

“Капиллярные” структуры в поперечно захваченных нелинейных оптических пучках

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 27 декабря 2022 г.

После переработки 14 января 2023 г.

Принята к публикации 17 января 2023 г.

Математическая аналогия между параксиальной оптикой с двумя круговыми поляризациями света в дефокусирующей Керровской среде с положительной дисперсией, бинарными бозе-конденсатами холодных атомов в режиме разделения фаз, и гидродинамикой двух несмешивающихся сжимаемых жидкостей способна помочь в теоретических поисках ранее неизвестных трехмерных когерентных оптических структур. В данной работе рассмотрены поперечно захваченные (плавным профилем показателя преломления) пучки света и приведены такие новые численные примеры, как “плавающая капля”, прецессирующий продольный оптический вихрь с неоднородным профилем заполнения второй компонентой, а также комбинация капли и вихревой нити. Кроме того, промоделированы поперечные по отношению к оси пучка заполненные вихри, распространяющиеся на большие расстояния.

DOI: 10.31857/S1234567823040080, EDN: piwlzm

Введение. Как известно, уравнения параксиальной оптики, описывающие распространение двух взаимодействующих круговых поляризаций света в диэлектрике с Керровской нелинейностью [1–4], в полностью дефокусирующем случае математически эквивалентны связанным уравнениям Гросса–Питаевского для бинарного бозе-конденсата в режиме пространственного разделения фаз [5–11]. В свою очередь, поведение бозе-конденсатов на относительно больших масштабах во многом соответствует классической гидродинамике. В физике ультра-холодных газовых смесей был теоретически обнаружен ряд явлений, которые аналогичны поведению несмешивающихся классических жидкостей. В частности, благодаря эффективному поверхностному натяжению [8, 12] возможны такие “капиллярные” явления как динамика пузырей [13], аналоги классических гидродинамических неустойчивостей (Кельвина–Гельмгольца [14–16], Рэлея–Тейлора [17–19], Плато–Рэлея [20]), параметрическая неустойчивость капиллярных волн на границе раздела фаз [21, 22], сложные текстуры во вращающихся бинарных конденсатах [23–25], трехмерные топологические структуры [26–29], капиллярная плавучесть капель в захваченных несмешивающихся бозе-конденсатах [30], вихри с заполненной сердцевинкой [7, 31–38], и т.д. Многое из вышеперечисленного должно, по идее, осуществляться и в нелинейной оптике, хотя пока еще

далеко не все было обнаружено экспериментально в оптических лабораториях. Но, по крайней мере, домены поляризации света известны достаточно давно (для случая встречных волн см. [39, 40], а для сонаправленных волн – [41–45]).

Надо сказать, что концепция поверхностного натяжения позволяет проводить качественный анализ многих структур указанного типа, что особенно ценно для трехмерных конфигураций. Эта концепция фактически соответствует режиму предельно сильной нелинейности и оказывается в ряде случаев незаменимым (и чуть ли не единственным) инструментом исследования, помимо собственно гидродинамического приближения. В данной работе, на основе недавних достижений в области холодных газов и с привлечением присущего почти всякому человеку интуитивного понимания свойств капиллярности (накопленного повседневным опытом), будут рассмотрены некоторые важные аспекты таких ранее известных двухкомпонентных объектов, как заполненные оптические вихри [43–47]. Кроме того, будут численно “сконструированы” три, по-видимому, новые трехмерные капиллярные структуры в поперечно захваченных оптических пучках: простая плавающая капля, прецессирующая плавающая капля с присоединенными к ней продольными вихревыми нитями, а также поперечные по отношению к оси пучка заполненные вихри.

Модель. Необходимо сразу же отметить то несущественное по большому счету отличие, что эволюционной переменной в оптике вместо времени t

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

обычно служит дистанция ζ вдоль оси пучка, а роль третьей “пространственной” координаты играет “запаздывающее” время $\tau = t - \zeta/v_{\text{gr}}$. Поэтому иногда требуется некоторое усилие, чтобы осознать четырехмерную картину явления. В частности, это замечание касается движения квантованных вихрей, которые могут быть по-разному ориентированы в пространстве (x, y, τ) .

Пусть имеется диэлектрическая среда с изотропным законом дисперсии линейных оптических волн $k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega/c$ и с дефокусирующей Керровской нелинейностью. Будем полагать дисперсию групповой скорости аномальной (то есть $k''(\omega) < 0$ в некотором диапазоне). Зафиксируем несущую частоту ω , соответствующее ей волновое число k_0 и вторую производную k_0'' . Предположим также, что линейная по электрическому полю часть диэлектрической проницаемости в интересующей нас области пространства слегка неоднородна и на частоте ω имеет приблизительно параболический двумерный профиль:

$$\varepsilon_{\text{lin}} = \varepsilon[1 + \nu^2(2 - (x^2 + \kappa^2 y^2)/R^2)], \quad (1)$$

с малым безразмерным параметром $\nu \ll 1$ и относительно большим параметром длины $R \gg 1/k_0$ (характерной шириной светового пучка). Коэффициент κ задает поперечную геометрическую анизотропию такого плавного волновода (для определенности, $\kappa \geq 1$). Подобная среда ранее была рассмотрена, например, в работе [48] (для одной поляризации света).

Здесь исследуется оптический пучок при наличии обеих поляризаций. В надлежащем образом обезразмеренных переменных мы имеем следующую систему уравнений для медленных комплексных огибающих $A_{1,2}(x, y, \tau, \zeta)$, отвечающих правой и левой круговым поляризациям света:

$$i \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \zeta} = \left[-\frac{1}{2} \Delta + V(x, y) + |A_{1,2}|^2 + g_{12}|A_{2,1}|^2 \right] A_{1,2}, \quad (2)$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_\tau^2$ — трехмерный оператор Лапласа в “координатном” пространстве (x, y, τ) . Данные уравнения легко выводятся по аналогии с параграфом “Самофокусировка” в книге Ландау и Лифшица “Электродинамика сплошных сред”, если в формулу

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} + \beta(\omega)\mathbf{E}^2 \mathbf{E}^* \quad (3)$$

подставить выражение для электрического поля в терминах круговых поляризаций,

$$\mathbf{E} = [(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)A_1 + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)A_2]/\sqrt{2}, \quad (4)$$

а затем проделать все остальные выкладки (с учетом второй производной по времени) и произвести

следующее перемасштабирование: $\zeta = (\nu/R) \cdot \zeta_{\text{old}}$, $\{x, y\} = \sqrt{\nu k_0/R} \cdot \{x, y\}_{\text{old}}$, $\tau = \sqrt{\nu/(R|k_0''|)} \cdot \tau_{\text{old}}$, а также $A_{1,2} = \sqrt{k_0 R |\alpha|/(2\nu\varepsilon)} \cdot A_{1,2}^{(\text{old})}$.

Заметим попутно, что если выбрать базис в виде линейно (или эллиптически) поляризованных волн, то в соответствующих уравнениях появятся дополнительные члены с четырех-волновым смешением, что менее удобно для исследования. Нелинейность является дефокусирующей в случае отрицательных α и β . Параметр перекрестной фазовой модуляции $g_{12} = 1 + 2\beta/\alpha$ зависит от вещества; в типичном случае он равен 2. Дефокусирующий характер нелинейности и условие сильного перекрестного отталкивания $g_{12} > 1$ подразумевают режим разделения фаз. Другими словами, при интенсивностях света $|A_{1,2}|^2 \sim I$ в (x, y, τ) -пространстве на масштабах $l \gg 1/\sqrt{I}$ спонтанно образуются домены с противоположными круговыми поляризациями [41–45]. Начальной стадией такого процесса часто является специфическая модуляционная неустойчивость состояний с линейной или эллиптической поляризацией. Геометрическая форма этих областей в общем случае эволюционирует с увеличением ζ , чему в гидродинамической аналогии соответствует динамика во времени. Толщина $w \sim 1/\sqrt{I}$ доменных стенок при этом оказывается порядка обратной типичной амплитуды, а коэффициент поверхностного натяжения $\sigma \sim I^{3/2}$.

Эффективный внешний потенциал $V(x, y)$ в уравнениях (2) пропорционален (со знаком минус) отклонению $\tilde{\varepsilon}(x, y)$ диэлектрической проницаемости от постоянного значения. В нашем случае

$$V(x, y) = (x^2 + \kappa^2 y^2)/2 - \mu, \quad \mu = \nu k_0 R. \quad (5)$$

Неоднородность $\tilde{\varepsilon}$ необходима для поперечного удержания оптического пучка, подверженного дифракции и нелинейной расфокусировке. В принципе, показатель преломления может зависеть и от ζ , но только достаточно медленно для физической применимости рассматриваемого приближения. Если сравнивать с бозе-конденсатами, то там для справедливости аналогии с оптикой потенциал ловушки должен зависеть не более чем от двух пространственных декартовых координат и (возможно) времени. Мы далее сосредоточимся на чисто двумерном потенциальном “желобе” вида (5). В “равновесии”, когда функции $A_{1,2}$ не зависят от ζ , протяженность светового пучка по переменной τ оказывается таким образом бесконечной. Кстати, это сразу же наводит на мысль, что возможные двумерные решения (не зависящие от τ) должны быть неустойчивыми — трудно себе вообразить стабильную продольную доменную стенку в такой ситуации; скорее представляются чередующи-

еся вдоль оси τ домены с поперечными стенками. С другой стороны, инкремент продольной неустойчивости будет очень малым для длинноволновых возмущений (т.е. имеющих малые частоты), и их амплитуды сильно вырастут только на достаточно больших ζ , когда в двумерной динамике уже случится много событий.

Параметр μ (в теории бозе-конденсатов это безразмерный химический потенциал) будет у нас характеризовать уровень нелинейности фонового состояния оптического поля ($I_1 \sim \mu$). Он будет предполагаться достаточно большим, чтобы поперечный размер пучка $R_\perp \sim \sqrt{\mu}$ во много раз превышал характерную толщину доменных стенок w и сердцевину ξ квантованных вихрей: $w \sim \xi \sim 1/\sqrt{\mu}$. С другой стороны, слишком большие мощности на практике могут оказаться нежелательными. Поэтому в численных примерах мы будем брать умеренную величину $\mu = 6.0$.

Необходимо еще сказать, что малость параметра ν призвана обеспечить условия применимости квазимонохроматического приближения, поскольку в исходных размерных переменных характерная ширина вихрей и доменных стенок по поперечным координатам оценивается как $w_\perp \sim (\nu k_0)^{-1} \gg 1/k_0$, а по временной координате — как $w_\tau \sim \sqrt{|k_0''|/k_0}/\nu$. Поэтому (аномальная) дисперсия не должна быть слишком слабой, чтобы соблюдалось условие $w_\tau \gg 1/\omega$.

Реалистическими выглядят значения параметров $\nu \sim 0.03$ и $k_0 R \sim 200$, что составляет около 30-ти длин волн (на толщину вихрей и доменных стенок тогда приходится около 5-ти длин волн). Характерная дистанция вдоль пучка R/ν оказывается в районе тысячи длин волн, что составляет величину около миллиметра. Интервалу ζ в несколько сотен безразмерных единиц соответствуют десятки сантиметров. В принципиальном отношении рассматриваемая здесь система похожа на то, что в английской терминологии называется *graded-index highly multimode optical fibers*, хотя там пучки света, как правило, не столь широкие — всего в несколько длин волн (см., например, [49, 50–53] и ссылки там). Более важное отличие состоит в дефокусирующем характере нелинейности в нашем случае, тогда как обычные оптические волокна делают из материалов с фокусирующей нелинейностью. По этой причине быстро проверить предсказания нашей теории на эксперименте, скорее всего, не получится. Потребуются специальные усилия на создание образца с нужными свойствами. Важно, что нет принципиального запрета на существование дефокусирующего Керровского диэлектрика с аномальной дисперсией

и плавным профилем показателя преломления (см., например, [48]). А поскольку численные решения для таких систем оказываются очень интересными, эти теоретические результаты заслуживают серьезного внимания.

Численный метод. Система уравнений (2) решалась численно в кубической области $(4\pi)^3 \approx (12.6)^3$ с периодическими граничными условиями по переменным (x, y, τ) методом Фурье второго порядка с расщепленным шагом по переменной ζ . Точность вычислений контролировалась сохранением гамильтониана системы до 6-го десятичного знака. Близкие к стационару состояния при $\zeta = 0$ приготавливались методом распространения в мнимом времени (*imaginary-time propagation*). Другими словами, в левых частях уравнений (2) вместо i ставилась -1 и такая диссипативная динамика считалась на определенном конечном псевдовременном интервале. При этом добавлялась некоторая положительная поправка $\delta\mu_2$ к химическому потенциалу второй компоненты. Величина этой добавки, а также затравочные профили обеих волновых амплитуд подбирались методом проб и ошибок до получения желаемой “массы” второй компоненты. В результате такой диссипативной процедуры жесткие возбуждения оказывались сильно подавлены, тогда как интересующие нас мягкие степени свободы не успевали отрелаксировать. Только после этого запускался счет непосредственно консервативной системы (2).

Далее будут представлены несколько содержательных численных примеров.

Плавающая капля. Начнем с простейшего случая, когда почти весь пучок (с параметром поперечной анизотропии $\kappa^2 = 2$) состоит из первой компоненты, а на нем плавает капля второй компоненты (см. пример на рис. 1, где доменная стенка видна как провал суммарной интенсивности). Квантованные вихри отсутствуют. В результате релаксации в мнимом времени на этапе приготовления исходного состояния получается близкая к статической начальная конфигурация. Форма капли испытывает небольшие колебания с течением условного “времени” ζ . Такое ее поведение интуитивно понятно, так как мы имеем здесь натуральную механическую систему, в которой достигается минимум потенциальной энергии при заданных полных “массах” обеих компонент, и совершаются малые колебания вблизи этого минимума. Однако необходимо отметить, что слишком массивная капля оказывается неустойчивой, и в результате она заполняет собой все сечение пучка на некотором его участке (такая простая квазиодномерная структура здесь не показана).

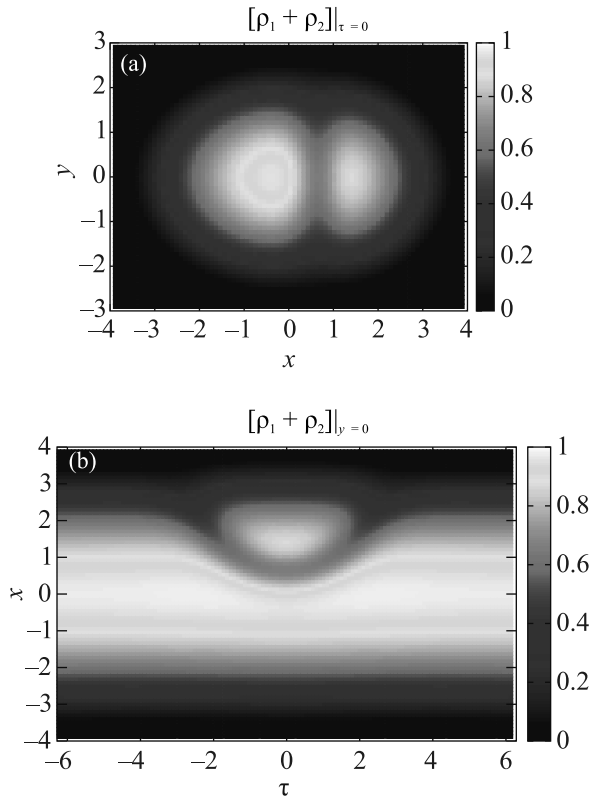


Рис. 1. (Цветной онлайн) Численный пример светового пучка с “плавающей каплей” при значении переменной $\zeta = 300$. Цветом показана суммарная нормированная плотность $\rho_1 + \rho_2 = (I_1 + I_2)/\mu$: (a) – в поперечном сечении пучка плоскостью $\tau = 0$; (b) – в продольном сечении плоскостью $y = 0$.

Продольный вихрь с неоднородным заполнением. Весьма интересные численные решения получаются, если удерживающий потенциал осесимметричен ($\kappa = 1$), а при $\zeta = 0$ имеется продольно ориентированный (однократный) оптический вихрь с заполненной сердцевинкой, расположенный на небольшом расстоянии от оси пучка. При наличии малой исходной неоднородности развивается так называемая сосисочная неустойчивость, обусловленная поверхностным натяжением и приводящая к образованию пузыря в форме веретена, с присоединенными к нему двумя вихревыми нитями – входящей и выходящей (см. обсуждение этого явления в [36]). При умеренном количестве второй компоненты формирование и распад пузыря могут повторяться несколько раз. Вихрь при этом прецессирует вокруг оси пучка. Можно сразу запустить вихрь с более-менее подходящим неоднородным заполнением, и тогда пузырь примерно сохраняет свою форму, вращаясь вокруг оси пучка (см. видео [54], где показана динамика условной поверхности, определяющей сердцевину

пухля; цвет соответствует x -координате). Таким образом, сосисочная неустойчивость насыщается, и формируется прецессирующий трехмерный вихрь-солитонный комплекс, пример которого показан на рис. 2. Видно, что протяженность второй компонен-

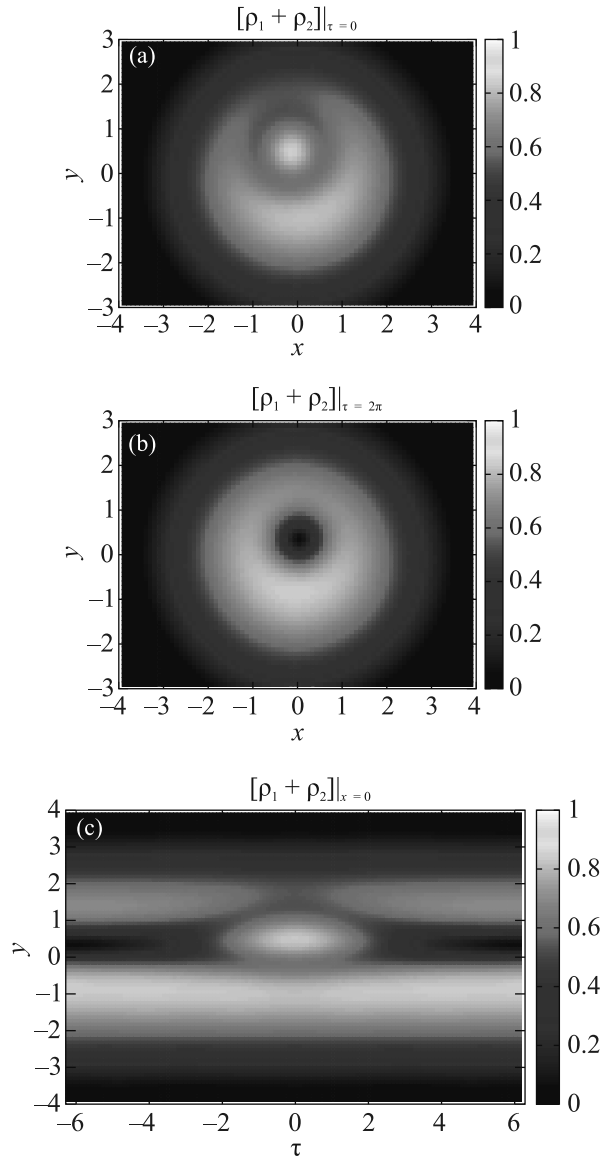


Рис. 2. (Цветной онлайн) Световой пучок с прецессирующим вихрь-солитонным комплексом при $\kappa = 1$ и $\zeta = 228$: (a) – поперечное сечение пучка плоскостью $\tau = 0$; (b) – поперечное сечение пучка плоскостью $\tau = 2\pi$; (c) – продольное сечение плоскостью $x = 0$

ты вдоль пучка практически конечна – она вся “выдавливается” поверхностным натяжением из оставшейся части вихря в пузырь. Поскольку в численном эксперименте данный комплекс распространяется на сотни единиц по переменной ζ и при этом поддер-

гается действию “нестационарных” возмущений без ущерба для своей целостности, можно сделать предположение о его устойчивости. Впрочем, этот вопрос требует дальнейшего исследования. Данный пример представляет собой нетривиальное обобщение структуры, ранее известной для однородной среды (без удерживающего внешнего потенциала) [43–47].

Стоит еще упомянуть, что если при $\zeta = 0$ придать второй компоненте некоторую продольную “скорость” u (умножив A_2 на $\exp(iu\tau)$, что в действительности означает небольшое уменьшение частоты второй компоненты), то солитон получается движущимся, а вся структура в целом – несколько скрученной (см. видео [55]).

Плавающая капля с присоединенными вихревыми нитями. По иному сценарию происходит эволюция при достаточно большом заполнении исходного вихря. В этом случае на вихре собирается массивный пузырь в форме лимона, а затем его прецессия теряет устойчивость. Пузырь всплывает на поверхность пучка и превращается в плавающую каплю с присоединенными к ней двумя пустыми вихревыми нитями. После переходных процессов система опять-таки выходит на почти стационарную прецессию вокруг оси пучка (см. видео [56]). Соответствующий пример показан на рис. 3. Очевидно, что никакими существующими аналитическими методами построить такое сложное решение невозможно. Однако будучи получено численно, оно выглядит вполне естественно и убедительно.

Поперечные вихри с заполнением. Наконец, используем ту возможность, что вихри могут быть ориентированы, вообще говоря, произвольно в пространстве (x, y, τ) , в том числе и поперек пучка. Вычисления показали, что подобные поперечные конфигурации являются долгоживущими. На рисунке 4 в качестве примера представлена ситуация с двумя противоположными поперечными вихрями; второй вихрь нужен, чтобы удовлетворить периодическому граничному условию по переменной τ . Один из вихрей заполнен, а второй практически пустой. В данном численном эксперименте расстояние между вихрями периодически менялось, но их тесного сближения не происходило (см. видео [57]). Кроме того, поскольку сначала центр масс второй компоненты находился выше плоскости $y = 0$, в процессе распространения имели место медленные колебательные движения второй компоненты вдоль оси y . Эти вертикальные смещения видны на рис. 4.

Динамика при наличии большого числа таких вихрей пока не моделировалась, поскольку тогда потребовалась бы достаточно длинная вычислительная

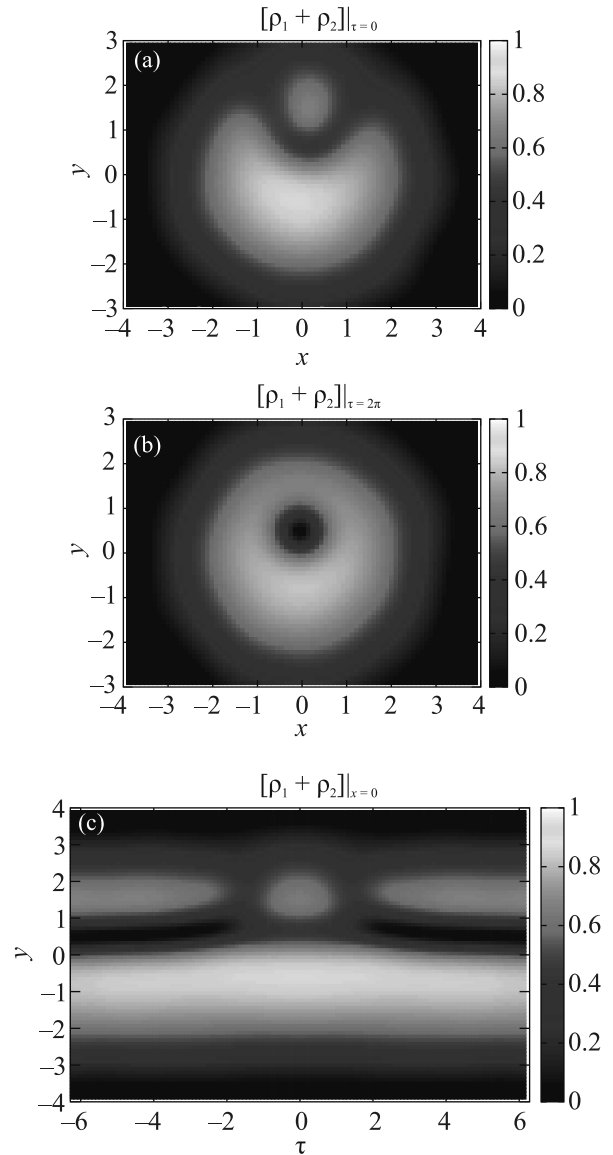


Рис. 3. (Цветной онлайн) Прецессирующая плавающая капля с присоединенными вихревыми нитями при $\kappa = 1$ и $\zeta = 253$: (a) – поперечное сечение пучка плоскостью $\tau = 0$; (b) – поперечное сечение пучка плоскостью $\tau = 2\pi$; (c) – продольное сечение плоскостью $x = 0$

область по переменной τ . Эта задача остается в планах на будущее.

Интересно отметить, что последовательность подобных поперечных вихрей способна нести информацию, так как заполнение каждого вихря сохраняется в течение долгого времени и может служить основой кодирования. Насколько это свойство может оказаться пригодным с практической точки зрения, пока не ясно.

Заключение. Таким образом, в этой работе концепция поверхностного натяжения применена к

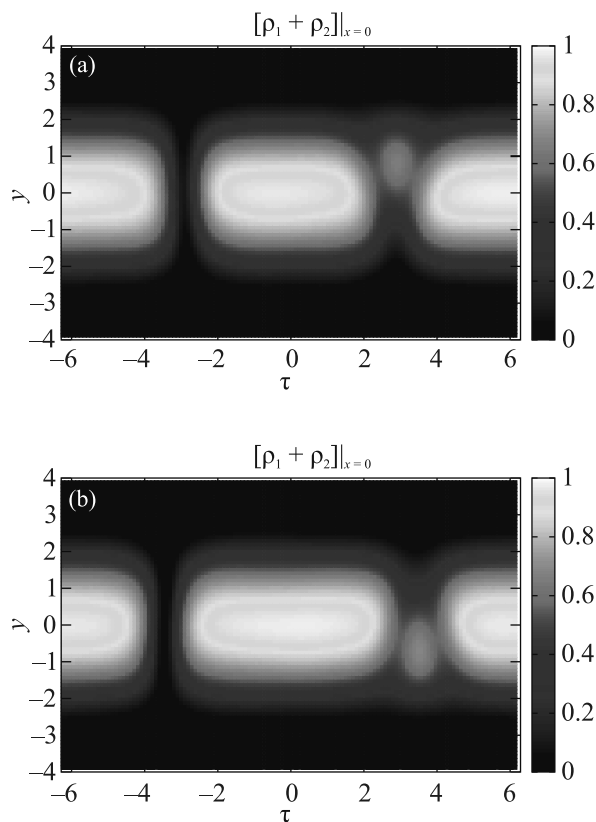


Рис. 4. (Цветной онлайн) Система двух поперечных вихрей при $\kappa^2 = 2$. Положительный и отрицательный вихри ориентированы вдоль оси y , а их сердцевины отличаются количеством захваченной второй компоненты. Показано продольное сечение пучка плоскостью $x = 0$ при: (a) $\zeta = 291$; (b) $\zeta = 300$

нелинейным и нестационарным оптическим пучкам, содержащим обе круговые поляризации. Найден численно ряд новых, существенно трехмерных комбинарованных когерентных структур, обусловленных разделением фаз.

Данное направление исследований представляет довольно перспективным и многообещающим, поскольку чуть ли не каждая осмысленная начальная конфигурация приводит к интересной последующей динамике. Например, в планах на будущее остается моделирование взаимодействия двух плавучих капель, соединенных вихревой нитью, а также рассмотрение динамики доменов поляризации при наличии поперечных вихрей на существенно непараболическом фоновом профиле интенсивности [в частности, в двух-ямном потенциале $V(x, y)$].

Стоит отметить, что взаимодействие между двумя поляризациями приводит к интересным структурам также и в системах с более сложно устроенной нелинейностью (см., например, [58, 59]).

Будут ли предсказанные здесь решения реализованы в эксперименте, покажет время. Как было отмечено выше, на уже существующих образцах это вряд ли получится, и подходящий экспериментальный материал придется готовить “с нуля”.

Автор благодарит Е. А. Кузнецова за ценное замечание, положившее начало этому исследованию.

Работа выполнена в рамках госзадания 0029-2021-0003.

1. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
2. Y. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, 1st ed., Academic Press, California, USA (2003).
3. V. E. Zakharov and S. Wabnitz, *Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1999).
4. B. A. Malomed, *Multidimensional Solitons*, AIP Publishing (online), Melville, N.Y. (2022), <https://doi.org/10.1063/9780735425118>.
5. T.-L. Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).
6. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).
7. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).
8. S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**, 140401 (2001).
9. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).
10. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).
11. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).
12. B. Van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).
13. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
14. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
15. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
16. H. Kokubo, K. Kasamatsu, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **104**, 023312 (2021).
17. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, Phys. Rev. A **80**, 063611 (2009).
18. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).
19. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).
20. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).
21. D. Kobayakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, Phys. Rev. A **86**, 023614 (2012).

22. D.K. Maity, K. Mukherjee, S.I. Mistakidis, S. Das, P.G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, *Phys. Rev. A* **102**, 033320 (2020).
23. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 150406 (2003).
24. K. Kasamatsu and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **79**, 023606 (2009).
25. P. Mason and A. Aftalion, *Phys. Rev. A* **84**, 033611 (2011).
26. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 250406 (2004).
27. H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Nitta, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 245301 (2012).
28. M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **85**, 053639 (2012).
29. K. Kasamatsu, H. Takeuchi, M. Tsubota, and M. Nitta, *Phys. Rev. A* **88**, 013620 (2013).
30. В. И. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 848 (2021).
31. K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, and L. S. Tuckerman, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 160405 (2010); Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **106**, 199903 (2011).
32. M. Pola, J. Stockhofe, P. Schmelcher, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **86**, 053601 (2012).
33. S. Hayashi, M. Tsubota, and H. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **87**, 063628 (2013).
34. A. Richaud, V. Penna, R. Mayol, and M. Guilleumas, *Phys. Rev. A* **101**, 013630 (2020).
35. A. Richaud, V. Penna, and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **103**, 023311 (2021).
36. В. И. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 539 (2021).
37. V. P. Ruban, W. Wang, C. Ticknor, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **105**, 013319 (2022).
38. В. И. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 450 (2022).
39. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **45**, 279 (1987).
40. S. Pitois, G. Millot, and S. Wabnitz, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1409 (1998).
41. M. Haelterman and A. P. Sheppard, *Phys. Rev. E* **49**, 3389 (1994).
42. M. Haelterman and A. P. Sheppard, *Phys. Rev. E* **49**, 4512 (1994).
43. A. P. Sheppard and M. Haelterman, *Opt. Lett.* **19**, 859 (1994).
44. N. Dror, B. A. Malomed, and J. Zeng, *Phys. Rev. E* **84**, 046602 (2011).
45. Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).
46. A. H. Carlsson, J. N. Malmberg, D. Anderson, M. Lisak, E. A. Ostrovskaya, T. J. Alexander, and Yu. S. Kivshar, *Opt. Lett.* **25**, 660 (2000).
47. A. S. Desyatnikov, L. Torner, and Yu. S. Kivshar, *Progress in Optics* **47**, 291 (2005).
48. S. Raghavan and G. P. Agrawal, *Opt. Commun.* **180**, 377 (2000).
49. S. Longhi, *Opt. Lett.* **28**, 2363 (2003).
50. A. Mafi, *J. Light. Technol.* **30**, 2803 (2012).
51. C. M. Arabi, A. Kudlinski, A. Mussot, and M. Conforti, *Phys. Rev. A* **97**, 023803 (2018).
52. T. Maytevarunyoo, B. A. Malomed, and D. V. Skryabin, *J. Opt.* **23**, 015501 (2020).
53. L. G. Wright, F. O. Wu, D. N. Christodoulides, and F. W. Wise, *Nat. Phys.* **18**, 1018 (2022).
54. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/27DEC2022/w1.avi>.
55. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/27DEC2022/w1a.avi>.
56. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/27DEC2022/w2.avi>.
57. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/27DEC2022/w3.avi>.
58. A. S. Desyatnikov and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 033901 (2001).
59. F. Bouchard, H. Larocque, A. M. Yao, C. Travis, I. De Leon, A. Rubano, E. Karimi, G.-L. Oppo, and R. W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 233903 (2016).