

Каскадное образование топологических дефектов и сателлитных капель при динамической капиллярной неустойчивости в жидких кристаллах

П. В. Долганов⁺¹⁾, Н. А. Спириденко⁺, В. К. Долганов⁺, Е. И. Кац^{*}, К. Д. Бакланова^{+×}

⁺Институт физики твердого тела им. Ю. А. Осипьяна РАН, 142432 Черногловка, Россия

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

[×]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 июня 2023 г.

После переработки 15 июня 2023 г.

Принята к публикации 16 июня 2023 г.

Обнаружено образование топологических дефектов на границе нематик–изотропная жидкость и вблизи сателлитных капель при разрыве и фрагментации перешейка изотропной фазы между областями нематика. Этот процесс реализован в тонких оптических ячейках, заполненных жидким кристаллом. Найдена критическая ширина перешейка, при которой имеет место универсальная зависимость его ширины от времени, определяемая значением капиллярной скорости (отношение поверхностного натяжения к вязкости).

DOI: 10.31857/S1234567823140094, EDN: gzlpqy

Введение. Исследование разрыва струи жидкости является одним из наиболее старых и в то же время актуальных направлений динамики жидкости. Первое дошедшее до нас описание этого явления было сделано Леонардо да Винчи [1, 2]. Он сделал зарисовку струи, распадающейся на капли, и привел оригинальное для того времени объяснение причины образования капель. И в настоящее время изучение разрыва тонких струй остается интересным и актуальным направлением в физике жидкостей, лежит в основе многих природных явлений, встречается в повседневной жизни, важно для многих технических приложений. Для простых изотропных жидкостей теория была построена Рэлеем [3] и, с учетом вязкости, Бором [4]. Мы кратко напомним физическую природу разрыва струй в изотропных жидкостях [1–5]. Цилиндрический образец изотропной жидкости очевидным образом стремится минимизировать свою поверхностную энергию разбиением на капли. Динамика процесса определяется балансом между поверхностным натяжением, вязкими и инерционными силами (для интересующих нас размеров можно пренебречь гравитационными силами). В этом случае поведение системы определяется безразмерным числом Онезорге $Oh = \mu/\sqrt{\rho\gamma R}$, где μ – динамическая вязкость жидкости, ρ – плот-

ность, γ – поверхностное натяжение и R – характеристический размер системы [6]. Было показано (Плато, Рэлей [3, 5]), что тонкая струя нестабильна, если отношение ее радиуса r_0 к длине l достаточно мало. При этом флуктуации с длиной волны больше чем критическая $\lambda_c = 2\pi r_0$ понижают энергию системы, амплитуда модуляции растет, что и приводит к разрыву струи. Релей учел динамику потока невязкой жидкости в струе и нашел в линейном приближении, что максимальный инкремент неустойчивости имеет возмущение с длиной волны $\lambda_R \approx 9r_0$. Нестабильность, приводящая к разрыву, была названа нестабильностью Рэлей–Плато. Впоследствии было показано, что вязкость, нелинейные эффекты и окружающая жидкий цилиндр среда могут существенно влиять на λ_c . Увеличение вязкости сдвигает длину волны с максимальным инкрементом неустойчивости к большим длинам волн и приводит к возбуждению гармоник меньше рэлеевских. Теория капиллярного разрыва перешейка между двумя жидкими каплями [6–16] предсказывает на конечной стадии разрыва струи универсальное поведение. При этом профиль границы раздела имеет масштабно-инвариантный универсальный вид [17]. Линейная теория применима только на начальном этапе развития неустойчивости. На конечных стадиях процесса возникают два экстремума по диаметру перешейка между каплями с линейной зависимостью

¹⁾e-mail: pauldol@issp.ac.ru

минимального радиуса $r_{\min} = At\gamma/\mu$ от времени, где A – постоянный множитель. В свою очередь наличие двух минимумов свидетельствует об образовании капель при разрыве [17]. Нелинейные эффекты приводят также к смешиванию гармоник и к возможности образования капель с размерами, существенно меньшими, чем r_0 (и, следовательно, с большой кривизной). В экспериментах, проводимых в последнее десятилетие, исследовалось образование капель при разрыве [13, 16, 18–20], в том числе каскадное образование сателлитных капель, при котором при разрыве возникают капли неравновесной формы с их последующим делением и образованием новых капель (самоподобное скейлинговое поведение). Сингулярность в форме перешейка, образующаяся при разрыве, исчезает после разрыва.

В настоящей работе проведены исследования разрыва тонкой линейного типа прослойки (перешейка) изотропной жидкости между двумя областями нематического жидкого кристалла в плоских оптических ячейках. В отличие от простых изотропных жидкостей, в жидком кристалле имеется ориентационный порядок. Поэтому изменение конфигурации (формы) системы приводит к изменению в нематике упругой ориентационной энергии Франка, энергии сцепления директора с границей раздела. Эти явления в свою очередь приводят к возможности образования топологических дефектов, оптимизирующих энергетический баланс при разрыве жидкого перешейка. В данной работе обнаружено и исследовано образование топологических дефектов на границе раздела жидкость – нематик. Эти топологические дефекты возникают как следствие формальной сингулярности формы (стремящейся к бесконечности кривизны перешейка вблизи разрыва). Важно отметить, что устранение топологических дефектов возможно только при изменении топологии образца, поэтому дефекты сохраняются после их образования. Нами также изучена динамика утоньшения, связанная с капиллярной неустойчивостью перешейка.

Детали эксперимента. В измерениях мы использовали нематический жидкий кристалл E7 (Synthon Chemicals). Нематические жидкие кристаллы обладают ориентационным упорядочением молекул. Преимущественное направление длинных осей молекул называется директором [21–23]. При нагреве нематик переходит в изотропную жидкость. Наши образцы имели широкую двухфазную область нематик – изотропная жидкость ($\sim 2^\circ\text{C}$), что позволило готовить длинные прослойки жидкости между областями нематика и исследовать их разрыв. Использовались плоские оптические

ячейки из двух параллельных стеклянных пластинок. Поверхности ячеек задавали однородную ориентацию молекул, параллельную поверхности. Вещество в изотропной фазе капиллярно вводилось в ячейку. Затем ячейка помещалась в термостатирующее устройство (Linkam LTS120 или Mettler Toledo FP90). Вязкость μ как в нематическом, так и в изотропном состоянии достаточно высокая, поверхностное натяжение γ границы нематик–изотропная жидкость небольшое, их отношение (капиллярная скорость) $\gamma/\mu \sim 5 \cdot 10^{-4}$ м/с, что позволяет проводить исследования при сравнительно небольших скоростях съемки. Исследования проводились в поляризованном свете с использованием микроскопа Olympus BX51. Эволюция структур регистрировалась контролируемой компьютером видеокамерой (Baumer VCXU-02C) со скоростью съемки до 400 кадров в секунду. Тонкая изотропная прослойка получалась следующим образом. Ячейка с жидким кристаллом нагревалась до температуры несколько выше температуры, при которой весь образец переходил в изотропное состояние. Затем образец медленно охлаждался, в нем зарождались и росли участки нематика. При температуре вблизи перехода всего образца в нематическую фазу могли образовываться тонкие изотропные прослойки почти линейного вида (рис. 1), которые разделяли нематические области. Трансформация этих прослоек, связанная с капиллярной неустойчивостью, была основной целью исследований.

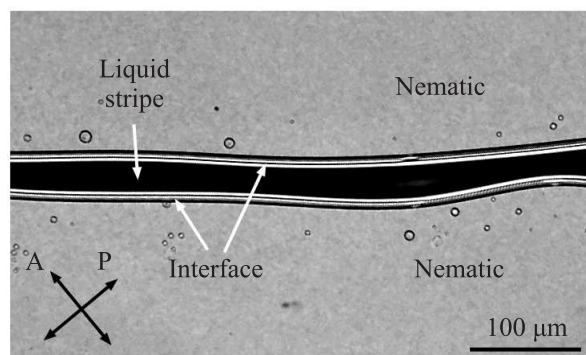


Рис. 1. Жидкая прослойка в низкотемпературной части двухфазной области разделяет два участка нематической фазы. Большая часть материала перешла в нематическую фазу. Толщина ячейки $h = 20$ мкм

Результаты. В прослойке между нематическими областями (рис. 1, 2а) можно выделить три участка, ясно видимых при наблюдении в скрещенных поляризаторах: центральная темная часть (изотропная жидкость) и две светлые полосы по краям –

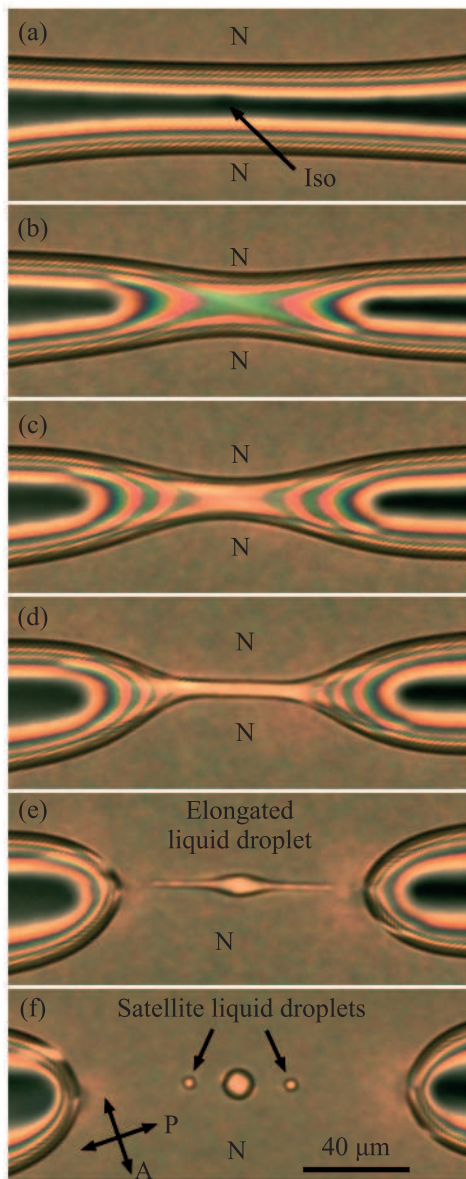


Рис. 2. (Цветной онлайн) Область прослойки, где происходит ее разрушение. (a) – Ширина прослойки больше чем суммарная ширина двух менисков. (b)–(d) – Образование мостика почти одинаковой ширины. (e), (f) – Фрагментация мостика с образованием сателлитных капель. Времена после фото (a): 11.42 с (b), 12.0 с (c), 12.41 с (d), 12.7 с (e), 13.06 с (f). $h = 40$ мкм

два мениска, разделяющих изотропную жидкость и нематик. Если мениски не соприкасаются, ширина прослойки может изменяться при изменении температуры или при движении материала в ячейке. Если мениски касаются, наблюдается неустойчивость ширины прослойки. Ширина ее локально начинает уменьшаться. На рисунке 2a показана прослойка непосредственно перед моментом соединения менисков. Кадры на рис. 2b–d демонстрируют утоньше-

ние прослойки с образованием тонкого мостика. Процесс утоньшения становится необратимым. Вначале утоньшение происходит с явно выраженным минимумом, локализованным в месте, где мениски соединяются. Затем по бокам скорость утоньшения увеличивается с образованием тонкого мостика примерно одинаковой ширины (рис. 2d) между широкими частями прослойки, ширины которых изменяются мало. Они несколько увеличиваются за счет перемещения материала из центральной части.

После того как образуется мостик почти постоянной ширины, процесс утоньшения кардинально изменяется (рис. 2d–f). Вначале мы обсудим разрывы и более подробно особенности разрыва, которые при образовании сателлитных капель ранее не наблюдались, а затем динамику утоньшения.

Мостик на рис. 2(d) почти постоянной ширины, как и перешеек в начальном состоянии, однако теперь его ширина существенно меньше, что может инициировать неустойчивость типа Рэлея–Плато. Неустойчивость тонкого мостика возникает, когда отношение длины мостика l к его полужирине r_0 становится $l/r_0 \sim 10$, т.е. на длине укладывается рэлеевская длина волны $\lambda_R \approx 9r_0$. Неустойчивость с модуляцией ширины происходит так, что минимумы ширины образуются по краям мостика, максимум в центре. Мостик разрывается в двух местах на его краях (рис. 2e). На рисунке 3 схематически пока-

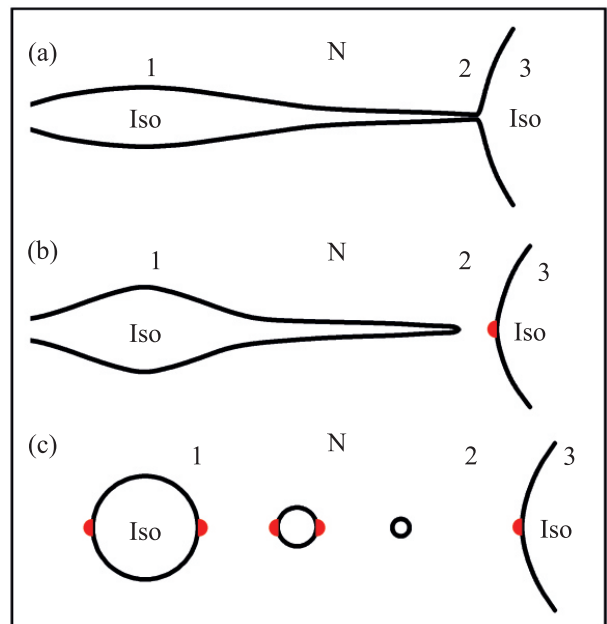


Рис. 3. (Цветной онлайн) Схематическое изображение мостика до разрыва (a), после первого разрыва (b) и сателлитных капель после каскада разрывов (c). Красными точками показаны топологические дефекты

зана правая часть интерфейса до разрыва мостика (рис. 3а) и непосредственно после разрыва (рис. 3б). Наклон интерфейса со стороны образующейся капли (1) существенно меньше наклона в остающейся части перешейка (3). Непосредственно перед разрывом увеличение кривизны на двух боковых краях мостика ведет к сингулярности в его форме (область (2) на рис. 3а) [17, 24]. В результате разрыва в середине образуется продолговатая капля с вытяженными концами (рис. 2е, 3б). Однако эта капля, как правило, не успевает релаксировать к круглой форме. Два вторичных разрыва происходят с двух сторон в вытянутых продолговатых участках капли. В результате образуются еще две меньшие боковые спутные капли (рис. 2ф). Самоподобные разрывы могут продолжаться и далее. Разрешение оптического микроскопа не позволяет проследить разрывы и образование очень мелких капель. Капли могут находиться в нематике или на поверхности кюветы. Наименьшие наблюдаемые нами капли имели диаметр порядка 1 мкм. Разрыв мостика с формированием спутных капель подобен разрыву цилиндрической струи жидкости [6, 12, 25], разрыву перешейка между твердыми пластинками или каплями [8, 9, 26].

Нами обнаружено, что сингулярность в форме мостика и гидродинамическое течение жидкости вблизи сингулярности приводят к образованию топологических дефектов на границе нематик–изотропная жидкость при образовании спутных капель. Дефекты могут быть визуализированы при наблюдении в скрещенных поляризаторах (рис. 4). Рисунок 4а–с демонстрирует разрыв прослойки изотропной жидкости. На рисунке 4с дефекты видны на границе интерфейса с двух сторон расширяющегося участка нематической фазы. Деформация распространяется вглубь мениска. Число и размер образующихся капель могли отличаться от эксперимента к эксперименту. На рисунке 4d, e приведены фотографии центральной капли и спутных капель для случаев образования небольшого и большого числа спутных капель. Часть спутных капель имеют больший размер, чем на рис. 4с. Топологические дефекты (рис. 4d, e) хорошо видны как на границе центральной капли, так и больших спутных капель. Топологические дефекты в центральной и спутных каплях, насколько нам известно, ранее не наблюдались.

Существование топологических дефектов на границе капель связано с ориентацией молекул жидкого кристалла на границе нематик–изотропная жидкость. Согласно теореме Пуанкаре–Хопфа [22] на сферической поверхности с планарной ориентаци-

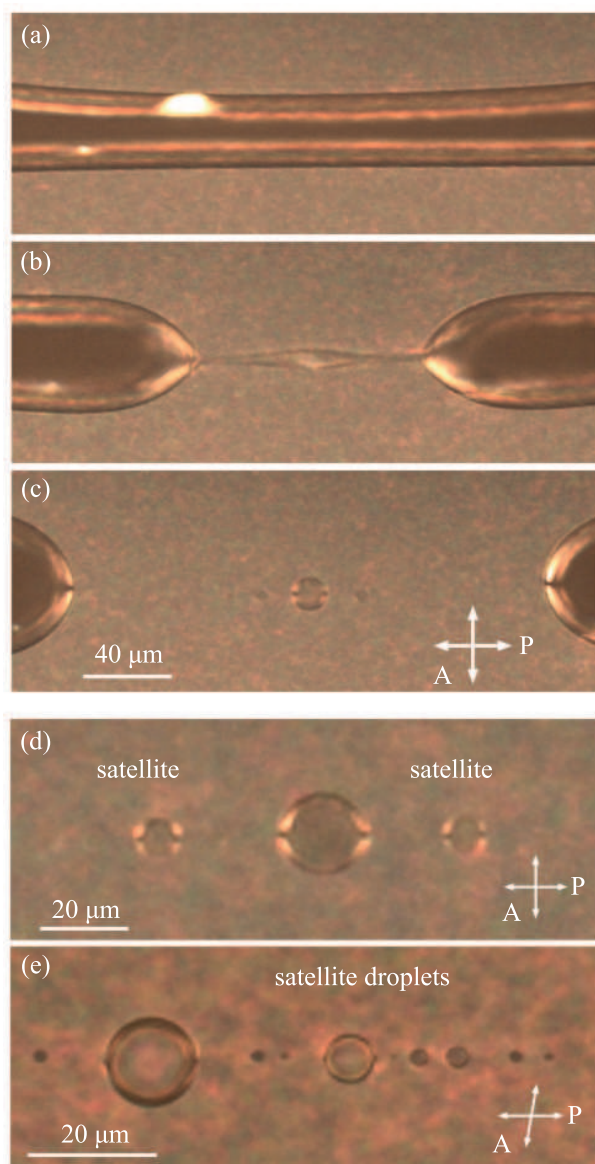


Рис. 4. (Цветной онлайн) Этапы трансформации полоски изотропной фазы (а)–(с): (а) – узкая прослойка, (б) – мостик неоднородной толщины перед разрывом, (с) – капли после каскада разрывов. Поляризатор и анализатор скрещены, ориентация поляризатора параллельна директору нематика вдали от участков изотропной фазы. Кадры (б) и (с) сняты через 15.5 с и 16.04 с после кадра (а). На кадре (с) видны дефекты на границах изотропных областей. На (d), (e) показаны результаты разрывов с более крупными по сравнению с фото (с) центральной каплей и спутными каплями. (e) – Может происходить каскад разрывов с образованием большого числа спутных капель

ей поля молекулярного упорядочения должны существовать топологические дефекты с суммарным топологическим зарядом +2. Это могут быть четы-

ре дефекта с топологическими зарядами $S = +1/2$ каждый (рис. 5а) или два топологических дефекта с

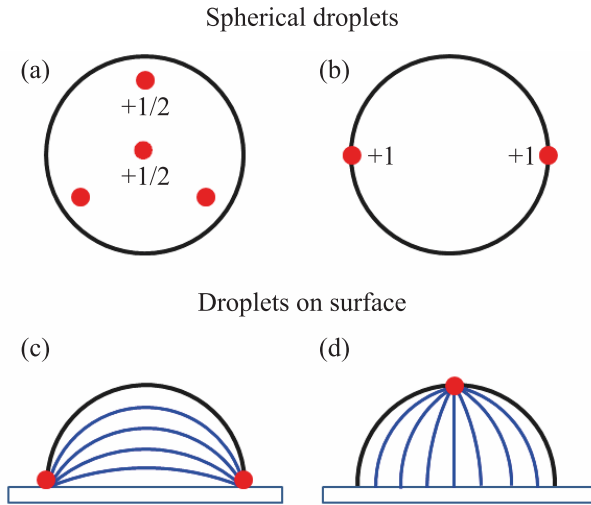


Рис. 5. (Цветной онлайн) Схематическое изображение сферических капель в нематическом жидком кристалле (а), (б) и полусферических капель на плоской поверхности (с), (д). На поверхности сферических капель расположены четыре топологических дефекта с зарядами $S = +1/2$ в вершинах тетраэдра (а) или два топологических дефекта с зарядами $S = +1$ на полюсах капли (б). (с) – Два дефекта у полусферической капли на плоской поверхности. Каждый дефект соответствует половине дефекта $S = +1$; планарные граничные условия на плоской поверхности. (д) – Дефект $S = +1$ у полусферической капли при гомеотропных граничных условиях на плоской поверхности. Синими линиями показана ориентация директора на поверхности капель

зарядами $S = +1$ (рис. 5б) [27]. То же справедливо для поля молекулярного упорядочения на поверхности шара с планарными граничными условиями. В случае, когда капли находятся на поверхности, могут существовать два дефекта, представляющие собой половину дефектов с зарядом $S = +1$ каждый (рис. 5с, планарные граничные условия на плоской поверхности) или один дефект с зарядом $S = +1$ (рис. 5д, гомеотропные граничные условия на плоской поверхности). На границе нематик–изотропная жидкость в Е7 реализуются конические граничные условия [28, 29]: директор ориентируется под углом порядка 35° к границе раздела. В нашем случае наблюдаются два топологических дефекта на полюсах капель. Проекция директора на границу раздела соответствуют топологическому дефекту $S = +1$ для сферической капли и половине дефекта $S = +1$ для полусферической капли на плоской поверхности. В нашем эксперименте разрывы и образование дефек-

тов происходят последовательно в узких частях продолговатых капель. Дефекты в большой капле образовались в местах, которые были широкими при первичных разрывах. Топологические дефекты существуют в центральной и в сателлитных каплях, например, в каплях на рис. 4д, е. Таким образом, последовательно (каскадно) образуются не только капли, но и топологические дефекты.

Аналитические расчеты и численное моделирование (молекулярная динамика) [26] показывают, что в случае жидкости в воздухе или в другой жидкости при каскаде уменьшение размера сателлитных капель может приводить к образованию нанокapель, кластеров из небольшого числа атомов или молекул. То же самое справедливо для нематика в воздухе или в другой жидкости. Однако мы изучаем другую систему, канал изотропной жидкости между областями нематика. Размер сателлитных капель не может быть меньше корреляционной длины ориентационного поверхностного упорядочения нематика ξ (при слабом фазовом переходе изотропная жидкость–нематик эта величина типично порядка десятка нанометров). Этот масштаб является естественным пределом для размера изотропных капель при каскаде с образованием сателлитных капель. Таким образом, мы приходим к заключению, что для нашей системы естественный минимальный размер сателлитных капель порядка нескольких десятков нанометров. Можно оценить также размер капель, в которых образуются топологические дефекты [22]. Энергия, связанная со сцеплением директора на границе капель $U_{\text{anch}} R^2$, упругая энергия порядка $K R$ (где U_{anch} – энергия сцепления, K – модуль Франка, а R – характерный размер). Для существования топологических дефектов упругая энергия должна быть меньше поверхностной энергии. Полагая $K \sim 10^{-6}$ эрг/см, $U_{\text{anch}} \sim 10^{-2}$ эрг/см² [22, 30], критический размер капель $R \gtrsim 1$ мкм [22], что согласуется с нашими наблюдениями. Таким образом, при каскаде вначале должны перестать образовываться топологические дефекты на поверхности капель, а затем и сателлитные капли.

Перейдем теперь к описанию динамики утоньшения жидкого перешейка между областями нематика. Результаты представлены на рис. 6, где приведена временная зависимость ширины перешейка (в центре, по бокам и при образовании центральной капли). Полые кружки на рис. 6а – минимальная ширина прослойки w_{min} в центре и в двух локальных минимумах мостика вблизи его концов на конечном этапе разрыва (кружки с крестиками). Сплошными кружками показана ширина мостика в центре w_{max} ,

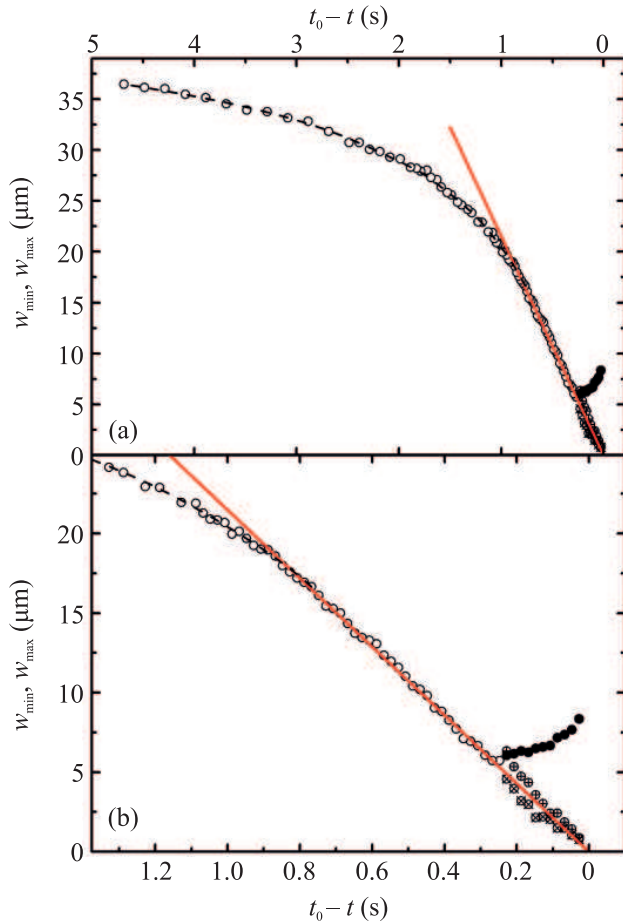


Рис. 6. (Цветной онлайн) Зависимость минимальной ширины мостика $w_{\min}$ (полые и крестообразные символы) и максимальной ширины $w_{\max}$ при образовании капли (сплошные символы) от времени разрыва мостика. Полые и сплошные символы соответствуют ширине в центре мостика, крестики – ширины на двух сторонах от центра на конечной стадии утоньшения. (b) – Данные в увеличенном масштабе. $h = 40$ мкм

когда его ширина начинает увеличиваться с последующим образованием капли. На рисунке 6b приведены данные в увеличенном масштабе. Величины $w_{\min}$ в двух локальных минимумах несколько отличаются (кружки с крестиками) из-за некоторой асимметрии формы модулированного мостика. Временная зависимость минимального радиуса $r_{\min}$ струи или мостика между каплями различна в случаях, когда доминируют инерция или вязкость [1, 2]. В обоих случаях перешеек разрывается за конечное время. В инерционном режиме (число Онезорге мало) из соотношения подобия следует $r_{\min} = A_I \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/3} (t_b - t)^{2/3}$, где t_b – момент разрыва, A_I – безразмерный коэффициент, $A_I \approx 0.7$ [1]. Величина коэффициента A_I ,

полученная в численных расчетах, порядка 0.5–0.7 [2, 6, 31]. В случае, когда доминирует вязкость (число Онезорге большое), степенная зависимость линейная $r_{\min} = A\gamma/\mu(t_b - t)$ [32, 33]. Эксперименты подтвердили линейную зависимость при разрыве [34, 35]. Для случая равенства вязкости внутренней и внешней жидкости $A \approx 0.034$ [17, 24, 36]. Используя для A эту величину, из наших данных (рис. 6) следует, что капиллярная скорость $V_C \approx 3.2 \cdot 10^{-4}$ м/с. Капиллярную скорость можно оценить из величин поверхностного натяжения и вязкости [37–39]. Такой подход дает $V_C \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м/с. Учитывая, что вязкость жидкого кристалла анизотропна (в пренебрежении сжимаемостью жидкого кристалла имеются три различных коэффициента вязкости), и что использованная теория не учитывает ориентирующего действия поверхностей ячейки, можно считать согласие величин приемлемым. Отметим, что аналогичные явления можно ожидать в тонких пленках [40], сложных жидкокристаллических структурах [41] и полимерах [18, 42].

Заключение. Таким образом, нами исследован разрыв тонких изотропных прослоек жидкости между областями нематического жидкого кристалла. Прослойки формировались в двухфазной области при переходе изотропной жидкости в нематик. В работе обнаружено образование топологических дефектов на границе раздела между двумя фазами и вблизи поверхности сателлитных капель, образующихся при каскадном разрыве прослоек. Изучена динамика, предшествующая разрыву, связанная с неустойчивостью формы перешейка.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант # 23-12-00200.

1. J. Eggers, Rev. Mod. Phys. **69**, 865 (1997).
2. J. Eggers and E. Villermaux, Rep. Prog. Phys. **71**, 036601 (2008).
3. W. S. Rayleigh, Proc. London Math. Soc. **4**, 10 (1878).
4. N. Bohr, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **209**, 281 (1909).
5. J. Plateau, *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires*, Gautethier-Villars, Paris (1873).
6. Y. Lee and J. E. Sprittles, J. Fluid Mech. **797**, 29 (2016).
7. H. A. Stone, B. J. Bentley, and L. G. Lead, J. Fluid Mech. **173**, 131 (1986).
8. B. M. Tjahjadi, H. A. Stone, and J. M. Ottino, J. Fluid Mech. **243**, 297 (1992).
9. X. Zhang, R. S. Padgett, and O. A. Basaran, J. Fluid Mech. **329**, 207 (1996).
10. J. C. Burton, J. E. Rutledge, and P. Taborek, Phys. Rev. Lett. **92**, 244505 (2004).

11. J. C. Burton and P. Taborek, Phys. Rev. Lett. **98**, 224502 (2007).
12. E. Alvarez-Lacalle, J. Casademunt, and J. Eggers, Phys. Rev. E **80**, 056306 (2009).
13. A. A. Castrejon-Pita, J. R. Castrejon-Pita, and I. M. Hutchings, Phys. Rev. Lett. **108**, 074506 (2012).
14. D. Tiwari, L. Mercury, M. Dijkstra, H. Chaudhary, and J. F. Hernández-Sánchez, Phys. Rev. Fluids **3**, 124202 (2018).
15. H. Wee, B. W. Wagoner, P. M. Kamat, and O. A. Basaran, Phys. Rev. Lett. **124**, 204501 (2020).
16. P. Bazazi, H. A. Stone, and S. H. Hejazi, Phys. Rev. Lett. **130**, 034001 (2023).
17. J. R. Lister and H. A. Stone, Phys. Fluids **10**, 2758 (1998).
18. A. B. Bazilevskii and A. N. Rozhkov, Fluid Dynamics **50**, 800 (2015).
19. A. Deblais, M. A. Herrada, I. Hauner, K. P. Velikov, T. van Roon, H. Kellay, J. Eggers, and D. Bonn, Phys. Rev. Lett. **121**, 254501 (2018).
20. N. B. Speirs, K. R. Langley, P. Taborek, and S. T. Thoroddsen, Phys. Rev. Fluids **5**, 044001 (2020).
21. П. Ж. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, пер. с англ., Мир, М. (1978), 400 с.
22. М. Клеман, О. Д. Лаврентович, *Основы физики частично упорядоченных сред*, пер. с англ., ФИЗМАТЛИТ, М. (2007), 680 с.
23. P. Oswald and P. Pieranski, *Nematic and Cholesteric Liquid Crystals: Concepts and Physical Properties Illustrated by Experiments*, Taylor and Francis, Boca Raton (2005).
24. I. Cohen, M. P. Brenner, J. Eggers, and S. R. Nagel, Phys. Rev. Lett. **83**, 1147 (1999).
25. J. Eggers and Z. Angew, Math. Mech. **85**(6), 400 (2005).
26. P. V. Dolganov, A. S. Zverev, K. D. Baklanova, and V. K. Dolganov, Phys. Rev. E **104**, 014702 (2021).
27. T. C. Lubensky and J. Prost, J. Phys. II France **2**, 371 (1992).
28. Y.-K. Kim, S. V. Shiyankovskii, and O. D. Lavrentovich, J. Phys. Condens. Matter **25**, 404202 (2013).
29. P. V. Dolganov and N. A. Spiridenko, Liq. Cryst. **49**, 1933 (2022).
30. S. Faetti, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **179**, 217 (1990).
31. Y.-J. Chen and P. H. Steen, J. Fluid Mech. **341**, 245 (1997).
32. D. T. Papageorgiou, J. Fluid Mech. **301**, 109 (1995).
33. D. T. Papageorgiou, Phys. Fluids **7**, 1529 (1995).
34. T. A. Kowalewski, Fluid Dyn. Res. **17**, 121 (1996).
35. G. H. McKinley and A. Tripathi, J. Rheol. **44**, 653 (2000).
36. J. Eggers, Phys. Rev. Lett. **71**, 3458 (1993).
37. P. Oswald and G. Poy, Phys. Rev. E **92**, 062512 (2015).
38. H. Wang, T. X. Wu, S. Ganza, J. R. Wu, and S.-T. Wu, Liq. Cryst. **33**, 91 (2006).
39. R. Basu, D. Kinnamon, N. Skaggs, and J. Womack, J. Appl. Phys. **119**, 185107 (2016).
40. П. В. Долганов, В. К. Долганов, Е. И. Кац, Письма в ЖЭТФ **115**, 236 (2022).
41. К. Д. Бакланова, В. К. Долганов, Е. И. Кац, П. В. Долганов, Письма в ЖЭТФ **117**, 537 (2023).
42. A. V. Subbotin and A. N. Semenov, Macromolecules **55**, 2096 (2022).