

УДК 533.95

МАГНИТОЗВУКОВЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

© 2024 г. А. М. Игнатов

Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН,
Москва, Россия
e-mail: aign@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 12.03.2024 г.
После доработки 25.03.2024 г.
Принята к публикации 29.03.2024 г.

Получена система уравнений, описывающая нелинейную трехмерную динамику магнитозвуковых волн. Исследованы плоские уединенные волны, распространяющиеся под малым углом к ведущему магнитному полю. Качественно исследованы треморные пространственно-локализованные волны.

Ключевые слова: магнитозвуковые волны, уединенные волны

DOI: 10.31857/S0367292124050075, EDN: PWGJDA

1. ВВЕДЕНИЕ

Закон дисперсии низкочастотных волн в бесстолкновительной замагниченной плазме в длинноволновом пределе имеет вид $\omega_1 = kV_A$ и $\omega_2 = kV_A \cos \phi_0$, где V_A — скорость Альфвена и ϕ_0 — угол между волновым вектором \mathbf{k} и внешним магнитным полем (например, [1]). В следующем порядке разложения по волновому вектору возникают поправки порядка k^3 к частотам $\omega_{1,2}$. При этом слабонелинейная динамика плоских волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, описывается модифицированным уравнением Кортевега–де Вриза (mKdV) [2].

При распространении строго вдоль магнитного поля ($\phi_0 = 0$) частоты и фазовые скорости обеих волн в первом приближении по k совпадают $\omega_1 = \omega_2$. Дисперсионные поправки к частотам имеют существенно больший порядок k^2 , т. е. $\omega_{1,2} = kV_A \pm (\dots)k^2$. Обе волны, которые для простоты называются магнитозвуковыми, имеют круговую поляризацию и отличаются направлением вращения вектора возмущения магнитного поля.

При нелинейном описании обе магнитозвуковые волны оказываются связанными, и при малых амплитудах их динамика описывается уравнением Шредингера с нелинейным членом, содержащим производные (DNLS) (например, [3]). В системе отсчета, движущейся со скоростью Альфвена, с использованием подходящих безразмерных переменных это уравнение можно записать как

$$\Psi_{,t} = -i\Psi_{,zz} - \left(\Psi|\Psi|^2\right)_{,z}, \quad (1)$$

где $\Psi = b_x + ib_y$ — комбинация поперечных компонент магнитного поля и ведущее магнитное поле направлено вдоль оси z . Здесь и в дальнейшем индексы, стоящие после запятой, обозначают производные по соответствующему аргументу, а сами аргументы функций, как правило, опускаются.

Уравнение (1) хорошо изучено [3] и интегрируемо методом обратной задачи [4, 5]. Оно, в частности, описывает магнитозвуковые солитоны огибающей. Однако у него нет простых автомодельных решений $\Psi(z - ut)$ в виде уединенных волн с амплитудами, стремящимися к нулю на бесконечности. В то же время при распространении плоских нелинейных волн под конечным углом к магнитному полю, которое описывается уравнением mKdV, существуют решения в виде солитонов. Поэтому возникает вопрос, что происходит с магнитозвуковыми солитонами при уменьшении угла распространения.

В настоящей работе выводятся слабонелинейные уравнения, обобщающие (1), которые учитывают медленные вариации возмущений по поперечным координатам. В разделе 2 описана схема вывода укороченных уравнений и перечислены их общие свойства. В разделе 3 исследованы уединенные волны, распространяющиеся под малым углом к магнитному полю. В разделе 4 дан качественный анализ аксиально-симметричных трехмерных уединенных волн.

2. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходим из набора уравнений холодной гидродинамики для двух компонентов плазмы

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_j(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}_j(t, \mathbf{r})) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_j(t, \mathbf{r})}{\partial t} + (\mathbf{v}_j(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{v}_j(t, \mathbf{r}) &= \\ = \frac{e_j}{m_j} \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_j(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})] \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где индексом $j = e, i$ обозначены величины, относящиеся к частицам с массами m_j и зарядами $e_j = -e_e = e$. Динамика полей описывается уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + c \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t} - c \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) + \\ + 4\pi \sum_j e_j n_j(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}_j(t, \mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В исходном состоянии плазма находится в постоянном магнитном поле \mathbf{B}_0 , параллельном оси z , $n_\alpha = n_0$ и $\mathbf{v}_\alpha = 0$. Вводя отклонения от равновесия $\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ и $n_\alpha(t, \mathbf{r}) \rightarrow n_0 + n_\alpha(t, \mathbf{r})$, перейдем к безразмерным переменным. В качестве масштабов времени удобно выбрать величину

$$T_0 = (m_i - m_e)(c^2 - V_A^2) / (2B_0 c e),$$

а длины — $L_0 = V_A T_0$, где

$$V_A = B_0 c / \sqrt{B_0^2 + 4\pi c^2 n_0 (m_i + m_e)}$$

— скорость Альфвена с учетом тока смещения в (3). Величина возмущения магнитного поля нормируется на

$$2B_0 c / \sqrt{c^2 - V_A^2}.$$

При использовании этих безразмерных переменных в результирующих укороченных уравнениях остается всего один нечисловой коэффициент.

Укороченные уравнения, описывающие медленную длинноволновую динамику возмущений, получаются стандартным методом многомасштабных разложений (например, [6]). Все переменные в уравнениях (2), (3) представляются в виде

$$f(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1, \dots} \varepsilon^{j/2} f^{(j)}(\varepsilon^2 t, \varepsilon^{3/2} x, \varepsilon^{3/2} y, \varepsilon(z-t)), \quad (4)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, определяющий характерную амплитуду возмущений. По порядку величины возмущения поперечных компонент магнитного поля $B_{x,y} \sim \varepsilon^{1/2} B_0$. Разложение (4) задает иерар-

хию масштабов. В системе отсчета, движущейся со скоростью Альфвена вдоль оси z , которая равна единице в используемых безразмерных переменных, зависимость всех величин от координаты z является медленной, порядка ε . Более медленной, порядка $\varepsilon^{3/2}$, считается зависимость от поперечных координат x, y , а зависимость от времени имеет порядок ε^2 .

В каждом порядке разложения по ε уравнений движения и Максвелла (2), (3) возникает набор алгебраических и дифференциальных соотношений. Из условий разрешимости этого набора следуют определенные связи между функциями из предыдущих порядков разложения. Поскольку в дальнейшем нас преимущественно интересуют решения в виде уединенных волн, при решении дифференциальных уравнений накладываются условия обращения в нуль всех величин при $z \rightarrow -\infty$. Замкнутая система уравнений на первые члены разложения (4) порядка $\varepsilon^{1/2}$ и ε получается из условия разрешимости уравнений порядка ε^3 .

Опуская подробности стандартных и весьма громоздких вычислений, запишем результат в виде

$$\begin{aligned} b_{\alpha,t} &= -\left[b_\alpha (\mathbf{b}^2 + \mu b_z) - \varepsilon_{\alpha\beta} b_{\beta,z} \right]_{,z} + \frac{1}{2} [\mu \mathbf{b}^2 + b_z]_{,\alpha}, \\ b_{z,z} &= -b_{x,x} - b_{y,y}, \quad \alpha = x, y. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь сохранены обозначения для растянутых координат, т. е. сделана замена $\varepsilon^2 t \rightarrow t$, $\varepsilon^{3/2} x \rightarrow x$, $\varepsilon^{3/2} y \rightarrow y$, $\varepsilon(z-t) \rightarrow z$. Функции

$$b_\alpha(t, x, y, z) = B_\alpha^{(1)}(t, x, y, z) \quad (\alpha = x, y)$$

равны первым членам разложения (4) для поперечных компонент магнитного поля. В первом порядке разложения $B_z^{(1)}(t, x, y, z) = 0$, а функция

$$b_z(t, x, y, z) = B_z^{(2)}(t, x, y, z) \neq 0$$

появляется во втором порядке разложения. Жирным шрифтом обозначается двумерный вектор $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — двумерный единичный антисимметричный тензор ($\varepsilon_{xy} = 1$).

Параметры невозмущенной плазмы характеризует единственный входящий в (5) нечисловой коэффициент $\mu = \sqrt{1 - V_A^2 / c^2}$. При достаточно малой величине B_0 , когда можно пренебречь поперечными компонентами тока смещения в (3), $V_A \ll c$ и $\mu \rightarrow 1$. Заметим, что уравнения (5) содержат как квадратичные, так и кубические по \mathbf{b} члены, которые в силу выбранной иерархии масштабов (4) оказываются одного порядка малости. Квадратичные члены пропадают лишь в релятивистском пределе $\mu \rightarrow 0$.

Если поля не зависят от поперечных координат x, y , то $b_z = 0$, и тогда из уравнений (5) получается нелинейное уравнение Шредингера (1).

Отметим некоторые общие свойства системы уравнений (5).

При помощи двумерного векторного потенциала $b_x = -a_{y,z}, b_y = a_{x,z}, b_z = a_{y,x} - a_{x,y}$ уравнения (5) могут быть записаны в виде уравнений Эйлера–Лагранжа для действия $L = \int dt dr L$ с лагранжианом

$$L = \epsilon_{\alpha\beta} (a_{\alpha,t} b_\beta + b_{\alpha,z} b_\beta) + \frac{1}{2} b_z^2 + \mu b_z \mathbf{b}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{b}^4, \quad (6)$$

где подразумевается, что компоненты магнитного поля b_α, b_z выражены через потенциал a_α . Заметим, что поскольку последний член в (6) положителен, функционал действия L ограничен снизу.

Из инвариантности действия с лагранжианом (6) относительно трансляций следует закон сохранения четырех-импульса. В частности, энергия равна

$$H = \int dr \left[\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} b_{\alpha,z} b_\beta + \frac{1}{4} b_z^2 + \frac{\mu}{2} b_z \mathbf{b}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{b}^4 \right]. \quad (7)$$

При помощи энергии H уравнения (5) можно записать в гамильтоновом виде

$$b_{\alpha,t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\delta H}{\delta b_\alpha} \right), \quad (8)$$

где вариационные производные нужно вычислять с учетом последнего уравнения (5), не содержащего производных по времени.

Кроме того, поскольку лагранжиан (6) инвариантен относительно вращений вокруг оси z , сохраняется также z -компонента углового момента $M = \int dr M$. В полярных координатах ($x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$) плотность углового момента равна

$$M = b_\theta a_{\rho,\theta} - b_\rho a_{\theta,\rho}. \quad (9)$$

3. КОСЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим решения уравнений (5) в виде функций $b_\alpha(\zeta)$, где $\zeta = z \cos \phi - x \sin \phi - ut$. Подобные решения описывают плоские волны, распространяющиеся под углом ϕ_0 к внешнему магнитному полю. С учетом разницы в масштабах продольных и поперечных координат (4), параметр ϕ связан с углом ϕ_0 соотношением $\tan \phi_0 = \epsilon^{1/2} \tan \phi$, т. е., хотя $\phi_0 \ll 1$, величина $0 < \phi < \pi/2$ произвольна с единственным ограничением $\pi/2 - \phi \gg \epsilon^{1/2}$.

Удобно изменить обозначения. Положим

$$\xi = \frac{\sin^2 \phi}{4 \cos \phi} \zeta,$$

$$q(\xi) = -2 \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} b_x(\zeta), \quad (10)$$

$$p(\xi) = 2 \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} b_y(\zeta).$$

Из уравнений (5) или эквивалентных им уравнений (8) теперь следуют уравнения на функции $q(\xi), p(\xi)$

$$q_{,\xi} = -2pv - 2\mu pq + p(p^2 + q^2) = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (11)$$

$$p_{,\xi} = 2q(v - 1) + \mu(p^2 + 3q^2) - q(p^2 + q^2) = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где

$$H = q^2 - (v + \mu q)(q^2 + p^2) + \frac{1}{4}(q^2 + p^2)^2 \quad (12)$$

и $u = v \sin^2 \phi / (2 \cos \phi)$.

Заметим, что уравнения (11) и гамильтониан (12) не зависят от параметра ϕ , т. е. от угла распространения волны ϕ_0 . Тем самым какое-либо решение уравнений (11) при помощи отображения (10) задает целое семейство решений исходных уравнений (5), зависящее от параметра ϕ .

Для уединенных волн $q(\xi) \rightarrow 0, p(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$, и поэтому гамильтониан (12) при $q = p = 0$ должен иметь седловую точку. Легко проверить, что это условие выполняется лишь при $0 < v < 1$.

Топология линий уровня гамильтониана (12) зависит от соотношения между фазовой скоростью v и параметром μ , а также выполнения неравенств

$$\frac{2^{3/2}}{3} v < \mu < \frac{2^{1/2}}{\sqrt{3 - v^2}}. \quad (13)$$

Два примера линий уровня гамильтониана (12), построенных при условии (13), показаны на рис. 1. Сепаратрисы $S_{\pm 1}$ на рис. 1, проходящие через начало координат, соответствуют решениям (11) в виде уединенных волн с $q, p \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Помимо этого, существуют еще две сепаратрисы $S'_{\pm 1}$, проходящие через точку $q_0 \neq 0, p = 0$. Кривые $S'_{\pm 1}$ связаны с решениями (11), для которых величина $q(\xi) \sim b_x(\xi) \neq 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, что соответствует некоторому углу распространения волны, отличному от ϕ_0 . Таким образом, сепаратрисы $S_{\pm 1}$ и $S'_{\pm 1}$ на рис. 1 после надлежащей замены переменных отображаются в одно и то же семейство решений уравнений (5), и достаточно рассмотреть решения, связанные только с кривыми $S_{\pm 1}$.

Жирными точками на рис. 1 показаны локальные экстремумы функции (12), для которых решения (11) не зависят от ξ . Эти точки отображаются в тривиальные решения исходных уравнений, для которых магнитное поле постоянно и направлено под некоторым углом к оси z , а возмущение всех остальных величин равно нулю.

При нарушении одного из неравенств (13) сепаратрисы $S_{\pm 1}$ на рис. 1 пропадают и появляются дополнительные экстремальные точки. При этом топология сепаратрис $S_{\pm 1}$ остается неизменной.

Независимо от соотношения между параметрами ν и μ и выполнения неравенств (13) решения для уединенных волн, соответствующие сепаратрисам S_{σ} на рис. 1, можно записать как

$$q^{(\sigma)}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^3 q_i \sigma^i e^{i\kappa} + \sum_{i=0}^3 d_i \sigma^i e^{i\kappa}}{4},$$

$$p^{(\sigma)}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^3 p_i \sigma^i e^{i\kappa} + \sum_{i=0}^3 d_i \sigma^i e^{i\kappa}}{4},$$
(14)

где $\sigma = \pm 1$, $\kappa = \sqrt{\nu(1-\nu)}(\xi + \xi_0)$ и ξ_0 — произвольная действительная константа. При $\xi_0 = 0$ коэффициенты разложения в (14) имеют вид

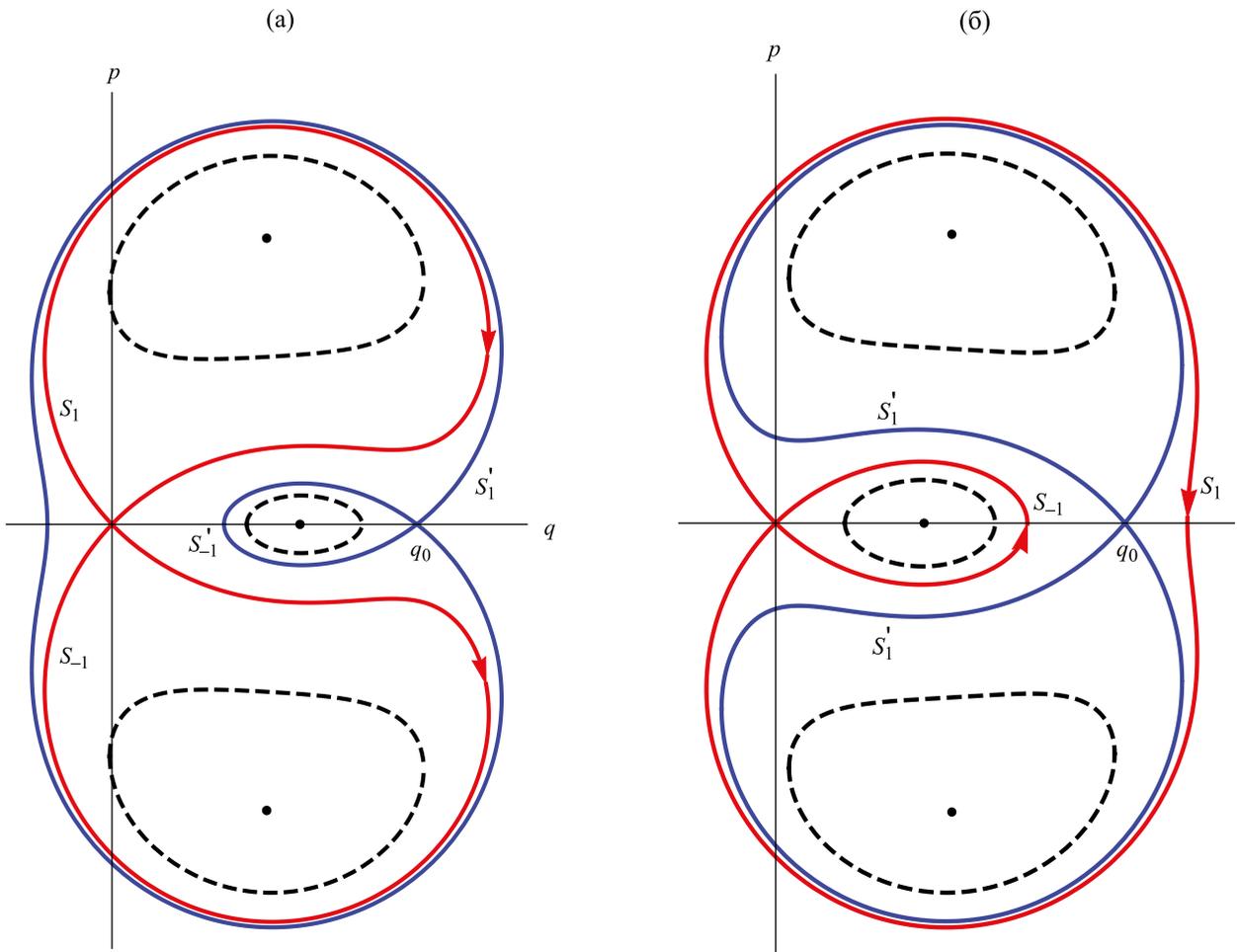


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений (11). Стрелки обозначают направление изменения величин $q(\xi)$, $p(\xi)$ при увеличении ξ , точками показаны экстремумы функции (12). Штриховыми линиями показаны периодические решения системы (11): $\nu = 0.48$, $\mu = 0.69$ (а), $\nu = 0.51$, $\mu = 0.71$ (б).

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}, \quad q_2 = \frac{\mu}{2v^4}, \quad q_3 = \frac{v^2 - \mu^2}{2^4 v^7 \sqrt{1-v^2}}, \\
 p_1 &= 1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{v^2 - \mu^2}{2^4 v^6 (1-v^2)}, \\
 d_0 &= 1, \quad d_1 = -\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}, \\
 d_2 &= \frac{3\mu^2 + 2v^4 - (4\mu^2 + 1)v^2}{2^3 v^6 (1-v^2)}, \\
 d_3 &= \frac{\mu}{v^2} q_3, \quad d_4 = \frac{v^2}{1-v^2} q_3^2.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

При изменении величины ξ_0 коэффициенты (15) очевидным образом перенормируются. В частности, выбором константы ξ_0 можно добиться того, чтобы решения (14) удовлетворяли соотношениям чет-

ности: $q^{(-1)}(\xi) = q^{(1)}(-\xi)$, $p^{(-1)}(\xi) = -p^{(1)}(-\xi)$ при $v < 1 - \mu^2$ и $q^{(\sigma)}(\xi) = q^{(\sigma)}(-\xi)$, $p^{(\sigma)}(\xi) = -p^{(\sigma)}(-\xi)$ при $v > 1 - \mu^2$.

Два примера зависимости функций $q^{(\sigma)}, p^{(\sigma)}$ от ξ показаны на рис. 2, 3. Из рисунков видно, что профили уединенной волны при $v < 1 - \mu^2$ асимметричны и становятся симметричными при $v > 1 - \mu^2$.

Функции (14) позволяют определить деформацию магнитного поля при распространении уединенной волны. Качественная картина силовых линий, получающаяся после добавления постоянного, параллельного оси z , магнитного поля \mathbf{B}_0 , показана на рис. 4. Из рисунка видно, что уединенная волна приводит к сдвигу силовых линий магнитного поля. Направление сдвига в общем случае зависит от параметров v и μ .

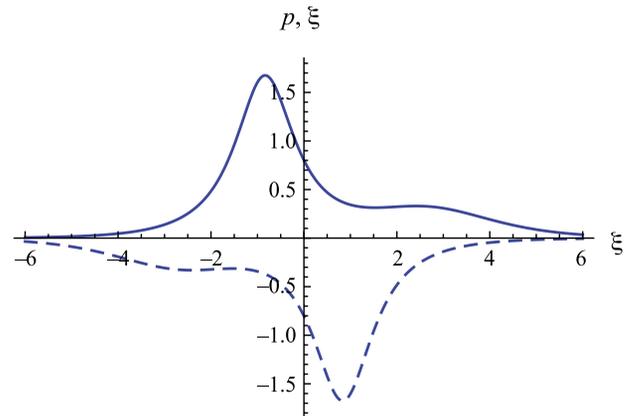
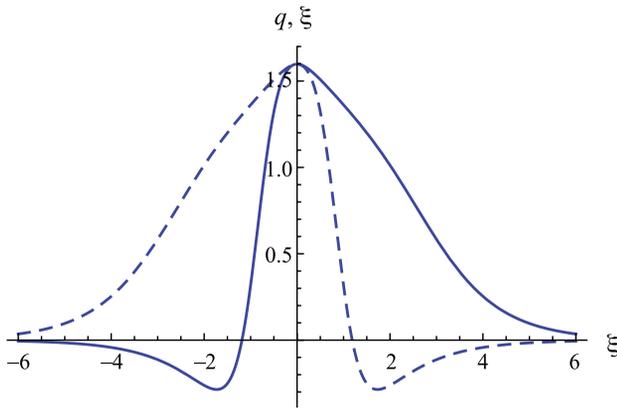


Рис. 2. Зависимость функций (14) от ξ при $v = 0.48, \mu = 0.69$. Сплошные линии — $\sigma = 1$, штриховые — $\sigma = -1$.

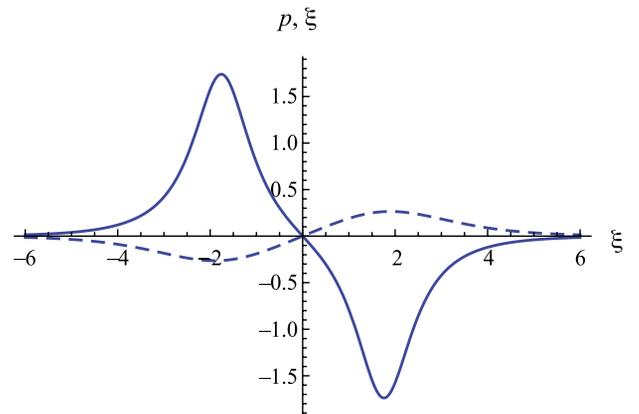
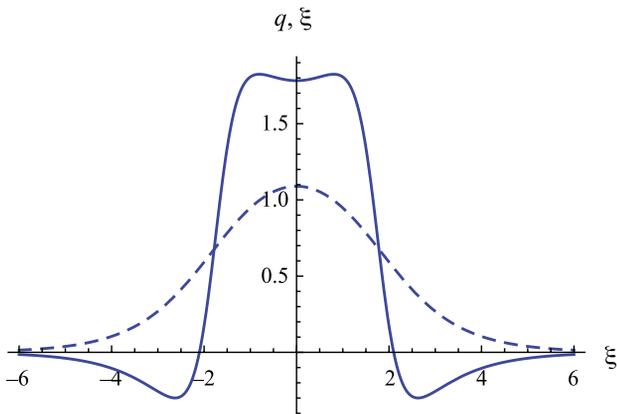


Рис. 3. Зависимость функций (14) от ξ при $v = 0.51, \mu = 0$. Сплошные линии — $\sigma = 1$, штриховые — $\sigma = -1$.

При $v = 1 - \mu^2$ решения (14) можно переписать как

$$q^{(\sigma)}(\xi) = \mu \frac{e^\kappa - \sigma\sqrt{1-\mu^2}}{\cosh \kappa - \sigma\sqrt{1-\mu^2}}, \quad (16)$$

$$p^{(\sigma)}(\xi) = \frac{\sigma\mu^2}{\cosh \kappa - \sigma\sqrt{1-\mu^2}},$$

где $\kappa = 2\mu\sqrt{1-\mu^2}\xi$. Это решение описывает бесстолкновительную ударную волну с $q^{(\sigma)} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$ и $q^{(\sigma)} \rightarrow 2\mu$ при $\xi \rightarrow \infty$. Для ударной волны (16) деформация поля сводится к повороту направления ведущего магнитного поля на некоторый угол в плоскости xz . Качественную картину силовых линий можно получить, например, если отбросить верхнюю часть рис. 4б.

Таким образом, при малых углах между фазовой скоростью плоской волны и внешним магнитным полем существуют уединенные волны, имеющие универсальную, не зависящую от угла распространения форму. Однако в соответствии с (10) амплитуда и диапазон скоростей таких волн зависят от угла распространения. При стремлении угла распространения к нулю амплитуда уединенных волн стремится к нулю, а характерный пространственный масштаб к бесконечности. При возрастании угла распространения $\phi \rightarrow \pi/2$ наблюдается обратная зависимость: амплитуда волн увеличивается, а характерный пространственный масштаб уменьшается.

4. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

В этом разделе обсуждается возможность существования неоднородных пространственно-локализованных решений уравнений (5). Ограничимся аксиально-симметричным случаем.

Перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, при этом $a_x = a_\rho \cos \theta - a_\theta \sin \theta$, $a_y = a_\rho \sin \theta + a_\theta \cos \theta$. Решение уравнений (5) ищется в виде функций $a_{\rho,\theta} = a_{\rho,\theta}(\rho, \zeta)$, где $\zeta = z - ut$, не зависящих от полярного угла θ . Компоненты магнитного поля выражаются через a_α стандартным образом $b_\rho = -a_{\theta,\zeta}$, $b_\theta = a_{\rho,\zeta}$, $b_z = a_{\theta,\rho} + a_\theta / \rho$. Заметим, что угловой момент (9) в этом случае равен нулю.

Легко убедиться, что лагранжева плотность (6) для функций рассматриваемого вида выражается только через θ -компоненты магнитного поля и век-

торного потенциала. Обозначая их для краткости как $b_\theta(\rho, \zeta) = b(\rho, \zeta)$, $a_\theta(\rho, \zeta) = a(\rho, \zeta)$, получаем

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho L,$$

$$L = \frac{a^2}{2\rho^2} - u(a_{,\zeta}^2 + b^2) + 2a_{,\zeta}b_{,\zeta} + \frac{a_{,\rho}^2}{2} + \mu \left(b^2 a_{,\rho} + \frac{ab^2}{\rho} + \frac{aa_{,\zeta}^2}{\rho} + a_{,\zeta}^2 a_{,\rho} \right) + \frac{1}{2}(a_{,\zeta}^2 + b^2)^2. \quad (17)$$

Уравнения для функций $a(\rho, \zeta)$, $b(\rho, \zeta)$ получаются из условия экстремальности действия (17)

$$\left[b_{,\zeta} - ua_{,\zeta} + \mu a_{,\zeta} \left(a_{,\rho} + \frac{a}{\rho} \right) + b^2 a_{,\zeta} + a_{,\zeta}^3 \right]_{,\zeta} + \frac{1}{2} \left[a_{,\rho} + \frac{a}{\rho} + \mu b^2 + \mu a_{,\zeta}^2 \right]_{,\rho} = 0, \quad (18)$$

$$a_{,\zeta\zeta} + ub - \mu b \left(a_{,\rho} + \frac{a}{\rho} \right) - b^3 - ba_{,\zeta}^2 = 0.$$

Выясним условия, при которых существуют пространственно-локализованные решения уравнений (18). На больших расстояниях функции $a(\rho, \zeta)$ и $b(\rho, \zeta)$ должны стремиться к нулю, и уравнения (18) можно линеаризовать

$$(b - ua)_{,\zeta\zeta} + \frac{1}{2} \left(a_{,\rho} + \frac{a}{\rho} \right)_{,\rho} = 0, \quad (19)$$

$$a_{,\zeta\zeta} + ub = 0.$$

После разделения переменных общее решение линеаризованных уравнений (19) можно записать как суперпозицию функций вида

$$a = e^{-k|\zeta|} K_1(\lambda\rho), \quad (20)$$

$$b = -\frac{k^2}{u} e^{-k|\zeta|} K_1(\lambda\rho),$$

где $K_1(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и константы λ и k связаны соотношением

$$2k^4 + 2k^2u^2 - \lambda^2u = 0. \quad (21)$$

Решения (20) затухают на бесконечности при $k > 0$ и $\lambda > 0$, что вследствие соотношения (21) возможно лишь при условии $u > 0$, которое будет считаться выполненным. Заметим, что, как легко показать, при этом же условии вторая вариация $\delta^2 L$ (17) при $a = b = 0$ является не знакоопределенным функционалом, т. е. нулевое решение уравнений (18) не реализует экстремум (17).

Уравнения (18) необходимо снабдить граничными условиями. В качестве одного из граничных условий можно положить условие экспоненциального затухания на бесконечности $a, b \sim e^{-k|\zeta| - \lambda\rho} / \sqrt{\rho}$. Поскольку функции $a(\rho, \zeta)$ и $b(\rho, \zeta)$ являются компонентами вектора, то вторым граничным условием является их обращение в нуль на оси $a(\rho, \zeta) \rightarrow 0$ и $b(\rho, \zeta) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Это же условие обеспечивает сходимость интеграла в (17). Отметим также, что благодаря симметрии при замене $\zeta \rightarrow -\zeta$ в лагранжиане (17) и уравнениях (18) функции $a(\rho, \zeta)$ и $b(\rho, \zeta)$ можно считать четными функциями ζ и решать уравнения при $\zeta > 0$ с граничными условиями $a_{,\zeta}(\rho, 0) = 0, b_{,\zeta}(\rho, 0) = 0$.

Наложённые условия не гарантируют единственности решения нелинейной системы уравнений (18). Поскольку последний член в (17) положителен, при $u > 0$ существует нетривиальное решение $a, b \neq 0$ уравнений (18), реализующее абсолютный минимум функционала действия. Это решение описывает локализованную в пространстве уединенную волну. Однако совсем не очевидно, что не существует других, локальных экстремумов функционала (17), удовлетворяющих уравнениям (18) с теми же граничными условиями. Если локальные экстремумы существуют, то соответствующие решения (18) можно назвать возбужденными состояниями уединенной волны.

Непосредственное численное решение уравнений (18) в неограниченной области представляет значительные трудности. Поэтому в дальнейшем приводятся результаты качественного анализа,

основанного на минимизации действия (17) при помощи некоторого набора базисных функций.

Пробные функции выбираются в виде

$$a(\rho, \zeta) = \sum_n G_n T_n(\rho, \zeta), \quad b(\rho, \zeta) = -\sum_n \frac{k_n^2}{u} G_n T_n(\rho, \zeta), \quad (22)$$

где G_n — произвольные коэффициенты и

$$T_n(\rho, \zeta) = \frac{\rho(1 + \lambda_n \rho)}{\lambda_n \sqrt{1 + \rho^5}} \exp\left[-\lambda_n \rho - \sqrt{s_n^2 + k_n^2 \zeta^2}\right]. \quad (23)$$

Здесь величины k_n и λ_n связаны соотношением (21), а константы s_n характеризуют характерный масштаб при малых значениях ζ . Функции (23) на больших расстояниях ведут себя как (20), а на оси $\rho = 0$ обращаются в нуль.

После подстановки (22) в функционал (17) несобственные интегралы рассчитываются численными методами. Далее находятся экстремумы полученной функции $L(G_n, \lambda_n, s_n)$. Для большого числа членов в суммах (22) эта процедура требует существенных вычислительных затрат, однако качественные результаты получаются при использовании всего двух членов разложения.

Пример построенного таким образом распределения компонент магнитного поля уединенной волны для глобального минимума (17) при $u = 0.5, \mu = 0.9$ показан на рис. 5а–в. При построении использованы параметры базисных функций (23) $\lambda_1 \approx 2.04, \lambda_2 \approx 2.46, s_1 \approx 0.96, s_2 \approx 2.01$, и глобальный минимум $L(G_n, \lambda_n, s_n)$ достигается при $G_1 \approx -100, G_2 \approx 320$. Характерная конфигурация силовых ли-

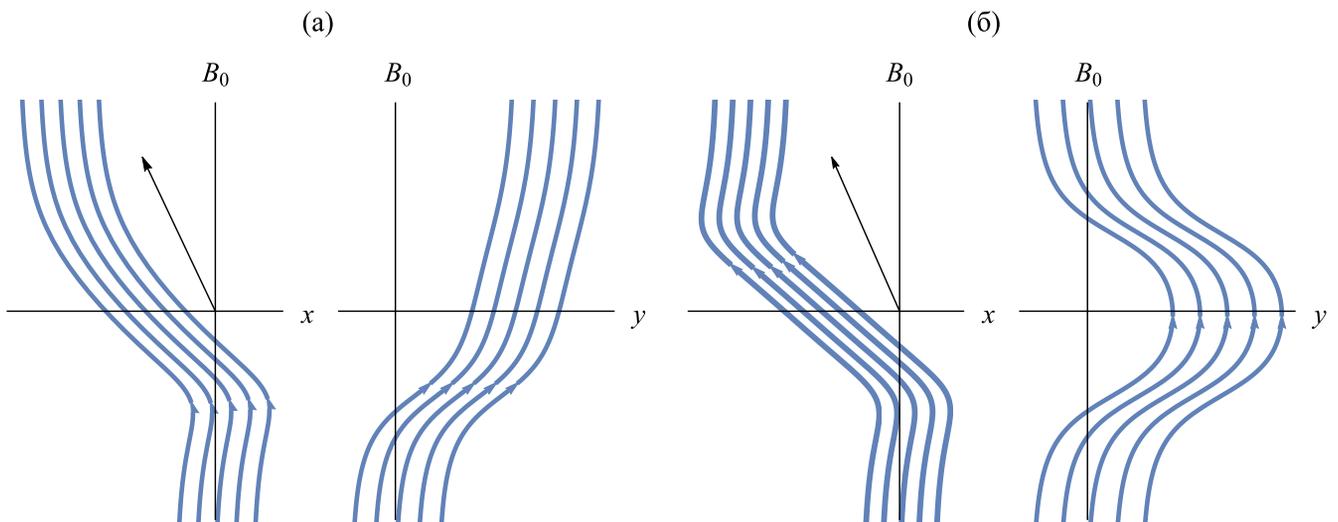


Рис. 4. Проекция силовых линий на плоскости xz и $yz, \sigma = 1$. Стрелкой показано направление распространения волн: $v < 1 - \mu^2$ (а), $v > 1 - \mu^2$ (б).

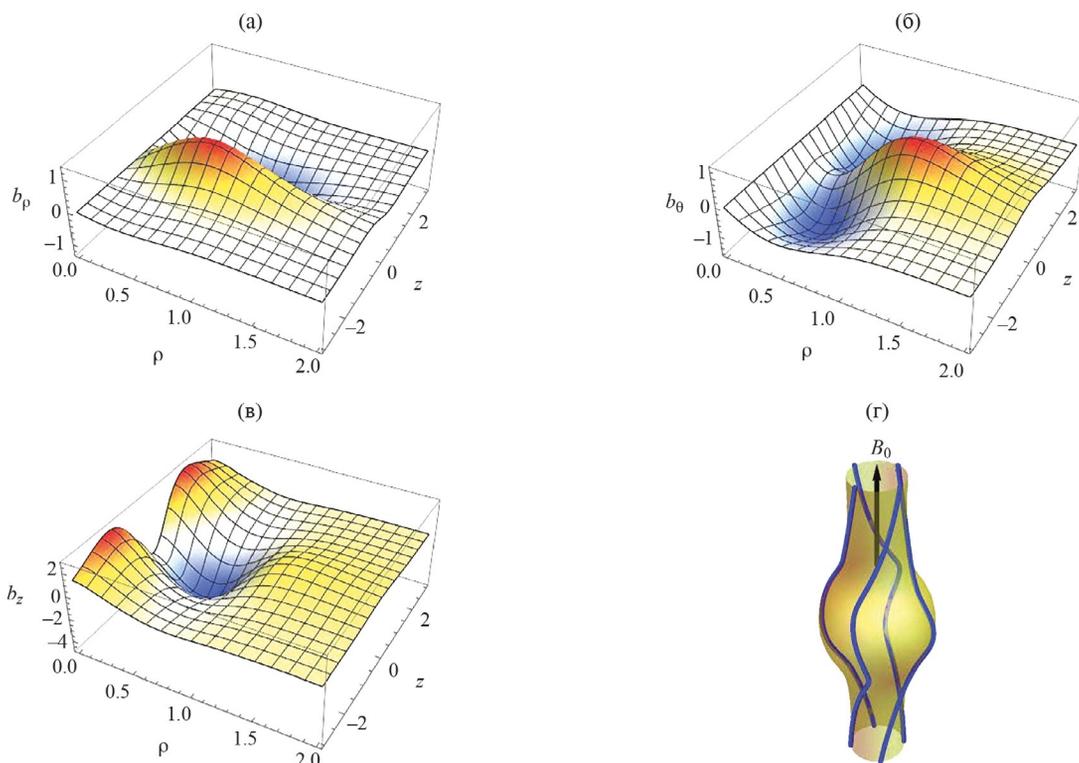


Рис. 5. Распределение компонент магнитного поля для основного состояния уединенной волны (а–в), конфигурация силовых линий (г).

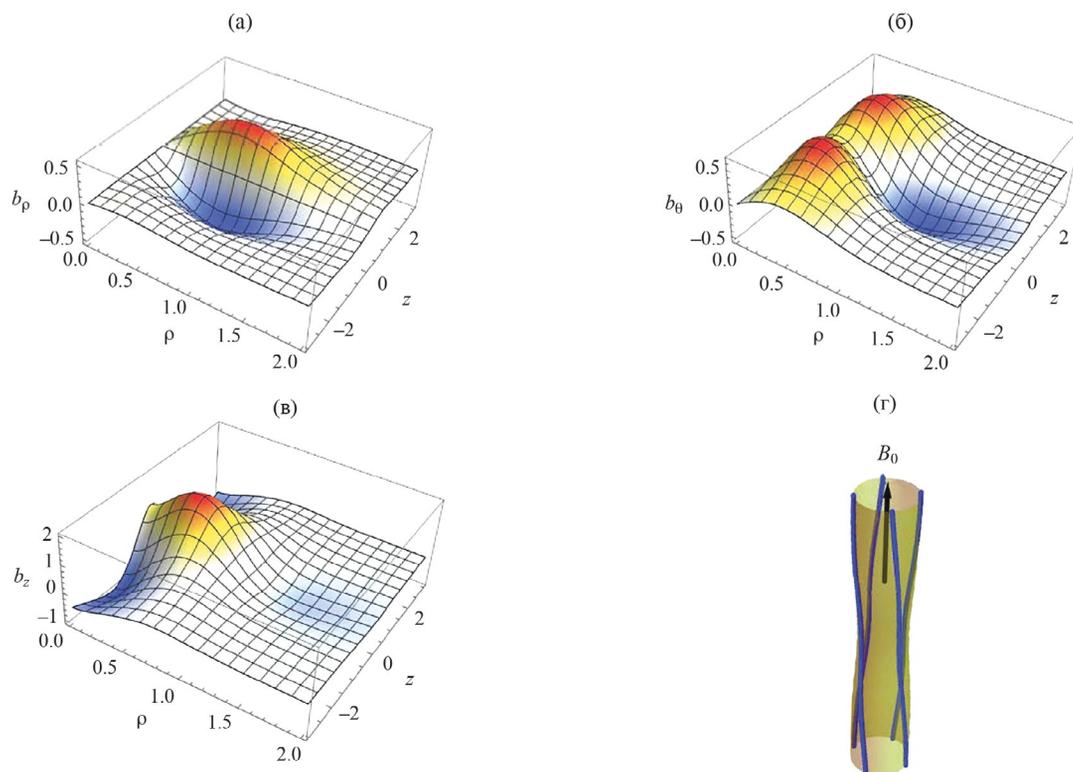


Рис. 6. Распределение компонент магнитного поля для возбужденного состояния уединенной волны (а–в), конфигурация силовых линий (г).

ний, получающаяся после добавления постоянного магнитного поля \mathbf{V}_0 , показана на рис. 5. Из рисунка видно, что в центре уединенной волны напряженность магнитного поля уменьшается, а силовые линии закручиваются вокруг оси z , т. е. конфигурация напоминает открытую плазменную ловушку. Угол вращательного преобразования зависит от исходного радиуса трубки силовых линий при $z \rightarrow -\infty$ и в исходных, не растянутых координатах пропорционален $\varepsilon^{1/2}$.

При тех же значениях параметров λ_n, s_n существует еще один, локальный минимум функционала (17) ($G_1 \approx 41, G_2 \approx -132$), соответствующий возбужденному состоянию уединенной волны (рис. 6). По сравнению с рис. 5 изменяются знаки возмущений компонент магнитного поля, а максимальная амплитуда примерно вдвое меньше. Кроме того, в центре уединенной волны напряженность магнитного поля увеличивается (рис. 6г).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная в работе система уравнений описывает нелинейную динамику связанных магнито-звуковых волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, при учете медленной зависимости

от поперечных координат. Показано, что амплитуда плоских уединенных волн при уменьшении угла распространения стремится к нулю.

Доказано также, что существуют решения в виде пространственно локализованных трехмерных нелинейных волн. Построенная качественная картина указывает, в частности, на возможность существования возбужденных состояний уединенных волн. Однако вопрос о полном спектре состояний уединенных волн требует дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
2. Kakutani T., Ono H. // J. Phys. Soc. Jap. 1969. V. 26. P. 1305.
3. Mjølhus E., Wyller J. // Physica Scripta. 1986. V. 33. P. 442.
4. Kaup D.J., Newell A.C. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 798.
5. Kawata T., Sacai J., Kobayashi N. // J. Phys. Soc. Jap. 1980. V. 48. P. 1371.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М: Мир, 1984.

MAGNETOSONIC SOLITARY WAVES

A. M. Ignatov^{a, *}

^aProkhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia

*e-mail: aign@fpl.gpi.ru

Abstract—The set of equations is obtained that describes the nonlinear three-dimensional dynamics of magnetosonic waves. Plane solitary waves propagating at a small angle to the guiding magnetic field have been studied. Three-dimensional spatially localized waves have been qualitatively studied.

Keywords: magnetosonic waves, solitary waves