

УДК 521.35; 519.245

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИЙ ВАРИАЦИИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНОГО РАЗБРОСА ТРАЕКТОРИЙ ПРИ СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ЗАДАЧЕ УЛУЧШЕНИЯ ОРБИТЫ

© 2025 г. А. П. Батурин\*

*Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики*

*Томского государственного университета, Томск, Россия*

*\*e-mail: apbaturin@mail.tsu.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.

После доработки 03.05.2024 г.

Принята к публикации 14.08.2024 г.

Разработан метод определения линий вариации (LOV) в начальной доверительной области при сильной нелинейности в задаче улучшения орбиты, основанный на поиске максимума модуля вектора нормали к уровенным поверхностям целевой функции метода наименьших квадратов. Метод апробирован для трех астероидов с использованием их наблюдений на короткой дуге орбиты, а именно, определены точки двух линий вариации, соответствующих направлениям наибольшей деформации начальной доверительной области. Выполнена аппроксимация линий вариации с помощью полиномов 3-й степени. С использованием полученных аппроксимаций введены новые переменные, в которых начальная доверительная область является практически эллипсоидальной, т.е. нелинейность практически отсутствует. Моделирование начального вероятностного разброса траекторий выполняется в пространстве новых переменных. Полученный разброс может быть далее использован при выявлении столкновительных орбит и оценивании вероятности столкновения астероидов с Землей.

**Ключевые слова:** улучшение орбиты, нелинейность, LOV, начальный разброс траекторий

**DOI:** 10.31857/S0320930X24060111, **EDN:** NGYRSB

### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает исследования, опубликованные в работе автора (2023), и рассматривает вопросы определения линий вариации (LOV) и построения начального разброса траекторий при сильной нелинейности в задаче улучшения орбиты. Этим вопросам посвящено множество работ, среди которых можно упомянуть (Milani, 1999; Del Vigna, 2020).

Линиями вариации (LOV) принято называть направления наибольшей вытянутости начальной доверительной области. При отсутствии нелинейности в задаче улучшения орбиты эта область имеет эллипсоидальную форму, поэтому линии вариации совпадают с осями доверительного эллипсоида. В случаях же сильной нелинейности,

обычно имеющих место при короткой дуге наблюдаемости и малом числе наблюдений астероида, линии вариации представляют собой некоторые кривые, несимметричные относительно начала координат, если за него принять центр доверительной области. Иными словами, область имеет некоторую изогнутую несимметричную форму, причем, как это будет показано далее, такому исказению обычно подвержены только два направления, вдоль которых область имеет наибольшую вытянутость. Остальные четыре направления, как правило, остаются прямолинейными и совпадают с осями доверительного эллипсоида.

Под “нелинейностью” в работе понимается нелинейный характер изменения целевой функции метода наименьших квадратов в небольшой окрестности ее минимума, т.е. в начальной

доверительной области. Если характер изменения функции близок к линейному, то начальная область имеет практически эллипсоидальную форму (это так называемый “доверительный эллипсоид”). Чем больше отклонение целевой функции от линейной, тем сильнее форма начальной области отличается от эллипсоидальной. При сильной нелинейности деформации области таковы, что ее уже нельзя аппроксимировать с помощью доверительного эллипсоида, т.е. описывать ковариационной матрицей ошибок вектора начальных параметров. Условно можно считать, что сильная нелинейность соответствует описываемому ниже коэффициенту нелинейности, большему чем 0.1.

Рассматриваемый метод определения точек линий вариации основан на том факте, что длина вектора нормали к некоторой поверхности находится в прямой зависимости от кривизны этой поверхности: чем больше кривизна, тем длиннее вектор нормали, и наоборот. Поэтому в точках наибольшей вытянутости доверительной области вектор нормали имеет наибольшую величину. Опишем рассматриваемый метод.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ЛИНИЙ ВАРИАЦИИ

Пусть  $S(\mathbf{q}) = \frac{1}{2n-6} \sum_{i=1}^n (\Delta\alpha_i^2 \cos^2 \delta_i^{(o)} + \Delta\delta_i^2)$  – минимизируемая функция в задаче улучшения орбиты. Здесь  $\Delta\alpha_i = \alpha_i(\mathbf{q}) - \alpha_i^{(o)}$ ,  $\Delta\delta_i = \delta_i(\mathbf{q}) - \delta_i^{(o)}$  – разности вычисленных и измеренных значений прямого восхождения и склонения соответственно;  $\mathbf{q} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T = (q_1, \dots, q_6)^T$  – вектор определяемых начальных параметров движения;  $n$  – число наблюдений.

Определение точек какой-либо линии вариации выполняется с помощью решения следующей задачи поиска условного экстремума:

$$\Phi(\mathbf{q}) = N^2 + \lambda(S(\mathbf{q}) - K) \rightarrow \max, \quad (1)$$

где  $N^2 = (\partial S / \partial q_1)^2 + \dots + (\partial S / \partial q_6)^2$  – квадрат модуля вектора нормали,  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Условием максимума (1) является равенство нулю производных по определяемым параметрам и  $\lambda$ :

$$F_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = \frac{\partial N^2}{\partial q_j} + \lambda \frac{\partial S}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, 6), \quad (2)$$

$$F_7 = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = S(\mathbf{q}) - K = 0.$$

Система (2) решается итерационным методом дифференциальных поправок.

В качестве константы  $K$ , определяющей конкретную уровенную поверхность, можно использовать значение  $S(\mathbf{q})$ , вычисляемое на конце самой короткой полуоси доверительного эллипсоида с заданным коэффициентом увеличения  $k$ , поскольку это значение практически одинаково (Батурина, 2023) и для поверхности доверительного эллипсоида, и для уровенной поверхности функции  $S(\mathbf{q})$ .

В работах автора (2022; 2023) было показано, что среднеквадратическая ошибка  $\sigma$  представления наблюдений, вычисляемая на конце наименьшей полуоси доверительного эллипсоида, зависит от коэффициента увеличения  $k$  размеров эллипсоида квадратичным образом, однако эта зависимость является не вполне точной, так как среднеквадратическая ошибка представляет собой квадратный корень из функции  $S(\mathbf{q})$ , для которой эта зависимость является абсолютно точной:  $S(\mathbf{q}) = S(\hat{\mathbf{q}}) + k^2 \times (1/2) \Delta\mathbf{q} S''(\mathbf{q}) \Delta\mathbf{q}^T = \sigma_0^2 + bk^2$ , где  $b = (1/2) \Delta\mathbf{q} S''(\mathbf{q}) \Delta\mathbf{q}^T$ ;  $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$ ;  $\hat{\mathbf{q}}$  – МНК-оценка вектора  $\mathbf{q}$ ;  $\sigma_0^2 = S(\hat{\mathbf{q}})$ ;  $k$  – коэффициент увеличения доверительного эллипсоида. То есть в эллипсоидальной доверительной области (при отсутствии нелинейности) зависимость квадрата среднеквадратической ошибки от коэффициента увеличения эллипсоида имеет вид

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + bk^2. \quad (3)$$

Таким образом, применяя формулу (3) вдоль полуоси доверительного эллипсоида, для которой нелинейность отсутствует (как правило, это наименьшая полуось или близкая к ней), можно получить значения константы  $K = \sigma^2 = \sigma_0^2 + bk^2$  в (1), соответствующие заданному уровню доверительной вероятности, поскольку эта вероятность однозначно определяется коэффициентом  $k$ . Ее зависимость от коэффициента  $k$  для пространства произвольной размерности выведена, например, в работе (Сюсина и др., 2012), а подробный алгоритм ее вычисления приведен в работе автора (2020). В этих работах, в частности, показано, что в шестимерном пространстве доверительной вероятности 0.997 (определяющей “правило трех сигм” для одномерного случая) соответствует коэффициент увеличения  $k \approx 4.5$ .

В качестве “рабочих” объектов были выбраны три астероида из числа наблюдаемых на Терскольской обсерватории, у которых начальная группа наблюдений охватывает короткую дугу

орбиты, и далее для них использовалась только эта группа наблюдений. Для астероида 2017 ST14 было использовано шесть наблюдений на дуге в 5 сут.; для 2018 BP – шесть наблюдений на дуге в 7 сут.; для 2020 QK6 – 33 наблюдения на дуге в 3 сут.

Для этих объектов было выполнено улучшение орбиты с последующим представлением наблюдений на концах 12 полуосей доверительного эллипсоида (с коэффициентом увеличения 4.5). В табл. 1 приведены полученные среднеквадратические ошибки  $\sigma$  и коэффициент нелинейности  $\chi$ , вычисляемый как  $0.5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / (\sigma_{\min} - \sigma_0)$  (Чернизов и др., 2014), где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  – соответственно максимальная и минимальная среднеквадратическая ошибка представления наблюдений на концах 12 полуосей доверительного эллипсоида.

В табл. 1 строки, соответствующие каждой оси эллипсоида, объединены в пары, в которых нечетный и четный номера показывают противоположные направления оси. Как видно

**Таблица 1.** Представление наблюдений на концах полуосей доверительного эллипсоида и коэффициент нелинейности для выбранных астероидов

Номер полуоси	2017 ST14	2018 BP	2020 QK6
1	0.59356535"	0.5806771"	0.5613201"
2	0.56079548"	0.4252692"	0.5519560"
3	0.09910672"	0.2260372"	0.4285175"
4	0.09922879"	0.2279466"	0.4285236"
5	0.09518648"	0.2001075"	0.4285182"
6	0.09518648"	0.2001078"	0.4285181"
7	0.09518645"	0.2001078"	0.4285169"
8	0.09518645"	0.2001079"	0.4285169"
9	0.09518630"	0.2001078"	0.4285185"
10	0.09518630"	0.2001078"	0.4285185"
11	0.09518662"	0.2001078"	0.4285166"
12	0.09518662"	0.2001078"	0.4285166"
коэффициент нелинейности, $\chi$	6.71	2.44	2.07

из табл. 1, представление наблюдений на концах последних четырех осей эллипсоида, т.е. на концах полуосей №№ 5,...,12, практически одинаково, что говорит об отсутствии нелинейности вдоль этих осей. Нелинейность проявляется главным образом вдоль первой оси эллипсоида и, в меньшей степени, вдоль второй. Поэтому достаточно определить всего две линии вариации (будем их называть LOV1 и LOV2), так как остальные четыре практически совпадают с соответствующими четырьмя осями доверительного эллипсоида.

Для определения линий вариации в качестве начального приближения при решении системы (2) сначала берется точка 1-й (для LOV1) или 2-й (для LOV2) полуоси доверительного эллипсоида с коэффициентом  $k = 0.1$ . Полученное решение системы (2) используется далее как начальное приближение при определении следующей точки линии вариации, соответствующей коэффициенту  $k = 0.2$ , и т.д. В качестве константы  $K$  в (1), задающей уровенную поверхность, используется квадрат среднеквадратической ошибки, вычисленной на конце наименьшей оси эллипсоида с этим же коэффициентом  $k$ . Таким образом, процесс повторяется с шагом 0.1 до значения  $k = 6$ . Далее аналогичный процесс выполняется и для противоположного направления оси эллипсоида, причем коэффициент  $k$  для этого направления условно полагается отрицательным.

Результаты определения LOV1 и LOV2 приведены на рис. 1–6 в координатах  $\xi_1, \dots, \xi_6$ , которые направлены по осям доверительного эллипсоида, а их начало совпадает с его центром. Преобразование координат между новой и исходной системой  $q_1, \dots, q_6$  выполняется по формуле

$$\mathbf{s} = \mathbf{U}(\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}}),$$

где  $\mathbf{s} = (\xi_1, \dots, \xi_6)^T$ ;  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)^T$ ;  $\mathbf{U}$  – матрица поворота, столбцами которой являются единичные собственные векторы ковариационной матрицы вектора МНК-оценки  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Черным цветом изображены вычисленные точки линий вариации, красным – их аппроксимация с помощью полиномов 3-й степени вида  $a_1k + a_2k^2 + a_3k^3$  – без свободного члена, поскольку линии вариации всегда проходят через начало координат. Максимальный коэффициент детерминации ( $R^2$ ) для всех аппроксимаций на графиках составляет 0.99999924, т.е. полиномы 3-й степени аппроксимируют линии вариации практически точно.

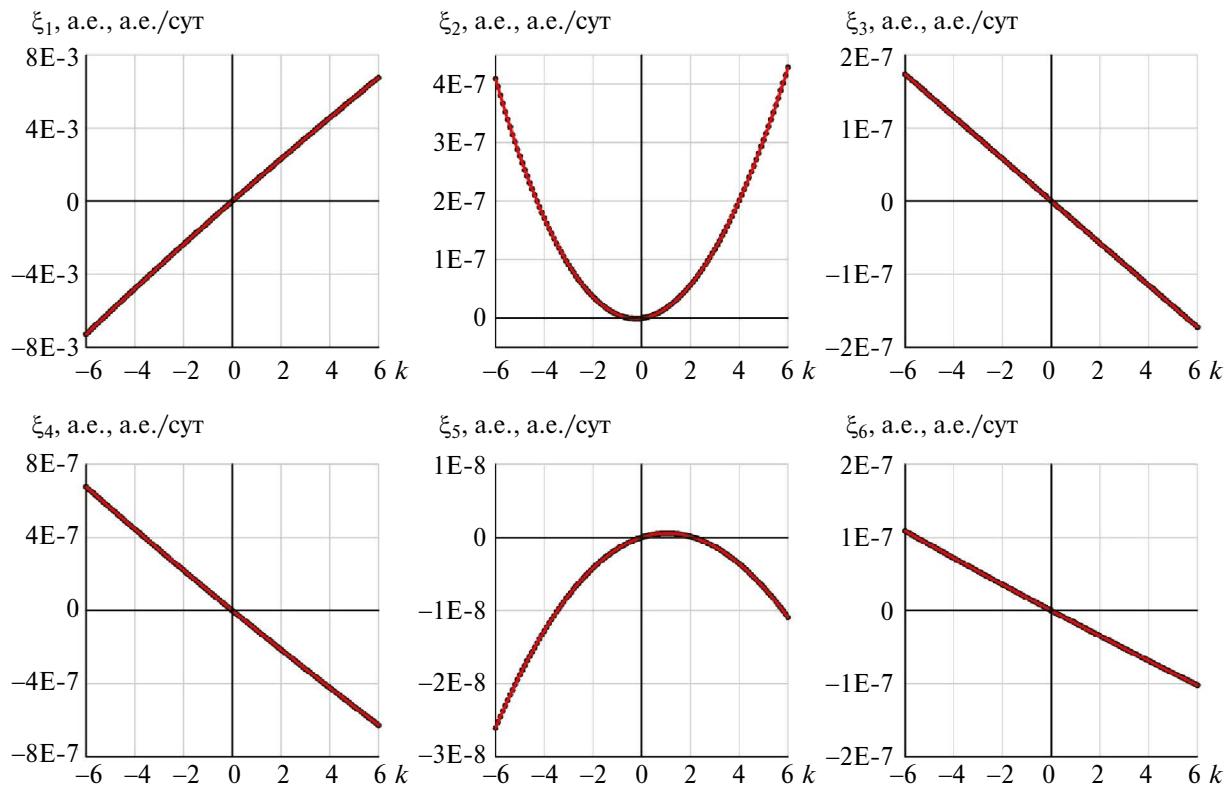


Рис. 1. Результаты определения LOV1 для объекта 2017 ST14.

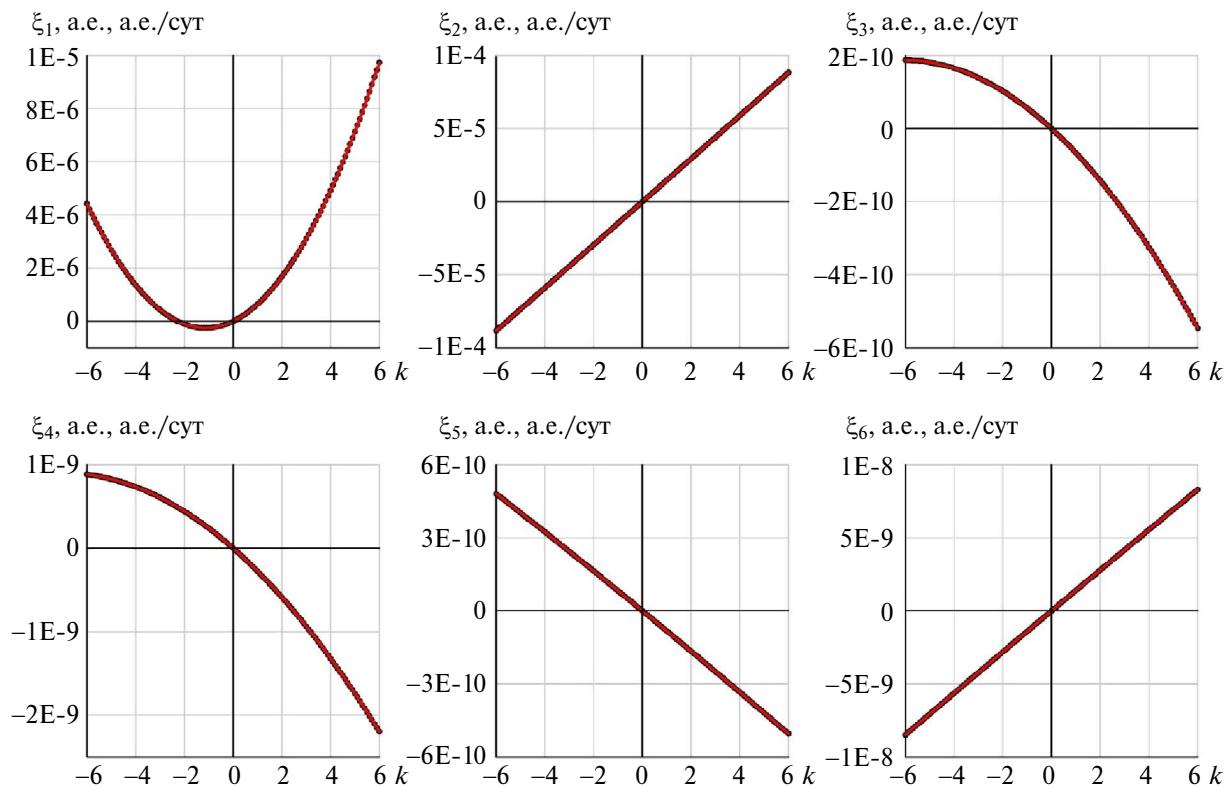


Рис. 2. Результаты определения LOV2 для объекта 2017 ST14.

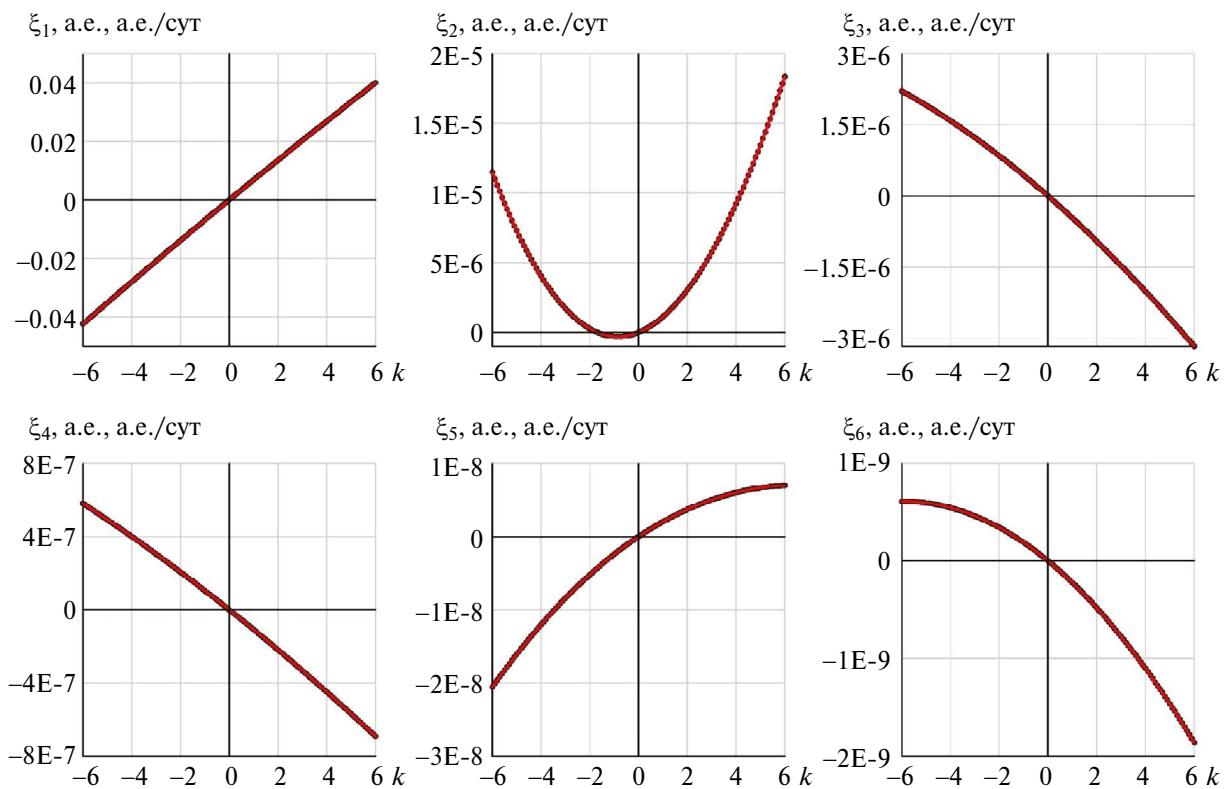


Рис. 3. Результаты определения LOV1 для объекта 2018 BP.

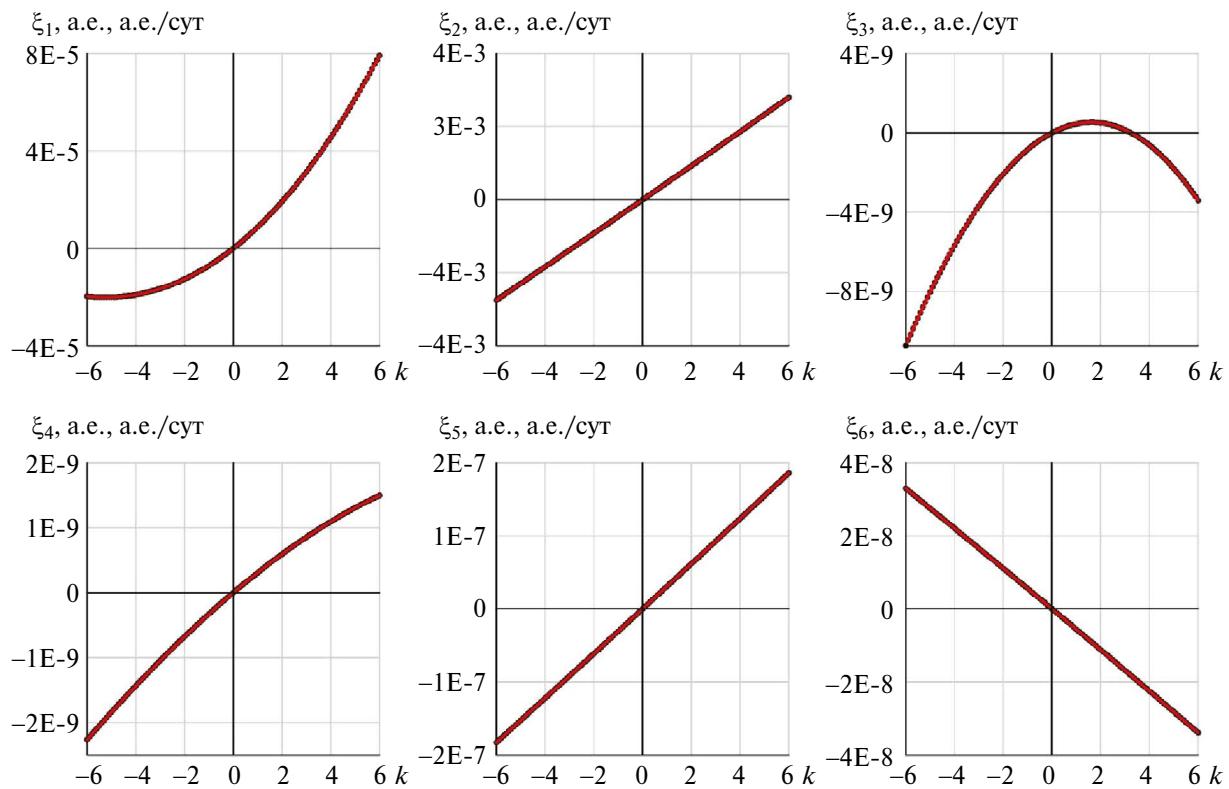


Рис. 4. Результаты определения LOV2 для объекта 2018 BP.

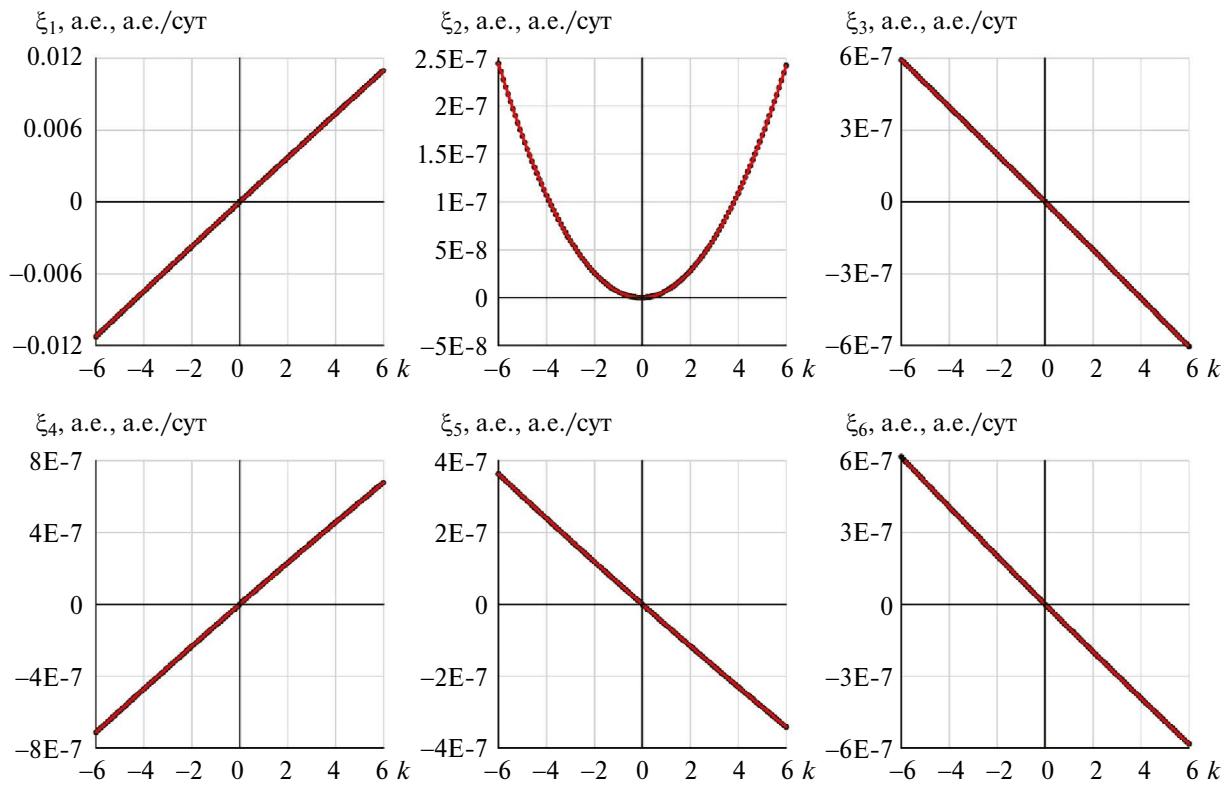


Рис. 5. Результаты определения LOV1 для объекта 2020 QK6.

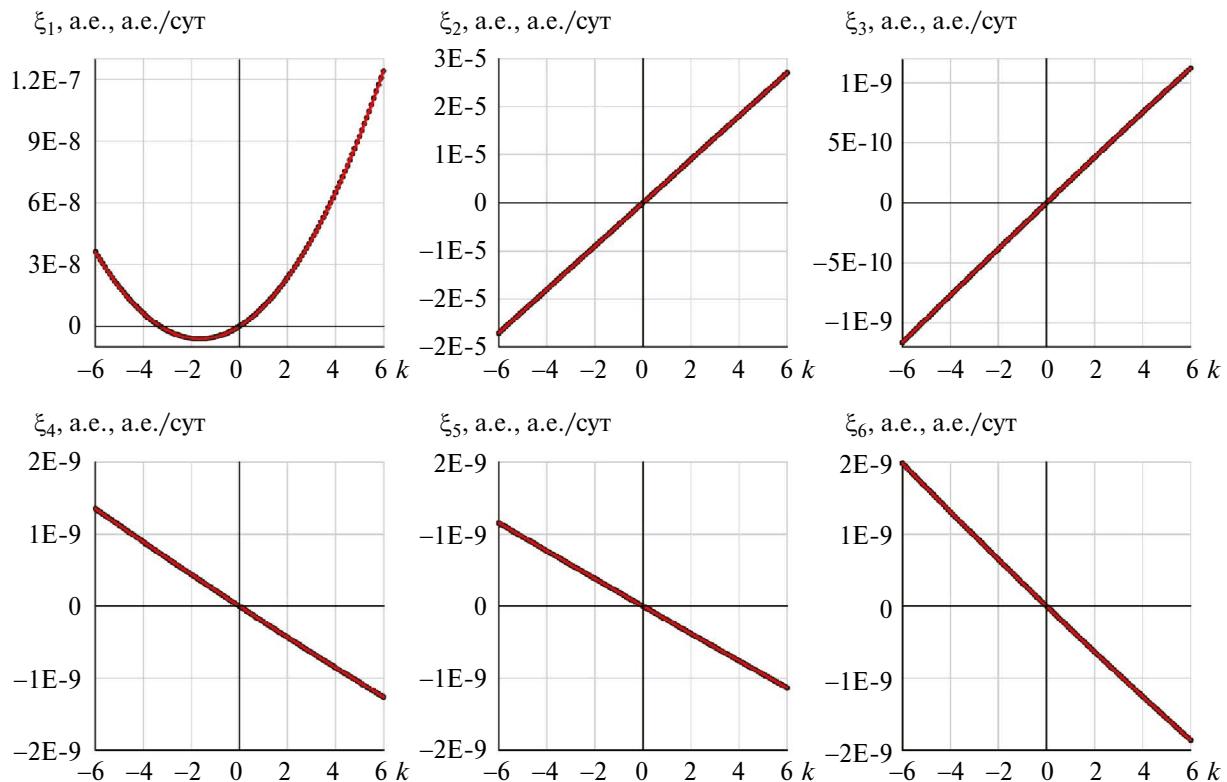


Рис. 6. Результаты определения LOV2 для объекта 2020 QK6.

Внутри доверительного эллипсоида плотность доверительной вероятности выражается формулой

$$f_{\text{lin}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_1 \dots l_6 \sqrt{(2\pi)^6}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right), \quad (4)$$

где  $k^2 = (\xi_1 / l_1)^2 + \dots + (\xi_6 / l_6)^2$  – квадрат коэффициента увеличения эллипсоида;  $l_1, \dots, l_6$  – полуоси эллипсоида.

Как уже упоминалось, практическое совпадение уровенной и эллипсоидальной поверхности на концах наименьшей оси эллипсоида позволяет использовать значения функции  $\sigma(\mathbf{q})$  в этих точках как значения, определяющие уровенную поверхность, соответствующую эллипсоидальной поверхности с заданной доверительной вероятностью. Выразив  $k^2$  из аппроксимирующей формулы (3), примененной вдоль наименьшей полуоси, получим  $k^2 = (\sigma^2(\mathbf{q}) - \sigma_0^2) / b$ . Подставив это выражение в (4), будем иметь:

$$f_{\text{non}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{l_1 \dots l_6 \sqrt{(2\pi)^6}} \exp\left(-\frac{\sigma^2(\mathbf{q}) - \sigma_0^2}{2b}\right). \quad (5)$$

Иными словами, плотность доверительной вероятности в нелинейном случае может вычисляться по такой же формуле, что и в линейном, только показатель экспоненты зависит от представления наблюдений  $\sigma(\mathbf{q})$  в рассматриваемой точке.

Формула (5) является более точной по сравнению с формулой (1) из работы автора (2023), поскольку формула (3) дает более точную аппроксимацию среднеквадратической ошибки вдоль наименьшей оси эллипсоида, чем формула  $\sigma = \sigma_0 + bk^2$ , приведенная в упомянутой работе, хотя она также может быть использована (с большей остаточной погрешностью).

В полученных точках линий вариации плотность вероятности, вычисленная по формуле (5), должна совпадать с плотностью, вычисленной по формуле (4). На рис. 7 приведены модули относительных разностей  $|\Delta f|/f$  этих вероятностей: черный цвет соответствует точкам LOV1, красный – точкам LOV2.

Как видно из рис. 7, относительное различие плотности вероятности не превышает  $10^{-7}$  для 2017 ST14,  $10^{-9}$  для 2018 BP и  $10^{-4}$  для 2020 QK6, т.е. точность рассматриваемого способа (1) определения линий вариации является удовлетворительной.

## ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО РАЗБРОСА ТРАЕКТОРИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНИЙ ВАРИАЦИИ LOV1 И LOV2

С помощью полученных линий вариации могут быть введены новые переменные, в которых начальная доверительная область является практически эллипсоидальной, т.е. нелинейность практически отсутствует. Затем в этих переменных можно построить начальный разброс траекторий по известному алгоритму (Полляк, 1971), позволяющему заполнить эллипсоидальную область точками в соответствии с законом многомерного нормального распределения, задаваемого ковариационной матрицей. Новые переменные (обозначим их  $k_1, \dots, k_6$ ) связаны с координатами  $\xi_1, \dots, \xi_6$  формулами

$$\begin{aligned} \xi_1 &= g_1(k_1) + h_1(k_2), \\ \xi_2 &= g_2(k_1) + h_2(k_2), \\ \xi_3 &= g_3(k_1) + h_3(k_2) + k_3 l_3, \\ \xi_4 &= g_4(k_1) + h_4(k_2) + k_4 l_4, \\ \xi_5 &= g_5(k_1) + h_5(k_2) + k_5 l_5, \\ \xi_6 &= g_6(k_1) + h_6(k_2) + k_6 l_6, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $g_i(k)$  и  $h_i(k)$  – аппроксимирующие полиномы для LOV1 и LOV2, соответственно, графики которых изображены красным цветом на рис. 1–6.

В формулах (6) переменные  $k_1, \dots, k_6$  представляют собой как бы “коэффициенты увеличения” доверительной области вдоль новых осей, первые две из которых являются криволинейными (LOV1 и LOV2). Доверительная область в этих переменных фактически представляет собой шестимерный шар, а описывающая ее ковариационная матрица является единичной. Результаты представления наблюдений на концах “полуосей” этого шара, т.е. на концах радиусов, расположенных вдоль осей координат (с коэффициентом увеличения 4.5), приведены в табл. 2.

Сравнивая табл. 2 и табл. 1, можно видеть, что в новых переменных представление наблюдений по всем осям становится практически одинаковым и, соответственно, коэффициент нелинейности  $\chi$  становится практически равным нулю.

Начальный разброс траекторий формируется в переменных  $k_1, \dots, k_6$  путем заполнения единичного шестимерного шара точками согласно закону нормального распределения, задаваемому единичной ковариационной матрицей, по алгоритму, приведенному в (Полляк, 1971). В настоящей работе для каждого объекта моделировалось

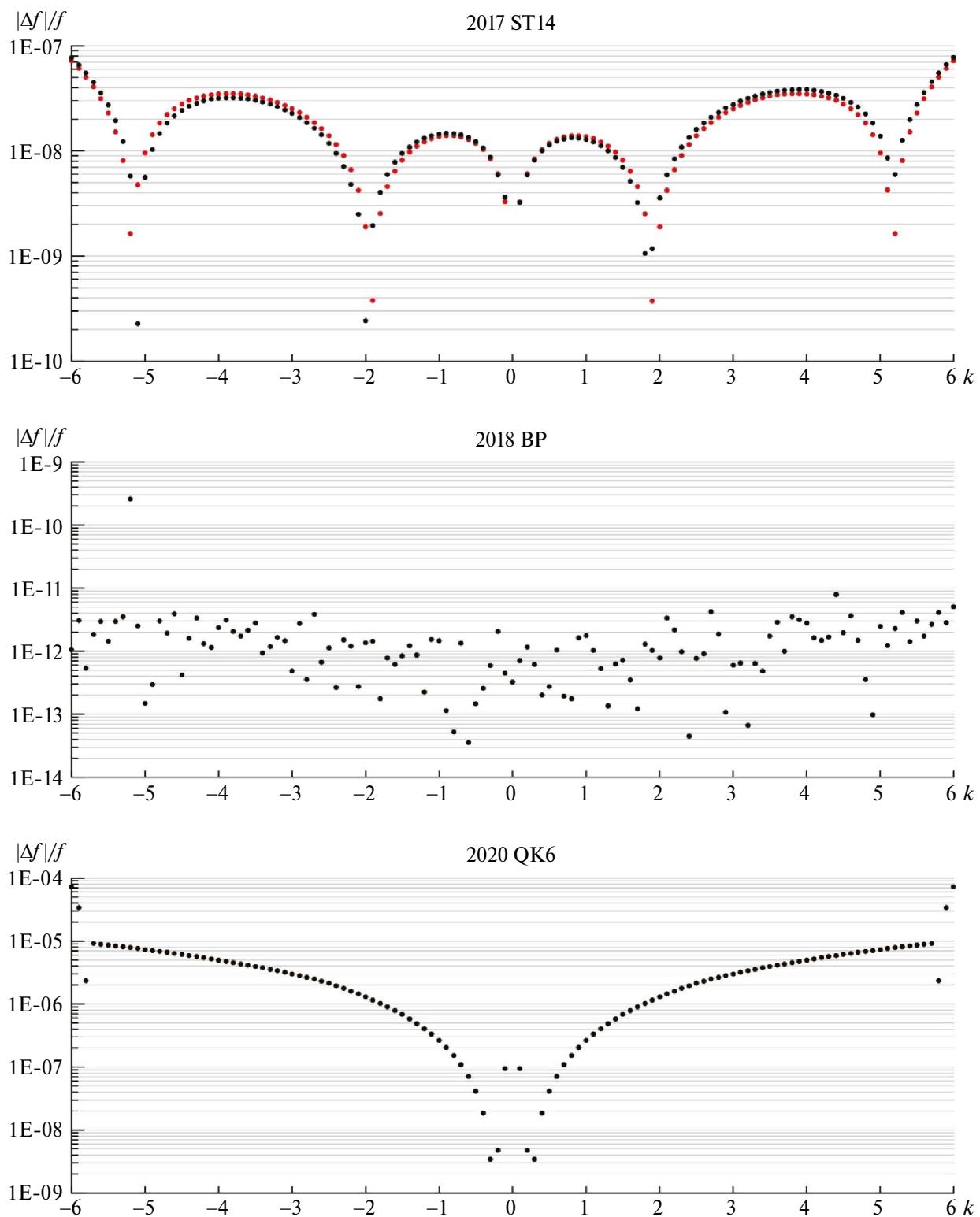


Рис. 7. Относительное различие доверительных вероятностей, вычисленных по формуле (4) и (5) для полученных точек LOV1 и LOV2.

10000 точек. Затем полученные координаты точек пересчитываются по формулам (6) в  $\xi_1, \dots, \xi_6$  и далее в исходную прямоугольную систему координат  $q_1, \dots, q_6$ . Затем для каждой точки вычислялись плотности вероятности по формулам (4) и (5) и их относительная разность  $\Delta f / f_{\max}$ , где  $f_{\max} = 1 / (l_1 \dots l_6 \sqrt{(2\pi)^6})$  – плотность доверительной вероятности в центре области.

Результаты приведены на рис. 8. По горизонтальной оси отложен коэффициент  $k$ , вычисляемый как  $k^2 = k_1^2 + \dots + k_6^2$ . Этот коэффициент был использован при вычислении плотности вероятности в линейном случае по формуле (4). Как видно из рис. 8, наибольшее различие (в долях величины  $f_{\max}$ ) плотности вероятности по модулю составляет около 0.004 для объекта 2017 ST14, 0.006 для 2018 BP и 0.002 для 2020 QK6. Средние значения различия плотности вероятности для всех 10000 точек составляют  $-6 \times 10^{-6}$  для 2017 ST14,  $-9 \times 10^{-6}$  для 2018 BP и  $7 \times 10^{-6}$  для 2020 QK6, т.е. менее чем  $10^{-5}$ , а значит,

**Таблица 2.** Представление наблюдений на концах радиусов шестимерного шара, расположенных вдоль осей координат  $k_1, \dots, k_6$ , и коэффициент нелинейности

Номер полуоси	2017 ST14	2018 BP	2020 QK6
1	0.09518668"	0.2001069"	0.4285161"
2	0.09518598"	0.2001087"	0.4285171"
3	0.09518626"	0.2001077"	0.4285166"
4	0.09518633"	0.2001079"	0.4285166"
5	0.09518648"	0.2001075"	0.4285182"
6	0.09518648"	0.2001078"	0.4285181"
7	0.09518645"	0.2001078"	0.4285169"
8	0.09518645"	0.2001079"	0.4285169"
9	0.09518630"	0.2001078"	0.4285185"
10	0.09518630"	0.2001078"	0.4285185"
11	0.09518662"	0.2001078"	0.4285166"
12	0.09518662"	0.2001078"	0.4285166"
коэффициент нелинейности, $\chi$	$9.4 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-5}$

практически являются нулевыми. При оценивании вероятности столкновения отклонение в несколько тысячных от максимальной плотности не является особо значимым, поскольку может иметь место как в одну, так и в другую сторону от реальной плотности и потому в большой мере должно компенсироваться.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен способ определения линий вариации начальной доверительной области, основанный на поиске условного максимума квадрата модуля вектора нормали к уровням поверхностям целевой функции метода наименьших квадратов. Было показано, что способ позволяет довольно точно определять точки этих линий, поскольку плотность доверительной вероятности оказалась практически равной плотности в соответствующих точках осей доверительного эллипсоида. Кроме того, было показано, что при сильной нелинейности деформация начальной доверительной области происходит главным образом вдоль двух наибольших осей доверительного эллипсоида, а вдоль остальных осей практически отсутствует. Это позволяет ввести новые переменные, в которых первые две представляют собой как бы “коэффициенты увеличения” доверительной области вдоль двух криволинейных осей, задаваемых линиями вариации, а остальные четыре являются коэффициентами увеличения вдоль оставшихся более коротких практически прямолинейных осей эллипсоида.

В новых переменных начальная доверительная область является эллипсоидальной, что позволяет использовать их при построении начального разброса траекторий по хорошо известному алгоритму (Полляк, 1971). Следовательно, можно заключить, что рассмотренный способ моделирования начального разброса траекторий, основанный на использовании линий вариации LOV1 и LOV2, может в дальнейшем применяться при оценивании вероятности столкновения астероидов с планетами. Преимуществом такого способа является “неприкосновенность” наблюдений объекта, поскольку в других способах, как, например, в способе возмущенных наблюдений (Сюсина и др., 2012), сами наблюдения варьируются, что, вообще говоря, не совсем корректно, так как любые наблюдения по своей природе являются константами. В дальнейшем планируется усовершенствовать способ построения начального разброса таким образом, чтобы

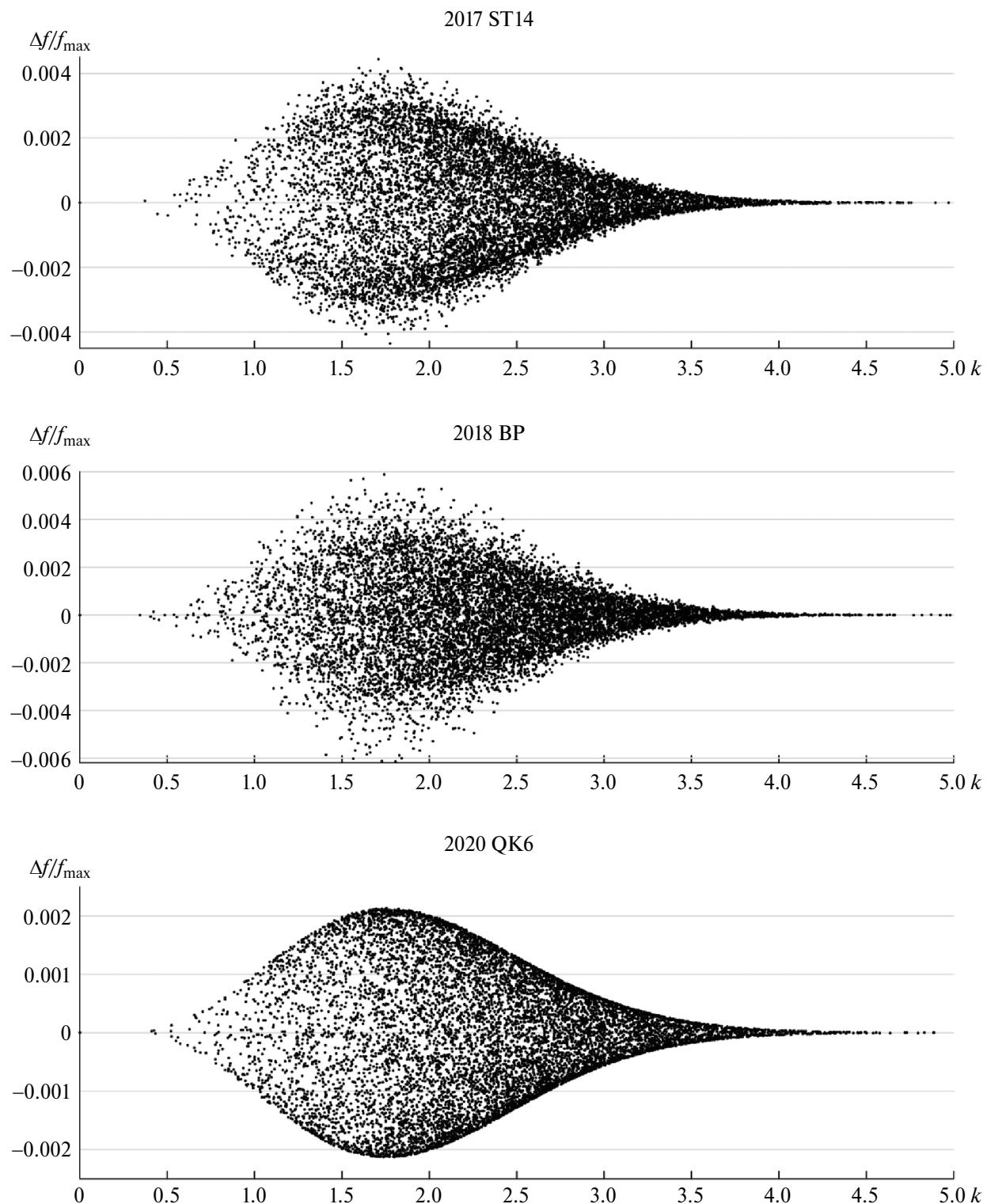


Рис. 8. Отклонения плотности доверительной вероятности от плотности нормального распределения в точках моделируемого начального разброса.

плотность вероятности в начальной доверительной области была ближе к плотности в эллипсоидальной области.

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Терскольская обсерватория”. Исследование выполнено с использованием суперкомпьютера “СКИФ Cyberia” Томского государственного университета.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSWM-2024-0005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батурина А.П. Выявление столкновительных орбит астероидов с помощью условной минимизации расстояния до Земли // Астрон. вестн. 2020. Т. 54. № 6. С. 560–566. (Baturin A.P. Detection of asteroid impact orbits using conditional minimization of the distance to the Earth // Sol. Syst. Res. 2020. V. 54. № 6. P. 550–556.)
2. Батурина А.П. Выявление столкновительных орбит астероидов при заметной нелинейности в задаче улучшения орбиты // Астрон. вестн. 2022. Т. 56. № 5. С. 335–343. (Baturin A.P. Detection of collisional asteroid orbits under observable nonlinearity in the problem of orbit improvement // Sol. Syst. Res. 2022. V. 56. № 5. P. 318–326.)
3. Батурина А.П. Оценивание вероятности столкновения астероидов с Землей при заметной нелинейности в задаче улучшения орбиты // Астрон. вестн. 2023. Т. 57. № 4. С. 373–384. (Baturin A.P. Estimating the asteroid's impact risk under significant nonlinearity in the orbit determination problem // Sol. Syst. Res. 2023. V. 57. № 4. P. 388–398.)
4. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронно-вычислительных машинах. М.: Советское радио, 1971. 400 с.
5. Сюсина О.М., Черницов А.М., Тамаров В.А. Построение доверительных областей в задаче вероятностного исследования движения малых тел Солнечной системы // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 3. С. 209–222. (Syusina O.M., Chernitsov A.M., Tamarov V.A. Construction of confidence regions in problem on probabilistic study into motion of minor bodies of the Solar system // Sol. Syst. Res. 2012. V. 46. № 3. P. 195–207.)
6. Черницов А.М., Сюсина О.М., Тамаров В.А. Оценивание нелинейности в задаче построения доверительных областей движения потенциально опасных астероидов, наблюдавшихся в одной оппозиции // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 12. С. 139–145.
7. Del Vigna A. The manifold of variations: hazard assessment of short-term impactors // Celest. Mech. 2020. V. 132. Id. 49.
8. Milani A. The asteroid identification problem. I: Recovery of lost asteroids // Icarus. 1999. V. 137. P. 269–292.