

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ТЕРМОЯДЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

© 2023 г. Е. Д. Господчиков^{а,*}, П. А. Чувакин^а, А. Г. Шалашов^а

^а Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: egos@ipfran.ru

Поступила в редакцию 01.07.2023 г.

После доработки 21.07.2023 г.

Принята к публикации 22.07.2023 г.

Рассмотрен новый подход к решению задачи о прохождении необыкновенной волны через область электронного циклотронного резонанса в неоднородной плазме в рамках полной системы уравнений Максвелла с учетом эффектов пространственной дисперсии и резонансной диссипации. Для модельной одномерной геометрии вычислены распределения полей в окрестности циклотронного резонанса на второй гармонике при нормальном падении необыкновенной волны, найдены коэффициенты отражения, прохождения и поглощения в зависимости от параметров резонансной области. В результате удалось описать тонкий эффект отражения электромагнитного излучения от области циклотронного резонанса в прозрачной плазме; проведено сравнение с наблюдениями этого эффекта в экспериментах по СВЧ-нагреву плазмы на стеллараторе Л-2М.

Ключевые слова: высокотемпературная плазма, электронно-циклотронный резонанс, вторая гармоника, полноволновое моделирование, квазиэлектростатические волны

DOI: 10.31857/S0367292123600887, **EDN:** ENMULR

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория взаимодействия электромагнитного излучения с неоднородной магнитоактивной плазмой в условиях циклотронного резонанса применительно к задачам нагрева и диагностики плазмы была одной из областей физики плазмы, в развитие которой Александр Владимирович Тимофеев внес значительный вклад. Результаты усилий А.В. Тимофеева в этом направлении наиболее полно сформулированы в его монографии [1] — эта книга, впервые изданная в 2000 г., остается актуальной и востребованной и в настоящее время. Одной из важных составляющих теории являются модельные задачи, позволяющие получить ясное и компактное аналитическое или численное решение. Многие из таких задач для волн, распространяющихся в окрестности резонансов плазмы, были сформулированы и успешно решены Александром Владимировичем и его учениками. В настоящей работе мы продолжим эту линию. Рассматривается известная модельная задача об отражении необыкновенной волны, падающей на область электронного циклотронного резонанса (ЭЦР) на второй гармонике [2–5]. Мы

обсуждаем новый подход к решению этой задачи, имеющей большое практическое значение для интерпретации экспериментов по СВЧ-нагреву высокотемпературной плазмы в токамаках и стеллараторах. А.В. Тимофеев был одним из первых, кто указал на возникающую в задачах такого рода тесную связь между “быстрыми” электромагнитными волнами и квазиэлектростатическими колебаниями плазмы в окрестности циклотронной частоты и ее гармоник [6], которые в горячей плазме приобретают свойства “медленных” волн, известных как электронные или ионные бернштейновские волны [7]. Именно более аккуратный, чем это было сделано предшественниками, учет линейного взаимодействия электромагнитной и бернштейновской волн позволил нам продвинуться в решении нашей частной задачи.

Распространение и резонансное поглощение микроволнового излучения в горячей плазме в больших магнитных ловушках давно и успешно моделируется в рамках геометрической (лучевой) оптики [8–11] или с использованием более сложных асимптотических методов [12–15], основан-

ных на той или иной формулировке коротковолнового приближения для уравнений Максвелла в плавнонеоднородной на масштабе длины волны плазме (приближения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна, ВКБ). Общей особенностью таких методов является то, что они описывают волновой пучок, распространяющийся в определенном направлении (например, вдоль луча вплоть до области поглощения). Отражение волн при этом может проявляться только в результате рефракции, т.е. искривления трассы пучка без смены направления распространения вдоль трассы. Так происходит, например, отражение при приближении в области закритической (непрозрачной) плазмы. Между тем, исходные уравнения Максвелла допускают второй тип отраженных волн, которые распространяются навстречу исходному волновому пучку. В плавнонеоднородной среде можно считать, что такие волны распространяются в точности вдоль трассы исходного волнового пучка, но в обратную сторону [16]. Процесс возбуждения таких встречных волн, который мы в дальнейшем для краткости будем называть “отражением”, и является предметом исследования настоящей работы.

Заметим, что в нашей терминологии отражение возможно и в прозрачной среде, если в ней есть область нарушения ВКБ-приближения. В плавнонеоднородной плазме вдали от области резонансного поглощения прямые и встречные волны распространяются независимо, при этом для встречных волн нет источника, поэтому ими пренебрегают. Однако в области резонанса характерный масштаб неоднородности среды, определяемый шириной циклотронного резонанса, может оказаться сравнимым и даже меньшим вакуумной длины волны. Более того, мнимая часть волнового числа при этом оказывается порядка действительной, поэтому в геометрическом описании волна полностью поглощается на расстоянии меньшем длины волны. Все это приводит к нарушению ВКБ-приближения и, с теоретической точки зрения, может приводить к появлению заметного отражения от области циклотронного резонанса в прозрачной (с плотностью ниже критической), но поглощающей плазме.

Мощность излучения, отраженного от области ЭЦР в случае нагрева плазмы необыкновенной волной на второй циклотронной гармонике, была измерена в экспериментах на стеллараторе Л-2М [17]. Она оказалась более чем на порядок больше, чем предсказывала элементарная теория [2], построенная по методу возмущений (следующий порядок в ВКБ-приближении). Важно отметить, что в отличие от некоторых других экспериментов [18–20], в данном случае возможная нелинейная природа отраженного СВЧ-сигнала не согласуется с результатами измерений, в первую

очередь, из-за отсутствия зависимости коэффициента отражения от вводимой мощности. Сложность интерпретации указанных экспериментов связана с несколькими факторами:

1) для описания взаимодействия прямого и встречного излучения требуется выход за пределы ВКБ-приближения, то есть использование полной системы уравнений Максвелла, возможно упрощенной только за счет модели неоднородности среды;

2) в окрестности циклотронного резонанса необходим одновременный учет пространственной дисперсии и пространственной неоднородности [21], в этой области происходит взаимодействие не только встречных электромагнитных волн между собой, но и взаимодействие этих волн коротковолновыми квазиэлектростатическими электронными бернштейновскими волнами [4, 5];

3) поскольку часть волн является сильно затухающими или нераспространяющимися, задача слабо обусловлена, поэтому необходима корректная и очень точная постановка граничных условий вне области резонанса (в области ВКБ) [5, 22].

Факторы 1) и 2) в полной мере учитывались в независимых работах [5, 17], в обоих была предложена теория отражения необыкновенной волны на второй циклотронной гармонике в случае строго поперечного распространения. При этом в [5] были явно отмечены проблемы, связанные потерей точности решения из-за “скинирования” бернштейновских волн, т.е. с фактором 3). В работе [17] проблемы, связанные с неточными граничными условиями, не обсуждались, но они есть. В частности, ответ, основанный на модели [17], сильно зависит от того, в каком конкретном месте в ВКБ-области ставятся граничные условия — фактически, в задаче появляется дополнительный свободный параметр нефизической природы. В настоящей работе мы попробовали решить проблему граничных условий с помощью формального подхода, который мы назвали “импедансным методом” [22, 23]. Это вариант более общего метода *invariant embedding* [24, 25], адаптированный для поиска решений уравнений Максвелла в анизотропных гиротропных средах с пространственной дисперсией. При этом физическая модель (уравнения Максвелла и материальные соотношения) в значительной степени повторяет ранее рассмотренную в [5, 17], изменился лишь подход к решению и к формулировке граничных условий. Использование импедансного метода позволило, в частности, обойти описанные в [5] проблемы с потерей точности решения из-за наличия бернштейновских волн.

В результате, для модельной среды были численно найдены распределения полей в окрестности циклотронного резонанса на второй гармони-

ке при падении необыкновенной волны на область резонанса перпендикулярно внешнему магнитному полю. Найдены зависимости коэффициентов отражения, прохождения, линейной трансформации и поглощения падающей необыкновенной волны от параметров резонансной области. Проведено сравнение с экспериментом на Л-2М.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТИ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА НА ВТОРОЙ ГАРМОНИКЕ

Как мы уже писали выше, в целом для моделирования распространения микроволнового излучения в плавнонеоднородной магнитоактивной плазме приближение геометрической оптики является адекватным. Область неприменимости этого приближения сосредоточена в окрестности области циклотронного резонанса. Характерный размер этой области L_{res} много меньше характерных масштабов неоднородности концентрации плазмы L_N , магнитного поля L_B и температуры электронов L_T . Так, для строго поперечного распространения в токаке с большим радиусом R и малым радиусом a выполняется следующая иерархия масштабов:

$$L_{res} \approx R/\mu = L_N \approx L_T \approx a < L_B \approx R, \quad (1)$$

где $\mu = mc^2/T_e$ — отношение энергии покоя к температуре электронов, мы будем рассматривать слабoreлятивистский случай $\mu \gg 1$. Эти неравенства позволяют: во-первых, ограничиться плоскостной моделью; во-вторых, считать концентрацию плазмы и температуру электронов в области взаимодействия однородными; в-третьих, считать, что магнитное поле меняется по линейному закону и близко к резонансному. Кроме того, будем считать, что направление распространения падающей на область резонанса волны (координата x) перпендикулярно внешнему магнитному полю и совпадает с направлением градиента его модуля. Сделав этот набор предположений и воспользовавшись явным выражением для тензора диэлектрической проницаемости теплой магнитоактивной плазмы в окрестности циклотронного резонанса на второй гармонике, приведенном в [21], мы получаем следующую замкнутую систему уравнений Максвелла для компонент электромагнитного поля E_x , E_y и H_z

$$\frac{dE_y}{dx} = ik_0 H_z, \quad \frac{dH_z}{dx} = ik_0 D_y, \quad D_x = 0, \quad (2)$$

где

$$D_x = \varepsilon_{\perp} E_x + ig E_y + \delta \hat{\varepsilon} [E_x - iE_y],$$

$$D_y = \varepsilon_{\perp} E_y - ig E_x + i\delta \hat{\varepsilon} [E_x - iE_y],$$

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad g = \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad (3)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \omega_c(x) = \frac{eB(x)}{mc}, \quad k_0 = \omega/c.$$

Поправка к диэлектрическому отклику, связанная с пространственной дисперсией, выражается через дифференциальный оператор

$$\delta \hat{\varepsilon}[\dots] = \frac{1}{k_0^2} \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{d}{dx} \dots \right), \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} F_{7/2}(\mu(1 - 2\omega_c/\omega)),$$

где $F_{7/2}$ — функция Днестровского [26]. Уравнения (2)–(4) описывают распространение, циклотронное поглощение и линейное взаимодействие необыкновенной и бернштейновской волн. Уравнения для остальных компонент полей, описывающие обыкновенную волну, в этой геометрии отщепляются.

Приведенная выше система трех уравнений, содержащая вторые производные от полей, может быть переписана в форме системы из четырех линейных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dx} \Psi = ik_0 \hat{M} \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} E_- \\ E_+ \\ \Phi \\ H_z \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/f & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 2 \\ -\varepsilon_-/2 & \varepsilon_+/2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_+ & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $E_{\pm} = E_y \mp iE_x$ — комплексные амплитуды волн, вращающихся в ионную и электронную сторону соответственно,

$$\Phi = \frac{if}{k_0} \frac{dE_-}{dx}, \quad \varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}. \quad (6)$$

Формально этот результат отвечает тому, что в области резонанса происходит взаимодействие двух типов волн (необыкновенной и бернштейновской), распространяющихся в двух возможных направлениях (вдоль и против оси x).

В однородной среде система (5) имеет набор из четырех частных решений, отвечающих нормальным плоским волнам

$$\Psi_{X,B}^{\pm} = e_{X,B}^{\pm} \exp(\pm i n_{X,B} k_0 x). \quad (7)$$

Здесь $n_{X,B}$ — показатели преломления необыкновенной (X) и бернштейновской (B) волн, которые находятся как собственные значения матрицы $\hat{M}$

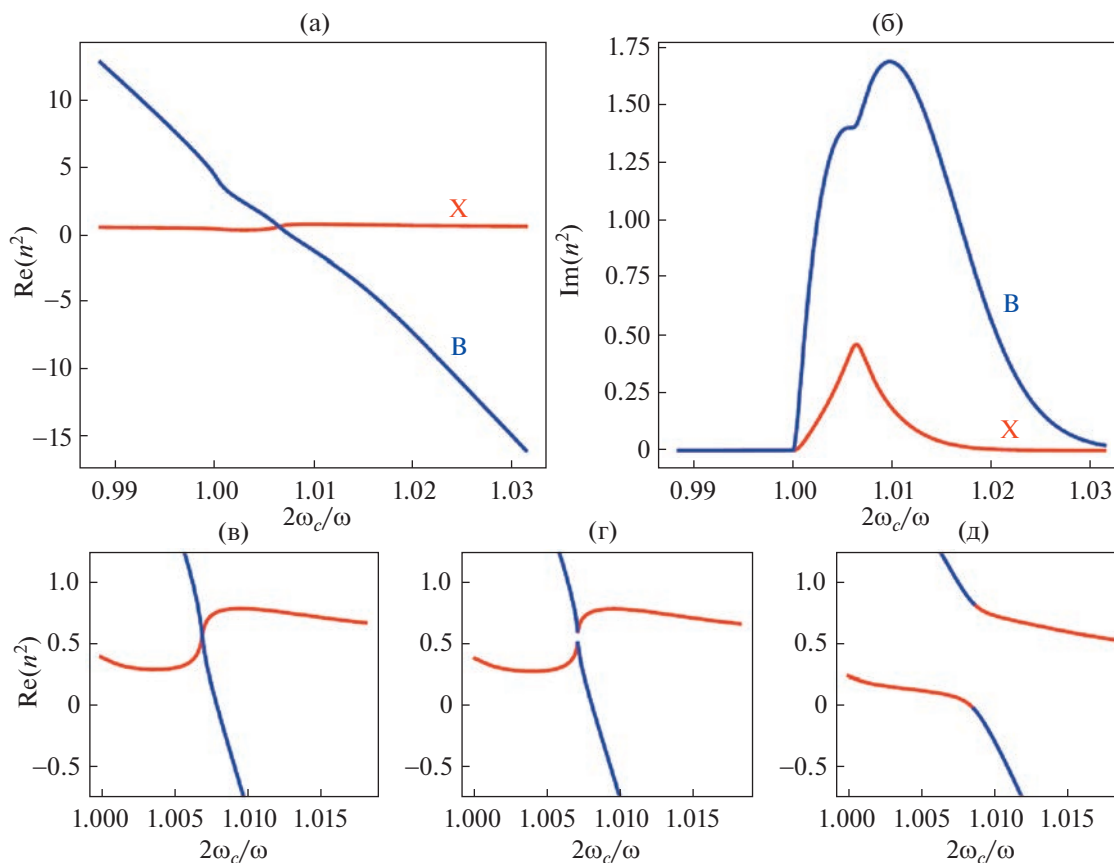


Рис. 1. Зависимость действительной (а) и мнимой (б) частей квадрата показателя преломления, определяемого дисперсионным соотношением (8), от ω_c/ω для $\omega_p^2/\omega^2 = 0.25$. Зависимость действительной части квадрата показателя преломления внутри области резонанса (в)–(д) при $\omega_p^2/\omega^2 = 0.281$ (в), $\omega_p^2/\omega^2 = 0.287$ (г) и $\omega_p^2/\omega^2 = 0.36$ (д). Красный цвет соответствует необыкновенным волнам (X), синий цвет – бернштейновским волнам (B). Для всех графиков $T_e = 1$ кэВ.

из биквадратного характеристического уравнения

$$n^4 - \left(\frac{\epsilon_+ + \epsilon_-}{2f} + 2\epsilon_+ \right) n^2 + \frac{\epsilon_+ \epsilon_-}{f} = 0; \quad (8)$$

$\mathbf{e}_{X,B}^\pm$ – собственные вектора матрицы $\hat{M}$, играющие в такой постановке роль поляризаций электромагнитного поля в нормальных волнах; знаки “ $\pm$ ” отвечают двум направлениям распространения.

На рис. 1 изображена зависимость действительной и мнимой частей квадрата показателей преломления от отношения “холодной” гирочастоты электронов к частоте волны (это отношение играет роль пространственной координаты). Из рисунка видно, что за областью резонанса $n_B^2 < 0$, т.е. бернштейновская волна становится нераспространяющейся. На графиках рис. 1с–е та же зависимость изображена более подробно

для области резонанса при нескольких последовательно возрастающих значениях концентрации плазмы. Видно, что в этой области возможна взаимная трансформация электромагнитных и электростатических волн через перезамыкание дисперсионных кривых [3, 4]. Следуя вдоль одной дисперсионной кривой, с одной стороны вдали от резонанса мы имеем волну необыкновенной поляризации, а с другой стороны – бернштейновскую волну. Естественно, что в самой области перезамыкания дисперсионных кривых говорить отдельно о необыкновенной и бернштейновских волнах нельзя, нормальные волны в этой области представляют собой комбинацию связанных бернштейновской и необыкновенной волн.

Для того, чтобы решить задачу отражения падающей необыкновенной волны от области резонанса, мы должны дополнить систему (5) граничными условиями. Их физическая формулировка следующая: на область резонанса со стороны слабого магнитного поля ($2\omega_c < \omega$) падает не-

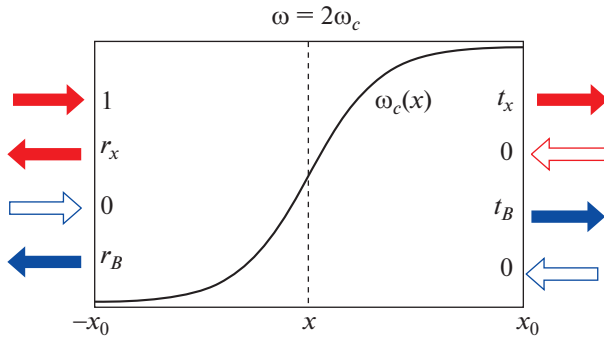


Рис. 2. Граничные условия до $(-x_0)$ и после $(+x_0)$ области взаимодействия $(\omega = 2\omega_c)$.

обыкновенная волна заданной (единичной) амплитуды, а после области резонанса со стороны сильного магнитного поля $2\omega_c > \omega$ могут существовать только прошедшие (отвечающие знаку “+” в формуле (7)) необыкновенная и бернштейновская волна. Это схематично отражено на рис. 2. Отметим, что прошедшая бернштейновская волна экспоненциально затухает в области $2\omega_c > \omega$. Для того, чтобы математически поставить задачу будем считать, что среда является неоднородной только в интервале $(-x_0, +x_0)$. Вне этой области является однородной, поэтому поле здесь представляет собой комбинацию решений (4). Тогда наши физические граничные условия формулируются следующим образом. Искомое векторное поле Ψ в точке $x = -x_0$ равно

$$\Psi(-x_0) = \mathbf{e}_x^+(-x_0) + r_x \mathbf{e}_x^-(-x_0) + r_B \mathbf{e}_B^-(-x_0), \quad (9)$$

а в точке $+x_0$ равно

$$\Psi(+x_0) = t_x \mathbf{e}_x^+(+x_0) + t_B \mathbf{e}_B^+(+x_0). \quad (10)$$

Здесь $r_{x,B}$ и $t_{x,B}$ есть неизвестные комплексные амплитуды отраженных от слоя и прошедших через слой необыкновенных и бернштейновских волн соответственно. Аргументы $\pm x_0$ у векторов поляризации отвечают тому, что они должны вычисляться на соответствующей границе области неоднородности. С формально-математической точки зрения граничные условия (9), (10) заключаются в нулевых коэффициентах перед $\mathbf{e}_B^+(-x_0)$, $\mathbf{e}_x^+(-x_0)$, $\mathbf{e}_B^-(+x_0)$ и единичном коэффициенте перед $\mathbf{e}_x^+(-x_0)$. В такой формулировке условия не содержат неизвестных величин и их ровно столько, сколько нужно для однозначного решения уравнений (5).

Хотя введенные комплексные амплитуды полностью характеризуют отражение от слоя, для интерпретации эксперимента удобнее использовать энергетические коэффициенты отражения, про-

хождения и поглощения. Коэффициент отражения можно определить как отношение потоков энергии отраженных волн (в обоих модах) к потоку энергии в падающей волне. Чтобы ввести энергетические коэффициенты, запишем закон изменения плотности потока энергии с учетом резонансной диссипации и вклада пространственной дисперсии в плотность потока энергии [27]

$$\frac{dP_x}{dx} = -Q. \quad (11)$$

Здесь

$$P_x = \frac{\omega}{16\pi} \text{Re}(\Psi_1 \Psi_4^* + \Psi_2 \Psi_4^* - 2\Psi_1 \Psi_3^*) \quad (12)$$

— плотность потока энергии, выраженная через компоненты вектора Ψ и состоящая из соответствующей компоненты вектора Пойтинга и вклада пространственной дисперсии, пропорционального производной от фазы поля;

$$Q = -\frac{1}{8\pi} \frac{\text{Im} f}{|f|^2} |\Psi_3|^2 \quad (13)$$

— плотность поглощаемой в условиях циклотронного резонанса СВЧ-мощности. Вдали от резонанса $\text{Im} f \rightarrow 0$ и мы можем пренебречь поглощением. При этом в ВКБ области до резонанса, где показатели преломления действительные, плотность потока энергии может быть выражена как сумма парциальных плотностей потоков энергии в отдельных волнах. Если мы введем плотности потока энергии, отвечающие необыкновенной и бернштейновской волнам с единичной амплитудой как

$$N_{x,B} = P_x|_{\Psi=\mathbf{e}_{x,B}^+}, \quad (14)$$

то с учетом (8) для плотности потока энергии границы до слоя получаем

$$P_x(-x_0) = N_x(-x_0)(1 - |r_x|^2) - N_B(-x_0)|r_B|^2. \quad (15)$$

За областью резонанса, где показатель преломления для бернштейновской волны чисто мнимый, формально расщепить поток энергии на парциальные потоки для бернштейновской волны нельзя. Однако можно заметить, что поскольку за областью резонанса, там, где среда становится однородной, присутствует только одна (экспоненциально спадающая при $x \rightarrow +\infty$) бернштейновская нормальная волна, то бернштейновские волны в этой области вообще не переносят энергии. При этом поток энергии может быть записан следующим образом:

$$P_x(+x_0) = N_x(+x_0) |t_x|^2. \quad (16)$$

Как результат, мы можем ввести парциальные (для каждой моды по отдельности) коэффициен-

ты отражения и прохождения по интенсивности следующим образом:

$$R_X = |r_X|^2, \quad T_X = \frac{N_X(+x_0)}{N_X(-x_0)} |t_X|^2, \quad (17)$$

$$R_B = \frac{N_B(-x_0)}{N_X(-x_0)} |r_B|^2, \quad T_B = 0.$$

Проинтегрировав уравнение (11), мы находим коэффициент поглощения, выражающий долю поглощенной мощности

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} Q dx = 1 - R_X - R_B - T_X. \quad (18)$$

Как уже отмечалось, условия (9), (10) являются истинно граничными условиями для задачи (5). Приведенные выше рассуждения о том, что прошедшая бернштейновская волна экспоненциально затухает за областью резонанса и не дает вклада в баланс энергии, может породить соблазн положить равной нулю ее амплитуду на правой границе. В этом случае решение уравнений (5) существенно упрощается, поскольку вместо граничной задачи можно решать эволюционную задачу Коши. Действительно, в (10) можно положить $t_B = 0$ перед $e_B^+(+x_0)$, а t_X перед $e_X^+(+x_0)$ равным любому числу, отсчитать задачу назад в точку $x = -x_0$, разложить $\Psi(-x_0)$ по модам (7) и нормировать ответ на коэффициент перед $e_X^+(-x_0)$. В силу линейности задачи получающиеся таким образом коэффициенты перед $e_X^+(-x_0)$, $e_B^+(-x_0)$ и $e_X^+(-x_0)$ в точности определяют неизвестные коэффициенты отражения и прохождения в (9) и (10), попутно будет определено поле $\Psi(x)$ во всем расчетном интервале. Именно такой подход был реализован в работе [17], однако он порождает ошибку.

Дело в том, что найденное эволюционным методом решение $\Psi(-x_0)$ неизбежно содержит проекцию на $e_B^+(-x_0)$, обозначим ее a_B . Физически это означает, что для того, чтобы получить нулевую бернштейновскую волну за областью взаимодействия нам необходимо, чтобы в падающем поле помимо необыкновенной волны присутствовала бернштейновская волна с некоторой строго определенной комплексной амплитудой a_B . Эта амплитуда будет обратно пропорциональна амплитудному коэффициенту прохождения бернштейновской волны в бернштейновскую, которая, в свою очередь, экспоненциально мала из-за “скинирования” бернштейновской волны вдоль оси x . Поэтому величина a_B , определяемая путем интегрирования в обратном направлении от $x = +x_0$ до $-x_0$, может быть сколь угодно большой. Ниже мы представим альтернативный способ решения

этой задачи, который гарантирует нулевую амплитуду бернштейновской волны перед областью взаимодействия ($a_B = 0$) и свободен от интегрирования вдоль экспоненциально растущего решения.

3. ИМПЕДАНСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Более корректным способом сведения граничной задачи к набору задач Коши является импедансный метод решения волновых уравнений. Сам метод в общем виде изложен в [22, 23], однако нам кажется не лишним повторить основные идеи метода применительно к нашей задаче.

Будем искать решение системы (5) в виде разложения по нормальным волнам, отвечающим правой границе $x = +x_0$:

$$\Psi(x) = \psi_X^+(x) e_X^+(x_0) + \psi_X^-(x) e_X^-(x_0) + \psi_B^+(x) e_B^+(x_0) + \psi_B^-(x) e_B^-(x_0). \quad (19)$$

Четыре коэффициента $\psi_{X,B}^\pm$ этого разложения есть новые неизвестные функции, которые мы используем вместо четырех компонент вектора Ψ для определения волнового поля. На эти коэффициенты мы получим систему линейных уравнений, эквивалентную исходным уравнениям (2)

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_X^+ \\ \psi_B^+ \\ \psi_X^- \\ \psi_B^- \end{pmatrix} = ik_0 \hat{M}' \begin{pmatrix} \psi_X^+ \\ \psi_B^+ \\ \psi_X^- \\ \psi_B^- \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $\hat{M}' = \hat{U}^{-1}(x_0) \hat{M}(x) \hat{U}(x_0)$, $\hat{U}(x_0)$ – матрица перехода к базису нормальных волн, отвечающих правой границе; столбцами в такой матрице являются собственные вектора $e_{X,B}^\pm(x_0)$. Выделим в 4×4 -матрице $\hat{M}'(x)$ четыре квадрата 2×2 , которые можно отождествить с некоторыми формальными операторами $\hat{t}^\pm$ и $\hat{r}^\pm$ в двумерном пространстве

$$\hat{M}'(x) = \begin{pmatrix} \hat{t}^+ & \hat{r}^- \\ -\hat{r}^+ & -\hat{t}^- \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Уравнения (20) представляются в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_X^+ \\ \psi_B^+ \end{pmatrix} = ik_0 \hat{t}^+ \begin{pmatrix} \psi_X^+ \\ \psi_B^+ \end{pmatrix} + ik_0 \hat{r}^- \begin{pmatrix} \psi_X^- \\ \psi_B^- \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_X^- \\ \psi_B^- \end{pmatrix} = -ik_0 \hat{r}^+ \begin{pmatrix} \psi_X^+ \\ \psi_B^+ \end{pmatrix} - ik_0 \hat{t}^- \begin{pmatrix} \psi_X^- \\ \psi_B^- \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (22)$$

Введем еще одну матрицу $\hat{R}(x)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Psi_X^- \\ \Psi_B^- \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \Psi_X^+ \\ \Psi_B^+ \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Эта неизвестная пока 2×2 -матрица связывает встречные моды, поэтому может быть интерпретирована как локальный оператор отражения волн, распространяющихся в “+”-направлении, в волны, распространяющиеся в “-”-направлении. Подставляя (23) в (22), получаем следующую систему на компоненты матрицы отражения и “+”-волны

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \hat{R} = -ik_0(\hat{R}\hat{f}^- \hat{R} + \hat{R}\hat{f}^+ + \hat{f}^- \hat{R} + \hat{f}^+), \\ \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \Psi_X^+ \\ \Psi_B^+ \end{pmatrix} = ik_0(\hat{f}^+ + \hat{f}^- \hat{R}) \begin{pmatrix} \Psi_X^+ \\ \Psi_B^+ \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (24)$$

Первое уравнение (24) представляет собой эволюционную нелинейную задачу с элементарным начальным условием на правой границе $\hat{R}(x_0) = 0$ (за областью циклотронного резонанса нет волн, падающих со стороны $+\infty$). Оно позволяет найти распределение $\hat{R}(x)$ во всей расчетной области, входящее во второе уравнение. При этом, несмотря на то, что интегрирование происходит в обратном направлении от $x = +x_0$ до $-x_0$, величина $\hat{R}(x)$ все время остается ограниченной [22], поэтому ошибок, связанных с экспоненциальным затуханием бернштейновской волны, не возникает.

Для того, чтобы записать начальное условие для второго уравнения (24), достаточно выразить условие (9) перед областью циклотронного резонанса, сформулированное для набора нормальных векторов на левой границе $\mathbf{e}_{X,B}^\pm(-x_0)$, через коэффициенты в базисе $\mathbf{e}_{X,B}^\pm(+x_0)$, используемого в (19)

$$\hat{U}(x_0) \begin{pmatrix} \Psi_X^+(-x_0) \\ \Psi_B^+(-x_0) \\ \Psi_X^-(-x_0) \\ \Psi_B^-(-x_0) \end{pmatrix} = \hat{U}(-x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r_X \\ r_B \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $\hat{U}(-x_0)$ — матрица перехода к базису нормальных волн, отвечающих левой границе; столбцами в такой матрице являются собственные вектора $\mathbf{e}_{X,B}^\pm(-x_0)$. Введя формально четыре 2×2 -матрицы $\hat{Q}_{ij}$ как

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} \end{pmatrix} = \hat{U}^{-1}(-x_0) \hat{U}(x_0), \quad (26)$$

и учитывая, что

$$\begin{pmatrix} \Psi_X^-(-x_0) \\ \Psi_B^-(-x_0) \end{pmatrix} = \hat{R}(-x_0) \begin{pmatrix} \Psi_X^+(-x_0) \\ \Psi_B^+(-x_0) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

можно получить “решение” матричного соотношения (25) в виде явного выражения поля на левой границе

$$\begin{pmatrix} \Psi_X^+(-x_0) \\ \Psi_B^+(-x_0) \end{pmatrix} = (\hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{12} \hat{R}(-x_0))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

и коэффициентов отражения по амплитуде

$$\begin{pmatrix} r_X \\ r_B \end{pmatrix} = (\hat{Q}_{12} \hat{R}(-x_0) + \hat{Q}_{21})(\hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{12} \hat{R}(-x_0))^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Равенство (28) определяет начальное условие для второго уравнения в системе (24). Равенство (29) позволяет восстановить амплитуды отраженных волн. Заметим, что для этого достаточно лишь найти решение первого уравнения (24) с начальным условием $\hat{R}(x_0) = 0$.

Интегрируя второе уравнение системы (24) как эволюционную задачу с начальными условиями (28) на левой границе, мы находим $\Psi_{X,B}^+(x)$ во всем расчетном пространстве и, в частности, амплитуды прошедших волн в виде

$$\begin{pmatrix} t_X \\ t_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_X^+(+x_0) \\ \Psi_B^+(+x_0) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Поля $\Psi_{X,B}^-(x)$ восстанавливаются по известным $\Psi_{X,B}^+(x)$ и $\hat{R}(x)$ с помощью (23).

В итоге мы последовательно решаем две эволюционные задачи, находя распределения полей в области циклотронного резонанса, и, следовательно, амплитуды прошедших и отраженных волн.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для того, чтобы применить изложенный выше метод решения волновых уравнений, необходимо задать параметры среды так, чтобы было выполнено условие однородности среды вне области $-x_0 < x < x_0$. Для этого мы задали модельный профиль амплитуды магнитного поля

$$\frac{2\omega_c}{\omega} = 1 + \delta \tanh \frac{x}{\delta L_B}. \quad (31)$$

Двойка учитывает номер рассматриваемой циклотронной гармоники. Технические параметры x_0 и δ выбирались из соображений необходимости выполнения следующих неравенств

$$\max(2\pi/k_0, L_{res}) \ll \delta L_B \ll x_0. \quad (32)$$

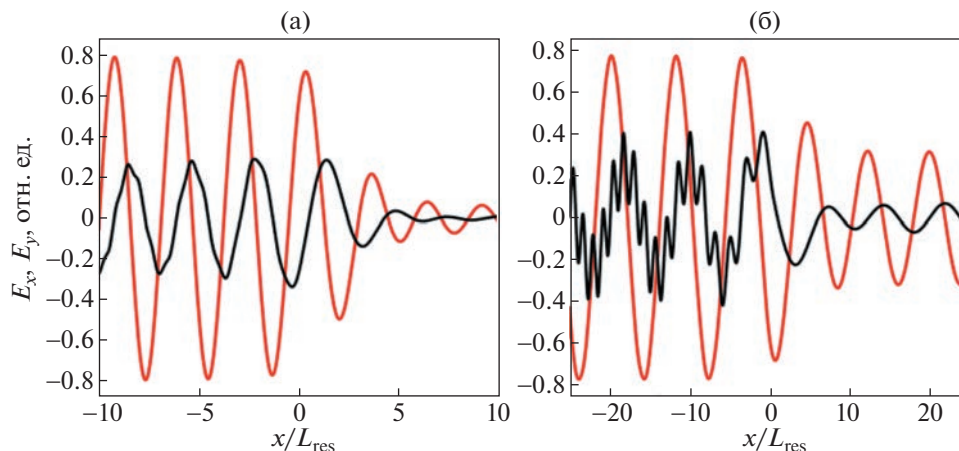


Рис. 3. Пространственные распределения E_x (черные линии) и E_y (красные линии) компонент электрического поля (в относительных единицах) внутри области взаимодействия для $\omega_p^2/\omega^2 = 0.25$, $T_e = 1$ кэВ, $k_0 L_B = 1354$ (а) и $k_0 L_B = 511$ (б).

Отдельно была проведена проверка, что от технических параметров, если они выбраны с учетом указанных условий, результаты численного расчета не зависят.

Физических параметров, от которых зависят коэффициенты отражения, прохождения и поглощения, в нашей задаче три. Это отношение концентрации плазмы к критическому значению ω_p^2/ω^2 , отношение характерного масштаба неоднородности магнитного поля к длине волны $k_0 L_B$ и отношение температуры электронов к энергии покоя электрона $\mu^{-1} = T_e/mc^2$. Из-за резонансного характера зависимости диэлектрического отклика от магнитного поля можно ожидать, что два последних параметра войдут только в виде комбинации [5]

$$\kappa = k_0 L_B / \mu \approx k_0 L_{res}, \quad (33)$$

которая имеет прозрачный физический смысл — это отношение характерного масштаба области резонанса, определенного в (1), к длине волны.

Уравнения (24) с начальными условиями $\hat{R}(x_0) = 0$ и (28) решались численно методом Рунге—Кутты четвертого порядка в среде python (библиотека `scipy.integrate`, функция `RK45()` с настройками по умолчанию).

На рис. 3 приведены два примера расчета распределений компонент электрического поля внутри области взаимодействия. Пример на рис. 3а отвечает параметрам, характерным для экспериментов по ЭЦР-нагреву плазмы на второй гармонике необыкновенной волны в стеллараторе Л-2М [17]. Найденный при моделировании коэффициент отражения $R_x = 1.56 \times 10^{-3}$ находится в

хорошем согласии с результатами эксперимента, в котором был измерен энергетический коэффициент отражения $R = (1.8 \pm 0.8) \times 10^{-3}$ [17]. Коэффициент отражения в бернштейновскую волну при этом на порядок меньше, $R_b = 0.12 \times 10^{-3}$. Поскольку оба коэффициента отражения малы, то распределения полей выглядят в этом случае просто — как распространяющаяся вправо электромагнитная волна с переменной амплитудой.

Пример на рис. 3б отвечает гипотетическому случаю, в котором магнитное поле меняется в пространстве примерно в 3 раза быстрее, что отвечает $\kappa = 1$. Видно, что для меньшего масштаба неоднородности магнитного поля эффекты взаимодействия электромагнитных и бернштейновских волн проявляются ярче. Линейную трансформацию волн можно заметить по появлению коротковолновой модуляции в E_x (продольной компоненте поля). Коэффициенты отражения в необыкновенную и бернштейновскую волну достигают для этого примера значений $R_x = 0.17$, $R_b = 0.01$.

Для того, чтобы проиллюстрировать утверждение о зависимости коэффициентов отражения от единого параметра κ , на рис. 4 построены зависимости коэффициентов отражения в необыкновенную волну R_x от этого параметра при различных значениях масштаба неоднородности магнитного поля. Видно, что наше предположение подтверждается результатами численного моделирования — до тех пор, пока выполняется неравенство $k_0 L_B > 50$, коэффициент отражения при заданной плотности плазмы определяется только параметром κ . Максимальный коэффициент отражения в необыкновенную волну достигается

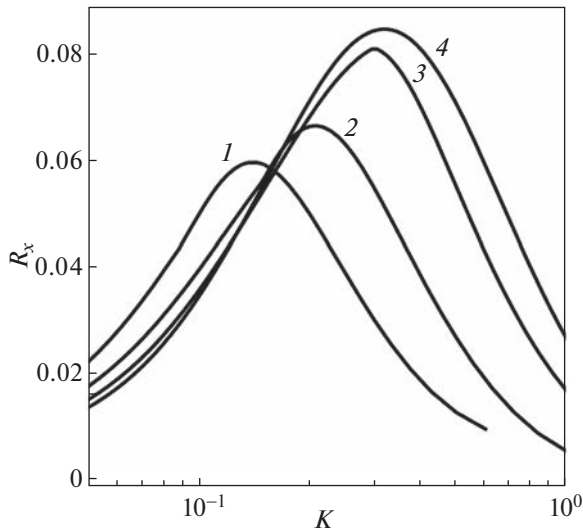


Рис. 4. Коэффициент отражения в необыкновенную волну $R_X(K)$ при 1 — $k_0 L_B = 3$, 2 — $k_0 L_B = 5$, 3 — $k_0 L_B = 10$, 4 — $k_0 L_B = 50-1000$.

при $K \approx 0.3$, что отвечает характерной ширине области резонанса порядка длины волны электромагнитного излучения. При меньших размерах области резонанса, коэффициенты отражения падают из-за того, что отраженная волна не успевает сформироваться в области резонанса, если последняя меньше длины волны.

На рис. 5 приведены зависимости коэффициентов отражения в необыкновенную R_X и бернштейнскую R_B волны от параметра K для разных

значений безразмерной плотности плазмы. Эти графики построены для определенного значения $\mu = 511$, но как было показано выше, они слабо меняются при вариации этого параметра (температуры электронов). Поэтому они могут рассматриваться как универсальные, описывающие все случаи.

Видно, что коэффициент отражения в необыкновенную волну меняется с плотностью почти по автомодельному закону. Это объясняется тем, что смещение положения максимума, связанное с изменением действительной части показателя преломления необыкновенной волны, мало. На основе результатов численного моделирования можно предложить достаточно простое приближенное выражение для коэффициента отражения

$$R_X \approx K(\omega_p^2/\omega^2)R_0(n_{X0}K), \quad (34)$$

где

$$n_{X0}^2 = \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} \Big|_{2\omega_c = \omega} = \frac{3 - 8\omega_p^2/\omega^2 + 4\omega_p^4/\omega^4}{3 - 4\omega_p^2/\omega^2} \quad (35)$$

— невозмущенный (без учета тепловых эффектов) показатель преломления необыкновенной волны [16], а одномерные функции $K(\xi)$ и $R_0(\xi)$ определяются численно путем подгонки к результатам точного расчета $R_X(K, \omega_p/\omega)$. Протабулированные функции $K(\xi)$ и $R_0(\xi)$ приведены на рис. 6. Максимальная погрешность приближенной формулы (34) составляет менее 5% для данных, приведенных на рис. 5а.

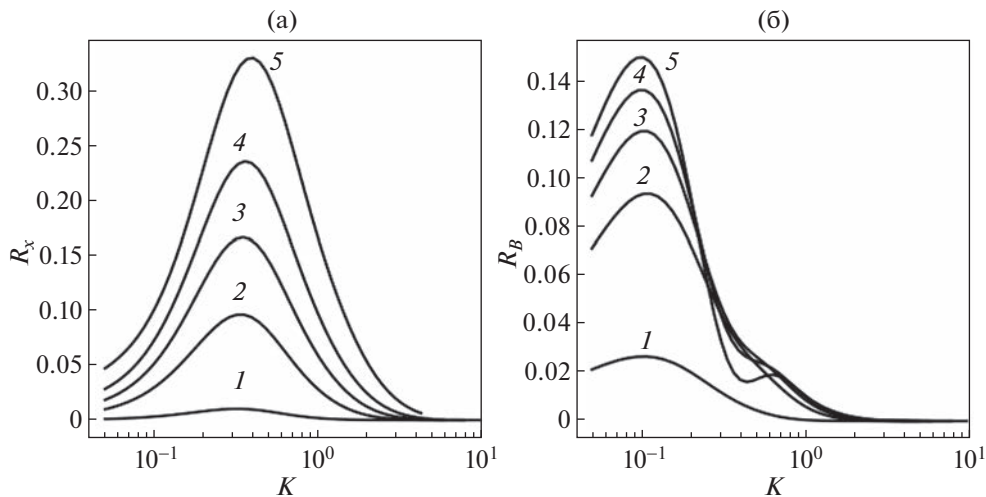


Рис. 5. Коэффициенты отражения в необыкновенную (а) и бернштейнскую (б) волны в зависимости от K для разных значений безразмерной плотности плазмы 1 — $\omega_p^2/\omega^2 = 0.09$, 2 — $\omega_p^2/\omega^2 = 0.25$, 3 — $\omega_p^2/\omega^2 = 0.314$, 4 — $\omega_p^2/\omega^2 = 0.36$, 5 — $\omega_p^2/\omega^2 = 0.41$. Все кривые построены при $T_e = 1$ кэВ.

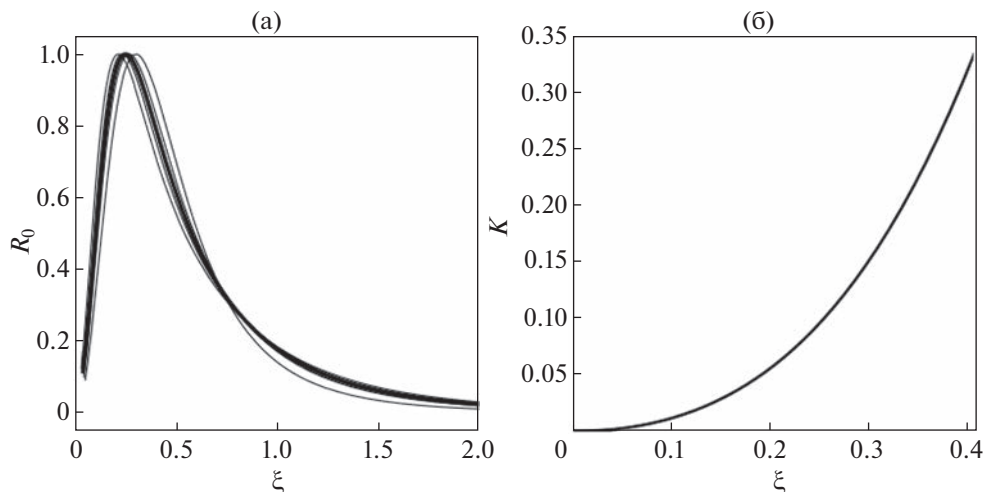


Рис. 6. Функции $R_0(\xi)$ и $K(\xi)$, используемые в аппроксимационной формуле (34). На левом рисунке, жирная линия — $R_0(\xi)$, тонкие линии — результаты численного моделирования для различных параметров, иллюстрирующие погрешность аппроксимационной формулы.

Коэффициент отражения в бернштейновскую волну ведет себя заметно сложнее, см. рис. 5б. Видно, что при малой концентрации максимум коэффициента отражения отвечает $\kappa \approx 0.03$, такой сдвиг по сравнению с коэффициентом отражения в необыкновенную волну связан с большим показателем преломления бернштейновской волны. При больших плотностях, когда

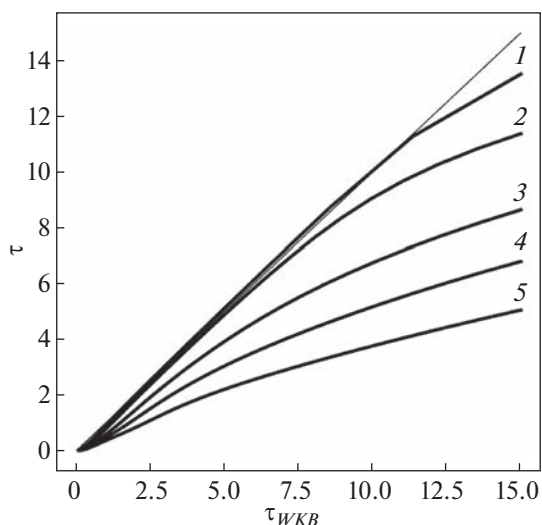


Рис. 7. Сравнение “точной” оптической толщины τ слоя плазмы по поглощению, рассчитанной путем численного решения уравнений Максвелла, со стандартной аналитической оценкой τ_{WKB} , полученной в рамках ВКБ-приближения. Кривые 1–5 построены для тех же значений плотности плазмы, что были использованы на рис. 5, тонкая прямая линия соответствует ВКБ-пределу $\tau = \tau_{WKB}$.

максимальное значение коэффициента отражения в необыкновенную волну становится больше десяти процентов, на зависимости коэффициента отражения в бернштейновскую волну образуется провал в области параметров, отвечающих максимуму отражения в необыкновенную волну.

Стоит отметить, что доля процессов, связанных с отражением от области ЭЦР, в общем балансе энергии не слишком велика для горячей плазмы. В областях параметров, релевантных достаточно горячей плазме в современной магнитной ловушке, коэффициент отражения в бернштейновскую волну минимум на порядок меньше коэффициента отражения в необыкновенную волну. Однако на начальной стадии разряда, когда температура плазмы еще не слишком велика, коэффициент отражения может быть в диапазоне не десятка процентов, причем в этой области может быть важным отражение в бернштейновскую волну.

Для того, чтобы проиллюстрировать поправки к общему энергетическому балансу, связанные с отражением, на рис. 7 приведено сравнение полной оптической толщины слоя плазмы по поглощению, рассчитанной по стандартной ВКБ формуле без учета отражения и линейного взаимодействия, и с помощью нашей методики. Оптическая толщина τ вводится как

$$A = 1 - \exp(-\tau), \quad (36)$$

где A — коэффициент поглощения падающего излучения, определенный соотношением (18). В рамках ВКБ-приближения известны аналитические выражения для оптической толщины (см., например, [9] и приведенные там ссылки), в

частности, для необыкновенной волны на второй циклотронной гармонике

$$\tau_{\text{WKB}} = 2\pi \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{3 - 2\omega_p^2/\omega^2}{3 - 4\omega_p^2/\omega^2} \right)^2 \times \times \sqrt{\frac{3 - 8\omega_p^2/\omega^2 + 4\omega_p^4/\omega^4}{3 - 4\omega_p^2/\omega^2}} \kappa. \quad (37)$$

Из рис. 7 видно, что хотя аналитическая формула (37) дает неплохое приближение для оптической толщины во всем диапазоне параметров моделирования, отклонение от предсказаний стандартной теории, построенной как теория возмущений к полной системе уравнений Максвелла, для достаточно плотной плазмы может быть вполне заметным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате полноволнового моделирования с учетом корректных граничных условий отражения необыкновенной волны от области циклотронного резонанса на второй гармонике в горячей магнитоактивной плазме были проанализированы коэффициенты отражения, линейной трансформации, прохождения и поглощения необыкновенной волны. Моделирование продемонстрировало хорошее совпадение с экспериментальными наблюдениями на стеллараторе Л-2М. Было показано, что на стадии подъема температуры, коэффициент отражения электромагнитного излучения может достигать десятков процентов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект FFUF-2023-0002) и ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН (по договору между ФТИ РАН и ИПФ РАН № ОК44-2-21 от 06.08.2021).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимофеев А.В. Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2000. 1-е изд., 2009 2-е изд.
2. Федоров В.И. // Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 6. С. 650.
3. Bornatici M., Engelmann F., Maroli C., Petrillo V. // Plasma Phys. 1981. V. 23. P. 89.
4. Lazzaro E., Ramponi G., Giruzzi G. // Phys. Fluids. 1982. V. 25. P. 1220.
5. Звонков А.В. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 547.
6. Тимофеев А.В. // УФН. 1973. Т. 110. С. 329.
7. Bernstein I.B. // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 10.
8. Litvak A.G., Suvorov E.V., Permitin G.V., Fraiman A.A. // Nuclear Fusion. 1979. V. 17. P. 659.
9. Alikae V.V., Litvak A.G., Suvorov E.V., Fraiman A.A. // High Frequency Plasma Heating / Ed. A.G. Litvak. New York: AIP, 1991. Ch. 1. P. 1.
10. Tereshchenko M., Castejon F., Cappa A. TRUBA User Manual. Informes Técnicos CIEMAT No. 1134. Madrid: CIEMAT, 2008.
11. Prater R., Farina D., Gribov Yu., Harvey R.W., Ram A.K., Lin-Liu Y.-R., Poli E., Smirnov A.P., Volpe F., Westerhof E., Zvonkov A. // Nuclear Fusion. 2008. V. 48. P. 035006.
12. Pereverzev G.V. // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 3529.
13. Balakin A.A., Balakina M.A., Westerhof E. // Nuclear Fusion. 2008. V. 48. P. 065003.
14. Балакин А.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55. С. 521.
15. Shalashov A.G., Balakin A.A., Gospodchikov E.D., Khushainov T.A. // Phys. Plasmas. 2016. V. 23. P. 112504.
16. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
17. Батанов Г.М., Борзосеков В.Д., Колик Л.В., Конченков Е.М., Малахов Д.В., Петров А.Е., Сарксян К.А., Сахаров А.С., Скворцова Н.Н., Степахин В.Д., Харчев Н.К. // Физика плазмы. 2013. Т. 39. С. 987.
18. Westerhof E., Nielsen S.K., Oosterbeek J.W., Salewski M., De Baar M.R., Bongers W.A., Bürger A., Hennen B.A., Korsholm S.B., Leipold F., Moseev D., Stejner M., Thoen D.J. (the TEXTOR Team) // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 125001.
19. Nielsen S.K., Salewski M., Westerhof E., Bongers W., Korsholm S.B., Leipold F., Oosterbeek J.W., Moseev D., Stejner M. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2013. V. 55. P. 115003.
20. Hansen S.K., Nielsen S.K., Stober J., Rasmussen J., Stejner M., Hoelzl M., Jensen T. // Nucl. Fusion. 2020. V. 60. P. 106008.
21. Сахаров А.С. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 903.
22. Шалашов А.Г., Господчиков Е.Д. // УФН. 2011. Т. 181. С. 151.
23. Shalashov A.G., Gospodchikov E.D. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. P. 025007.
24. Scott M.R. Invariant Imbedding and its Applications to Ordinary Differential Equations: an Introduction. London: Addison-Wesley, 1973.
25. Кляцкин В.И. Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука 1986.
26. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Скрыдлов Н.В. // ЖТФ. 1963. Т. 33. С. 922.
27. Шафранов В.Д. // Вопросы теории плазмы. Вып. 3 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 129.