

Совместная система уравнений для супералгебры $\mathfrak{gl}(n|m)$ и интегрируемая модель Калоджеро–Мозера¹⁾

Е. Доценко²⁾

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Факультет математики, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 119048 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 декабря 2022 г.

После переработки 5 января 2023 г.

Принята к публикации 8 января 2023 г.

В письме определяется совместная система уравнений, построенная по супералгебре $\mathfrak{gl}(n|m)$, также устанавливается связь этой системы уравнений с интегрируемой системой частиц Калоджеро–Мозера.

DOI: 10.31857/S1234567823040122, EDN: pjszqw

Совместные системы дифференциальных уравнений возникают естественным образом в разных областях физики и математики. Монодромия совместных систем с одной стороны выделена тем, что она не зависит от небольших деформаций контура, вдоль которого она была вычислена, с другой стороны, сама матрица монодромии – это очень интересный объект. В этой связи очень важный пример был предложен Аароновым и Бомом [1], о набеге фазы электрона в нулевом магнитном поле вне цилиндрической области (недоступной для электрона), но с нетривиальным векторным потенциалом.

В современной теоретической/математической физике классическая ситуация, в которой возникают совместные системы уравнений – двумерная конформная теория поля, в частности, в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена корреляторы вершинных операторов удовлетворяют системе уравнений Книжника–Замолотчикова [2] (КЗ). Благодаря работам Мацуо [3] и Чередника [4] известно, что уравнения КЗ тесно связаны с системой Калоджеро–Мозера. Также известно, что у уравнений КЗ имеется близкий родственник – связность Казимира, открытая Де-Кончини, Миллсоном и Толедано–Ларедо [5]. Казимировская связность определяется тем, что коммутирует с уравнениями КЗ. Текущая заметка посвящена определению связности Казимира для $\mathfrak{gl}(n|m)$ супералгебры и установлению соответствия Мацуо–Чередника в этом случае.

Некоторые сведения о $\mathfrak{gl}(n|m)$. Здесь мы приводим кратко основную информацию о $\mathfrak{gl}(n|m)$ супералгебре.

Пусть $\mathcal{J} = \{1, \dots, n + m\}$ и пусть $p : \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\begin{cases} p(a) = 0, a \leq n \text{ (бозоны)}, \\ p(a) = 1, a > n \text{ (фермионы)}. \end{cases} \quad (1)$$

Алгебра $\mathfrak{gl}(n|m)$ порождена e_{ab} , где $a, b \in \mathcal{J}$ со следующими соотношениями

$$\begin{aligned} e_{ab}e_{cd} - (-1)^{p(e_{ab})p(e_{cd})}e_{cd}e_{ab} = \\ = \delta_{bc}e_{ad} - (-1)^{p(e_{ab})p(e_{cd})}\delta_{da}e_{cb}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$p(e_{ab}) = p(a) + p(b) \pmod 2. \quad (3)$$

Тензорное \otimes произведение представлений супералгебр определено так, что для операторов, собственных для оператора четности, и действующих нетривиально только в i^{th} и в j^{th} тензорном сомножителе выполнено следующее

$$A^{(i)}B^{(j)} = (-1)^{p(A)p(B)}B^{(j)}A^{(i)}. \quad (4)$$

В $\mathbb{C}^{n|m}$ имеется базис e_a , что $e_{ab}(e_c) = \delta_{bc}e_a$, означает что e_{ab} – матричные единицы.

Пусть $x, y \in \mathbb{C}^{n|m}$ с определенными $p(x)$ и $p(y)$, тогда градуированная перестановка действует следующим образом:

$$P_{12}(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)}y \otimes x. \quad (5)$$

Совместная система уравнений. Уравнения КЗ на функцию $|\Psi\rangle$, принимающую значения в

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru.

²⁾e-mail: edotsenko95@gmail.com

$V = \bigotimes_{i=1}^k \mathbb{C}^{n|m}$, где $\mathbb{C}^{n|m}$ – векторное представление $\mathfrak{gl}(n|m)$ имеют вид

$$\left(\kappa \partial_{z_i} - \sum_c \lambda_c e_{cc}^{(i)} - \sum_{j, j \neq i} \frac{P_{ij}}{z_i - z_j} \right) |\Psi\rangle = 0, \quad (6)$$

где градуированная перестановка $P_{ij} = \sum_{a,b} (-1)^{p(b)} e_{ab}^{(i)} e_{ba}^{(j)}$ и $p(a)$ – функция четности, опеределенная в Дополнительных материалах. $e_{ab}^{(j)}$ – генератор $\mathfrak{gl}(n|m)$, который нетривиально действует только в $i^{\text{том}}$ тензором сомножителе V как матричная единица в некотором базисе (см. Дополнительные материалы).

Одно из центральных утверждений настоящего письма состоит в том, что *следующая система уравнений совместна и коммутирует с (6)*

$$\left(\kappa \partial_a - \sum_j z_j e_{aa}^{(j)} - \sum_{b, b \neq a} (-1)^{p(b)} \frac{E_{ab} E_{ba} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_b} \right) |\Psi\rangle = 0, \quad (7)$$

где $E_{ab} = \sum_{j=1}^k e_{ab}^{(j)}$. Проверка этого утверждения приведена в Дополнительном материале.

Соответствие Мацуо–Чередника. В этом разделе мы зафиксируем $k = n + m$ в определении V .

Следующие ковекторы, построенные в [6], необходимы, чтобы установить соответствие Мацуо–Чередника для уравнений (7)

$$\langle \Omega^0 | = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \langle e_1 \otimes \dots \otimes e_{n+m} | P_\sigma, \quad (8a)$$

$$\langle \Omega^1 | = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \langle e_1 \otimes \dots \otimes e_{n+m} | (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} P_\sigma, \quad (8b)$$

где $P_\sigma = P_{s_{i_1}} \dots P_{s_{i_l}}$, где $P_{s_{i_j}}$ – это перестановка, которая отвечает транспозиции s_{i_j} и $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$ – некоторое разложение перестановки в произведение транспозиций. Так как $P_{s_{i_j}}$ удовлетворяет соотношениям в группе кос, то элемент P_σ корректно определен.

Проверим, что ковектора (8a) и (8b) являются собственными векторами для следующих операторов

$$\langle \Omega^i | (E_{ab} E_{ba} - E_{aa}) = (-1)^{p(b)+i} \langle \Omega^i |, \quad (9)$$

где $i = 0, 1$.

Для проверки можно рассмотреть векторы $|\Omega^i\rangle$ и доказать для них аналогичные свойства. Простое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} (E_{ab} E_{ba} - E_{aa}) |e_1 \otimes \dots \otimes e_{n+m}\rangle &= \\ &= (-1)^{p(b)} P_{ab} |e_1 \otimes \dots \otimes e_{n+m}\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Симметризуя или кососимметризуя правую часть (10), мы неизбежно получаем (9).

Легко видеть, что уравнения КЗ и Динамические уравнения коммутируют с операторами E_{aa} , поэтому можно на решение наложить следующее условие:

$$E_{aa} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (11)$$

Тогда для таких решений выполнено следующее

$$\begin{aligned} \left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial_{z_a}^2 + \sum_{a \neq b} \frac{(-1)^i \kappa - 1}{(z_a - z_b)^2} \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle &= \\ &= \left(\sum_{a=1}^{n+m} \lambda_a^2 \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial_{\lambda_a}^2 + \sum_{a \neq b} \frac{(-1)^i \kappa - 1}{(\lambda_a - \lambda_b)^2} \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle &= \\ &= \left(\sum_{a=1}^{n+m} z_a^2 \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (12b)$$

где $i = 0, 1$.

(12a) было доказано в [6], таким образом нам требуется доказать второе. Пусть D_a есть a -инфинитезимальный оператор (тот, что стоит в скобках в формуле (7)). Основное утверждение состоит в том, что

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Omega^i | \sum_{a=1}^n D_a^2 | \Psi \rangle = \\ &= \left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial_{\lambda_a}^2 + \sum_{a \neq b} \frac{(-1)^i \kappa - 1}{(\lambda_a - \lambda_b)^2} \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle - \\ &\quad - \left(\sum_{a=1}^{n+m} z_a^2 \right) \langle \Omega^i | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Подробности, связанные с этим вычислением, приведены в Дополнительных материалах.

1. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
2. V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **247**(1), 83 (1984).
3. A. Matsuo, Invent. Math. **110**, 95 (1992).
4. I. Cherednik, Adv. Math. **106**, 65 (1994).
5. V. T. Laredo, J. Algebra **329**(1), 286 (2011).
6. A. Grekov, A. Zabrodin, and A. Zotov, Nucl. Phys. B **939**, 174 (2019).