

КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© 2024 г. М. А. Юденкова^{a,b}, Д. А. Климачков^a, А. С. Петросян^{a,b,*}

^a Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 22.11.2023 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята к публикации 25.04.2024 г.

Развита теория крупномасштабных течений во вращающейся астрофизической плазме в условиях нетривиальных свойств физической среды, которые не описываются классической гидродинамической теорией плазмы. В качестве первого шага теория развивается в рамках модели нейтральной жидкости для описания астрофизической плазмы, имея в виду последующее обобщение для учета магнитных эффектов. Такая модель имеет самостоятельное значение для изучения турбулентного динамо в областях звездообразования в галактиках, для изучения гидродинамических неустойчивостей в низкоионизованных дисках (poorly ionized), для описания меридиональных течений ниже конвективных зон в маломассивных звездах и на Солнце, а также для изучения осцилляций Солнца и звезд. Поэтому полученные результаты имеют более широкое приложение, например, для описания геофизических течений. Построение теории основано на двух ключевых идеях, развитых в плазменной астрофизике: использование модели мелкой воды с крупномасштабной сжимаемостью и использование модели двуслойной мелкой воды. В работе выведены уравнения двуслойной мелкой воды с учетом вращения и влияния сферичности течения на вращение, в которых в верхнем слое учитываются эффекты крупномасштабной сжимаемости. Для вращающейся системы получены дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре в двуслойной мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости, при учете влияния сферичности на вращение в высокочастотном пределе получены аналогичные дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре, в низкочастотном пределе получено дисперсионное соотношение для волн Россби. Показано, что дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре с учетом сферичности течения имеют качественно иной вид, что приводит к трехволновым взаимодействиям волн Пуанкаре и взаимодействию двух волн Пуанкаре с волной Россби, которых не наблюдается в однослойном течении сжимаемой жидкости. Методом многомасштабных разложений исследованы все типы трехволновых взаимодействий для рассматриваемых течений.

Ключевые слова: астрофизическая плазма, двуслойная мелкая вода, крупномасштабная сжимаемость, волны Россби, волны Пуанкаре

DOI: 10.31857/S0367292124060062, EDN: PSQWBH

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена развитию теории крупномасштабных течений во вращающейся астрофизической плазме в условиях нетривиальных свойств физической среды, которые не описываются классической гидродинамической теорией плазмы. Как будет указано ниже, такие нетривиальные свойства существенным образом определяют динамику и свойства широкого класса астрофизических объектов.

Гидродинамические течения, например, волны и турбулентность, широко распространены и решающим образом влияют на различные астрофизические процессы, такие как образование звезд и планет, ускорение и перенос космических лучей, образование холодного газа в околосгалактических средах, усиление магнитных полей вследствие динамо, аккреция и маг-

нитное пересоединение. В последнее время активно развиваются теоретические исследования в плазменной астрофизике, изучающие общие свойства течений, характерные для различных астрофизических объектов [1–3]. Эти исследования выполнены в рамках классической магнитной гидродинамики вращающейся плазмы. Тем не менее в настоящее время имеются наблюдения новых астрофизических объектов с беспрецедентной точностью и с беспрецедентным размером выборки, что настоятельно требует новых теоретических идей для понимания реалистичных течений в астрофизической плазме в условиях нетривиальных характеристик астрофизической среды. В качестве примера приведем проблемы, связанные с зарождением планет в астрофизических дисках [4, 5], в которых одновременно сосуществуют как области, содержащие планетезимали, так и области, свобод-

ные от планетезималей. Отметим также пыльные облака на Марсе [6, 7] и вызванные пыльными облаками электрические явления как в планетных атмосферах, так и в атмосфере Земли. Отметим также такие важные объекты как компактные пылевые облака в межзвездной среде [8] а также пылевые облака в областях ионизованного водорода в межзвездной среде (известные как H II регионы) [9]. Ключевая идея нашей работы — возможность описания таких нетривиальных течений путем их описания моделями с переменными термодинамическими свойствами. Предлагаемая работа является исследованием течений космической и астрофизической плазмы, не описываемых классической магнитной гидродинамикой. На самых больших масштабах плазменная среда испытывает воздействие гравитации и вращения. Сформулированная цель предлагаемого исследования сводится к изучению волновых процессов, свойств турбулентности и зональных течений вне рамок классической магнитной гидродинамики вращающейся плазмы на пространственно-временных масштабах, характерных для астрофизических объектов. Работа направлена на решение фундаментальной проблемы описания и изучения многомасштабных течений астрофизической плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих различные объекты во Вселенной.

Предлагаемое исследование — это первый шаг в развитии теории течений с переменными свойствами среды, поэтому на данном этапе мы пренебрегаем магнитными эффектами и ограничиваемся течениями нейтральной вращающейся жидкости. Учет эффектов магнитного поля будет осуществлен в отдельной работе. Тем не менее, полученные в работе результаты, имеют непосредственное применение в астрофизической плазме в ситуациях, в которых магнитное поле не оказывает воздействие на кинематические течения, как например в проблемах, связанных с турбулентным динамо в областях звездообразования в галактиках [10]. Один из механизмов образования магнитных полей в областях звездообразования в галактиках — вейбелевская неустойчивость [11]. Численным моделированием методом частиц в ячейках показано, что в результате вейбелевской неустойчивости возникает турбулентность с включениями в виде магнитных полей, которые усиливаются механизмом динамо [12]. Аналогичная ситуация возникает в задачах зарождения планет. Протопланетные диски являются низкоионизованными (poorly ionized) и слабо связаны с магнитными полями. Отсутствие магнитогидродинамической турбулентности вызвало интерес и инициировало всплеск работ по чисто гидромеханическим механизмам в протопланетных дисках [5]. Обнаружены три новых гидродинамических неустойчивости: вертикальная сдвиговая неустойчивость [13–15], конвективная неустойчивость и усиление бароклинного вихря [16, 17], неустойчивость

самовоспроизводящихся вихрей в сдвиговом течении (zombie vortex instability) [18–21]. Отметим также важные задачи плазменной астрофизики, связанные с меридиональными циркуляциями ниже конвективных зон в маломассивных звездах и на Солнце. Такие течения играют важную роль в переносе углового момента, а также вносят значительный вклад в перенос химических составляющих и магнитных полей в радиационной зоне [22, 23]. Важную роль в астрофизике играют пульсации звезд и Солнца — радиальные сферически симметричные пульсации при которых звезды и Солнце периодически расширяются и сжимаются [24]. Отметим, что наблюдение пульсаций играет определяющую роль в обнаружении волн Россби в экваториальной зоне Солнца [25]. Такие течения не подвергаются воздействию магнитного поля. Заметим также, что полученные в нашей работе результаты имеют важные приложения, например, при изучении крупномасштабных пыльных бурь в атмосферах Марса и Земли [26]. Мы, конечно же, не претендуем на исследование всех перечисленных объектов и сфокусируемся на том, чтобы показать важную роль изучения течений с переменными термодинамическими свойствами в астрофизической плазме. Как будет показано ниже, полученные в нашей работе результаты имеют достаточно широкий потенциал применимости к проблемам геофизической гидродинамики.

Работа основана на двух ключевых идеях, развитых в плазменной астрофизике. Первая идея заключается в использовании приближения мелкой воды для сжимаемых течений [27–31]. Такое приближение хорошо описывает астрофизические течения с крупномасштабной сжимаемостью, а также течения в планетных атмосферах при наличии пыли. Вторая идея заключается в возможности использования модели многослойных течений мелкой воды для описания физических процессов в течениях с переменными термодинамическими характеристиками [32, 33].

Несмотря на значительное количество работ, изучающих плазменные объекты в астрофизике, влияние вращения на сложные магнитогидродинамические течения привлекло внимание специалистов совсем недавно. Существуют многочисленные работы по теории и численному моделированию турбулентного динамо в астрофизике, обзор которых мы не приводим поскольку изучение динамо остается вне рамок нашей работы. Исследование фундаментальных свойств турбулентности во вращающихся магнитогидродинамических течениях до настоящего времени носит фрагментарный характер и относится в основном к изучению турбулентности в астрофизических дисках (см. обзоры [34–36]), в солнечном тахоклине и конвективной области Солнца (см. обзор [37]). Исключения составляют несколько работ, изучающих свойства магнитогидродинамической турбулентности простыми аналитическими методами с использованием рядов Фурье для параметров подобия, ха-

рактерных для земного ядра [38, 39]. В работах [40, 41] о двумерной магнитогиродинамической турбулентности плазмы на бета-плоскости исследуется крупномасштабная магнитогиродинамическая турбулентность по аналогии с течениями в геофизической гидродинамике. Отметим важные работы [42–44], описывающие существенное отличие течений в астрофизической плазме вследствие богатой и нетривиальной динамики из-за присутствия магнитных полей. В частности, в [42] обнаружена нестационарность зональных течений вследствие возникновения магнитных островов и их взаимодействия. В [43] исследована важная роль магнитных эффектов в зарождении зональных течений во вращающейся плазме на бета-плоскости. Показано, что именно магнитные эффекты определяют динамику зональных течений, а также и механизм их возникновения вследствие несамоподобного затухания турбулентности. Это существенно отличает магнитогиродинамическую турбулентность от турбулентности в геофизической гидродинамике. Отсутствие большого количества работ в такой актуальной для плазменной астрофизики области вызвано прежде всего неподъемностью такой задачи даже для современных суперкомпьютеров. Для прорыва в этом направлении мы будем использовать как теоретические методы, так и новые идеи для анализа результатов моделирования с использованием суперкомпьютерных вычислений.

Существенное отличие магнитогиродинамических течений также имеет место при исследовании крупномасштабных волновых процессов. Основным методом исследования в этом случае является магнитогиродинамическое приближение мелкой воды, предложенное для исследования течений в солнечном тахоклине [45–47]. В работах [48–50] показано, что в этом приближении для слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле само магнитное поле является принципиально трехкомпонентным, в то время как поле скоростей является двухкомпонентным. Несмотря на трехкомпонентность магнитного поля, течения в магнитогиродинамическом приближении мелкой воды остаются двумерными, что ограничивает применимость развитой теории для задачи о самовозбуждении магнитного поля в тонком слое, поскольку для исследования таких течений в галактических дисках и солнечном тахоклине принципиальным является рассмотрение течений на масштабах меньше толщины слоя. Для решения таких задач используется приближение тонкого слоя [51, 52]. Развитая теория обобщена на случай стратифицированной плазмы в двухслойной модели мелкой воды [33]. Определяющая роль трехкомпонентности магнитного поля инициировала важные исследования волн в магнитной гидродинамике стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска [53]. В работе [53] получены новые типы волн: магнитные инерционно-гравитационные волны,

магнитоастрофические волны и магнитные волны Россби. Принципиальный учет эффектов сжимаемости в плазменной астрофизике осуществляется с использованием неупругого приближения (anelastic approximation) [54–56]. Подробный обзор современного состояния теоретических исследований в плазменной астрофизике приведен в [3].

Все перечисленные выше работы выполнены в классическом приближении магнитной гидродинамики и естественным образом не включают принципиально важные эффекты, определяющие поведение вращающейся астрофизической плазмы, описываемое более сложными многожидкостными моделями астрофизических течений [57, 58] и многокомпонентными моделями физики зарождения планет [5]. В работах по частично ионизованной вращающейся плазме вращением заряженной компоненты пренебрегают [57, 58], полагая, что заряженная компонента лишь модифицирует вращающиеся течения нейтрального газа. Тем не менее в астрофизических приложениях именно вращение заряженной компоненты может играть важную роль в крупномасштабных течениях. В работах по изучению совместной эволюции турбулентности и планетезималий [5] изучаются только влияние турбулентности на эффекты взаимодействия частиц и их перенос, и не учитывают обратное влияние частиц на турбулентность в диске. Это ограничивает применимость теории к малым количествам твердых частиц и работает только на начальном этапе зарождения планет. Все перечисленные работы требуют обоснования и получения новых исходных уравнений для развития теории волн и турбулентности, а также адекватного численного моделирования в плазменной астрофизике.

Изучению волн в крупномасштабных течениях посвящено большое количество работ, так как именно волновая динамика зачастую определяет крупномасштабный характер протекающих процессов. Во вращающихся нейтральных и магнитогиродинамических течениях рассматривают волны Пуанкаре [32, 46, 59] и волны Россби [60–63]. Несмотря на сложность наблюдения таких волн в астрофизической плазме, волны Россби недавно были обнаружены на Солнце [25, 64]. Также активно исследуются механизмы влияния волн Россби на солнечные сезоны [65–67] и космическую погоду [68, 69]. Учет сжимаемости в гидродинамических моделях вращающейся плазмы позволит существенно расширить возможности теоретического описания конкретных наблюдений волновых процессов в астрофизических течениях.

В работе предложена теория двухслойной мелкой воды для течений с переменными термодинамическими свойствами, основанные на использовании модели мелкой воды с крупномасштабной сжимаемостью [27, 28, 31]. Показано, что течения двухслойной мелкой воды с переменными термодинамическими свойствами могут быть описаны только в случае, ко-

гда нижний слой полагается несжимаемым. В разд. 2 обсуждается идея двуслойной мелкой воды и выведены соответствующие уравнения для случая течений с переменными термодинамическими свойствами. Развитая теория и полученные уравнения будут обобщены на магнитный случай в отдельной работе. В разд. 3 подробно исследованы все типы линейных волн в рамках развитой модели. Проведен качественный анализ дисперсионных соотношений с целью выявления возможных трехволновых взаимодействий. Исследование линейных волн проведено как при полном учете силы Кориолиса, так и в приближении бета-плоскости для сферических течений. Качественный анализ дисперсионных соотношений впервые позволил предсказать трехволновые взаимодействия волн Пуанкаре в гидродинамике вращающихся течений. Такие эффекты могут играть важную роль в планетных течениях и в астрофизической плазме. В разд. 4 методом многомасштабных разложений исследованы трехволновые взаимодействия полученных волн. Найдены коэффициенты взаимодействия в нелинейных уравнениях. Некоторые начальные условия исследованы на предмет наличия неустойчивостей.

2. УРАВНЕНИЯ ДВУСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВРАЩЕНИЯ

Важным принципиальным свойством течений в астрофизической плазме является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых во Вселенной плазменных течений. Для описания сжимаемых течений, как правило, необходимо использовать полную трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений, которая представляет собой сложную задачу для теоретического рассмотрения и численного моделирования. В работах [27–31] для описания эффектов, возникающих из-за неоднородности плотности, получена модель сжимаемого течения плазмы в приближении мелкой воды. Эта модель получается в результате усреднения по толщине слоя полных уравнений движения Эйлера сжимаемой жидкости в поле силы тяжести. В этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается крупномасштабная зависимость плотности от давления, описывающая эффекты статической сжимаемости [70]. Предложенная система выгодно отличается от традиционных уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических уравнениях мелкой воды высота и горизонтальная скорость столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В сжимаемых уравнениях мелкой воды это взаимодействие определяется не только горизонтальной скоростью и высотой, но и

средней плотностью столба жидкости, вследствие чего учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно. В работе [27] показано, что учет сжимаемости в модели мелкой воды приводит к улучшению предсказания скорости распространения газового потока с примесью твердых частиц.

Другим способом исследования крупномасштабных сжимаемых течений является использование модели многослойной жидкости, в которой каждый слой имеет свои гидродинамические параметры. Естественным первым шагом при этом становится исследование модели двуслойной жидкости в приближении мелкой воды [32, 33]. Уравнения двуслойной мелкой воды с учетом вращения в классическом случае нейтральной несжимаемой жидкости являются обобщением уравнений мелкой воды, на случай тонкого вращающегося слоя, разделенного на два слоя с постоянными, но различными плотностями. Вывод уравнений двуслойной мелкой воды, как и вывод однослойных уравнений, основан на методе усреднения по высоте слоя. Такая модель в отличие от модели крупномасштабной сжимаемости позволяет учитывать большие изменения плотности жидкости и других гидродинамических параметров, однако наличие в модели двух (или нескольких) слоев с различными гидродинамическими параметрами усложняет модель. Таким образом, для улучшения точности описания тонких вращающихся гидродинамических течений в модели двуслойной жидкости, в данном разделе исследуется возможность включения эффектов крупномасштабной сжимаемости в уравнения для одного из слоев двуслойной модели.

2.1. Исходные уравнения

В этом разделе мы получим уравнения мелкой воды для течений со свободной границей на ровной поверхности в поле силы тяжести в двухслойной модели, в которых каждый из слоев имеет различные термодинамические характеристики: нижний слой — высоту h и показатель адиабаты γ , верхний слой жидкости — высоту h' и показатель адиабаты γ' , обозначим $H = h + h'$. Для верхнего слоя величина h является высотой подстилающей поверхности, а для нижнего слоя высота столба h' создает дополнительное давление. Для исследования течений астрофизической плазмы во вращающейся среде удобно перейти в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся с угловой частотой $\Omega = f/2$ [71]. Пусть v_x и v_y — скорости жидкости в нижнем слое, u_x и u_y — скорости жидкости в верхнем слое.

Ось Z системы координат направлена вдоль вектора силы тяжести в противоположном направлении, ось X направлена вдоль широты, ось Y соответственно вдоль долготы.

Запишем исходную систему уравнений для нижне-

го слоя с учетом вращения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - f[\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}] - \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad (3)$$

$$p = \frac{1}{\mu} \rho T. \quad (4)$$

Запишем исходную систему уравнений для верхнего слоя сжимаемой жидкости с учетом вращения

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla(\rho' \mathbf{u}) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p'}{\rho'} - f[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] - \mathbf{g}, \quad (6)$$

$$\frac{p'}{\rho'^{\gamma'}} = \text{const}, \quad (7)$$

$$p' = \frac{1}{\mu} \rho' T'. \quad (8)$$

Здесь (1), (5) — уравнения непрерывности, (2), (6) — уравнения Эйлера с учетом вращения и силы тяжести, (3), (7) — уравнения адиабаты идеального газа, (4), (8) — уравнения Менделеева–Клапейрона. В системах (1)–(4) и (5)–(8) $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ и $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ — крупномасштабные скорости, ρ, ρ' — плотности слоев, p, p' — гидродинамические давления, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, f — параметр Кориолиса, γ, γ' — показатели адиабаты, μ — молярная масса, T, T' — температуры в энергетических единицах в каждом слое соответственно. В системах уравнений (1)–(4) и (5)–(8) мы пренебрегаем влиянием центробежной силы [3, 33]. Таким образом для характерных масштабов неоднородности в рассматриваемых течениях должно выполняться условие $f^2 L/g \ll 1$.

Для вывода уравнений в приближении двухслойной мелкой воды сформулируем следующие граничные условия:

— условие равенства нулю нормальной составляющей скорости v_{n0} на подстилающей поверхности нижнего слоя

$$v_{n0} = v_z|_{z=0} = 0, \quad (9)$$

— условия на нормальные составляющие скорости в нижнем v_{nh} и верхнем u_{nh} слое на границе раздела $h(t, x, y)$ и

— условие равенства давлений сверху и снизу границы раздела

$$\begin{aligned} v_{nh} &= \left(-v_z|_{z=h} + v_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_y|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \kappa_h^{-1} = \\ &= -\frac{\partial h}{\partial t} \kappa_h^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_{nh} &= \left(u_z|_{z=h} - u_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - u_y|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \kappa_h^{-1} = \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} \kappa_h^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$p|_{z=h} = p'|_{z=h}, \quad (12)$$

где $\kappa_h = \sqrt{(1 + (\partial h/\partial x)^2)(1 + (\partial h/\partial y)^2)}$. А также условия на свободной границе $H(x, y)$:

— условие постоянства давления на свободной границе и

— условие на нормальную составляющую скорости u_{nH} в верхнем слое на свободной границе

$$p'|_{z=H} = p_H = \text{const}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_{nH} &= \left(-u_z|_{z=H} + u_x|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial x} + u_y|_{z=H} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \kappa_H^{-1} = \\ &= -\frac{\partial H}{\partial t} \kappa_H^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\kappa_H = \sqrt{(1 + (\partial H/\partial x)^2)(1 + (\partial H/\partial y)^2)}$.

2.2. Приближение мелкой воды для верхнего слоя

Из уравнения (8) получим выражение для плотности верхнего слоя на свободной границе

$$\rho'|_{z=H} = \frac{p_H}{T_H \mu} = \rho_H. \quad (15)$$

Здесь $T_H = T_H(x, y, t)$ — температура на верхней границе верхнего слоя. Из предложения о гидростатическом распределении давления и уравнения состояния газа получим выражения для давления и плотности

$$p'(t, x, y, z) = p_H \left(1 + \frac{H-z}{H_{\rho'}} \right)^{\gamma'/\gamma'-1}, \quad (16)$$

$$\rho'(t, x, y, z) = \rho_H \left(1 + \frac{H-z}{H_{\rho'}} \right)^{1/\gamma'-1}, \quad (17)$$

Здесь $H_{\rho'} = \frac{\gamma'}{\gamma'-1} \frac{\mu T_H}{g}$ — характерная плотностная высота верхнего сжимаемого слоя. Сделаем предположение, что плотность у верхней границы верхнего слоя ρ_H постоянна вдоль всей границы слоя [27]. Тогда, ввиду непрерывности давления вдоль вертикальной координаты, из уравнения состояния (8) следует, что температура на верхней границе T_H и характерная высота сжимаемости $H_{\rho'}$ также постоянны.

Проведем усреднение уравнений (5)–(8) по глубине слоя h' . Для этого воспользуемся правилом Лейбница

$$\begin{aligned} \int_{b(x)}^{a(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{a(x)} f(x, z) dz - \\ &- f(x, a(x)) \frac{\partial a}{\partial x} + f(x, b(x)) \frac{\partial b}{\partial x}. \end{aligned} \quad (18)$$

При усреднении по верхнему слою уравнения непрерывности (5) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_h^H \rho' dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_h^H \rho' u_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_h^H \rho' u_y dz = 0. \quad (19)$$

При усреднении x - и y -составляющих уравнения Эйлера (6) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_h^H \rho' u_x dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_h^H \rho' u_x^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_h^H \rho_2 u_x u_y dz + \\ + \int_h^H \frac{\partial p'}{\partial x} dz = f \int_h^H \rho' u_y dz, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_h^H \rho' u_y dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_h^H \rho' u_x u_y dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_h^H \rho' u_y^2 dz + \\ + \int_h^H \frac{\partial p'}{\partial y} dz = -f \int_h^H \rho' u_x dz. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем средние по высоте верхнего слоя величины

$$\bar{\rho}' = \frac{1}{h'} \int_h^H \rho' dz, \quad (22)$$

$$\bar{p}' = \frac{1}{h'} \int_h^H p' dz, \quad (23)$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h'} \int_h^H u_i dz \quad i = x, y. \quad (24)$$

Преобразуем слагаемое с давлением p' в уравнениях (20) и (21)

$$\begin{aligned} \int_h^H \frac{\partial p'}{\partial x} dz = \\ = \int_h^H \frac{\gamma'}{\gamma' - 1} \frac{p_H}{H_{\rho'}} \left(1 + \frac{H - z}{H_{\rho'}} \right)^{1/(\gamma' - 1)} \frac{\partial H}{\partial x} dz = \\ = \bar{\rho}' g h' \frac{\partial H}{\partial x} = \bar{\rho}' g h' \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{\rho}' g h' \frac{\partial h'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставим в выражения для средних величин (22) и (23) функции ρ' и p' из (17) и (16)

$$\bar{\rho}' = \frac{1}{h'} \frac{p_H}{g} \left[\left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}} \right)^{\gamma'/(\gamma' - 1)} - 1 \right], \quad (26)$$

$$\bar{p}' = \frac{H_{\rho'}}{h'} \frac{1}{\gamma'/(\gamma' - 1) + 1} \frac{p_H}{g} \left[\left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}} \right)^{\gamma'/(\gamma' - 1) + 1} - 1 \right]. \quad (27)$$

Величины p' , ρ' , u_x , u_y представим в виде суммы средних значений и флуктуаций

$$\begin{aligned} p' = \bar{p}' + \hat{p}', \quad \rho' = \bar{\rho}' + \hat{\rho}', \\ u_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i, \quad i = x, y, \end{aligned} \quad (28)$$

причем средние значения флуктуаций равны нулю.

Подставим средние значения в (19)–(21), пренебрегая интегралами от флуктуаций получим систему усредненных по высоте уравнений для верхнего слоя жидкости, которая в векторном виде принимает следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho}') + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_y) = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_x \bar{u}_y) + \\ + \bar{\rho}' g h' \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{\rho}' g h' \frac{\partial h'}{\partial x} - f h' \bar{\rho}' \bar{u}_y = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_y) + \frac{\partial}{\partial y} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_y^2) + \frac{\partial}{\partial x} (h' \bar{\rho}' \bar{u}_x \bar{u}_y) + \\ + \bar{\rho}' g h' \frac{\partial h}{\partial y} + \bar{\rho}' g h' \frac{\partial h'}{\partial y} + f h' \bar{\rho}' \bar{u}_x = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Преобразуем уравнения (29)–(31) для описания верхнего сжимаемого слоя, введя новую переменную l , представляющую собой массу столба жидкости

$$l = h' \bar{\rho}'. \quad (32)$$

Снимем индексы и знаки усреднения в системе (29)–(31) для упрощения записи и получим незамкнутую систему, которая в векторном виде принимает следующий вид:

$$\partial_i l + \nabla \cdot (l \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (33)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + a^2 g \frac{\nabla l}{l} + g \nabla h + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = 0, \quad (34)$$

где

$$a^2 = \frac{l}{\rho_H} \left(\frac{l g}{p_H} + 1 \right)^{-1/\gamma}. \quad (35)$$

Система не замкнута из-за наличия переменной h — высоты нижнего слоя. Далее получим уравнения для описания нижнего слоя.

2.3. Приближение мелкой воды для нижнего слоя

Заметим, что граничные условия (12) для нижнего слоя на границе двух слоев с учетом (16) принимают вид

$$p = p_H \left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}} \right)^{\gamma'/(\gamma' - 1)}. \quad (36)$$

Тогда получим выражение для давления в нижнем слое

$$p = p_H \left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}} \right)^{\gamma'/(\gamma' - 1)} \left(1 + \frac{h - z}{H_{\rho}} \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}. \quad (37)$$

Здесь $H_{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_h}{\rho' h g}$ — характерная плотностная высота нижнего слоя при учете крупномасштабной сжимаемости, как и в уравнениях для верхнего слоя. Таким

образом, после интегрирования уравнения для изменения импульса в нижнем слое (2) слагаемое с давлением примет следующий вид:

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = \bar{\rho}gh \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{p_H}{H_{\rho'}} \left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}}\right)^{1/(\gamma'-1)} \times \left(1 + \frac{h}{H_{\rho'}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} h \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{g}{H_{\rho'}} \bar{\rho} \frac{\partial h'}{\partial x} + \rho_H g \frac{H_{\rho'}(\gamma-1)}{(2\gamma+1)} \left[\left(1 + \frac{h}{H_{\rho'}}\right)^{(2\gamma+1)/(\gamma-1)} - 1 \right] \times \left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}}\right)^{1/(\gamma'-1)} \frac{\partial h'}{\partial x}. \quad (38)$$

Получившееся выражение сложным образом зависит от высот слоев и их плотностей. Учет крупномасштабной сжимаемости в нижнем слое из-за нетривиального вклада слагаемого с давлением приводит к выражениям, которые не поддаются простой параметризации и использованию новой переменной, подобной переменной $l = \bar{\rho}'h'$, введенной для верхнего слоя. Для того чтобы получить замкнутую гиперболическую систему, а также для дальнейшего ее анализа, естественно рассмотреть упрощенную модель двухслойного течения, в котором нижний слой будет иметь постоянную плотность. Слагаемое с давлением в нижнем слое (38) при этом примет следующий вид:

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = \rho_H g \left(1 + \frac{h'}{H_{\rho'}}\right)^{1/(\gamma'-1)} h \frac{\partial h'}{\partial x} + \rho g h \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (39)$$

Выразим h' и $\partial h'/\partial x$ через l

$$h' = H_{\rho'} \left[\left(1 + \frac{lg}{p_h}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right], \quad (40)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{a^2}{l} \frac{\partial l}{\partial x}. \quad (41)$$

Подставим (40) и (41) в (39) и получим выражение, зависящее от h и l ,

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} + g h \frac{\partial l}{\partial x}. \quad (42)$$

Получим теперь систему уравнений для течений сжимаемой жидкости над несжимаемой. Уравнения для верхнего сжимаемого слоя принимают следующий вид:

$$\partial_t l + \nabla \cdot (l\bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (43)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + a^2 g \frac{\nabla l}{l} + g \nabla h + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = 0. \quad (44)$$

Уравнения для нижнего несжимаемого слоя принимают следующий вид:

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (45)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g \nabla h + g \frac{\nabla l}{\rho} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = 0. \quad (46)$$

При $l \rightarrow 0$ система (43)–(46) переходит в классическую систему двухслойных уравнений мелкой воды [59]. При $h = 0$ система переходит в систему уравнений для однослойной сжимаемой мелкой воды [27].

3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТЕЧЕНИЯХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В данном разделе исследуются линейные волны в двухслойной вращающейся жидкости с верхним сжимаемым слоем. Рассматриваются два приближения для вращения — приближения f - и β -плоскостей.

3.1. Волны Пуанкаре для двухслойного течения с верхним сжимаемым слоем на f -плоскости

Рассмотрим вращение на f -плоскости. Такое приближение означает, что параметр Кориолиса считается постоянным $f = f_0$. Проведем линеаризацию системы (43)–(46) около положения равновесия \mathbf{u}_0 : $h = h_0$, $l = l_0$, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Тогда система уравнений для верхнего слоя (43)–(44) примет вид:

$$\partial_t l + l_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (47)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + a_0^2 g \frac{\nabla l}{l_0} + g \nabla h + f_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = 0. \quad (48)$$

Система уравнений для нижнего несжимаемого слоя (45)–(46) примет следующий вид:

$$\partial_t h + h_0 \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (49)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + g \nabla h + g \frac{\nabla l}{\rho} + f_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = 0. \quad (50)$$

Ищем решение линеаризованной системы в виде плоских волн малой амплитуды $\hat{\mathbf{u}} \ll \mathbf{u}_0$:

$$\begin{pmatrix} l \\ u_x \\ u_y \\ h \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{h} \\ \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y), \quad (51)$$

где ω — частота волны, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)^T$ — волновой вектор. После подстановки решения в виде плоской волны (51) в линеаризованную систему (47)–(50) получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\omega & l_0 k_x & l_0 k_y & 0 & 0 & 0 \\ a_0^2 g k_x & -l_0 \omega & i f_0 l_0 & l_0 g k_x & 0 & 0 \\ a_0^2 g k_y & -i f_0 l_0 & -l_0 \omega & l_0 g k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & h_0 k_x & h_0 k_y \\ g k_x & 0 & 0 & \rho g k_x & -\omega \rho & i f_0 \rho \\ g k_y & 0 & 0 & \rho g k_y & -i f_0 \rho & -\omega \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{h} \\ \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (52)$$

Однородная система (52) имеет нетривиальное решение, когда определитель матрицы системы равен нулю. Приравняв определитель матрицы к нулю, получим уравнение для нахождения дисперсионного соотношения:

$$\omega^2(-g^2 h_0 k^4 (l_0 - a_0^2 \rho) + g(a_0^2 + h_0) k^2 \rho (f_0^2 - \omega^2) + \rho (f_0^2 - \omega^2)^2) = 0. \quad (53)$$

Уравнение (53) имеет относительно ω два нулевых решения и четыре решения вида

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + k^2 \left(\frac{a_0^2 g + h_0 g \pm}{2} \pm \frac{g}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{4h_0 l_0 + \rho(a_0^2 + h_0)^2} \right)}. \quad (54)$$

Дисперсионное уравнение (54) описывает две волны Пуанкаре в двухслойном течении мелкой воды с верхним сжимаемым слоем. На рис. 0 приведены проекции дисперсионных поверхностей двух волн Пуанкаре. При $h_0 = 0$ выражение переходит в дисперсионное уравнение для волны Пуанкаре в сжимаемой жидкости [31]

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + a_0^2 g k^2}, \quad (55)$$

а при $l = 0$ переходит в дисперсионное уравнение для волны Пуанкаре в несжимаемой жидкости:

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + h_0 g k^2}. \quad (56)$$

3.2. Волны на β -плоскости

Рассмотрим течение двухслойной жидкости на β -плоскости. В таком приближении параметр Кориолиса f слабо меняется при малых изменениях широты и раскладывается в ряд

$$f = 2\Omega \sin \Theta \approx 2\Omega \sin \Theta_0 + 2\Omega(\Theta - \Theta_0) \cos \Theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (57)$$

где Ω — угловая скорость вращения, Θ — широта, $f_0 = 2\Omega \sin \Theta_0$, $\beta = \partial f / \partial y$, причем $f_0 \gg \beta y$. Приближение β -плоскости, в отличие от приближения f -плоскости, сохраняет первый порядок малости в разложении параметра Кориолиса [3, 33].

Система уравнений примет вид

$$\partial_t l + \nabla \cdot (l \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (58)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + a^2 g \frac{\nabla l}{l} + g \nabla h + (f + \beta y) \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = 0, \quad (59)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (60)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g \nabla h + g \frac{\nabla l}{\rho} + (f + \beta y) \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = 0. \quad (61)$$

Продифференцируем x -компоненту в уравнениях (59) и (61) по y , чтобы исключить y из системы:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial (lu_x)}{\partial x} + \frac{\partial (lu_y)}{\partial y} = 0, \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 lu_x}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 (lu_x^2)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (lu_x u_y)}{\partial y^2} + a^2 g \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} + \quad (63)$$

$$+ g \frac{\partial a^2}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial x} + l g \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - f_0 \frac{\partial lu_y}{\partial y} - \beta lu_y = 0,$$

$$\frac{\partial lu_y}{\partial t} + \frac{\partial (lu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial (lu_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + l g \frac{\partial h}{\partial y} + f_0 lu_x = 0, \quad (64)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (hv_y)}{\partial y} = 0, \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 hv_x}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 hv_x^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 hv_x v_y}{\partial y^2} + gh \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} +$$

$$+ \frac{g}{\rho} h \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} + \frac{g}{\rho} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial x} - f_0 \frac{hv_y}{\partial y} - \beta hv_y = 0, \quad (66)$$

$$\frac{\partial hv_y}{\partial t} + \frac{\partial hv_x v_y}{\partial x} + \frac{\partial hv_y^2}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{\rho} h \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 hv_x = 0. \quad (67)$$

Проведем линеаризацию системы (62)–(67) около положения равновесия \mathbf{u}_0 : $h = h_0$, $l = l_0$, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + l_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (68)$$

$$l_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial y} + a_0^2 g \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} + l_0 g \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - f_0 l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta l_0 u_y = 0, \quad (69)$$

$$l_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + l_0 g \frac{\partial h}{\partial y} + f_0 l_0 u_x = 0, \quad (70)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (71)$$

$$h_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t \partial y} + gh_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} - f_0 h_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \beta h_0 v_y = 0, \quad (72)$$

$$h_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} + gh_0 \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 h_0 v_x = 0. \quad (73)$$

Ищем решение линеаризованной системы (68)–(73) в виде плоских волн малой амплитуды $\hat{\mathbf{u}} \ll \mathbf{u}_0$

$$\begin{pmatrix} l \\ u_x \\ u_y \\ h \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{h} \\ \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y), \quad (74)$$

где ω — частота волны, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)^T$ — волновой вектор. После подстановки решения в виде плоской волны (74) в линеаризованную систему (68)–(73) получим систему линейных однородных уравнений.

$$\begin{pmatrix} -\omega & l_0 k_x & l_0 k_y & 0 & 0 & 0 \\ a_0^2 g k_x k_y & -l_0 \omega k_y & i f_0 l_0 k_y + \beta l_0 & l_0 g k_x k_y & 0 & 0 \\ a_0^2 g k_y & -i f_0 l_0 & -l_0 \omega & l_0 g k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & h_0 k_x & h_0 k_y \\ g k_x k_y & 0 & 0 & \rho g k_x k_y & -\omega k_y \rho & i f_0 \rho k_y + \rho \beta \\ g k_y & 0 & 0 & \rho g k_y & -i f_0 \rho & -\omega \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{h} \\ \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} = 0. \quad (75)$$

Приравняем детерминант матрицы к нулю и получим уравнение для нахождения дисперсионных соотношений волн. Приравняем к нулю действительную и мнимую части уравнения. Примем $\beta^2 = 0$.

В высокочастотном пределе получим две волны Пуанкаре, с совпадающие с волнами на f -плоскости (54)

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + k^2 \left(\frac{a_0^2 g + h_0 g \pm}{2} \pm \frac{g}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{4h_0 l_0 + \rho(a_0^2 + h_0)^2} \right)}. \quad (76)$$

В низкочастотном пределе получим волну Россби

$$\omega = \frac{-\beta k_x g (a_0^2 + h_0)}{2f_0^2 + (a_0^2 + h_0) g k^2}. \quad (77)$$

График проекции дисперсионной поверхности на ось k_x волны Россби изображен на рис. 1. В отсутствие сжимаемости дисперсионные соотношения (76) и (77) переходят в дисперсионные соотношения для слоя несжимаемой жидкости высотой $H = a_0^2 + h_0$.

Отметим отличия полученных волн в двухслойном приближении от однослойного приближения сжимаемой жидкости [31]. В дисперсионном соотношении для волн Россби изменяется лишь гравитационный параметр: он представлен в виде суммы параметров двух слоев $a_0^2 + h$. Дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре имеют качественно иной вид. В однослойном приближении графики проекций дисперсионных поверхностей имели асимптоты $\pm k\sqrt{gh}$

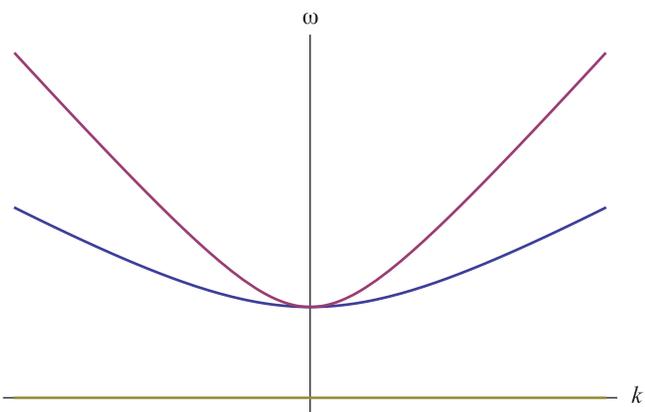


Рис. 1. Проекция дисперсионных поверхностей двух волн Пуанкаре в двухслойном приближении.

в несжимаемой жидкости и $\pm k\sqrt{a_0^2 g}$ в сжимаемой жидкости, таким образом при анализе трехволновых взаимодействий проекции этих волн не пересекались, а значит волны не резонировали. В двухслойном приближении решения получены в виде двух волн Пуанкаре с различным асимптотическим поведением. Они имеют два вида асимптот:

$$\pm k \sqrt{\frac{a_0^2 g + h_0 g}{2} + \frac{g}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{4h_0 l_0 + \rho(a_0^2 + h)^2}}$$

и

$$\pm k \sqrt{\frac{a_0^2 g + h_0 g}{2} - \frac{g}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{4h_0 l_0 + \rho(a_0^2 + h)^2}}.$$

3.3. Качественный анализ дисперсионных соотношений для линейных волн в двухслойных течениях

Определим, для каких из полученных типов волн возможны резонансные взаимодействия. Для того, чтобы три волны испытывали взаимодействие, необходимо выполнение условия трехволнового синхронизма

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_3(\mathbf{k}_3), \quad (78)$$

где \mathbf{k}_i — волновые векторы взаимодействующих волн, $\omega_i(\mathbf{k})$ — дисперсионное соотношение соответствующей волны.

Будем рассматривать условие резонанса, как пересечение дисперсионных поверхностей [72]. Для двумерного вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, функция $\omega(\mathbf{k})$ задает поверхность в трехмерном пространстве ω, k_x, k_y . Рассмотрим две поверхности (рис. 2): S_1 , заданную уравнением $\omega = \omega_1(\mathbf{k})$ и S_2 , заданную уравнением $\omega = \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) = \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)$ — вторым слагаемым условия синхронизма (78) в смещенной точке $(\mathbf{k}_1, \omega_1(\mathbf{k}_1))$. Если поверхности пересеклись, обозначим точку пересечения \mathbf{k}_3 . Пересечение дисперсионных поверхностей S_1 и S_2 означает, что существует вектор $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и некоторая дисперсионная поверхность $\omega_3(\mathbf{k})$, такая, что $\omega_3(\mathbf{k}_3) = \omega_3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_2) + \omega_1(\mathbf{k}_1)$.

Рассмотрим только волны в системе на бета-плоскости (58)–(61), так как линейные решения на f -плоскости аналогичны решениям на бета-плоскости в высокочастотном пределе.

Для системы на бета-плоскости были получены две волны Пуанкаре с разной кривизной дисперсионных поверхностей (76) и волна Россби (77).

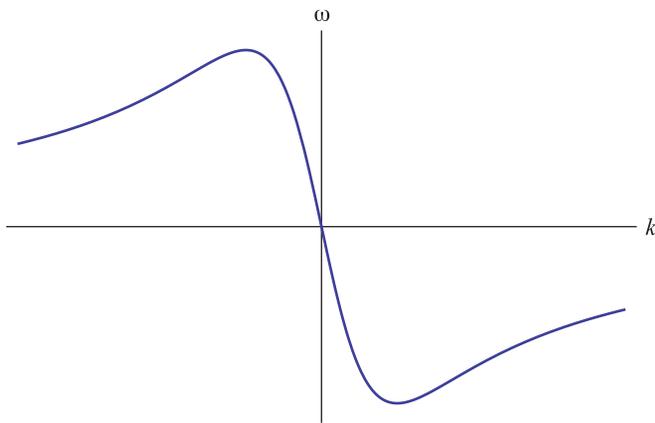


Рис. 2. Проекция дисперсионной поверхности волны Россби на k_x в двуслойном приближении.

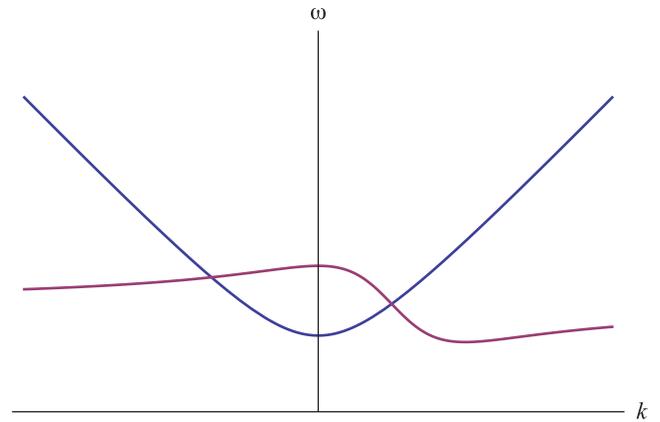


Рис. 4. Условие трехволнового синхронизма для двух волн Россби и волны Пуанкаре.

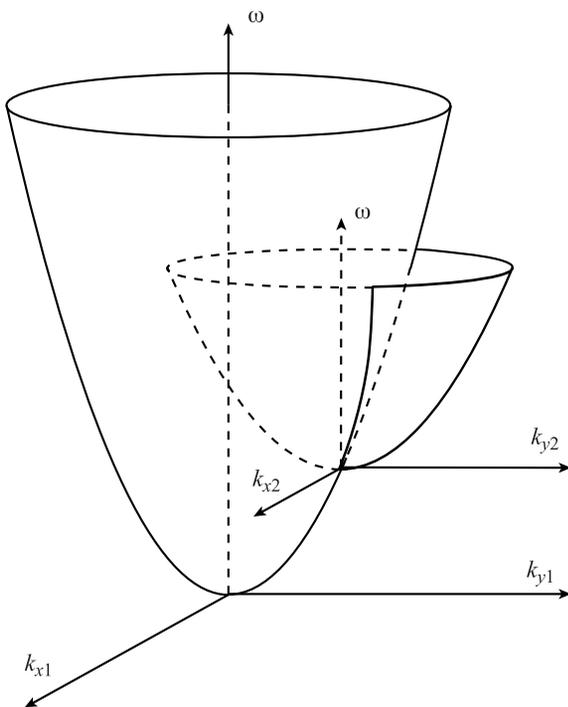


Рис. 3. Пересечение дисперсионных поверхностей взаимодействующих волн.

Аналогично случаю однослойной жидкости волна Пуанкаре и две волны Россби и три волны Россби испытывают трехволновые взаимодействия. На рис. 3 и 4 показано пересечение их дисперсионных поверхностей в смещенной точке.

Особый интерес представляет взаимодействие трех волн Пуанкаре и двух волн Пуанкаре с волной Россби, которых не наблюдается в однослойном течении сжимаемой жидкости [31]. На рис. 5 изображено пересечение дисперсионных поверхностей двух волн Пуанкаре, значит они могут испытывать трехволновые взаимодействия. Таким образом, учет сжимаемости в

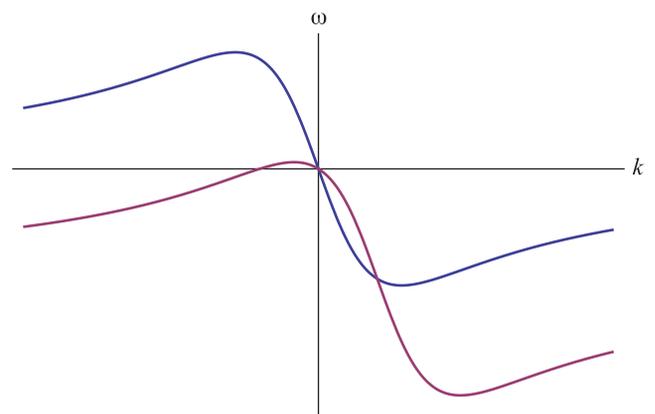


Рис. 5. Условие трехволнового синхронизма для трех волн Россби.

двуслойной жидкости существенно влияет на резонансы в нелинейных решениях.

4. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ДВУСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ МЕЛКОЙ ВОДЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В предыдущем разделе было показано, что для системы на f - и бета-плоскостях возможны трехволновые взаимодействия всех типов найденных волн. Получим сначала систему уравнений трехволновых взаимодействий на f -плоскости, затем систему уравнений на бета-плоскости. Далее для исследования нелинейных эффектов будем использовать только систему трехволновых уравнений в общем виде для обоих случаев, так как системы уравнений для медленно меняющихся амплитуд волн на f -плоскости и бета-плоскости будут различаться только коэффициентами.

4.1. Метод многих масштабов

Запишем полную систему уравнений на f -плоскости

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y)}{\partial y} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{\partial lu_x}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial x} + l g \frac{\partial h}{\partial x} - f_0 l u_y = 0, \quad (80)$$

$$\frac{\partial lu_y}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + l g \frac{\partial h}{\partial y} + f_0 l u_x = 0, \quad (81)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0, \quad (82)$$

$$\frac{\partial hv_x}{\partial t} + \frac{\partial hv_x^2}{\partial x} + \frac{\partial hv_x v_y}{\partial y} + g h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{\rho} h \frac{\partial l}{\partial x} - f_0 h v_y = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial hv_y}{\partial t} + \frac{\partial hv_x v_y}{\partial x} + \frac{\partial hv_y^2}{\partial y} + g h \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{\rho} h \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 h v_x = 0. \quad (84)$$

Для анализа трехволновых взаимодействий в системе воспользуемся методом многих масштабов [73]. Разложим переменные t , x и y на быстрые переменные T_0 , X_0 , Y_0 и медленные $T_1 = \epsilon T_0$, $X_1 = \epsilon X_0$, $Y_1 = \epsilon Y_0$. Перепишем операторы частных производных в соответствии со сделанной заменой:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \quad (85)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \quad (86)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}. \quad (87)$$

Решение системы (79)–(84) будем искать в виде асимптотического ряда по степеням ϵ

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots \quad (88)$$

Здесь $\mathbf{u} = (l, u_x, u_y, h, v_x, v_y)$ — вектор-решение.

Приравняв слагаемые нулевого порядка по ϵ получим стационарное решение. Приравняв слагаемые первого порядка по ϵ получим линейную систему (43)–(46). Тогда $\mathbf{u}_0 = (l_0, 0, 0, h_0, 0, 0)$ — стационарное решение, $\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1 \exp(-i\omega(k_x, k_y)t + ik_x x + ik_y y)$ — линейное решение, где $\omega(k_x, k_y)$ — найденные дисперсионные соотношения (54). \mathbf{u}_2 — квадратичная поправка.

Приравняем слагаемые с ϵ^2 , чтобы получить систему уравнений на квадратичную поправку, \hat{R} — нелинейный оператор

$$\hat{A}\mathbf{u}_2 = \hat{S}\mathbf{u}_1 + \hat{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1). \quad (89)$$

Здесь \hat{A} — линейный оператор, действующий на квадратичную поправку, \hat{S} — линейный оператор, действующий на линейную поправку,

$$\hat{A}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_2}{\partial T_0} + l_0 \frac{\partial u_{x2}}{\partial X_0} + l_0 \frac{\partial u_{y2}}{\partial Y_0} \\ l_0 \frac{\partial u_{x2}}{\partial T_0} + a_0^2 g \frac{\partial l_2}{\partial T_0} + l_0 g \frac{\partial h_2}{\partial X_0} - f_0 l_0 u_{y2} \\ l_0 \frac{\partial u_{y2}}{\partial T_0} + a_0^2 g \frac{\partial l_2}{\partial Y_0} + l_0 g \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + f_0 l_0 u_{x2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial v_{x2}}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial v_{y2}}{\partial Y_0} \\ h_0 \frac{\partial v_{x2}}{\partial T_0} + g h_0 \frac{\partial h_2}{\partial X_0} + \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial l_2}{\partial X_0} - f_0 h_0 v_{y2} \\ h_0 \frac{\partial v_{y2}}{\partial T_0} + g h_0 \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial l_2}{\partial Y_0} + f_0 h_0 v_{x2} \end{pmatrix}, \quad (90)$$

$$\hat{S}\mathbf{u}_1 = - \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial T_1} + l_0 \frac{\partial u_{x1}}{\partial X_1} + l_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial Y_1} \\ l_0 \frac{\partial u_{x1}}{\partial T_1} + a_0^2 g \frac{\partial l_1}{\partial X_1} + l_0 g \frac{\partial h_1}{\partial X_1} \\ l_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial T_1} + a_0^2 g \frac{\partial l_1}{\partial Y_1} + l_0 g \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial X_1} + h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \\ h_0 \frac{\partial v_{x1}}{\partial T_1} + g h_0 \frac{\partial h_1}{\partial X_1} + \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial l_1}{\partial X_1} \\ h_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} + g h_0 \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} + \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial l_1}{\partial Y_1} \end{pmatrix}, \quad (91)$$

$$\hat{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial(l_1 u_{x1})}{\partial X_0} + \frac{\partial(l_1 u_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial(l_1 u_{x1})}{\partial T_0} + l_0 \frac{\partial u_{x1}^2}{\partial X_0} + l_0 \frac{\partial(u_{x1} u_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial(l_1 u_{y1})}{\partial T_0} + l_0 \frac{\partial(u_{x1} u_{y1})}{\partial X_0} + l_0 \frac{\partial u_{y1}^2}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial(h_1 v_{x1})}{\partial X_0} + \frac{\partial(h_1 v_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial(h_1 v_{x1})}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial v_{x1}^2}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial(v_{x1} v_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial(h_1 v_{y1})}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial(v_{x1} v_{y1})}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial v_{y1}^2}{\partial Y_0} \\ 0 \\ a_0^2 g \frac{l_1}{L} \frac{\partial l_1}{\partial X_0} + l_1 g \frac{\partial h_1}{\partial X_0} - f_0 l_1 u_{y1} \\ a_0^2 g \frac{l_1}{L} \frac{\partial l_1}{\partial Y_0} + l_1 g \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + f_0 l_1 u_{x1} \\ 0 \\ g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial X_0} + \frac{g}{\rho} h_1 \frac{\partial l_1}{\partial X_0} - f_0 h_1 v_{y1} \\ g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + \frac{g}{\rho} h_1 \frac{\partial l_1}{\partial Y_0} + f_0 h_1 v_{x1} \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Здесь

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{l_0} - \frac{g}{\gamma p + l_0 g}$$

получается при разложении a^2 , заданного формулой (35), в ряд по ϵ .

В правой части уравнения (89) содержатся слагаемые, полученные при решении линеаризованной системы (43)–(46). Они могут привести к линейному росту решения, что нарушит условие на малость поправки $\epsilon \mathbf{u}_2 \ll \epsilon \mathbf{u}_1$ и нарушит сходимость ряда. Чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от медленных переменных, а фазы волны — от быстрых

$$\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(T_1, X_1, Y_1) \exp(-i\omega T_0 + ik_x X_0 + ik_y Y_0). \quad (93)$$

Далее будем искать вторую поправку \mathbf{u}_2 в виде линейных волн. Получим систему

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}, \quad (94)$$

где матрица A совпадает с матрицей линеаризованной системы (52), \mathbf{b} — вектор правых частей, который получается подстановкой первой поправки (93).

При выполнении дисперсионного соотношения определитель матрицы A будет равен нулю. Тогда для определения совместности системы воспользуемся теоремой Фредгольма. Система будет совместна тогда и только тогда, когда решение однородной сопряженной системы $\mathbf{z}^T A = 0$ будет ортогонально вектору правой части \mathbf{b} .

Найдем решение сопряженной однородной системы \mathbf{z}

$$\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} \rho(B-A)B \\ \rho(B-A)C \\ \rho(B-A)D \\ \rho l_0/h_0 AB \\ l_0 AC \\ l_0 AD \end{pmatrix}, \quad (95)$$

где

$$A = gh_0 k^2, \quad B = \omega_i^2 - f_0^2, \\ C = \omega_i k_x - if_0 k_y, \quad D = if_0 k_x + \omega_i k_y.$$

В уравнении (95) каждый вектор \mathbf{z}_i соответствует отдельному решению дисперсионного уравнения ω_i (76) для течений на f -плоскости.

Аналогично случаю f -плоскости, найдем решения однородной системы $\mathbf{z}^T A_\beta = 0$, сопряженной с системой $A_\beta \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}$, где матрица A_β совпадает с матрицей линеаризованной системы (75) на бета-плоскости

$$\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} \rho h_0(B-A)B \\ \rho(B-A)C \\ \rho(B-A)D \\ \rho l_0 AB \\ l_0 AC \\ l_0 AD \end{pmatrix}, \quad (96)$$

где

$$A = gh_0 k_x k_y (\omega_i k^2 + \beta k_x), \\ B = (\omega_i^2 - f_0^2) \omega_i k_x k_y + i\beta \omega_i f_0 k_x, \\ C = h_0 \omega_i k_x (\omega_i k_x - if_0 k_y), \\ D = h_0 \omega_i k_x (if_0 k_x k_y + \beta k_x + \omega_i k_y^2).$$

4.2. Уравнения трехволновых взаимодействий

Представим линейную часть решения в виде суммы трех волн на f -плоскости, удовлетворяющих условию трехволнового синхронизма (78)

$$\mathbf{u}_1 = \varphi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \\ + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + c.c. \quad (97)$$

Здесь $\varphi = \varphi(T_1, X_1, Y_1)$, $\psi = \psi(T_1, X_1, Y_1)$, $\chi = \chi(T_1, X_1, Y_1)$ — амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_x X_0 + k_y Y_0$ — фазы волн, $\mathbf{a} =$

собственный вектор A . Так как для волновых взаимодействующих волн выполняется условие синхронизма (78), то $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$.

Чтобы получить три уравнения на амплитуды взаимодействующих волн на f -плоскости подставим сначала (97) в правую часть уравнения (89). Выпишем часть, пропорциональную $\exp(i\theta_1)$

$$\hat{S} \mathbf{u}_1 + \hat{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \\ = - \begin{pmatrix} a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_2 l_0 \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + a_3 l_0 \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} \\ a_2 l_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_1 a_0^2 g \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + a_4 l_0 g \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} \\ a_3 l_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_1 a_0^2 g \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} + a_4 l_0 g \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} \\ a_4 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_5 h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + a_6 h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} \\ a_5 h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_3 g h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + a_1 \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} \\ a_6 h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} + a_4 g h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} + a_1 \frac{g}{\rho} h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial Y_1} \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 2ia_1 a_2 k_{x1} \psi^* \chi + 2ia_1 a_3 k_{y1} \psi^* \chi \\ -2ia_1 a_2 \omega(\mathbf{k}_1) \psi^* \chi + 2il_0 a_2^2 k_{x1} \psi^* \chi + 2il_0 a_2 a_3 k_{y1} \psi^* \chi \\ -2ia_1 a_3 \omega(\mathbf{k}_1) \psi^* \chi + 2il_0 a_2 a_3 k_{x1} \psi^* \chi + 2il_0 a_3^2 k_{y1} \psi^* \chi \\ 2ia_4 a_5 k_{x1} \psi^* \chi + 2ia_4 a_6 k_{y1} \psi^* \chi \\ -2ia_4 a_5 \omega(\mathbf{k}_1) \psi^* \chi + 2il_0 a_5^2 k_{x1} \psi^* \chi + 2il_0 a_5 a_6 k_{y1} \psi^* \chi \\ -2ia_4 a_6 \omega(\mathbf{k}_1) \psi^* \chi + 2il_0 a_5 a_6 k_{x1} \psi^* \chi + 2il_0 a_6^2 k_{y1} \psi^* \chi \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 k_{x1} \psi^* \chi - f_0 a_1 a_3 \psi^* \chi \\ 2 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 k_{y1} \psi^* \chi + f_0 a_1 a_2 \psi^* \chi \\ 0 \\ 2g a_4^2 k_{x1} \psi^* \chi - f_0 a_4 a_6 \psi^* \chi \\ 2g a_4^2 k_{y1} \psi^* \chi + f_0 a_4 a_5 \psi^* \chi \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Домножим получившееся выражение (98) на вектор-решение сопряженной системы \mathbf{z}^T (95) слева и получим уравнение для φ -амплитуды первой волны

$$s_1 \varphi = f_1 \psi^* \chi. \quad (99)$$

Здесь s_1 — линейный дифференциальный оператор по переменным T_1, X_1, Y_1, f_1 — коэффициент, зависящий от волновых векторов взаимодействующих волн,

$$s_1 = r_1 \frac{\partial}{\partial T_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (100)$$

$$r_1 = a_1 z_1 + ia_2 z_2 l_0 k_{y1} + a_3 l_0 z_3 + \\ + a_4 z_4 + ia_5 z_5 + a_6 z_6 h_0, \quad (101)$$

$$p_1 = a_2 z_1 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{y1} + ia_4 z_2 k_{y1} l_0 g + \\ + a_5 z_5 h_0 + ia_3 k_{y1} g h_0 + ia_1 z_5 k_{y1} \frac{g}{\rho}, \quad (102)$$

$$q_1 = a_3 z_1 l_0 - ia_2 z_2 l_0 \omega(\mathbf{k}_1) + ia_4 z_2 k_{y1} l_0 g + \\ + ia_4 k_{x1} l_0 g - a_3 z_2 f_0 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{x1} + a_1 a_0^2 g z_3 + \\ + a_4 z_3 l_0 g + a_6 z_4 h_0 - ia_5 z_5 \omega(\mathbf{k}_1) h_0 + \\ + ia_4 z_5 k_{x1} g h_0 + ia_4 z_5 k_{x1} \frac{g}{\rho} h_0 - a_6 z_5 f_0 h_0 + \\ + a_4 z_6 g h_0 + a_1 z_6 \frac{g}{\rho} h_0. \quad (103)$$

Запишем выражение для коэффициента f_1 в правой части (99)

$$\begin{aligned}
 f_1 = f_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = & z_1(2ia_1a_2k_{x1} + 2ia_1a_3k_{y1}) + \\
 & + z_2(2a_1a_2k_{y1}\omega(\mathbf{k}_1) - 2l_0a_2^2k_{x1}k_{y1} - 2l_0a_2^2k_{y1}^2 + \\
 & + 4\frac{a_0^2g}{L}a_1^2k_{x1}k_{y1} + 2a_1a_4k_xk_{y1} - if_0a_1a_3k_{y1} - \beta a_1a_3) + \\
 & + z_3(-2ia_1a_3\omega(\mathbf{k}_1) + 2il_0a_2a_3k_x + 2il_0a_3^2k_{y1} - \\
 & - 2ia_1a_3\omega(\mathbf{k}_1) + 2il_0a_2a_3k_x + 2il_0a_3^2k_{y1}) + \\
 & + z_4(2ia_4a_5k_{x1} + 2ia_4a_6k_{y1}) + z_5(2a_4a_5k_{y1}\omega(\mathbf{k}_1) - \\
 & - 2l_0a_4^2k_{x1}k_{y1} - 2l_0a_4^2k_{y1}^2 + 4a_1^2k_{x1}k_{y1} + 2\frac{g}{\rho}a_1a_4k_xk_{y1} - \\
 & - if_0a_4a_6k_{y1} - \beta a_4a_6) + z_6(-2ia_4a_6\omega(\mathbf{k}_1) + \\
 & + 2il_0a_5a_6k_x + 2il_0a_6^2k_{y1} + 2ga_4^2k_{y1} + f_0a_4a_5). \quad (104)
 \end{aligned}$$

Аналогично получим уравнения для амплитуд ψ и χ , выписав слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_2)$ и $\exp(i\theta_3)$ соответственно

$$s_2\psi = f_2\phi^*\chi, \quad (105)$$

$$s_3\phi = f_3\phi\psi. \quad (106)$$

Здесь s_2 и s_3 — дифференциальные операторы, f_2, f_3 — коэффициенты, зависящие только от волновых векторов взаимодействующих волн.

Операторы s_2, s_3 и коэффициенты f_2, f_3 получают-ся заменой вектора \mathbf{k}_1 в формулах (100)–(109) на \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 соответственно.

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений для взаимодействующих амплитуд трех волн (99), (105), (106) на f -плоскости. Эта система уравнений совместно с условием трехволново-го синхронизма (78) полностью описывает нелинейные взаимодействия трех волн Пуанкаре в двуслойной мелкой воде на f -плоскости.

Аналогично случаю f -плоскости рассматривается случай бета-плоскости. Для трех взаимодействующих волн на бета плоскости коэффициенты r_1, p_1, q_1, f_1 в уравнении (99) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 r_1 = & a_1z_1 + ia_2z_2l_0k_{y1} + a_3l_0z_3 + \\
 & + a_4z_4 + ia_5z_5 + a_6z_6h_0, \quad (107)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1 = & a_2z_1l_0 + ia_1z_2a_0^2gk_{y1} + ia_4z_2k_{y1}l_0g + \\
 & + a_5z_5h_0 + ia_3k_{y1}gh_0 + ia_1z_5k_{y1}\frac{g}{\rho}, \quad (108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 = & z_1a_3l_0 - z_2(ia_2l_0\omega(\mathbf{k}_1) + ia_4k_{y1}l_0g + ia_4k_{x1}l_0g - \\
 & - a_3f_0l_0 + ia_1a_0^2gk_{x1}) + z_3(a_1a_0^2g + a_4l_0g) + z_4a_6h_0 - \\
 & - z_5(ia_5\omega(\mathbf{k}_1)h_0 + ia_4k_{x1}gh_0 + ia_4k_{x1}\frac{g}{\rho}h_0 - a_6f_0h_0) + \\
 & + z_6(a_4gh_0 + a_1\frac{g}{\rho}h_0), \quad (109)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1 = f_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = & z_1(2ia_1a_2k_{x1} + 2ia_1a_3k_{y1}) + \\
 & + z_2(2a_1a_2k_{y1}\omega(\mathbf{k}_1) - 2l_0a_2^2k_{x1}k_{y1} - 2l_0a_2^2k_{y1}^2 + \\
 & + 4\frac{a_0^2g}{L}a_1^2k_{x1}k_{y1} + 2a_1a_4k_xk_{y1} - if_0a_1a_3k_{y1}) + \\
 & + z_3(-2ia_1a_3\omega(\mathbf{k}_1) + 2il_0a_2a_3k_x + 2il_0a_3^2k_{y1} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2ia_1a_3\omega(\mathbf{k}_1) + 2il_0a_2a_3k_x + 2il_0a_3^2k_{y1}) + \\
 & + z_4(2ia_4a_5k_{x1} + 2ia_4a_6k_{y1}) + z_5(2a_4a_5k_{y1}\omega(\mathbf{k}_1) - \\
 & - 2l_0a_4^2k_{x1}k_{y1} - 2l_0a_4^2k_{y1}^2 + 4a_1^2k_{x1}k_{y1} + 2\frac{g}{\rho}a_1a_4k_xk_{y1} - \\
 & - if_0a_4a_6k_{y1}) + z_6(-2ia_4a_6\omega(\mathbf{k}_1) + 2il_0a_5a_6k_x + \\
 & + 2il_0a_6^2k_{y1} + 2ga_4^2k_{y1} + f_0a_4a_5). \quad (110)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим решение системы трехволновых взаимодействий в двух частных случаях — параметрического распада и параметрического усиления.

В случае распадной неустойчивости амплитуда одной из взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуды двух других, например, $\phi \gg \psi\chi$. В таком случае амплитуду волны с большей амплитудой можно считать постоянной: $\phi = \phi_0$, а влиянием волн малых амплитуд ψ и χ на нее пренебречь. Тогда система (99)–(106) примет вид

$$s_2\psi = f_2\phi_0^*\chi, \quad (111)$$

$$s_3\phi = f_3\phi_0\psi. \quad (112)$$

Решение линейной системы (111), (112) ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} e^{\Gamma T_1}, \quad (113)$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma = \sqrt{\frac{|f_2f_3|}{|r_2r_3|}}|\phi_0| > 0. \quad (114)$$

Таким образом, на f -плоскости может возникнуть неустойчивость следующего вида: волна Пуанкаре с амплитудой ϕ распадается на две волны Пуанкаре с амплитудами ψ и ξ . Тогда как на бета-плоскости возникают следующие виды распадных неустойчивостей:

1. волна Пуанкаре с амплитудой ϕ распадается на две волны Пуанкаре с амплитудами ψ и ξ ;
2. волна Пуанкаре с амплитудой ϕ распадается на волну Пуанкаре и волну Россби с амплитудами ψ и ξ ;
3. волна Пуанкаре с амплитудой ϕ распадается на две волны Россби с амплитудами ψ и ξ ;
4. волна Россби с амплитудой ϕ распадается на две волны Россби с амплитудами ψ и ξ ;
5. волна Россби с амплитудой ϕ распадается на волну Пуанкаре и волну Россби с амплитудами ψ и ξ ;
6. волна Россби с амплитудой ϕ распадается на две волны Пуанкаре с амплитудами ψ и ξ .

Далее рассмотрим случай параметрического усиления, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других, то есть $\phi \ll \psi, \chi$. Тогда можно считать амплитуды ψ и χ постоянными: $\psi = \psi_0, \chi = \chi_0$. Из системы (111), (112) получим уравнение для амплитуды ϕ

$$s_1\phi = f_1\psi_0^*\chi_0. \quad (115)$$

Решение уравнения ищем в виде

$$\phi = \phi' + \kappa T_1. \quad (116)$$

Подставив (116) в уравнение (115) получим выражение для скорости роста волны ϕ

$$\kappa = \frac{|f_1|}{|r_1|} |\Psi_0^* \chi_0|. \quad (117)$$

Константы f_1 и r_1 определены в (110) и (107) соответственно.

На f -плоскости возможно усиление волны Пуанкаре с амплитудой ϕ двумя волнами Пуанкаре с амплитудами ψ и χ . На бета-плоскости возможны следующие случаи параметрического усиления:

1. Две волны Пуанкаре с амплитудами ψ и χ усиливают волну Пуанкаре с амплитудой ϕ ;
2. Волна Пуанкаре и волна Россби с амплитудами ψ и χ усиливают волну Пуанкаре с амплитудой ϕ ;
3. Две волны Россби с амплитудами ψ и χ усиливают волну Пуанкаре с амплитудой ϕ ;
4. Две волны Пуанкаре с амплитудами ψ и χ усиливают волну Россби с амплитудой ϕ ;
5. Волна Пуанкаре и волна Россби с амплитудами ψ и χ усиливают волну Россби с амплитудой ϕ ;
6. Две волны Россби с амплитудами ψ и χ усиливают волну Россби с амплитудой ϕ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита теория крупномасштабных течений во вращающейся астрофизической плазме в условиях нетривиальных свойств физической среды, которые не описываются классической гидродинамической теорией плазмы. Построение теории основано на двух ключевых идеях, развитых в плазменной астрофизике: использование модели мелкой воды с крупномасштабной сжимаемостью и использование модели двуслойной мелкой воды. В приближении мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости фильтруются звуковые волны и учитывается крупномасштабная зависимость плотности от давления, описывающая эффекты статической сжимаемости. Предложенное приближение выгодно отличается от традиционных уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических уравнениях мелкой воды высота и горизонтальная скорость столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В сжимаемых уравнениях мелкой воды это взаимодействие определяется не только горизонтальной скоростью и высотой, но и средней плотностью столба жидкости, вследствие чего учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно. Такое приближение хорошо описывает астрофизические течения с крупномасштабной сжимаемостью, а также течения в планетных атмосферах при наличии пыли. Использование модели многослойных течений мелкой воды

для описания физических процессов в течениях с переменными термодинамическими характеристиками позволяет учитывать большие изменения в плотности жидкости и других гидродинамических параметров. Уравнения двуслойной мелкой воды с учетом вращения в классическом случае нейтральной несжимаемой жидкости являются обобщением уравнений мелкой воды, на случай тонкого вращающегося слоя, разделенного на два слоя с постоянными, но различными плотностями. В работе выведены уравнения двуслойной мелкой воды с учетом вращения, в которых в верхнем слое учитываются эффекты крупномасштабной сжимаемости. Показано, что течения двуслойной мелкой воды с переменными термодинамическими свойствами могут быть исследованы аналитически только в случае, когда нижний слой полагается несжимаемым. Получены уравнения для вращающихся сферических течений двуслойной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости в приближении β -плоскости, в которых параметр Кориолиса принимается линейно меняющимся вдоль широты. Полученные уравнения в предельном случае однослойного течения переходят в известные уравнения сжимаемой мелкой воды при наличии вращения, а в случае малости высоты слоя по сравнению с характерной высотой H_ρ , на которой проявляются эффекты сжимаемости, уравнения переходят в систему двуслойной мелкой воды при наличии вращения.

Получены дисперсионные уравнения для волн Пуанкаре в двуслойном течении мелкой воды с верхним сжимаемым слоем на f -плоскости. Это дисперсионное соотношение в предельных случаях переходит в известные дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре в мелкой воде или в волны Пуанкаре в мелкой воде при наличии крупномасштабной сжимаемости. В приближении β -плоскости в высокочастотном пределе получены дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре в двуслойной мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости в верхнем слое, аналогичные волнам на f -плоскости. В низкочастотном пределе получено дисперсионное соотношение для волн Россби в двуслойном течении мелкой воды с верхним сжимаемым слоем, которое переходит в предельных случаях в известные дисперсионные выражения для волн Россби в мелкой воде с учетом крупномасштабной сжимаемости.

В рамках развитой модели исследованы все типы линейных волн и проведен качественный анализ дисперсионных соотношений с целью выявления возможных трехволновых взаимодействий. Исследование линейных волн проведено как на f -плоскости, так и в приближении β -плоскости для сферических течений. В дисперсионном соотношении для волн Россби в отличие от волн в сжимаемой однослойной мелкой воде изменяется гравитационный параметр: он представлен в виде суммы параметров двух слоев $a_0^2 + h$. Аналогично случаю однослойной жид-

кости волна Пуанкаре и две волны Россби и три волны Россби испытывают трехволновые взаимодействия. Показано также, что дисперсионные соотношения для волн Пуанкаре имеют качественно иной вид, что приводит к трехволновым взаимодействиям волн Пуанкаре на f -плоскости, трехволновым взаимодействиям волн Пуанкаре на β -плоскости и взаимодействию двух волн Пуанкаре с волной Россби на β -плоскости, которых не наблюдается в однослойном течении сжимаемой жидкости. Таким образом, учет сжимаемости в двуслойной жидкости существенно влияет на резонансы в нелинейных решениях. Выявленные взаимодействия могут играть важную роль в понимании многослойных течений в физике планет и в астрофизической плазме при изучении конкретных физических объектов.

Для всех взаимодействующих волн методом многомасштабных разложений найдены коэффициенты взаимодействия. В частных случаях, когда начальные амплитуды одних взаимодействующих волн много больше амплитуд других, приведены решения, представляющие себя экспоненциальный или линейный рост волн малой амплитуды. Показано существование распадных неустойчивостей с экспоненциальным ростом волны малой амплитуды: волна Пуанкаре распадается на две волны Пуанкаре, волна Пуанкаре распадается на волну Пуанкаре и волну Россби, волна Пуанкаре распадается на две волны Россби, волна Россби распадается на две волны Россби, волна Россби распадается на волну Пуанкаре и волну Россби, волна Россби распадается на две волны Пуанкаре. Показано, что в случае, когда амплитуды двух взаимодействующих волн много больше амплитуды третьей волны, амплитуда третьей волны растет линейно в следующих трехволновых конфигурациях: две волны Пуанкаре усиливают волну Пуанкаре, волна Пуанкаре и волна Россби усиливают волну Пуанкаре, две волны Россби усиливают волну Пуанкаре, две волны Пуанкаре усиливают волну Россби, волна Пуанкаре и волна Россби усиливают волну Россби, две волны Россби усиливают волну Россби. Найдены выражение для инкрементов неустойчивостей и для скоростей роста взаимодействующих волн.

Суммируя, отметим, что главным результатом нашей работы являются новые уравнения для течений с переменными характеристиками и развитие линейной и слабонелинейной теории для таких уравнений. Наше исследование основано на уравнениях мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости. Полученные результаты фактически описывают те типы течений, которые можно наблюдать при изучении осцилляций Солнца и звезд, которые измеряются методами гелио- и звездной сейсмологии. Именно для интерпретации таких экспериментов важны модели сжимаемых течений с переменными термодинамическими свойствами. Особо интересны в этом случае наши модели на β -плоскости, как учитывающие сфе-

рическую геометрию таких течений. Отметим важное обобщение полученных результатов на случай астрофизических течений с твердыми частицами, поскольку влияние твердых частиц также может быть описано с помощью уравнений для сжимаемых течений с переменным уравнением состояния. Отметим два важных приложения найденных в работе волн Пуанкаре и Россби в астрофизике. Первый пример относится к описанию частиц в протопланетных дисках [74, 75]. В таких системах, как известно, также возможно применение приближения мелкой воды [76, 77]. Поэтому модель, описывающая области взаимодействия планетезималей с собственно диском, вполне работает для таких систем. Волны Пуанкаре и Россби влияют на процессы расширения областей, занимаемых планетезималами. В этом случае особую роль играют волны Пуанкаре и волны Россби в β -приближении, так как они учитывают эффекты сферичности диска [78]. Волны Пуанкаре и волны Россби, найденные в нашей работе играют также определяющую роль в возникновении Россби-неустойчивости в астрофизических дисках [79, 80]. Вторым приложением найденных в работе волновых решений является описание течений в областях скопления пыли в межзвездном газе [81]. Безусловно, для дальнейшего продвижения в таких приложениях необходимо обобщение полученных результатов на магнитные течения, что будет сделано в последующих работах. Предсказанные в работе резонансные взаимодействия позволяют точнее интерпретировать результаты наблюдений, а также дают возможность делать выводы о взаимном влиянии крупномасштабных волн в таких течениях.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrosyan A., Klimachkov D., Fedotova M., Zinyakov T.* // Atmosphere. 2020. V. 11. P. 314.
2. *Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A.* // Universe. 2021. V. 7. P. 87.
3. *Федотова М.А., Климачков Д.А., Петросян А.С.* // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 209.
4. *Birnstiel T., Fang M., Johansen A.* // Space Sci. Rev. 2016. V. 205. P. 41.
5. *Lesur G., Ercolano B., Flock M., Lin M.-K., Yang C.C., Barranco J.A., Benitez-Llambay P., Goodman J., Johansen A., Klahr H., Laibe G., Lyra W., Marcus P., Nelson R.P., Squire J., Simon J.B., Turner N., Umurhan O.M., Youdin A.N.* // arXiv preprint arXiv:2203.09821. 2022. Doi: 10.48550/arXiv.2203.09821.
6. *Haberle R.M., Clancy R.T., Forget F., Smith M.D., Zurek R.W.* The atmosphere and climate of Mars. Cambridge University Press, 2017.

7. *Parsons J.D.* // *Geophys. Res. Lett.* 2000. V. 27. P. 2345.
8. *Tsytovich V.N., Ivlev A.V., Burkert A., Morfill G.E.* // *Astrophys. J.* 2013. V. 780. P. 131.
9. *Ishiki S., Okamoto T., Inoue A.K.* // *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 2018. V. 474. P. 1935.
10. *Korpi-Lagg M. J., Mac Low M. M., Gent F. A.* // arXiv preprint arXiv:2401.04015. 2024. (представлена в *Living Rev. Computational Astrophys.*)
11. *Mac Low M. M., Klessen R. S.* // *Rev. Modern Phys.* 2004. V. 76. P. 125.
12. *Zhou M., Zhdankin V., Kunz M.W., Loureiro N.F., Uzdensky D.A.* // *Astrophys. J.* 2023. V. 960. P. 12.
13. *Arlt R., Urpin V.* // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 426. P. 755.
14. *Nelson R.P., Gressel O., Umurhan O.M.* // *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.* 2013. V. 435. P. 2610.
15. *Goldreich P., Schubert G.* // *Astrophys. J.* 1967. V. 150. P. 571.
16. *Klahr H., Hubbard A.* // *Astrophys. J.* 2014. V. 788. P. 21.
17. *Lyra W.* // *Astrophys. J.* 2014. V. 789. P. 77.
18. *Barranco J.A., Marcus P.S.* // *Astrophys. J.* 2005. V. 623. P. 1157.
19. *Marcus P.S., Pei S., Jiang C.H., Hassanzadeh P.* // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. P. 084501.
20. *Marcus P.S., Pei S., Jiang C.H., Barranco J.A., Hassanzadeh P., Lecoanet D.* // *The Astrophysical Journal.* 2015. V. 808. №. 1. P. 87.
21. *Marcus P.S., Pei S., Jiang C.H., Barranco J.A.* // *Astrophys. J.* 2016. V. 833. P. 148.
22. *Korre L., Featherstone N.A.* // arXiv preprint arXiv:2401.10675. 2024. (представлена в *Astrophys. J.*)
23. *McIntyre M.E., Hughes D.W., Rosner R., Weiss N.O.* *The Solar Tachocline.* Cambridge University Press, 2007.
24. *Кокс Д.П., Памятных А.А.* *Теория звездных пульсаций.* Мир, 1983.
25. *Löptien B., Gizon L., Birch A.C., Schou J., Proxauf B., Duvall Jr T.L., Bogart R.S., Christensen U.R.* // *Nature Astron.* 2018. V. 2. P. 568.
26. *Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М., Хортон В., Федун В.Н.* // *УФН.* 2020. Т. 190. С. 732.
27. *Timmermans M.L.E., Lister J.R., Huppert H.E.* // *J. Fluid Mechanics.* 2001. V. 445. P. 305.
28. *Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В.* // *ЖЭТФ.* 2012. Т. 141. С. 1206.
29. *Карельский К.В., Петросян А.С., Черняк А.В.* // *ЖЭТФ.* 2013. Т. 143. С. 779.
30. *Chernyak A., Karelsky K., Petrosyan A.* // *Physica Scripta.* 2013. V. 155. P. 014041.
31. *Юденкова М.А., Климачков Д.А., Петросян А.С.* // *ЖЭТФ.* 2022. Т. 161. С. 388.
32. *Vallis G.K.* *Atmospheric and oceanic fluid dynamics.* Cambridge University Press, 2017. P. 124.
33. *Федотова М.А., Климачков Д.А., Петросян А.С.* // *Физика плазмы.* 2020. Т. 46. С. 57.
34. *Balbus S.A., Hawley J.F.* // *Rev. Modern Phys.* 1998. V.70. P. 1.
35. *Armitage P.J.* // *Ann. Rev. Astro. Astrophys.* 2011. V.49. P. 195.
36. *Шакура Н.И.* *Аккреционные процессы в астрофизике.* М.: Физматлит, 2016.
37. *Miesch M.S.* // *Living Rev. Solar Phys.* 2005. V. 2. P. 1.
38. *Shebalin J.V.* // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2013. V. 107. P.411.
39. *Favier B.F.N., Godeferd F.S., Cambon C.* // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 2012. V. 106. P. 89.
40. *Tobias S.M., Diamond P.H., Hughes D.W.* // *Astrophys. J. Lett.* 2007. V 667. P. 113.
41. *Balk A.M.* // *Astrophys. J.* 2014. V. 796. P. 143.
42. *Зиняков Т.А., Петросян А.С.* // *Письма ЖЭТФ.* 2018. Т. 108. С. 75.
43. *Зиняков Т.А., Петросян А.С.* // *Письма ЖЭТФ.* 2020. Т. 111. С. 65.
44. *Суразов Р.А., Петросян А.С.* // *Письма ЖЭТФ.* 2019. Т. 110. № 5. С. 314.
45. *Gilman P.A.* // *Astrophys. J.* 2000. V. 544. P. 79.
46. *Heng K., Spitkovsky A.* // *Astrophys. J.* 2009. V. 703. P. 1819.
47. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L.* // *Astrophys J.* 2009. V. 691. P. 41.
48. *Климачков Д.А., Петросян А.С.* // *ЖЭТФ.* 2016. Т. 149. С. 965.
49. *Климачков Д.А., Петросян А.С.* // *ЖЭТФ.* 2017. Т. 152. С. 705.
50. *Климачков Д.А., Петросян А.С.* // *ЖЭТФ.* 2018. Т. 154. С. 1239.
51. *Miesch M.S.* // *Astrophys. J.* 2001. Т. 562. С. 1058.
52. *Miesch M.S.* // *Astrophys. J.* 2003. Т. 586. С. 663.
53. *Федотова М.А., Петросян А.С.* // *ЖЭТФ.* 2020. Т. 158. С. 374.
54. *Федотова М.А., Петросян А.С.* // *ЖЭТФ.* 2020. Т. 158. С. 1188.
55. *Latter H.N., Papaloizou J.* // *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.* 2017. V. 472. P. 1432.
56. *Almgren A.S., Bell J.B., Nonaka A., Zingale M.* // *Computing in Science & Engineering.* 2009. V. 11. P. 24.
57. *Ballester J.L., Alexeev I., Collados M., Downes T., Pfaff R.F., Gilbert H., Khodachenko M., Khomenko E., Shaikhislamov I.F., Soler R., Vázquez-Semadeni E., Zaqarashvili T.* // *Space Sci. Rev.* 2018. V. 214. P. 1.
58. *Leake J.E., DeVore C.R., Thayer J.P., Burns A.G., Crowley G., Gilbert H.R., Huba J.D., Krall J., Linton M.G., Lukin V.S., Wang W.* // *Space Sci. Rev.* 2014. V. 184. P. 107.
59. *Zeitlin V.* // *Nonlinear Processes Geophys.* 2013. V. 20. P. 893.
60. *Zaqarashvili T.V., Albekioni M., Ballester J.L., Bekki Y., Biancofiore L., Birch A.C., Dikpati M., Gizon L., Gurgenshvili E., Heifetz E., Lanza A.F., McIntosh S.W., Ofman L., Oliver R., Proxauf B., Umurhan O.M., Yellin-Bergovoy R.* // *Space Sci. Rev.* 2021. V. 217. P. 1.

61. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Shergelashvili B.M.* // *Astron. Astrophys.* 2007. V. 470. P. 815.
62. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J.L., Carbonell M., Khodachenko M.L., Lammer H., Leitzinger M., Odert P.* // *Astron. Astrophys.* 2011. V. 532. P. 139.
63. *Zaqarashvili T.V., Gurgenchashvili E.* // *Frontiers Astron. Space Sci.* 2018. V. 5. P. 7.
64. *McIntosh S.W., Cramer W.J., Pichardo Marcano M., Leamon R.J.* // *Nature Astronomy.* 2017. V. 1. P. 1.
65. *Dikpati M., Cally P.S., McIntosh S.W., Heifetz E.* // *Sci. Rep.* 2017. V. 7. P. 1.
66. *Dikpati M., Belucz B., Gilman P.A., McIntosh S.W.* // *Astrophys. J.* 2018. V. 862. P. 159.
67. *Dikpati M., McIntosh S.W., Bothun G., Cally P.S., Ghosh S.S., Gilman P.A., Umurhan O.M.* // *Astrophys. J.* 2018. V. 853. P. 144.
68. *Dikpati M., McIntosh S.W.* // *Space Weather.* 2020. V. 18. P. e2018SW002109.
69. *Dikpati M., McIntosh S.W., Wing S.* // *Frontiers Astron. Space Sci.* 2021. V. 8. P. 71.
70. *Worster G., Moffatt K., Batchelor G.* *Perspectives in Fluid Dynamics: A Collective Introduction to Current Research.* Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 393.
71. *Моффа Г.* *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде.* М.: Мир, 1980.
72. *Falkovich G.* *Fluid mechanics: A short course for physicists.* Cambridge University Press, 2011.
73. *Ostrovsky L.* *Asymptotic Perturbation Theory of Waves.* Imperial College Press, 2015. P. 18.
74. *Birnstiel T., Dullemond C.P., Brauer F.* // *Astron. Astrophys.* 2010. V. 513. P. A79.
75. *Andrews S.M.* // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 2020. V. 58. P. 483.
76. *Umurhan O.M.* // *Astron. Astrophys.* 2010. V. 521. P. A25.
77. *Umurhan O.M.* // *Astron. Astrophys.* 2012. V. 543. P. A124.
78. *Sheehan D.P., Davis S.S., Cuzzi J.N., Estberg G.N.* // *Icarus.* 1999. V. 142. P. 238.
79. *Lovelace R.V.E., Romanova M.M.* // *Fluid Dynamics Res.* 2014. V. 46. P. 041401.
80. *Li H.F., Finn J.M., Lovelace R.V.E., Colgate S.A.* // *Astrophys. J.* 2000. V. 533. P. 1023.
81. *Sterken V.J., Baalman L.R., Draine B.T., Godenko E., Herbst K., Hsu H.W., Hunziker S., Izmodev V., Lallement R., Slavin J.D.* // *Space Sci. Rev.* 2022. V. 218. P. 71.

LARGE-SCALE HYDRODYNAMIC FLOWS IN MEDIA WITH VARIABLE THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS

M. A. Yudenkova^{a,b}, D. A. Klimachkov^a, and A. S. Petrosyan^{a,b,*}

^aSpace Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^bMoscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi, Moscow region, Russia

*e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

A theory of large-scale flows in a rotating astrophysical plasma under conditions of non-trivial properties of the physical medium, which are not described by the classical hydrodynamic theory of plasma, is developed. As a first step, the theory is developed within a neutral fluid model to describe astrophysical plasma, with a subsequent generalization in mind to take into account magnetic effects. Such a model is of independent importance for studying turbulent dynamo in star-forming regions in galaxies and hydrodynamic instabilities in poorly ionized disks, for describing meridional flows below convective zones in lowmass stars and on the Sun, as well as for studying oscillations of the Sun and stars. Therefore, the results obtained have a wider application, e.g., for describing geophysical currents. The theory is based on two key ideas developed in plasma astrophysics: the use of a shallow water model with large-scale compressibility and the use of a two-layer shallow water model. Equations for two-layer shallow water are derived taking into account rotation and the effect of flow sphericity on rotation, in which the effects of large-scale compressibility are taken into account in the upper layer. For a rotating system, dispersion relations are obtained for Poincaré waves in two-layer shallow water, taking into account large-scale compressibility; similar dispersion relations for Poincaré waves are obtained in the high-frequency limit taking into account the effect of sphericity on rotation; in the low-frequency limit, a dispersion relation is obtained for Rossby waves. It is shown that the dispersion relations for Poincaré waves, taking into account the sphericity of the flow, have a qualitatively different form, which leads to three-wave interactions of Poincaré waves and the interaction of two Poincaré waves with a Rossby wave, which are not observed in a single-layer flow of a compressible fluid. All types of three-wave interactions for the flows under consideration are studied using the method of multiscale expansions.

Keywords: astrophysical plasma, two-layer shallow water, large-scale compressibility, Rossby waves, Poincaré Waves