Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 3, с. 242 – 247 © 2023 г. 10 февраля

Многонитевая гипотеза о собственных значениях и симметрии Рака

Ан. Морозов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 127051 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 ноября 2022 г.
После переработки 7 декабря 2022 г.
Принята к публикации 8 декабря 2022 г.

Матрицы Рака квантовых алгебр в настоящее время вызывают большой интерес. Эти матрицы связаны с $\mathcal{R}$-матрицами, которые намного проще самих матриц Рака. Это соотношение известно как гипотеза о собственных значениях. В этой статье мы изучаем симметрии матриц Рака, которые следуют из гипотезы о собственных значениях для многонитевых кос.

DOI: 10.31857/S1234567823030102, EDN: oxrsbg

1. Введение. Матрицы Рака и $6j$-символы изучаются довольно давно. Впервые они появились в физике при изучении угловых моментов [1], где они описывают преобразования между различными сложениями моментов трех частиц. Матрицы Рака, появляющиеся в такой задаче, на самом деле достаточно просты и хорошо изучены. Однако с математической точки зрения эта задача об угловых моментах фактически соответствует умножению различных представлений алгебры $SU(2)$. На этом языке коэффициенты Рака появляются, когда произведение трех представлений раскладывается в сумму неприводимых представлений:

$$T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 = \sum M_{12}^{1,2} Q_{12} \otimes T_3 = \sum N^{12,3} M_{12}^{1,2} Q. \quad (1)$$

Это произведение также можно переписать другим способом:

$$T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 = \sum T_1 \otimes M_{23}^{2,3} Q_{23} = \sum N^{1,23} M_{23}^{2,3} Q. \quad (2)$$

Преобразование между такими двумя базисами называется матрицей Рака, а ее элементы – $6j$-символами:

$$U: \ N^{12,3} M_{12}^{1,2} \to N^{1,23} M_{23}^{2,3},$$
$$U_{23}^{12} = \left\{ \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & Q_{12} \\ T_3 & Q & Q_{23} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Особый интерес такого определения состоит в том, что его можно легко обобщить на представления других алгебр, что делает его применимым к другим физическим теориям, таким как хромодинамика, где применяется группа $SU(3)$. В этом случае представления должны нумероваться не натуральными числами, как в случае $SU(2)$, а диаграммами Юнга $T = [T_1, \dots T_n]$, $T_1 \geq T_2 \geq T_3 \dots$. Однако это определение можно обобщить не только на другие алгебры Ли, но и на их деформации, такие как квантовые группы [2]. Квантовые группы по существу являются деформацией универсальных обертывающих алгебр. Среди прочего они связаны с интегрируемыми системами [3], решеточными калибровочными теориями [4], трехмерной квантовой гравитацией [5], квантовыми sl_N-инвариантами узлов [6], инвариантами трехмерных многообразий Тураева–Виро и топологическими теориями поля [7, 8], конформной теория поля Весса–Зумино–Виттена и трехмерной теорией Черна–Саймонса [9, 10]. В последнем случае квантовые группы описывают скрытые симметрии наблюдаемых, которые также равны полиномам узлов из теории узлов.

В последние годы мы активно изучали приложения квантовых групп и матриц Рака к вычислению полиномов узлов и наблюдаемых в теории Черна–Саймонса. Основная проблема изучавшихся подходов состоит в том, что для вычисления соответствующих полиномов узлов нужно множество различных матриц Рака. Однако на данный момент известно лишь несколько случаев, когда известны общие ответы для матриц Рака. Среди них матрицы Рака для группы $U_q(sl_2)$ [11] и эксклюзивные матрицы Рака без множественности [12, 13]. В контексте настоящей статьи нас интересуют матрицы Рака, которые появляются при вычислениях с использованием представления узла в виде косы, см. рис. 1.

В работе [14] был предложен достаточно мощный инструмент для вычисления неизвестных матриц Рака – гипотеза о собственных значениях, которая свя-

[1)]e-mail: morozov.andrey.a@iitp.ru

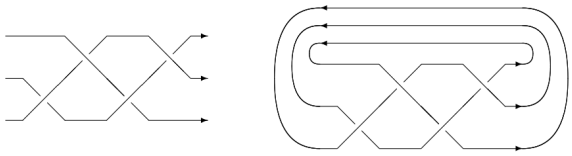

Рис. 1. Представление косы для узла 4_1, коса изображена на левом рисунке, на правом ее замыкание – узел

зывает известные собственные значения квантовых $\mathcal{R}$-матриц с матрицами Рака для трехнитевых кос. Эта гипотеза была дополнительно изучена в [15–19]. Поскольку гипотеза о собственных значениях связывает разные матрицы Рака, она налагает на матрицы Рака определенные симметрии, которые изучались в [17, 18]. Также из гипотезы о собственных значениях следует симметрия тяни-крюк, описанная, исследованная и доказанная в [20–23]. Однако симметрии, изучаемые в этих работах, – это симметрии, связанные с гипотезой о собственных значениях для трехнитевых кос. Существует также гипотеза о собственных значениях для большего числа нитей [24]. В данной работе нас интересуют симметрии, которые следуют из многонитевой гипотезы о собственных значениях.

Статья устроена следующим образом. В разделе 2 мы кратко описываем подход Решетихина–Тураева к вычислению инвариантов узлов, использующих $\mathcal{R}$-матрицы и матрицы Рака. В разделе 3 мы объясняем, почему матрицы Рака для многонитевых кос обладают некоторой блочной структурой. В разделе 4 мы приводим формулировку гипотезы о собственных значениях. В разделе 5 приводится и объясняется основной результат статьи, формулы (18) и (19).

2. Подход Решетихина–Тураева. Одним из наиболее продуктивных подходов к вычислению полиномов узлов (а также равных им средних значений петель Вильсона) является современная модификация подхода Решетихина–Тураева [25–30]. Этот подход лучше всего определен для представления узла в виде косы (см. рис. 1). В такой косе все пересечения соответствуют $\mathcal{R}$-матрицам. Эти $\mathcal{R}$-матрицы очень просты в своей диагональной форме. Собственные значения $\mathcal{R}$-матриц соответствуют неприводимым представлениям в тензорном произведении представлений, соответствующих двум пересекающимся нитям. При рассмотрении узлов для представления Q, входящего в произведение двух представлений T собственное значение равно [2, 31–33]

$$\lambda_Q = q^{\varkappa_Q - 4\varkappa_T - N|T|}, \tag{4}$$

где $\varkappa_Q$ вычисляется напрямую из диаграммы Юнга Q:

$$\varkappa_Q = \sum_{\{i,j\}\in Q} (i-j), \tag{5}$$

где $\{i, j\}$ нумеруют клетки в диаграмме Юнга.

Для двухнитевых кос, которые параметризуются числом пересечений n, ответы для полиномов узлов даются разложением по характерам:

$$H_T^{T[2,n]} = \sum_{Q\vdash T\otimes T} S_Q^*(A,q) Tr \mathcal{R}_Q^n = \sum_{Q\vdash T\otimes T} S_Q^*(A,q)\lambda_Q^n, \tag{6}$$

где $S_Q^*(A,q)$ – это полиномы Шура (характеры представления Q квантовой группы) в специальной точке [30], которые можно легко вычислить по диаграмме Юнга.

Для многонитевой косы ситуация более сложная. В этом случае есть $\mathcal{R}$-матрицы, соответствующие пересечениям различных пар нитей. Эти матрицы попрежнему можно диагонализовать, и их диагональная форма дается формулой (4), но в этом случае нужны матрицы поворота базиса. Эти матрицы поворота – это матрицы Рака. Таким образом, полиномы для m-нитевой косы получаются с помощью модифицированного разложения по характерам:

$$H_T^{\mathcal{K}} = \sum_{Q\vdash T^{\otimes m}} S_Q^*(A,q) Tr \mathcal{B}_Q, \tag{7}$$

где $\mathcal{B}_Q$ – это произведение диагональных $\mathcal{R}$-матриц и матриц Рака, порядок умножения которых пишется согласно косе. Это означает, что наиболее сложные для вычисления величины в этом выражении – это матрицы Рака.

3. Блочная структура. Матрицы Рака и, соответственно, недиагональные $\mathcal{R}$-матрицы для случая более чем 3 нитей обладают определенной блочной структурой [16, 24].

Для трехнитевой косы, если из диагональной матрицы $\mathcal{R}_1$ для построения $\mathcal{B}_Q$ нужно построить недиагональную $\mathcal{R}$-матрицу, требуется следующая матрица Рака:

$$\mathcal{R}_2 = U\mathcal{R}_1 U^\dagger, \quad U = \begin{bmatrix} T & T & Q_{12} \\ T & Q & Q_{23} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Эту матрицу Рака можно описать с помощью следующего рисунка, см. рис. 2.

При переходе к 4-нитевым косам нужны матрицы Рака двух различных типов. Во-первых, для того, чтобы найти матрицу $\mathcal{R}_2$, согласно рис. 3, нужна матрица U_4. Для ее получения надо написать разло-

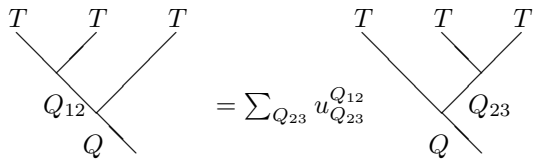

Рис. 2. Графическое описание 3-нитевой матрицы Рака

жение на неприводимые представления для произведения четырех представлений T двумя способами:

$$((T\otimes T)\otimes T)\otimes T=\sum_{Q_{12}\in T\otimes T}(Q_{12}\otimes T)\otimes T=$$
$$=\sum_{Q_{12}\in T\otimes T}\sum_{Q_{123}\in Q_{12}\otimes T}Q_{123}\otimes T=\sum_{Q\in T^{\otimes 4}}Q, \tag{9}$$

и

$$(T\otimes(T\otimes T))\otimes T=\sum_{Q_{23}\in T\otimes T}(T\otimes Q_{23})\otimes T=$$
$$=\sum_{Q_{23}\in T\otimes T}\sum_{Q_{123}\in T\otimes Q_{23}}Q_{123}\otimes T=\sum_{Q\in T^{\otimes 4}}Q. \tag{10}$$

Матрицы Рака U_4, которые описывают поворот между такими двумя базисами, имеют блочную структуру, так как они не смешивают представления, которые получаются из различных Q_{123}. Это означает, что такие блоки – это на самом деле матрицы Рака U из (8), где представление Q надо заменить на представление Q_{123}. Таким образом, выполняется $\mathcal{R}_2=U_4\mathcal{R}U_4^{\dagger}$.

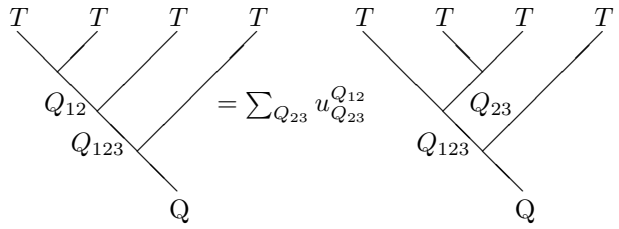

Рис. 3. Графическое описание 4-нитевой матрицы Рака U

Для того, чтобы найти матрицу $\mathcal{R}_3$ нужна дополнительная матрица Рака V. Понять это можно с помощью рис. 4. На языке разложения по неприводимым представлениям эта матрица связывает базис (10) с базисом

$$T\otimes((T\otimes T)\otimes T)=\sum_{Q_{23}\in T\otimes T}T\otimes(Q_{23}\otimes T)=$$
$$=\sum_{Q_{23}\in T\otimes T}\sum_{Q_{234}\in T\otimes Q_{23}}T\otimes Q_{234}=\sum_{Q\in T^{\otimes 4}}Q. \tag{11}$$

Эта матрица опять-таки имеет блочную структуру. Эти блоки не смешивают различные представления Q_{23} и соответствуют следующим блокам из $6j$-символов

$$V_i=\begin{bmatrix} T & Q_{23} & Q_{123}\\ T & Q & Q_{234}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Получающаяся $\mathcal{R}$-матрица, таким образом, равна

$$\mathcal{R}_3=U_4VU_4\mathcal{R}_1\left(U_4VU_4\right)^{\dagger}, \tag{13}$$

где $\mathcal{R}_1$ – это диагональная $\mathcal{R}$-матрица. Еще одно интересное свойство матрицы V состоит в том, что так как она не смешивает различные представления Q_{23}, в то время как собственные значения $\mathcal{R}$-матрицы также зависят от этих представлений, эти матрицы коммутируют, $\mathcal{R}_1V=V\mathcal{R}_1$. Эта структура также обобщается и для большего числа нитей, с каждой новой нитью добавляется одна новая матрица Рака.

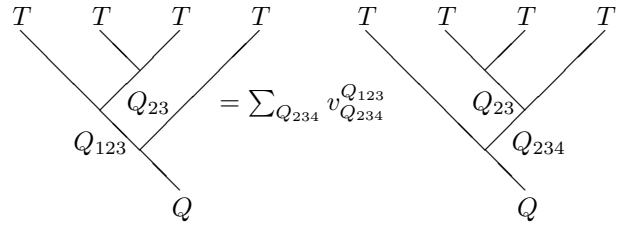

Рис. 4. Графическое описание 4-нитевой матрицы Рака V

4. Гипотеза о собственных значениях. Гипотеза о собственных значениях ведет свое происхождение от изучения уравнения Янга–Бакстера на $\mathcal{R}$-матрицы:

$$\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2. \tag{14}$$

Если переписать это уравнение как уравнение на диагональные $\mathcal{R}$-матрицы и матрицы Рака, то оно превращается в

$$\mathcal{R}U\mathcal{R}U^{\dagger}\mathcal{R}=U\mathcal{R}U^{\dagger}\mathcal{R}U\mathcal{R}U^{\dagger}. \tag{15}$$

Это уравнение можно интерпретировать как уравнение на матрицы Рака U. Это приводит к гипотезе о собственных значениях [14]:

Если нормированные собственные значения двух $\mathcal{R}$-матриц совпадают, то соответствующие матрицы Рака также совпадают.

Нас интересует в контексте данной гипотезы только нормированные собственные значения, так как при умножении $\mathcal{R}$-матриц в (15) на некоторую константу, уравнение по-прежнему выполняется.

Однако в уравнение (15) входят только трехнитевые матрицы Рака. Для большего числа нитей появляются также и другие матрицы Рака. Оказывается [24], что другие уравнения Янга–Бакстера,

такие как, например, $\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2$, также автоматически выполняются, если выполняется первое уравнение Янга–Бакстера. Существенным уравнением для многонитевого случая оказываются коммутационные соотношения для $\mathcal{R}$-матриц, такие как $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_3\mathcal{R}_1$ или, в терминах диагональных $\mathcal{R}$-матриц

$$\mathcal{R}UV_1U\mathcal{R}(UV_1U)^\dagger = UV_1U\mathcal{R}(UV_1U)^\dagger\mathcal{R}. \qquad (16)$$

Важно отметить, что многонитевые матрицы Рака обладают блочной структурой, как было описано в предыдущем разделе. Это приводит к следующему обобщению гипотезы о собственных значениях [24]:

Если нормированные собственные значения для $\mathcal{R}$-матриц совпадают и блочная структура многнитевых матриц Рака совпадает, то соответствующие матрицы Рака также совпадают.

5. Гипотеза о собственных значениях и симметрии матриц Рака. Для 3-нитевых кос в симметрических представлениях было получено [14] и позже доказано [17, 18], что из гипотезы о собственных значениях следует, что следующие матрицы Рака совпадают:

$$\begin{bmatrix} [r] & [r] & [a,b] \\ [r] & [l,m,n] & [x,y] \end{bmatrix} = \qquad (17)$$

$$\begin{bmatrix} [r+c] & [r+c] & [a+c,b+c] \\ [r+c] & [l+c,m+c,n+c] & [x+c,y+c] \end{bmatrix}.$$

В данном случае никаких других матриц Рака не появляется, из-за структуры произведения представлений, а именно, в тензорном произведении $[r]\otimes[r]$ возникают только одно- и двухрядные диаграммы Юнга. Соответственно, в тензорном кубе представления $[r]$ появляются только одно-, двух- и трехнитевые диаграммы Юнга. Уравнение (17) позволяет выразить все трехнитевые матрицы Рака для симметричных представлений из известных ответов для квантовой группы $U_q(sl_2)$ [11], путем подстановки $c = -n$.

В контексте данной статьи нас интересуют косы с большим числом нитей. Мы по-прежнему будем рассматривать только симметрические представления, так как для несимметрических представлений некоторые из собственных значений $\mathcal{R}$-матриц начинают совпадать, что делает гипотезу о собственных значениях неразрешимой в смысле уравнения (15). Тем не менее, известные ответы для матриц Рака показывают, что гипотеза о собственных значениях выполняется также и в этом случае, хотя его рассмотрение находится за пределами данной статьи.

Основное утверждение данной работы состоит в том, что из 4-нитевой гипотезы о собственных значениях следует, что следующие матрицы Рака должны совпадать:

$$\begin{bmatrix} [r] & [p,q] & [a,b,d] \\ [r] & [k,l,m,n] & [x,y,z] \end{bmatrix} = \qquad (18)$$

$$\begin{bmatrix} [r+c] & [p+c,q+c] & [a+c,b+c,d+c] \\ [r+c] & [k+c,l+c,m+c,n+c] & [x+c,y+c,z+c] \end{bmatrix},$$

и аналогичным образом для большего числа нитей:

$$\begin{bmatrix} [r] & [p_1,\dots p_i] & [a_1,\dots a_{i+1}] \\ [r] & [k_1,\dots k_{i+2}] & [x_1,\dots x_{i+1}] \end{bmatrix} = \qquad (19)$$

$$= \begin{bmatrix} [r+c] & [p_1+c,\dots p_i+c] & [a_1+c,\dots a_{i+1}+c] \\ [r+c] & [k_1+c,\dots k_{i+2}+c] & [x_1+c,\dots x_{i+1}+c] \end{bmatrix}.$$

Для объяснения таких соотношений нужно проверить две вещи. Во-первых, мы объясним, почему структура тензорного произведения представлений и, таким образом, блочная структура матриц Рака совпадает. Во-вторых, мы объясним, почему нормированные собственные значения также совпадают.

Для того, чтобы понять, почему тензорное произведение представлений сохраняется, докажем следующее свойство тензорного произведения представлений:

$$[a_1,\dots,a_{n+1}] \in [p_1,\dots,p_n]\otimes[r]$$
$$\Updownarrow$$
$$[a_1+1,\dots,a_{n+1}+1] \in [p_1+1,\dots,p_n+1]\otimes[r+1]. \qquad (20)$$

В этой формуле некоторые из элементов диаграммы Юнга могут равняться нулю. Для доказательства данного утверждения нужно понять, какие представления появляются в тензорном произведении представлений. По существу [2], $[a_1,\dots,a_{n+1}] \in$ $\in [p_1,\dots,p_n]\otimes[r]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_i \le p_i + r \\ p_{i-1} \ge a_i \ge p_i \\ a_1 \ge r \\ \sum a_i = r + \sum p_i \end{cases}. \qquad (21)$$

Первое из соотношений на самом деле заменяется последней, так как ни один из элементов a_i не может стать меньше p_i, а весь размер диаграммы изменяется на r. Если мы добавим или вычтем по единице из каждого элемента диаграмм Юнга, то все эти свойства, кроме первого, сохранятся тождественно, что показывает, что (20) действительно выполняется.

Из (20) следует, что если к каждому элементу всех диаграмм Юнга добавить по единице, то все дерево представлений, как на рис. 2–4, не изменится, и, следовательно, блочная структура матриц Рака также не изменится.

Чтобы объяснить основное утверждение данной статьи, (18) и (19), нам также нужно, чтобы нормированные собственные значения $\mathcal{R}$-матриц совпадали. Если выбрать представление $[2r-a,a]$ из произведения двух представлений $[r]$, то соответствующее собственное значение равно

$$\lambda_{[2r-a,a]} = q^{\varkappa_{[2r-a,a]}-4\varkappa_{[r]}-Nr} = q^{a^2-2ra}q^{r-Nr}. \quad (22)$$

Если добавить по единице к каждому элементу диаграмм Юнга, то получается

$$\lambda_{[2r-a+1,a+1]} = q^{\varkappa_{[2r-a+1,a+1]}-4\varkappa_{[r+1]}-Nr} = \\ = q^{a^2-2ra}q^{-r+1-Nr-N}. \quad (23)$$

Так как нас интересуют нормированные собственные значения, то часть, не зависящая от a, не влияет на ответ, а зависимость от a не меняется. Таким образом, набор нормированных собственных значений также совпадает.

Таким образом, мы показали, что блочная структура матриц Рака сохраняется и набор собственных значений $\mathcal{R}$-матриц также сохраняется, если добавить по единице ко всем элемента диаграмм Юнга. Поэтому равенства (18) и (19) также верны.

6. Заключение. В данной статье мы обсудили симметрии матриц Рака и $6j$-символов, вытекающие из многонитевой гипотезы о собственных значениях. Это позволило нам получить новые симметрии квантовых $6j$-символов, которые гораздо сложнее получить с помощью более простой трехнитевой гипотезы о собственных значениях. Мы получили новые симметрии, включающие несимметричные представления. Это важный шаг на пути к пониманию структуры квантовых матриц Рака и, соответственно, к пониманию теории представлений квантовых групп. Также такие матрицы Рака можно применять ко многим другим задачам теоретической и математической физики, в частности, в теории узлов.

В данной статье мы обсуждали только косы с симметричными представлениями. Однако случаи с несимметричными представлениями гораздо интереснее. В этом случае в $\mathcal{R}$-матрицах появляются кратности, а это означает, что некоторые собственные значения начинают совпадать. Это, конечно, значительно усложняет понимание структуры матриц Рака из-за дополнительной свободы в уравнении (15). Однако эти матрицы, по-видимому, также обладают блочной структурой, как это было описано в [34]. Это делает ее похожей на матрицы Рака, представленные в этой статье. Такую связь еще предстоит изучить более подробно.

Мы благодарны А. Слепцову и Н. Целоусову за очень полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда # 20-12-00195.

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press, London, Paris (1997).
2. A. Klimyk and K. Schmudgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Springer, Berlin Heidelberg (2012).
3. D. Bernard and O. Babelon, Phys. Lett. B **375**, 89 (1996); arXiv:q-alg/9511019.
4. R. Gambini, J. M. Aroca, and H. Fort, Phys. Rev. D **58**, 045007 (1998); arXiv:1407.5643.
5. E. R. Livine, Ann. Henri Poincare **18**, 1465 (2017); arXiv:1610.02716.
6. N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, Commun. Math. Phys. **127**, 1 (1990).
7. V. G. Turaev and O. Ya. Viro, Topology **31**, 865 (1992).
8. V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, in *De Gruyter Studies in Mathematics*, De Gruyter, Berlin, Boston (1994).
9. R. K. Kaul, P. Ramadevi, and T. R. Govindarajan, Nucl. Phys. B **402**, 548 (1993); arXiv:hep-th/9212110.
10. H. Jockers and J. Gu, Commun. Math. Phys. **338**, 393 (2015); arXiv:1407.5643.
11. A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Representations of the algebra $U_q(sl_2)$, q-orthogonal polynomials and invariants of links*, in *New Developments in the Theory of Knots. Advanced Series in Mathematical Physics*, World Scietific Publishings Co. Pte. Ltd., Singapore (1990), v. 11, p. 202.
12. S. Nawata, P. Ramadevi, and Zodinmawia, Lett. Math. Phys. **103**, 1389 (2013); arXiv:1302.5143.
13. V. Alekseev, An. Morozov, and A. Sleptsov, Nucl. Phys. B **960**, 115164 (2020); arXiv:1912.13325.
14. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1340009 (2013); arXiv:1209.6304.
15. A. Mironov and A. Morozov, Eur. Phys. J. C **78**(4), 284 (2018); arXiv:1610.03043.
16. A. Anokhina and An. Morozov, Teor. Mat. Fiz. **178**, 3 (2014); arXiv:1307.2216.
17. An. Morozov and A. Sleptsov, Pis'ma v ZhETF **108**(10), 721 (2018); arXiv:1905.01876.
18. V. Alekseev, An. Morozov, and A. Sleptsov, Lett. Math. Phys. **111**, 50 (2021); arXiv:1909.07601.

19. S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov, Phys. Rev. D **97**, 126015 (2018); arXiv:1805.03916.
20. V. Mishnyakov, A. Sleptsov, and N. Tselousov, Ann. Henri Poincare **22**, 1235 (2021); arXiv:2001.10596.
21. V. Mishnyakov, A. Sleptsov, and N. Tselousov, Commun. Math. Phys. **384**, 955 (2021); arXiv:2005.01188.
22. E. Lanina, A. Sleptsov, and N. Tselousov, Phys. Lett. B **823**, 136727 (2021); arXiv:2105.11565.
23. E. Lanina and A. Sleptsov, arXiv:2210.07874.
24. S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov, Phys. Rev. D **97**, 126015 (2018); arXiv:1711.10952.
25. V. G. Turaev, Invent. Math. **92**, 527 (1988).
26. N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, Commun. Math. Phys. **127**, 1 (1990).
27. N. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invent. Math. **103**, 547 (1991).
28. A. Morozov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **835**, 284 (2010); arXiv:1001.2003.
29. A. Smirnov, *Notes on Chern-Simons Theory in the Temporal Gauge*, The Subnuclear Series, The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier, *Proceedings of the International School of Subnuclear Physics, Erice, Sicily, Italy* (2011), v. 47, p. 489; arXiv:0910.5011.
30. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654.
31. M. D. Gould, Lett. Math. Phys. **24**(3), 183 (1992).
32. N. Yu. Reshetikhin, *Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I, II*, LOMI-E-87-4, LOMI-E-87-17 (1998).
33. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations*, ed. by A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, and E. Scheidegger, *Strings, gauge fields, and the geometry behind: The legacy of Maximilian Kreuzer*, World Scietific Publishins Co. Pte. Ltd., Singapore (2013), p. 101; arXiv:1112.5754.
34. L. Bishler, An. Morozov, A. Sleptsov, and Sh. Shakirov, Int. J. Mod. Phys. A **33**(17), 1850105 (2018); arXiv:1712.07034.