выявлять и анализировать резонансы средних движений, как двухтельные, так и трехтельные, в Солнечной и других планетных системах. Показаны преимущества использования разработанных программ по сравнению с результатами предыдущих работ.

В настоящем исследовании мы представляем результаты построения резонансных мультиплетов для двухтельных орбитальных резонансов астероидов с перигелийными расстояниями, не превышающими 0.15 а. е., с планетами Солнечной системы. Исследование является прямым продолжением работы (Галушина и др., 2023), где приводятся результаты выявления двухтельных орбитальных резонансов астероидов с малыми перигелийными расстояниями с большими планетами и оценки влияния эффекта Ярковского и светового давления на поведение резонансных характеристик. Для того, чтобы облегчить трудоемкий процесс формирования резонансных мультиплетов, сократить временные затраты

и избежать случайных ошибок, нами разработаны алгоритм и программа для автоматического формирования мультиплета аргументов и последующей классификации поведения каждого из них. В качестве идеи определения типа резонансного взаимодействия взят алгоритм, представленный в работе (Sekhar и др., 2016), который был нами доработан и модифицирован. Разработанная автоматизация внедрена в программный комплекс IDA (Galushina, Letner, 2021) и применена к изучению динамики резонансных астероидов, имеющих малые перигелийные расстояния.

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Орбитальный резонанс возникает при соизмеримости орбитальных периодов астероида и планеты. В качестве характеристики резонансного движения рассматривается резонансный (критический) аргумент (Мюррей, Дермотт, 2009; Ellis, Murray, 2000; Nesvorný и др., 2002)

$$\beta = k_1\lambda' - k_2\lambda + k_3\varpi' + k_4\varpi + k_5\Omega' + k_6\Omega, \quad (1)$$

где λ – средняя долгота, ϖ – долгота перицентра, Ω – долгота восходящего узла, $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ – целые положительные числа. Величины со штрихом относятся к астероиду, а без штриха – к планете.

Соизмеримость орбитальных периодов определяется равенством нулю первой производной по времени от критического аргумента $\beta = 0$, называемой резонансной полосой или “щелью” и обычно обозначаемой как α (Гребеников, Рябов, 1978). Точный резонанс, или точная соизмеримость, возникает при равенстве α нулю. В случае астероидного движения вековые частоты $\varpi', \varpi, \Omega', \Omega$ малы по сравнению с орбитальными частотами λ', λ , поэтому резонансная щель принимает вид

$$\alpha = k_1\lambda' - k_2\lambda. \quad (2)$$

Орбитальные частоты (средние движения) можно в явном виде выразить через большие полуоси астероида и планеты. Это означает, что резонансному условию (2) с единственными k_1 и k_2 , но различными k_3, k_4, k_5, k_6 , будут соответствовать одни и те же значения больших полуосей. Такая структура называется резонансным мультиплетом.

При построении мультиплета для коэффициентов выполняются два основных условия (Мюррей, Дермотт, 2009; Ellis, Murray, 2000; Nesvorný и др., 2002)

$$k_1 - k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 0, \quad (3)$$

$$k_5 + k_6 = 0, 2, 4, \dots \quad (4)$$

Когда коэффициент k_3 принимает максимально возможное по модулю значение при равенстве нулю остальных коэффициентов, формируется основной резонансный аргумент, в который существенный вклад вносят долготы астероида (Nesvorný, Roig, 2001; Gallardo, 2019; Li и др., 2019). Основной аргумент нами представляется в виде

$$\beta = k_1\lambda' - k_2\lambda + (k_2 - k_1)\varpi'. \quad (5)$$

По характеру поведения аргументов β оценивается устойчивость резонанса или его отсутствие. Назовем резонанс устойчивым, если β либрирует, т. е. колеблется около определенного центра с амплитудой строго меньше 360° . Поведение, когда β изменяется от 0 до 360° , не имея определенного центра, классифицируется как циркуляция и отсутствие резонанса. Смена либрации аргумента на циркуляцию и наоборот характеризует смешанный тип поведения, при котором резонанс определяется как неустойчивый.

Размер мультиплета зависит от порядка резонанса $|k_1 - k_2|$ и его анализ требует классификации значительного числа временных рядов, особенно в случае исследования множества объектов. Поэтому мы сочли разумным использовать алгоритм автоматизации, идея которого описана в работе (Sekhar и др., 2016) и заключается в следующем. Значения аргумента дискретно разбиваются на подинтервалы в пределах от 0 до 360° и фиксируется попадание каждого значения в сформированные ячейки. В этот алгоритм нами был введен

ряд модификаций, в частности разбиение временного интервала для определения смешанных типов поведения резонансных аргументов.

С помощью программного комплекса IDA путем перебора коэффициентов k_3, k_4, k_5, k_6 автоматически формируется мультиплет резонансных аргументов. Для каждого такого набора с помощью численного интегрирования строится орбитальная эволюция объектов на заданном интервале времени. Полученные файлы эволюции резонансных аргументов автоматически анализируются программой классификации резонансного поведения. В результате работы программы определяется характер поведения аргумента (циркуляция, либрация или смешанное поведение) и строятся графики аргументов в зависимости от времени. Помимо основного функционала, программа на выходе выдает результат перебора коэффициентов в виде их комбинаций и число аргументов в мультиплете.

ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Астероиды с малыми перигелийными расстояниями представляют собой класс малых небесных тел Солнечной системы с перигелийным расстоянием $q \leq 0.15$ а. е. Эти объекты вызывают большой интерес, так как относятся к АСЗ, и выявление особенностей их движения является неотъемлемым этапом решения проблемы предотвращения астероидной опасности. В работе (Галушина

Таблица. Соизмеримости средних движений и размер мультиплета аргументов для некоторых астероидов с малыми перигелийными расстояниями, движущихся в окрестности орбитальных резонансов с большими планетами

| Астероид | Устойчивый резонанс | | | Неустойчивый резонанс | | |
|--------------------|---------------------|-----------|-----------|-----------------------|-----------|-----------|
| | Планета | k_2/k_1 | N_β | Планета | k_2/k_1 | N_β |
| (3200) Phaethon | | | | Венера | 3/7 | 19 |
| (137924) 2000 BD19 | | | | Венера | 3/4 | 2 |
| (399457) 2002 PD43 | | | | Земля | 1/4 | 10 |
| (431760) 2008 HE | | | | Марс | 5/9 | 19 |
| 2005 HC4 | | | | Венера | 1/4 | 10 |
| 2011 KE | | | | Сатурн | 9/1 | 85 |
| 2013 YC | Юпитер | 3/1 | 6 | Земля | 1/4 | 10 |
| 2015 EV | | | | Земля | 1/3 | 10 |
| | | | | Марс | 5/8 | 10 |
| | | | | Юпитер | 4/1 | 6 |
| 2015 HG | | | | Земля | 1/3 | 6 |
| | | | | Юпитер | 4/1 | 10 |
| 2019 JZ6 | Юпитер | 3/1 | 6 | Земля | 1/4 | 10 |
| 2020 HY2 | | | | Марс | 5/9 | 19 |
| | | | | Юпитер | 7/2 | 28 |
| 2020 TS2 | Юпитер | 3/1 | 6 | Земля | 1/4 | 10 |
| 2023 FS5 | | | | Сатурн | 7/1 | 44 |

и др., 2023) исследована динамика этих астероидов на интервале времени 4000 лет и выявлены все орбитальные резонансы с большими планетами. В работе показано, что из 60 известных на момент исследования астероидов с малыми перигелийными расстояниями 33 движутся в окрестности резонансов с одной или несколькими планетами одновременно. Предварительный поиск соизмеримостей осуществлялся путем оценки поведения резонансной щели (2), а устойчивость резонанса определялась поведением основного резонансного аргумента вида (5).

Так как каждый резонанс, определяемый соизмеримостью k_2/k_1 средних движений астероида и планеты, состоит из нескольких резонансных членов, получаемых из условий (3)–(4), то для идентификации типа резонанса и рассмотрения полноценной картины резонансной динамики необходимо построение мультиплетов аргументов. Как продолжение исследования, представленного в работе (Галушина и др., 2023), среди рассматриваемых астероидов нами было отобрано 13 объектов, движущихся в окрестности орбитальных резонансов с разными планетами, для построения и анализа резонансных мультиплетов. В табл. для них приводятся соизмеримости средних движений и число резонансных аргументов N_β , формирующих мультиплет. Из табл. видно, что в большинстве случаев резонансные взаимодействия неустойчивы, лишь при движении в окрестности резонанса 3/1 с Юпитером возникает устойчивая геометрическая конфигурация с планетой. Интересно отметить, что это взаимодействие сопровождается неустойчивым резонансом 1/4 с Землей.

РЕЗУЛЬТАТЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Как уже отмечалось выше, построение и анализ мультиплетов играют важную роль в формировании общей картины орбитальной эволюции каждого объекта. Особый интерес представляет выявление смешанного типа поведения аргументов, так как такое поведение является неустойчивым и способно существенным образом повлиять на орбиту объекта в будущем. Причем наличие в мультиплете хотя бы одного неустойчивого резонанса может сильно отразиться на процессе прогнозирования движения астероида. С этой точки зрения важно исследовать все резонансные члены с целью выявления различий в характере их поведения или же зафиксировать их отсутствие и остановиться на детальном анализе основного аргумента.

Для астероидов из табл. в несколько этапов были построены и проанализированы резонансные мультиплеты с использованием программ-

ного комплекса IDA. На первом шаге получены номинальные орбиты путем улучшения параметров астероидов по наблюдениям, взятым из Центра малых планет (Minor Planet Center of the International Astronomical Union, <https://www.minorplanetcenter.net>). На следующем шаге в автоматическом режиме подбирался допустимый интервал исследования путем численного интегрирования уравнений движения астероидов методом Loblie (Авдюшев, 2022). Меня конечный момент времени, оценивалась точность путем сравнения результатов прямого и обратного интегрирования. В качестве приемлемой погрешности принималось значение, не превышающее 10^{-9} а. е. Таким образом, интервал исследования подбирался индивидуально для каждого астероида. И наконец производилось отображение во времени номинальной орбиты каждого астероида на подобранном на предыдущем шаге интервале. В результате пошагового интегрирования с разными комбинациями коэффициентов в аргументе была построена эволюция резонансной щели и всех аргументов мультиплета. Используя программу комплекса IDA для автоматической визуализации аргументов и определения типа резонансного поведения, получаем базовый анализ, на основе которого формируется общая картина резонансного взаимодействия каждого астероида с планетой.

В качестве примера на рис. 1–3 приведем резонансные мультиплеты для разного типа резонансного взаимодействия. Рис. 1 демонстрирует пример устойчивого резонанса 3/1 астероида 2019 JZ6 с Юпитером. На интервале времени (0, 4500) лет была построена эволюция его орбитальных элементов, резонансной щели и шести аргументов, формирующих мультиплет этого резонанса. На рис. 1 на графике (а) приводится эволюция α , на графике (б) – основной критический аргумент β_1 , определяемый выражением (5), а затем остальные аргументы резонансного мультиплета. Астероид 2019 JZ6 находится в устойчивой геометрической конфигурации “астероид–Юпитер”, которая защищает его от сближений с планетой на рассматриваемом интервале времени. Из графика эволюции резонансной щели видно, что α регулярно колеблется около нуля с небольшой амплитудой, а критические аргументы резонансного мультиплета либрируют. Можно заметить, что для всех аргументов амплитуда колебаний составляет примерно 100° , но смещается центр либрации. При этом тип резонанса сохраняется для всего мультиплета.

Резонансное поведение астероида 2019 JZ6 не ограничивается устойчивым взаимодействием с Юпитером, как видно из табл., этот резонанс сопровождается движением астероида

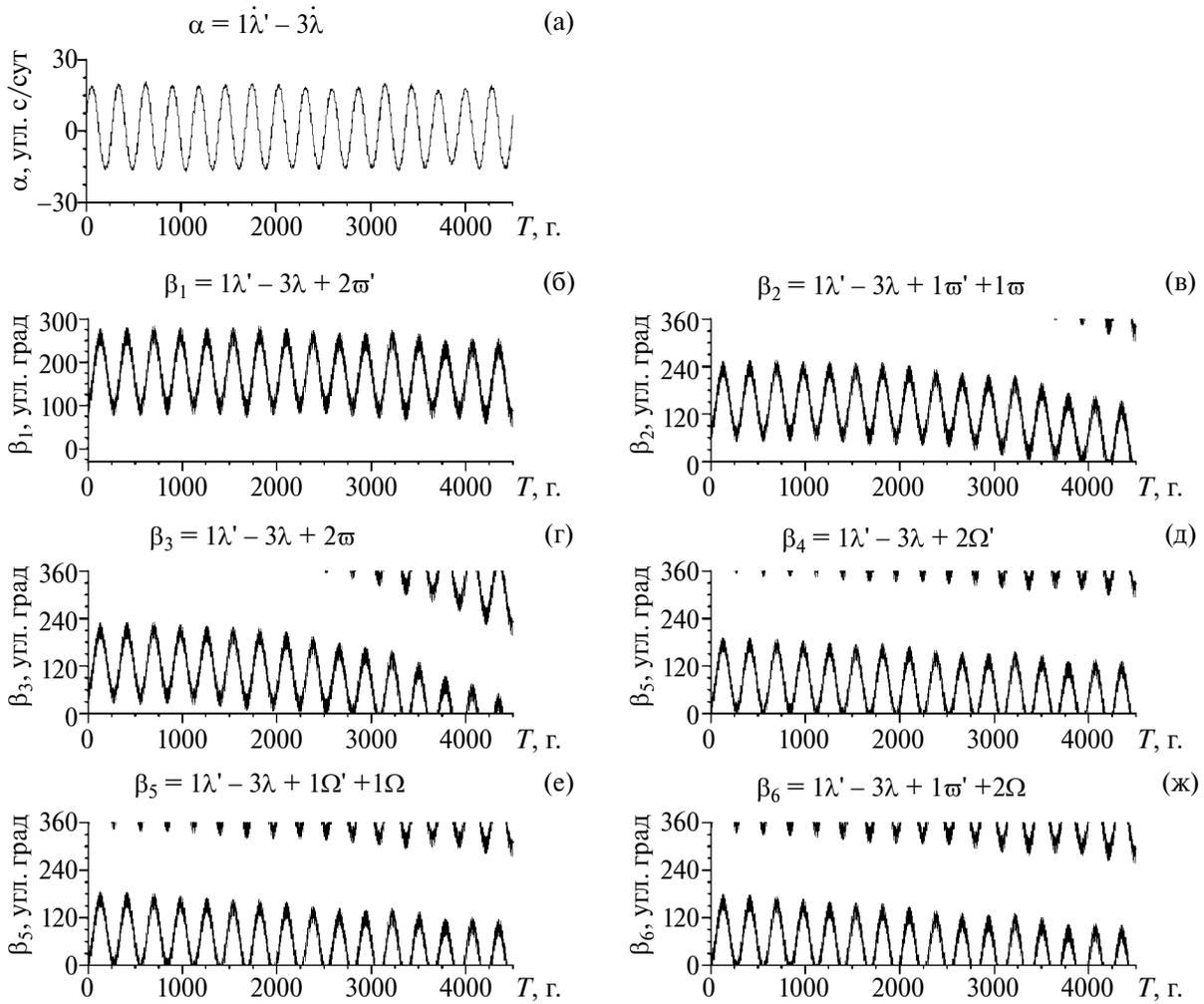


Рис. 1. Эволюция резонансной щели α (а), основного критического аргумента β_1 (б) и остальных аргументов: (в) (г), (д), (е), (ж) мультиплета устойчивого резонанса 3/1 астероида 2019 JZ6 с Юпитером.

в окрестности резонанса 1/4 с Землей. Этот пример неустойчивого резонансного взаимодействия показан на рис. 2. При соизмеримости средних движений $k_2/k_1 = 1/4$ мультиплет резонансных аргументов будет включать в себя 10 членов. Для удобства восприятия приводятся 6 из них. Подобно рис. 1, на рис. 2а отображается эволюция резонансной щели α , на рис. 2б – эволюция основного критического аргумента β_1 , а на графиках 2в–2ж – еще пяти аргументов резонансного мультиплета. Поведение аргументов демонстрирует частую смену участков либрации циркуляцией и обратно. В подобных случаях, при частой регулярной смене характера поведения резонансного аргумента, колебания резонансной щели смещаются относительно нуля и имеют предельно большую амплитуду. Смешанный тип резонанса сохраняется для всего мультиплета, но так же, как и в случае устойчивого резонанса 3/1 с Юпитером, происходит смещение центра колебания аргументов на участках либрации для разных резонансных

членов. Астероид 2019 JZ6 находится в неустойчивой геометрической конфигурации “астероид–Земля” и испытывает регулярные сближения с планетой.

С точки зрения резонансной эволюции интересно изучить пример резонанса, для которого сохраняемый на длительном интервале времени тип взаимодействия сменяется другим, будь то разрушение резонанса или, наоборот, захват в процессе эволюции. В качестве такого примера рассмотрим движение астероида (137924) 2000 BD19 в окрестности орбитального резонанса 3/4 с Венерой. Резонансный мультиплет в случае такой соизмеримости состоит всего из двух аргументов. На рис. 3 представлена эволюция резонансной щели α (а) и двух аргументов (б) и (в), формирующих мультиплет. На интервале времени (–7000, 3500 лет) астероид находится в устойчивом резонансе 3/4 с Венерой, но затем нарушается периодичность в либрации аргументов и она сменяется частой циркуляцией. Устойчивый на

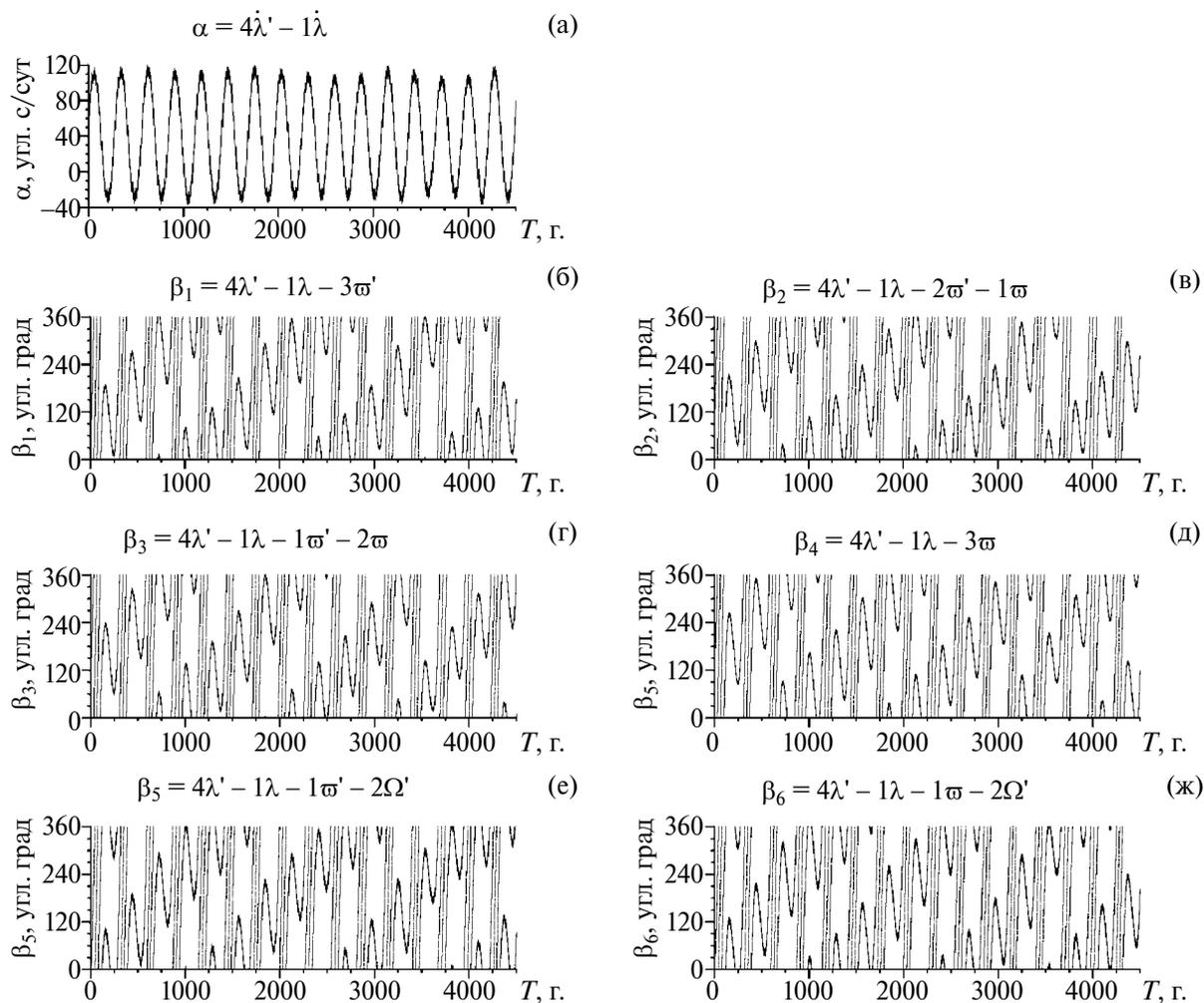


Рис. 2. Эволюция резонансной щели α (а), основного критического аргумента β_1 (б) и пяти аргументов (в), (г), (д), (е), (ж) мультиплета неустойчивого резонанса 1/4 астероида 2019 JZ6 с Землей.

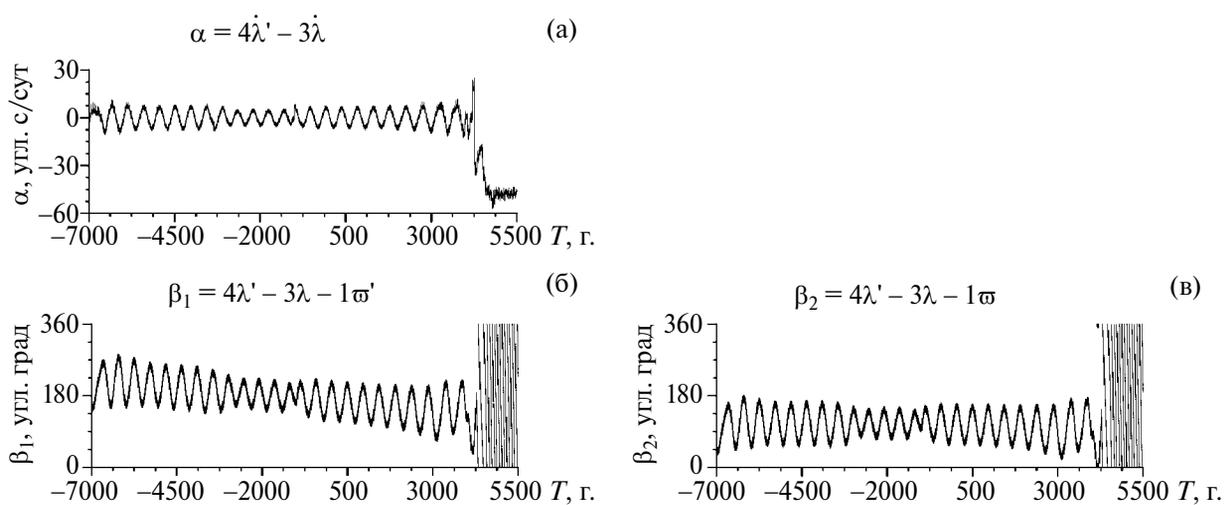


Рис. 3. Эволюция резонансной щели α и двух аргументов β_1 (б) и β_2 (в) мультиплета неустойчивого резонанса 3/4 астероида (137924) 2000 BD19 с Венерой.

длительном интервале времени резонанс разрушается. В этот момент резонансная щель теряет близость к нулю и начинает колебаться по одну сторону от точной соизмеримости. Такое поведение справедливо для всего резонансного мультиплета. Так же, как и в предыдущих примерах, смещается центр либрации аргументов, но тип резонансного взаимодействия сохраняется.

Среди особенностей движения астероидов, так сильно влияющих на изменение большой полуоси, а следовательно, и резонансных характеристик, можно выделить многократные и/или тесные сближения с большими планетами. Астероид (137924) 2000 BD19 в процессе своей эволюции имеет несколько сближений с Меркурием и регулярно сближается с Землей. В окрестности 4200–4500 г. происходит ряд тесных сближений с Землей в пределах 0.05 а. е., наиболее тесные из которых 0.009 а. е. в 4206 г. и 0.004 а. е. в 4274 г. Эти регулярные возмущения со стороны планеты, скорее всего, и являются причиной изменения параметров орбиты астероида 2000 BD19, в особенности большой полуоси, которые ведут к разрушению резонанса с Венерой. На всем интервале исследования астероид не испытывает сближений с Венерой даже после нарушения устойчивости геометрической конфигурации “астероид–планета”.

В представленных нами примерах резонансных взаимодействий астероидов с большими планетами видно, что в пределах одного мультиплета тип резонанса сохраняется, меняется лишь центр либрации критических аргументов. Такое поведение характерно для всех астероидов из табл. Проведенное исследование и анализ резонансных мультиплетов привели нас к заключению, что для выявления особенностей резонансного поведения рассматриваемых астероидов в большинстве случаев достаточно рассматривать поведение основного критического аргумента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе исследования резонансных взаимодействий астероидов, имеющих малые перигелийные расстояния, с большими планетами нами было рассмотрено такое явление, как резонансный мультиплет. При сохранении определенной соизмеримости средних движений взаимодействующих тел резонансный аргумент включает в себя несколько членов. Необходимость анализа большого числа временных рядов аргументов привела нас к идее создания программы автоматизации процесса расчета, построения графиков и определения типа резонансного взаимодействия. Разработанный алгоритм и программа были внедрены в программный комплекс IDA (Ga-

lushina, Letner, 2021) и применены к изучению динамики резонансных объектов с малыми перигелийными расстояниями. Использование автоматизации значительно сократило временные затраты и вероятность случайных ошибок в процессе обработки полученных данных.

В проведенном нами исследовании были построены и проанализированы мультиплеты критических аргументов для 13 астероидов, движущихся в окрестности орбитальных резонансов с разными планетами. Анализ резонансных мультиплетов показал, что в пределах мультиплета поведение резонансных аргументов не отличается, лишь смещается центр их либрации при устойчивом резонансе. Таким образом, для выявления особенностей резонансного взаимодействия исследуемых астероидов с планетами в большинстве случаев достаточно рассматривать поведение основного критического аргумента.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10022, <https://rscf.ru/project/19-72-10022/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Авдюшев В.А.* Коллокационный интегратор Lobbie в задачах орбитальной динамики // *Астрон. вестн.* 2022. Т. 56. № 1. С. 36–46. doi: 10.31857/S0320930X22010017. (*Avdyushev V.A.* Collocation integrator Lobbie in orbital dynamics problems // *Sol. Syst. Res.* 2022. V. 56(1). P. 32–42).
- Галушина Т.Ю., Летнер О.Н., Сюсина О.М.* Влияние светового давления и эффекта Ярковского на резонансное поведение астероидов с малыми перигелийными расстояниями // *Вестн. Томского гос. университета. Математика и механика.* 2023. № 85. С. 101–116.
- Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978. 128 с.
- Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2009. 588 с.
- Ellis K.M., Murray C.D.* The disturbing function in Solar System dynamics // *Icarus.* 2000. V. 147. № 1. P. 129–144.
- Gallardo T.* Orbital stability in the Solar system for arbitrary inclinations and eccentricities: planetary perturbations versus resonances // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2019. V. 487. P. 1709–1716.
- Galushina T. Yu., Letner O.N.* Modified version of IDA software and its application to the study of the motion of asteroid 2007 PR10 // *Astron. and Astrophys. Transactions.* 2021. V. 32. № 4. P. 355–370.
- Li M., Huang Yu., Gong Sh.* Assessing the risk of potentially hazardous asteroids through meanmotion resonances analyses // *Astrophys. and Space Sci.* 2019. V. 364. № 5. id. 78 (12 p.). <https://doi.org/10.1007/s10509-019-3557-5>

- Murray N., Holman M., Potter M.* On the origin of chaos in the asteroid belt // *Astron. J.* 1998. V. 116. № 5. P. 2583–2589.
- Nesvorný D., Morbidelli A.* Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt // *Astron. J.* 1998a. V. 116. № 6. P. 3029–3037.
- Nesvorný D., Morbidelli A.* An analytic model of three-body mean motion resonances // *Celest. Mech. and Dyn. Astron.* 1999b. V. 71. P. 243–271.
- Nesvorný D., Ferraz-Mello S., Holman M., Morbidelli A.* Regular and chaotic dynamics in the mean-motion resonances: Implications for the structure and evolution of the asteroid belt // *Asteroids III* / Eds: Bottke W.F., Cellino A., Paolicchi P., Binzel R.P. Tucson: Univ. Arizona Press, 2002. P. 379–394.
- Nesvorný D., Roig F.* Mean motion resonances in the trans-neptunian region // *Icarus.* 2001. V. 150. № 1. P. 104–123. <https://doi.org/10.1006/icar.2000.6568>
- Sekhar A., Asher D.J., Vaubaillon J.* Three-body resonance in meteoroid streams // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2016. V. 460. № 2. P. 1417–1427.
- Smirnov E.A.* Asteroids in three-body mean-motion resonances with Jupiter and Mars // *Sol. Syst. Res.* 2017. V. 51. № 2. P. 145–149.
- Smirnov E.A.* A new python package for identifying celestial bodies trapped in mean-motion resonances // *Astron. and Computing.* 2023. V. 43. id. 100707. <https://doi.org/10.1016/j.ascom.2023.100707>
- Smirnov E.A., Dvornikov I.S.* Identification of asteroids in two-body resonances // *Sol. Syst. Res.* 2018. V. 52. № 4. P. 347–354.
- Smirnov E.A., Dvornikov I.S., Popova, E.A.* Asteroids in three-body mean motion resonances with planets // *Icarus.* 2018. V. 304. P. 24–30. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.09.032>
- Smirnov E.A., Markov A.B.* Identification of asteroids trapped inside three-body mean motion resonances: a machine-learning approach // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2017. V. 469. № 2. P. 2024–2031.
- Smirnov E., Shevchenko I.I.* Massive identification of asteroids in three-body resonances // *Icarus.* 2013. V. 222. № 1. P. 220–228.