

УДК 533.9

ТЕОРИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ КОСМИЧЕСКОЙ И АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ХОЛЛОВСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

© 2024 г. Т. В. Галстян^{a, b, *}, Д. А. Кошкина^{a, b, **},
Д. А. Климачков^{a, ***}, А. С. Петросян^{a, b, ****}

^aИнститут космических исследований РАН, Москва, Россия

^bМосковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*e-mail: galstyan.tigran@phystech.edu

**e-mail: koshkina.da@phystech.edu

***e-mail: klimachkovdmitry@gmail.com

****e-mail: apetrosoy@cosmos.ru

Поступила в редакцию 17.06.2024 г.

После доработки 10.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Развита теория крупномасштабных течений вращающейся частично ионизованной космической и астрофизической плазмы в приближении холловской магнитной гидродинамики. Частично ионизованная вращающаяся плазма описывает крупномасштабные процессы в экзопланетных атмосферах Горячих Юпитеров, в термосферно-ионосферной системе планет и Земли, в протопланетных дисках и во многих других объектах гелиофизики и космической физики. Полученные уравнения содержат нетривиальные слагаемые, описывающие влияние вращения на холловский ток и амбиполярную диффузию плазмы наряду с традиционной силой Кориолиса действующей на импульс центра масс плазмы. Проведен анализ линейных течений в простейшем случае пренебрежения силы тяжести. Получены дисперсионные соотношения для модифицированных альфвеновских волн, для вращающихся быстрых и медленных звуковых волн и модифицированных свистовых волн. Медленные звуковые волны являются новым типом течений вызванных силой Кориолиса. Быстрые звуковые волны соответствуют обычным звуковым волнам при отсутствии вращения.

Ключевые слова: частично ионизованная плазма, вращение, холловская магнитная гидродинамика, волны

DOI: 10.31857/S0367292124090086, **EDN:** DVBNTB

1. ВВЕДЕНИЕ

Плазма является наиболее распространенным состоянием космических и астрофизических объектов во Вселенной. В качестве примера отметим Солнце и звезды, планетные ионосферы и протопланетные диски. В последнее время значительный прогресс сделан в плазменной астрофизике, что позволяет понять природу и динамику различных объектов во Вселенной на основе изуче-

ния свойств астрофизической плазмы. В космической и астрофизической плазме возникают течения с характерными масштабами порядка размера космического или астрофизического объекта, в динамику которых существенно влияет вращение объекта. Такие течения будем называть крупномасштабными [1–3].

Настоящая работа посвящена развитию теории крупномасштабных течений вращающейся частично ионизованной космической и астрофизической

ческой плазмы в приближении холловской магнитной гидродинамики [4–8]. Такие течения широко распространены в космической и астрофизической плазме [9–11] и в экзопланетных атмосферах [12].

Частично ионизованная плазма, которой посвящена наша работа, состоит из трех компонент: электронной, ионной и нейтральной [9, 10, 13]. В такой плазме пренебрегают процессами ионизации и рекомбинации, поэтому иногда такое состояние называют плазмой с газовой добавкой [11]. Это существенно отличает частично ионизованную плазму от слабоионизованной, в которой степень ионизации меняется вследствие наличия процессов ионизации и рекомбинации.

Для описания частично ионизованной плазмы используют приближение многожидкостной магнитной гидродинамики с учетом взаимодействия компонент, а также уравнения электромагнитного поля. Полная система уравнений достаточно сложна как для теоретического анализа, так и для численного моделирования, поэтому в нашей работе мы обобщим идеи холловской магнитной гидродинамики частично ионизованной плазмы для случая вращения каждой из компонент плазмы. Как будет показано ниже, обобщение холловской магнитной гидродинамики частично ионизованной плазмы при наличии вращения не является тривиальной задачей и не может быть получено путем добавления силы Кориолиса в классическую теорию холловской магнитной гидродинамики для частично ионизованной плазмы [8].

Заметим, что наличие вращения означает, что на каждую компоненту действует сила Кориолиса. Кроме силы Кориолиса существенный вклад в крупномасштабную динамику частично ионизованной плазмы вносит сила Лоренца. Тем не менее нейтральная компонента плазмы не подвержена ее воздействию. Как следствие, на движение заряженной и нейтральной компоненты плазмы влияют разные силы. Соответственно, скорости заряженной и нейтральной компонент различаются. Разница скоростей означает, что посредством ионно-нейтральных столкновений происходит перенос импульса от одной компоненты к другой, в результате чего заряженная и нейтральная компонента движутся с одной скоростью. Описанный выше процесс позволяет рассматривать частично ионизованную плазму как единую односкоростную жидкость, а разницу

скоростей различных компонент учитывать посредством возникновения эффекта Холла и амбиполярной диффузии плазмы.

Эффект Холла обусловлен тем, что ионная и электронная компоненты, в силу своей разности зарядов, движутся в разных направлениях под действием силы Лоренца из-за чего возникает холловский ток. Наличие холловского тока в магнитном поле приводит к возникновению силы пропорциональной векторному произведению вектора плотности тока и вектора магнитной индукции. Эффект Холла приводит к возникновению дрейфа плазмы против магнитного поля в различных космических и астрофизических объектах [14–16].

Представление частично ионизованной плазмы односкоростной жидкостью существенно упрощает систему магнитогидродинамических уравнений для трех компонент и в силу возникновения эффекта Холла в таком рассмотрении называется холловской магнитной гидродинамикой. Классическая система уравнений холловской магнитной гидродинамики для центра масс частично ионизованной плазмы получена без учета вращения [8], что ограничивает применимость такой модели для описания крупномасштабных процессов в космических и астрофизических объектах. Однако учет вращения каждой компоненты плазмы проявляется неявным образом через холловский ток и амбиполярную диффузию плазмы. Таким образом, влияние силы Кориолиса на компоненты плазмы сводится к изменению величины холловского тока и амбиполярной диффузии плазмы, что приводит к интересным нетривиальным физическим следствиям.

Главным результатом развитой теории является полученная во втором разделе система уравнений холловской магнитной гидродинамики для вращающейся частично ионизованной плазмы на основе полной системы магитогидродинамических уравнений движения для электронной, ионной и нейтральной компонент плазмы с учетом влияния силы Кориолиса на динамику каждой компоненты.

В разд. 3 найдено дисперсионное уравнение для линейных волн во вращающейся частично ионизованной плазме. Анализ дисперсионного уравнения проведен в случае когда внешнее магнитное поле направлено в направлении вектора угловой скорости вращения. Дисперсионное уравнение проанализировано в низкочастотном и в высоко-

частотном пределе в приближениях быстрого и медленного вращения. Получены новые типы волн в сделанных приближениях, являющиеся обобщением известных магнитогидродинамических мод при наличии вращения. Кроме того, получен новый тип волны вызванный наличием вращения.

2. ВЫВОД МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

2.1. Исходные уравнения

Рассмотрим трехкомпонентную частично ионизованную вращающуюся плазму, состоящую из ионов, электронов и нейтральной компоненты. Для описания такой плазмы используем уравнения непрерывности и уравнения Эйлера для каждой компоненты, а также уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Уравнения непрерывности для каждой компоненты имеют вид

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{v}_n) = 0, \quad (3)$$

где ρ_e, ρ_i, ρ_n = плотности электронной, ионной и нейтральной компонент соответственно, $\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_n$ = скорости соответствующих компонент в неинерциальной системе отсчета. В уравнениях (1)–(3) степень ионизации плазмы считаем постоянной, поэтому отсутствуют слагаемые описывающие процессы ионизации и рекомбинации.

Гидродинамические уравнения вращающейся частично ионизованной плазмы запишем для каждой компоненты в неинерциальной системе отсчета

$$\begin{aligned} \rho_e \frac{d_e \mathbf{v}_e}{dt} = & -\nabla P_e - e n_e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) - \\ & -\rho_e v_{ei}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - \rho_e v_{en}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n) - \\ & -2\rho_e(\Omega \times \mathbf{v}_e) + \rho_e \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = & -\nabla P_i + e n_e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) - \\ & -\rho_i v_{ie}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - \rho_i v_{in}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n) - \\ & -2\rho_i(\Omega \times \mathbf{v}_i) + \rho_i \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho_n \frac{d_n \mathbf{v}_n}{dt} = & -\nabla P_n - \rho_n v_{ne}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_e) - \\ & -\rho_n v_{ni}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i) - 2\rho_n(\Omega \times \mathbf{v}_n) + \rho_n \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (4)–(6) силы, которые влияют на крупномасштабное движение соответствующих частиц включают градиент давления, силу Лоренца, силу Кориолиса и силу тяжести. Уравнения (4)–(6), записанные в неинерциальной системе отсчета, включают также центробежную силу, которую учитывают в слагаемых, описывающих силу тяжести [17], хотя в астрофизической и космической плазме центробежные силы иногда включают в давление [18] или зачастую ими пренебрегают [19]. Считаем, что компоненты взаимодействуют друг с другом посредством ион-нейтральных, ион-электронных и электрон-нейтральных столкновений. Здесь P_e, P_i, P_n = давления электронов, ионов и нейтралов соответственно, $\mathbf{E}$ = вектор электрической напряженности в неинерциальной системе отсчета, $\mathbf{B}$ = вектор магнитной индукции в неинерциальной системе отсчета, Ω = вектор угловой скорости вращения, $\mathbf{g}$ = вектор ускорения свободного падения, а v_{jk} = частоты столкновений между j -й и k -й компонентой. Частоты столкновений удовлетворяют следующему соотношению: $\rho_k v_{kj} = \rho_j v_{jk}$. В уравнениях (4)–(6) используются обозначения $d_j / dt = \partial / \partial t + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla)$.

Исходные уравнения вращающейся частично ионизованной космической и астрофизической плазмы записаны в неинерциальной системе отсчета, в отличие от уравнений вращающейся лабораторной плазмы, например в токамаках [5, 20, 21]. Скорость каждой компоненты плазмы в инерциальной системе отсчета $\mathbf{v}_k^{(in)}$, где $k = e, i, n$ равна $\mathbf{v}_k^{(in)} = \mathbf{v}_k + \Omega \times \mathbf{r}_k$, где $\mathbf{v}_k$ = вектор скорости компоненты в неинерциальной системе отсчета, Ω = вектор угловой скорости вращения, а $\mathbf{r}_k$ = радиус-вектор компоненты. Предположим, что вектор скорости некоторой компоненты в неинерциальной системе отсчета равен нулю. Отсюда следует, что сам вектор скорости в инерциальной системе отсчета совершает вращательное движение с угловой скоростью Ω . Стало быть, в неинерциальной системе отсчета течение изменяется для неподвижного наблюдателя. В инерциальной системе отсчета наблюдатель совершает вращательное движение с угловой скоростью Ω . Таким образом, представление силы Кориолиса в неинерциальной системе отсчета позволяет рассмат-

ривать нетривиальные стационарные течения в условии баланса внешних сил различной природы. Кроме того, неинерциальная система отсчета оказывается удобной для описания электромагнитного поля в плазме, поскольку во вращающейся системе отсчета уравнения Максвелла имеют тот же вид, что и в инерциальных системах отсчета [22–24]. Это следует из того, что в неинерциальной системе отсчета магнитное поле $\mathbf{B}$ и электрическое поле $\mathbf{E}$ выражаются через компоненты электромагнитного поля в инерциальной системе отсчета $\mathbf{E}^{(in)}$ и $\mathbf{B}^{(in)}$ в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(in)} - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}^{(in)} / c$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(in)} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}^{(in)} / c$. Отметим, что из выражения неинерциального электрического поля следует, что $E^{(in)} \sim (u / c) B^{(in)}$, где u = порядок скорости вращающегося объекта. Отсюда следует, что в выражении неинерциального магнитного поля второе слагаемое имеет порядок $(u^2 / c^2) B^{(in)}$. Ввиду рассмотрения в данной работе нерелятивистских течений, пренебрегаем слагаемыми квадратичными по u / c , что означает равенство магнитного поля в инерциальной и неинерциальной системе отсчета $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(in)}$ [23]. В пренебрежении тока смещения уравнение Максвелла для электрического поля в неинерциальной системе отсчета в точности переходит в закон Ампера. В уравнении Максвелла для магнитного поля в неинерциальной системе отсчета [23] возникают сокращающиеся слагаемые с обеих сторон уравнения, откуда получается классическое уравнение Максвелла для магнитного поля, записанное в неинерциальной системе отсчета. Таким образом, неинерциальная система отсчета позволяет записать уравнения движения всех компонент плазмы и уравнения Максвелла для электромагнитного поля в привычном виде.

Запишем теперь уравнения Максвелла в неинерциальной системе отсчета для плотности тока $\mathbf{J}$ и для магнитного поля $\mathbf{B}$ в пренебрежении тока смещения [7]:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}. \quad (8)$$

Систему (1)–(8) замкнем следующими уравнениями состояния:

$$P_j = \frac{\rho_j c_{sj}^2}{\gamma_j}, \quad j = e, i, n, \quad (9)$$

где γ_j = показатели адиабаты соответствующих компонент частично ионизованной плазмы,

c_{sj}^2 = скорости звука в соответствующих компонентах частично ионизованной плазмы.

Далее исходная система уравнений (1)–(9) будет упрощена на основе эффекта Холла.

2.2. Эффект Холла в течениях вращающейся частично ионизованной плазмы

Для вывода уравнений холловской магнитной гидродинамики для вращающейся многокомпонентной частично ионизованной плазмы необходимо получить уравнения для плазмы с общим центром масс и далее преобразовать уравнения Максвелла в переменных замыкающих гидродинамическую часть системы.

Уравнение непрерывности и уравнение движения с учетом эффекта Холла. Рассмотрим движение системы трех компонент плазмы, как движение единой жидкости с общим центром масс, который движется со скоростью центра масс. Для этого просуммируем уравнения (1)–(3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e + \rho_i + \rho_n) + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{v}_e + \rho_i \mathbf{v}_i + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0. \quad (10)$$

Обозначив $\rho = \rho_e + \rho_i + \rho_n$ = плотность плазмы и $\mathbf{v} = (\rho_e \mathbf{v}_e + \rho_i \mathbf{v}_i + \rho_n \mathbf{v}_n) / \rho$ = скорость центра масс плазмы, перепишем полученное уравнение (10) через введенные переменные

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (11)$$

Вследствии квазинейтральности плазмы $n_i = n_e$. Поскольку для масс ионов и электронов имеем соотношение $m_i \gg m_e$, а $\rho_k = m_k n_k$, $k = e, i, n$ и $\rho_i \gg \rho_e$, считаем, что плотностью электронов можно пренебречь по сравнению с плотностью ионов и нейтральной компоненты в выражении для плотности плазмы и $\rho = \rho_i + \rho_n$. Кроме того, отсюда следует, что импульсом электронов можно также пренебречь по сравнению с импульсами ионов и нейтральной компоненты в выражении для скорости центра масс плазмы: $\mathbf{v} = (\rho_i \mathbf{v}_i + \rho_n \mathbf{v}_n) / \rho$. Такое приближение позволяет далее существенно упростить описание переноса импульса в частично ионизованной плазме, а также будет использовано в следующем разделе для упрощения уравнения электромагнитного поля. Сделанное приближение фактически означает, что инерцией электронов в частично ионизованной плазме мы пренебрегаем.

Плотность и скорость электронов таким образом исключаются из переменных ρ и $\mathbf{v}$. Тем не менее для описания эффекта Холла в уравне-

нии движения центра масс частично ионизованной плазмы сохраняем слагаемое $\rho_e d_e \mathbf{v}_e / dt$ [6–8]. Тогда уравнение движения центра масс частично ионизованной плазмы для $\mathbf{v}$ записывается в следующем виде:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \frac{d_i \rho_i}{dt} + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}) \frac{d_n \rho_n}{dt} + \rho_e \frac{d_e \mathbf{v}_e}{dt} + \rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} + \rho_n \frac{d_n \mathbf{v}_n}{dt}. \quad (12)$$

В выражении (12) временные производные $d_k \rho_k / dt$ для ионной и нейтральной компонент записаны в виде

$$\frac{d_k \rho_k}{dt} = \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \rho_k, \quad k = i, n. \quad (13)$$

Уравнения (2), (3) в обозначениях (13) принимают следующий вид:

$$\frac{d_k \rho_k}{dt} = -\rho_k \nabla \cdot (\mathbf{v}_k), \quad k = i, n. \quad (14)$$

Из определения скорости центра масс плазмы $\mathbf{v}$ следует

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v} = \frac{\rho_n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n)}{\rho}, \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_n - \mathbf{v} = \frac{\rho_i (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i)}{\rho}. \quad (16)$$

Обозначим $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n$ = скорость ионно-нейтрального дрейфа. Используя выражения (4)–(6) и (14)–(16) из уравнения (12) получим уравнения движения плазмы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\frac{\rho_n \mathbf{v}_D}{\rho} \rho_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i + \\ & + \frac{\rho_i \mathbf{v}_D}{\rho} \rho_n \nabla \cdot \mathbf{v}_n - \nabla (P_e + P_i + P_n) + \\ & + \frac{en_e}{c} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - \\ & - 2\rho_e (\Omega \times \mathbf{v}_e) - 2\rho_i (\Omega \times \mathbf{v}_i) - \\ & - 2\rho_n (\Omega \times \mathbf{v}_n) + (\rho_e + \rho_i + \rho_n) \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (17)$$

В уравнении (17) обозначим суммарное давление $P = P_e + P_i + P_n$ а также введем плотность электрического тока $\mathbf{J} = ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$. Тогда полученное уравнение (17) выражается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\rho_i \rho_n}{\rho} \mathbf{v}_D \nabla \cdot \mathbf{v}_D = \\ = -\nabla P + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - 2\rho (\Omega \times \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (18) является законом сохранения импульса плазмы с общим центра масс и включает слагаемое $\mathbf{J} \times \mathbf{B} / c$ описывающее эффект Холла.

Таким образом, в сделанных приближениях на движение плазмы влияют градиент суммарного давления плазмы, эффект Холла, сила тяжести и вращение каждой компоненты частично ионизованной плазмы, описываемое силой Кориолиса. Для суммарного давления в уравнении (18), используем выражения (9) для давления электронной, ионной и нейтральной компонент частично ионизованной плазмы. Тогда имеем

$$P = \frac{\rho_e c_{se}^2}{\gamma_e} + \frac{\rho_i c_{si}^2}{\gamma_i} + \frac{\rho_n c_{sn}^2}{\gamma_n}. \quad (19)$$

Для дальнейшего анализа и оценки слагаемых в уравнении (18) определим эффективную скорость звука центра масс частично ионизованной плазмы следующим образом:

$$c_s^2 = \frac{\rho_e c_{se}^2}{\gamma_e \rho} + \frac{\rho_i c_{si}^2}{\gamma_i \rho} + \frac{\rho_n c_{sn}^2}{\gamma_n \rho}. \quad (20)$$

Отметим некоторые особенности следующие из определения эффективной скорости звука центра масс частично ионизованной плазмы (20). В случае отсутствия ионизованной компоненты $\rho_i = \rho_e = 0$, $\rho = \rho_n$ из (20) следует $c_s^2 = c_{sn}^2 / \gamma_n$. В пределе нейтральной жидкости эффективная скорость звука центра масс частично ионизованной плазмы отличается от скорости звука нейтрального газа. В случае же полностью ионизованной плазмы $\rho_n = 0$ эффективная скорость звука центра масс полностью ионизованной плазмы из (20) равна $c_s^2 = (\rho_e c_{se}^2 / (\gamma_e \rho_i)) + (c_{si}^2 / \gamma_i)$. Поскольку плотность электронной компоненты в пределе полностью ионизованной плазмы много меньше плотности ионной компоненты имеем $c_s^2 = c_{si}^2 / \gamma_i$. Отсюда эффективная скорость звука центра масс в пределе полностью ионизованной плазмы отлична от скорости звука ионной компоненты частично ионизованной плазмы. Тем не менее из выражения для суммарного давления (19) следует выполнение уравнений состояния (9) для соответствующих компонент в обоих рассмотренных пределах, несмотря на то, что эффективная скорость звука центра масс частично ионизованной плазмы меньше скорости звука каждой компоненты. Избранный способ замыкания уравнений холловской магнитной гидродинамики представляется единственно возможным, поскольку показатель адиабаты центра масс частично иони-

зованной плазмы невозможно выразить через показатели адиабат отдельных компонент.

Отметим, что в уравнении (18) для скорости движения центра масс $\mathbf{v}$ присутствует дрейфовое слагаемое, описывающее различие скоростей ионной и нейтральной компоненты

$$\frac{\rho_i \rho_n}{\rho} \mathbf{v}_D \nabla \cdot (\mathbf{v}_D). \quad (21)$$

Ниже в этом параграфе проанализируем влияние дрейфового слагаемого на динамику вращающейся частично ионизованной плазмы.

Далее рассмотрим течения плазмы, в которых влиянием дрейфового слагаемого в уравнение (18) можно пренебречь. Для оценки порядка дрейфовой скорости выпишем выражения для альфвеновской скорости

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (22)$$

и эффективной скорости звука центра масс частично ионизованной плазмы, используя выражения (19) и (20),

$$c_s = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (23)$$

Введенная таким образом эффективная скорость звука центра масс частично ионизованной плазмы позволяет оценить порядок градиента давления в уравнении (18). Заметим, что уравнение состояния центра масс частично ионизованной плазмы (23) сводится к уравнению состояния каждой компоненты (9) для течений только электронной жидкости, для течений только ионной жидкости, а также и для течений только нейтральной жидкости.

Далее проанализируем слагаемое включающее v_D в уравнении (18) и возможность его пренебрежения по сравнению с остальными слагаемыми.

Из уравнения (18) следует, что при выполнении условия $\rho_i \rho_n v_D^2 \ll \rho^2 (v_A^2 + c_s^2)$ влиянием ионно-нейтрального дрейфа на динамику плазмы можно пренебречь. Оценим модуль дрейфовой скорости при котором выполнено это условие. Для этого просуммируем уравнения (4) и (5) с учетом малости электронного импульса

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} &= \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \rho_e v_{en} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n) - \\ &- \rho_i v_{in} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n) - 2\rho_i (\Omega \times \mathbf{v}_i) + \rho_i \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (24)$$

Умножим полученное уравнение на ρ_n и вычтем из него уравнение (6) помноженное на ρ_i

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i \rho_n}{\rho} \left[\frac{d_D \mathbf{v}_D}{dt} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_D + (\mathbf{v}_D \cdot \nabla) \mathbf{v}_n \right] &= \\ &= -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P + \nabla P_n + \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \\ &- (\rho_i v_{in} + \rho_e v_{en}) \mathbf{v}_D + \frac{m_e v_{en} \mathbf{J}}{e} - \\ &- 2 \frac{\rho_i \rho_n}{\rho} (\Omega \times \mathbf{v}_D), \end{aligned} \quad (25)$$

где введено обозначение $d_D / dt = \partial / \partial t + (\mathbf{v}_D \cdot \nabla)$. В уравнении (25) выпишем условие, при котором изменением величины ионно-нейтрального дрейфа в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с v_D

$$\omega \ll \frac{\rho}{\rho_i} v_{ni}. \quad (26)$$

Тогда введем обозначение $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{ei} + \mathbf{v}_{en}$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{ie} + \mathbf{v}_{in}$. Запишем выражение для циклотронной частоты каждой компоненты

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e c}, \quad (27)$$

$$\omega_{ci} = \frac{eB}{m_i c}. \quad (28)$$

Обозначим $\beta_e = \omega_{ce} / v_e$, $\beta_i = \omega_{ci} / v_i$. Тогда, с учетом условия $\rho_e v_{en} \ll \rho_i v_{in}$ и (26), уравнение (25) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c \rho_i v_{in}} + \frac{\nabla P_n}{\rho_i v_{in}} - \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\nabla P}{\rho_i v_{in}} + \\ &+ \frac{\beta_i}{\beta_e} \frac{\mathbf{J}}{en_i} - 2 \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} (\Omega \times \mathbf{v}_D). \end{aligned} \quad (29)$$

Введем параметр $D = \rho_n / \rho$ = отношение нейтральной плотности к общей плотности.

Для оценки v_D обозначим характерную длину градиента L и характерную скорость v , такие, что $\omega = v / L$.

$$\rho \frac{dv}{dt} \sim \rho \frac{v^2}{L}. \quad (30)$$

Тогда из уравнения (18) имеем

$$\rho \frac{v^2}{L} \sim \rho \frac{(c_s^2 + v_A^2)}{L}, \quad (31)$$

откуда получаем

$$v^2 \sim c_s^2 + v_A^2. \quad (32)$$

Порядок v_D в введенных обозначениях имеет вид

$$v_D \sim \frac{\rho_n v^2}{\rho_i v_{in} L} \left(1 + \frac{1}{D\beta_e}\right). \quad (33)$$

Тогда из условия $\rho_i \rho_n v_D^2 \ll \rho^2 v^2$ имеем

$$\frac{\rho_n^3 v^4}{\rho_i v_{in}^2 L^2} \left(1 + \frac{1}{D\beta_e}\right)^2 \ll \rho^2 v^2. \quad (34)$$

Разрешая уравнение (34) относительно ω , получаем характерные частоты, при которых вкладом дрейфового слагаемого можно пренебречь

$$\omega \ll \frac{\rho}{\sqrt{\rho_i \rho_n}} \frac{D\beta_e}{1 + D\beta_e} v_{ni}. \quad (35)$$

Таким образом, при выполнении условий (26) и (35) уравнение (18) упрощается и сводится к виду

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - 2\rho(\Omega \times \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}. \quad (36)$$

Отметим, что условие (35) является более строгим, чем условие (26) при $\beta_e \leq 1$ и при $D \rightarrow 1$ для $\beta_e > 1$.

Таким образом, мы получили уравнения холловской магнитной гидродинамики для вращающейся астрофизической и космической плазмы из исходных уравнений гидродинамики трехкомпонентной плазмы. Полученное уравнение (36) имеет вид традиционного уравнения холловской магнитной гидродинамики путем добавления силы Кориолиса. Тем не менее для замыкания полученной системы уравнений необходимо получить уравнение для переноса магнитного поля $\mathbf{B}$ течением центра масс $\mathbf{v}$ из исходных уравнений электромагнитного поля (7), (8) и уравнения скорости электронной компоненты v_e (4).

Уравнение эволюции магнитного поля с учетом эффекта Холла. Уравнения (11) и (36) необходимо дополнить уравнением электромагнитного поля, записанного в терминах холловского тока и магнитного поля. Для описания эволюции магнитного поля выразим напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ из уравнения (4) с учетом пренебрежения инерцией электронной компоненты

$$\mathbf{E} = -\frac{\nabla P_e}{en_e} - \frac{\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}}{c} - \frac{m_e v_{ei}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)}{e} - \frac{m_e v_{en}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n)}{e} - \frac{2m_e(\Omega \times \mathbf{v}_e)}{e} + \frac{m_e \mathbf{g}}{e}. \quad (37)$$

Подставляя в (37) выражение для плотности тока $\mathbf{J} = en_e(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ дрейфовой скорости $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n$ получим

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \left(\mathbf{B} - \frac{2cm_e \Omega}{e}\right) = -\frac{\nabla P_e}{en_e} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{B} - 2cm_e \Omega / e)}{cen_e} - \frac{m_e v_{en} \mathbf{v}_D}{e} + \frac{m_e \mathbf{g}}{e} \quad (38)$$

где $\sigma = e^2 n_e / (m_e v_e) =$ омическая проводимость.

Подставляя выражение (15) для $\mathbf{v}_i$ и выражая вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ через вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ в уравнении (8) получим следующее уравнение для эволюции магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = & \nabla \times \left[\mathbf{v} \times \left(\mathbf{B} - \frac{2cm_e \Omega}{e} \right) + c \frac{\nabla P_e}{en_e} + \right. \\ & + D\mathbf{v}_D \times \left(\mathbf{B} - \frac{2cm_e \Omega}{e} \right) - \\ & \left. - \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{B} - 2cm_e \Omega / e)}{en_e} - \right. \\ & \left. - \frac{c\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{cm_e v_{en} \mathbf{v}_D}{e} + \frac{cm_e \mathbf{g}}{e} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Отметим, что в уравнении (39) слагаемое описывающее влияние силы тяжести тождественно равно нулю в силу потенциальности поля тяжести. Уравнение (39) включает дрейфовую скорость, которую необходимо выразить через характеристики частично ионизованной плазмы.

Для удобства дальнейших вычислений обозначим первые четыре слагаемые в уравнении (29)

$$\mathbf{A} = \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c \rho_i v_{in}} + \frac{\nabla P_n}{\rho_i v_{in}} - \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\nabla P}{\rho_i v_{in}} + \frac{\beta_i}{\beta_e} \frac{\mathbf{J}}{en_i}. \quad (40)$$

Тогда выражение (29) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{A} - 2 \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} (\Omega \times \mathbf{v}_D). \quad (41)$$

Используя выражения для $(\Omega \cdot \mathbf{v}_D)$

$$(\Omega \cdot \mathbf{v}_D) = (\Omega \cdot \mathbf{A}) \quad (42)$$

и для $\Omega \times \mathbf{v}_D$

$$\Omega \times \mathbf{v}_D = \Omega \times \mathbf{A} - 2 \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} \Omega (\Omega \cdot \mathbf{v}_D) + 2 \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} \Omega^2 \mathbf{v}_D \quad (43)$$

получим следующий вид для $\mathbf{v}_D$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D = & \mathbf{A} - 2 \frac{\rho_n \rho v_{in}}{\rho^2 v_{in}^2 + 4 \rho_n^2 \Omega^2} (\Omega \times \mathbf{A} - 2 \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} \Omega (\Omega \cdot \mathbf{A}) + \\ & + 2 \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} \Omega^2 \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (44)$$

Пренебрегая слагаемым $\nabla P_e / (en_e)$, описывающим батарею Бирмана, которая отвечает за генерацию магнитного поля в галактиках, однако

мала по сравнению с остальными слагаемыми, и малыми членами порядка $D\beta_i / \beta_e$, получаем искомое уравнение эволюции магнитного поля во вращающейся частично ионизованной плазме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = & \nabla \times \left\{ \mathbf{v} \times \left(\mathbf{B} - \frac{2cm_e\Omega}{e} \right) + \right. \\ & D^2 \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - 2cm_e\Omega / e)}{c\rho_i v_{in}} + \\ & + D^2 \frac{\rho_n \rho v_{in}}{\rho^2 v_{in}^2 + 4\rho_n^2 \Omega^2} \left[\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c\rho_i v_{in}} \times 2\Omega + \right. \\ & + \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} 2\Omega \left(2\Omega \cdot \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c\rho_i v_{in}} \right) - \\ & - \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} 4\Omega^2 \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c\rho_i v_{in}} \left. \right] \times \left(\mathbf{B} - \frac{2cm_e\Omega}{e} \right) - \\ & - \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{B} - 2cm_e\Omega / e)}{en_e} - \frac{c\mathbf{J}}{\sigma} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Введем следующие обозначения: $\hat{\mathbf{B}} =$ — единичный вектор по направлению вектора $\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{B}} =$ — единичный вектор по направлению вектора $\tilde{\mathbf{B}}$, $\eta = c^2 / (4\pi\sigma) =$ омический коэффициент диффузии, $\eta_H = c\tilde{B} / (4\pi en_e) =$ холловский коэффициент диффузии, $\eta_A = D^2 B \tilde{B} / (4\pi \rho_i v_{in}) =$ — коэффициент амбиполярной диффузии, где $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - 2cm_e\Omega / e =$ эффективное магнитное поле в присутствии вращения системы.

Пользуясь введенными обозначениями, уравнение (45) запишем в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = & \nabla \times \left\{ \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{4\pi\eta}{c} \mathbf{J} - \frac{4\pi\eta_H}{c} \mathbf{J} \times \right. \\ & \times \hat{\mathbf{B}} + \frac{4\pi\eta_A}{c} \left[(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \hat{\mathbf{B}} + \frac{\rho_n \rho v_{in}}{\rho^2 v_{in}^2 + 4\rho_n^2 \Omega^2} \cdot \right. \\ & \cdot \left((\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) \times 2\Omega + \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} 2\Omega (2\Omega \cdot \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) - \right. \\ & - \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} 4\Omega^2 (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) \times \hat{\mathbf{B}} \left. \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Уравнение (46) описывает эволюцию магнитного поля посредством адвекции, омической диффузии, холловской диффузии и амбиполярной диффузии с учетом поправок вызванных вращением плазмы. Систему уравнений (11), (36) и (46) будем называть системой уравнений холловской магнитной гидродинамики для вращающейся частично ионизованной плазмы.

3. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ХОЛЛОВСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

3.1. Система уравнений холловской магнитной гидродинамики для вращающейся частично ионизованной плазмы

Запишем систему уравнений холловской магнитной гидродинамики для вращающейся частично ионизованной плазмы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (47)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - 2\rho(\Omega \times \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = & \nabla \times \left\{ \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}} - \frac{4\pi\eta}{c} \mathbf{J} - \frac{4\pi\eta_H}{c} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}} + \frac{4\pi\eta_A}{c} \cdot \right. \\ & \cdot \left[(\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) \times \hat{\mathbf{B}} + \frac{\rho_n \rho v_{in}}{\rho^2 v_{in}^2 + 4\rho_n^2 \Omega^2} \cdot \right. \\ & \cdot \left((\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) \times 2\Omega + \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} 2\Omega (2\Omega \cdot \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) - \right. \\ & - \frac{\rho_n}{\rho v_{in}} 4\Omega^2 (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) \times \hat{\mathbf{B}} \left. \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

В уравнениях (47)–(49) условие бездивергентности магнитного поля $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ выполнено тождественно. Решение задачи Коши системы уравнений (47)–(49) с известными начальными распределениями суммарной плотности ρ , скорости центра масс плазмы $\mathbf{v}$ и вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ описывает распределение упомянутых переменных во времени и пространстве, однако практическую ценность представляет получение распределений для плотностей и скоростей каждой компоненты по отдельности. Для плотности ионов и нейтралов справедливо

$$\rho_n = D\rho, \quad (50)$$

$$\rho_i = (1 - D)\rho. \quad (51)$$

Используя условие квазинейтральности плотность электронной компоненты выражаем следующим образом:

$$\rho_e = \frac{m_e}{m_i} (1 - D)\rho. \quad (52)$$

Пользуясь выражениями (29) и (44) дрейфовую скорость $\mathbf{v}_D$ выражаем через полученные ρ , $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$.

Выразим скорость ионов и нейтральной компоненты через $\mathbf{v}_D$ и $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + D\mathbf{v}_D, \quad (53)$$

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v} - (1 - D)\mathbf{v}_D. \quad (54)$$

Поскольку для плотности тока выполнено $\mathbf{J} = en_e(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ то из (8) получим

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i - \frac{c\nabla \times \mathbf{B}}{4\pi en_e}. \quad (55)$$

Выражая в уравнении (55) $\mathbf{v}_i$ из (53) и n_e из (51) получим

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} + D\mathbf{v}_D - \frac{cm_i \nabla \times \mathbf{B}}{4\pi e(1 - D)\rho}. \quad (56)$$

Таким образом решение системы уравнений (47)–(49) позволяет получить распределения исходных переменных из (50)–(56).

Полученная система уравнений (47)–(49) включает в себя важные эффекты силы Кориолиса и силы тяжести и имеет большой потенциал применения для объяснения процессов в частично ионизованной космической и астрофизической плазме. Система допускает множество различных нетривиальных стационарных состояний, на фоне которых развиваются крупномасштабные течения в космической и астрофизической плазме. Ниже будет проведен анализ возможных линейных течений для тривиального состояния равновесия. Подробный анализ течений на фоне нетривиальных равновесий будет выполнен в отдельной работе.

3.2. Общий вид дисперсионного уравнения

Получим далее дисперсионное уравнение, описывающее линейные моды системы (47)–(49) в отсутствии влияния силы тяжести. В теории частично ионизованной плазмы при отсутствии вертикальной стратификации, как правило, пренебрегают силой тяжести [5–9]. В нашем случае такое пренебрежение соответствует условию малости влияния силы тяжести по сравнению со слагаемыми включающими градиент давления и эффект Холла

$$\omega \gg \frac{g}{\sqrt{v_A^2 + c_s^2}}. \quad (57)$$

Анализ системы уравнений (47)–(49) проведем при различных порядках ω относительно некоторых характерных времен и длин, отвечающих за вклад каждого отдельного слагаемого в уравнениях, которые для соответствующих

производных будут $d/dt = 1/\omega$, $\nabla = 1/L$, где ω и L – характерные частота и длина соответственно. Из уравнения (48) следует, что рассматриваемая характерная скорость v должна иметь порядок $v^2 \sim (v_A^2 + c_s^2)$. Считая вклады градиента давления и эффекта Холла примерно одинакового порядка имеем оценку $v \sim v_A$ откуда получаем оценку порядка характерной длины $L \sim v_A / \omega$. Порядок параметра $f = 2\Omega$ является определяющим при рассмотрении вращения в различных приближениях. В случае $\omega \gg f$ вращательным членом в уравнениях (48) и (49) можно пренебречь и система переходит в классическую систему уравнений холловской магнитной гидродинамики [8].

Рассмотрим уравнение (49), чтобы сравнить вклады адвекционного и холловского члена. Введем параметр $\omega_H = (v_A^2 / \eta_H)(\tilde{B} / B) =$ холловскую частоту. Смысл этого параметра в том, что при частотах больше холловской влиянием адвекционного слагаемого в уравнении (49) можно пренебречь по сравнению с влиянием слагаемого, описывающего холловскую диффузию.

Запишем отношения коэффициента холловской диффузии к коэффициенту омической диффузии $\eta_H / \eta = |\beta_e - f / v_e|$, а также отношение коэффициента амбиполярной диффузии к коэффициенту холловской диффузии $\eta_A / \eta_H = D^2 \beta_i$. Тогда при выполнении условия $f \gg \omega_{ce}$ отношение коэффициента холловской диффузии к коэффициенту омической диффузии приобретает вид $\eta_H / \eta = f / v_e$. Соотношение $f \gg \omega_{ce}$ характеризует такие угловые скорости вращения, при которых магнитное поле полагается малым. Отдельный интерес представляет случай $f \sim \omega_{ce}$, при котором $\tilde{B} \simeq 0$, то есть магнитное поле экранируется вращением системы.

Учитывая вышесказанное, рассмотрим два важных предела характерных частот $\omega \ll \omega_H$ и $\omega \gg \omega_H$ и два важных предела характерных угловых скоростей вращения $f \gg \omega_{ce}$ и $f \sim \omega_{ce}$.

Исследуем возмущение ρ , $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ в уравнениях (47)–(49) на фоне невозмущенного исходного состояния $\rho_0 = \text{const}$, $\mathbf{v}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = \text{const}$. Линеаризованная система уравнений холловской магнитной гидродинамики для вращающейся частично ионизованной плазмы приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (58)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(c_s^2 \rho) + \frac{\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0}{4\pi} - 2\rho_0(\Omega \times \mathbf{v}), \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left\{ \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}_0 - \eta \nabla \times \mathbf{B} - \eta_H \nabla \times \mathbf{B} \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 + \right. \\
+ \eta_A (\nabla \times \mathbf{B} \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 + \\
+ \eta_A \frac{Dv_{in}}{v_{in}^2 + 4D^2\Omega^2} ((\nabla \times \mathbf{B} \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) \times 2\Omega + \\
\left. \frac{D}{v_{in}} 2\Omega(2\Omega \cdot \nabla \times \mathbf{B} \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) - \right. \\
\left. - \frac{D}{v_{in}} 4\Omega^2 (\nabla \times \mathbf{B} \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) \right) \times \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 \left. \right\}. \quad (60)
\end{aligned}$$

Принимая возмущение в уравнениях (58)–(60) $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B} \sim e^{(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ получаем

$$\omega \rho - \rho_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
\omega \rho_0 \mathbf{v} = \left(c_s^2 \rho + \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{B}_0)}{4\pi} \right) \mathbf{k} - \\
- \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{B}_0) \mathbf{B}}{4\pi} + 2i\rho_0 (\Omega \times \mathbf{v}), \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\omega \mathbf{B} = i\tilde{\mathbf{B}}_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - i\mathbf{v} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0) - \\
- \eta k^2 \mathbf{B} + \eta_H (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0) + \\
+ \eta_A \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) (\hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 \cdot \mathbf{B}) - \\
- \eta_A \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 k^2 (\hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 \cdot \mathbf{B}) - \eta_A \mathbf{B} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0)^2 + \\
+ \eta_A \frac{Dv_{in}}{v_{in}^2 + 4D^2\Omega^2} (2\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \Omega) (\hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 \cdot \mathbf{B}) - \\
- 2\Omega k^2 (\hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 \cdot \mathbf{B}) - 2\mathbf{B} (\mathbf{k} \cdot \Omega) (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) + \\
+ \left(\frac{2D\hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 (\mathbf{k} \cdot \Omega)}{v_{in}} - \frac{2\Omega D (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0)}{v_{in}} \right) \cdot \\
\cdot (2(\mathbf{B} \cdot \Omega) (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) - 2(\mathbf{k} \cdot \Omega) (\mathbf{B} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) - \\
- \frac{D}{v_{in}} 4\Omega^2 (\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) (\mathbf{B} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) - \\
- k^2 \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0 (\mathbf{B} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) - \mathbf{B} (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0) (\mathbf{k} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_0)). \quad (63)
\end{aligned}$$

Уравнения (61)–(63) можно представить в виде матричного уравнения $\mathbf{A}\mathbf{u} = 0$, где Ω = квадратная матрица 7-го порядка, а $\mathbf{u} = (\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B})^T$. Дисперсионное уравнение для вращающейся частично ионизованной плазмы в приближении холловской магнитной гидродинамики получается из условия разрешимости матричного уравнения: $\det \mathbf{A} = 0$. Аналитическое вычисление корней дисперсионного уравнения системы (61)–(63) представляется

сложным, поэтому будем рассматривать некоторые предположения относительно параметров задачи.

3.3. Анализ дисперсионного уравнения

Считаем, что вектор магнитной индукции и вектор угловой скорости вращения направлены по оси z . Введем для удобства безразмерный параметр

$$p = \frac{v_{in}^2 + 2\Omega v_{in} D}{v_{in}^2 + 4D^2\Omega^2}. \quad (64)$$

Параметр p в соотношении (64) описывает влияние степени ионизации и параметра Кориолиса на коэффициент амбиполярной диффузии. В этом случае система уравнений (61)–(63) сводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\omega \rho - \rho_0 k_x v_x - \rho_0 k_y v_y - \rho_0 k_z v_z = 0, \\
\omega \rho_0 v_x = c_s^2 \rho k_x + \frac{B_z k_x - B_x k_z}{4\pi} B_0 - 2i\rho_0 \Omega v_y, \\
\omega \rho_0 v_y = c_s^2 \rho k_y + \frac{B_z k_y - B_y k_z}{4\pi} B_0 + 2i\rho_0 \Omega v_x, \\
\omega \rho_0 v_z = c_s^2 \rho k_z, \quad i\omega B_x = -iv_x k_z \tilde{B}_0 - \eta k^2 B_x + \\
+ \eta_H k_z (k_y B_z - k_z B_y) + \eta_A p k_z (k_x B_z - k_z B_x), \\
i\omega B_y = -iv_y k_z \tilde{B}_0 - \eta k^2 B_y - \eta_H k_z (k_x B_z - k_z B_x) + \\
+ \eta_A p k_z (k_y B_z - k_z B_y), \quad i\omega B_z = i\tilde{B}_0 (k_x v_x + k_y v_y) - \\
- \eta k^2 B_z + \eta_H k_z (k_x B_y - k_y B_x) - \eta_A p k^2 B_z. \quad (65)
\end{aligned}$$

Отметим, что в случае когда f -параметр больше электронной циклотронной частоты: $f > \omega_{ce}$, то невозмущенное эффективное магнитное поле $\tilde{B}_0$ является отрицательной величиной, поскольку $\tilde{B}_0$ направлен против направления вектора $\mathbf{B}_0$. Проведем анализ системы уравнений (65) при различных частных случаях.

3.4. Быстрое вращение частично ионизованной плазмы

Будем считать вращение быстрым, если выполнено условие $f \gg \omega_{ce}$. Это условие можно переписать в следующем виде:

$$\frac{Df}{v_{in}} \gg D\beta_i \frac{m_i}{m_e}. \quad (66)$$

Как упоминалось в разделе 0 отношение коэффициента амбиполярной диффузии к коэффициенту холловской диффузии имеет порядок

$$\frac{\eta_A}{\eta_H} = D^2 \beta_i. \quad (67)$$

Тогда выполнено соотношение

$$\frac{Df}{v_{in}} \gg \frac{\eta_A}{\eta_H}. \quad (68)$$

Полученное соотношение (68) означает, что слагаемым, описывающим амбиполярную диффузию можно пренебречь по сравнению со слагаемым описывающим холловскую диффузию. Система (65) в пренебрежении амбиполярной диффузией записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega \rho - \rho_0 k_x v_x - \rho_0 k_y v_y - \rho_0 k_z v_z &= 0, \\ \omega \rho_0 v_x &= c_s^2 \rho k_x + \frac{B_z k_x - B_x k_z}{4\pi} B_0 - 2i\rho_0 \Omega v_y, \\ \omega \rho_0 v_y &= c_s^2 \rho k_y + \frac{B_z k_y - B_y k_z}{4\pi} B_0 + 2i\rho_0 \Omega v_x, \\ \omega \rho_0 v_z &= c_s^2 \rho k_z, \\ i\omega B_x &= -iv_x k_z \tilde{B}_0 - \eta k^2 B_x + \eta_H k_z (k_y B_z - k_z B_y), \\ i\omega B_y &= -iv_y k_z \tilde{B}_0 - \eta k^2 B_y - \eta_H k_z (k_x B_z - k_z B_x), \\ i\omega B_z &= i\tilde{B}_0 (k_x v_x + k_y v_y) - \\ &\quad - \eta k^2 B_z + \eta_H k_z (k_x B_y - k_y B_x). \end{aligned} \quad (69)$$

Систему (69) проанализируем для двух предельных случаев характерных частот: $\omega \ll \omega_H =$ = низкочастотные моды и $\omega \gg \omega_H =$ высокочастотные моды.

3.5. Низкочастотные моды быстровращающейся частично ионизованной плазмы

При $\omega \ll \omega_H$ эффект холловской диффузии пренебрежимо мал по сравнению с влиянием адвекции. Тогда пренебрежем в системе (69) слагаемыми описывающими холловскую диффузию η_H по сравнению с адвекционными слагаемыми. Система линеаризованных уравнений холловской магнитной гидродинамики для низкочастотных мод вращающейся частично ионизованной плазмы принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega \rho - \rho_0 k_x v_x - \rho_0 k_y v_y - \rho_0 k_z v_z &= 0, \\ \omega \rho_0 v_x &= c_s^2 \rho k_x + \frac{B_z k_x - B_x k_z}{4\pi} B_0 - 2i\rho_0 \Omega v_y, \\ \omega \rho_0 v_y &= c_s^2 \rho k_y + \frac{B_z k_y - B_y k_z}{4\pi} B_0 + 2i\rho_0 \Omega v_x, \end{aligned}$$

$$\omega \rho_0 v_z = c_s^2 \rho k_z, \quad (70)$$

$$i\omega B_x = -iv_x k_z \tilde{B}_0 - \eta k^2 B_x,$$

$$i\omega B_y = -iv_y k_z \tilde{B}_0 - \eta k^2 B_y,$$

$$i\omega B_z = i\tilde{B}_0 (k_x v_x + k_y v_y) - \eta k^2 B_z.$$

Считаем компоненты плазмы несжимаемыми, тогда $\rho = 0$ и система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega \rho_0 v_x + 2i\rho_0 \Omega v_y + \frac{k_z B_x - k_x B_z}{4\pi} B_0 &= 0, \\ -2i\rho_0 \Omega v_x + \omega \rho_0 v_y + \frac{k_z B_y - k_y B_z}{4\pi} B_0 &= 0, \\ k_z \tilde{B}_0 v_x + (\omega - i\eta k^2) B_x &= 0, \\ k_z \tilde{B}_0 v_y + (\omega - i\eta k^2) B_y &= 0, \\ (\omega - i\eta k^2) B_z &= 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Из равенства нулю детерминанта системы (71) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} (\omega - i\eta k^2) \left[\left((\omega^2 - 4\Omega^2)(\omega - i\eta k^2) - \frac{\omega k_z^2 B_0 \tilde{B}_0}{2\pi \rho_0} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\omega - i\eta k^2) + \frac{k_z^4 B_0^2 \tilde{B}_0^2}{16\pi^2 \rho_0^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Уравнение (72) имеет решение $\omega = i\eta k^2$, что соответствует омической диссипации посредством столкновения частиц плазмы. Другие же решения являются корнями двух квадратных многочленов

$$(\omega - 2\Omega)(\omega - i\eta k^2) + k_z^2 v_A \tilde{v}_A = 0, \quad (73)$$

$$(\omega + 2\Omega)(\omega - i\eta k^2) + k_z^2 v_A \tilde{v}_A = 0, \quad (74)$$

Здесь введено обозначение $\tilde{v}_A = -\tilde{B}_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$, поскольку $\tilde{B}_0$ является отрицательной величиной. Дисперсионные уравнения (73) и (74) имеют следующие решения:

$$\omega = \Omega + \frac{i\eta k^2}{2} \pm \sqrt{\left(\Omega - \frac{i\eta k^2}{2} \right)^2 - k_z^2 v_A \tilde{v}_A}, \quad (75)$$

$$\omega = -\Omega + \frac{i\eta k^2}{2} \pm \sqrt{\left(\Omega + \frac{i\eta k^2}{2} \right)^2 - k_z^2 v_A \tilde{v}_A}. \quad (76)$$

Решение (75) описывает альфвеновскую волну, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{k}$. Решение (76) описывает альфвеновскую волну, распространяющуюся в противоположном к век-

тору $\mathbf{k}$ направлении. Заметим, что формальное решение в виде быстрых альфвеновских волн соответствующее положительному знаку в (75) и отрицательному знаку в (76) не является низкочастотным, поэтому распространяться в такой плазме могут лишь медленные альфвеновские волны. Полученные моды (75) и (76) являются обобщением традиционных диссипативных альфвеновских волн в частично ионизованной плазме с учетом вращения плазмы. Отметим, что восстанавливающей силой волн (75) и (76) является не только сила Лоренца, но и сила Кориолиса, что является ключевым отличием полученных мод от традиционных. На рис. 1 и 2 представлена действительная часть полученного дисперсионного соотношения полученных мод при малом альфвеновском слагаемом. Величина альфвеновского слагаемого влияет лишь на глубину пика, причем при малых значениях глубина пика порядка $\omega \simeq 2\Omega$, а при больших значениях глубина пика порядка $\omega \simeq \Omega$.

Исследуем далее случай сжимаемой плазмы. Рассмотрим возмущение магнитного поля, направленное вдоль невозмущенного магнитного поля $\mathbf{B} \parallel \mathbf{B}_0$. Из бездивергентности магнитного поля следует $k_z = 0$. Тогда дисперсионное уравнение выглядит следующим образом:

$$(\omega - i\eta k^2)(\omega^2 - c_s^2 k^2 - 4\Omega^2) + \omega v_A \tilde{v}_A k^2 = 0. \quad (77)$$

Дисперсионное уравнение (77) имеет третий порядок по частоте и допускает громоздкое аналитическое решение. В этой работе ограничимся приближенным решением считая последнее слагаемое в (77) возмущением. Невозмущенные решения этого уравнения будут

$$\omega = i\eta k^2, \quad (78)$$

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + 4\Omega^2. \quad (79)$$

Решение (78) соответствует омической диссипации. Решение (79) описывает высокочастотную поперечную акустическую волну во вращающейся частично ионизованной плазме. В первом порядке теории возмущений выражения для корней уравнения (77) принимают следующий вид:

$$\omega = i\eta k^2 \left(1 + \frac{k^2 v_A \tilde{v}_A}{\eta^2 k^4 + c_s^2 k^2 + 4\Omega^2} \right). \quad (80)$$

$$\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 + 4\Omega^2} - \frac{k^2 v_A \tilde{v}_A}{2(\sqrt{c_s^2 k^2 + 4\Omega^2} - i\eta k^2)}, \quad (81)$$

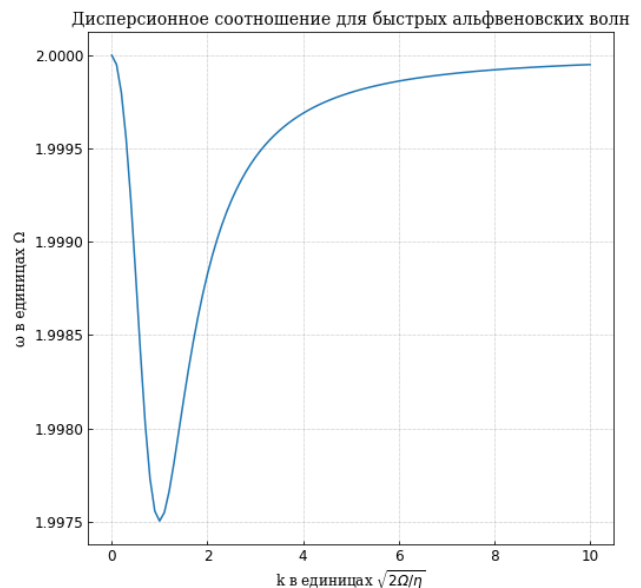


Рис. 1. Дисперсионное соотношение для быстрых альфвеновских волн.

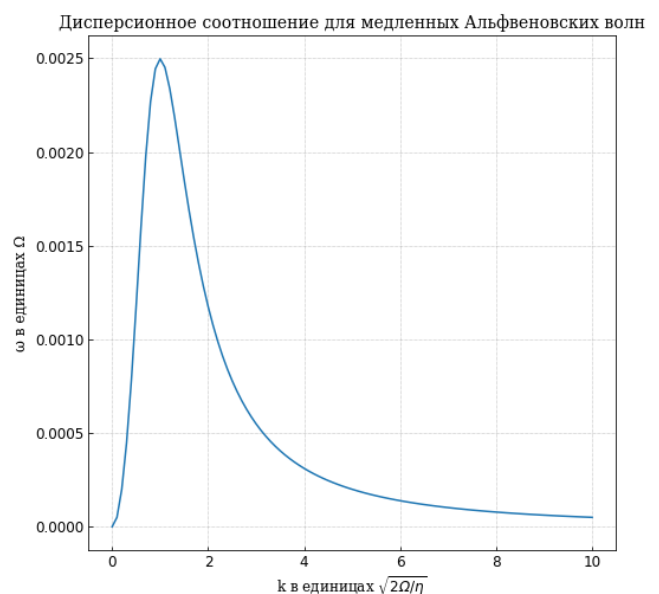


Рис. 2. Дисперсионное соотношение для медленных альфвеновских волн.

$$\omega = -\sqrt{c_s^2 k^2 + 4\Omega^2} + \frac{k^2 v_A \tilde{v}_A}{2(\sqrt{c_s^2 k^2 + 4\Omega^2} + i\eta k^2)}. \quad (82)$$

Решение (80) соответствует модифицированной омической диссипации. Волна (81) является поперечной акустической волной с омической диссипацией во вращающейся частично ионизованной плазме распространяющейся вдоль вектора $\mathbf{k}$. Решение (82) описывает поперечную акустическую волну с омической диссипацией во вращающейся частично ионизованной плазме,

которая распространяется в противоположном вектору $\mathbf{k}$ направлении. Решения (81) и (82) не являются низкочастотными, поэтому являются лишь формальным решением дисперсионного уравнения (77).

Движение компонент плазмы по направлению поля $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}_0$ также является одним из возможных реализуемых течений, но тогда система сводится к системе холловской МГД без вращения [8].

Дисперсионное уравнение в случае возмущения поперечного невозмущенному магнитному полю $B_z = 0$ имеет следующий вид:

$$(\omega^2 - c_s^2 k_z^2)((\omega(\omega - i\eta k^2) + k_z^2 v_A \tilde{v}_A)^2 - 4\Omega^2(\omega - i\eta k^2)^2) = 0. \quad (83)$$

Решение уравнения (83) $\omega^2 = c_s^2 k_z^2$ не содержит вращения и является продольной звуковой волной. Второе же слагаемое факторизуется на два уже полученных ранее уравнения (73) и (74) с решениями (75) и (76). Это показывает, что в случае поперечного возмущения магнитного поля для сжимаемой плазмы получаются те же моды, что и для несжимаемой плазмы, а также генерируется продольная звуковая волна.

3.6. Высоочастотные моды быстровращающейся частично ионизованной плазмы

При $\omega \gg \omega_H$ пренебрегаем слагаемыми описывающими адвекцию по сравнению со слагаемыми описывающими холловскую диффузию и тогда система (69) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega\rho - \rho_0 k_x v_x - \rho_0 k_y v_y - \rho_0 k_z v_z &= 0, \\ \omega\rho_0 v_x &= c_s^2 \rho k_x + \frac{B_z k_x - B_x k_z}{4\pi} B_0 - 2i\rho_0 \Omega v_y, \\ \omega\rho_0 v_y &= c_s^2 \rho k_y + \frac{B_z k_y - B_y k_z}{4\pi} B_0 + 2i\rho_0 \Omega v_x, \\ \omega\rho_0 v_z &= c_s^2 \rho k_z, \\ i\omega B_x &= -\eta k^2 B_x + \eta_H k_z (k_y B_z - k_z B_y), \\ i\omega B_y &= -\eta k^2 B_y - \eta_H k_z (k_x B_z - k_z B_x), \\ i\omega B_z &= -\eta k^2 B_z + \eta_H k_z (k_x B_y - k_y B_x). \end{aligned} \quad (84)$$

В этом случае дисперсионное уравнение факторизуется на два уравнения

$$\omega^4 - \omega^2(c_s^2 k^2 + 4\Omega^2) + 4\Omega^2 c_s^2 k_z^2 = 0, \quad (85)$$

$$(\omega - i\eta k^2)((\omega - i\eta k^2)^2 - \eta_H k^2 k_z^2) = 0. \quad (86)$$

Первое уравнение (85) является биквадратным и имеет следующие решения:

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2 + 4\Omega^2 \pm \sqrt{(c_s^2 k^2 + 4\Omega^2)^2 - 16\Omega^2 c_s^2 k_z^2}}{2}. \quad (87)$$

Решения (87) представлены на рис. 3 и 4. Положительный знак в (87) соответствует быстрой звуковой волне, а отрицательный знак соответствует медленной звуковой волне во вращающейся частично ионизованной плазме. Если вращение отсутствует, то быстрая звуковая волна переходит в акустическую волну, а медленная звуковая волна отсутствует. Из рисунков видно, что решение слабо зависит от угла между k и z , тогда как второе ограничено значением сверху, которое меняется от 2Ω при продольном распространении, до нуля при поперечном распространении, что свидетельствует об отсутствии медленной поперечной волны. Восстанавливающими силами для волн (87) являются градиент давления и сила Кориолиса. Полученное соотношение (87) свидетельствует об отсутствии влияния электромагнитного поля на крупномасштабную динамику плазмы в высокочастотном пределе из-за чего частично ионизованная плазма в этом пределе ведет себя как вращающийся нейтральный газ [25].

Уравнение (86) является уравнением третьего порядка и имеет следующие решения:

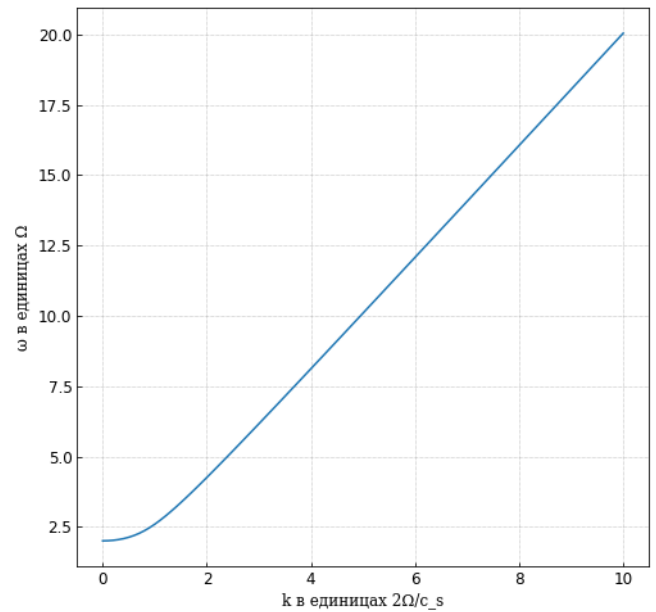


Рис. 3. Быстрая звуковая волна при угле 1 радиан между k и z .

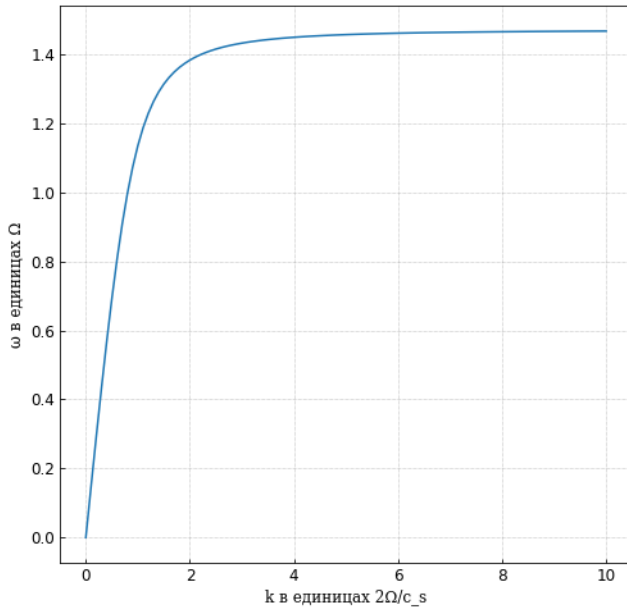


Рис. 4. Медленная звуковая волна при угле 1 радиан между k и z .

$$\omega = i\eta k^2, \quad (88)$$

$$\omega = i\eta k^2 \pm \eta_H k k_z. \quad (89)$$

Кроме омической диссипации описываемой дисперсионным соотношением (88) проявляется волна (89). В высокочастотном пределе выражение для η_H принимает следующий вид:

$$\eta_H = c^2 \frac{2\Omega}{\omega_p^2}. \quad (90)$$

Из выражения (90) следует, что полученная мода (89) описывает высокочастотную волну аналогичную свистовой, в которой, однако восстанавливающей силой является сила Кориолиса. Далее такие волны коротко будем называть свистовыми.

Таким образом в высокочастотном пределе в приближении быстрого вращения линейными модами являются быстрые и медленные звуковые волны с дисперсионным соотношением (87) и аналогичные свистовым волнам моды с дисперсионным соотношением (89).

3.7. Медленное вращение частично ионизованной плазмы

Вращение считаем медленным, если выполнено соотношение $f \sim \omega_{ce}$ и можно считать, что $\tilde{B}_0 \ll B_0$. Последнее условие означает, что адвективным слагаемым можно пренебречь. Поскольку

$\eta_H / \eta = \tilde{\beta}_e$, то $\eta_H \ll \eta$ и слагаемыми описываемыми холловскую диффузию пренебрегаем. Исходя из этих соображений дисперсионная система холловской магнитной гидродинамики в случае медленного вращения сводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \omega \rho - \rho_0 k_x v_x - \rho_0 k_y v_y - \rho_0 k_z v_z &= 0, \\ \omega \rho_0 v_x &= c_s^2 \rho k_x + \frac{B_z k_x - B_x k_z}{4\pi} B_0 - 2i\rho_0 \Omega v_y, \\ \omega \rho_0 v_y &= c_s^2 \rho k_y + \frac{B_z k_y - B_y k_z}{4\pi} B_0 + 2i\rho_0 \Omega v_x, \\ \omega \rho_0 v_z &= c_s^2 \rho k_z, \\ i\omega B_x &= -\eta k^2 B_x + \eta_A p k_z (k_x B_z - k_z B_x), \\ i\omega B_y &= -\eta k^2 B_y + \eta_A p k_z (k_y B_z - k_z B_y), \\ i\omega B_z &= -\eta k^2 B_z - \eta_A p k^2 B_z. \end{aligned} \quad (91)$$

Дисперсионное уравнение соответствующее системе (91) факторизуется на три уравнения, одно из которых (85), а два других

$$\omega = i(\eta k^2 + \eta_A p k_z^2), \quad (92)$$

$$\omega = i(\eta + \eta_A p) k^2. \quad (93)$$

Из полученных решений системы (91) видно, что быстрые и медленные звуковые моды (87) проявляются как в случае быстрых вращений, так и в случае медленных вращений и являются универсальными высокочастотными модами вращающейся частично ионизованной плазмы. Моды (92) и (93) соответствуют омическо-амбиполярной диссипации.

3.8. Высокочастотные волны во вращающейся частично ионизованной плазме

В случае произвольной Ω при описании высокочастотных мод вращающейся частично ионизованной плазмы адвекционным слагаемым можно пренебречь по сравнению со слагаемым описывающим холловскую диффузию, что позволяет записать систему (65) уравнений холловской магнитной гидродинамики в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega \rho - \rho_0 k_x v_x - \rho_0 k_y v_y - \rho_0 k_z v_z &= 0, \\ \omega \rho_0 v_x &= c_s^2 \rho k_x + \frac{B_z k_x - B_x k_z}{4\pi} B_0 - 2i\rho_0 \Omega v_y, \end{aligned}$$

$$\omega p_0 v_y = c_s^2 \rho k_y + \frac{B_z k_y - B_y k_z}{4\pi} B_0 + 2ip_0 \Omega v_x,$$

$$\omega p_0 v_z = c_s^2 \rho k_z, \quad i\omega B_x = -\eta k^2 B_x + \quad (94)$$

$$+ \eta_H k_z (k_y B_z - k_z B_y) + \eta_A p k_z (k_x B_z - k_z B_x),$$

$$i\omega B_y = -\eta k^2 B_y - \eta_H k_z (k_x B_z - k_z B_x) +$$

$$+ \eta_A p k_z (k_y B_z - k_z B_y),$$

$$i\omega B_z = -\eta k^2 B_z + \eta_H k_z (k_x B_y - k_y B_x) - \eta_A p k^2 B_z.$$

Дисперсионное уравнение системы (94) факторизуется на уравнение (85) и уравнение

$$(\omega - i\eta k^2 - i\eta_A k_z^2 p)((\omega - i\eta k^2 - i\eta_A k_z^2 p)(\omega -$$

$$- i\eta k^2 - i\eta_A k^2 p) - \eta_H^2 k_z^2 k^2) = 0. \quad (95)$$

Таким образом, быстрые звуковые и медленные звуковые моды (87) проявляются при произвольных величинах угловой скорости вращения Ω . Уравнение (95) является уравнением третьего порядка и имеет следующие решения:

$$\omega = i\eta k^2 + i\eta_A k_z^2 p, \quad (96)$$

$$\omega = i\eta k^2 + \frac{i\eta_A p(k^2 + k_z^2)}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\eta_H^2 k^2 k_z^2 - \frac{\eta_A^2 p^2 (k^2 - k_z^2)^2}{4}}. \quad (97)$$

Мода (96) соответствует омической диссипации в направлении распространения волны и амбиполярной диссипации в направлении оси z . Решение (97) описывает свистовую волну с омическо-амбиполярной диссипацией с модифицированным коэффициентом амбиполярной диффузии. Восстанавливающими силами для волны (97) являются сила Кориолиса при условии $f > \omega_{ce}$ и сила Лоренца при условии $f < \omega_{ce}$. При $f > \omega_{ce}$ сила Кориолиса играет большую роль в динамике волн (97), тогда как при $f < \omega_{ce}$ определяющую роль в динамике волн (97) играет сила Лоренца. При $f \simeq \omega_{ce}$ решение (97) переходит в следующие два решения:

$$\omega = i\eta k^2 + i\eta k_z^2 p, \quad (98)$$

$$\omega = i\eta k^2 + i\eta k^2 p. \quad (99)$$

Таким образом, в случае когда $f \simeq \omega_{ce}$ распространение волны (97) невозможно, в силу того, что сила Кориолиса и сила Лоренца компенсируют друг друга.

3.9. Волны во вращающейся частично ионизованной плазме. Общий случай угловых скоростей вращения и частот

Из полученных ранее соотношений выведем решение дисперсионного уравнения системы (65) для произвольных угловых скоростей вращения и частот волн. Для этого запишем систему в виде блочной матрицы

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad (100)$$

где матрицы имеют следующие размеры $A_{11} = 4 \times 4$, $A_{12} = 3 \times 4$, $A_{21} = 4 \times 3$ и $A_{22} = 3 \times 3$. Если матрица A_{11} обратима, то детерминант матрицы можно выразить следующим образом:

$$\det(A) = \det(A_{11}) \times \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = 0. \quad (101)$$

Условие обратимости матрицы A_{11} означает, что ω не равна (87). Тогда дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = 0. \quad (102)$$

Решение уравнения (102) получается методами линейной алгебры, однако в силу громоздкости требуемых аналитических расчетов в данной работе опущено.

Если обратима матрица A_{22} , то дисперсионное уравнение для вращающейся частично ионизованной плазмы имеет следующий вид:

$$\det(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) = 0. \quad (103)$$

Обратимость матрицы A_{22} означает, что частота ω не должна быть равна (95). Решение уравнения (103) получается методами линейной алгебры и в силу громоздкости в данной работе опущено.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита теория крупномасштабных течений вращающейся трехкомпонентной частично ионизованной астрофизической и космической плазмы. Речь идет об обобщении холловской магнитной гидродинамики частично ионизованной плазмы при наличии вращения. Учет эффектов вращения в теории холловской магнитной гидродинамики не может быть осуществлен путем простого добавления силы Кориолиса в уравнение движения центра масс, поскольку вращение влияет на холловский ток и на амбиполярную диффузию плазмы. Нетривиальность состоит в том, что холловский ток и амбиполярная диффузия плазмы определяются

вектором скорости для каждой компоненты. Получена система уравнений холловской магнитной гидродинамики с учетом вращения в пренебрежении инерции электронов. Уравнения холловской магнитной гидродинамики при наличии вращения включают в себя новые слагаемые описывающие влияние силы Кориолиса на импульс центра масс и на эволюцию магнитного поля. Найдено дисперсионное уравнение для линейных волн во вращающейся частично ионизованной плазме на фоне тривиального стационарного течения. Найдены дисперсионные соотношения для волн во вращающейся частично ионизованной плазме в линейном приближении.

Дисперсионное уравнение проанализировано в случае когда внешнее магнитное поле направлено в направлении вектора угловой скорости вращения. Проанализированы два предельных случая полученного дисперсионного уравнения для линейных волн во вращающейся частично ионизованной плазме: низкочастотный и высокочастотный предел. В низкочастотном пределе, когда характерные частоты волн ω малы по сравнению с холловской частотой ω_H ($\omega \ll \omega_H$), в пренебрежении сжимаемости плазмы получены дисперсионные соотношения для модернизированных альфвеновских волн при наличии вращения. Восстанавливающими силами таких волн являются сила Лоренца и сила Кориолиса. В случае невращающейся плазмы модернизированные альфвеновские волны переходят в известные альфвеновские моды. В высокочастотном пределе, когда характерные частоты волн ω велики по сравнению с холловской частотой ω_H ($\omega \gg \omega_H$) в приближении быстрого вращения найдено дисперсионное соотношение для быстрых и медленных звуковых волн. Восстанавливающими силами быстрых и медленных звуковых волн в плазме являются градиент суммарного давления компонент плазмы и сила Кориолиса. Приближение быстрого вращения применимо при условии, когда величина магнитного поля достаточно мала и выполнено соотношение $f \gg \omega_{ce}$. Ввиду малости магнитного поля частично ионизованная плазма в высокочастотном пределе в приближении быстрого вращения демонстрирует свойства вращающегося нейтрального газа, что объясняет отсутствие зависимости дисперсионного соотношения вращающихся акустических волн от магнитного поля. В высокочастотном пределе найдено дисперсионное соотношение модернизированной свистовой волны. Показано, что для модернизированной свистовой волны при выполнении условия $f > \omega_{ce}$ определяющим вкладом в восстанавливающую силу является вклад силы Кориолиса, тогда как при справедливости условия $f < \omega_{ce}$ определяющий вклад в восстанавливающую силу вносит сила Лоренца.

Развитая теория имеет широкий потенциал применимости в космической и астрофизической плазме, например для описания процессов в атмосферах Горячих Юпитеров, в ионосферно-термосферной системе планет и Земли и в протопланетных дисках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petrosyan A., Klimachkov D., Fedotova M., Zinyakov T.* // Atmosphere. 2020. V. 11(4). P. 314. Doi: 10.3390/atmos11040314.
2. *Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A.* // Universe. 2021. V. 7(4). P. 87. Doi: 10.3390/universe7040087.
3. *Петросян А.С. Федотова М.А., Климачков Д.А.* // Физика плазмы. 2023. Т. 49. С. 209. Doi: 10.31857/S0367292122601229.
4. *Witalis E.A.* // Phys. Scripta. 1987. V. 35. P. 689. Doi: 10.1088/0031-8949/35/5/013.
5. *Ilgisonis V.I.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2001. V. 43. P. 1255. Doi: 10.1088/0741-3335/43/9/307.
6. *Huba J.D.* // Lect. Notes. Phys. 2003. V. 615. P. 166. Doi: 10.1007/3-540-36530-3_9.
7. *Морозов А.И.* Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
8. *Wardle P.B.P.* // Mon. Not. Royal Astron. Soc. 2008. V. 385(4). P. 2269. Doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.12998.x.
9. *Ballester J.L., Alexeev I., Collados M., Dones T., Pfaff R.F., Gilbert H., Khodachenko M., Khomenko E., Shaikhislamov I.F., Soler R., Vázquez-Semadeni E., Zaqarashvili T.* // Space Sci. Rev. 2018. V. 214. P. 1. Doi: 10.1007/s11214-018-0485-6.
10. *Soler R., Ballester J.L.* // Front. Astron. Space Sci. 2022. V. 9. P. 74. Doi: 10.3389/fspas.2022.789083.
11. *Leake J. E., De Vore C.R., Thayer J.P., Burns A.G., Crowley G., Gilbert H.R., Huba J.D., Krall J., Linton M.G., Lukin V.S., Wang W.* // Space Sci. Rev. 2014. V. 184. P. 107. Doi: 10.1007/s11214-014-0103-1.
12. *Benavides S.J., Flierl G.R.* // J. Fluid Mech. 2020. V. 900. P. A28. Doi: 10.1017/jfm.2020.500.

13. *Khomenko E.* Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory / Ed. MacTaggart D., Hillier A., 2019. P. 69.
Doi: 10.1007/978-3-030-16343-3_3.
14. *Goldreich P., Reisenegger A.* // *Astrophys. J* 1992. V. 395. P. 250.
Doi: 10.1086/171646.
15. *Wardle M.* // *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 1999. V. 307(4). P. 849.
Doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02670.x.
16. *Balbus S.A., Terquem C.* // *Astrophys. J.* 2001. V. 552. P. 235.
Doi: 10.1086/320452.
17. *Dikpati M., Gilman A.P.* // *Astrophys. J.* 2001. V. 551. P. 536.
Doi: 10.1086/320080.
18. *Wei X.* // *Astrophys. J.* 2016. V. 828. P. 30.
Doi: 10.3847/0004-637X/828/1/30.
19. *Zaqarashvili T.V., Oliver R., Ballester J. L., Shergelashvili B.M.* // *Astron. Astrophys.* 2007. V. 470. P. 815.
Doi: 10.1051/0004-6361:20077382.
20. *Lakhin V.P., Ilgisonis V.I.* // *Phys. Plasmas.* 2011. V. 18(9). P. 092103.
Doi: 10.1063/1.3628302.
21. *Ильгисонис В.И.* // *УФН.* 2009. Т. 179(7). С. 790.
Doi: 10.3367/UFNr.0179.200907i.0790.
22. *Arendt P. N. Jr.* // *arXiv:astro-ph/9801194v1.* 1998.
23. *Thyagaraja A., McClements K.G.* // *Phys. Plasmas.* 2009. V. 16(9). P. 092506.
Doi: 10.1063/1.3238485.
24. *Zawistowski Z.J., Kovivchak Ya.* // *Wave Motion.* 2017. V. 72. P. 62.
Doi: 10.1016/j.wavemoti.2016.12.001.
25. *Ерофеев В.И., Солдамов И. Н.* // *Акуст. Ж.* 2000. Т. 46. С. 644.

A THEORY OF LARGE-SCALE FLOWS OF ROTATING PARTIALLY IONIZED SPACE AND ASTROPHYSICAL PLASMA IN THE APPROXIMATION OF HALL MAGNETOHYDRODYNAMICS

T. V. Galstyan^{a,b,*}, D. A. Koshkina^{a,b,}, D. A. Klimachkov^{a,***}, and A. S. Petrosyan^{a,b,****}**

^a*Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, 141700, Russia*

**e-mail: galstyan.tigran@phystech.edu*

***e-mail: koshkina.da@phystech.edu*

****e-mail: klimachkovdmitry@gmail.com*

*****e-mail: apetrosoy@cosmos.ru*

A theory of large-scale flows of rotating partially ionized space and astrophysical plasma in the approximation of the Hall magnetohydrodynamics is developed. Partially ionized rotating plasma describes large-scale processes in the exoplanetary atmospheres of hot Jupiters, the thermospheric–ionospheric system of planets and the Earth, in the protoplanetary disks, along with many other objects of heliophysics and space physics. The derived equations contain nontrivial terms describing the influence of rotation on the Hall current and ambipolar plasma diffusion in addition to the traditional Coriolis force acting upon momentum of the plasma's center of mass. Linear flows are analyzed in the simplest case when gravity is neglected. The dispersion relations for modified Alfvén waves, rotating fast and slow acoustic waves, along with modified whistler waves, are obtained. The slow acoustic waves represent a new type of flows driven by the Coriolis force. The fast acoustic waves correspond to conventional acoustic waves in the absence of rotation.

Keywords: partially ionized plasma, rotation, Hall magnetohydrodynamics, waves