

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ПЛАЗМОЙ

УДК 533.9

*Памяти А.В. Тимофеева посвящается*

### О ВОЗМОЖНОСТИ СНИЖЕНИЯ АНОМАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ НАКАЧКИ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ПЛОТНОСТЕЙ ПЛАЗМЫ

© 2023 г. Е. З. Гусаков<sup>а</sup>, А. Ю. Попов<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: a.porov@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.

После доработки 25.05.2023 г.

Принята к публикации 31.05.2023 г.

Исследованы последствия эффекта локализации ионных бернштейновских (ИБ) волн, которые возбуждаются при вторичных распадах, сопровождающих низкопороговую параметрическую распадную неустойчивость необыкновенной волны накачки, приводящую к генерации необыкновенной волны и локализованной в плазме верхнегибридной (ВГ) волны. Показано, что обнаруженный эффект приводит к уменьшению как уровня насыщения первичной неустойчивости, так и уровня аномального поглощения волны накачки в экспериментах по электронному циклотронному нагреву плазмы на второй гармонике резонанса.

*Ключевые слова:*

**DOI:** 10.31857/S0367292123600280, **EDN:** HBIJCD

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная теория распространения, трансформации и поглощения СВЧ-волн электронного циклотронного (ЭЦ) диапазона частот, существенный, во многом пионерский, вклад в развитие которой внес профессор А.В. Тимофеев [1–3], является надежным фундаментом для разработки ЭЦ-методов нагрева плазмы в термоядерных ловушках. Однако за последнее время получен ряд убедительных данных, свидетельствующих о наличии аномальных явлений в экспериментах по электронному циклотронному резонансному нагреву (ЭЦРН) плазмы, не описываемых линейной теорией. К ним относятся аномальное рассеяние СВЧ-волн [4–7], аномальное излучение на субгармониках частоты гиротрона [8], появление групп ускоренных ионов [9, 10] и уширение профиля энерговыделения ЭЦ-волны [11, 12]. Во многих случаях эти явления носят пороговый характер, и их интенсивность экспоненциально возрастает с увеличением мощности волны [4, 5, 7, 8, 12], что определенно указывает на нелинейную (параметрическую) природу их возникновения. Недавние исследования на токамаке ASDEX-Upgrade [8] доказывают, что параметрические неустойчивости распада легко возбуждаются в ЭЦРН-экспериментах с исполь-

зованием мегаваттных микроволновых пучков. Более того, условием для их возбуждения является прохождение пучка накачки через любой локальный максимум профиля плотности. Такие максимумы, не совпадающие с осью разряда, часто возникают при мощном центральном ЭЦРН [12] (electron pump-out), существуют в магнитных островах [4, 5, 7], а также наблюдаются в блоках на периферии плазмы [8]. Для объяснения аномальных явлений, сопровождающих распространение СВЧ-волн в замагниченной плазме, был предложен механизм, который является ответственным за увеличение эффективности трехволнового взаимодействия и резкое снижение порога возбуждения параметрической распадной неустойчивости (ПРН) СВЧ-волны [13–21]. Его ключевым элементом является локализация хотя бы одной дочерней волны в локальном максимуме немонотонного профиля плотности. При локализации происходит подавление потерь энергии дочерней волны из области распада в направлении неоднородности. На основе предложенного механизма были проанализированы различные сценарии абсолютных ПРН СВЧ-волны [22–31] и выявлен наиболее опасный из них, связанный с параметрическим возбуждением под действием необыкновенной волны накачки двух

запертых в плазме верхнегибридных (ВГ) волн [16, 17, 21]. Найденный сценарий, сводящийся к двухплазмонному распаду, обладающему наименьшим порогом возбуждения, позволил объяснить [32] наиболее интенсивные нелинейные эффекты, наблюдавшиеся в ЭЦРН-экспериментах на токамаке TEXTOR, и предсказать значительный уровень аномального поглощения (от 5% до 80%). В рамках этого сценария предполагается, что истощение волны накачки и каскад вторичных распадов, приводящий к возбуждению вторичных ВГ-волн, локализованных в локальном максимуме немонотонной плотности, и ионных бернштейновских (ИБ) волн, быстро покидающих слой распада вдоль направления плазменной неоднородности, играют доминирующую роль в насыщении первичной неустойчивости.

Как позднее было обнаружено в работе [33], где проанализирован случай, когда волна накачки необыкновенной поляризации распадается на две локализованные ВГ-волны, для типичных условий ЭЦРН-экспериментов на токамаке TEXTOR существует узкий частотный диапазон, в котором ИБ-волны могут быть также локализованы в окрестности локального максимума немонотонного профиля плотности. В этом случае эффективность нелинейной связи между тремя локализованными продольными ВГ- и ИБ-волнами может быть намного выше, а порог для возбуждения вторичных распадов намного ниже, чем в случае возбуждения нелокализованных ИБ-волн. Это обстоятельство значительно снижает уровень аномального поглощения по сравнению с ранее предсказанным уровнем [21, 32]. Следует отметить, однако, что одновременная локализация двух ВГ-волн, которые удовлетворяют распадным условиям для частот взаимодействующих колебаний, возможна лишь в очень узком диапазоне плотностей плазмы в окрестности локального максимума профиля плотности. При произвольном же значении плотности в локальном максимуме в первичном распаде возможна локализация только одной дочерней ВГ-волны. Второй дочерней волной обычно является необыкновенная волна, которая после возбуждения быстро покидает область распада вдоль направления неоднородности [19–21].

В настоящей работе анализируется возможность локализации вторичных ИБ-волн в этом случае. Кроме того, исследуется влияние эффекта локализации обеих дочерних ВГ- и ИБ-волн при вторичных распадах на уровень насыщения и аномального поглощения для этого сценария первичной неустойчивости. Мы сравним случай, когда вторичная неустойчивость первичной ВГ-моды приводит к возбуждению локализованных вторичных ВГ- и ИБ-волн, и случай, при котором вторичная неустойчивость приводит к возбуждению локализованной ВГ-волны и бегущей

в направлении неоднородности ИБ-волны. Численный анализ первичной неустойчивости и нелинейной эволюции взаимодействующих волн будет проведен для параметров эксперимента на токамаке TEXTOR, на котором аномальные эффекты были исследованы наиболее подробно [4, 5].

## 2. ЗАПИРАНИЕ ИОННОЙ БЕРНШТЕЙНОВСКОЙ ВОЛНЫ В ЛОКАЛЬНОМ МАКСИМУМЕ НЕМОНОТОННОГО ПРОФИЛЯ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ

В неоднородной плазме ПРН СВЧ-волны происходит в узком слое, где выполняются распадные условия как для частот, так и для волновых векторов связанных волн. Это позволяет пренебречь широм магнитного поля и кривизной магнитных поверхностей, которые присущи тороидальной геометрии токамаков и стеллараторов, и ввести локальную декартову систему координат  $(x, y, z)$ . Координата  $x$  – потоковая координата,  $y$  и  $z$  являются координатами, соответственно, перпендикулярной линии магнитного поля на магнитной поверхности и направленной вдоль магнитного поля. В слабо неоднородной плазме при отсутствии источников потенциал ИБ-волн  $\phi_I$  описывается следующим интегральным уравнением

$$\hat{D}_{IB} \{ \phi_I(\vec{r}) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{r}'}{(2\pi)^3} D_{IB} \left( \mathbf{q}, \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} \right) \times \exp(i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \phi_I(\mathbf{r}') = 0, \quad (1)$$

где ядро оператора  $D_{IB} = q_{\perp}^2 + q_z^2 + \chi_e + \chi_i$  включает в себя электронную и ионную восприимчивости

$$\begin{aligned} \chi_e &= \frac{2\omega_{pe}^2}{v_{te}^2} \left( 1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{|q_z| v_{te}} Z \left( \frac{\omega - m\omega_{ce}}{q_z v_{te}} \right) \right) \times \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2} \right) I_m \left( \frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2} \right) \\ \chi_i &= \frac{2\omega_{pi}^2}{v_{ti}^2} \left( 1 + \frac{\omega}{q_{\perp} v_{ti}} X \left( \frac{\omega}{q_{\perp} v_{ti}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + R(\omega, q_z) \frac{\omega}{q_{\perp} v_{ti}} Y \left( \frac{\omega}{q_{\perp} v_{ti}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

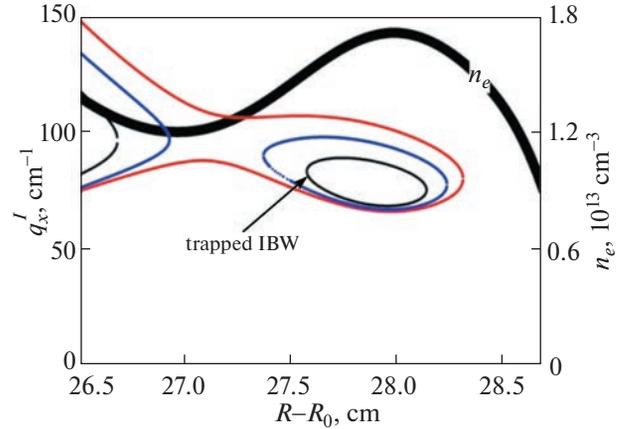
и при равенстве нулю  $D_{IB} = 0$  представляет собой локальное дисперсионное уравнение ИБ волн. В выражении (2)  $q_{\perp}^2 = q_x^2 + q_y^2$ ,  $v_{te}$  и  $v_{ti}$  – электронная и ионная тепловые скорости,  $\omega_{ce}$  и  $\omega_{ci}$  – электронная и ионная циклотронные частоты,  $\omega_{pe}$  и

$\omega_{pi}$  – электронная и ионная плазменные частоты,  $I_m$  – модифицированная функция Бесселя первого рода,  $Z = X - iY$  – плазменная дисперсионная функция [34] и  $R(\omega, q_z) = -i \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \exp \left( -l^2 \pi^2 \frac{q_z^2 v_{ii}^2}{\omega^2} + 2l\pi \frac{\omega}{\omega_{ci}} i \right) \right)$  [35]. В случае поперечного распространения волны, т.е. при  $q_z = 0$ ,  $R(\omega, 0) = -i \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \exp(2l\pi\omega/\omega_{ci} i) \right) = \cot(\pi\omega/\omega_{ci})$ .

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в ВКБ (Вентцеля–Краммерса–Бриллюэна)-приближении

$$\phi_I = \frac{b_I}{\sqrt{D_{Iq}}(x)} \exp \left( i \int q_{Ix}(x') dx' - i\omega_I t \right) + \text{c. c.}, \quad (3)$$

где  $D_{Iq} = |\partial D_{IB}/\partial q_x|$ ,  $b_I = \text{const}$  и  $q_{Ix}$  – решение локального дисперсионного уравнения  $D_{IB} = 0$ . Основной целью экспериментальной сессии на токамаке TEXTOR (установка с круглыми магнитными поверхностями, большой и малый радиусы  $R_0 = 175$  см,  $a = 47$  см, центральное магнитное поле 2–2.5 Т), где наблюдалось аномальное рассеяние СВЧ-волн накачки [4, 5], была демонстрация возможности управления неоклассической тиринг-неустойчивостью с помощью локального ЭЦРН-нагрева. Для создания вращающихся магнитных островов  $m/n = 2/1$  был использован динамический эргодический дивертор [36]. Профиль плотности в полоидально вращающихся магнитных островах был исследован с помощью диагностики томсоновского рассеяния (ТР), которая показала его немонотонный характер с локальным максимумом, расположенным в точке О магнитного острова [37]. Как было показано в работах [13, 14], ИБ-волна может быть локализована в окрестности локального максимума плотности. Однако эта локализация, по-видимому, не является универсальным параметром. Для нее необходимо также, чтобы изменение плотности от максимума внутрь к центру плазмы было более сильным эффектом, чем зависимость резонансного знаменателя,  $1/(\omega_I - l\omega_{ci})$ , в окрестности ближайшей гармоники  $l$  ионного циклотронного резонанса от магнитного поля. Как было продемонстрировано в [33], такая локализация может иметь место только для волны с определенной частотой выше частоты нижнего гибридного резонанса (НГР), для которой указанное условие в точке поворота в окрестности локального максимума оказывается выполненным. К сожалению, параметры ИБ-волны, обеспечивающие возмож-

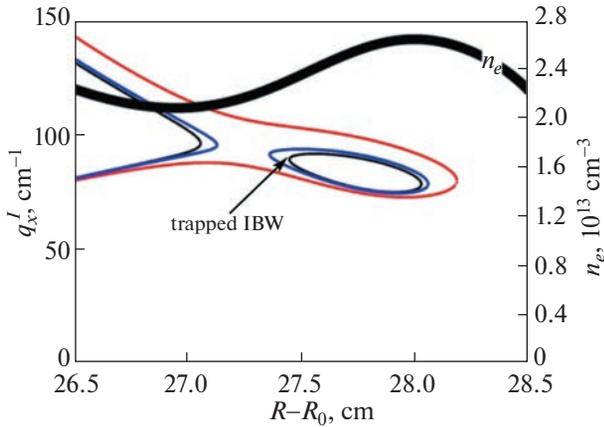


**Рис. 1.** Зависимость волновых чисел ИБ-волн от большого радиуса в экваториальной плоскости токамака TEXTOR. Собственные моды ИБ-волны (меньшая из двух “петель”  $f_I = 58.34$  МГц – основная мода, а большая –  $f_I = 58.26$  МГц – вторая радиальная мода) указаны стрелкой. Незамкнутый пунктир – незамкнутая ИБ-волна  $f_I = 58.12$  МГц. Профиль плотности показан толстой сплошной кривой (режим низкой плотности). Центральная электронная и ионная температура:  $T_{e0} = 700$  эВ,  $T_{i0} = 400$  эВ, и магнитное поле в острове:  $B_0 = 2$  Т.

ность ее локализации, могут быть определены только численно путем решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} D_{IB}(\omega_I, q_{Ix}, x) \Big|_{\omega_I^*, q_I^*, x_I^*} &= 0, \\ \frac{\partial D_{IB}(\omega_I, q_{Ix}, x)}{\partial q_x} \Big|_{\omega_I^*, q_I^*, x_I^*} &= 0, \\ \frac{\partial D_{IB}(\omega_I, q_{Ix}, x)}{\partial x} \Big|_{\omega_I^*, q_I^*, x_I^*} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где первое уравнение – дисперсионное уравнение ИБ волны, второе – условие наличия точки поворота (линейной трансформации мод), а последнее – это условие экстремума для дисперсионной функции  $D_{IB}(\omega_I, q_{Ix}, x)$  по переменной  $x$ . Решая систему (4), мы можем найти частоту  $\omega_I^*$ , волновое число  $q_I^*$  и координату  $x_I^*$ , которые при дополнительных условиях  $\partial^2 D_{IB}(\omega_I, q_{Ix}, x) / \partial q_x^2 \Big|_{\omega_I^*, q_I^*, x_I^*} > 0$  и  $\partial^2 D_{IB}(\omega_I, q_{Ix}, x) / \partial x^2 \Big|_{\omega_I^*, q_I^*, x_I^*} > 0$  обеспечивают глобальный минимум дисперсионной функции  $D_{IB}$  по двум переменным ( $q_{Ix}, x$ ). Это гарантирует существование двух близких точек поворота дисперсионной кривой ИБ-волны в плазме. На рис. 1 и 2 для двух режимов плотности приведены дисперсионные кривые ИБ-волны. На рис. 1 для

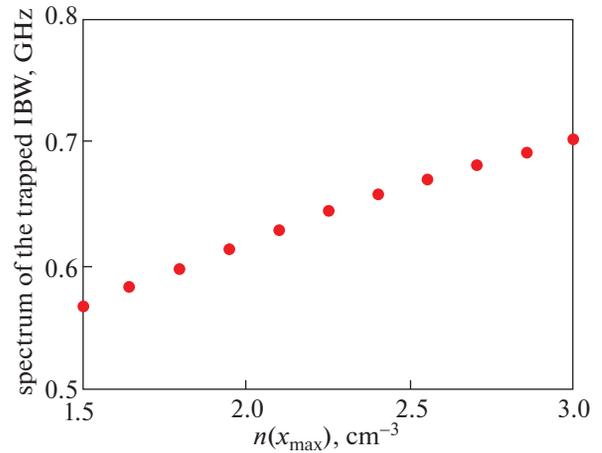


**Рис. 2.** Зависимость волновых чисел ИБ-волн от большого радиуса в экваториальной плоскости токамака TEXTOR. Собственные моды ИБ-волны (меньшая из двух “петель”  $f_I = 66.21$  МГц – основная мода, а большая –  $f_I = 66.16$  МГц – первая радиальная мода) указаны стрелкой. Незамкнутый пунктир – незапертая ИБ-волна  $f_I = 66.12$  МГц. Профиль плотности показан толстой сплошной кривой (режим высокой плотности). Центральная электронная и ионная температура:  $T_{e0} = 700$  эВ,  $T_{i0} = 400$  эВ, и магнитное поле в острове:  $B_0 = 2$  Т.

режима низкой плотности стрелкой показаны моды ИБ-волны (меньшая из двух “петель”  $f_I = 58.34$  МГц – основная мода, а большая –  $f_I = 58.26$  МГц – вторая мода). Приведена также нелокализованная ИБ-волна ( $f_I = 58.12$  МГц). На рис. 2 для режима высокой плотности собственные моды ИБ-волны (меньшая из двух “петель”  $f_I = 66.21$  МГц – основная мода, а большая –  $f_I = 66.16$  МГц – первая мода) также указаны стрелкой. Кроме того, приведено также поведение волнового числа нелокализованной ИБ-волны ( $f_I = 66.12$  МГц). На обеих картинках профиль плотности показан толстой сплошной кривой. Центральная электронная и ионная температура:  $T_{e0} = 700$  эВ,  $T_{i0} = 400$  эВ, и магнитное поле в острове:  $B_0 = 2$  Т. Видно, что в обоих режимах существуют локализованные ИБ-волны, частоты которых выше локальной НГ-частоты. На рис. 3 показана зависимость частотного спектра этих локализованных низкочастотных колебаний от значения локальной плотности плазмы в О-точке магнитного острова.

### 3. АНОМАЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ НАКАЧКИ В СЛУЧАЕ ЗАПЕРТОЙ ИОННОЙ БЕРШТЕЙНОВСКОЙ ВОЛНЫ

Параметрический распад необыкновенной волны накачки на локализованную ВГ-волну и



**Рис. 3.** Частотный спектр локализованных ИБ-волн в зависимости от плотности в О-точке магнитного острова. Центральная электронная и ионная температура:  $T_{e0} = 700$  эВ,  $T_{i0} = 400$  эВ, и магнитное поле в острове:  $B_0 = 2$  Т.

нелокализованную необыкновенную волну может иметь место в широком диапазоне плотностей плазмы, обеспечивающих условия распространения обеих дочерних волн. Так он реализуется при низкой плотности, когда для фиксированного значения магнитного поля плотность плазмы в магнитном острове удовлетворяет неравенству

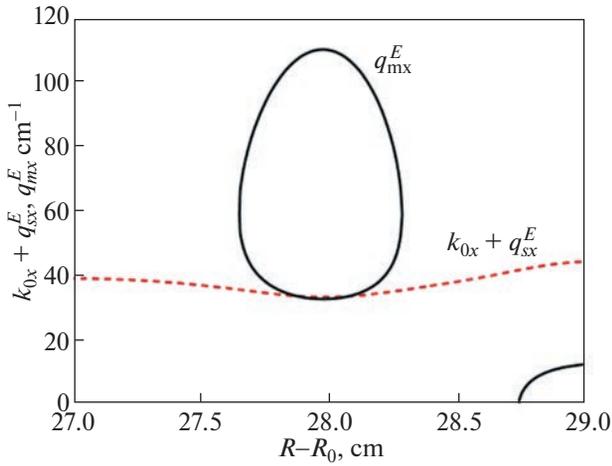
$$\omega_0 - \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2} \Big|_{x_{\min}} - \frac{1}{2} \left( |\omega_{ce}| - \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) \Big|_{x_{\max}} < 0, \quad (5)$$

при выполнении которого существует как запертая ВГ-волна, так и вторая дочерняя (необыкновенная) волна. В неравенстве (5)  $x_{\min}$  – положение локального минимума профиля ВГ-частоты, расположенного рядом с его локальным максимумом в точке  $x_{\max}$ . При большей плотности, для которой неравенство (5) нарушается, необыкновенная волна на частоте  $\omega_0 - \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2} \Big|_{x_{\min}}$ ,

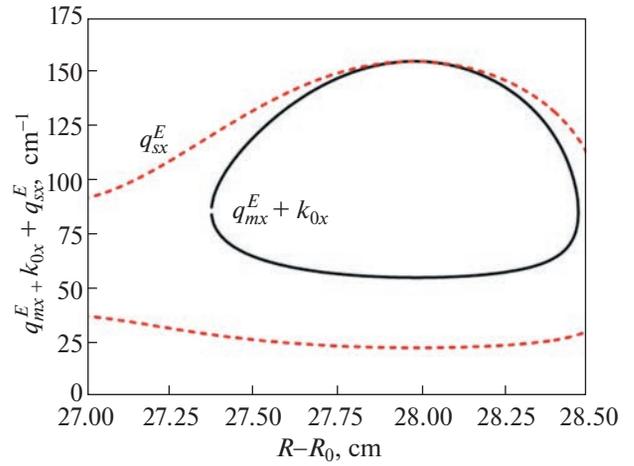
для которой выполнено распадное условие, не может распространяться, что делает невозможным возбуждение первичной неустойчивости. При увеличении плотности до уровня, при котором выполняется неравенство

$$\omega_0 \leq 2\omega_{UHR} \Big|_{x_{\max}}, \quad (6)$$

становится возможным распад на две локализованные волны. Дальнейшее увеличение плотности (режим высокой плотности) на величину,



**Рис. 4.** Режим низкой плотности. Дисперсионная кривая первичной локализованной ВГ-волны ( $m = 9$ ), сплошная линия. Сумма волновых чисел волны накачки и дочерней необыкновенной волны, распространяющейся к границе плазмы, показана пунктирной линией.



**Рис. 5.** Режим высокой плотности. Дисперсионная кривая первичной локализованной ВГ-волны ( $m = 17$ ), сдвинутая вверх на величину волнового числа волны накачки, показана сплошной линией. Волновое число незапертой ВГ-волны показано пунктирной линией.

примерно равную высоте локального максимума плотности в магнитном острове, приводит к тому, что при распаде возможна локализация только одной ВГ-волны. Вторая волна, несмотря на то, что имеет ВГ-резонанс в недалекой окрестности области распада со стороны меньшего магнитного поля, быстро покидает резонансный слой и испытывает только конвективное усиление.

Рассмотрим параметрический распад волны накачки необыкновенной поляризации, который приводит к возбуждению локализованной ВГ-волны. Волновое число волны накачки определяется согласно выражению [34]

$$k_x(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \frac{g^2}{\varepsilon}} \quad (7)$$

Дисперсионное уравнение для ВГ-волны имеет вид [34]

$$D_{UH}(\omega) = l_T^2(\omega)(q_x^2 + q_y^2)^2 + \varepsilon(\omega)(q_x^2 + q_y^2) + \eta(\omega)q_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}g(\omega)^2 = 0, \quad (8)$$

где последний член возникает из-за наличия у ВГ-волны в окрестности ВГ-резонанса маленькой электромагнитной компоненты. В уравнениях (7) и (8) мы использовали новые обозначения:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}, \quad g = \frac{|\omega_{ce}|}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}, \quad \eta = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} -$$

компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы и

$$q_{\perp}^2 l_T^2 = \frac{3}{24} \frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \times$$

$$\times \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \text{тепловая поправка к диагональной}$$

компоненте тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  [34]. Существует четыре корня биква-

дратного уравнения (8) – волновые числа  $\pm q_x^{\pm}$ , которые соответствуют “теплому” (верхний индекс (+)) и “холодному” (верхний индекс (-)) реше-

ниям дисперсионного уравнения (8). На рис. 4 и 5 для режима низкой и высокой плотности приве-

дены дисперсионные кривые, иллюстрирующие первичную неустойчивость. На рис. 4 сплошной

линией показана дисперсионная кривая первичной локализованной ВГ-волны ( $m = 9$ ). Верхняя

часть петли между двумя ВГ-резонансами – это  $q_x^+(\omega_m, x)$ , нижняя –  $q_x^-(\omega_m, x)$ . Сумма волновых

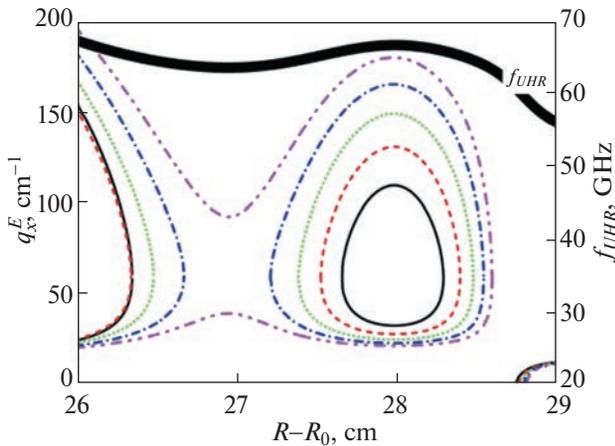
чисел волны накачки и дочерней необыкновенной волны показана пунктирной линией. На

рис. 5 сплошной линией изображена дисперсионная кривая первичной локализованной ВГ-

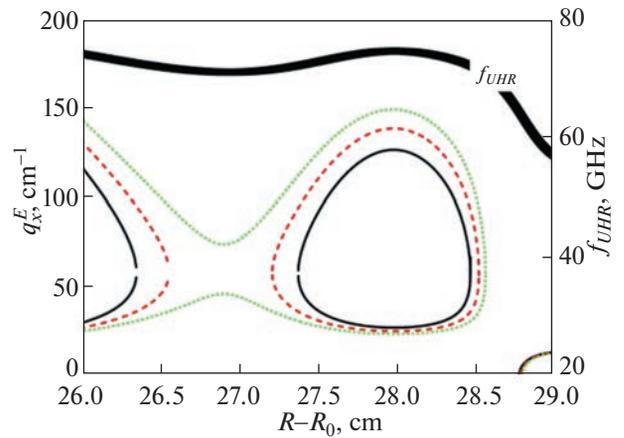
волны ( $m = 17$ ), сдвинутая вверх на величину волнового числа волны накачки. Волновое число не

запертой ВГ-волны показано пунктирной линией. В обоих случаях групповые скорости не локализованных необыкновенной и ВГ-волн

направлены наружу к ВГ-резонансу, расположенному между областью распада и границей плазмы. В окрестности точек, где пересекаются



**Рис. 6.** Зависимость волнового числа локализованных дочерних ВГ-волн от большого радиуса в экваториальной плоскости токамака TEXTOR (режим низкой плотности). Сплошная линия –  $m = 9$ ,  $f_m = 64.99$  ГГц; штриховая линия –  $n = 12$ ,  $f_n = 64.42$  ГГц; пунктирная линия –  $p = 16$ ,  $f_p = 63.84$  ГГц; штрихпунктирная линия –  $r = 25$ ,  $f_r = 63.25$  ГГц; и штрихштрихпунктирная кривая показывает не запертую волну  $f_{UH} = 62.67$  ГГц. Профиль ВГ-частоты показан толстой сплошной кривой.



**Рис. 7.** Зависимость волнового числа локализованных дочерних ВГ-волн от большого радиуса в экваториальной плоскости токамака TEXTOR (режим высокой плотности). Сплошная линия –  $m = 17$ ,  $f_m = 70.8$  ГГц; штриховая линия –  $n = 25$ ,  $f_n = 70.14$  ГГц; пунктирная линия показывает бегущую волну  $f_{UH} = 69.48$  ГГц. Профиль ВГ-частоты показан толстой сплошной кривой.

сплошная и пунктирная кривые и выполнены распадные условия для волновых чисел и частот взаимодействующих волн, а именно  $\Delta K_p = k_x(\omega_0, x) + q_x^-(\omega_s, x) - q_x^-(\omega_m, x) \approx 0$  и  $\Delta K_p = k_x(\omega_0, x) - q_x^+(\omega_s, x) + q_x^+(\omega_m, x) \approx 0$ , возможно возбуждение первичной неустойчивости волны накачки. В силу того, что две кривые практически касаются, невязку резонансного условия можно аппроксимировать параболой  $\Delta K_p \approx \pm(3\xi^2 - \lambda_p)$ , где “+” соответствует распаду в режиме низкой плотности, “-” – распаду при высокой плотности,  $\xi = (x - x_{dp})/l_{dp}$ ,  $\lambda_p = \Delta K_p(x_{dp})l_{dp}$ ,  $x_{dp}$  – координата точки, в которой функция  $\Delta K_p$  имеет экстремум, и  $l_{dp} = \left| d^2 \Delta K_p / dx^2 \right|_{x_{dp}}^{-1/3} / 6^{-1/3}$  – размер области распада. В этом случае распады, проиллюстрированные на рисунках 4 и 5, являются наиболее низкопороговыми.

Рассмотрим насыщение первичной неустойчивости в результате каскада вторичных распадов локализованной первичной ВГ-волны. На рис. 6 для режима низкой плотности показаны все моды ВГ-волны, которые последовательно возбуждаются в результате распада волны накачки. Сплошной линией показана собственная мода  $m = 9$  ( $f_m = 64.99$  ГГц) первичной ВГ-волны. Вторичной моде  $n = 12$  ( $f_n = 64.42$  ГГц) ВГ-волны отвечает штриховая кривая. Пунктирная линия –

третичная мода  $p = 16$  ( $f_p = 63.84$  ГГц), и штрихпунктирная линия – четверичная мода  $r = 25$  ( $f_r = 63.25$  ГГц). Штрих–штрихпунктирная кривая показывает волновое число бегущей ВГ-волны  $f_{UH} = 62.67$  ГГц. Порог возбуждения бегущей волны существенно выше, чем мощность гиротрона, что обрывает последовательность распадов. На рис. 7 показана зависимость от большого радиуса волнового числа всех локализованных дочерних ВГ-волн в экваториальной плоскости токамака TEXTOR в режиме высокой плотности. Сплошная линия соответствует моде  $m = 17$  ( $f_m = 70.8$  ГГц), а штриховая линия –  $n = 25$  ( $f_n = 70.14$  ГГц). Пунктирная линия показывает волновое число бегущей ВГ-волны  $f_{UH} = 69.48$  ГГц. Профиль ВГР на обоих рисунках показан толстой сплошной кривой. Видно, что при переходе из одного режима плотности в другой, меняется высота потенциальной ямы для собственных мод ВГ-волн.

Для описания сценариев распада, показанных на рис. 4–7, мы будем следовать процедуре, разработанной в работе [33]. Опуская рутинные математические вычисления и отсылая читателя к [21, 33] за подробностями, мы запишем следующие связанные дифференциальные уравнения, описывающие каскадный распад волны накачки, приводящий к возбуждению локализованных первичных и вторичных волн

$$\begin{cases}
\frac{\partial a_m}{\partial t} + i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} + i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} = \tilde{\gamma}_p(y, z) a_m - i\omega_m \xi_{\text{sec}} a_n b_{s_1}^* \\
\frac{\partial a_n}{\partial t} - u_n \frac{\partial a_n}{\partial y} - i\Lambda_{ny} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} - i\Lambda_{nz} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} = -i\omega_n \xi_{\text{sec}}^* a_m b_{s_1} - i\omega_n \xi_{\text{ter}} a_p b_{s_2}^* \\
\frac{\partial b_{s_1}}{\partial t} + u_{s_1} \frac{\partial b_{s_1}}{\partial y} + i\Lambda_{s_1y} \frac{\partial^2 b_{s_1}}{\partial y^2} + i\Lambda_{s_1z} \frac{\partial^2 b_{s_1}}{\partial z^2} = i\omega_{s_1} \xi_{\text{sec}} a_m^* a_n \\
\frac{\partial a_p}{\partial t} - u_p \frac{\partial a_p}{\partial y} - i\Lambda_{py} \frac{\partial^2 a_p}{\partial y^2} - i\Lambda_{pz} \frac{\partial^2 a_p}{\partial z^2} = -i\omega_p \xi_{\text{ter}}^* a_n b_{s_2} - i\omega_p \xi_{\text{quat}} a_r b_{s_3}^* \\
\frac{\partial b_{s_2}}{\partial t} + u_{s_2} \frac{\partial b_{s_2}}{\partial y} + i\Lambda_{s_2y} \frac{\partial^2 b_{s_2}}{\partial y^2} + i\Lambda_{s_2z} \frac{\partial^2 b_{s_2}}{\partial z^2} = i\omega_{s_2} \xi_{\text{ter}} a_n^* a_p \\
\frac{\partial a_r}{\partial t} - u_r \frac{\partial a_r}{\partial y} - i\Lambda_{ry} \frac{\partial^2 a_r}{\partial y^2} - i\Lambda_{rz} \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} = -i\omega_r \xi_{\text{quat}}^* a_p b_{s_3} \\
\frac{\partial b_{s_3}}{\partial t} + u_{s_3} \frac{\partial b_{s_3}}{\partial y} + i\Lambda_{s_3y} \frac{\partial^2 b_{s_3}}{\partial y^2} + i\Lambda_{s_3z} \frac{\partial^2 b_{s_3}}{\partial z^2} = i\omega_{s_3} \xi_{\text{quat}} a_p^* a_r
\end{cases} \quad (9)$$

В уравнениях (9) использованы следующие обозначения:  $\tilde{\gamma}_p = \gamma_p F(\lambda_p)$  – инкремент первичной неустойчивости,

$$F(\lambda_p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \exp(i\lambda_p(\xi - \xi') - i(\xi^3 - \xi'^3))$$

– эффективность нелинейной связи взаимодействующих волн в неоднородной плазме и

$$\gamma_p = \frac{|\chi_e^{(p)}|^2 l_{dp}^2 P_0}{\langle D_{m\omega} \rangle |L_m| k_{sx} c w^2 B_0^2} \Big|_{x_{dp}}, \quad (10)$$

где  $\chi_e^{(p)}$  – нелинейная восприимчивость плазмы [38],  $P_0$  – мощность пучка накачки,  $w$  – диаметр пучка накачки. Кроме того, в уравнениях (9)

$$\begin{aligned}
\xi_{\text{sec}} &= \frac{\Gamma(1/3)}{2\sqrt{3}} \frac{\omega_0^2 c}{4\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \sqrt{\frac{16T_e}{w^2 B_0^2}} \times \\
&\times \sqrt{\frac{q_{mx}^2 q_{nx}^2 q_{s_1x}^4}{|D_{m\omega}| \omega_m |D_{n\omega}| \omega_n |D_{IB\omega}| \omega_{s_1} \sqrt{L_m L_n L_{s_1}}} \frac{l_{ds}}{x_{ds}}}, \\
\xi_{\text{ter}} &= \frac{\Gamma(1/3)}{2\sqrt{3}} \frac{\omega_0^2 c}{4\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \sqrt{\frac{16T_e}{w^2 B_0^2}} \times \\
&\times \sqrt{\frac{q_{nx}^2 q_{px}^2 q_{s_2x}^4}{|D_{n\omega}| \omega_n |D_{p\omega}| \omega_p |D_{IB\omega}| \omega_{s_2} \sqrt{L_n L_{np} L_{s_2}}} \frac{l_{dt}}{x_{dt}}}, \\
\xi_{\text{quat}} &= \frac{\Gamma(1/3)}{2\sqrt{3}} \frac{\omega_0^2 c}{4\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \sqrt{\frac{16T_e}{w^2 B_0^2}} \times \\
&\times \sqrt{\frac{q_{px}^2 q_{rx}^2 q_{s_3x}^4}{|D_{p\omega}| \omega_p |D_{r\omega}| \omega_r |D_{IB\omega}| \omega_{s_3} \sqrt{L_p L_r L_{s_3}}} \frac{l_{dq}}{x_{dq}}}, \quad (11)
\end{aligned}$$

– коэффициенты нелинейной связи, описывающие вторичный распад первичной ВГ волны  $a_m$  на вторичные моды ВГ-волны ( $a_n$ ) и ИБ-волны ( $b_{s_1}$ ), третичный распад вторичной ВГ-волны  $a_n$  на третичные моды ВГ-волны ( $a_p$ ) и ИБ-волны ( $b_{s_2}$ ) и четверичный распад третичной ВГ-волны  $a_p$  на четверичные моды ВГ-волны ( $a_r$ ) и ИБ-волны ( $b_{s_3}$ );  $x_{ds,t,q}$  – координаты слоев, размер которых  $l_{ds,t,q}$ , соответственно, где происходят вторичная, третичная и четверичная неустойчивости;

$L_j^\pm(x) = |D_{jq}^\pm(x)| \int_{x_{jl}}^{x_{jr}} d\xi \left( |D_{jq}^+(\xi)|^{-1} + |D_{jq}^-(\xi)|^{-1} \right)$ ,  $x_{jl,r}$  – точки поворота дисперсионных кривых, соответствующих собственным ВГ- и ИБ-модам,  $u_j$  – групповые скорости в направлении  $y$ ,  $\Lambda_{jy}$  и  $\Lambda_{jz}$  – коэффициенты дифракции, которые усреднены по соответствующей области локализации собственных мод,  $\langle \rangle$  – усреднение по области локализации моды,  $j = m, n, p, r, s_1, s_2, s_3$ ,  $D_{j\omega} = \partial D_{UH} / \partial \omega|_{\omega_j}$ ,  $D_{jq}^\pm = \partial D_{UH} / \partial q_x|_{\omega_j, q_{jx}^\pm}$ ,  $j = m, n, p, r$ ,  $D_{j\omega} = \partial D_{IB} / \partial \omega|_{\omega_j}$ ,  $D_{jq}^\pm = \partial D_{IB} / \partial q_x|_{\omega_j, q_{jx}^\pm}$ ,  $j = s_1, s_2, s_3$ . Квадраты модулей амплитуд собственных мод ВГ- и ИБ-волн, умноженные на коэффициент  $T_e / (\pi w^2)$ , равны их двумерной плотности энергии. В режиме высокой плотности в системе уравнений (9) надо положить  $\xi_{\text{ter}} = 0$  и  $\xi_{\text{quat}} = 0$  и ограничиться рассмотрением первых трех уравнений. Детальный вывод системы уравнений (9) описан в [33].

В обоих режимах по плотности насыщение неустойчивости происходит в результате нечетного

числа вторичных распадов. В этом случае истощение волны накачки является слабым [21], что позволило пренебречь этим эффектом в уравнениях (9). Поскольку все дочерние волны, участвующие во вторичных распадах, локализованы вдоль направления неоднородности, их частотные спектры дискретны. Это делает невозможным удовлетворить условию для вторичного распада по частотам, выбирая вторичные собственные ВГ- и ИБ-моды с  $q_y = 0$ . В результате, в левых частях второго и третьего уравнения появляются члены, описывающие конвекцию вторичных мод в направлении  $y$ . Процесс конвекции приводит к увеличению потерь энергии вторичных ВГ- и ИБ-волн в данном направлении.

Первичная неустойчивость, описываемая первым уравнением в системе (9), начинает развиваться, если мощность волны накачки превышает пороговое значение  $P_0^{th}$ . В случае, когда мощность волны накачки значительно больше порогового значения,  $P_0 \gg P_0^{th}$ , инкремент неустойчивости может быть оценен аналитически [19–21]

$$v_{k,l} = \tilde{\gamma}'_p - \left( (2k+1) \sqrt{\frac{|\tilde{\gamma}'_p| \Lambda_{my}}{w^2}} + (2l+1) \sqrt{\frac{|\tilde{\gamma}'_p| \Lambda_{mz}}{w^2}} \right) \times \sin \left( \frac{\arctan(F''/F')}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \propto \frac{1}{w^2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

где  $\tilde{\gamma}'_p \equiv \tilde{\gamma}'_p + i\tilde{\gamma}''_p = \gamma_p(0,0)F(\lambda_p)$ . Несмотря на то, что выражение (12) при мощности пучка порядка пороговой мощности  $P_0 \approx P_0^{th}$  становится некорректным, мы можем воспользоваться им для грубой оценки порога неустойчивости. Положив  $v_{k,l} = 0$  в выражении (12), мы получим следующее уравнение для порога первичной неустойчивости:

$$\tilde{\gamma}'_p(P_0^{th}) = \frac{|\tilde{\gamma}'_p(P_0^{th})|^{1/2}}{w} \left( (2k+1) \sqrt{\Lambda_{my}} + (2l+1) \sqrt{\Lambda_{mz}} \right) \times \sin \left( \frac{\arctan(F''/F')}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (13)$$

В случае слабого истощения волны накачки мы можем описывать это явление с помощью процедуры теории возмущений [21], в рамках которой изменение потока энергии волны накачки вдоль координаты  $x$  оценивается как

$$\delta S_x = \tilde{\gamma}'_p \frac{2T_e}{\pi w^2} \frac{\omega_0}{\omega_m} |a_m(y,z)|^2 \exp \left( -\frac{y^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2} \right). \quad (14)$$

Детальный вывод (14) может быть найден в работе [39]. Видно, что уровень аномальных потерь при нечетном числе вторичных распа-

дов определяется уровнем первичной ВГ-волны в режиме насыщения  $\epsilon_{m,n}^s = |a_{m,n}^s|^2$ . Далее, проинтегрируем обе части уравнения (14) по координатам. Оценивая двойной интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} dydz |a_m(y,z)|^2 \exp \left( -\frac{y^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2} \right) \approx 2\pi w^2 \epsilon_m^s$  и имея в виду, что  $\Delta P = \delta S_x \pi w^2$ , мы окончательно получим

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx \tilde{\gamma}'_p \frac{8T_e}{P_0} \epsilon_m^s. \quad (15)$$

Уровень насыщения первичной моды ВГ-волны может быть получен из анализа баланса источников и стоков в уравнениях (9) в виде

$$\epsilon_m^s = \frac{1}{\omega_n \omega_s |\xi_{\text{sec}}|^2 \tau_n \tau_s}, \quad (16)$$

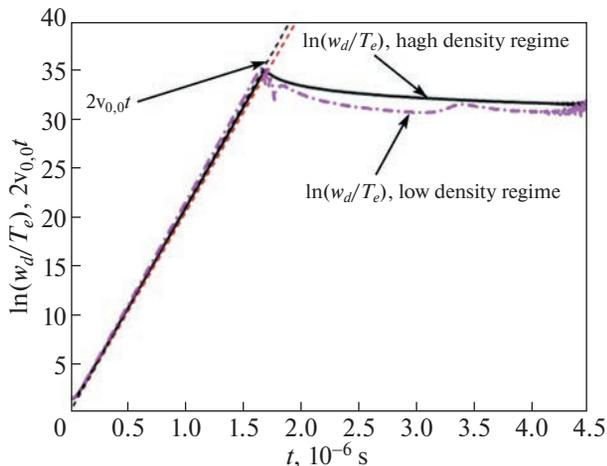
где использованы характерные времена  $\tau_{n,s} = \min(w/u_{n,s}, w^2/\Lambda_{n,xy}, w^2/\Lambda_{n,xz})$ , характеризующие скорость выноса дочерних волн из области распада в плоскости магнитной поверхности.

Далее, решим уравнения (9) численно, предполагая начальный тепловой уровень всех ВГ- и ИБ-волн и периодические граничные условия в двумерном боксе  $V = L_y \times L_z$ , размеры которого много больше поперечных размеров пучка накачки  $L_y, L_z \gg w$ . Согласно условиям ЭЦРН-экспериментов на токамаке TEXTOR [4, 5] возьмем радиус пучка и мощность накачки  $w = 1$  см и  $P_0 = 600$  кВт соответственно. Результаты численного решения для двух режимов плотности показаны на рис. 8 и 9. На рис. 8 сплошной линией (режим высокой плотности) и штрихпунктирной линией (режим низкой плотности) показана эволюция энергии всех дочерних волн в области распада, т.е. в пределах пучка волн накачки

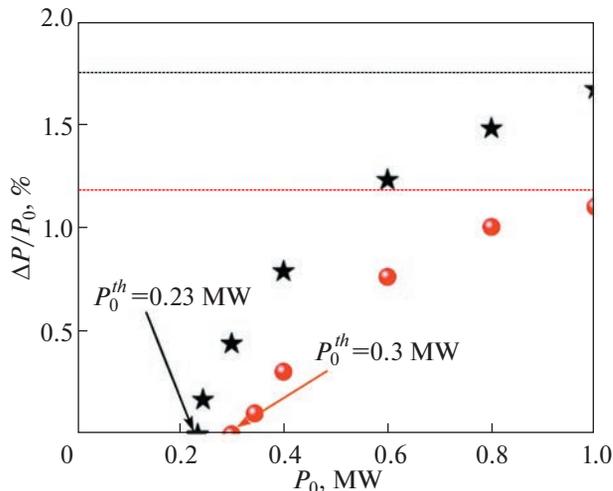
$$W_d(t) = T_e \int_V \frac{dydz}{\pi w^2} \times \sum_{j,k} (|a_j(t,y,z)|^2 + |b_k(t,y,z)|^2) \exp \left( -\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2} \right). \quad (17)$$

Пунктирными линиями показаны коэффициенты усиления ВГ-волны при первичной неустойчивости  $2\Gamma = 2v_{0,0}t$  в обоих режимах, где  $v_{0,0}$  дается выражением (12). Видно, что, во-первых, коэффициент усиления первичной неустойчивости с разумной точностью описывает первичную неустойчивость; во-вторых, в результате неустойчивости в обоих режимах плотности переходит в режим насыщения.

Доля мощности, аномально поглощаемая дочерними волнами, может быть вычислена как производная по времени от суммарной энергии



**Рис. 8.** Эволюция полной энергии всех дочерних волн в области распада (17) показана сплошной линией. Пунктирная линия – коэффициент усиления ВГ-волны при первичной неустойчивости  $2\Gamma = 2\nu_{0,0}t$ , где  $\nu_{0,0}$  дается выражением (12). Зависимость при низкой плотности показана штрихпунктирной линией. Зависимость при высокой плотности – сплошной линией.



**Рис. 9.** Зависимость коэффициента аномального поглощения (18) от мощности пучка накачки. Символы – результат численного решения. Кружки – режим низкой плотности. Звездочки – режим высокой плотности. Пунктирные линии показывают теоретически предсказанные уровни (15).

всех дочерних волн в двумерном боксе в режиме насыщения

$$\Delta P = \frac{dW_\Sigma}{dt}, \tag{18}$$

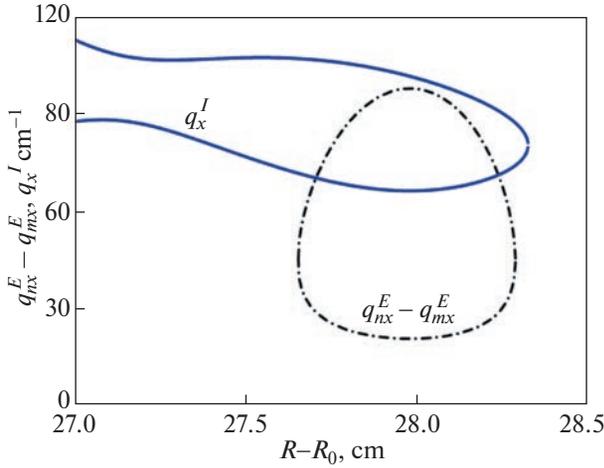
$$W_\Sigma(t) = T_e \int_V \frac{dydz}{\pi w^2} \sum_{j,k} (|a_j(t, y, z)|^2 + |b_k(t, y, z)|^2).$$

На рис. 9 показаны зависимости коэффициента аномального поглощения  $\Delta P/P_0$  от мощности пучка накачки, где символы – результат численного решения. Кружки – зависимость в режиме низкой плотности (порог возбуждения  $P_0^{th} = 300$  кВт). Звездочки – зависимость в режиме высокой плотности (порог возбуждения  $P_0^{th} = 230$  кВт). Горизонтальные пунктирные линии – теоретически предсказанные уровни аномального поглощения при сильно надпороговой мощности волны накачки, вычисленные согласно выражению (15), в котором использована оценка уровня насыщения первичной ВГ-волны (16). Теоретически предсказанные в результате решения уравнения (13) значения порогов в режиме низкой плотности –  $P_0^{th} \approx 317$  кВт и в режиме высокой плотности –  $P_0^{th} \approx 247$  кВт. Таким образом, теоретические оценки завышают значение порога неустойчивости, в то время как уровень аномального поглощения при мощности пучка много больше порогового значения стремится к аналитической оценке (15).

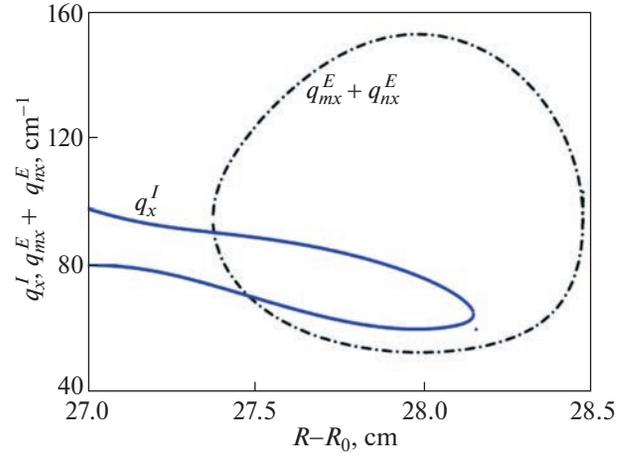
Разумное согласие между теоретическими оценками и результатами численного решения системы нелинейных уравнений в частных производных позволяет с доверием относиться к выполненному расчету.

#### 4. АНОМАЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ НАКАЧКИ В СЛУЧАЕ НЕЗАПЕРТОЙ ИОННОЙ БЕРШТЕЙНОВСКОЙ ВОЛНЫ

В этом разделе мы проигнорируем возможность нелинейного возбуждения локализованной ИБ-волны и рассмотрим вторичный распад, приводящий к возбуждению бегущей ИБ-волны. В рамках этого сценария вторичного распада мы проанализируем уровни насыщения дочерних ВГ-волн и уровни аномального поглощения. На рис. 10 в режиме низкой плотности показаны волновое число  $q_x^I$  бегущей ИБ-волны (сплошная линия,  $f_I = 58.12$  МГц) и разность волновых чисел вторичной моды  $n = 12$  и первичной моды  $m = 9$  ВГ-волн (штрихпунктирная линия). На рис. 11 в режиме высокой плотности показаны волновое число  $q_x^I$  бегущей ИБ-волны (сплошная линия,  $f_I = 66.12$  МГц) и сумма волновых чисел вторичной моды  $n = 25$  и первичной моды  $m = 17$  ВГ-волн (штрихпунктирная линия). В окрестности точек, где пересекаются сплошные и штрихпунктирные линии, возможна вторичная неустойчивость первичных локализованных ВГ-волн, в результате развития которых возбуж-



**Рис. 10.** Режим низкой плотности. Волновое число  $q_x^I$  бегущей ИБ-волны (сплошная линия,  $f_I = 58.12$  МГц). Разность волновых чисел вторичной моды  $n = 12$  и первичной моды  $m = 9$  ВГ волн – штрихпунктирная линия.



**Рис. 11.** Режим высокой плотности. Волновое число  $q_x^I$  бегущей ИБ-волны (сплошная линия,  $f_I = 66.12$  МГц). Сумма волновых чисел вторичной моды  $n = 25$  и первичной моды  $m = 17$  ВГ волн – штрихпунктирная линия.

даются вторичные собственные моды ВГ-волны и бегущие ИБ-волны. Однако, в рассматриваемом случае спектр частот ИБ-волны является непрерывным. Это делает возможным подобрать усло-

вия так, чтобы конвективные потери вторичной ВГ-волны отсутствовали, т.е.  $q_y = 0$ . Набор связанных уравнений, описывающих этот случай, имеет вид [21]

$$\begin{cases} \frac{\partial a_m}{\partial t} - i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} - i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} = \tilde{\gamma}_p a_m \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right) - \sqrt{\frac{\omega_m}{\omega_n}} \tilde{\gamma}_s |a_n|^2 a_m \\ \frac{\partial a_n}{\partial t} + i\Lambda_{ny} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + i\Lambda_{nz} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_m}} \tilde{\gamma}_s |a_m|^2 a_n - \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_p}} \tilde{\gamma}_t |a_p|^2 a_n \\ \frac{\partial a_p}{\partial t} + i\Lambda_{py} \frac{\partial^2 a_p}{\partial y^2} + i\Lambda_{pz} \frac{\partial^2 a_p}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_n}} \tilde{\gamma}_t |a_n|^2 a_p - \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_r}} \tilde{\gamma}_q |a_r|^2 a_p \\ \frac{\partial a_r}{\partial t} + i\Lambda_{ry} \frac{\partial^2 a_r}{\partial y^2} + i\Lambda_{rz} \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} = \sqrt{\frac{\omega_r}{\omega_p}} \tilde{\gamma}_q |a_p|^2 a_r. \end{cases} \quad (19)$$

В системе уравнений (19) использованы следующие обозначения:  $\tilde{\gamma}_{s,t,q} = \gamma_{s,t,q} F(\lambda_{s,t,q})^*$  – инкремент первичной неустойчивости, где функция  $F$  определена выше после уравнения (9), коэффициенты

$$\gamma_s = \frac{4 |e|^2}{\sqrt{\omega_m \omega_n T_e}} \frac{|L_m^+| |L_n^+| \langle D_{m\omega} \rangle \langle D_{n\omega} \rangle |D_{Iq}|}{|L_n^+| |L_p^+| \langle D_{n\omega} \rangle \langle D_{p\omega} \rangle |D_{Iq}|} \frac{l_{ds}^2}{w^2} \Bigg|_{x_{ds}},$$

$$\gamma_t = \frac{4 |e|^2}{\sqrt{\omega_n \omega_p T_e}} \frac{|L_n^+| |L_p^+| \langle D_{n\omega} \rangle \langle D_{p\omega} \rangle |D_{Iq}|}{|L_n^+| |L_p^+| \langle D_{n\omega} \rangle \langle D_{p\omega} \rangle |D_{Iq}|} \frac{l_{dt}^2}{w^2} \Bigg|_{x_{dt}}, \quad (20)$$

$$\gamma_q = \frac{4 |e|^2}{\sqrt{\omega_p \omega_r T_e}} \frac{|L_p^+| |L_r^+| \langle D_{p\omega} \rangle \langle D_{r\omega} \rangle |D_{Iq}|}{|L_p^+| |L_r^+| \langle D_{p\omega} \rangle \langle D_{r\omega} \rangle |D_{Iq}|} \frac{l_{dq}^2}{w^2} \Bigg|_{x_{dq}}$$

описывают вторичную, третичную и четверичную неустойчивости,  $\lambda_{s,t,q} = \Delta K_{s,t,q}(x_{ds,t,q}) l_{ds,t,q}$ ,  $x_{ds,t,q}$  – координаты точек, где расстройка распадного условия для вторичной, третичной и четверичной неустойчивости  $\Delta K_{s,t,q}$  имеет экстремум,  $l_{ds,t,q}$  – размер соответствующего распадного слоя,  $\chi_e^{(s,t,q)}$  – нелинейная восприимчивость плазмы, описывающая нелинейную связь трех продольных волн при разных распадах [38],  $D_{Iq} =$

$= |\partial D_{IB} / \partial q_x|_{q_{Ix}}$ ,  $q_{Ix}$  – решение дисперсионного уравнения  $D_{IB} = 0$  для ИБ-волны. В режиме высокой плотности в системе (20) необходимо положить  $\tilde{\gamma}_{i,q} = 0$  и ограничиться рассмотрением первых двух уравнений. Детальный вывод системы уравнений (19) описан в [21].

Отметим, что система уравнений (9) описывает каскад распадов, при котором возбуждаются только локализованные вторичные волны, т.е. каждый распад описывается 3 уравнениями (для распадающейся локализованной ВГ-волны и для дочерних локализованных ВГ- и ИБ-волн). Уравнения (19) описывают каскад распадов, когда вторичные ионные бернштейновские волны не локализованные, что позволяет выразить их амплитуды через произведение амплитуд ВГ-волн, участвующих в конкретном нелинейном взаимодействии, и сильно упростить систему. В этом случае каждый распад описывается 2 уравнениями (для распадающейся локализованной ВГ-волны и для дочерней локализованной ВГ-волны). Это небольшое изменение, как будет показано ниже, кардинальным образом меняет свойства системы нелинейных уравнений в частных производных и приводит к другому уровню насыщения неустойчивости.

Можно получить оценку, которая связывает коэффициент усиления вторичной волны  $\gamma_s$  с коэффициентами, описывающими вторичную неустойчивость в системе уравнений (9),

$$\gamma_s \propto \omega_n \omega_s |\xi_{\text{sec}}|^2 \tau_{Ix}, \quad (21)$$

где время прохода ИБ-волны через область взаимодействия обратно пропорционально групповой скорости ИБ-волны, т.е.  $\tau_{Ix} = l_{ds} / v_{Ig}$ . Первичная неустойчивость, как и в предыдущем случае, характеризуется инкрементом и порогом, которые определяются выражениями (12) и (13). Как и в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, истощение волны накачки не велико [21]. В этом случае уровень аномального поглощения можно оценить, используя выражение (15), в которое необходимо подставить значение уровня насыщения первичной волны для системы уравнений (19).

Уровни насыщения плотности энергии возбужденных ВГ-волн можно оценить, анализируя баланс источников и стоков в этих уравнениях. В частности, уровень насыщения первичных ВГ-волн в пучке накачки  $\epsilon_m^s$  определяется балансом скорости вторичного распада  $\tilde{\gamma}_s \epsilon_m^s$  и дифракционных потерь энергии вторичных волн из пятна пучка накачки

$$\epsilon_m^s \approx \frac{1}{\tau_n |\tilde{\gamma}_s|}, \quad (22)$$

где  $\tau_n = \min(w^2 / \Lambda_{ny}, w^2 / \Lambda_{nz}) \approx w^2 / \Lambda_{nz}$ . Таким образом, можно получить оценку того, как соотносятся уровень аномального поглощения при возбуждении бегущей ИБ-волны  $\Delta P^{\text{run}}$  и уровень аномального поглощения при возбуждении запертой ИБ-волны  $\Delta P^{\text{trapped}}$

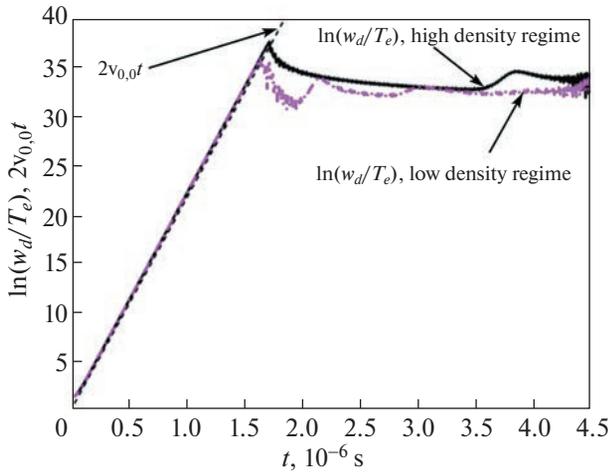
$$\frac{\Delta P^{\text{run}}}{\Delta P^{\text{trapped}}} \propto \frac{\epsilon_m^{s,R}}{\epsilon_m^{s,T}}, \quad (23)$$

где верхние индексы “T” и “R” указывают на сценарии вторичного распада, при которых возбуждается локализованная ИБ-волна и бегущая ИБ-волна соответственно. Видно, что соотношение (23) определяется отношением уровней насыщения первичных волн при двух сценариях вторичного распада. Воспользовавшись оценками (16) и (22), получим

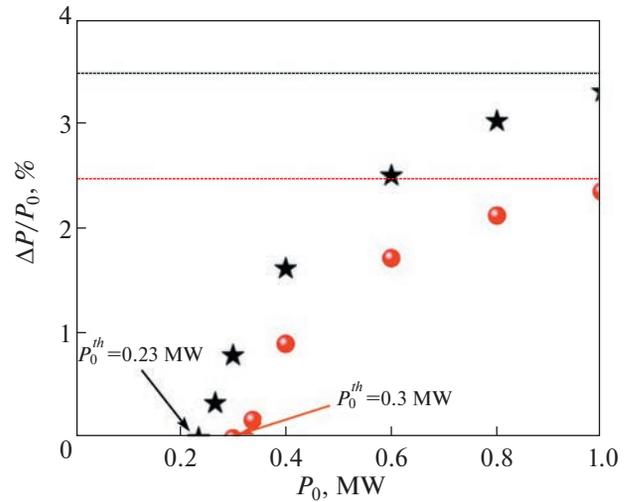
$$\frac{\Delta P^{\text{run}}}{\Delta P^{\text{trapped}}} \propto \frac{\tau_n^T \tau_p}{\tau_n^R \tau_{Ix}}. \quad (24)$$

При выводе системы уравнений (19) и описании конвективного усиления ИБ-волны в области распада, было принято во внимание, что характерное время конвективных потерь ИБ-волны вдоль направления неоднородности много меньше характерного времени дифракции из области локализации пучка накачки на магнитной поверхности. Т.е. в системе уравнений (19) учтено, что выполняется следующее строгое неравенство:  $\tau_p \gg \tau_{Ix}$ . При сценарии, в рамках которого возбуждается собственная мода ИБ-волны, конвективные потери вдоль направления  $y$  могут уменьшать время нахождения вторичной ВГ-волны в области взаимодействия по сравнению со вторым сценарием, когда эти потери отсутствуют, что приводит к неравенству:  $\tau_n^T \leq \tau_n^R$ . Таким образом, подавление конвективных потерь ИБ-волны вдоль направления неоднородности при появлении ее запертых состояний в окрестности локального максимума плотности является главным эффектом, который приводит к уменьшению уровня аномального поглощения при первом сценарии, рассмотренном в предыдущем параграфе.

Далее, решим систему уравнений (19) численно. Как и ранее, возьмем радиус пучка и мощность накачки  $w = 1$  см и  $P_0 = 600$  кВт [4, 5], соответственно. Результаты численного решения показаны на рис. 12 для двух режимов плотности. Сплошной линией (режим высокой плотности) и штрих-пунктирной линией (режим низкой плот-



**Рис. 12.** Эволюция полной энергии всех дочерних волн в области распада (25). Пунктирная линия – коэффициент усиления ВГ-волны при первичной неустойчивости  $2\Gamma = 2\nu_{0,0}t$ , где  $\nu_{0,0}$  дается выражением (12). Зависимость при низкой плотности показана штрихпунктирной линией. Зависимость при высокой плотности – сплошной линией.



**Рис. 13.** Зависимость коэффициента аномального поглощения (26) от мощности пучка накачки. Символы – результат численного решения. Кружки – режим низкой плотности. Звездочки – режим высокой плотности. Горизонтальные пунктирные линии показывают теоретически предсказанные уровни (15), в котором использована оценка уровня насыщения первичной ВГ-волны (22)..

ности) показана эволюция полной энергии всех дочерних волн в области распада

$$W_d(t) = T_e \int_V \frac{dydz}{\pi w^2} \sum_j |a_j(t, y, z)|^2 \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right). \quad (25)$$

Пунктирными линиями на этом рисунке показаны коэффициенты усиления ВГ-волны при первичной неустойчивости  $2\Gamma = 2\nu_{0,0}t$ , где  $\nu_{0,0}$  дается выражением (12). Видно, что теоретическое предсказание для коэффициента усиления первичной волны адекватно описывает результат численного решения.

Доля мощности, аномально поглощаемая дочерними волнами, может быть вычислена как производная по времени от суммарной энергии всех дочерних волн в двумерном боксе в режиме насыщения

$$\Delta P = \frac{dW_\Sigma}{dt}, \quad W_\Sigma(t) = T_e \int_V \frac{dydz}{\pi w^2} \sum_j |a_j(t, y, z)|^2. \quad (26)$$

На рис. 13 показаны зависимости коэффициента аномального поглощения  $\Delta P/P_0$  от мощности пучка накачки. Символы – результат численного решения, где кружки и звездочки показывают зависимости в режиме низкой и высокой плотности соответственно. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют теоретически предсказанным уровням аномального поглощения при сильном надпороговой мощности волны накачки, вычисленным согласно выражению (15), в котором использована оценка уровня насыщения первичной ВГ-волны (22). Видно, что при мощности

пучка много больше порогового значения зависимости стремятся к аналитической оценке (15). Согласие между теоретическими оценками и результатами численного решения системы нелинейных уравнений в частных производных позволяет с доверием относиться к выполненному расчету.

Сравнив рис. 9 и 13, можно убедиться в том, что теоретические предсказания оказываются верными. А именно, возбуждение локализованных ИБ-мод приводит к подавлению их конвективных потерь из области распада и, в результате, к насыщению неустойчивости на более низком уровне, чем в случае возбуждения бегущей ИБ-волны, а также к уменьшению почти в 2.5 раза уровня аномального поглощения.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на примере анализа низкопороговой параметрической распадной неустойчивости, развивающейся в магнитном острове в условиях токамака TEXTOR, нами показано, что возможность запираения обеих, верхнегибридной и ионной бернштейновской, вторичных волн в ходе каскадного насыщения неустойчивости приводит к существенному снижению уровня аномального поглощения мощности накачки при ее параметрическом распаде на запертую в плазме верхнегибридную волну и свободно распространяющуюся необыкновенную моду. Отметим, что этот вывод совпадает с тем, который был сделан в

случае неустойчивости параметрического распада необыкновенной волны накачки на две верхнегибридные волны, запертые в плазме, насыщающейся в результате каскада последовательных распадов.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Аналитическое исследование выполнено при поддержке гранта РНФ 22-12-00010, численное моделирование — при поддержке государственного контракта ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0040-2019-0023, а код для моделирования насыщения ПРН разработан при поддержке государственного контракта ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0034-2021-0003.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимофеев А.В. // УФН. 1973. Т. 110. С. 329–355.
2. Тимофеев А.В. // Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2000. 224 с.
3. Тимофеев А.В. // УФН. 2004. Т. 174. С. 555–582.
4. Westerhof E., Nielsen S.K., Oosterbeek J.W., Salewski M., de Baar M.R., Bongers W.A., Bürger A., Hennel B.A., Korsholm S.B., Leipold F., Moseev D., Stejner M., Thoen D.J. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 125001.
5. Nielsen S.K., Salewski M., Westerhof E., Bongers W., Korsholm S.B., Leipold F., Oosterbeek J.W., Moseev D., Stejner M. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. P. 115003.
6. Батанов Г.М., Борзосеков В.Д., Коврижных Л.М., Колик Л.В., Конечков Е.М., Малахов Д.В., Петров А.Е., Саркисян К.А., Скворцова Н.Н., Степанов В.Д., Харчев К. // Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 511.
7. Tancetti A., Nielsen S.K., Rasmussen J., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Moseev D., Stange T., Senstius M.G., Kille C., Vecsési M., Jensen T., Zanini M., Abramovic I., Stejner M., Anda G., Dunai D., Zoletnik S., Laqua H.P. and the W7-X Team // Nucl. Fusion. 2022. V. 62. P. 074003.
8. Hansen S.K., Nielsen S.K., Stober J., Rasmussen J., Stejner M., Hoelzl M., Jensen T. and the ASDEX Upgrade team // Nucl. Fusion. 2020. V. 60. P. 106008.
9. Zurro B., Baciero A., Tribaldos V., Liniers M., Cappa A., Lopez-Fraguas A., Jimenez-Rey D., Fontdecaba J.M., Nekhaieva O. // Nucl. Fusion. 2013. V. 53. P. 083017.
10. Martínez M., Zurro B., Baciero A., Jiménez-Rey D., Tribaldos V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2018. V. 60. P. 025024.
11. Dnestrovskij Yu.N., Danilov A.V., Dnestrovskij A.Yu., Lysenko S.E., Melnikov A.V., Nemets A.R., Nurgaliev M.R., Subbotin G.F., Solovov N.A., Sychugov D.Yu., Cherkasov S.V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. V. 63. P. 055012.
12. Мещеряков А.И., Вафин И.Ю., Гришина И.А. // Физика плазмы. 2021. V. 47. P. 22.
13. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // JETP Letters. 2010. V. 91. P. 655.
14. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 115003.
15. Gusakov E., Popov A. // Europhys. Lett. 2012. V. 99. P. 15001.
16. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2015. V. 120. P. 147.
17. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. P. 025022.
18. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2015. V. 121. P. 362.
19. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // Europhys. Lett. 2016. V. 116. P. 45002.
20. Popov A.Yu., Gusakov E.Z. // JETP Lett. 2017. V. 105. P. 78.
21. Гусаков Е.З., Попов А.Ю. // УФН. 2020. Т. 190. P. 396.
22. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2017. V. 59. P. 025005.
23. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2018. V. 60. P. 025001.
24. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas. 2018. V. 25. P. 012101.
25. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas. 2018. V. 25. P. 012101.
26. Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N. // Physics of Plasmas. 2018. V. 25. P. 062106.
27. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas. 2018. V. 25. P. 082117.
28. Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Tretinnikov P.V. // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. P. 106040.
29. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Nucl. Fusion. 2019. V. 59. P. 104003.
30. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2020. V. 62. P. 025028.
31. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Nucl. Fusion. 2020. V. 60. P. 076018.
32. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. V. 63. P. 015016.
33. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Physics of Plasmas. 2016. V. 23. P. 082503.
34. Gusakov E.Z., Popov A.Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2021. V. 63. P. 125017.
35. Swanson D.G. 2003 Plasma Waves, Bristol: IOP Publishing.
36. Piliya A.D., Saveliev A.N. // Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36. P. 2059.
37. Abdullaev S.S., Finken K.H., Jakubowski M.W., Kasilov S.V., Kobayashi M., Reiser D., Runov A.M., Wolf R. // Nucl. Fusion. 2003. V. 43. P. 299.
38. Kantor M.Yu., Donne A.J.H., Jaspers R., van der Meiden H. and TEXTOR Team // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. P. 055002.
39. Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Tretinnikov P.V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 085008.
40. Гусаков Е.З., Попов А.Ю. // Физика плазмы. 2022. Т. 48. С. 306.