

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ С ПАКЕТАМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИОННО-ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

© 2023 г. В. С. Грач^{a,*}, А. Г. Демехов^{a,b}

^a Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

^b Полярный геофизический институт, Апатиты, Россия

*e-mail: vsgrach@ipfran.ru

Поступила в редакцию 28.03.2023 г.

После доработки 12.04.2023 г.

Принята к публикации 20.04.2023 г.

Рассматривается взаимодействие релятивистских электронов с пакетами электромагнитных ионно-циклотронных волн конечной длительности и малой амплитуды в радиационных поясах Земли. В рамках линейного приближения получены аналитические оценки дисперсии экваториального питч-угла электронов для волновых пакетов, расположенных вблизи геомагнитного экватора. Продemonстрировано согласие аналитических оценок с результатами численных расчетов методом пробных частиц. Показано, что уменьшение длительности пакета расширяет область взаимодействия в область малых энергий, находящихся за пределами диапазона резонансных значений. Подобное взаимодействие может приводить к высыпаниям в ионосферу электронов с энергиями порядка сотен килоэлектронвольт.

Ключевые слова: взаимодействие волн и частиц, радиационные пояса

DOI: 10.31857/S0367292123600334, **EDN:** VXTVVC

1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие волн и частиц в плазменной среде является одной из важных задач физики радиационных поясов Земли [1–6]. Примером такого взаимодействия является резонансное взаимодействие релятивистских электронов с электромагнитными ионно-циклотронными (ЭМИЦ) волнами, которое приводит к рассеянию этих электронов в конус потерь и считается одним из основных механизмов высыпаний таких электронов в ионосферу Земли [7–10].

Резонансные энергии электронов при взаимодействии с ЭМИЦ-волнами определяются в первую очередь отношением плазменной и гиро-частот электронов, а также близостью частоты ЭМИЦ-волны к соответствующей гиро-частоте ионов. Как правило, эти энергии составляют около 1 МэВ и выше [10–13]. В то же время, наблюдаются ассоциированные с ЭМИЦ-волнами высыпания электронов с энергиями порядка сотен килоэлектронвольт [14–16]. Одним из возможных объяснений таких высыпаний является нерезонансное взаимодействие с квазимонохроматическими (когерентными) пакетами ЭМИЦ-волн конечной длины [16, 17]. Подобные эффекты возможны при взаимодействии с дискретными

ЭМИЦ-излучениями типа жемчужин или гидромагнитных хордов [18–22].

Данная работа посвящена исследованию влияния конечной длины пакетов на взаимодействие ЭМИЦ-волн с релятивистскими электронами вблизи экватора в окрестности границ диапазона резонансных значений энергии электронов. Взаимодействие рассматривается в линейном режиме; для фактора рассеяния, определяющего коэффициенты питч-угловой диффузии, получены аналитические выражения. Полученные аналитические оценки, в отличие от результатов работы [16], сохраняют корректность для резонансного взаимодействия вблизи экватора и лучше согласуются с результатами численных расчетов, а также охватывают более широкий диапазон энергий. Показано, что уменьшение длины пакета расширяет область взаимодействия в область малых энергий, находящихся за пределами диапазона резонансных значений. Подобное взаимодействие может приводить к высыпаниям в ионосферу электронов с энергиями порядка сотен килоэлектронвольт.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведена постановка задачи; аналитические выражения для фактора рассеяния получены в разд. 3. В разд. 4 обсуждаются параметры мо-

делирования, результаты представлены в разд. 5. В разд. 6 сформулированы основные выводы работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений движения электронов в геомагнитном поле $\mathbf{B}_0$ и произвольном электромагнитном волновом поле $\mathcal{E}_w, \mathcal{B}_w$ с достаточно малой амплитудой ($|\mathcal{B}_w| \ll B_0$) включает закон изменения энергии электрона W , уравнения для первого адиабатического инварианта $I_\perp = p_\perp^2/(2mB_0)$ и фазы гироваращения ϕ и закон движения лармовского центра

$$\frac{dW}{dt} = -e \left(\frac{\mathbf{p}_\parallel}{m\gamma} \mathcal{E}_w \right), \quad (1)$$

$$\frac{dI_\perp}{dt} = -\frac{e}{mB_0} \left[\mathbf{p}_\perp \mathcal{E}_{w\perp} + \mathbf{p}_\perp \left[\frac{\mathbf{p}_\parallel}{m\gamma c} \times \mathcal{B}_{w\perp} \right] \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\Omega_c}{\gamma} + \\ + \frac{e}{p_\perp^2} \left\{ -[\mathbf{p}_\perp \times \mathcal{E}_{w\perp}]_z + \frac{p_\perp^2}{m\gamma c} \mathcal{B}_{wz} - \frac{p_\parallel}{m\gamma c} \mathbf{p}_\perp \mathcal{B}_{w\perp} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_\parallel}{m\gamma}. \quad (4)$$

Здесь $e > 0$ — элементарный заряд, m и $\mathbf{p}$ — масса и импульс электрона соответственно, индексы $\parallel$ и $\perp$ означают проекции на направление вдоль и поперек $\mathbf{B}_0$ соответственно, z — координата вдоль $\mathbf{B}_0$, $\gamma = \sqrt{1 + [p/(mc)]^2}$, $\Omega_c = eB_0/(mc)$ — нерелятивистская гирочастота.

Традиционно для рассмотрения резонансных эффектов взаимодействия электронов с волной систему (1)–(4) упрощают с использованием разложения электромагнитного поля вблизи центра лармовской окружности [23, 24]. Такой подход предполагает условие плавной неоднородности среды и возможность представить поле волны в виде

$$\mathcal{E}_w = \text{Re}\{[E]\mathbf{a} \exp(i\zeta)\}; \quad \mathcal{B}_w = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \mathcal{E}_w], \quad (5)$$

где $\zeta = \int k_\perp dx + \int k_\parallel dz - \int \omega dt + \phi$, ω и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор волны соответственно, ось x направлена вдоль $\mathbf{k}_\perp$, $E = |E| \exp(i\phi)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, ϕ — начальная фаза волны, $\mathbf{a}$ — вектор поляризации соответствующей волновой моды (в общем случае также медленная функция координаты и времени, $|\mathbf{a}| = 1$), $|\mathcal{B}_w| \ll B_0$. Однако при рассмотрении вза-

имодействия с короткими волновыми пакетами условие медленного изменения параметров волны (по сравнению с масштабами $2\pi\Omega_c^{-1}$ во временной и $2\pi/k$ в пространственной областях) может нарушаться, что требует дополнительного обоснования применимости традиционного подхода к преобразованию системы (1)–(4).

С другой стороны, в частном случае взаимодействия релятивистских электронов с ЭМИЦ-волной справедливы условия $\omega \ll \Omega_c/\gamma$, $\omega/k \ll \ll p_\parallel/(m\gamma)$, $|\mathcal{E}_w| \ll |\mathcal{B}_w|$ и систему (1)–(4) можно существенно упростить, не предполагая медленного изменения амплитуды волнового поля. Ограничимся также случаем продольного распространения ЭМИЦ-волн. Тогда система (1)–(4) запишется в виде

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dI_\perp}{dt} = -\frac{e}{mB_0} \left[\mathbf{p}_\perp \left[\frac{\mathbf{p}_\parallel}{m\gamma c} \times \mathcal{B}_{w\perp} \right] \right], \quad (7)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\Omega_c}{\gamma} - \frac{ep_\parallel}{p_\perp^2 m\gamma c} \mathbf{p}_\perp \mathcal{B}_{w\perp}, \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_\parallel}{m\gamma}. \quad (9)$$

Поскольку энергия электронов остается постоянной, результат взаимодействия может быть полностью описан изменением адиабатического инварианта $I_\perp$ или экваториального питч-угла α_L , $\mu = \sin^2 \alpha_L = (p_\perp^2/p^2)(B_{0L}/B_0) = 2I_\perp B_{0L}/[(\gamma^2 - 1)mc^2]$. Здесь и далее индекс L означает экваториальные величины.

Для релятивистских электронов пакет ЭМИЦ-волн с высокой точностью является статическим полем с правой циркулярной поляризацией, т.е. компоненты магнитного поля волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{wx} = B_w(z) \cos\left(\int k_0 dz\right), \\ \mathcal{B}_{wy} = B_w(z) \sin\left(\int k_0 dz\right), \quad \mathcal{B}_{wz} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь предполагается, что $B_w(z)$ не является осциллирующей функцией ($B_w(z) \geq 0$) и играет роль локальной амплитуды поля, но при этом может существенно изменяться на масштабе $2\pi/k_0$. Для удобства дальнейшего изложения выделим амплитудный множитель $B_w = B_{wp}g(z)$, где B_{wp} соответствует значению $B_w(z)$ в середине волнового пакета.

С учетом (10), систему (6)–(9) можно переписать в виде:

$$\frac{dI_{\perp}}{dt} = \frac{ep_{\perp}B_{\text{wp}}g(z)}{mB_0} \frac{p_{\parallel}}{m\gamma c} \sin \Psi, \quad (11)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = k_0 \frac{p_{\parallel}}{m\gamma} - \frac{\Omega_c}{\gamma} + \frac{e}{p_{\perp}} \frac{p_{\parallel}}{m\gamma c} B_{\text{wp}}g(z) \cos \Psi, \quad (12)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_{\parallel}}{m\gamma}. \quad (13)$$

Здесь $\Psi = \int k_0 dz - \phi$ – фаза частицы в поле волны, $\gamma = \text{const}$.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим линейное приближение по амплитуде волнового поля, которое предполагает интегрирование системы (11)–(13) по невозмущенной траектории частицы. В этом случае систему (11)–(13) можно переписать в виде

$$\frac{dI_{\perp}}{dz} = \frac{ep_{\perp}}{mc} \frac{B_{\text{wp}}}{B_0} g(z) \sin \Psi, \quad (14)$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = -\frac{1}{v_{\parallel}} \Delta. \quad (15)$$

Здесь $v_{\parallel} = p_{\parallel}/(m\gamma)$ – продольная скорость электрона, $\Delta = k_0 v_{\parallel} - \Omega_c/\gamma$ – отстройка от резонанса. В рамках линейного приближения в правой части системы (14), (15) параметры электрона ($v_{\parallel}$ и $p_{\perp}$) не зависят от волнового поля. Отметим, что при переходе от задачи (11)–(13) к задаче (14), (15) начальные параметры электрона, соответствующие моменту его влета в пакет, становятся граничными условиями при $z = z_t$, где z_t – задний фронт пакета. В дальнейшем для определенности будем называть соответствующие значения $I_{\perp}$ (μ , α_L) и Ψ начальными и обозначать как $I_{\perp 0}$ (μ_0 , α_{L0}) и Ψ_0 .

Система (14), (15) дает следующее изменение адиабатического инварианта пробной частицы после однократного пролета через пакет

$$\Delta I_{\perp} = \frac{eB_{\text{wp}}}{mc} \int_{z_t}^{z_f} \frac{p_{\perp}g(z)}{B_0} \sin[\Psi_0 + \Psi_R(z)] dz. \quad (16)$$

Здесь z_t и z_f – координаты заднего и переднего фронта пакета соответственно, $\Psi_R(z) = -\int_{z_t}^z (\Delta/v_{\parallel}) dz'$.

Для ансамбля частиц, равномерно распределенных по начальным фазам, среднее изменение

адиабатического инварианта будет нулевым, а дисперсии $\langle \Delta I_{\perp}^2 \rangle$ и $\langle \Delta \mu^2 \rangle$ можно записать как

$$\langle \Delta I_{\perp}^2 \rangle = \frac{e^2}{mc^2} I_{\perp 0} \frac{B_{\text{wp}}^2}{B_{0p}} G, \quad (17)$$

$$\langle \Delta \mu^2 \rangle = \frac{2\mu_0}{c^2} \frac{B_{0L}}{B_{0p}} \left(\frac{eB_{\text{wp}}}{mc} \right)^2 \frac{G}{\gamma^2 - 1}, \quad (18)$$

где угловые скобки означают усреднение по фазе, $I_{\perp 0}$ и μ_0 – начальные значения адиабатического инварианта $I_{\perp}$ и величины μ соответственно, B_{0p} – геомагнитное поле в середине пакета, G – фактор рассеяния,

$$G = \left| \int_{z_t}^{z_f} g(z) \exp[i\Psi_R(z)] dz \right|^2. \quad (19)$$

Выражение (17) получено в предположении, что изменением геомагнитного поля в пакете (или в области пакета, дающей основной вклад в интеграл G) можно пренебречь, поэтому геомагнитное поле (и соответственно $p_{\perp}$) взяты в середине пакета и вынесены из-под знака интегрирования.

В дальнейшем будем предполагать, что частота волны ω внутри пакета постоянна, и соответственно $k_0 = \omega n(z)/c$, где n – показатель преломления ЭМИЦ-волны. В этом случае расстройка $\Delta(z)$ симметрична относительно экватора; также ее можно считать формально определенной и вне границ волнового пакета.

Получим выражение для фактора рассеяния G .

3.1. Эффективность взаимодействия в случае бесконечного пакета

Рассмотрим бесконечно длинный пакет при условии, что точки резонанса $\Delta = 0$, если они есть, расположены в той области геомагнитной силовой линии, в которой можно пренебречь изменением геомагнитного поля B_0 и соответственно справедливо выражение (17). Пусть для частицы с заданными начальными значениями энергии W и адиабатического инварианта I_0 условие резонанса $\Delta = -v_{\parallel} d\Psi_R/dz = 0$ выполнено в точках $-z_{\text{res}}$, z_{res} ($z_{\text{res}} > 0$). Если эти точки достаточно удалены друг от друга, чтобы взаимодействие в них можно было считать независимым, то для взятия интеграла в (19) можно воспользоваться методом стационарной фазы для каждой точки резонанса отдельно. Обозначим фактор рассеяния G для этого случая как G_{2R} . С учетом того, что функция расстройки $\Delta = -k_0 v_{\parallel} + \Omega_c/\gamma$ симметрична отно-

сительно экватора и на экваторе имеет минимум, получаем “стандартное” выражение [16, 25, 26]

$$G_{2R} = 4[\cos(\Delta\Psi)]^2 \frac{2\pi g(z = \pm z_{\text{res}})}{|\Psi'''|_{z_{\text{res}}}}, \quad (20)$$

где $|\Psi'''|_{z_{\text{res}}} = d^2\Psi/dz^2|_{z=-z_{\text{res}}} = -d^2\Psi/dz^2|_{z=z_{\text{res}}}$, $\Delta\Psi = [\Psi_R(z = -z_{\text{res}}) - \Psi_R(z = z_{\text{res}})]/2 + \pi/4$. В случае, когда точки резонанса расположены близко к экватору, оценка (20) не применима, так как взаимодействие в окрестностях этих точек перестает быть независимым, а при $z_{\text{res}} \rightarrow 0$ $G_{2R} \rightarrow \infty$, так как на экваторе $d^2\Psi/dz^2 \propto d\Omega_c/dz = 0$. Также оценка (20) заведомо не применима при отсутствии резонанса, когда $\Delta > 0$ на всей траектории частицы. Однако в случае, когда минимум величины Δ (т.е. ее значение на экваторе) не очень мал, можно получить оценку для величины G для нерезонансных энергий, полагая, что уравнение $\Delta = 0$ имеет мнимые корни $z_{\text{res}}^2 < 0$, и соответственно фаза частицы Ψ_R имеет мнимую часть [16]

$$G_{2R} = \exp(-2\text{Im}[\Psi_R(z = z_{\text{res}})]) \frac{2\pi}{|\Psi'''|_{z_{\text{res}}}}. \quad (21)$$

Выражение (21) также неприменимо при $z_{\text{res}} \rightarrow 0$.

Для получения универсального выражения для G , применимого как при близко расположенных, так и при отсутствующих точках резонанса, воспользуемся способом, предложенным в работах [27, 28], а именно аппроксимируем зависимость $d\Psi_R/dz$ параболической функцией

$$d\Psi_R/dz = -\Delta/v_{\parallel} = \kappa_L - \delta z^2. \quad (22)$$

Здесь $\delta > 0$, а наличие или отсутствие резонанса определяется знаком параметра $\kappa_L = [k_0 - \Omega_{cL}/(\gamma v_{\parallel})]_{z=0}$. При $\kappa_L > 0$ существуют две точки резонанса, $z_{\text{res}}^2 = \kappa_L/\delta$, при $\kappa_L = 0$ существует одна точка резонанса на экваторе ($z_{\text{res}} = 0$), при $\kappa_L < 0$ $z_{\text{res}}^2 = \kappa_L/\delta < 0$, т.е. в действительной плоскости точки резонанса отсутствуют. Если параметры волны фиксированы, то положение точек резонанса определяется параметрами частицы, и $z_{\text{res}} = 0$ соответствует минимальному резонансному значению энергии γ_{min} ($W_{R\text{min}}$) и максимальному резонансному значению экваториального питч-угла. При этом значение $W_{R\text{min}}(\alpha_{L0} = 0)$ определяется параметрами плазмы и волнового пакета; минимальная резонансная энергия уменьшается по мере приближения частоты волны к гирочастоте соответствующих ионов, а также с ростом отношения Ω_{peL}/Ω_{cL} , где Ω_{peL} — плазменная частота электронов [10, 12, 13].

С использованием аппроксимации (22) и в приближении постоянной амплитуды пакета $g(z) \approx 1$ выражение (19) записывается как

$$\begin{aligned} G &= G_{\text{parab}} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(-\frac{\delta}{3} z^3 + \kappa_L z \right) \right] dz \right|^2 = \\ &= 4 \left| \int_0^{\infty} \cos \left[\left(-\frac{\delta}{3} z^3 + \kappa_L z \right) \right] dz \right|^2 = \\ &= \frac{4\pi^2}{\delta^{2/3}} \left[\text{Ai} \left(-\frac{\kappa_L}{\delta^{1/3}} \right) \right]^2 = \frac{4\pi^2}{\delta^{2/3}} \left[\text{Ai} \left(-[\kappa_L z_{\text{res}}]^{2/3} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри аргумента x .

Знак аргумента функции Эйри в (23) противоположен знаку z_{res}^2 . Таким образом, G_{parab} имеет глобальный максимум при некотором малом $z_{\text{res}} > 0$ и при дальнейшем увеличении z_{res} осциллирует. При переходе в нерезонансную область $z_{\text{res}}^2 < 0$ фактор рассеяния G_{parab} затухает по закону, близкому к экспоненциальному. Отметим, что при использовании асимптотики функции Эйри при $x \rightarrow \infty$ ($\text{Ai}(x) = \exp(-2/3 x^{3/2})/[2\sqrt{\pi} x^{1/4}]$) соответствующее асимптотическое выражение для G_{parab} (23) переходит в выражение G_{NR} (21), где фаза Ψ_R аппроксимируется согласно (22).

3.2. Обобщение аналитических выражений на случай пакетов конечной длины

Обобщим выражение (23) для пакетов конечной длины. Аналогично [16], воспользуемся фурье-преобразованием для амплитудной функции g

$$\begin{aligned} \hat{g}(\kappa) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \exp(-i\kappa z) dz, \\ g(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\kappa) \exp(i\kappa z) d\kappa. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь предполагается, что функция $g(z)$ задана на всем пространстве z , но при $z < z_t$ и $z > z_f$ либо равна нулю, либо настолько мала, что участки $z < z_t$ и $z > z_f$ не вносят вклад в интеграл (19) при замене пределов интегрирования z_t и z_f на $-\infty$ и ∞ соответственно. Отметим, что такая замена пределов интегрирования возможна только в случае постоянной частоты пакета, когда расстройку Δ можно считать формально определенной и за пределами волнового пакета.

Ограничимся пакетами с гауссовым амплитудным профилем. Пусть максимум $g(z)$ расположен на экваторе: $g(z) = \exp[-z^2/(2l_p^2)]$. В этом случае $\hat{g}(\kappa) = l_p \sqrt{2} \exp[-2l_p^2 \kappa^2]$.

Интеграл (19) преобразовывается к виду

$$G = G_{PG} = \frac{l_p^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2l_p^2 \kappa^2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(-\frac{\delta}{3} z^3 + (\kappa_L + \kappa) z \right) \right] dz d\kappa \Bigg|^2 = \quad (25) \\ = \frac{2\pi l_p^2}{\delta^{2/3}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2l_p^2 \kappa^2) \text{Ai} \left(-\frac{\kappa_L + \kappa}{\delta^{1/3}} \right) d\kappa \right]^2.$$

При переходе к бесконечному пакету $l_p \rightarrow \infty$ экспоненциальный множитель в (25) переходит в δ -функцию с соответствующей нормировкой, и $G_{PG} \rightarrow G_{\text{parab}}$.

Уменьшение длины пакета соответствует расширению спектра волновых чисел. При взаимодействии с составляющей спектра $k_0 + \kappa$ положение точек эффективного резонанса $\tilde{z}_{\text{res}}$ будет определяться соотношением

$$\tilde{z}_{\text{res}}^2 = (\kappa_L + \kappa) / \delta. \quad (26)$$

Формулу (25) можно обобщить и на случай гауссового пакета с максимумом в некоторой точке $z = z_p$. Для определенности считаем, что $z_p \geq 0$. Также предполагается, что либо пакеты достаточно короткие, что в них можно считать $B_0 \approx B_{0p}$, либо z_p не очень велико и условие $B_0 \approx B_{0p}$ справедливо в области взаимодействия, т.е. применима формула (17).

Для соответствующей функции $g(z) = \exp[-(z - z_p)^2 / (2l_p^2)]$ фактор рассеяния можно записать как

$$G = G_{PGSh} = G_{\cos} + G_{\sin}, \\ G_{\cos} = \frac{2\pi l_p^2}{\delta^{2/3}} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2l_p^2 \kappa^2) \cos(\kappa z_p) \text{Ai} \left(-\frac{\kappa_L + \kappa}{\delta^{1/3}} \right) d\kappa \right]^2, \quad (27) \\ G_{\sin} = \frac{2\pi l_p^2}{\delta^{2/3}} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2l_p^2 \kappa^2) \sin(\kappa z_p) \text{Ai} \left(-\frac{\kappa_L + \kappa}{\delta^{1/3}} \right) d\kappa \right]^2.$$

Очевидно, что при $z_p \rightarrow 0$ $G_{PGSh} \rightarrow G_{PG}$.

Отметим, что использование аппроксимации (22) для получения выражений (23), (25), (27) соответствует трем слагаемым в разложении фазы $\Psi_R(z)$ в ряд Тейлора в выражении (19) (модифицированный метод стационарной фазы), в то вре-

мя как оценки, полученные в работе [16] обычным методом стационарной фазы (выражение (21) и его обобщение на случай конечных пакетов), предполагают ограничение ряда Тейлора для $\Psi_R(z)$ двумя слагаемыми.

Более подробно свойства выражений (25) и (27) будут проанализированы далее на конкретных примерах.

4. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для анализа свойств выражений (20), (23), (25), (27) и их точности зададим следующие параметры плазмы и волновых пакетов, определенные в работе [29] для события 2 марта 2021 года на основе данных спутников ELFİN [30], MMS [31] и станции Ловозеро [32]. Выбор таких значений параметров в соответствии с наблюдениями пульсаций Pc1 на станции Ловозеро и ЭМИЦ-волн на спутнике MMS позволил непротиворечиво объяснить наблюдения высыпаний электронов на низкоорбитальном спутнике ELFİN [29].

Мы рассматриваем дипольную модель геомагнитного поля с $L = 6.2$ и гиротропную модель электронной концентрации $N = N_L B_0 / B_{0L}$ с $N_L = 40 \text{ см}^{-3}$. Ионный состав плазмы $N_{\text{H}^+} = 0.8N$, $N_{\text{He}^+} = 0.2N$. Волновые пакеты имеют постоянную частоту $f = 0.95f_{\text{He}^+} = 0.48 \text{ Гц}$, где f_{He^+} — гирочастота ионов He^+ .

Значение максимальной амплитуды пакета B_{wp} выбрано достаточно малым ($B_{wp} = 0.05 \text{ нТл}$), чтобы избежать возможных нелинейных эффектов при численном решении полной системы (11)–(13). Для конечных пакетов амплитудная функция задается согласно разделу 3.2 как $g(z) = \exp[-(z - z_p)^2 / (2l_p^2)]$, при этом диапазон длин пакета $k_0 l_p = 3\text{--}48$, $z_p = 0\text{--}R_E$ (при определении длины пакета k_0 считается на экваторе, R_E — радиус Земли). Для четырех рассматриваемых длин пакета при $z_p = 0$ функция $g(z)$ представлена на рис. 1а; фронтами пакета мы считаем точки, в которых $g(z) = 10^{-5}$. Отметим, что, поскольку рассматривается только один пролет частицы через пакет, перемещением пакета в пространстве можно пренебречь, так как групповая скорость пакета много меньше продольных скоростей электронов.

При указанных параметрах плазмы и волнового пакета минимальная резонансная энергия электронов составляет около 1 МэВ. Для дальнейшего анализа мы ограничимся диапазоном энергий $W = 0.3\text{--}1.5 \text{ МэВ}$ и одним значением началь-

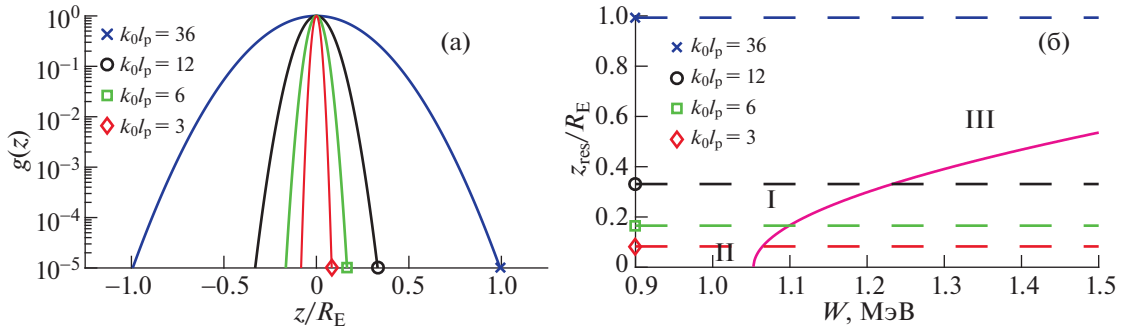


Рис. 1. Амплитудная функция рассматриваемых пакетов для четырех значений длины пакета (а). Маркерами на горизонтальной оси отмечены передние фронты пакетов z_f . Положение точки резонанса $z_{\text{res}} > 0$ в зависимости от энергии электрона при $\alpha_{L0} = 12^\circ$ (б). Горизонтальными линиями с маркером отмечены передние фронты z_f для четырех пакетов, представленных на панели (а).

ного экваториального питч-угла $\alpha_{L0} = 12^\circ$ (конусу потерь для данной L -оболочки соответствует $\alpha_L = 2.7^\circ$).

На рис. 1б для указанного значения α_L приведена зависимость положения точки резонанса (в области $z > 0$) z_{res} от энергии W . Минимальная резонансная энергия, соответствующая $z_{\text{res}} = 0$, для $\alpha_L = 12^\circ$ составляет $W_{\text{Rmin}} \approx 1.053$ МэВ.

Рассматриваемый диапазон энергий электрона условно можно разделить на три области (см. рис. 1б). Область I соответствует окрестности минимальной резонансной энергии W_{Rmin} , область II – нерезонансным энергиям $W < 1.04$ МэВ, область III – резонансным энергиям $W \geq 1.1$ МэВ. В области III для большей части рассматриваемых пакетов $z_{\text{res}} > z_f$, т.е. точка резонанса с ЭМИЦ-волной рассматриваемой частоты находится вне конкретного пакета (для симметричных относительно экватора пакетов с $z_p = 0$).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

5.1. Пакеты, симметричные относительно экватора

Для анализа свойств рассеяния электронов построим зависимости дисперсии изменения экваториального питч-угла $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle$, нормированной на B_{wp}^2 , от энергии частицы и длины пакета (при постоянном $\alpha_{L0} = 12^\circ$). Величина $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle / [\text{нТл}]^2$ вычислялась непосредственно из численных расчетов методом пробных частиц (решение системы (11)–(13) явным методом Рунге–Кутты), а

также на основе следующего соотношения, справедливого при малых питч-углах α_L

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle}{[\text{нТл}]^2} &= \frac{\langle \Delta \mu^2 \rangle}{4\mu_0(1-\mu_0)B_{\text{wp}}^2} = \\ &= \frac{1}{2(1-\mu_0)c^2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{G}{\gamma^2 - 1}. \end{aligned} \quad (28)$$

При вычислении факторов рассеяния G согласно формулам (23) и (25) параметр δ в аппроксимации (22) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta &= |\kappa_L|/z_\delta^2, \\ z_\delta^2 &= \begin{cases} z_{\text{res}}^2, & \text{если } z_{\text{res}}^2 > 0, \\ \min(z_f^2, (0.1R_E)^2), & \text{если } z_{\text{res}}^2 \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

5.1.1. Проверка точности аналитических оценок.

На рис. 2 приведены зависимости $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$ для бесконечного пакета, вычисленные с помощью прямых численных расчетов, а также согласно (28) при $G = G_{2R}$ (20), $G = G_{NR}$ (21) и $G = G_{\text{parab}}$ (23). Как видно из рисунка, основанные на методе стационарной фазы оценки (28) с $G = G_{2R}$ при $W \geq W_{\text{Rmin}}$ и $G = G_{NR}$ при $W < W_{\text{Rmin}}$, согласуются с результатом прямых численных расчетов в области III ($G = G_{2R}$) и в области II ($G = G_{NR}$), а в области I дают завышенное значение, которое уходит в бесконечность при $W \rightarrow W_{\text{Rmin}}$ (т.е. при $z_{\text{res}} \rightarrow 0$). Оценка с $G = G_{\text{parab}}$ (23), основанная на параболической аппроксимации расстройки, полностью согласуется с численными расчетами в областях I и II и частично в области III. При $W \gtrsim 1.25$ МэВ зависимость $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$ при $G = G_{\text{parab}}$ качественно согласуется с зависимостью $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$, полученной из численных расче-

тов (совпадает форма кривой и значения локальных максимумов), но имеется небольшое количественное расхождение в положении локальных экстремумов. Это расхождение объясняется достаточно большой величиной z_{res}^2 для этой области значений W и, соответственно, потерей точности параболической аппроксимации (22). Осцилляции в зависимости $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$ связаны с когерентным сложением эффектов двух резонансных зон, симметричных относительно экватора.

Для четырех длин пакета в соответствии с рис. 1 зависимости $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$ приведены на рис. 3. Как можно видеть из рисунков, выражение с $G = G_{2R}$ (20) согласуется с численными результатами в области III для длинных пакетов ($k_0 l_p \geq 24$), поскольку выражение (20), в отличие от выражения (23), позволяет учесть значение амплитуды в точке резонанса. При уменьшении длины пакета ($k_0 l_p < 24$) положение точек резонанса для частиц с энергиями из области III оказывается либо вне пакета, либо близко к его фронтам, и оценка (20) становится неприменимой. Зависимость (28), полученная с использованием $G = G_{PG}$ (25), удовлетворительно совпадает с результатами численных расчетов в области III для длинных пакетов и полностью совпадает в остальных случаях (области I и II для длинных пакетов, весь диапазон рассматриваемых энергий для пакетов с $k_0 l_p < 24$). Отметим, что для конечных пакетов в области II аналитические оценки, основанные на параболической аппроксимации (22), в целом несколько лучше согласуются с результатами численных расчетов, чем аналогичные оценки, полученные в работе [16] на основе обычного метода стационарной фазы (области I и III в [16] не рассматривались). Это связано с тем, что используемая нами аппроксимация расстройки вблизи экватора более точна.

Таким образом, выражение для фактора рассеяния G , полученное для конечных пакетов с помощью параболической аппроксимации расстройки, можно использовать для вычисления дисперсии изменения экваториального питч-угла в линейном режиме взаимодействия, а также для анализа влияния длины пакета на характеристики взаимодействия.

Следует отметить, что особенность зависимостей $G_{2R}(z)$ (20) и $G_{NR}(z)$ (21) в окрестности экватора возникает при условии постоянной частоты ω и может быть устранена при наличии дрейфа частоты $d\omega/dt$. В частности, при рассматриваемых параметрах задачи, дрейф частоты, необходимый для устранения особенности в области экватора, можно оценить как $df/dt \approx 0.005$ Гц/с (при максимальной частоте в пакете 0.48 Гц).

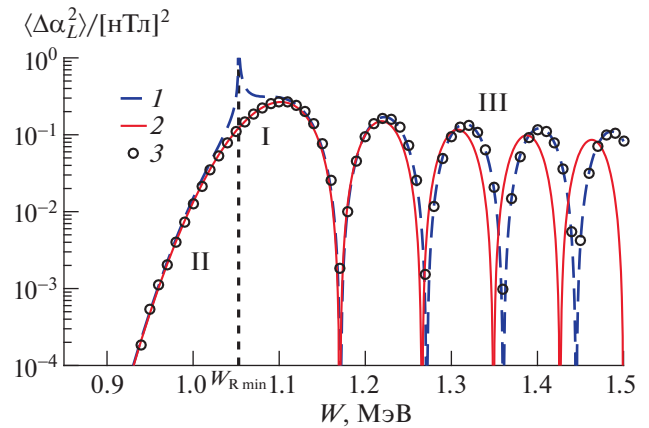


Рис. 2. Нормированная на B_{wp}^2 дисперсия изменения экваториального питч-угла при $\alpha_{L0} = 12^\circ$ для бесконечного пакета. Штриховая линия (кривая 1) соответствует формуле (28) с $G = G_{2R}$ при $W \geq W_{Rmin}$ и $G = G_{NR}$ при $W < W_{Rmin}$, сплошная линия (кривая 2) – (28) с $G = G_{parab}$, круглые маркеры (кривая 3) соответствуют численным расчетам методом пробных частиц. Вертикальная пунктирная линия соответствует минимальной резонансной энергии W_{Rmin} .

Вместе с тем, при наличии дрейфа частоты область наиболее эффективного взаимодействия сместится в точку, где $\Delta = -\Psi'_z \approx 0$ и $\Delta'_z = -\Psi''_z \approx 0$ (некоторый “виртуальный” экватор). Также важно отметить, что при наличии значимого дрейфа частоты минимальные резонансные энергии будут соответствовать областям, в которых частота пакета максимальна. Таким образом, для оценки дисперсии изменения экваториального питч-угла при малых энергиях оба метода (расширение обычного метода стационарной фазы в комплексную область/параболическая аппроксимация расстройки) потребуют соответствующих обобщений. Это обобщения возможны, но их получение и сравнительный анализ выходят за рамки данной работы.

5.1.2. Зависимость эффективности взаимодействия от длины пакета. На рис. 4а на одной панели представлены зависимости $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$ для бесконечного и 4 конечных пакетов (для определенности – полученные в результате численных расчетов). На рис. 4б представлены зависимости $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(k_0 l_p)$ для трех значений энергии, соответствующих разным областям.

Для частиц с энергиями в окрестности минимальной резонансной энергии W_{Rmin} (область I) при любой длине пакета в рассматриваемом диапазоне $k_0 l_p$ точки резонанса находятся внутри па-

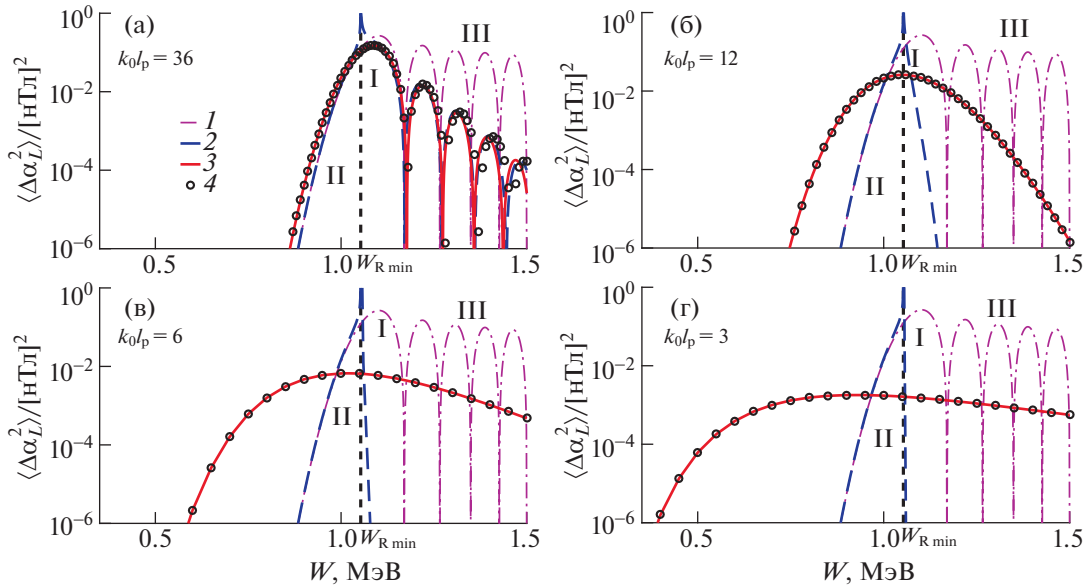


Рис. 3. Нормированная на $B_{\text{вп}}^2$ дисперсия изменения экваториального питч-угла при $\alpha_{L0} = 12^\circ$ для 4 длин пакета. Штрихпунктирная линия (кривая 1) соответствует формуле (28) с $G = G_{\text{parab}}$, штриховая линия (кривая 2) – (28) с $G = G_{2R}$ при $W \geq W_{R \min}$ и $G = G_{NR}$ при $W < W_{R \min}$, сплошная линия (кривая 3) – (28) с $G = G_{PG}$, круглые маркеры (кривая 4) соответствуют численным расчетам методом пробных частиц. Вертикальная пунктирная линия соответствует минимальной резонансной энергии $W_{R \min}$.

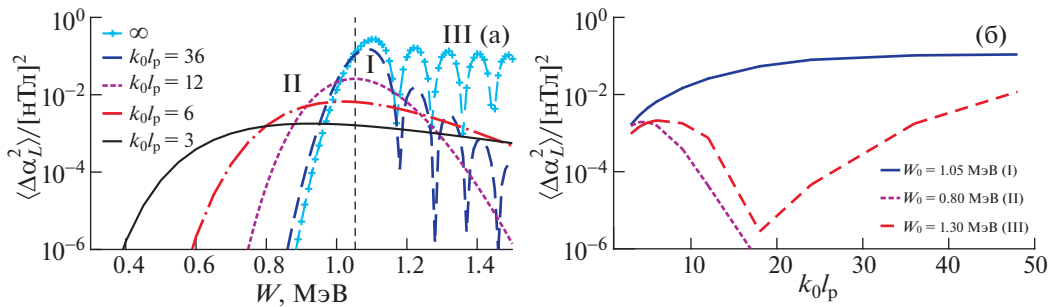


Рис. 4. Нормированная на $B_{\text{вп}}^2$ дисперсия изменения экваториального питч-угла при $\alpha_{L0} = 12^\circ$ в зависимости от энергии для бесконечного пакета и 4 значений длины конечного пакета (результаты численных расчетов) (а); зависимость $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle$ от характерной длины пакета для трех значений энергии (б).

кета, $z_{\text{res}} \approx 0$. Для длинных пакетов, т.е. узкого спектра волновых чисел κ ($\kappa \approx 0$), в G_{PG} (25) аргумент функции Эйри $x = (\kappa_L + \kappa)/\delta^{1/3} \approx 0$, т.е. область интегрирования по κ , определяемая множителем $\exp(-2l_p^2 \kappa^2)$, охватывает главный максимум $\text{Ai}(x)$. Уменьшение длины пакета, т.е. расширение спектра волновых чисел κ , приводит к тому, что увеличивается доля энергии в спектральных компонентах пакета, резонанс с которыми наступает на достаточно большом расстоянии от экватора и, следовательно, взаимодей-

ствие менее эффективно вследствие более сильной неоднородности магнитного поля. Это соответствует интегрированию по области осцилляций и спада функции $\text{Ai}(x)$ в (25), что, в свою очередь, уменьшает значение G_{PG} . Таким образом, с уменьшением длины величина G_{PG} (и, соответственно, $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle$) убывает (см. сплошную линию на рис. 4б).

Для частиц с нерезонансными энергиями ($W < 1.04$ МэВ, область II) $z_{\text{res}}^2 < 0$, и в случае длинных пакетов ($\kappa \approx 0$) область интегрирования

в (25) охватывает только область спадания $Ai(x)$. При уменьшении длины пакета спектр волновых чисел κ расширяется, и, начиная с некоторой длины, в нем появляются компоненты ($\kappa > 0$), для которых условие резонанса выполняется в точках $\tilde{z}_{\text{res}}^2 = (\kappa_L + \kappa)/\delta \geq 0$. Это соответствует такому расширению области интегрирования в (25), что она захватывает область главного максимума $Ai(x)$, т.е. значение G_{PG} увеличивается. Дальнейшее уменьшение длины пакета, как и для области I, приведет к попаданию в область интегрирования осциллирующей части $Ai(x)$ и уменьшению G_{PG} . Таким образом, зависимость $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(k_0 l_p)$ немонотонна и имеет максимум в области малых длин пакета (см. пунктирную линию на рис. 4б).

Для частиц с резонансными энергиями $W > 1.1$ МэВ (область III) влияние конечной длины пакета проявляется следующим образом. При достаточно длинных пакетах основным следствием уменьшения длины пакета является уменьшение значения амплитуды волны в точке резонанса; в то же время, при таком расширении спектра волновых чисел (т.е., при малых κ) в области интегрирования в (25) оказывается большее число осцилляций $Ai(x)$. Оба этих фактора, очевидно, приводят к уменьшению G_{PG} . При этом, начиная с некоторой длины пакета точки резонанса z_{res} оказываются вблизи фронтов пакета ($g(z) \ll 1$) или за его пределами; вместе с тем, в спектре волновых чисел появляются составляющие ($\kappa < 0$) с точками эффективного резонанса вблизи экватора, т.е. в области высокой амплитуды ($\tilde{z}_{\text{res}}^2 = (\kappa_L + \kappa)/\delta \geq 0$, $g(z) \rightarrow 1$). В выражении (25) это означает, что главный максимум $Ai(x)$ оказывается в области интегрирования, т.е. G_{PG} увеличивается. Таким образом, зависимость $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(k_0 l_p)$ имеет минимум в области промежуточных длин пакета и локальный максимум в области малых $k_0 l_p$ (см. штриховую линию на рис. 4б).

В целом, диапазон эффективного взаимодействия пакета ЭМИЦ-волн при уменьшении длины пакета сначала расширяется в область нерезонансных энергий и сокращается в области резонансных энергий (для заданных выше параметров – при $k_0 l_p \geq 12$). При дальнейшем уменьшении длины пакета ($k_0 l_p \leq 12$) максимум зависимости $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(W)$ становится более пологим, т.е. область эффективного взаимодействия расширяется в сторону как нерезонансных, так и резонансных значений энергии. Максимальное по

энергиям значение $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(k_0 l_p)$ убывает с уменьшением длины пакета.

Рисунки 3, 4 также показывают, что при коротких пакетах ($k_0 l_p \leq 12$) положение максимума зависимости $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(W)$ сдвигается в область нерезонансных энергий $W_{\text{Rmin}} < 1.04$ МэВ. Так, например, при наименьшей рассмотренной длине $k_0 l_p = 3$ максимальному $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle$ соответствует $W = 0.95$ МэВ. Здесь важно отметить, что такой сдвиг максимума для зависимости $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(W)$ (или зависимости $\langle \Delta\mu^2 \rangle(W)$) связан с наличием множителя $1/(\gamma^2 - 1)$ в выражениях (28) и (18), связывающих $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle$ и $\langle \Delta\mu^2 \rangle$ с фактором рассеяния G . Зависимость $G(W)$ (или зависимость $\langle \Delta I_{\perp}^2 \rangle(W)$) всегда имеет максимум в окрестности W_{Rmin} , но для коротких пакетов, когда этот максимум становится пологим, влияние множителя $1/(\gamma^2 - 1)$, возрастающего при убывании энергии, приводит к сдвигу максимума $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(W)$ в область нерезонансных энергий.

5.2. Пакеты, смещенные относительно экватора

Исследуем свойства взаимодействия для пакетов со смещенным положением максимума $z_p > 0$.

Результаты расчетов дисперсии изменения экваториального питч-угла $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle$ по формуле (28) с $G = G_{\text{PSGSh}}$ (27), как и в случае $z_p = 0$ ($G = G_{\text{PSG}}$), показывают хорошее согласие с результатами численных расчетов методом пробных частиц для пакетов, расположенных в области $z/R_E \leq 1$. Соответствующие рисунки не приведены для краткости.

Зависимости $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(z_p)$, рассчитанные по формулам (28), (27), приведены на рис. 5 для трех длин пакета и трех значений энергии. Как можно видеть из рисунка, для нерезонансных энергий (область II) и резонансных энергий в окрестности W_{Rmin} (область I), $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle$ убывает с ростом z_p , а для резонансных энергий (область III) $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle$ сначала растет, достигая максимума при $z_p \approx z_{\text{res}}$, а потом убывает. С уменьшением длины пакета зависимости $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(z_p)$ становятся более пологими: уменьшается максимальное значение $\langle \Delta\alpha_L^2 \rangle(z_p)$ и убывание с ростом (z_p) становится более медленным. Также для резонансных энергий с уменьшением длины пакета уменьшается различие между

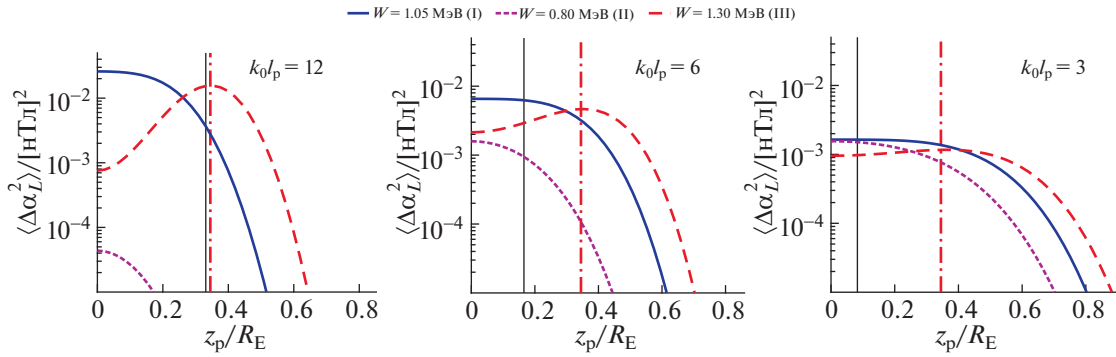


Рис. 5. Нормированная на B_{wp}^2 дисперсия изменения экваториального питч-угла при $\alpha_{L0} = 12^\circ$ в зависимости от координаты максимума амплитуды пакета z_p для трех значений длины пакета и трех значений энергии. Вертикальная штрихпунктирная линия соответствует координате точки резонанса для $W = 1.3$ МэВ, вертикальная сплошная линия – значению z_p , при котором задний фронт соответствующего пакета ($g(z) = 10^{-5}$) расположен на экваторе ($z_t = 0$).

значениями $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(z_p = z_{\text{res}})$ и $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(z_p = 0)$.

Кривые $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(z_p)$ для различных энергий с уменьшением длины сближаются; это соответствует тому, что с уменьшением длины пакета зависимость $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(W)$ становится более пологой (см. раздел 5.1.2).

Опираясь на выражение (27), подобную зависимость $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(z_p)$ можно объяснить следующим образом. Если область малых k соответствует главному максимуму или спадающей части функции Эйри (что имеет место для $W \lesssim W_{\text{Rmin}}$), то добавление осциллирующего множителя в подынтегральном выражении приведет к уменьшению значения интеграла; если же область малых k соответствует осциллирующей части функции Эйри ($W > W_{\text{Rmin}}$), то дополнительный осциллирующий множитель может как уменьшить, так и увеличить интеграл. Подробный анализ подынтегральных функций в (27) показывает, что при $z_p \approx z_{\text{res}}$ либо $\cos(kz_p)$, либо $\sin(kz_p)$ оказывается в фазе (противофазе) с несколькими осцилляциями функции Эйри $\text{Ai}[-(\kappa_L + \kappa)/\delta^{1/3}]$ в окрестности $\kappa \approx 0$.

Характер зависимостей $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(z_p)$ также легко объяснить из общих соображений: для частицы с фиксированными параметрами взаимодействие с ЭМИЦ-волной будет наиболее эффективным в области резонанса $\Delta = 0$ или, если условие резонанса не выполняется, в области минимальных значений $\Delta > 0$. Для энергий $W \lesssim W_{\text{Rmin}}$ эта область соответствует окрестности экватора, для $W > W_{\text{Rmin}}$ удаляется от экватора с увеличением энергии (см. рис. 1б).

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОоды

В работе рассмотрено взаимодействие релятивистских электронов в магнитосфере Земли с квазимонохроматическими пакетами ЭМИЦ-волн конечной длины и малой амплитуды, расположенными вблизи геомагнитного экватора. Показано, что аппроксимация частотной отстройки от резонанса $\Delta(z) = -d\Psi/dt$ параболической зависимостью и использование фурье-спектра амплитудной функции волнового пакета позволяет получить аналитические выражения, с высокой точностью описывающие это взаимодействие для волновых пакетов с центром, расположенным на расстояниях до $1 R_E$ от геомагнитного экватора.

Получены и проанализированы зависимости дисперсии изменения экваториального питч-угла, определяющей коэффициенты питч-угловой диффузии, от энергии электрона и длины пакета. Показано, что с уменьшением длины пакета для электронов с нерезонансными энергиями $W < W_{\text{Rmin}}$ дисперсия $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle$ возрастает, для электронов с энергиями в окрестности минимальной резонансной энергии $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle$ убывает, а для резонансных энергий $W > W_{\text{Rmin}}$ зависимость $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(k_0 l_p)$ имеет минимум в рассматриваемом диапазоне длин пакетов. С удалением центра пакета от экватора, дисперсия $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle$ убывает для электронов с энергиями $W \lesssim W_{\text{Rmin}}$, для резонансных энергий зависимость $\langle \Delta \alpha_L^2 \rangle(z_p)$ имеет максимум в точке $z_p \approx z_{\text{res}}$.

Для рассмотренных значений параметров плазмы и частоты волнового пакета количественно оценить расширение диапазона энергий, при которых возможно эффективное взаимодей-

ствие, можно следующим образом. Для бесконечно длинного пакета дисперсия изменения pitch-угла убывает на порядок при уменьшении энергии от $W_{Rmin} \approx 1.05$ МэВ до 1 МэВ; для гауссового пакета с характерной длиной $k_0 l_p = 3$ дисперсия уменьшается на порядок при уменьшении энергии от $W_{Rmin} \approx 1.05$ до 0.55 МэВ. Таким образом, уширение пространственного спектра волнового пакета ЭМИЦ-волн позволяет объяснить pitch-угловую диффузию электронов с энергиями примерно вдвое меньшими, чем минимальная энергия резонансного взаимодействия с такими волнами.

Предложенные в работе формулы и проведенные расчеты важны для количественно обоснованного изучения вопроса о потоках частиц в конус потерь и соответственно времени опустошения силовой трубки. В случае достаточно длинных волновых пакетов, когда взаимодействие возможно только для частиц с энергией выше минимальной резонансной энергии, расчеты показывают достижимость предела сильной pitch-угловой диффузии для характерных значений амплитуды волн и параметров плазмы, соответствующих наблюдаемым [29, 33]. Вычисление потоков релятивистских электронов, рассеянных в конус потерь в результате взаимодействия с короткими пакетами ЭМИЦ-волн, вместе с анализом возможной роли нелинейных эффектов в этом случае, предполагается в дальнейшем.

Работа В.С. Грач (вывод аналитических выражений, численные расчеты, сравнение результатов аналитических и численных расчетов) выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-72-10111. Работа А.Г. Демехова по постановке задачи и анализу результатов расчетов поддержана грантом РФФИ 22-62-00048.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kennel C.F., Petschek H.E. // J. Geophys. Res. 1966. Т. 71. С. 1. <https://doi.org/10.1029/JZ071i001p00001>
2. Tverskoy B.A. // Rev. Geophys. Space Phys. 1969. V. 7. P. 219. <https://doi.org/10.1029/RG007i001p00219>
3. Lyons L.R., Thorne R.M. // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. P. 2142. <https://doi.org/10.1029/JA078i013p02142>
4. Беспалов П.А., Трахтенгерц В.Ю. // Вопросы теории плазмы. Т. 10 / Ред. М.А. Леонтович. М.: Энергоатомиздат, 1980. С. 88.
5. Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J. // J. Atmospheric Solar-Terrestrial Phys. 2000. Т. 62. С. 1719. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00122-X](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00122-X)
6. Li W., Hudson M.K. // J. Geophys. Res. (Space Phys.). 2019. Т. 124. С. 8319. <https://doi.org/10.1029/2018JA025940>
7. Thorne R.M., Kennel C.F. // J. Geophys. Res. 1971. V. 76. P. 4446. <https://doi.org/10.1029/JA076i019p04446>
8. Millan R.M., Thorne R. // J. Atmospheric Solar-Terrestrial Phys. 2007. V. 69. P. 362. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2006.06.019>
9. Morley S.K., Friedel R.H.W., Cayton T.E., Noveroske E. // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. <https://doi.org/10.1029/2010GL042772>
10. Engebretson M.J., Posch J.L., Wygant J.R., Kletzing C.A., Lessard M.R., Huang C.-L., Spence H., Smith C.W., Singer H.J., Omura Y., Horne R.B., Reeves G.D., Baker D.N., Gkioulidou M., Oksavik K., Mann I.R., Raita T., Shiokawa K. // J. Geophys. Res. (Space Phys.). 2015. V. 120. P. 5465. <https://doi.org/10.1002/2015JA021227>
11. Summers D., Thorne R.M. // J. Geophys. Res. (Space Phys.). 2003. V. 108. P. 1143. <https://doi.org/10.1029/2002JA009489>
12. Ukhorskiy A.Y., Shpirts Y.Y., Anderson B.J., Takahashi K., Thorne R.M. // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. P. L09101. <https://doi.org/10.1029/2010GL042906>
13. Ni B., Cao X., Zou Z., Zhou Ch., Gu X., Bortnik J., Zhang J., Fu S., Zhao Z., Shi R., Xie L. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2015. V. 120. P. 7357. <https://doi.org/10.1002/2015JA021466>
14. Hendry A.T., Rodger C.J., Clilverd M.A. // Geophys. Res. Lett. 2017. V. 44. P. 1210. <https://doi.org/10.1002/2016GL071807>
15. Capannolo L., Li W., Ma Q., Chen L., Shen X., Spence H., Sample J., Johnson A., Shumko M., Klumppar D.M., Redmon R. // Geophys. Res. Lett. 2019. V. 46. P. 12711. <https://doi.org/10.1029/2019GL084202>
16. An X., Artemyev A., Angelopoulos V., Zhang X., Mourenas D., Bortnik J. // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 129. P. 135101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.135101>
17. Chen L., Thorne R.M., Bortnik J., Zhang X.J. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2016. V. 121. P. 9913. <https://doi.org/10.1002/2016JA022813>
18. Kangas J., Guglielmi A., Pokhotelov O. // Space Sci. Rev. 1998. V. 83. P. 435.
19. Demekhov A. // J. Atmospheric Solar-Terrestrial Phys. 2007. V. 69. P. 1609. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2007.01.014>
20. Engebretson M.J., Keiling A., Fornacon K.H., Cattell C.A., Johnson J.R., Posch J.L., Quick S.R., Glassmeier K.-H., Parks G.K., Reme H. // Planet. Space Sci. 2007. V. 55. P. 829. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2006.03.015>
21. Engebretson M.J., Posch J.L., Westerman A.M., Otto N.J., Slavin J.A., Le G., Strangeway R.J., Lessard M.R. // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2008. V. 113. P. A07206. <https://doi.org/10.1029/2008JA013145>
22. Pickett J.S., Grison B., Omura Y., Engebretson M.J., Dandouras I., Masson A., Adrian M.L., Santolik O., Décréau P.M.E., Cornilleau-Wehrlin N., Constantinescu D. // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. P. L09104. <https://doi.org/10.1029/2010GL042648>

23. Шкляр Д.Р. // Плазменная гелиогеофизика. Т. II / Ред. Л.М. Зеленый, И.С. Веселовский. М.: Физматлит, 2008. С. 391.
24. Albert J.M., Tao X., Bortnik J. // Geophys. Monograph Series. V. 199. Dynamics of the Earth's Radiation Belts and Inner Magnetosphere / Eds. D. Summers, I.R. Mann, D.N. Baker, M. Schulz. Washington, D.C.: American Geophysical Union, 2012. P. 255.
<https://doi.org/10.1029/2012gm001324>.
25. Albert J.M., Bortnik J. // Geophys. Res. Lett. 2009. V. 36. P. L12110.
<https://doi.org/10.1029/2009GL038904>
26. Грач В.С., Демехов А.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60. С. 1052.
27. Hobara Y., Trakhtengerts V.Y., Demekhov A.G., Hayakawa M. // J. Geophys. Res. Space Phys. 1998. V. 103. P. 20449.
<https://doi.org/10.1029/98JA01746>
28. Pasmanik D.L., Demekhov A.G., Nunn D., Trakhtengerts V.Y., Rycroft M.J. // J. Geophys. Res. Space Phys. 2002. V. 107. P. 1162.
<https://doi.org/10.1029/2001JA000256>
29. Grach V.S., Artemyev A.V., Demekhov A.G., Xiao-Jia Z., Bortnik J., Angelopoulos V., Nakamura R., Tsai E., Wilkins C., Owen R. // Geophys. Res. Lett. 2022. V. 49. P. e99994.
<https://doi.org/10.1029/2022GL099994>
30. Angelopoulos V., Tsai E., Bingley L., Shaffer C., Turner D.L., Runov A., Li W., Liu J., Artemyev A.V., Zhang X.-J. et al. // Space Sci. Rev. 2020. V. 216. P. 103.
<https://doi.org/10.1007/s11214-020-00721-7>
31. Burch J.L., Moore T.E., Torbert R.B., Giles B.L. // Space Sci. Rev. 2016. V. 199. P. 5.
<https://doi.org/10.1007/s11214-015-0164-9>
32. Пильгаев С.В., Ларченко А.В., Федоренко Ю.В., Филатов М.В., Никитенко А.С. // Приборы и техника эксперимента. 2021. Т. 64. С. 115.
<https://doi.org/10.31857/S0032816221040248>
33. Grach V.S., Demekhov A.G., Larchenko A.V. // Earth, Planets Space. 2021. V. 73. P. 129.
<https://doi.org/10.1186/s40623-021-01453-w>