

# Расщепление солитонов в электроконвективной структуре нематического жидкого кристалла

В. А. Делев<sup>1)</sup>, О. А. Скалдин, Ю. И. Тимиров

Институт физики молекул и кристаллов Уфимского федерального исследовательского центра РАН,  
450075 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 14 ноября 2023 г.

После переработки 20 ноября 2023 г.

Принята к публикации 22 ноября 2023 г.

Изучаются особенности динамики топологических дефектов в электроконвективной структуре, возникающей в закрученном на  $\pi/2$  нематическом жидком кристалле. Электроконвективная структура (домены Вильямса) представляет собой систему роллов, аналогичную системе конвективных ячеек в термоконвекции. Гидродинамические потоки в роллах закрученного нематика носят геликоидальный характер, так как кроме тангенциальной компоненты скорости, имеется и аксиальная составляющая, направление которой противоположно в соседних роллах. Эта особенность приводит к образованию устойчивых локализованных протяженных образований – линейных дефектов, ориентированных нормально к доменам Вильямса. Условие неразрывности геликоидального потока анизотропной жидкости в закрученных нематиках не позволяет линейному дефекту распадаться на отдельные дислокации. Длина линейного дефекта и количество дислокаций в нем регулируются приложенным к ЖК-ячейке переменным напряжением. В отличие от случая планарной ориентации, когда с увеличением приложенного напряжения линейные дефекты распадаются на отдельные дислокации, здесь возникают зиг-заг осцилляции, при этом сама структура доменов остается стационарной. Границами зиг и заг областей в ядре линейного дефекта являются дислокации с топологическими зарядами  $S = \pm 1$ . В линейном дефекте определенной длины впервые обнаружен “элементарный” распад дислокации с топологическим зарядом  $S = +1$  (кинка) на дислокацию с  $S = -1$  (антикинка) и две дислокации с зарядами  $S = +1$ . Возможный механизм расщепления топологического дефекта связан с возникновением локальной неустойчивости ориентационной твист-моды директора  $\mathbf{n}$  в ядре дефекта, вызванной критическим ростом гидродинамических флуктуаций с увеличением приложенного напряжения. Показано, что обнаруженный распад топологического солитона качественно описывается в рамках возмущенного уравнения синус-Гордона с затуханием.

DOI: 10.31857/S1234567824010117, EDN: rnrbcd

Топологические дефекты возникают в различных средах при спонтанном нарушении определенных симметрий в результате фазовых переходов [1–10]. Например, в жидких кристаллах (ЖК) дефекты возникают при нарушении одноосной симметрии, космические струны в космологии образуются при нарушении осевой или цилиндрической симметрии [8]. Однако, несмотря на различное происхождение и природу, они представляют с собой макроскопические объекты и обладают общими свойствами [9].

В настоящее время наряду с изучением фундаментальных механизмов образования и разрушения надмолекулярного порядка, в которых дефекты играют ключевую роль [11, 12], активно обсуждаются возможности их технологического использования [13, 14].

Одной из наиболее комплиментарных сред для создания, наблюдения и изучения топологических дефектов являются ЖК [15–17]. В частности, топологические дефекты в нематических ЖК (НЖК) служат модельными системами в космологии для проверки теории образования Вселенной [8, 18, 19].

НЖК представляет собой анизотропную жидкость с дальним ориентационным порядком, характеризуемым единичным вектором – директором  $\mathbf{n}$  [16]. Топологическими дефектами в НЖК являются точечные особенности – локальные искажения ориентации в поле директора  $\mathbf{n}$ . В двумерном случае дефекты характеризуются топологическим зарядом  $S$ :

$$\oint dl \nabla \phi(x, t) = \pm 2\pi S, \quad (1)$$

где  $\phi$  – фаза параметра порядка, целое  $S \neq 0$  – сила, или топологический заряд дислокации.

<sup>1)</sup>e-mail: deleev@anrb.ru

Механизм образования пары топологических дефектов является универсальным для многих систем, где могут образовываться пространственно упорядоченные структуры [20].

Типичными элементарными дефектами электроконвективных (ЭК) структур в НЖК являются дислокации с топологическими зарядами  $S = \pm 1$ . Дефект с зарядом  $S = \pm 1$  соответствует скачку фазы на  $\pm 2\pi$  в структуре доменов Вильямса, т.е. его сингулярность определяется лишним (или недостающим) пространственным периодом  $T$  при обходе замкнутого контура вокруг его ядра [20].

Динамика и взаимодействие дислокаций в ЭК структурах планарно ориентированных НЖК достаточно хорошо изучены как теоретически, так и экспериментально [21–26]. Результаты этих работ свидетельствуют о важной роли дефектов при усложнении пространственно-временной динамики доменных структур в НЖК с увеличением электрического поля. В частности, установлено, что механизм отбора оптимального волнового числа при формировании ЭК структур непосредственно связан с процессами рождения и аннигиляции дислокаций.

Количественное описание динамики дислокаций из первых принципов сводится к получению системы амплитудных уравнений [24–26], которая требует значительных численных расчетов [27].

Другой подход для описания дислокаций в структурах НЖК базируется на модели Френкеля–Конторовой (ФК) – цепочки частиц, связанных гармоническими пружинами с коэффициентом жесткости и взаимодействующая с внешним периодическим потенциалом [28] (см. схематическое представление модели ФК на с. 2, рис. 1.1). Если в стандартной модели ФК пренебречь эффектами дискретности, то получится хорошо известное уравнение синус-Гордона (УСГ):

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (2)$$

где  $u$  – смещения частиц от их равновесного положения.

Данное уравнение является полностью интегрируемым и было одним из первых обнаруженных уравнений с многосолитонным решением, а первое приложение УСГ нашло в физике для построения упрощенных моделей дислокаций в металлах. В частности, движущаяся дислокация может быть описана решением УСГ в виде топологического солитона, или кинка:

$$u_k(x, t) = 4 \tan^{-1} \exp[-\sigma(x - vt)/\sqrt{1 - v^2}], \quad (3)$$

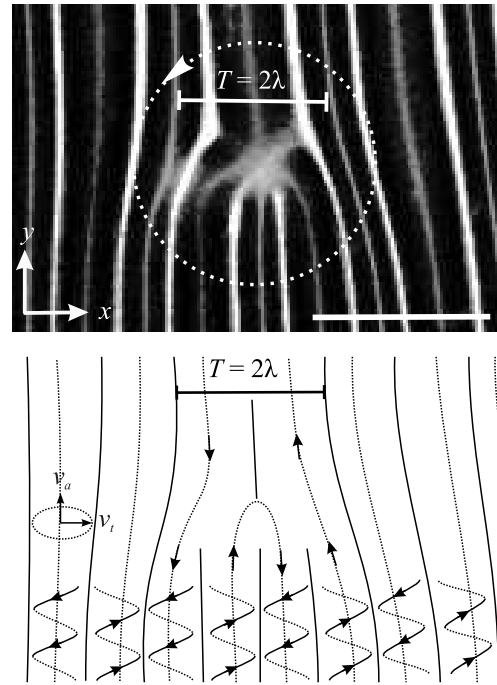


Рис. 1. Изображение дислокации с топологическим зарядом  $S = +1$  в ЭК структуре закрученного на  $\pi/2$  НЖК при  $U = 6.5$  В и  $f = 30$  Гц (верх) и схема потоков в ядре дислокации (низ). Масштаб 100 мкм

где  $\sigma = \pm 1$  – топологический заряд кинка (антикинка),  $0 \leq v \leq 1$  – скорость движения кинка.

Анизотропные среды, такие как НЖК, предлагают особенно богатые возможности для экспериментального исследования солитоноподобных объектов [29–37]. Например, установлено, что в линейных дефектах ЭК структур, возникающих в закрученных на  $\pi/2$  НЖК, в зависимости от их длины, наблюдается различная динамика дислокаций [32–34].

Недавно обнаружено, что динамика дислокаций в достаточно протяженном дефекте демонстрирует нетривиальное перемежаемое поведение [38]. При столкновении дислокаций с противоположными топологическими зарядами (кинка и антикинка) образуется бризер. Столкновения бризера с другими дислокациями (кинками) приводят к его распаду на кинк-антикинковую пару, т.е. взаимодействия солитоноподобных объектов (автосолитонов, или диссипативных солитонов) в ЭК структурах НЖК являются неупругими. Однако, исследования динамики дислокаций в линейных дефектах ЭК структур в закрученных на  $\pi/2$  НЖК по-прежнему остаются слабо изученными.

Поэтому цель данной работы – исследовать динамику дислокаций в линейных дефектах определенной длины и показать, что, кроме процессов рож-

дения и аннигиляции, может наблюдаться “элементарный” распад дислокаций. В частности, в данной работе впервые обнаружено, что в осциллирующем линейном дефекте длиной  $L = 6\lambda$  ( $\lambda$  – ширина одного ролла), возникающем в ЭК структуре закрученного на  $\pi/2$  НЖК, дислокация с топологическим зарядом  $S = +1$  (кинк) распадается на дислокацию с  $S = -1$  (антикинк) и две дислокации с  $S = +1$  (кинк). Предполагается, что механизм рапада связан с возникновением локальной неустойчивости твист-моды директора  $\mathbf{n}$  [39] в ядре линейного дефекта, когда гидродинамические потоки становятся нестационарными и возникают “зиг-заг” осцилляции. Показано, что качественно расщепление топологического дефекта можно описать в рамках возмущенного УСТ с затуханием.

В качестве НЖК использовался 4-п-метоксibenзилиден-п-бутила нилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из  $\text{SnO}_2$ . Поверхность подложек с электродами покрывалась слоем полиимидного ориентанта, который затем натирался в одном направлении для создания однородной планарной ориентации директора  $\mathbf{n}$ . ЖК-ячейка размером  $16 \times 12$  мм и толщиной  $d \simeq 40$  мкм заполнялась нематиком под действием капиллярных сил. После формирования однородной планарной ориентации верхняя подложка медленно поворачивалась относительно нижней по часовой стрелке на угол  $\phi = \pi/2$ , так, чтобы во всем слое НЖК возникала однородно закрученная ориентация директора  $\mathbf{n}$ .

ЖК-ячейка термостатировалась при температуре  $T = 25 \pm 0.01$  °C. К слою НЖК прикладывалось переменное напряжение  $U$  частоты  $f_U = 30$  Гц. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса составляло  $U_c = 5.6$  В. При этом их ось ориентирована перпендикулярно директору  $\mathbf{n}$  в середине невозмущенного слоя НЖК и составляет углы  $-\pi/4$  и  $\pi/4$  соответственно с ориентацией директора на верхней и нижней подложках. Направления гидродинамических потоков в доменах определялись путем анализа движений пробных частиц диаметром  $2 \div 3$  мкм, добавленных в НЖК. ЭК структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп, а их изображения регистрировались цифровой видеокамерой с разрешением  $1024 \times 1024$  пикселей.

Оптически ЭК структуры в НЖК представляет собой пространственно-периодические модуляции интенсивности прошедшего через ячейку с НЖК света. Эти модуляции соответствуют локальным изменениям оптической анизотропии  $\langle \Delta n(t) \rangle$  под действием внешнего электрического поля. В пороге

электроконвекции при  $U = U_c$  в слое НЖК возбуждаются гидродинамические вихревые движения в виде роллов, нормальных или наклонных относительно исходной планарной ориентации директора на подложках  $\mathbf{n}$ . Вихревое движение ориентирует НЖК особенно сильно в области максимального градиента скорости, т.е. в центре роллов. При этом вращение вихрей в соседних роллах имеет противоположное направление. В результате цилиндрические вихри играют роль линз, фокусирующих свет в светлые линии. В итоге формируется изображение в виде темных и светлых полос – доменов Вильямса. Пространственный период ЭК структуры для нормальных роллов в случае исходной планарной ориентации директора  $\mathbf{n}$  соответствует ширине одного ролла  $T = \lambda \sim d$  ( $\lambda$  – ширина ролла).

В закрученных НЖК из-за сильной связи исходной ориентации директора  $\mathbf{n}$  (твист-моды) со скоростью гидродинамического потока  $\mathbf{v}$  последний имеет геликоидальный характер [40]. При этом направление потоков противоположно в соседних роллах. Непрерывность геликоидального потока в роллах здесь обеспечивается на границах ЖК-образца (и/или на границах ЖК-областей с однородным направлением закрутки директора  $\mathbf{n}$ ). Поэтому в закрученных на  $\pi/2$  НЖК  $T = 2\lambda \sim 2d$ .

Рассмотрим особенности гидродинамики течений в ядре дислокации с топологическим зарядом  $S = +1$  в ЭК структуре закрученного на  $\pi/2$  НЖК (рис. 1).

Светлые оптические линии соответствуют центрам роллов (или их осям), вокруг которых наблюдалось геликоидальное движение частиц. На схеме оси роллов обозначены штрих-пунктирными линиями. Стрелками на них показаны направления аксиальных компонент скорости конвективных потоков  $v_a$  в роллах вблизи ядра дефекта и в соседних роллах. Направления геликоидальных потоков в каждом ролле показаны в нижней части схемы. Непрерывность потоков в ядре дислокации обеспечивается замыканием сонаправленных аксиальных компонент скорости  $v_a$  (рис. 1).

Образование линейных дефектов в ЭК структуре закрученного слоя НЖК обнаружено и описано в работе [41]. Показано, что при определенной скорости увеличения приложенного напряжения  $\Delta U/\Delta t$  дислокации являются источниками образования в пространстве новых локализованных квазистационарных состояний с более низкой симметрией. Как правило, подобные искажения зарождаются вблизи ядра дислокации с топологическим зарядом  $S = \pm 1$  и распространяются вдоль линии, нормальной к доменам Вильямса. При этом возникающий линейный дефект

с диссоциированным ядром имеет такой же топологический заряд, что и исходная дислокация. Кроме того, линейное искажение может возникать спонтанно, в результате развития модуляционной (варикозной) неустойчивости, как простой сдвиг доменов на половину пространственного периода  $\pi$ .

Отметим, что подобные линейные стационарные объекты наблюдаются и в структуре роллов планарно ориентированных НЖК [26]. Однако при увеличении приложенного напряжения до определенного значения указанные типы линейных образований становятся неустойчивыми и распадаются на отдельные дислокации.

При напряжениях  $U \lesssim 7.4$  В конвективные потоки в роллах являются стационарными. С увеличением приложенного напряжения обе компоненты скорости потока анизотропной жидкости в доменах  $v_t$  и  $v_a$  возрастают и при  $U > 7.4$  В линейный дефект теряет устойчивость. Однако в отличие от планарно ориентированного НЖК [26] ядро линейного дефекта не распадается сразу на отдельные дислокации, а сначала начинает осциллировать. При этом наблюдается поочередное, периодическое во времени, перезамыкание доменов с сонаправленными потоками анизотропной жидкости то влево (*zig*), то вправо (*zag*), и движение жидкости в ядре дефекта приобретает пульсирующий характер. Затем происходит образование *zig* и *zag* областей, осциллирующих в противофазе. Одновременно между их границами возникают дислокации с топологическими зарядами  $S = \pm 1$  (рис. 2). При этом, в отличие от случая планарно ори-

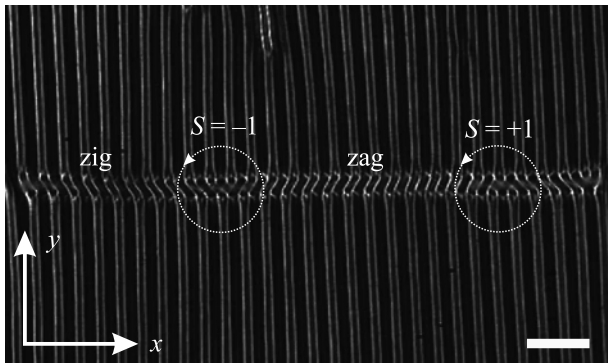


Рис. 2. Линейный осциллирующий дефект в закрученном на  $\pi/2$  НЖК при  $U = 7.6$  В и  $f = 30$  Гц. Границами *zig* и *zag* областей являются дислокации с топологическими зарядами  $S = \pm 1$ . Масштаб 100 мкм

ентированных нематиков, дислокации не изолируются друг от друга невозмущенными роллами, а остаются “связанными” гидродинамическими течениями в пределах ядра линейного дефекта. Заметим, что

структура линейного дефекта на рис. 2 в точности соответствует схематическому 1D-изображению зигзагообразного кулоновского кристалла с топологическим дефектом [13].

Дальнейшая динамика дислокаций развивается таким образом, чтобы в ядре нестационарного линейного дефекта обеспечивалась непрерывность геликоидального потока анизотропной жидкости. Экспериментальные исследования линейных дефектов различной длины показали, что в зависимости от количества образующихся в них дислокаций наблюдается разная картина их взаимодействий.

На рисунке 3а представлен впервые наблюдаемый процесс распада дислокации с топологическим зарядом  $S = +1$  в ядре линейного дефекта длиной  $L = 6T$  ( $L = 2\lambda$ , где  $\lambda$  – ширина одного ролла).

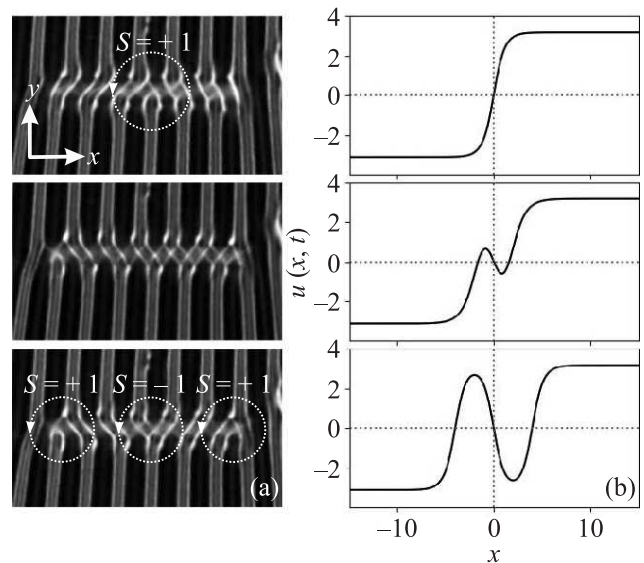


Рис. 3. Расщепление дислокации с топологическим зарядом  $S = +1$  (кинк) на дислокацию с зарядом  $S = -1$  (антикинк) и две дислокации с  $S = +1$  (два кинка): экспериментальная реализация при  $U = 7.6$  В и  $f = 30$  Гц, интервал между кадрами  $\Delta t \simeq 0.36$  с (a) и численная иллюстрация зависимости  $u(x, t)$  от  $x$ , демонстрирующая этот распад (b)

По-видимому, расщепление дислокации происходит в результате развитие локальной неустойчивости твист-моды директора  $\mathbf{n}$  в ядре линейного дефекта, когда гидродинамические потоки в нем перестают быть стационарными (при  $U > 7.4$  В) и возникают доменные зиг-заг осцилляции, за счет критического нарастания гидродинамических флуктуаций.

Здесь следует упомянуть важные результаты работы [20], в которой теоретически рассматриваются процессы генерации пар топологических дефектов в

периодических одномерных структурах при наличии неоднородности локальной периодичности.

Неоднородность локальной периодичности может быть обусловлена различными неустойчивостями к длинноволновым возмущениям типа фазовая неустойчивость, неустойчивость Экхауза, косоварикозная неустойчивость и т.д. [42]. В нашем случае это неустойчивость твист-моды, хотя не исключено ее совместное воздействие с варикозной неустойчивостью и, как результат, возрастающие упругие напряжения приводят к разрывам в периодичности ролловых структур. А так как в соседних роллах аксиальные компоненты геликоидальных течений анитипараллельны, то это приводит к формированию двух замкнутых потоков, структура которых определяет образование двух дислокаций с антипараллельными векторами Бюргерса. Последнее аналогично процессу генерации пары дислокаций в твердом теле [43].

Таким образом, с одной стороны, расщепление дислокации на антидислокацию и две дислокации в доменах Вильямса закрученного на  $\pi/2$  НЖК связано с наличием локальной неустойчивости внутренней твист-моды директора  $\mathbf{n}$ , возникающей в момент, когда гидродинамические потоки в ядре дефекта перестают быть стационарными. С другой стороны, очевидно, что процесс распада одного дефекта на три с сохранением суммарного топологического заряда не отличим от рождения пары дефектов с нулевой топологической суммой в упругом поле исходного дефекта. Поэтому, описываемый в данной работе эффект имеет более глубокую аналогию, например, с процессами рождения пар частица-античастица в сильных электрических и гравитационных полях [44] или эффектом Швингера [45], получившим экспериментальное подтверждение [46].

Для качественного описания процесса расщепления дислокации воспользуемся результатами работ [47, 48], в которых на основе возмущенного УСГ моделируются различные механизмы распада солитонов. Авторами в начале доказывается существование внутренних мод солитонов, когда они находятся в присутствии неоднородных, зависящих от пространства, внешних сил [47]. Определены условия, при которых внутренняя мода становится неустойчивой, что и приводит к распаду солитона на антисолитон и два солитона. Также подчеркивается, что при наличии пространственно-временных сил солитон ведет себя как деформируемый (неупругий) объект.

Будем рассматривать модифицированное УСГ (2) при наличии неоднородного пространственного возмущения и затухания:

$$u_{tt} + \gamma u_t - u_{xx} + \sin u = F(x), \quad (4)$$

где  $\gamma$  – малый положительный параметр,  $F(x)$  – локализованная неоднородная внешняя сила,  $u$  – функция смещения центров пары роллов от их равновесного положения в ядре линейного дефекта.

Исходное уравнение (2) для смещения центров пары роллов (так как в закрученном НЖК период структуры  $T = 2\lambda$ ,  $\lambda$  – ширина одного ролла) получено при переходе к континуальному приближению в модели ФК [32].

Возмущение  $F(x)$  имеет вид [47]:

$$F(x) = 2(B^2 - 1) \sinh(Bx) / \cosh^2(Bx), \quad (5)$$

где  $B$  – управляющий параметр.

Выбор вида функции (5) обусловлен тем, что результаты, полученные с помощью этой функции, можно качественно обобщить на другие топологически эквивалентные системы [47]. Кроме того, с этим примером связаны реальные физические системы [49]. Например, аналогичная функция может описывать локальную деформацию системы волн зарядовой плотности [50]. В нашем случае внешнее возмущение в виде функции (5) соответствует критическому нарастанию гидродинамических флуктуаций, что приводит к локальной неустойчивости твист-моды директора.

Анализ численных результатов для различных значений  $B$  показал, что наиболее интересное решение имеет место при  $B^2 < 2/[\Lambda_*(\Lambda_* + 1)]$ , где  $\Lambda_* = (5 + \sqrt{17})/2$  [47]. В этом случае внутренняя мода является неустойчивой, что и приводит к распаду кинка на антикинк и два кинка (рис. 3b).

Таким образом, в данной работе впервые экспериментально обнаружено, что процесс перехода к режиму слабой турбулентности в системе электроконвекции закрученных на  $\pi/2$  НЖК сопровождается не только процессами рождения и аннигиляции дислокаций, но и их “элементарным” распадом на антидислокацию и две дислокации. Расщепление дислокации можно объяснить возникновением локальной неустойчивости ориентационной твист-моды директора  $\mathbf{n}$  в рамках возмущенного УСГ. Неустойчивость твист-моды директора  $\mathbf{n}$  начинает развиваться, когда гидродинамические потоки в линейных дефектах перестают быть стационарными, т.е. в результате нарастания флуктуационных процессов с увеличением степени надкритичности.

Необходимо подчеркнуть, что исследование перехода от регулярного движения дефектов к сильно нестационарной пространственно-временной динамике остается актуальной задачей современной

физики конденсированного состояния. Это явление связано с турбулентностью, обусловленной спонтанным рождением дефектов. Такие неустойчивости, как распады солитонов, могут существенно влиять на различные процессы в технике, медицине и др. В частности, в медицине одним из возможных механизмов, который в настоящее время считается ответственным за переход от тахикардии к фибрилляции желудочков в сердечной мышце, является спонтанный распад одной спиральной волны электрической активности на несколько спиралей, приводящих к турбулентному волновому поведению [51]. Поэтому в этом смысле ЖК, рассматриваемые как модельные системы для изучения общих принципов образования и разрушения надмолекулярного порядка, в принципе, позволяют понять не только возможные механизмы взаимодействия солитонов, но и их распада.

Работа выполнена в рамках госзадания # НИОКТР И223011200702-4.

**Финансирование работы.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Института физики молекул и кристаллов – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИФМК УФИЦ РАН). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Конфликт интересов отсутствует.

1. G. Toulouse and M. Kleman, *J. Phys. Lett.* **37**, 149 (1976).
2. T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
3. N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
4. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
5. A. Vilenkin and E. P. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
6. P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, and T. A. Witten, *Principles of condensed matter physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
7. O. D. Lavrentovich, *Liq. Cryst.* **24**, 117 (1998).
8. H.-R. Trebin, *Liq. Cryst.* **24**, 127 (1998).
9. Г. А. Малыгин, *ФТТ* **43**, 822 (2001).
10. M. Kleman and J. Friedel, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 61 (2008).
11. I. Chuang, R. Durrer, N. Turok, and B. Yurke, *Science* **251**, 1336 (1991).
12. M. Kim and F. Serra, *Adv. Opt. Mater.* **8**, 1900991 (2020).
13. J. Brox, P. Kiefer, M. Bujak, T. Schaetz, and H. Landa, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 153602 (2017).
14. И. С. Арансон, *УФН* **189**, 955 (2019).
15. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, Наука, М. (1981).
16. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford (1994).
17. П. В. Долганов, Н. С. Шуравин, В. К. Долганов, Е. И. Кац, *Письма в ЖЭТФ* **101**, 505 (2015).
18. S. Digal, R. Ray, and A. M. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5030 (1999).
19. H. Mukai, P. R. G. Fernandes, B. F. de Oliveira, and G. S. Dias, *Phys. Rev. E* **75**, 061704 (2007).
20. J.-P. Eckmann, G. Goren, and I. Procaccia, *Phys. Rev. A* **44**, R805 (1991).
21. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, *Physica D* **32**, 135 (1988).
22. S. Kai, N. Chizumi, and M. Kohno, *Phys. Rev. A* **40**, 6554 (1989).
23. G. Goren, I. Procaccia, and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1237 (1989).
24. S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, *Phys. Rev. A* **42**, 5998 (1990).
25. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, *J. Stat. Phys.* **64**, 1007 (1991).
26. A. Joets and R. Ribotta, *J. Stat. Phys.* **64**, 981 (1991).
27. Е. С. Пикина, А. Р. Муратов, Е. И. Кац, В. В. Лебедев, *ЖЭТФ* **164**, 129 (2023).
28. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, Методы, Приложения*, Физматлит, М. (2006).
29. M. Lowe and J. P. Gollub, *Phys. Rev. A* **31**, 3893 (1985).
30. L. Lam and J. Prost (editors), *Solitons in Liquid Crystals*, Springer, N.Y. (1992).
31. B.-X. Li, V. Borshch, R.-L. Xiao, S. Paladugu, T. Turiv, S. V. Shiyankovskii, and O. D. Lavrentovich, *Nat. Commun.* **9**, 2912 (2018).
32. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева, Э. С. Батыршин, Ю. А. Лебедев, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 431 (2011).
33. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева, Ю. А. Лебедев, Э. С. Батыршин, *ЖЭТФ* **148**, 1232 (2015).
34. В. А. Делев, В. Н. Назаров, О. А. Скалдин, Э. С. Батыршин, Е. Г. Екомасов, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 607 (2019).
35. S. Aya and F. Araoka, *Nat. Commun.* **11**, 3248 (2020).
36. Y. Shen and I. Dierking, *Commun. Phys.* **3**, 14 (2020).
37. Yu. Shen and I. Dierking, *Crystals* **12**, 1 (2022).
38. В. А. Делев, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 26 (2021).
39. В. А. Делев, А. П. Крехов, *ЖЭТФ* **152**, 1414 (2017).

40. A. Hertrich, A. P. Krekhov, and O. A. Scaldin J. Phys. II France **4**, 239 (1994).
41. V. A. Delev, P. Toth, and A. P. Krekhov, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **351**, 179 (2000).
42. F. H. Busse and E. W. Bolton, J. Fluid. Mech. **146**, 115 (1984).
43. А. Б. Волынцев, А. В. Ратт, Вестн. Перм. универ. Физика **1**, 3 (2005).
44. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат, М. (1980).
45. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
46. A. I. Berdyugin, N. Xin, H. Gao et al. (Collaboration), Science **375**, 430 (2022).
47. J. A. Gonzalez, A. Bellorin, and L. E. Guerrero, Phys. Rev. E **65**, 065601 (2002).
48. J. A. Gonzalez, A. Bellorin, L. E. Guerrero, Chaos. Solitons & Fractals **33**, 143 (2007).
49. Yu. S. Kivshar and B. A. Malomed, Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
50. P. Bak and A. Brazovsky, Phys. Rev. B **17**, 3154 (1978).
51. D. P. Zipes and J. Jalife, *Cardiac electrophysiology: from cell to bedside*, W. B. Saunder, N.Y. (2000).