

Гигантский эффективный g -фактор в присутствии спиновых бифуркаций в поляритонных конденсатах

А. Бочин⁺, И. Честнов⁺, А. Налитов^{*1)}

⁺Физико-технический мегафакультет, Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

^{*}Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 20 апреля 2024 г.

После переработки 2 мая 2024 г.

Принята к публикации 3 мая 2024 г.

Предсказана гигантская восприимчивость поляритонных конденсатов к внешнему магнитному полю в области спиновой бифуркации. Спин-анизотропные поляритон-поляритонные взаимодействия приводят к спонтанному формированию эллиптически поляризованного конденсата. Подобное поведение неравновесной системы вблизи критической точки имеет сходство со свойствами фазовых переходов второго рода. Предсказанный эффект усиления поля может быть использован для возбуждения топологически нетривиальных боголюбовских возбуждений поляритонного конденсата.

DOI: 10.31857/S1234567824120048, EDN: LHKTSB

Одним из важных проявлений взаимодействия света с веществом является магнитооптический эффект, заключающийся в снятии вырождения электромагнитных мод внешним магнитным полем. Так, например, эффект Зеемана для электронных возбуждений в диэлектриках и полупроводниках приводит к расщеплению круговых поляризаций, проявляющемуся через магнитооптический эффект Фарадея и керровское вращение [1]. Кроме того, локальное нарушение симметрии обращения времени в магнитном поле открывает возможность создания топологических фотонных состояний, способных распространяться без рассеяния [2, 3].

В оптическом диапазоне воздействие магнитного поля на излучение достаточно слабо. Однако в режиме сильной связи со средой магнитооптические эффекты могут быть существенно усилены благодаря возникновению гибридных квазичастиц, таких как экситонные поляритоны. Так недавно использование магнитного поля позволило продемонстрировать существование топологически нетривиальных поляритонных состояний в решетках оптических микрорезонаторов [4]. Более того, для увеличения силы магнитооптической связи, характеризуемой величиной эффективного g -фактора, могут быть, например, использованы микрорезонаторы с ферромагнитными средами [5].

Однако весь потенциал систем с сильной связью и экситонных поляритонов в частности раскрывается

в нелинейном режиме при формировании макроскопического когерентного состояния, известного также как бозонный конденсат. Так спин-анизотропное взаимодействие между поляритонами приводит к эффекту ларморовской прецессии псевдоспина конденсата вокруг самоиндуцированного поля даже в отсутствии внешнего магнитного поля [6, 7].

В термодинамическом пределе внешнее и эффективное самоиндуцированное магнитные поля антиколлинеарны и в точности компенсируют друг друга, пока внешнее поле не превышает некоторого критического значения. Данное явление получило название спинового эффекта Мейснера [8]. Однако в неравновесных конденсатах, формируемых нерезонансной накачкой, спиновая поляризация и порождаемое ею эффективное магнитное поле могут формироваться спонтанно в результате действия механизма, известного как спиновые бифуркации [9]. Похожим образом резонансно возбуждаемые неравновесные поляритонные состояния также демонстрируют спонтанную спиновую поляризацию и спиновую мультистабильность [10]. Отметим, однако, что взаимосвязь между равновесной экранировкой внешнего магнитного поля в режиме спинового эффекта Мейснера и спонтанным выбором знака поляризации, присущим диссипативным конденсатам, по-прежнему является предметом дискуссии [11, 12].

Для создания топологических оптических состояний реальное магнитное поле можно заменить эффективным калибровочным [13] и зеемановским [14] полями, возникающими в пространственно струк-

¹⁾e-mail: anton.nalitov@gmail.com

турированных системах. Так на примере решет- ки спин-поляризованных конденсатов было показа- но, что в присутствии индуцированного поляритон- поляритонным взаимодействием эффективного по- ля структура спектра возбуждений становится то- пологически нетривиальной, что приводит к обра- зованию однонаправленных краевых состояний [15]. Однако описанный сценарий требует сохранения вы- рождения спиновых состояний в отсутствии поля, что подразумевает высокую чувствительность си- стемы к внешним нарушающим симметрию факто- рам. Данные соображения обосновывают исследова- ние возможности использования этой чувствительно- сти для управления зонными топологическими инва- риантами в поляритонных решетках.

В данной работе показано, что эффективное по- ле поляритонного конденсата может быть не только сонаправлено с внешним зеемановским полем, но и существенно превосходить его по величине. Сопут- ствующий этому эффект усиления зеемановского по- ля может быть также интерпретирован в терминах гигантского эффективного g -фактора. При этом эф- фект усиления максимален в окрестности критиче- ской точки, соответствующей бифуркации спинового состояния конденсата.

Рассматриваемая система представляет собой конденсат экситонных поляритонов, описываемый обобщенным диссипативным уравнением Гросса– Питаевского для двухкомпонентного параметра порядка: $\Psi = (\Psi_+, \Psi_-)^T$:

$$i\dot{\Psi}_{\pm} = -\frac{i}{2}(i\Delta + W - \Gamma - \eta N_{\text{pol}})\Psi_{\pm} - \frac{1}{2}(\varepsilon + i\gamma)\Psi_{\mp} + \frac{1}{2}(\alpha_1|\Psi_{\pm}|^2 + \alpha_2|\Psi_{\mp}|^2)\Psi_{\pm}, \quad (1)$$

где компоненты $\Psi_{+(-)}$ соответствуют двум круговым поляризациям, правой и левой, Γ – скорость затуха- ния поляритов, W – скорость вынужденного рассея- ния из резервуара в конденсат, η – коэффициент на- сыщения накачки, пропорционального полной насе- ленности конденсата N_{pol} , ε и γ – расщепление энер- гий и коэффициенты затухания двух линейно поля- ризованных мод, и, наконец, $\alpha_{1(2)}$ – параметры вза- имодействия поляритонов с сонаправленными и об- ратными круговыми поляризациями.

Руководствуясь подходом, предложенным в рабо- те [9], мы описываем систему классическим псевдо- спином $\mathbf{S} = \Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Psi / 2$, определенным через вектор Паули $\boldsymbol{\sigma}$. При этом величина S пропорциональна за- селенности конденсата, тогда как направление век- тора псевдоспина характеризует спиновую поляри- зацию. Легко заметить, что псевдоспин $\mathbf{S}$ напрямую

связан с параметрами Стокса излучения, испускае- мого микрорезонатором: $S = S_0$, $S_x = S_1$, $S_y = S_2$, $S_z = S_3$. Динамика компонент псевдоспина описы- вается системой уравнений:

$$\dot{S}_x = (W - \eta S - \Gamma)S_x - \gamma S - (\alpha S_z + \Delta)S_y, \quad (2a)$$

$$\dot{S}_y = (W - \eta S - \Gamma)S_y + \varepsilon S_z + (\alpha S_z + \Delta)S_x, \quad (2b)$$

$$\dot{S}_z = (W - \eta S - \Gamma)S_z - \varepsilon S_y. \quad (2c)$$

По аналогии с классическим спином в магнитном поле псевдоспин $\mathbf{S}$ вращается вокруг оси z благо- даря совместному действию зеемановского расщеп- ления Δ во внешнем магнитном поле, приложен- ном нормально к плоскости микрорезонатора, и са- моиндуцированного эффективного поля αS_z [6, 7]. Последнее пропорционально параметру взаимодей- ствия $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$, который отличен от ну- ля ввиду сильной спиновой анизотропии поляритон- поляритонных взаимодействий.

Далее переходим к безразмерной форме систе- мы (2):

$$\dot{s}_x = (p - s)s_x - gs - (as_z + \delta)s_y, \quad (3a)$$

$$\dot{s}_y = (p - s)s_y + s_z + (as_z + \delta)s_x, \quad (3b)$$

$$\dot{s}_z = (p - s)s_z - s_y, \quad (3c)$$

вводя эффективное расщепление $\delta = \Delta/\varepsilon$, безраз- мерное время $\tau = t\varepsilon$ и пару безразмерных парамет- ров $a = \alpha/\eta$ и $g = \gamma/\varepsilon$. Аналогичным образом вво- дятся эффективная мощность накачки $p = (W - \Gamma)/\varepsilon$ и нормированный псевдоспин $\mathbf{s} = \eta\mathbf{S}/\varepsilon$.

В отсутствие внешнего приложенного поля $\delta = 0$ два линейно поляризованных ($s_z = s_y = 0$) три- виальных стационарных решения системы (3) опи- сываются выражениями $s_{\pm}(p) = p \pm g$. Оба реше- ния лежат на оси x . При этом $s_x = \mp s_{\pm}^{(0)}$. При $g > 0$ (верхняя по энергии поляритонная мода зату- хает быстрее нижней) s_- -состояние всегда динамиче- ски неустойчиво к малым возмущениям по Ляпуно- ву. При этом более заселенное состояние s_+ напротив устойчиво при накачках ниже критической величи- ны $p_c = (1 - ag + g^2)/a$, соответствующей критической заселенности конденсата $s_c = (g^2 + 1)/a$.

При $p = p_c$ состояние s_+ теряет устойчивость в бифуркации типа вилки, имеющей суперкритиче- ский характер при $a > g - g^{-1}$ и субкритический в обратном случае (см. бифуркационную диаграм- му на рис. 1a). Смена устойчивости сопровождается появлением пары нетривиальных эллиптически по- ляризованных ($s_z \neq 0$) состояний с компонентами псевдоспина

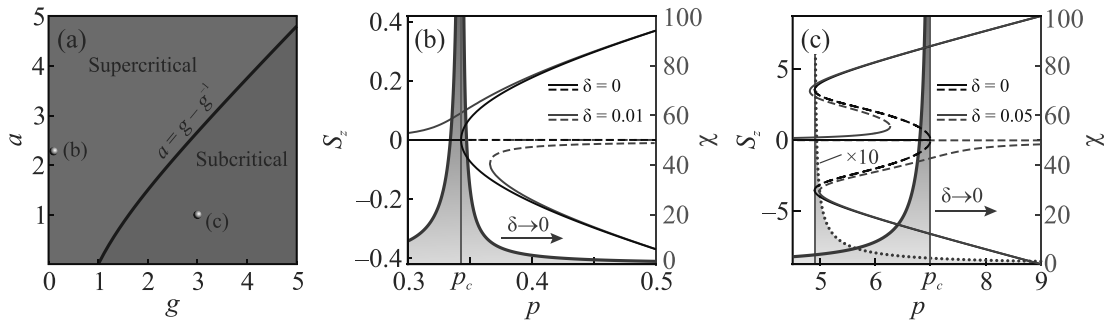


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Фазовая диаграмма спонтанной бифуркации типа вилки, нарушающей симметрию, при $\delta = 0$. (б) – Проекция псевдоспина s_z (левая ось) и восприимчивость χ (правая ось) в суперкритическом режиме при $g = 0.1$ и $a = 2.28$ [9]. Сплошные линии соответствуют устойчивым состояниям, а штриховые – динамически неустойчивым решениям. (с) – То же, что и на панели (б), но в субкритическом режиме при $g = 3$ и $a = 1$. Пунктирная синяя кривая соответствует усилению поля χ верхнего устойчивого эллиптически поляризованного состояния, которое возникает при бифуркации типа складки

$$s_x = (p - s)s/g, \quad s_y = (p - s)s_z, \quad (4a)$$

$$s_z = \pm \frac{s}{g} \sqrt{\frac{g^2 - (p - s)^2}{1 + (p - s)^2}}, \quad (4b)$$

и величиной s , определяемой положительным корнем квадратного уравнения

$$\left(\frac{a}{g} - 1\right)s^2 - \left(\frac{a}{g} - 2\right)ps - (p^2 + 1) = 0. \quad (5)$$

Заметим, что при $g < 0$ бифуркация нарушения симметрии не изменяет устойчивости $s_{\pm}$ состояний. В этом режиме более населенное линейно поляризованное состояние s_- всюду остается единственным устойчивым решением. В дальнейшем мы остановимся на случае $g > 0$, который соответствует условиям эксперимента [9].

При описании влияния внешнего магнитного поля рассмотрим сначала предел слабого поля δ . В первом приближении стационарные решения приобретают линейную по δ поправку $\mathbf{s}^{(1)} = (s_x^{(1)}, s_y^{(1)}, s_z^{(1)})^T$:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \delta \times \left[J(\mathbf{s}^{(0)}) \right]^{-1} (s_y^{(0)}, -s_x^{(0)}, 0)^T, \quad (6)$$

где $J(\mathbf{s}^{(0)})$ – матрица Якоби для системы (3), рассчитанная при невозмущенном стационарном состоянии $\mathbf{s}^{(0)}$.

В случае линейно-поляризованного стационарного решения s_+ , для которого $s_x^{(0)} = -(p + g)$, устойчивого при накачке ниже критической p_c , поправка (6) приводит к возникновению ненулевого эффективного поля $as_z^{(1)} = \delta s^{(0)} / (p_c - p)$. Таким образом, отклик конденсата на нарушение симметрии

можно охарактеризовать параметром усиления поля $\chi = as_z^{(1)} / \delta$ и эффективным g -фактором

$$g_{\text{eff}} = 1 + \chi = \frac{s_c}{p_c - p}, \quad (7)$$

определяющим частоту прецессии псевдоспина конденсата δg_{eff} согласно уравнениям (3).

Поскольку $g_{\text{eff}} > 0$ при $p < p_c$, индуцированное поле совпадает с внешним. Легко заметить, что выражение (7) расходится в критической точке аналогично поведению восприимчивости в теории Ландау для фазовых переходов второго рода, а также линейно связано с населенностью конденсата, см. рис. 1b. Более того, когда p стремится к p_c сверху, $p \rightarrow p_c^+$, параметр усиления поля χ , определяемый в этом случае откликом эллиптически поляризованных состояний (4), имеет аналогичное асимптотическое поведение. Однако важно отметить, что $g_{\text{eff}} > 0$ только для тех состояний, для которых самоиндуцированное поле сонаправлено с внешним $s_z^{(0)} / \delta > 0$ (верхнее эллиптически поляризованное состояние на рис. 1b). В противном случае реальное зеемановское поле направлено обратно эффективному, что приводит к уменьшению суммарного поля. Далее мы будем рассматривать только состояния, соответствующие сонаправленной конфигурации полей. В суперкритическом случае отклик таких состояний расходится как $s_c / (2|p - p_c|)$ вблизи $p = p_c$. Однако в субкритическом режиме динамически неустойчивые состояния, возникающие в результате бифуркации вилки, обладают отрицательным откликом $as_z^{(1)} / \delta < 0$, соответствующим экранированию внешнего поля, – см. красные пунктирные линии на рис. 1c.

На рисунке 1b и с показано, что вблизи критической точки усиление магнитного поля достигает

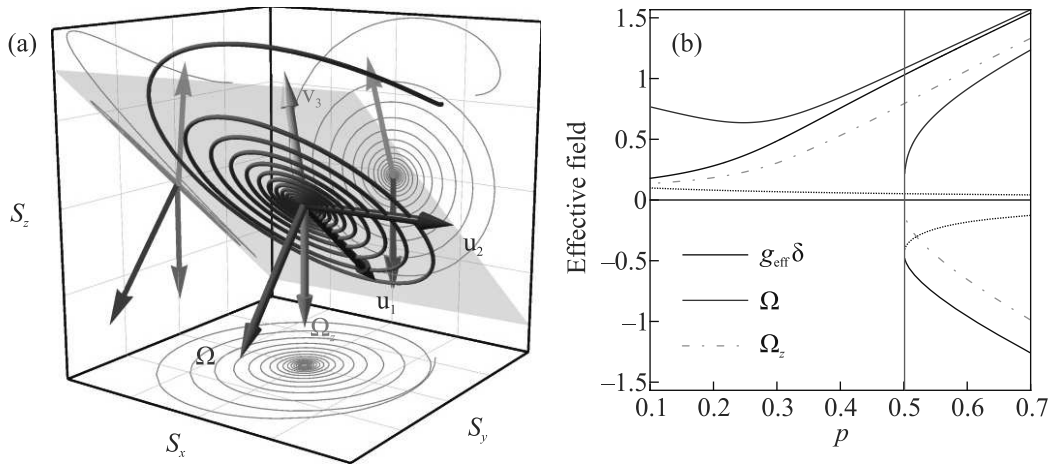


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Схематичное изображение динамики богوليубовского возбуждения $\mathbf{s}(t)$ – синяя линия в пространстве псевдоспина. Точка, к которой закручивается спираль, соответствует динамически устойчивому стационарному состоянию $\mathbf{s}$. Бледно-оранжевая плоскость содержит векторы $\mathbf{u}_{1,2}$, а вектор $\mathbf{\Omega}$ является ее нормалью. (б) – Сравнение определений для эффективного магнитного поля, действующего на богوليубовское возбуждение над устойчивым состоянием при $\delta = 0.1$, $a = 2.28$ и $g = 0.1$. Зависимость частоты прецессии Ω и эффективного магнитного поля Ω_z , определенных на панели (а), от мощности накачки. Вертикальная серая линия соответствует положению седло-узловой бифуркации (см. рис. 1с)

величин порядка ста. Одно из проявлений эффекта усиления поля может быть обнаружено при исследовании топологических свойств богوليубовских возбуждений в поляритонных решетках [15, 16]. Обычно для возникновения нетривиальных топологических фаз требуется сильное магнитное поле – до 5 Тл [4]. Однако возникающие в конденсате элементарные возбуждения также подвержены действию эффективного поля, создаваемого эллиптически поляризованным состоянием, которое может значительно превышать внешнее по своей величине. Чтобы оценить эффективность предложенного принципа усиления поля для управления топологическими свойствами боголонов, рассмотрим поведение элементарных возбуждений, возникающих в одиночном поляритонном конденсате. Пусть псевдоспин, находящийся в стационарном состоянии во внешнем магнитном поле δ , получает слабое возмущение. Установим, как оценить величину эффективного магнитного поля, действующего на такое возбуждение.

Динамика возмущения $\mathbf{s}$ стационарного состояния $\mathbf{s}$ определяется линеаризованной системой (3), т.е. соответствующей ей матрицей Якоби $\dot{\mathbf{s}} = J(\mathbf{s})\mathbf{s}$. Естественно ожидать, что возмущение эволюционирует в том же эффективном поле, что и сам псевдоспин, $g_{\text{eff}}\delta = as_z^{(0)} + \delta$. Однако из-за неэрмитовости матрицы J поведение слабого возмущения сильно отличается от динамики псевдоспина.

Динамика $\mathbf{s}(t)$ определяется собственными значениями λ_i и собственными векторами $\mathbf{v}_i$ оператор

ра $J(\mathbf{s})$. Поскольку матрица Якоби системы (3) вещественна, она имеет либо три действительных, либо одно вещественное и два комплексно-сопряженных собственных значения. Нас интересует последний случай, когда динамика возмущения описывается выражением

$$\mathbf{s}(t) = C_1 e^{-\gamma_p t} [\mathbf{u}_1 \cos(\Omega t + \varphi) - \mathbf{u}_2 \sin(\Omega t + \varphi)] + C_2 \mathbf{v}_3 e^{-\Gamma_p t}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$ – собственный вектор, соответствующий любому из комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = -\gamma_p \pm i\Omega$, $\mathbf{v}_3$ – собственный вектор для полностью вещественного $\lambda_3 = -\Gamma_p$. Коэффициенты $C_{1,2}$ и φ действительны.

Как показано на рис. 2а, эволюция возбуждения, описываемая выражением (8), соответствует спиральному вращению с частотой Ω в плоскости, задаваемой векторами $\mathbf{u}_{1,2}$. Нормаль $\mathbf{n} \perp (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ задает направление эффективного магнитного поля $\mathbf{\Omega} = \mathbf{n}\Omega$, z -компонента которого Ω_z ответственна за нарушение симметрии обращения времени для богوليубовских возбуждений. При этом в отличие от задачи о классическом спине в магнитном поле ось $\mathbf{v}_3$, вдоль которой происходит релаксация возбуждения, оказывается повернута относительно $\mathbf{\Omega}$.

В общем случае $\mathbf{\Omega}$ отличается от эффективного поля $g_{\text{eff}}\delta$, действующего на сам псевдоспин. Однако в пределе сильной накачки в динамике возбуждения доминирует вызванное взаимодействием поле $as_z^{(0)}$, откуда следует $\Omega_z \approx g_{\text{eff}}\delta$. Тем не менее, вблизи

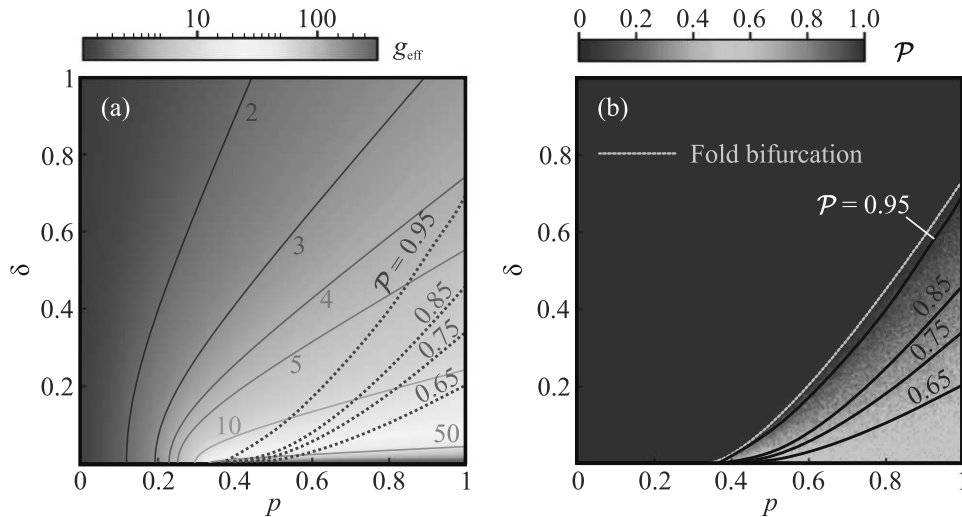


Рис. 3. (Цветной онлайн) (а) – Эффективный g -фактор как функция накачки p и внешнего магнитного (зеemanовского) поля δ . Предполагается, что конденсат находится в устойчивом состоянии с $as_z/\delta > 0$. (б) – Вероятность P возбуждения состояния, для которого эффективное поле сонаправлено внешнему. Бистабильный режим с $P < 1$ возникает в правом нижнем углу на плоскости параметров (p, δ) . Штрих-пунктирная линия соответствует положению седло-узловой бифуркации, в результате которой образуется устойчивое состояние с противоположно направленным эффективным полем. Снижение вероятности P при уменьшении δ проиллюстрировано серыми линиями, также продублированными на панели (а). Каждая точка на графике получена путем прямого численного решения системы (3) со случайными начальными условиями и последующим усреднением по 200 реализациям

точки бифуркации в режиме гигантского усиления внешнего поля такая простая асимптотика не справедлива.

На рисунке 2b для сравнения приведены значения Ω_z и $g_{\text{eff}}\delta$ в области седло-узловой бифуркации возбуждений. Несмотря на то, что поведение псевдоспина $\mathbf{s}$ существенно отличается от динамики боголюбовских возбуждений $\mathbf{s}$, соответствующие оценки для величины эффективного поля оказываются близки. Более того, расхождение в оценках быстро исчезает с ростом магнитного поля δ .

В работе [15] были описаны условия возникновения топологической щели в спектре боголюбовских возбуждений в решетке связанных поляритонных конденсатов. Если все конденсаты в решетке обладают одинаковой эллиптической поляризацией, симметрия обращения времени для боголонов нарушается подобно тому, как если бы в системе присутствовало однородное магнитное (зеemanовское) поле. При этом в операторе эволюции боголонов возникают эрмитовы диагональные слагаемые, ответственные за открытие топологической щели, которые пропорциональны как степени эллиптической поляризации, так и силе спин-анизотропного межчастичного взаимодействия. В результате соответствующее эффективное зеemanовское поле оказывается идентично самоиндуцированному полю as_z в уравнениях (3).

Для оценки эффекта усиления поля за пределами теории возмущений устойчивые стационарные решения системы (3) находятся численно. На рисунке 3a показано значение g -фактора $g_{\text{eff}} = (as_z + \delta)/\delta$ найденных решений на плоскости параметров (δ, p) . Даже вдали от области расходимости при $\delta \rightarrow 0$ эффективное магнитное поле может превосходить реальное на порядок.

Максимальных значений величина g_{eff} достигает в слабом магнитном поле. Однако в этом режиме существуют два устойчивых решения с противоположно направленными, но близкими по абсолютной величине значениями эффективного поля. При нерезонансной накачке в надкритическом режиме $p > p_c$ знак эллиптической поляризации конденсата выбирается спонтанным образом. В частности, в отсутствие поля $\delta \rightarrow 0$ состояния с нарушенной симметрией (4) возбуждаются с равной вероятностью [9].

Однако в конечном поле δ ввиду нарушения симметрии этот баланс смещается в сторону состояния, для которого эффективное магнитное поле сонаправлено с внешним, что соответствует положительному g_{eff} . В конфигурации, изображенной на рис. 1c, это верхнее состояние с $s_z > 0$.

Вероятность P реализации состояния с сонаправленной ориентацией эффективного и реального полей представлена на рис. 3b в пространстве парамет-

ров p и δ . В области с $\mathcal{P} = 1$ существует лишь одно устойчивое решение. В этом режиме эффективный g -фактор g_{eff} принимает сравнительно небольшие значения вдали от области слабого поля δ – порядка около нескольких единиц, см. рис. 3а. При накачке выше критической (штрих-пунктирная линия), соответствующей бифуркации складки, изображенной на рис. 1с, вероятность плавно снижается и стремится к $\mathcal{P} = 0,5$ при $\delta \rightarrow 0$ или $p \rightarrow \infty$. Таким образом, оптимальный режим, при котором значительное усиление поля сочетается с высокой предсказуемостью направления намагничивания конденсата, достигается в непосредственной близости к точки бифуркации.

В заключение подытожим полученные результаты. Неравновесный бозонный конденсат экситонных поляритонов может самопроизвольно создавать сильные эффективные магнитные поля из-за явления спиновой бифуркации [9]. Уже в первых теоретических работах [6, 7] это поле связывали с так называемой самоиндуцированной ларморовской прецессией вектора Стокса излучения конденсата. В данной работе продемонстрировано, что это явление можно контролировать внешним постоянным магнитным полем, что наиболее ярко проявляется для боголюбовских возбуждений [15]. Неравновесный конденсат очень чувствителен к внешнему магнитному полю, что приводит к значительному его усилению. Эффект усиления может быть охарактеризован эффективным g -фактором, который может достигать величин порядка сотни и сильно зависит от интенсивности накачки и величины внешнего поля.

Ввиду того, что выбор знака эллиптической поляризации конденсата, а следовательно и направления эффективного магнитного поля, носит вероятностный характер, оптимальные результаты могут быть получены при интенсивности накачки, близкой к седло-узловой бифуркации. Вдали от точки бифуркации и, в особенности, в режиме сильно выраженной спиновой мультстабильности решений, поляритонный конденсат может быть дестабилизирован из-за присутствия спиновых флуктуации при достаточно высоких температурах [17, 18].

Кроме того, необходимо отметить взаимосвязь поведения эффективного поля с предсказаниями теории Ландау фазовых переходов второго рода. Магнитная восприимчивость конденсата расходится вблизи критической точки, соответствующей спонтанному возникновению эллиптической поляризации $s_z \neq 0$. При этом для состояний с нарушенной симметрией в окрестности $p = p_c$ скорость расхождения восприимчивости оказывается в два раза ниже.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании топологических свойств боголюбовских возбуждений в решетках диссипативных поляритонных конденсатов.

Финансирование работы. Работа И. Честнова (анализ неэрмитовой динамики, написание текста) поддержана грантом Российского научного фонда # 22-72-00061. Работа А. Налитова и А. Бочина (аналитические и численные расчеты, написание текста) поддержана Российским научным фондом по гранту # 22-12-00144.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. M. Born, E. Wolf, and A. B. Bhatia, *Principles of optics*, Cambridge University Press, Cambridge (2019).
2. F. D. M. Haldane and S. Raghu, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 1 (2008).
3. T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, and I. Carusotto, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 015006 (2019).
4. S. Klemmt, T. H. Harder, O. A. Egorov, K. Winkler, R. Ge, M. A. Bandres, M. Emmerling, L. Worschech, T. C. H. Liew, M. Segev, C. Schneider, and S. Höfling, *Nature* **562**, 552 (2018).
5. T. P. Lyons, D. J. Gillard, C. Leblan, J. Puebla, D. D. Solnyshkov, L. Klompmaker, I. A. Akimov, C. Louca, P. Muduli, A. Genco, M. Bayer, Y. Otani, G. Malpuech, and A. I. Tartakovskii, *Nat. Photon.* **16**, 632 (2022).
6. I. Shelykh, G. Malpuech, K. V. Kavokin, A. V. Kavokin, and P. Bigenwald, *Phys. Rev. B* **70**, 115301 (2004).
7. F. P. Laussy, I. A. Shelykh, G. Malpuech, and A. Kavokin, *Phys. Rev. B* **73**, 035315 (2006).
8. Y. G. Rubo, A. Kavokin, and I. Shelykh, *Phys. Lett. A* **358**, 227 (2006).
9. H. Ohadi, A. Dreismann, Y. Rubo, F. Pinsker, Y. del Valle-Inclan Redondo, S. I. Tsintzos, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, *Phys. Rev. X* **5**, 031002 (2015).
10. N. A. Gippius, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, S. S. Gavrilov, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, S. G. Tikhodeev, and G. Malpuech, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 236401 (2007).
11. Król, R. Mirek, D. Stephan, K. Lekenta, J.-G. Rousset, W. Pacuski, A. V. Kavokin, M. Matuszewski, J. Szczytko, and B. Piętko, *Phys. Rev. B* **99**, 115318 (2019).
12. K. Sawicki, D. Dovzhenko, Y. Wang, T. Cookson, H. Sigurdsson, and P. G. Lagoudakis, *Phys. Rev. B* **109**, 125307 (2024).

13. C. Whittaker, T. Dowling, A. Nalotov, A.V. Yulin, B. Royall, E. Clarke, M.S. Skolnick, I.A. Shelykh, and D.N. Krizhanovskii, *Nat. Photonics* **15**, 193 (2021).
14. M.C. Rechtsman, J.M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, and A. Szameit, *Nature* **496**, 196 (2013).
15. H. Sigurdsson, Y.S. Krivosenko, I.V. Iorsh, I.A. Shelykh, and A.V. Nalotov, *Phys. Rev. B* **100**, 235444 (2019).
16. S.L. Harrison, A. Nalotov, P.G. Lagoudakis, and H. Sigurðsson, *Opt. Mater. Express* **13**, 2550 (2023).
17. M.M. Glazov, M.A. Semina, E.Ya. Sherman, and A.V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **88**, 041309 (2013).
18. I.I. Ryzhov, M.M. Glazov, A.V. Kavokin, G.G. Kozlov, M. Aßmann, P. Tsotsis, Z. Hatzopoulos, P.G. Savvidis, M. Bayer, and V.S. Zapasskii, *Phys. Rev. B* **93**, 241307 (2016).