

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛАЗМЕ НА ДИНАМИКУ ЗАРЯЖЕННЫХ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ

© 2023 г. О. С. Ваулина^{а,*}

^аОбъединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

*e-mail: olga.vaulina@bk.ru

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.

После доработки 07.06.2023 г.

Принята к публикации 08.06.2023 г.

Исследуется влияние случайных сил, вызванных флуктуациями в комплексной плазме, на динамику заряженных пылевых частиц. Получены аналитические соотношения для их кинетической энергии, автокорреляционных функции скоростей, функций массопереноса и среднеквадратичных смещений для случая движения частицы под воздействием двух случайных сил. Предложен способ для учета более двух случайных сил различной природы. Обсуждается возможность моделирования движения пылевых частиц в комплексной плазме уравнениями Ланжевена с температурой не равной температуре окружающего газа.

Ключевые слова: комплексная плазма, динамика заряженных пылевых частиц, ограниченные кластерные ансамбли, процессы диффузии частиц в ограниченных системах

DOI: 10.31857/S0367292123600620, **EDN:** VCSAEZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая (комплексная) плазма представляет собой частично ионизованный газ, содержащий заряженные частицы вещества микронных размеров (пыль). Такая плазма широко распространена в природе и образуется в ряде технологических процессов [1–3]. Для моделирования динамики частиц в комплексной плазме широко используют методы, основанные на решении уравнений Ланжевена для пылевых частиц с некоторой эффективной температурой T_{eff} выше, чем температура T окружающего их нейтрального газа. (Уравнения Ланжевена принимают во внимание необратимость исследуемых процессов, позволяют учитывать влияние различных случайных возмущений и трение частиц за счет толчков атомов/молекул окружающего нейтрального газа.) Однако корректность такого подхода нуждается в дополнительных исследованиях совместного действия броуновской силы и других случайных сил разной природы, присутствующих в комплексной плазме. Наличие таких сил вызывает вопросы о применимости численных исследований физических свойств комплексной плазмы (процессов диффузии, перераспределения стохастической кинетической энергии, коэффициентов переноса, фазовых превращений и т.д. [1–6]) для анализа ее пылевой компоненты.

Большинство лабораторных исследований пылевой плазмы проводится в газовых разрядах

различных типов [7–11]. Благодаря распределению концентрации ионов и электронов в центре газоразрядных камер формируются эффективные ловушки для отрицательно заряженных частиц пыли [1–3]. Стохастическая энергия пылевых частиц (их “кинетическая температура”, T_{eff}) в таких условиях может достигать $\sim 0.5\text{--}5$ эВ, что значительно выше температуры T окружающего их газа, при этом распределение их скоростей соответствует функциям Максвелла с температурой T_{eff} . Механизмы такого “аномального разогрева” пылевых частиц обычно связывают с временными и/или пространственными изменениями их зарядов в объеме неоднородной плазмы [12–17].

Флуктуации зарядов пылевых частиц, вызванные случайной природой ионных и электронных токов, заряжающих эти частицы, присущи любым типам плазмы [14]. В условиях лабораторной газоразрядной плазмы дополнительная стохастическая энергия, ΔT , для отдельной свободной пылевой частицы (без учета ловушки), связанная с этими флуктуациями может быть записана в виде [14–17]

$$\Delta T = \frac{(\delta Q E)^2}{M v_{\text{fr}}(v_{\text{fr}} + \omega)}, \quad (1)$$

где M и v_{fr} — масса и коэффициент трения частицы, $\langle \delta Q \rangle^2 \approx e Q a^2$ — средний квадрат флуктуаций ее равновесного заряда Q , с амплитудой $a \approx 0.5$ и

характерной частотой $\omega \propto a$ для частицы радиусом a . Здесь E — напряженность электрического поля, необходимая для равновесного положения пылевой частицы в поле действующих сил. В типичных условиях экспериментов в плазме газовых разрядов постоянного тока и высокочастотного разряда для инертных газов с давлением $P \sim 0.01$ – 1 Тор [1–3] и частицами размером $a \sim 0.5$ – 5 мкм величина ΔT достигает значений много больших T ($\Delta T/T \sim 10^2$ – 10^3), а отношение характерных частот ω/v_{fr} может варьироваться от ~ 1 до 10^4 [15–18].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Основные соотношения

В настоящей работе исследуется влияние случайных сил, вызванных флуктуациями в комплексной плазме, на динамику заряженных пылевых частиц.

Рассмотрим движение частицы в однородной среде под воздействием двух независимых случайных сил различной природы: силы R , вызванной, например, флуктуациями окружающей плазмы; и силы Ланжевена, F_b , которая является источником ее стохастического (теплового) движения с температурой T , например, броуновской силы за счет случайных толчков молекул/атомов окружающей среды. Скорость $V \equiv V_x(t) = dx(t)/dt$ и смещение такой частицы x на одну степень свободы в однородной среде для ловушки с характерной частотой $\omega_0 = (Q\beta/M)^{1/2}$, где β — величина градиента внешнего линейного электрического поля E_x , можно найти из уравнения Ланжевена [1, 15, 16]:

$$M \frac{dV}{dt} = -Mv_{fr}V - M\omega_0^2x + R + F_b. \quad (2)$$

Отметим, что именно возникновение случайной силы (R) вследствие флуктуаций, δQ , заряда частиц является источником дополнительной стохастической энергии (1). Этот механизм подробно описан в работах [1, 15, 16].

Подчеркнем, что в случае $\omega_0 = 0$ уравнение (2) описывает движение “свободной” частицы. В условиях локального термодинамического равновесия среднее значение $\langle RF_b \rangle = 0$.

Автокорреляционная функция броуновской силы $\langle F_b(0)F_b(t) \rangle = 2TMv_{fr}\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция, описывает дельта-коррелированный гауссов процесс. Для моделирования таких стохастических процессов могут быть использованы случайные приращения силы, ΔF_b , за время Δt , которые согласно флуктуационно-диссипативной теореме можно представить в виде: $\Delta F_b = (2TMv_{fr}/\Delta t)^{1/2}\xi$. Здесь и далее ξ — некоторая случайная величина, распределенная по нормальному закону со среднеквадратичным откло-

нением равным 1, а Δt — шаг интегрирования уравнений движения по времени [1–3].

Пусть сила R подчиняется уравнению [19, 20]

$$\frac{dR}{dt} = -\omega R + \vartheta, \quad (3)$$

где ϑ — случайная величина ($\langle \vartheta \rangle = 0$), автокорреляционная функция которой, $\langle \vartheta(0)\vartheta(t) \rangle = 2\langle R^2 \rangle \omega \delta(t)$, описывает дельта-коррелированный гауссов процесс, а ω — характерная частота этого процесса. Таким образом, случайные приращения силы R можно представить в виде $\Delta R = (2\langle R^2 \rangle \omega \Delta t)^{1/2}\zeta$, где $\langle R^2 \rangle$ — средний квадрат силы R . Так, например, для частицы с флуктуирующим зарядом за счет потоков ионов и электронов, заряжающих частицу, ω — частота зарядки, а $\langle R^2 \rangle = \langle \delta QE \rangle^2 \approx \alpha^2 eQE^2$, см. (1).

Эффективную температуру частиц можно представить в виде $T_{\text{eff}} = T + \Delta T \equiv T + M\delta V^2$, где δV^2 — приращение их среднего квадрата скорости за счет случайных флуктуаций силы R . Величину δV^2 можно получить путем решения системы уравнений (2), (3) при $F_b = 0$. В обоих случаях ($\omega_0 = 0$ и $\omega_0 \neq 0$) эти уравнения дают

$$\delta V^2 = \frac{\langle R^2 \rangle}{M^2 v_{fr}(v_{fr} + \omega + \omega_0^2/\omega)}. \quad (4)$$

Данная формула соответствует известному соотношению (1) для приращения энергии в случае флуктуаций заряда пыли, где $\Delta T = M\delta V^2$.

Численное моделирование задачи с двумя случайными силами, см. (2), (3), в ее трехмерной постановке и при $\omega_0 = 0$ и при $\omega_0 \neq 0$ для типичных условий экспериментов в плазме газовых разрядов ($\Delta T/T \sim 30$ – 300), и $\omega/v_{fr} \sim 1$ – 10^4) показало, что во всех рассмотренных случаях распределение скоростей частиц соответствует функции Максвелла с температурой $T_{\text{eff}} = T + \Delta T \equiv T$, где $\Delta T \equiv M\delta V^2$.

2.2. Свободная частица и частица в ловушке

Уравнения (2), (3) можно переписать в виде

$$\frac{d^2V}{dt^2} + (v_{fr} + \omega) \frac{dV}{dt} + (\omega_0^2 + v_{fr}\omega)V + \omega\omega_0^2x + f(\Delta F_b, \Delta R) = 0. \quad (5)$$

Откуда можно найти средний квадрат отклонений частицы $\langle x^2(t) \rangle$ и автокорреляционную функцию ее скоростей $\langle V(0)V(t) \rangle$, используя соответствующие начальные условия и величину $\langle V^2 \rangle$.

Следует отметить, что [6, 20]

$$\langle V(0)V(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d^2 \langle x^2(t) \rangle}{dt^2}. \quad (6)$$

Учитывая корреляционные соотношения ($\langle RF_b \rangle = 0$, $\langle x(t)F_b \rangle = 0$, $\langle x(t)R \rangle = 0$), решения уравнения (4) являются независимыми как для функций $\langle x^2(t) \rangle$, так и для $\langle V(0)V(t) \rangle$, отвечающих за различные случайные процессы: $\langle x^2(t) \rangle_T$ и $\langle V(0)V(t) \rangle_T$ (при $R = 0$, $\langle V^2 \rangle = 2T/M$, $\omega = 0$); $\langle x^2(t) \rangle_R$ и $\langle V(0)V(t) \rangle_R$ (при $F_b = 0$, $\langle V^2 \rangle = \delta V^2$). Таким образом, $\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle_T + \langle x^2(t) \rangle_R$, а $\langle V(0)V(t) \rangle = \langle V(0)V(t) \rangle_T + \langle V(0)V(t) \rangle_R$.

Таким образом, для свободной частицы ($\omega_0 = 0$) из уравнения (5) получим

$$\langle x^2(t) \rangle_T = 2tD_T \left(1 + \frac{\exp(-v_{fr}t) - 1}{v_{fr}t} \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_R = 2t \frac{D_R}{\omega^2 - v_{fr}^2} \left[\omega^2 \left(1 + \frac{\exp(-v_{fr}t) - 1}{v_{fr}t} \right) - \right. \\ \left. - v_{fr}^2 \left(1 + \frac{\exp(-\omega t) - 1}{\omega t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $D_T = T/(Mv_{fr})$ и $D_R = \delta V^2/v_{ef}$ — значения функций $D_T(t) = \langle x^2(t) \rangle_T/2t$ и $D_R(t) = \langle x^2(t) \rangle_R/2t$ при $t \rightarrow \infty$, где $v_{ef} = v_{fr}\omega/(v_{fr} + \omega)$. Откуда коэффициент диффузии рассматриваемой системы для любых отношений ω/v_{fr}

$$D = D_T + D_R \equiv \frac{T}{Mv_{fr}} + \frac{\delta V^2}{v_{ef}}. \quad (9)$$

Отметим, что для анализа зависимости $\langle x^2(t) \rangle$ от времени t , удобно использовать функцию массопереноса в виде $D(t) = \langle x^2(t) \rangle/2t$ [6, 20]. Нормированные значения $\langle x^2(t) \rangle_R$ (8) и $D_R(t) = \langle x^2(t) \rangle_R/2t$ для свободной частицы ($\omega_0 = 0$) при $v_{fr} = 10 \text{ с}^{-1}$ и различных значениях ω/v_{fr} представлены на рис. 1а и б совместно с результатами численного моделирования при $\Delta T/T \geq 30-300$, когда $\langle x^2(t) \rangle \cong \langle x^2(t) \rangle_R$, а $D(t) \cong D_R(t)$. Легко увидеть, что данные о поведении функции $D(t)$ позволяют получить более точную информацию об исследуемой системе, чем анализ $\langle x^2(t) \rangle$; см. также рис. 2а, б.

Для автокорреляционной функции скоростей $\langle V(0)V(t) \rangle$ имеем

$$\langle V(0)V(t) \rangle_T = \langle V^2(0) \rangle_T \exp(-v_{fr}t) \quad (10)$$

$$\langle V(0)V(t) \rangle_R =$$

$$= \frac{\langle V^2(0) \rangle_R}{\omega - v_{fr}} [\omega \exp(-v_{fr}t) - v_{fr} \exp(-\omega t)]. \quad (11)$$

Здесь $\langle V(0)^2 \rangle_T = T/M$, $\langle V(0)^2 \rangle_R = \delta V^2$.

При $\omega/v_{fr} \gg 1$ (что соответствует, например, отдельным случаям флуктуаций заряда частицы в газоразрядной плазме)

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2t(T + M\delta V^2)}{Mv_{fr}} \left(1 + \frac{\exp(-v_{fr}t) - 1}{v_{fr}t} \right), \quad (12)$$

$$\langle V(0)V(t) \rangle = (T + M\delta V^2) \exp(-v_{fr}t)/M. \quad (13)$$

Таким образом, моделирования движения частиц в плазме уравнениями Ланжевена с температурой больше температуры окружающего газа ($T_{eff} \equiv T + \Delta T$, где $\Delta T \equiv M\delta V^2$) будет корректным, что нельзя сказать о случаях $\omega < v_{fr}$ или $\omega \sim v_{fr}$.

Нормированные значения $\langle V(0)V(t) \rangle_R$ (11) для свободной частицы при $v_{fr} = 10 \text{ с}^{-1}$ и разных ω/v_{fr} представлены на рис. 1в совместно с результатами численного моделирования при $\Delta T/T \geq 30-300$, когда $\langle V(0)V(t) \rangle \cong \langle V(0)V(t) \rangle_R$.

Для частицы в гармонической ловушке с характерной частотой $\omega_0 \neq 0$ (при $2\omega_0 < v_{fr}$) можно найти

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_T = \\ = \frac{2T}{M\omega_0^2} \left[1 - e^{-v_{fr}t/2} \left(\text{ch}(v_{fr}t\psi) + \frac{\text{sh}(v_{fr}t\psi)}{2\psi} \right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_R = \frac{2\delta V^2}{\omega_c^2} \left\{ 1 - \frac{1}{b} \left[(\omega_0^2 - \omega_c^2) e^{-\omega t} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-v_{fr}t/2} \left(\text{ch}(v_{fr}t\psi) \{ \omega_c^2 + \omega(\omega - v_{fr}) \} \right) + \right. \right. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left. + \frac{\text{sh}(v_{fr}t\psi)}{v_{fr}\psi} \left[\omega_0^2 \left(\frac{v_{fr}}{2} - \omega \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega \frac{v_{fr}}{2} \left(\omega + \frac{2\omega_0^2}{v_{fr}} - v_{fr} \right) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} \langle V(0)V(t) \rangle_T = \\ = \frac{T}{M} \left[1 - e^{-v_{fr}t/2} \left(\text{ch}(v_{fr}t\psi) - \frac{\text{sh}(v_{fr}t\psi)}{2\psi} \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\langle V(0)V(t) \rangle_R = \frac{1}{2} \frac{d^2 \langle x^2(t) \rangle_R}{dt^2}, \quad (17)$$

где $\omega_c^2 = \omega\omega_0^2/(v_{fr} + \omega)$, $\psi = (1 - 4\xi_0^2)^{1/2}/2$, $\xi_0 = \omega_0/v_{fr}$, а $b = \omega_0^2 - \omega^2 - \omega v_{fr}$. (При условии $4\xi_0^2 > 1$, в формулах (14)–(17) величина $\psi = (4\xi_0^2 - 1)^{1/2}/2$, а ch и sh переходят в $\cos$ и $\sin$, соответственно.)

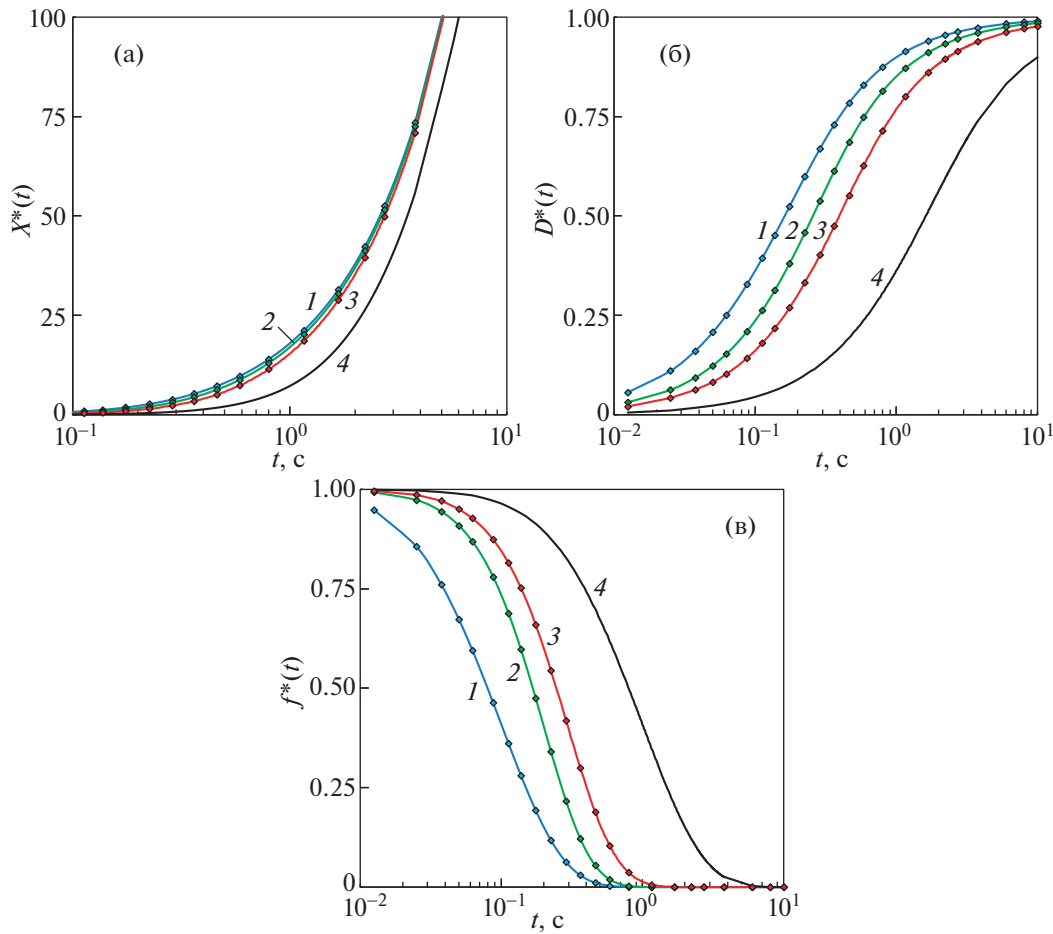


Рис. 1. Нормированные функции $X^*(t) = v_{fr} \langle x^2(t) \rangle_R / D_R$ (а), $D^*(t) = \langle x^2(t) \rangle_R / (2tD_R)$ (б) и $f^*(t) = \langle V(0)V(t) \rangle_R / \delta V^2$ (в) для свободной частицы при $v_{fr} = 10 \text{ с}^{-1}$ и ω/v_{fr} : 1 – 10; 2 – 1; 3 – 0.5; 4 – 0.1. Линии – аналитические соотношения, символы – результаты моделирования.

Нормированные значения $\langle x^2(t) \rangle_R$ (15), $D_R(t) = \langle x^2(t) \rangle_R / 2t$ и $\langle V(0)V(t) \rangle_R$ (17) для частицы в ловушке ($\omega_0 \neq 0$) при $v_{fr} = 10 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 2.5 \text{ с}^{-1}$ и различных значениях ω/v_{fr} представлены на рис. 2а–в соответственно. Аналитические кривые представлены совместно с результатами численного моделирования при $\Delta T/T \geq 30$ –300, когда $\langle x^2(t) \rangle \cong \langle x^2(t) \rangle_R$, $D(t) \cong D_R(t)$, а $\langle V(0)V(t) \rangle \cong \langle V(0)V(t) \rangle_R$.

Подобно случаю свободной частицы (12), (13) при $\omega/v_{fr} \gg 1$

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \\ &= \frac{2T_{\text{eff}}}{M\omega_0^2} \left[1 - e^{-v_{fr}t/2} \left(\text{ch}(v_{fr}t\psi) + \frac{\text{sh}(v_{fr}t\psi)}{2\psi} \right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle V(0)V(t) \rangle &= \\ &= \frac{T_{\text{eff}}}{M} \left[1 - e^{-v_{fr}t/2} \left(\text{ch}(v_{fr}t\psi) - \frac{\text{sh}(v_{fr}t\psi)}{2\psi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

2.3. Движение частиц при наличии двух или более случайных сил

Таким образом, моделирование динамики частиц в плазме уравнениями Ланжевена, используя одну случайную силу с температурой больше температуры окружающего газа $T_{\text{eff}} > T$, будет корректным и в случае частиц в ловушке при $\omega/v_{fr} \gg 1$. Однако даже при $\omega/v_{fr} \gg 1$ выяснить природу дополнительной случайной силы (или сил) R при лабораторном анализе смещений $\langle x^2(t) \rangle$ частиц или их автокорреляционных функций $\langle V(0)V(t) \rangle$ является практически не возможным.

Предлагаемые здесь аналитические соотношения (5)–(19) имеют место для всех случайных сил, которые описываются уравнениям (2), (3), например, для частиц со случайными пространственными изменениями зарядов [13], или для случая активных частиц [21–23].

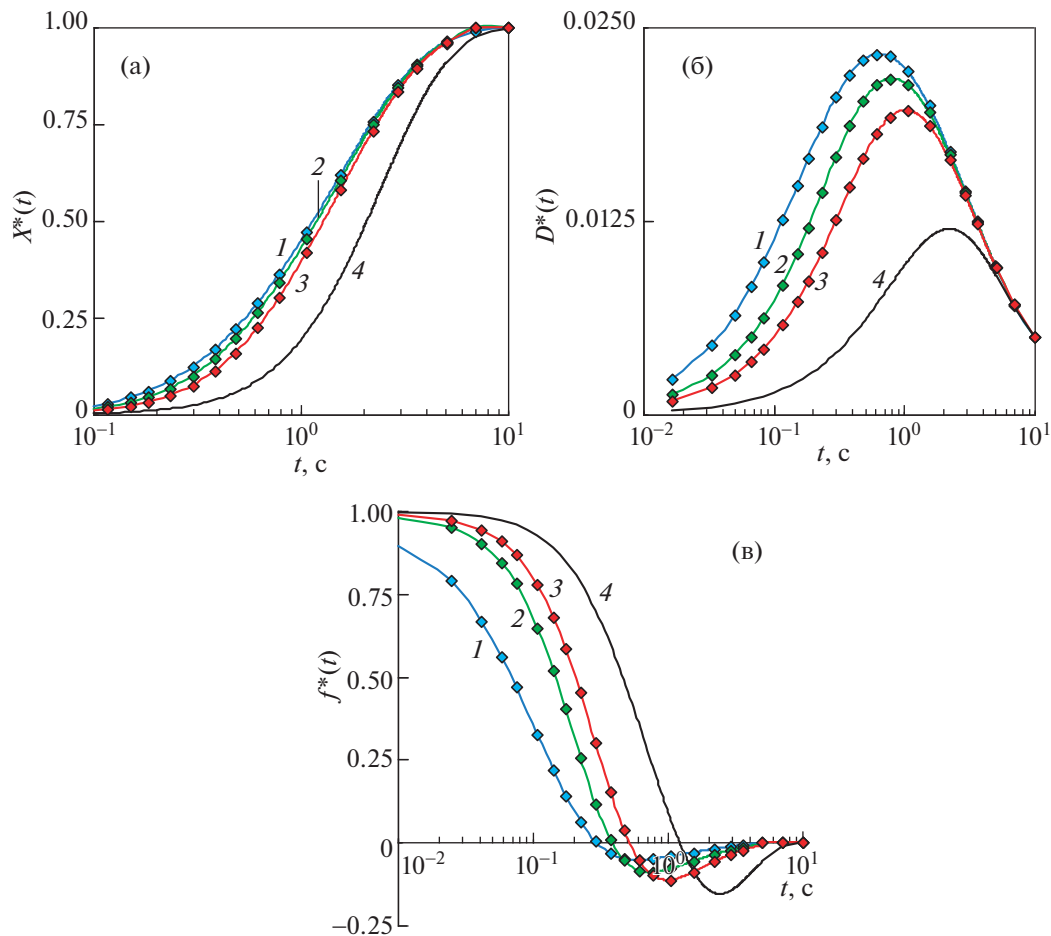


Рис. 2. Нормированные функции $X^*(t) = \omega_c^2 \langle x^2(t) \rangle_R / (2\delta V^2)$ (а), $D^*(t) = X^*(t) / (2t\nu_{fr})$ (б) и $f^*(t) = \langle V(0)V(t) \rangle_R / \delta V^2$ (в) для частицы в ловушке при $\nu_{fr} = 10 \text{ с}^{-1}$ и ω/ν_{fr} : 1 – 10; 2 – 1; 3 – 0.5; 4 – 0.1. Линии – аналитические соотношения, символы – результаты моделирования.

Задача при наличии более двух случайных сил для сводной частицы и частицы в гармонической ловушке ($\omega_0 = 0$ и $\omega_0 \neq 0$) решается аналогично, используя систему уравнений для $I = N$ сил R_i

$$M \frac{dV}{dt} = -M\nu_{fr}V + \sum_{i=1}^N R_i + F_b, \quad (20)$$

$$\frac{dR_i}{dt} = -\omega_i R_i + \vartheta_i. \quad (21)$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется влияние случайных сил, вызванных флуктуациями в комплексной плазме, на динамику заряженных пылевых частиц. Получены аналитические соотношения для их кинетической энергии, автокорреляционных функции скоростей, функций массопереноса и среднеквадратичных смещений. Предлагаемые аналитические соотношения проверены путем числен-

ного моделирования и справедливы для всех случайных сил, заданных уравнениям (2), (3).

Рассмотрена возможность моделирования движения пылевых частиц в комплексной плазме уравнениями Ланжевена с температурой не равной температуре окружающего газа. Показано, что определить природу случайной силы по анализу движения пылевых частиц практически невозможно.

Подробно рассмотрен случай движения частиц под воздействием двух случайных сил, первая из которых броуновская сила, а природа второй связана с флуктуациями зарядов пылевых частиц в плазме. Предложена система уравнений для учета более двух случайных сил разной природы.

Данная работа будет полезной в исследованиях физических свойств комплексной плазмы, как с практической, так и с фундаментальной точки зрения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-22-00899, <https://rscf.ru/project/22-22-00899/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вaulina O.S., Петров О.Ф., Фортвов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А.* Пылевая плазма (эксперимент и теория). М.: Физматлит, 2009.
2. *Complex and Dusty Plasmas* / Eds. V.E. Fortov, G.E. Morfill. CRC Press, 2010.
3. *Ivlev A., Morfill G., Lowen H., Royall C.P.* Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids. Singapore: World Scientific, 2012.
4. *Vaulina O.S., Vladimirov S.V., Petrov O.F., Fortov V.E.* // *Phys. Plasmas*. 2004. V. 11. P. 3234.
5. *Vaulina O.S., Drangevski I.E.* // *Physica Scripta*. 2006. V. T73. P. 577.
6. *Vaulina O.S., Adamovich X.G., Petrov O.F., Fortov V.E.* // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 77. P. 066403.
7. *Fortov V.E., Nefedov E.A., Sinel'shchikov V.A., Usachev A.D., Zobnin A.V.* // *Phys. Lett. A*. 2000. V. 267. P. 179.
8. *Hebner G.A., Riley M.E., Greenberg K.E.* // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 66. P. 046407.
9. *Thomas H., Morfill G., Demmel V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 73. P. 652.
10. *Pieper J.B., Goree J., Quinn R.A.* // *Phys. Rev. E* 1996. V. 54. P. 5636.
11. *Melzer A., Homann A., Piel A.* // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53. P. 2757.
12. *Vaulina O.S.* // *JETP*. 2016. V. 122. P. 193.
13. *Vaulina O.S.* // *Plasma Physics Reports*. 2017. V. 43. P. 354.
14. *Khrapak S.A., Nefedov A.P., Petrov O.F., Vaulina O.S.* // *Phys. Rev. E*. 1999. V. 59. P. 6017.
15. *Vaulina O.S., Khrapak S.A., Petrov O.F., Nefedov A.P.* // *Phys. Rev. E*. 1999. V. 60. P. 5959.
16. *Quinn R.A., Goree J.* // *Phys. Rev. E*. 2000. V. 61. P. 3033.
17. *Vaulina O.S., Khrapak S.A., Samarian A., Petrov O.F.* // *Physica Scripta*. 2000. V. T84. P. 292.
18. *Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* *Physical Kinetics*. Oxford: Pergamon Press, 1981.
19. *Ovchinnikov A.A., Timashev S.F., Belyy A.A.* *Kinetics of Diffusion Controlled Chemical Processes*. New York: Nova Science Publishers, Commack, 1989.
20. *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.* // *Phys. Rev.* 1930. V. 36. P. 823.
21. *Nguyen G.H.P., Wittmann R., Lowen H.* // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2022. V. 34. P. 035101.
22. *Lisin E.A., Vaulina O.S., Lisina I.I., Petrov O.F.* // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2021. V. 23. P. 30.
23. *Das Sh., Gompper G., Winkler R.J.* // *New J. Phys.* 2018. V. 20. P. 015001.