

УДК 533.9

## О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕННОМ СВЧ-УСИЛИТЕЛЕ

© 2024 г. И. Н. Карташов\*, М. В. Кузелев\*\*

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

\*e-mail: igorkartashov@mail.ru

\*\*e-mail: kuzelev@mail.ru

Поступила в редакцию 22.02.2024 г.

После доработки 29.03.2024 г.

Принята к публикации 29.03.2024 г.

Рассмотрена задача усиления сигнала в плазменном СВЧ-усилителе в линейном приближении и с учетом нелинейных эффектов, приводящих к насыщению неустойчивости. Сопоставлены между собой решения точного дисперсионного уравнения и использующегося при расчете параметров плазменных СВЧ-усилителей приближенного дисперсионного уравнения. Показано, что в области высоких частот имеется существенное различие решений этих уравнений. Нелинейная динамика пучково-плазменной неустойчивости в плазменных СВЧ-усилителях описывается системой дифференциальных уравнений, которая получается методом медленно меняющихся амплитуд и при линеаризации дает приближенное дисперсионное уравнение. Предложен метод модификации параметров нелинейной системы дифференциальных уравнений для приведения ее в соответствие с точным дисперсионным уравнением и продемонстрированы результаты расчета.

**Ключевые слова:** плазменный СВЧ-усилитель, пучково-плазменные неустойчивости, электронный пучок, дисперсионное уравнение, инкремент усиления

DOI: 10.31857/S0367292124050061, EDN: PWJRAP

В плазменной СВЧ-электронике типичная схема источника электромагнитного излучения [1–5] представляет собой металлический волновод радиуса  $R$  с тонкостенными цилиндрическими плазмой и электронным пучком, имеющими средний радиус  $r_p$  и  $r_b$  соответственно. Пучок движется прямолинейно с направленной скоростью  $u$  и релятивистским фактором  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$  вдоль оси волновода (ось  $0z$ ). Вся система помещается в достаточно сильное магнитное поле, препятствующее распылению пучка и плазмы, а в теоретической модели замагничивающее движение электронов, делая его одномерным вдоль оси  $0z$ . Толщина плазмы и электронного пучка  $\delta_p$  и  $\delta_b$  обычно мала по сравнению с другими характерными размерами, в том числе по сравнению с глубиной проникновения поля в плазму и пучок. Поэтому основной моделью при исследовании широкого круга вопросов пучково-плазменного взаимодействия является модель бесконечно тонких трубчатых плазмы и электронного пучка в бесконечно сильном внешнем магнитном поле. Эта модель использовалась при исследовании динамики плазмы под действием пондеромоторной силы Миллера [6], в том числе на фронте импульса электронного пучка [7], при исследовании возбуждения ге-

нератора [8] и подавления самовозбуждения усилителя локальным поглотителем [9]. В рамках этой модели производился учет разброса электронов пучка по скоростям [10, 11], неодносвязности сечения волновода [12] в области, где реализуется пучково-плазменное взаимодействие и другие вопросы. В рамках этой модели решение волнового уравнения для поляризационного потенциала (вектора Герца) волны  $E$ -типа может быть представлено в виде

$$\Psi(r) = \begin{cases} A_1 I_l(\chi_0 r), & 0 \leq r \leq r_1, \\ A_2 I_l(\chi_0 r) + B_2 K_l(\chi_0 r), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ A_3 I_l(\chi_0 r) + B_3 K_l(\chi_0 r), & r_2 \leq r \leq R. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\chi_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$ ,  $\omega$  и  $k_z$  — частота и продольное волновое число возбуждаемой волны,  $l$  — номер азимутальной моды,  $r_1 = \min\{r_p, r_b\}$ ,  $r_2 = \max\{r_p, r_b\}$ ,  $A_n$  и  $B_n$  — константы. Решения по обе стороны от слоя тонкостенной плазмы или тонкостенного электронного пучка связаны условиями сшивки [13]

$$\begin{aligned} \Psi(r_{p,b} - 0) &= \Psi(r_{p,b} + 0), \\ \frac{d\Psi(r_p + 0)}{dr} - \frac{d\Psi(r_p - 0)}{dr} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \delta_p \chi_0^2 \Psi(r_p), \end{aligned}$$

$$\frac{d\Psi(r_b+0)}{dr} - \frac{d\Psi(r_b-0)}{dr} = -\frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \delta_b \chi_0^2 \Psi(r_b). \quad (2)$$

Первое условие представляет собой непрерывность продольной компоненты электрического поля волны в точках  $r_{p,b}$ . Вторая пара условий при  $r = r_p$  и  $r = r_b$  соответствует разрыву радиальной компоненты и может быть получена из волнового уравнения интегрированием по бесконечно малому участку в окрестности точек  $r = r_p$  и  $r = r_b$  при учете, что диэлектрическая проницаемость пучково-плазменной системы

$$\varepsilon(r) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \delta_p \delta(r - r_p) - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \delta_b \delta(r - r_b), \quad (3)$$

что соответствует модели холодных бесстолкновительных плазмы и электронного пучка с ленгмюровскими частотами  $\omega_{p,b}$ . Дополняя систему условий сшивки условием обращения в нуль продольной составляющей электрического поля на металлической стенке волновода, получаем следующее дисперсионное уравнение [13]

$$\left[ \omega^2 - \omega_p^2 \frac{\chi_0^2}{k_{\perp p}^2(\chi_0)} \right] \left[ (\omega - k_z u)^2 - \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi_0^2}{k_{\perp b}^2(\chi_0)} \right] = \theta(\chi_0) \omega_p^2 \frac{\chi_0^2}{k_{\perp p}^2(\chi_0)} \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi_0^2}{k_{\perp b}^2(\chi_0)}, \quad (4)$$

где введены обозначения

$$k_{\perp p, \perp b}^{-2}(\chi_0) = r_{p,b} \delta_{p,b} I_l^2(\chi_0 r_{p,b}) \left[ \frac{K_l(\chi_0 r_{p,b})}{I_l(\chi_0 r_{p,b})} - \frac{K_l(\chi_0 R)}{I_l(\chi_0 R)} \right], \quad (5)$$

$$\theta(\chi_0) = \frac{I_l(\chi_0 r_1) K_l(\chi_0 r_2) I_l(\chi_0 R) - K_l(\chi_0 R) I_l(\chi_0 r_2)}{I_l(\chi_0 r_2) K_l(\chi_0 r_1) I_l(\chi_0 R) - K_l(\chi_0 R) I_l(\chi_0 r_1)}. \quad (6)$$

Равенство нулю первого множителя в (4) неявным образом определяет дисперсионную зависимость  $\omega(k_z)$  плазменной волны (без пучка). Аналогично, равенство нулю второго множителя определяет дисперсионную зависимость быстрой и медленной пучковых волн (без плазмы). При учете взаимодействия плазменной и пучковых волн через самосогласованное поле дисперсионное уравнение (4) в целом определяет дисперсионные зависимости пучково-плазменной системы. В их числе три распространяющихся попутно с пучком моды, соответствующие попутной плазменной волне, быстрой и медленной пучковым волнам. Будем обозначать эти решения в виде  $k_{z1,2,3}(\omega)$ . В некоторой области частот может

возникать усиление, что соответствует появлению мнимой части у волнового числа. Если рассматривать задачу усиления в пространстве  $z > 0$ , подаваемого на вход при  $z = 0$  сигнала, то для усиливаемой моды будет  $\text{Im} k_{z1}(\omega) < 0$ . Из вещественности уравнения (4) следует, что помимо комплексного решения  $k_{z1}(\omega)$  решением уравнения (4) будет и комплексно сопряженное  $k_{z2}(\omega) = k_{z1}^*(\omega)$ , которое соответствует также попутной моде, но с убывающей при распространении амплитудой. Волновое число третьей из попутных мод будет всегда вещественным. За пределами области усиления все решения  $k_{z1,2,3}(\omega)$  окажутся вещественными.

Наиболее сильно пучково-плазменная неустойчивость проявляется в условиях черенковского резонанса, когда  $k_z \approx \omega/u$ . Это позволяет упростить дисперсионное уравнение (4) сделав подстановку

$$k_z = \frac{\omega}{u} (1 + \delta) \quad (7)$$

и считая  $|\delta| \ll 1$ . В этом случае  $\chi_0^2 \approx \frac{\omega^2}{u^2 \gamma^2} (1 + 2\gamma^2 \delta)$ , при этом последнее слагаемое для сильноточных релятивистских пучков, вообще говоря, не мало по сравнению с единицей несмотря на условие  $|\delta| \ll 1$ . Если частота мала, так что выполняется условие  $|\chi_0 R| \ll 1$ , выражения (5) и (6) приближенно могут быть записаны в виде

$$k_{\perp p, \perp b}^{-2}(0) = \begin{cases} \delta_{p,b} r_{p,b} \ln R / r_{p,b}, & \text{при } l = 0, \\ \frac{\delta_{p,b} r_{p,b}}{2l} \left( 1 - \left( \frac{r_{p,b}}{R} \right)^{2l} \right), & \text{при } l \neq 0, \end{cases} \quad (5a)$$

$$\theta(0) = \begin{cases} \frac{\ln R / r_2}{\ln R / r_1}, & \text{при } l = 0, \\ \frac{(R / r_2)^{2l} - 1}{(R / r_1)^{2l} - 1}, & \text{при } l \neq 0. \end{cases} \quad (6a)$$

Выражения (5a) и (6a) являются предельными, более общие выражения (5) и (6) в условиях  $|\chi_0 R| \ll 1$  слабо зависят от  $\chi_0$ , что позволяет пренебречь в них  $2\gamma^2 \delta$  и свести трансцендентное дисперсионное уравнение (4) к кубическому относительно  $\delta$

$$\left[ 1 - \alpha_p (1 + 2\gamma^2 \delta) \right] \left[ \delta^2 - \alpha_b (1 + 2\gamma^2 \delta) \right] = \theta \alpha_p \alpha_b (1 + 2\gamma^2 \delta)^2. \quad (4a)$$

Здесь введены обозначения для параметров плотности плазмы и электронного пучка

$$\alpha_p \left( \frac{\omega}{u\gamma} \right) = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 \left( \frac{\omega}{u\gamma} \right) u^2 \gamma^2}, \quad \alpha_b \left( \frac{\omega}{u\gamma} \right) = \frac{\omega_b^2 \gamma^3}{k_{\perp b}^2 \left( \frac{\omega}{u\gamma} \right) u^2 \gamma^2}, \quad (8)$$

а параметр связи  $\theta$  ( $\omega/u\gamma$ ) также берется при значении  $\omega/u\gamma$ .

Кубическое дисперсионное уравнение (4а) проще для численного анализа по сравнению с более общим дисперсионным уравнением (4). Однако основное его значение состоит не в упрощении решения уравнения (4), а в том, что система нелинейных уравнений, описывающих динамику пучково-плазменной неустойчивости [13]

$$(1 - \alpha_p \hat{L}) \tilde{j}_p = \alpha_p \alpha_b \theta \hat{L} \tilde{j}_b, \quad \hat{L} = 1 - 2i\gamma^2 \frac{d}{d\xi}, \quad (9)$$

$$\tilde{j}_b = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{iy} dy_0, \quad (10)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \eta, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{i}{2} \left( 1 + 2 \frac{u^2}{c^2} \gamma^2 \eta \right)^{3/2} \left[ \hat{L} (\tilde{j}_p + \alpha_b \tilde{j}_b) e^{-iy} - c.c. \right], \quad (11)$$

$$y(\xi=0) = y_0, \quad \eta(\xi=0) = 0, \quad (12)$$

полученная с использованием метода медленного меняющихся амплитуд, в линейном приближении дает именно дисперсионное уравнение (4а). Уравнение (9) представляет собой уравнение холодной гидродинамики для электронов плазмы, движущихся в самосогласованном поле, и определяет пространственную динамику безразмерной амплитуды тока плазмы  $\tilde{j}_p$  по безразмерной координате  $\xi = z\omega/u$ . Безразмерная амплитуда тока электронного пучка  $\tilde{j}_b$ , вычисленная суммированием вкладов от крупных частиц, определяется (10). Уравнения (11) представляют собой уравнения движения крупных частиц в лагранжевых переменных, где  $y = \omega(t - z/u)$  и  $\eta = (u - v_z)/u \ll 1$  — безразмерные локальное время и изменение скорости частиц, соответственно. Условия (12) — условия влета, соответствующие незамодулированному моноскоростному пучку электронов. Величины  $\alpha_{p,b}$ ,  $k_{\perp p,b}^{-2}$  и  $\theta$  в (9), (11) берутся при значении аргумента  $\omega/(u\gamma)$ . Дисперсионное уравнение (4а) получается линеаризацией (9)–(12), если искать решение в виде  $\tilde{j}_{p,b} = \tilde{j}_{p,b} e^{i\delta\xi}$ ,  $y = y_0 + \delta y e^{i\delta\xi}$ . Для системы уравнений (9)–(12) сохраняется поток энергии

$$\frac{d}{d\xi} (P + W) = 0, \quad (13)$$

где

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{2u^2}{c^2} \gamma^2 \eta \right)^{-1/2} dy_0 \quad (14)$$

представляет собой поток энергии частиц пучка (нормированный на  $mc^2\gamma$ ), а

$$W = \frac{u^2 \gamma^4}{2c^2} \left( \frac{|\tilde{j}_p|^2}{\alpha_b \theta} + \alpha_b |\tilde{j}_b|^2 + 2 \operatorname{Re} \tilde{j}_p \tilde{j}_b^* \right) \quad (15)$$

— поток энергии возбуждаемых пучком волн. Величину  $1 - P$  можно трактовать как эффективность преобразования энергии направленного движения электронного пучка в энергию электромагнитных колебаний.

При параметрах реальных экспериментов с плазменными СВЧ-усилителями величина  $|\chi_0 R|$ , особенно в области высоких частот, может быть и не мала по сравнению с единицей. В частности, если  $|\chi_0 r_1| \gg 1$ , то  $k_{\perp p,b}^{-2}(\chi_0 \rightarrow \infty) \approx \delta_{p,b} / (2\chi_0)$ ,  $\theta(\chi_0 \rightarrow \infty) \approx \exp(-2\chi_0 |r_p - r_b|)$ , а значит,  $k_{\perp p,b}^{-2}(\chi_0)$  и  $\theta(\chi_0)$  существенно модифицируются при учете слагаемого  $2\gamma^2 \delta$  в выражении для  $\chi_0$ . Поэтому возникает необходимость модификации параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ , обеспечивающая соответствие решений нелинейной системы уравнений (9)–(12) и дисперсионного уравнения в форме (4).

Для численного анализа мы будем ориентироваться на эксперименты с двумя различными плазменными СВЧ-усилителями. Для одного из них [1, 2] возьмем следующие параметры: радиус волновода  $R = 4.9$  см, средние радиусы плазмы и пучка  $r_p = 2$  см и  $r_b = 1.5$  см, их толщины  $\delta_p = 0.2$  см и  $\delta_b = 0.4$  см, ток электронов пучка 2 кА, а их скорость  $u = 2.6 \times 10^{10}$  см/с (энергия пучка 500 кэВ, релятивистский фактор  $\gamma = 2$ ). Плотность электронов плазмы составляет порядка  $n_p = 1 \times 10^{12}$  см<sup>-3</sup> и более. Для другого, более коротковолнового, плазменного СВЧ-усилителя [3, 4] с инверсным расположением пучка и плазмы, выберем следующие характерные значения параметров:  $R = 3$  см  $r_p = 1.85$  см и  $r_b = 2.2$  см,  $\delta_p = 0.2$  см и  $\delta_b = 0.1$  см, ток электронов пучка 1.2 кА, а их скорость  $u = 2.28 \times 10^{10}$  см/с (энергия пучка 270 кэВ, релятивистский фактор  $\gamma = 1.54$ ). Плотность электронов плазмы составляет порядка  $n_p = 1 \times 10^{13}$  см<sup>-3</sup>. В обоих случаях ограничимся рассмотрением усиления азимутально симметричных мод с  $l = 0$ .

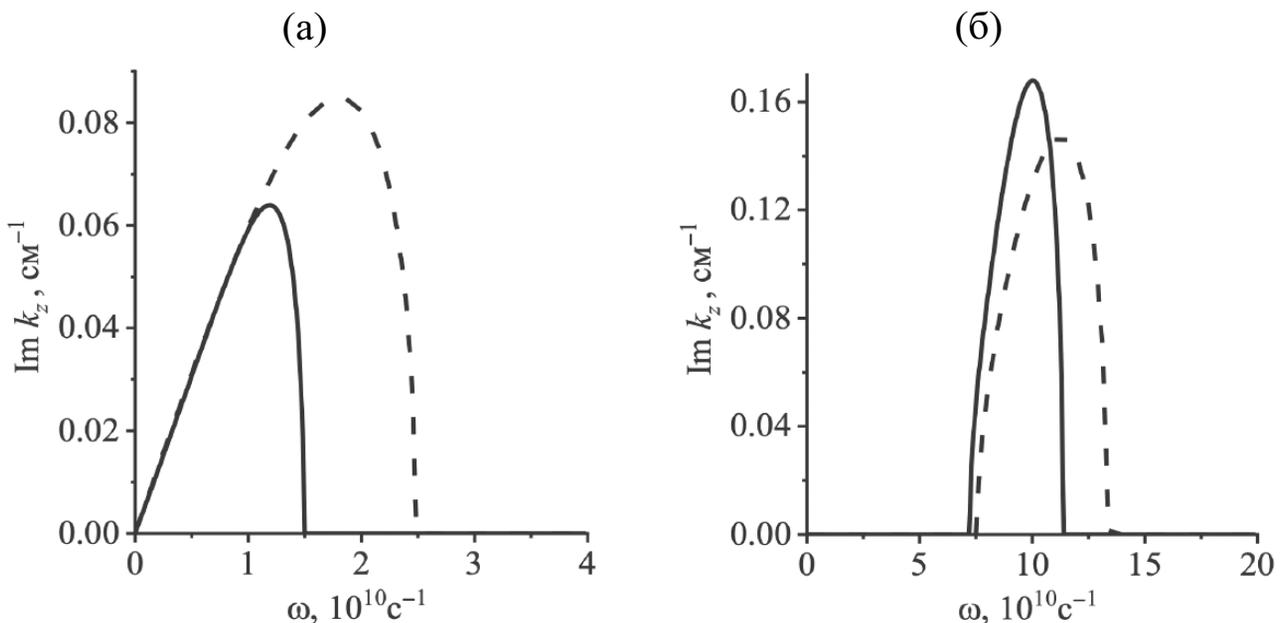
На рис. 1а представлены частотные зависимости мнимой части волнового числа усиливаемой моды для характерных параметров плазменного СВЧ-усилителя [1, 2]. Сплошная линия соответствует решению точного дисперсионного уравнения (4). Штриховой линией обозначено решение кубического дисперсионного уравнения (4а). На рис. 1б представлены аналогичные зависимости, но для других значений параметров плазменного СВЧ-

усилителя [3, 4]. Заметим, что эти наборы параметров обеспечивают разные режимы работы. На рис. 1а область усиления простирается от нуля до некоторого значения частоты, примерно соответствующего условию черенковского резонанса пучка с плазменной волной. Такой режим мы называли одночастичным эффектом Черенкова [14]. На рис. 1б ненулевые значения инкремента пространственного усиления занимают финитную область частот в окрестности резонанса плазменной волны с медленной пучковой волной, при этом в области низких частот пучок устойчив. Этот режим неустойчивости реализуется в условиях, когда ленгмюровские колебания пучка успевают проявиться за время развития неустойчивости (коллективный эффект Черенкова [14]). В обоих случаях инкремент пространственного усиления, вычисленный с помощью кубического уравнения (4а), не вполне хорошо соответствует инкременту усиления, полученному решением точного дисперсионного уравнения (4), особенно в высокочастотной области. Причем в пучково-плазменной системе, рассматриваемой на основе кубического дисперсионного уравнения (4а) и на основе системы нелинейных уравнений (9)–(12) частотный диапазон области усиления оказывается более широким, чем при рассмотрении той же системы на основе точного дисперсионного уравнения (4).

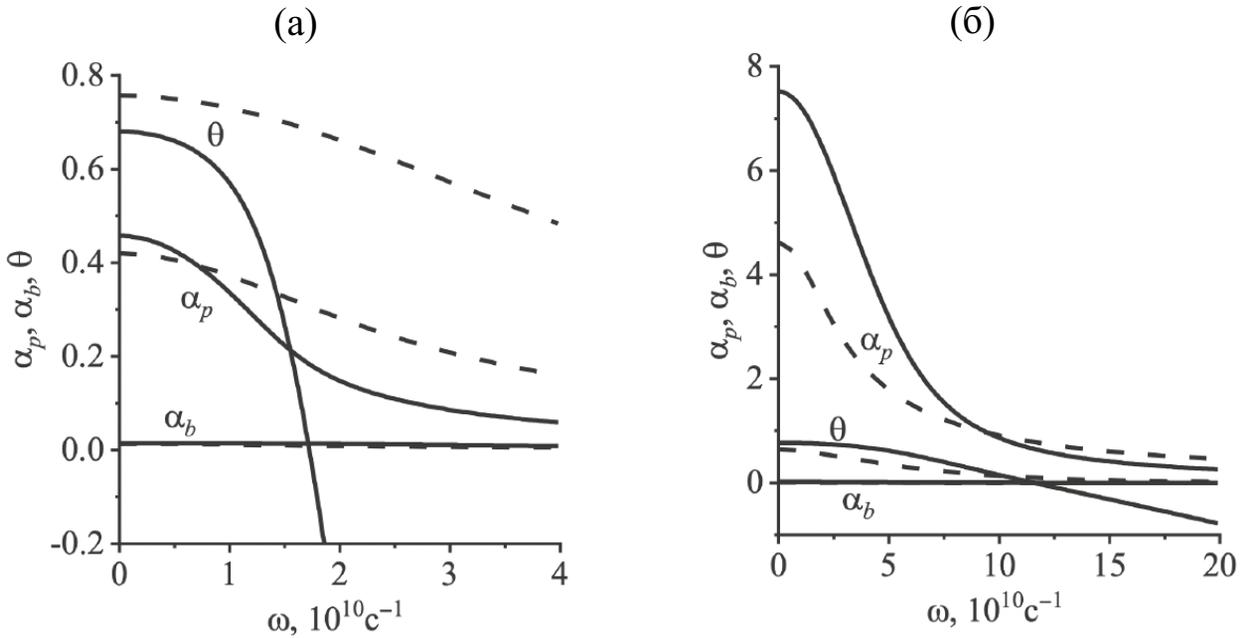
Для приведения во взаимное соответствие дисперсионного уравнения (4) с нелинейной системой (9)–(12) и соответствующим ей дисперсионным

уравнением (4а) модифицируем параметры  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ . Исходя из решений  $k_{z1,2,3}(\omega)$  дисперсионного уравнения (4), в соответствии с (7) составим  $\delta_{1,2,3} = k_{z1,2,3}(\omega)u/\omega - 1$ . Подставив  $\delta_{1,2,3}$  в (4а), получим систему из трех уравнений, из которых можно определить три параметра  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ . Выражая из третьего уравнения  $\theta$  и подставляя его в первые два, получим линейную систему из двух уравнений относительно  $\alpha_{p,b}$ . Учитывая вещественность либо комплексную сопряженность  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , а также вещественность  $\delta_3$ , можно показать, что параметры  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  оказываются вещественными, а кроме того, они однозначно определяются по заданным  $\delta_{1,2,3}$ . Модифицированные указанным способом параметры  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  представлены на рис. 2 сплошными линиями. Рисунок 2а относится к плазменному СВЧ-усилителю [1, 2], а рис. 2б — [3, 4]. На тех же рисунках для сравнения штриховыми линиями изображены зависимости  $\alpha_{p,b}(\omega/u\gamma)$  и  $\theta(\omega/u\gamma)$ . Сплошные и штриховые кривые, соответствующие  $\alpha_b$ , на рисунках графически не различимы. Заметим, что в области усиления ( $0 < \omega < 1.5 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$  для рисунка 2а и  $7.3 \times 10^{10} < \omega < 11.3 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$  для рисунка 2б) модифицированные значения  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  отличаются от  $\alpha_{p,b}(\omega/u\gamma)$  и  $\theta(\omega/u\gamma)$  не более чем на 10–30%.

Модифицированные параметры  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  обеспечивают точное соответствие решений кубического дисперсионного уравнения (4а) и более общего дисперсионного уравнения (4). Их использование в нелинейной системе уравнений (9)–(12) позволяет



**Рис. 1.** Частотные зависимости мнимой части волнового числа усиливаемой моды для характерных параметров плазменных СВЧ-усилителей [1, 2] (а) и [3, 4] (б). Сплошная линия — решение точного дисперсионного уравнения (4), штриховая — решение кубического дисперсионного уравнения (4а).

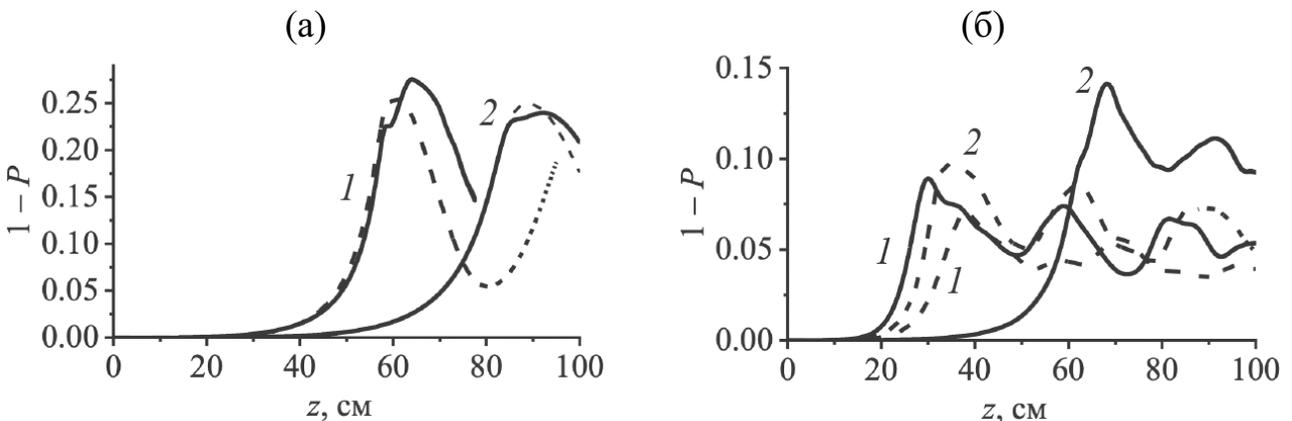


**Рис. 2.** Частотные зависимости параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  для характерных параметров плазменных СВЧ-усилителей [1, 2] (а) и [3, 4] (б). Штриховая линия — параметры  $\alpha_{p,b}(\omega/u\gamma)$  и  $\theta(\omega/u\gamma)$ , сплошная линия — модифицированные параметры  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ .

реализовать нелинейную динамику пучково-плазменной неустойчивости на начальной стадии ее развития в точном соответствии с дисперсионным уравнением (4). Поскольку модификация параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  не затрагивает нелинейную структуру (9)–(12), то это не исказит динамику насыщения неустойчивости.

На рис. 3 представлены пространственные зависимости эффективности преобразования энергии пучка в энергию возбуждаемых волн для параметров плазменных СВЧ-усилителей [1, 2] (рис. 3а) и [3, 4] (рис. 3б). Штриховые линии соответствуют исходным параметрам  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ , сплошные линии — модифицированным параметрам  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ . На рис. 3а кри-

вые 1 построены для значения частоты входного сигнала  $\omega = 0.8 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ , а кривые 2 — для частоты  $\omega = 1.2 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ . Вторая частота соответствует максимуму инкремента пространственного усиления, полученному решением точного дисперсионного уравнения (4). В обоих случаях инкременты пространственного усиления, полученные как решением точного дисперсионного уравнения, так и решением кубического дисперсионного уравнения практически совпадают. Это приводит к тому, что модифицированные параметры  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  близки к исходным и нелинейные динамики, показанные сплошной и штриховой линиями, также достаточно близки друг к другу. И наоборот, для частот в диапазоне



**Рис. 3.** Эффективность для характерных параметров плазменных СВЧ-усилителей [1, 2] (а) и [3, 4] (б). Штриховая линия — для исходных параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ , сплошная линия — для модифицированных параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$ .

$\omega = (1.5...2.5) \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$  использование модифицированных параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  обеспечивает устойчивость пучково-плазменной системы, в то время как для исходных значений  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  наблюдается усиление сигнала в соответствии с инкрементом пространственного усиления из рис. 1а. Заметим, что само значение эффективности для данных параметров пучково-плазменной системы оказывается повышенным в связи с тем, что при численном моделировании наблюдается достаточно сильное замедление крупных частиц, что находится на грани применимости использованного метода.

На рис. 3б кривые  $I$  построены для значения частоты входного сигнала  $\omega = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ , а кривые 2 — для частоты  $\omega = 11.3 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ . Первое значение частоты соответствует максимуму инкремента пространственного усиления, полученному решением точного дисперсионного уравнения (4), а второе — максимуму инкремента усиления из кубического дисперсионного уравнения (4а). Сплошная кривая  $I$  имеет более быстрый рост по сравнению с штриховой кривой  $I$ , что соответствует тому, что инкремент усиления из решения точного дисперсионного уравнения выше, чем из решения кубического дисперсионного уравнения. В случае кривых 2 различие еще более значительное. На частоте  $\omega = 11.3 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$  инкремент пространственного усиления из решения кубического дисперсионного уравнения достигает максимума, а инкремент усиления из решения точного дисперсионного уравнения в несколько раз ниже. Это приводит к сильно различающейся скорости развития пространственной динамики пучково-плазменной неустойчивости. Модификацией параметров  $\alpha_{p,b}$  и  $\theta$  удается добиться соответствия этой динамики более общему дисперсионному уравнению (4), которое предсказывает медленное пространственное нарастание усиливаемого сигнала.

Мы рассмотрели задачу усиления сигнала, подаваемого на вход плазменных СВЧ-усилителей. Полученное при рассмотрении в линейном приближении дисперсионное уравнение проанализировано численно. Используемое при расчетах приближенное кубическое дисперсионное уравнение дает значения инкремента пространственного усиления, не всегда совпадающие с инкрементами усиления из более общего дисперсионного уравнения, и в целом система оказывается более неустойчивой, чем это предсказывает более общее дисперсионное урав-

нение. Особенно это проявляется в области высоких частот. В то же время система нелинейных уравнений, описывающая динамику пучково-плазменной неустойчивости, полученная с использованием ряда упрощающих предположений в линейном приближении, дает именно кубическое дисперсионное уравнение. Для приведения в соответствие нелинейной системы уравнений и точного дисперсионного уравнения предложен метод модификации параметров нелинейной системы и продемонстрирована его эффективность. Показано, что в этом случае развитие неустойчивости происходит в соответствии с точным дисперсионным уравнением.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрелков П.С. // УФН. 2019. Т. 189. С. 494.
2. Стрелков П.С., Иванов И.Е., Диас Михайлова Е.Д., Шумейко Д.В. // Физика плазмы. 2021. Т. 47. С. 257.
3. Buleyko A.B., Ponomarev A.V., Loza O.T., Ulyanov D.K., Andreev S.E. // Phys. Plasmas. 2021. V. 28. P. 023303. Doi: 10.1063/5.0013145
4. Buleyko A.B., Ponomarev A.V., Loza O.T., Ulyanov D.K., Sharypov K.A., Shunailov S.A., Yalandin M.I. // Phys. Plasmas. 2021. V. 28. P. 023304. Doi: 10.1063/5.0031432
5. Андреев С.Е., Богданкевич И.Л., Гусейн-заде Н.Г., Ульянов Д.К. // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 165. Doi: 10.31857/S0367292122600789
6. Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59. С. 163. Doi: 10.31857/S0040364421010075
7. Kartashov I.N., Kuzelev M.V. // Phys. Plasmas. 2022. V. 29. P. 112102. Doi: 10.1063/5.0103559.
8. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // ЖТФ. 2006. Т. 76. С.10.
9. Kartashov I.N., Kuzelev M.V. // Phys. Wave Phen. 2022. V. 30. P. 330. Doi: 10.3103/S1541308X2205003X
10. Kartashov I.N., Kuzelev M.V. // Phys. Wave Phen. 2017. V. 25. P. 43. Doi: 10.3103/S1541308X17010071
11. Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. С. 346.
12. Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2021. Т. 47. С. 531. Doi: 10.31857/S0367292121060093
13. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: ЛЕНАНД, 2018.
14. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // УФН. 1987. Т. 152. С. 285.

## ON MODELING OF NONLINEAR DYNAMICS OF AN ELECTRON BEAM IN A PLASMA MICROWAVE AMPLIFIER

I. N. Kartashov<sup>a</sup>, M. V. Kuzelev<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

*\*e-mail: kuzelev@mail.ru*

**Abstract**—The problem of signal amplification in a plasma microwave amplifier is considered in the linear approximation and with allowance for nonlinear effects leading to saturation of instability. The solutions of the exact dispersion equation and an approximate dispersion equation used in calculation of parameters of plasma microwave amplifiers are compared. It is shown that the solutions of these equations in the region of high frequencies are significantly different. Nonlinear dynamics of beam–plasma instability in plasma microwave amplifiers is described by a system of differential equations which is obtained by the slowly varying amplitude method and yields an approximate dispersion equation when it is linearized. A method for modifying parameters of a nonlinear system of differential equations to make it consistent with the exact dispersion equation is proposed and the calculation results are demonstrated.

**Keywords:** plasma microwave amplifier, beam–plasma instabilities, electron beam, dispersion equation, amplification increment