

УДК 550.386

РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА ТИПИЧНЫХ ХОРОВЫХ ОЧЕНЬ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ И ПРОВЕРКА МЕХАНИЗМА ИХ ВОЗБУЖДЕНИЯ

© 2024 г. П. А. Беспалов^{1, 2, *}, О. Н. Савина², Г. М. Нещеткин^{1, 2}

¹Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук”, Нижний Новгород, Россия

²Нижегородский филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,

Нижний Новгород, Россия

*E-mail: PBespalov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2023

После доработки 13.11.2023

Принята к публикации 30.11.2023

Выполнено количественное исследование некоторых вопросов хаотической динамики электромагнитных хоровых очень низкочастотных (ОНЧ) излучений в области их возбуждения вблизи локального минимума магнитного поля вне плазмосферы. Из огромного набора данных наблюдений, накопленных во время миссии космических аппаратов Van Allen Probe, были выбраны типичные примеры хоров, для которых доступны оцифрованные данные с высоким разрешением. Для вычисления размерности Хаусдорфа длинных числовых последовательностей использовалась разработанная авторами программа. Во всех случаях размерность оказалась нецелой, что свидетельствует о сложной динамике системы. При расчетах отмечены скачки размерности, в том числе ее уменьшение примерно вдвое для фрагмента всплеска хоров. Полученные результаты важны для подтверждения механизма возбуждения хоров посредством усиления коротких шумовых импульсов и для обоснования возможности автоматического отождествления электромагнитных излучений разных типов.

DOI: 10.31857/S0367676524030106, EDN: QMEEOD

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что ОНЧ электромагнитные излучения с хоровой структурой динамического спектра возбуждаются за пределами плазмосферы вблизи локальных минимумов магнитного поля и отличаются спектральной формой, представляющей последовательность дискретных элементов с временным масштабом изменения в доли секунды (см., например, [1]). Как правило, динамические спектры хоровых излучений в области возбуждения расположены в двух полосах частот, разделенных линией, соответствующей половине гирочастоты электрона.

По современным представлениям в области возбуждения хоров физические процессы описывают дифференциальные уравнения движения заряженных частиц и уравнения Максвелла с заданными начальными и граничными условиями. Тогда в рамках простейшей разностной схемы по пространственным координатам задача сводится к многомерной системе нелинейных автономных дифференциальных уравнений первого порядка.

Последовательные состояния системы непрерывно переходят одно из другого, но это не гарантирует отсутствие хаоса. При оптимальном выборе переменных размерность системы дифференциальных уравнений можно понизить. Важным является вопрос о том, какое минимальное число независимых переменных достаточно для описания процессов возбуждения хоров и какие ограничения можно указать на систему уравнений в новых переменных. Ответ на этот вопрос можно получить с помощью хорошо развитых к настоящему времени методов расчета по экспериментальным временным рядам размерности динамической системы. Ниже приведены результаты расчета и анализа размерности Хаусдорфа данных высокого разрешения с космического аппарата в области возбуждения хоров.

В данной работе на основе опубликованных результатов наблюдений с космического аппарата Van Allen Probe [2] методами хаотической динамики проведен анализ размерности Хаусдорфа двух типичных примеров хоров со спектральными элементами преимущественно в верхней или в нижней полосе частот. Полученные результаты

использованы для подтверждения механизма возбуждения хоров посредством усиления коротких шумовых электромагнитных импульсов.

ТИПИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ ХОРОВ

Для анализа процесса с высоким разрешением по времени использовались представленные на сайте [3] результаты измерения U-компоненты магнитного поля в ортонормированной UVW-системе координат, связанной с космическим аппаратом. Высокое разрешение обеспечивали измерительные приборы комплекса EMFISIS, которые проводили около 35 тыс. измерений в секунду [2]. На средних панелях рис. 1 и 2 показаны динамические спектры электромагнитных излучений. В обоих случаях на средних панелях слева показаны динамические спектры с низким, а справа с высоким разрешением по времени. На рис. 1 на средней панели справа представлен динамический спектр высокого разрешения типичных хоров, наблюдавшихся преимущественно в верхней полосе частот, на рис. 2 — в нижней полосе частот. Графики изменения величины половины локальной гирочастоты электрона, показанные белой линией, соответствуют возбуждению хоров вблизи локального минимума магнитного поля, около которого аппарат находился несколько часов при периоде орбитального движения около 9 ч.

РАСЧЕТ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА

Согласно общей теории [4, 5] для экспериментального определения размерности Хаусдорфа достаточно проанализировать зависимость от времени одной из переменных, участвующих в сложном процессе. Процесс, пригодный для анализа, характеризуется гладкой, дифференцируемой и неповторяющейся зависимостью от времени. Данные высокого разрешения о B_U -компоненте магнитного поля с космического аппарата Van Allen Probe A с периодической оцифровкой и высокой частотой дискретизации позволяют подобрать оптимальный материал для анализа.

Для определения размерности Хаусдорфа необходимо реконструировать фазовое пространство рассматриваемой системы. Вводится в рассмотрение m -мерное Евклидово пространство, размерность которого

$$m > 2 [\dim] + 1, \quad (1)$$

где $[\dim]$ — целая часть ожидаемой размерности Хаусдорфа. Используя последовательные, регулярно разнесенные во времени измерения U-компоненты магнитного поля $B_U^1, B_U^2, B_U^3, \dots$, мы формируем все возможные векторы следующего вида:

$u^i = [B_U^i, B_U^i, \dots, B_U^{i+m-1}]$. Пусть общее число таких векторов — N , в рассмотренных случаях это число достигало миллиона. Для вычисления размерности необходимо вычислить число точек в реконструированном пространстве, расстояние между которыми не превышает r . Эта величина определяет так называемую корреляционную сумму, которая записывается в следующем виде:

$$C(m, r) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{ij}) H(r - |u^i - u^j|), \quad (2)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, $H(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(\xi))$, $|u^i - u^j| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (u_k^i - u_k^j)^2}$ — норма Евклида.

После этого для определения размерности выбранных хоров мы строим зависимости $|\log(C(m, r))|$ от $|\log(r)|$ для r от 0.999 до 0.001 с шагом (-0.001) при фиксированных m (см. рис. 1 и 2). Мы выбираем такое большое значение m , при дальнейшем увеличении которого угол наклона кривой в области роста, близкого к линейному, практически не изменяется, т.е. стабилизируется. Тангенс угла наклона в области линейного роста дает оценку размерности. Во всех случаях стабилизация угла наклона была заведомо достигнута при $m = 1000$. Отметим, что универсальный диапазон изменения r всегда можно обеспечить, учитывая, что размерность не изменится, если все значения магнитного поля умножить на фиксированное число. Для выполнения громоздких расчетов с длинными числовыми последовательностями, типичными для процедуры Грассбергера—Прокаччия [6], за разумное время потребовалась специальная программа. Разработанная авторами программа расчета размерности Хаусдорфа реализует вычисление необходимых корреляционных сумм. Для оптимизации вычисления корреляционных сумм расчеты в реконструированных пространствах разной размерности (с разными m) выполнялись параллельно. Дополнительное сокращение времени счета дало исключение повторяющихся вычислений. Программа была протестирована на числовых последовательностях аттрактора Эно [7] с известной размерностью Хаусдорфа. Вычисленная размерность совпадает с известной с точностью до двух знаков после запятой.

На верхних панелях рис. 1 и рис. 2 показаны результаты расчетов размерностей на всем временном интервале, которые оказались равными $\dim = 4.4$ и $\dim = 4.5$. Поскольку в работе использовались данные с высоким временным разрешением,

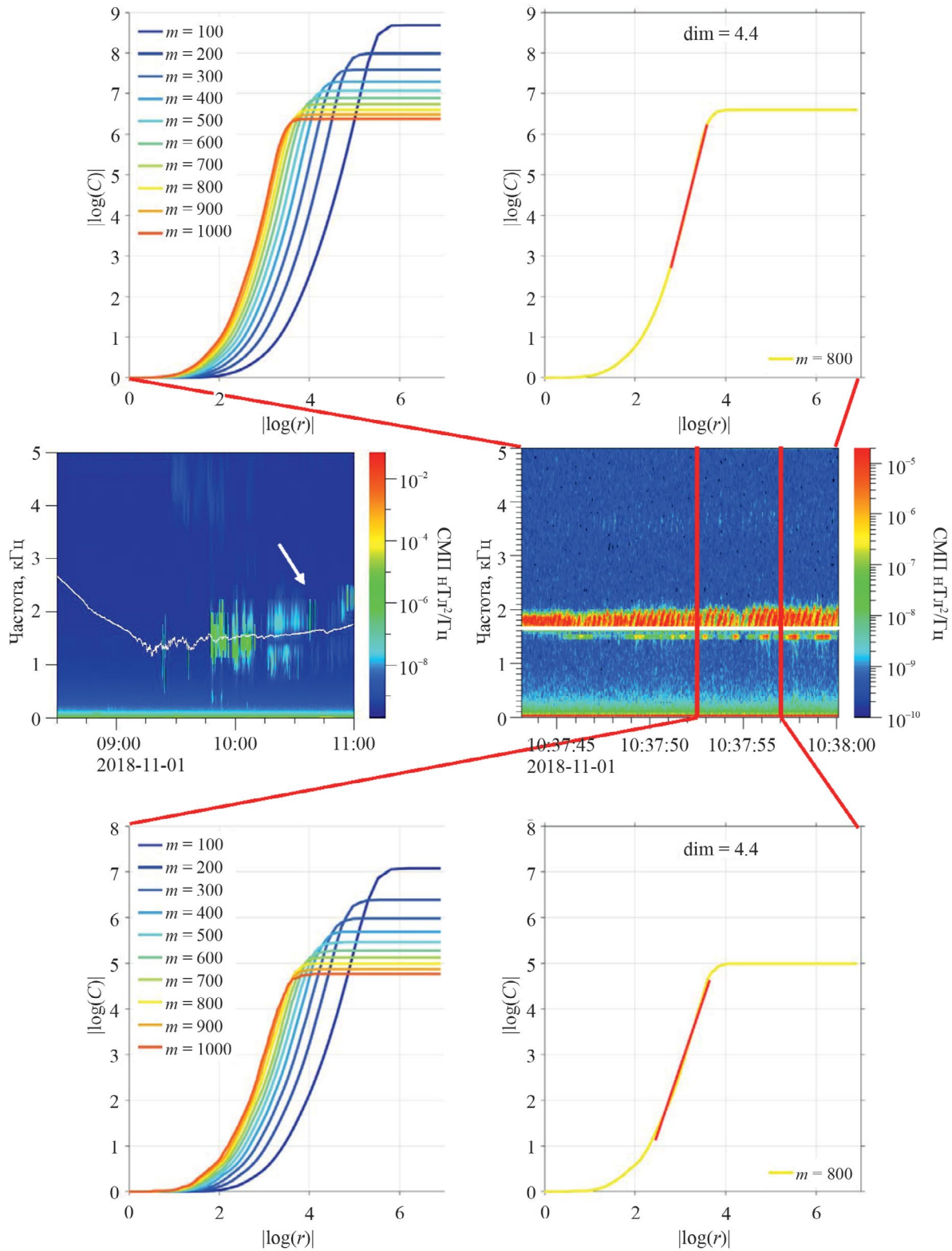


Рис. 1. Анализ всплеска хоров, зарегистрированного на космическом аппарате Van Allen Probe 2018-11-01 в 10:37:43 UT: на средней панели слева приведен динамический спектр низкого разрешения, на котором белой линией показана величина половины локальной гирочастоты электрона и стрелочкой — время регистрации всплеска хоров; на средней панели справа приведен динамический спектр хоров по данным высокого разрешения; на верхней панели слева приведены результаты расчета $|\log(C(m,r))|$ от $|\log(r)|$; на панели сверху справа показан отрезок прямой, по тангенсу угла наклона которой определена величина размерности; на двух нижних панелях приведены результаты расчета размерности для фрагмента всплеска хоров, который расположен между двумя вертикальными красными линиями.

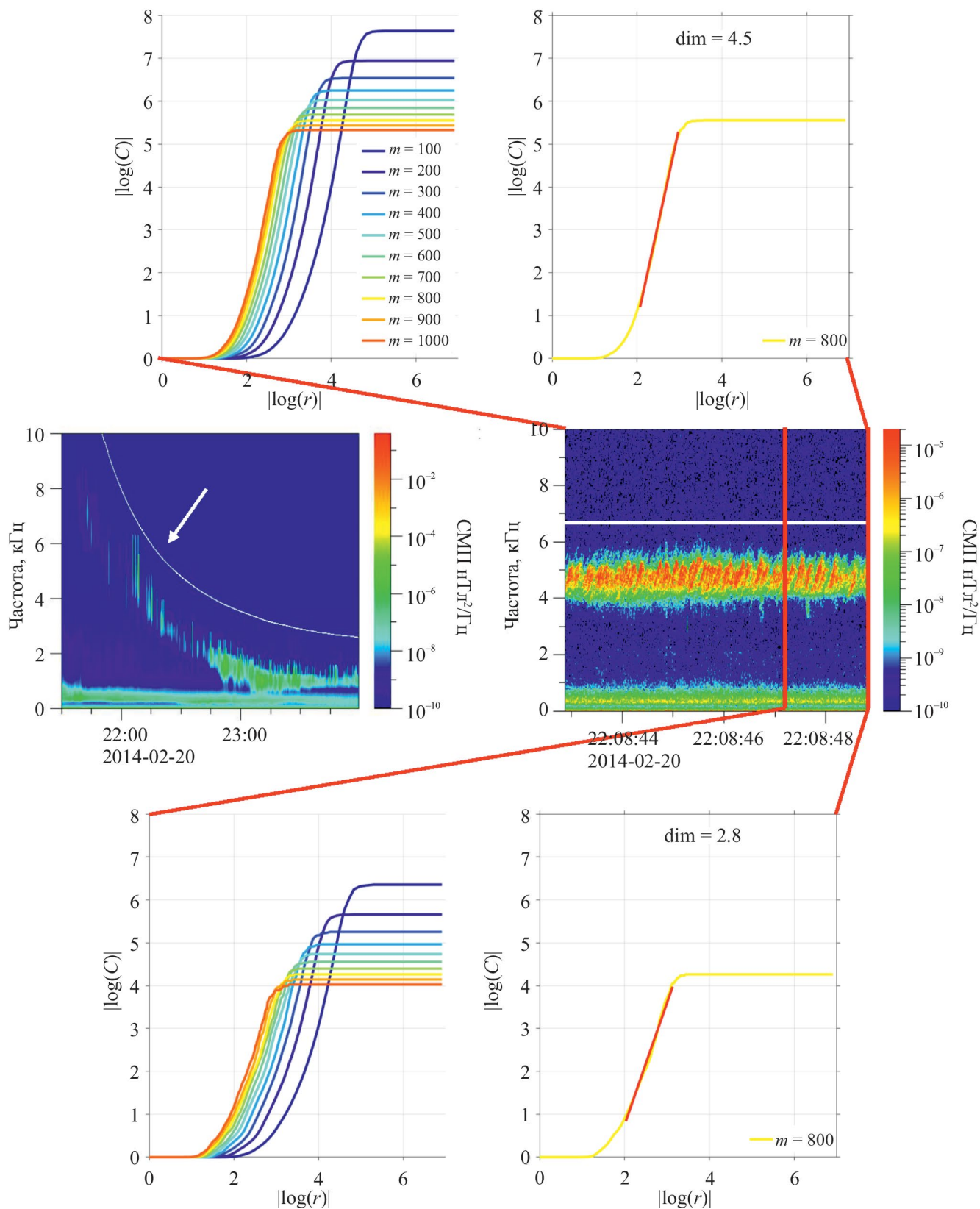


Рис. 2. Анализ всплеска хоров, зарегистрированного на космическом аппарате Van Allen Probe 2014-02-20 в 22:08:42 UT, представленный аналогично рис. 1.

то точек даже в пределах фрагмента всплеска хоров достаточно для вычисления размерности. На нижних панелях рис. 1 и рис. 2 показаны результаты расчета размерностей для фрагмента временного интервала, которые оказались значительно меньшими: $\dim = 2.9$ и $\dim = 2.8$. Всего при выполнении работы нами была проанализирована величина размерности для более чем 30 всплесков хоров разного типа. Во всех случаях размерность лежала в интервале

$$2 < \dim < 10 \quad (3)$$

и была нецелой, что указывает на хаотическую динамику процесса [8–10]. Для фрагментов всплесков хоров отмечались скачки размерности.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Согласно всем известным механизмам [11–13] возбуждения хоров в двух направлениях относительно силовых линий геомагнитного поля происходит независимо. Для независимых процессов A и B выполняется соотношение

$$\dim(A + B) \leq \dim(A) + \dim(B), \quad (4)$$

где $A + B$ — алгебраическая поэлементная сумма. Соотношения (3), (4) позволяют сделать два вывода. Во-первых, в случае, когда хоры возбуждаются в одном направлении вдоль линии магнитного поля, размерность лежит в интервале $2 < \dim < 5$. На это указывает установленное нами при анализе данных с космического аппарата наличие верхнего предела $\dim = 10$ для значения размерности (3). Если предположить, что размерность хоров, распространяющихся в одном направлении, более 5, то при анализе большого количества всплесков хоров могут быть обнаружены излучения с размерностью более 10. В рассмотренных нами более 30 всплесков хоров таких случаев не было. Во-вторых, значительные, почти вдвое, уменьшения размерности для фрагмента всплеска хоров мы можем интерпретировать как результат перехода к возбуждению хоров в одном направлении из-за независимости излучений во встречных направлениях.

Важным выводом теории является теорема Такенса [5], согласно которой для оптимального описания временной динамики процесса достаточно

$$d = [\dim] + 1 \quad (5)$$

нелинейных автономных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому, например, для оптимального теоретического описания фрагментов хоров между красными линиями на рис. 1 и 2 достаточно системы трех нелинейных автономных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= F_1(u_1, u_2, u_3); & \frac{du_2}{dt} &= F_2(u_1, u_2, u_3); \\ \frac{du_3}{dt} &= F_3(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (6) должна иметь состояние равновесия, так как часто хоры начинаются со слабых эмиссий. Это состояние равновесия неустойчиво, потому что слабые эмиссии со временем усиливаются. Запишем систему уравнений вблизи стационарного состояния и перейдем от координат Лагранжа к координатам Эйлера, предполагая процесс одномерным в координатном пространстве

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u_{1\sim} \\ u_{2\sim} \\ u_{3\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\sim} \\ u_{2\sim} \\ u_{3\sim} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В работе [14] было показано, что при реализации Beam Pulse Amplifier механизма возбуждения хоров за пределами плазмосферы в дакте разрежения или уплотнения короткие шумовые электромагнитные импульсы с подходящей несущей частотой вблизи половины гирочастоты электрона ω_B , углом волновой нормали порядка 20° и правой круговой поляризацией усиливаются. Важно, что для спектральных компонент волновых импульсов выполняется равенство

$$V_{phz} = V_{grz} = u_G = c\omega_B / 2\omega_p, \quad (8)$$

где V_{phz} и V_{grz} — фазовая и групповая скорости вдоль магнитного поля соответственно; u_G — скорость Жандрена; c — скорость света; ω_p — плазменная частота.

Электромагнитный импульс из таких компонент близок к стационарной волне $\delta E(z - u_G t)$, $\delta B(z - u_G t)$. С коротким импульсом в виде стационарной волны согласно простым кинематическим соображениям, лежащим в основе механизма ВРА [13], достаточно долго может взаимодействовать на резонансе Черенкова только малая доля частиц, которые образуют облако активных электронов. Эти электроны влетели в область взаимодействия волн и частиц длиной l вместе с импульсом, и для того чтобы они его сопровождали вдоль области взаимодействия, разброс их продольных скоростей ΔV_z вблизи скорости u должен удовлетворять условию

$$\Delta V_z \simeq u_G^2 t_p / l \ll u_G, \quad (9)$$

где t_p — длительность электромагнитного импульса. Для других частиц взаимодействие на резонансе Черенкова настолько кратковременно, что они не успевают обменяться энергией с импульсом.

Отметим, что концентрация активных частиц $n_b \simeq \iint 2\pi V_{\perp} f dV_{\perp} dV_z$.

Уравнения движения облака активных электронов, которые влетели в область взаимодействия волн и частиц вместе с шумовым импульсом,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_G \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \delta V_z \\ \delta n_b \\ \delta E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(e/m) \\ -in_b(\omega_p/c)\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \omega_B^3 (mc/32n_p e \omega_p) \sin^2\theta \cos^2\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta V_z \\ \delta n_b \\ \delta E_z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь δn_b и δV_z — возмущения плотности и скорости активных электронов соответственно; m — масса электрона. Система уравнений (10) укладывается в рамки, очерченные теорией размерности при подходящих величинах в матрице (7). Для процесса $\exp(-i\omega t + ik_z z)$ системе соответствует характеристическое уравнение, определяющее эволюцию спектральных компонент импульса:

$$(\omega - k_z u_G)^3 = \frac{n_b \omega_B^3}{32n_p} \sin^2\theta |\cos\theta|^3. \quad (11)$$

Данное кубическое уравнение имеет неустойчивое решение с инкрементом

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} \omega_B \left(\frac{n_b}{4n_p} \sin^2\theta \right)^{1/3} |\cos\theta|, \quad (12)$$

величина которого после подстановки значений всех величин объясняет наблюдаемый высокий темп изменения спектральных форм электромагнитных излучений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы вычислили величину размерности Хаусдорфа для нескольких типичных примеров ОНЧ электромагнитных излучений с хоровой структурой динамического спектра. Во всех рассмотренных случаях размерность оказалась нецелой, что указывает на сложность наблюдаемого явления. Результаты показали, что размерность хоров, распространяющихся относительно геомагнитного поля в одну сторону, лежит в интервале (2, 5). Обнаружены скачки величины размерности при изменении временного интервала. Приведены примеры хоров в верхней частотной полосе с некоторыми элементами в нижней частотной полосе и в нижней частотной полосе, которые имеют такую размерность, что для их оптимального описания достаточно системы трех нелинейных автономных дифференциальных уравнений первого порядка. Полученные результаты согласуются с выводами теории, основанной на Beam Pulse Amplifier механизме возбуждения хоров.

и уравнения Максвелла в фоновой плазме образуют самосогласованную систему уравнений, которые в приближении линейной квазигидродинамики имеют следующий вид [14]:

Проведенные исследования важны для подтверждения механизма возбуждения хоров посредством усиления коротких шумовых импульсов и для обоснования возможности автоматического отождествления электромагнитных излучений разных типов.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00268).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell T.F., Inan U.S., Hague N., Pickett J.S. // Geophys. Res. Lett. 2009. V. 36. Art. No. L11101.
2. Kletzing C.A., Kurth W.S., Acuna M. et al. // Space Sci. Rev. 2013. V. 179. P. 127.
3. <https://emfisis.physics.uiowa.edu/Flight>.
4. Eckman J.P., Ruelle D. // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 617.
5. Takens F. // Lect. Notes Math. 1981. V. 898. P. 366.
6. Grassberger P., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 346.
7. Henon M. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69.
8. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 248 с.
9. Малинецкий Г.Г., Пономев А.В. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
10. Moon F.C. Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers. New York: Wiley-Interscience, 1987. 309 p.
11. Trakhtengerts V.Y. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. P. 17205.
12. Omura Y., Katoh Y., Summers D. // J. Geophys. Res. A. 2008. V. 113. Art. No. A04223.
13. Bespalov P., Savina O. // Ann. Geophys. 2018. V. 36. P. 1201.
14. Беспалов П.А., Савина О.Н., Жаравина П.Д. // Косм. иссл. 2022. Т. 60. С. 17.

Hausdorff dimension of typical very low frequency chorus emissions and verification of their excitation mechanism

P. A. Bespalov^{1, 2, *}, O. N. Savina², G. M. Neshchetkin^{1, 2}

¹*Federal Research Centre Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

²*National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, 603014 Russia*
**e-mail: PBespalov@mail.ru*

A quantitative study of the degree of complexity of electromagnetic VLF chorus emissions in the region of their excitation near the local minimum of the magnetic field outside the plasmasphere was carried out using modern mathematical tools. From the vast observational data collected during the Van Allen Probe mission, typical examples of chorus have been selected for which high-resolution digitized data are available. The original program was used to calculate the Hausdorff dimension of long numerical sequences. In all cases, the dimension turned out to be non-integer, which indicates the complex dynamics of the system. During the calculations, jumps in dimension were noted, including its decrease by about a factor of two for a fragment of a burst of chorus. The obtained results are important for confirming the mechanism of excitation of chorus by amplifying short noise pulses and for substantiating the possibility of automatic identification of electromagnetic radiation of different types.

Keywords: whistler mode, fractal analysis, particle-wave interaction, magnetosphere