

Знакопеременная девиация одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта

В. Я. Кирпиченков¹⁾, Н. В. Кирпиченкова, Е. Р. Кулиничев

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова,
346428 Новочеркасск, Россия

Поступила в редакцию 21 января 2024 г.

После переработки 21 мая 2024 г.

Принята к публикации 21 мая 2024 г.

В области низких температур и напряжений: $0 \leq |eV| \ll T \ll \Delta_0$ получена формула для одночастичной вольт-амперной характеристики $J(V, T, c, \beta)$ “грязного” (малые концентрации одинаковых немагнитных примесей в I-слое) SIN-контакта (S – сверхпроводник, I – неупорядоченный изолятор, N – нормальный металл), где: e – модуль заряда электрона, Δ_0 – сверхпроводящая щель в S-береге контакта при температуре $T = 0$, V – напряжение на контакте, $c \ll 1$ – безразмерная концентрация примесей в I-слое, $\beta = (\varepsilon_0 - \mu)/\Delta_0$ – безразмерная девиация актуального для данной задачи однопримесного электронного энергетического уровня ε_0 (на одинаковых примесях в I-слое) относительно уровня μ электронного химпотенциала контакта. Показано, что присутствие случайных узкозонных квантовых закороток в неупорядоченном I-слое приводит в некоторой ограниченной области $\Omega_d(c, \beta)$ на плоскости параметров (c, β) к аномально сильной знакопеременной девиации одночастичной вольт-амперной характеристики грязного SIN-контакта относительно одночастичной вольт-амперной характеристики этого же грязного контакта, вычисляемой по формуле существующей теории. На численном примере продемонстрировано, что относительная девиация одночастичной ВАХ для характерных значений параметров грязного SIN-контакта в области $\Omega_d(c, \beta)$ может достигать нескольких порядков, что обеспечивает возможность экспериментального проявления этого эффекта. Обсуждены условия применимости рассмотренной модели грязного SIN-контакта, предложена принципиальная схема соответствующего эксперимента.

DOI: 10.31857/S1234567824120103, EDN: WWOOPE

1. Введение. Экспериментальные и теоретические исследования низкотемпературного квантового электронного транспорта в SIN-контактах и структурах на их основе мотивируются, как перспективами их практического применения, например, в высокоточных болометрах, низкотемпературных термометрах, устройствах электронного охлаждения, так и логикой развития квантовой теории гибридных мезоскопических структур в области низких температур. Краткий обзор этой тематики приведен в работе [1], в которой, среди прочего, изложены результаты проведенных авторами экспериментальных исследований вольт-амперной характеристики (ВАХ) SIN-контактов в области низких температур и напряжений: $0 \leq |eV|, T \ll \Delta_0$. При этом обнаружены значительные расхождения результатов экспериментов и существующей теории ВАХ SIN-контактов [2, 3] (см. рис. 3 и комментирующий его текст в работе [1]).

Авторами [1] констатируется, что эти расхождения существующей теории и эксперимента обусловлены, по-видимому, тем, что в существующей тео-

рии не учтены все факторы, существенно влияющие на проводимость SIN-структур. В этом контексте авторами отмечено, среди прочего, возможное влияние на характеристики контактов процессов взаимодиффузии материалов контактов, процессов отжига и коррозии. Очевидно, что в результате протекания этих процессов в оксидном I-слое контакта могут оказаться, хотя бы и в малых концентрациях, случайно распределенные по объему этого слоя немагнитные примеси, например, не окисленные в ходе технологического процесса изготовления туннельного контакта атомы одного из его металлических берегов. В этом случае актуальные для рассматриваемой здесь задачи квазилокальные однопримесные электронные энергетические уровни ε_0 в I-слое находятся в ближайшей окрестности равновесного электронного химпотенциала μ грязного SIN-контакта: $0 \leq |\varepsilon_0 - \mu| \ll \mu$, $U_0 - \mu$, где U_0 – барьерный потенциал I-слоя. В таком слабо неупорядоченном I-слое имеются случайные узкозонные квантовые закоротки [4, 5], которые могут оказывать существенное влияние на низкотемпературный квантовый электрон-

¹⁾e-mail: wkirpich@rambler.ru

ный транспорт в грязных SIN-контактах, не учитываемое существующей теорией.

Поскольку при экспериментальных исследованиях низкотемпературной ВАХ грязного SIN-контакта измеряемый ток является суммой одночастичного и двухчастичного – андреевского [6] токов, то необходимо изучать влияние случайных квантовых закороток на каждое из этих слагаемых в отдельности. В этой работе рассматривается только одночастичный ток в грязном SIN-контакте, вклад которого в суммарный ток может быть не только теоретически, но и экспериментально выделен в области температур $T_A < T < \Delta_0$, где $T_A \ll \Delta_0$ – температура кроссовера между одночастичным и двухчастичным туннелированием (см. рис. 2 и комментирующий его текст в [1], а также п. 6 в настоящей статье).

В существующей теории [3, 7] формула для одночастичной ВАХ SIN-контакта в области параметров $0 \leq |eV|, T \ll \Delta_0$ имеет вид:

$$J(V, T) = \frac{G_n}{e} \sqrt{2\pi\Delta_0 T} e^{-\Delta_0/T} \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{T}\right), \quad (1)$$

где G_n – линейный кондактанс контакта в нормальном (NIN) состоянии при $T = 0$.

Отметим, что формула (1) получена в рамках стандартного предположения существующей теории низкотемпературного квантового электронного транспорта в SIN-контактах, состоящего в том, что вероятность туннелирования электронов через I-слой практически не зависит от их энергии ε , (отсчитываемой от уровня μ) на актуальных для рассматриваемой задачи масштабах $0 \leq |\varepsilon| \sim \Delta_0 \ll \mu$, $U_0 - \mu$, в отличие от вероятности туннелирования в исследуемой здесь модели грязного SIN-контакта, которая в области $\Omega_d(c, \beta)$ на тех же масштабах является резко неоднородной функцией энергии ε , имеющей ярко выраженные туннельные резонансы, ассоциированные со случайными узкозонными ($\gamma/\Delta_0 < 1$, где γ – энергетическая ширина туннельного резонанса) квантовыми закоротками в неупорядоченном I-слое [4, 5]. В связи с этим возникает естественный теоретический вопрос – сводится ли влияние случайных узкозонных квантовых закороток на одночастичную ВАХ грязного SIN-контакта лишь к “перенормировке” (в сторону увеличения) кондактанса G_n в формуле (1)? Или в контексте эксперимента – пригодна ли формула (1) для описания экспериментальной одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта, если в нее подставлять полученное в результате прямого измерения экспериментальное значение кондактанса G_n этого грязного контакта?

В работе [8] дан отрицательный ответ на этот вопрос. Там показано, что в частном случае – при $\beta = (\varepsilon_0 - \mu)/\Delta_0 = 0$ – присутствие случайных узкозонных квантовых закороток в неупорядоченном I-слое приводит к значительной отрицательной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта – значительному недостатку тока по отношению к одночастичной ВАХ (1) с перенормированными квантовыми закоротками кондактансом G_n . Иными словами – в этом случае формула (1) дает значительно завышенное значение одночастичного тока в грязном SIN-контакте.

Ниже показано, что в общем случае ($|\beta| \geq 0$) присутствие случайных узкозонных квантовых закороток в неупорядоченном I-слое приводит в некоторой ограниченной области $\Omega_d(c, \beta)$ на плоскости параметров (c, β) к сильной знакопеременной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта относительно одночастичной ВАХ этого же грязного SIN-контакта, вычисляемой по формуле (1) существующей теории. Получено уравнение, решение которого задает на плоскости (c, β) линию кроссовера $\beta_c(c)$ – демаркационную кривую, разделяющую область $\Omega_d(c, \beta)$ на две подобласти: $\Omega_d^-(c, \beta) = \Omega_d^-(c, \beta) + \Omega_d^+(c, \beta)$, где $\Omega_d^-(c, \beta)$ – подобласть с сильной отрицательной девиацией ВАХ (недостаток тока), $\Omega_d^+(c, \beta)$ – подобласть с сильной положительной девиацией ВАХ (избыток тока). Для характерных значений параметров грязного SIN-контакта приведен численный пример, иллюстрирующий вышеописанный “сценарий” и, в том числе, показывающий, что относительная девиация одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта может достигать нескольких порядков, что обеспечивает возможность экспериментального проявления этого эффекта. Обсуждены условия применимости рассмотренной модели грязного SIN-контакта, предложена принципиальная схема соответствующего эксперимента.

2. Модель. В области низких температур и напряжений $0 \leq |eV|, T \ll \Delta_0$ рассматривается модель грязного SIN-контакта в виде сэндвича, представляющего собой чистые (без примесей) массивные S и N берега, разделенные плоским тонким I-слоем толщиной L и площадью S со случайно распределенными в нем одинаковыми притягивающими электроны немагнитными примесями. Регулярный (не возмущенный примесями) барьерный потенциал I-слоя равен $U_0 = \text{const} > \mu$, электроны в I-слое предполагаются невзаимодействующими как между собой, так и с другими квазичастицами, а их подбарьерное рассеяние на примесях – упругим. Энергия ε_0 актуального для данной задачи квазилокального одно-

примесного электронного энергетического уровня на одинаковых примесях в I-слое находится в ближайшей окрестности равновесного электронного химпотенциала контакта: $0 \leq |\varepsilon_0 - \mu| \ll \mu$, $U_0 - \mu$. Радиус локализации электронного состояния на этом уровне равен $\alpha^{-1} = [2m_e(U_0 - \varepsilon_0)/\hbar^2]^{-1/2}$. По объему $V_i = LS$ неупорядоченного I-слоя макроскопически однородно распределены $N_i \gg 1$ примесей с плотностью $n = N_i/V_i$, $c = n\alpha^{-3} \ll 1$ – их безразмерная концентрация. Таким образом, для неупорядоченного I-слоя принята модель слабого ($c \ll 1$) структурного (горизонтального, недиагонального) беспорядка Лифшица [9].

В рамках этой модели в неупорядоченном I-слое имеются маловероятные флуктуации пространственного расположения примесей в виде уединенных, слабоизвилистых, квазиэквидистантных (почти одинаковые расстояния между соседними примесями) цепочек из $m = 1, 2, 3, \dots$ примесей, соединяющих противоположные берега контакта. В пространственно узких трубках (радиусом $\sim \alpha^{-1}$) вдоль этих цепочек сосредоточены специфические пути упругого туннелирования электронов – квантовые резонансно-перколяционные траектории (КРПТ) [10, 11], с которыми ассоциированы достаточно узкие энергетические зоны резонансной туннельной прозрачности – туннельные резонансы, “центрированные” на энергию уровня ε_0 , энергетические ширины которых $\gamma_m \ll \mu$, $U_0 - \mu$. Хотя коэффициенты упругого прохождения электронов вдоль КРПТ и достаточно малы – для типичных значений параметров грязного SIN-контакта $D_m^{\text{res}} \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$, но они на несколько порядков больше коэффициентов прохождения вдоль других путей туннелирования через I-слой: $D_0 \sim 10^{-9} \div 10^{-10}$ (см. п. 6). Такие уединенные квазиэквидистантные цепочки примесей являются своеобразными “параллельно включенными” случайными квантовыми закоротками в слабо неупорядоченном I-слое. Хотя статистические веса случайных квантовых закороток (определяемые совместным выполнением упомянутых выше условий: уединенности, слабой извилистости и квазиэквидистантности) и весьма малы, именно квантовые закоротки, за счет достаточно больших, по сравнению с другими путями (в обход квантовых закороток), значений коэффициентов прохождения D_m^{res} , определяют характер упругого низкотемпературного квантового электронного транспорта в грязных МИМ (M = N, S) туннельных контактах в достаточно широких областях $\Omega_d(c, \beta)$. Краткий обзор соответствующих работ приведен в [4].

Слабо неупорядоченный I-слой имеет достаточно большую площадь S , необходимую для “подавления” обусловленных случайными квантовыми закоротками мезоскопических флуктуаций кондактанса G_n грязного контакта [11]:

$$\sqrt{S} \gg \alpha^{-1} c^{-1/2} \exp\left[\frac{c\pi\mathcal{L}^3}{2}\right], \quad \mathcal{L} = \alpha L. \quad (2)$$

При выполнении (2) описание одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта на основе лишь среднего по ансамблю случайных примесных конфигураций в I-слое кондактанса G_n является вполне адекватным.

Для электронов проводимости в N-береге контакта принята модель ферми-газа с изотропным квадратичным законом дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m_e$, в S-береге – модель БКШ (Бардина–Купера–Шриффера).

3. Одночастичный ток через квантовую закоротку. Одночастичный ток через уединенную m -примесную квантовую закоротку в грязном SIN-контакте представим в виде [7, 8]:

$$i^{(m)}(V, T, \delta, u) = \frac{4e}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} |T_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{(m)}(\delta, u)|^2 \times \\ \times \text{Im} G_N^R(\varepsilon + eV, \mathbf{p}) \text{Im} G_S^R(\varepsilon, \mathbf{q}) \times \\ \times [n_F(\varepsilon, T) - n_F(\varepsilon + eV, T)] d\varepsilon, \quad (3)$$

где $\delta = \varepsilon_0 - \mu$, $|\delta| \ll \mu$, $U_0 - \mu$, u – “шаг” квантовой закоротки, безразмерное (в единицах α^{-1}) среднее расстояние между соседними примесями в квазиэквидистантной квантовой закоротке,

$$\text{Im} G_N^R(\varepsilon + eV, \mathbf{p}) \equiv \text{Im} G_N^R(\varepsilon + eV, \xi_{\mathbf{p}}) = \\ = -\pi\delta(\varepsilon + eV - \xi_{\mathbf{p}}), \quad (4)$$

$$\text{Im} G_S^R(\varepsilon, \mathbf{q}) \equiv \text{Im} G_S^R(\varepsilon, \xi_{\mathbf{q}}) = \\ = -\pi(\varepsilon + \xi_{\mathbf{q}})\delta(\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{q}}^2 - \Delta^2) \text{sign}(\varepsilon), \quad (5)$$

– мнимые части запаздывающих одночастичных функций Грина в N и S берегах контакта соответственно,

$$\xi_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \mu, \quad \text{sign}(\varepsilon) = \begin{cases} -1, & \varepsilon < 0, \\ +1, & \varepsilon > 0. \end{cases} \\ n_F(\varepsilon, T) = \left(e^{\varepsilon/T} + 1\right)^{-1} \quad (6)$$

– фермиевская функция распределения, $T_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{(m)}(\delta, u)$ – матричные элементы туннельного гамильтониана для “виртуального” SIN-контакта, в котором ток течет лишь через рассматриваемую здесь квантовую закоротку:

$$\hat{H}_T^{(m)}(\delta, u) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} T_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{(m)}(\delta, u) \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{q}, \sigma} + \text{h. c.} \quad (7)$$

Гамильтониан (7) описывает гибридизацию электронных состояний в различных берегах контакта, обусловленную их туннельной связью через квантовую закоротку, $\hat{a}_{\mathbf{p},\sigma}$, $\hat{b}_{\mathbf{q},\sigma}$ – операторы уничтожения электронов в N и S берегах контакта соответственно, σ – проекция спина электрона.

Переходя в (3) от сумм по \mathbf{p}, \mathbf{q} к интегралам по $\xi_{\mathbf{p}}$, $\xi_{\mathbf{q}}$ и вычисляя эти интегралы, получаем:

$$i^{(m)}(V, T, \delta, u) = \frac{4\pi e \nu_1(0) \nu_2(0)}{\hbar} \times \int_{|\varepsilon| > \Delta} |T^{(m)}(\varepsilon, \delta, u)|^2 \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \times [n_F(\varepsilon, T) - n_F(\varepsilon + eV, T)] d\varepsilon, \quad (8)$$

где $\nu_1(0) = \nu_1(\varepsilon = 0)$, $\nu_2(0) = \nu_2(\varepsilon = 0)$ – одночастичные плотности электронных состояний на уровне Ферми в берегах грязного контакта в нормальном (NIN) состоянии,

$$|T^{(m)}(\varepsilon, \delta, u)|^2 \equiv |T^{(m)}(\varepsilon, \varepsilon, \delta, u)|^2 \sim D_m^{res}(\varepsilon, \delta, u) \quad (9)$$

– усредненный по направлению импульсов \mathbf{p}, \mathbf{q} (и поэтому зависящий только от сохраняющейся при упругом туннелировании полной энергии ε туннелирующего электрона) квадрат диагонального по ε матричного элемента туннельного гамильтониана (7), пропорциональный усредненному подобным же образом коэффициенту упругого прохождения электроном квантовой закоротки [11]:

$$D_m^{res}(\varepsilon, \delta, u) \sim \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \delta)^2}{\gamma_m^2(u)} \right], \quad (10)$$

где

$$\gamma_m(u) = 4(U_0 - \varepsilon_0)u^{-1}e^{-u} \quad (11)$$

– энергетическая ширина туннельного резонанса, ассоциированного с квантовой закороткой.

С учетом (10) формулу (9) перепишем в виде равенства

$$|T^{(m)}(\varepsilon, \delta, u)|^2 = |T_0^{(m)}|^2 \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \delta)^2}{\gamma_m^2(u)} \right], \quad (12)$$

где в соответствии с идеологией метода туннельного гамильтониана неизвестный параметр $|T_0^{(m)}|^2$ выражается через линейный ($|eV| \ll \gamma_m(u)$) туннельный кондактанс квантовой закоротки в нормальном состоянии виртуального контакта при $T = 0$. Для получения этой связи в формуле (3) сделаем замену $\text{Im } G_S^R(\varepsilon, \mathbf{q}) \rightarrow \text{Im } G_N^R(\varepsilon, \mathbf{q})$ и вычислим ток через квантовую закоротку при $T = 0$, после чего находим искомую связь:

$$|T_0^{(m)}|^2 = \frac{\hbar}{4\pi e^2 \nu_1(0) \nu_2(0)} g_n^{(m)}(\delta, u, T = 0) \exp \left[\frac{\delta^2}{\gamma_m^2(u)} \right], \quad (13)$$

где [5]:

$$g_n^{(m)}(\delta, u, T = 0) = \sigma_0 \frac{e^2}{2\pi\hbar} \exp \left[-\frac{\delta^2}{\gamma_m^2(u)} \right] \quad (14)$$

– линейный кондактанс квантовой закоротки в нормальном состоянии виртуального контакта при $T = 0$, $\sigma_0 = (U_0 - \varepsilon_0)\varepsilon_0/(2\pi^4 U_0^2)$.

Вычисляя интеграл (8) с учетом соотношений (12), (13) при $0 \leq |eV| \ll T \ll \Delta_0, \gamma_m(u)$, представим формулу для одночастичного тока через квантовую закоротку в виртуальном SIN-контакте в следующем виде:

$$i^{(m)}(V, T, \delta, u) = \left[\frac{g_n^{(m)}(\delta, u, T = 0)}{e} \sqrt{2\pi\Delta_0 T} e^{-\Delta_0/T} \text{sh} \left(\frac{eV}{T} \right) \right] \varphi_m(\delta, u), \quad (15)$$

где выражение в квадратной скобке интерпретируется как правая часть формулы (1) для одночастичной ВАХ виртуального SIN-контакта,

$$\varphi_m(\delta, u) = \exp \left[-\frac{\Delta_0^2}{\gamma_m^2(u)} \right] \text{ch} \left(\frac{2\Delta_0\delta}{\gamma_m^2(u)} \right) \quad (16)$$

– мультипликатор, учитывающий девиацию одночастичной ВАХ (15) виртуального SIN-контакта относительно одночастичной ВАХ (1) для этого же виртуального контакта.

Вводя безразмерные переменные: энергетическую ширину туннельного резонанса $\eta = \gamma_m(u)/\Delta_0$ и девиацию однопримесного уровня $\beta = \delta/\Delta_0$, представим мультипликатор (16) в виде:

$$\varphi(\eta, \beta) = \exp \left(-\frac{1}{\eta^2} \right) \text{ch} \left(\frac{2\beta}{\eta^2} \right). \quad (17)$$

Решение уравнения

$$\varphi(\eta, \beta) = 1 \quad (18)$$

задает на плоскости (η, β) линию кроссовера – двузначную демаркационную кривую

$$\beta_c^\pm(\eta) = \pm \frac{\eta^2}{2} \text{Arch}(e^{1/\eta^2}), \quad (19)$$

разделяющую области с недостатком ($\varphi(\eta, \beta) < 1$ – отрицательная девиация: $d(\eta, \beta) = \varphi(\eta, \beta) - 1 < 0$) и избытком ($\varphi(\eta, \beta) > 1$ – положительная девиация: $d(\eta, \beta) = \varphi(\eta, \beta) - 1 > 0$) тока на одночастичной ВАХ виртуального SIN-контакта (рис. 1).

Функция $\beta_c^\pm(\eta)$ является универсальной функцией своего аргумента η – одинаковой для всех квантовых закороток с различными значениями m и u .

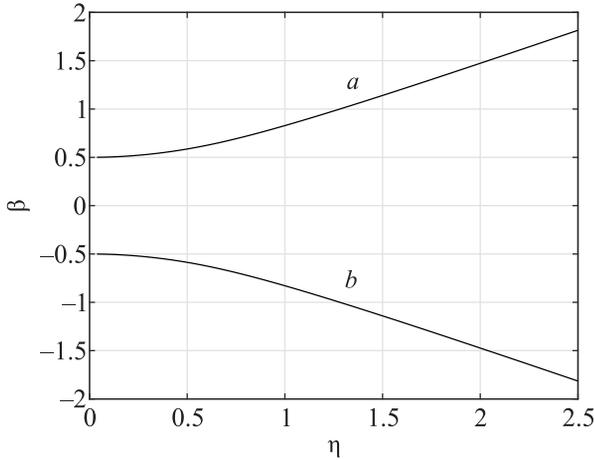


Рис. 1. Линии кроссовера: $\beta_c^+(\eta)$ – кривая a , $\beta_c^-(\eta)$ – кривая b . В области между этими кривыми $\varphi(\eta, \beta) < 1$, вне этой области $\varphi(\eta, \beta) > 1$

На рисунке 2 приведены графики зависимостей логарифмического индекса $\tau(\eta, \beta)$ мультипликатора (17) от безразмерной девиации уровня β в интервале $-2 \leq \beta \leq 2$ для двух значений безразмерной ширины туннельного резонанса: $\eta = 0.2, 0.5$:

$$\tau(\eta, \beta) = \lg \varphi(\eta, \beta). \tag{20}$$

Эти графики демонстрируют:

1) ярко выраженную знакопеременную девиацию $d(\eta, \beta) = \varphi(\eta, \beta) - 1$ одночастичной ВАХ виртуального SIN-контакта с узкозонной ($\eta < 1$) квантовой закороткой;

2) при $\eta = 0.2$ демаркационные значения $\beta_c^\pm \simeq \pm 0.5$, при $\eta = 0.5$ соответственно $\beta_c^\pm \simeq \pm 0.6$;

3) с увеличением η мультипликатор $\varphi(\eta, \beta)$ приближается к единице, а, как видно из (17), в формальном пределе $\eta \rightarrow \infty$ (классическая широкозонная закоротка) мультипликатор $\varphi(\eta = \infty, \beta) = 1$, т.е. девиация одночастичной ВАХ отсутствует.

4. Одночастичная ВАХ грязного SIN-контакта. Суммируя токи (15) по всем уединенным “параллельно включенным” случайным квантовым закороткам с различными значениями m и u (с учетом их статистического веса) и учитывая вклад в ток чистого ($c = 0$) контакта, получаем следующее представление для одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта:

$$J(V, T, c, \beta) = \left[\frac{G_n(c, \beta)}{e} \sqrt{2\pi\Delta_0 T} e^{-\Delta_0/T} \operatorname{sh} \left(\frac{eV}{T} \right) \right] \Phi(c, \beta), \tag{21}$$

где $\beta = \delta/\Delta_0$, выражение в квадратных скобках совпадает с ВАХ (1) существующей теории, но с перенормированным квантовыми закоротками линейным

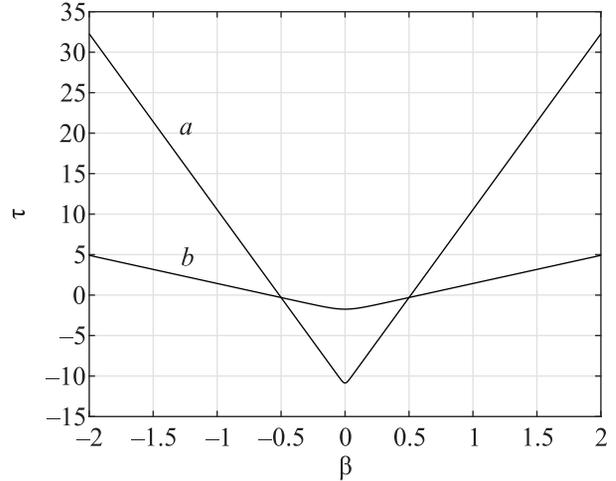


Рис. 2. Логарифмический индекс $\tau(\eta, \beta)$ мультипликатора $\varphi(\eta, \beta)$: $\tau(\eta = 0.2, \beta)$ – кривая a , $\tau(\eta = 0.5, \beta)$ – кривая b .

кондактансом $G_n(c, \beta)$ этого контакта в нормальном состоянии при $T = 0$:

$$G_n(c, \beta) = S[g_0 + \operatorname{Sp}\langle \hat{g} \rangle(c, \beta)] \tag{22}$$

$$\Phi(c, \beta) = \frac{g_0 + \operatorname{Sp}\langle \hat{g}\hat{\varphi} \rangle(c, \beta)}{g_0 + \operatorname{Sp}\langle \hat{g} \rangle(c, \beta)} \tag{23}$$

– мультипликатор, учитывающий девиацию одночастичной ВАХ (21) относительно одночастичной ВАХ (1), $g_0 = G_{0n}/S$, $\langle \dots \rangle$ – символ усреднения по случайным конфигурациям примесей в I-слое,

$$G_{0n} = S\alpha^2 \frac{8(U_0 - \mu)\mu}{\pi U_0^2 \mathcal{L}} e^{-2\mathcal{L}} \left(\frac{e^2}{2\pi\hbar} \right) \tag{24}$$

– туннельный кондактанс чистого контакта в нормальном состоянии при $T = 0$ [5], $\mathcal{L} = \alpha L$ – безразмерная толщина I-слоя,

$$\operatorname{Sp}\langle \hat{g} \rangle(c, \beta) = \sum_m \int_{\mathcal{L}/m}^{\infty} p_m(c, u) g_n^{(m)}(\beta, u, T = 0) du, \tag{25}$$

$$\operatorname{Sp}\langle \hat{g}\hat{\varphi} \rangle(c, \beta) = \sum_m \int_{\mathcal{L}/m}^{\infty} p_m(c, u) \times g_n^{(m)}(\beta, u, T = 0) \varphi_m(\beta, u) du, \tag{26}$$

$$p_m(c, u) = \alpha^2 c^m e^{-cm\pi u^3} [u^2 \theta^2(m, u)]^{m-1} \tag{27}$$

– вероятность (на единицу площади контакта) образования уединенной m - примесной квантовой закоротки с шагом u , $\theta(m, u) \ll 1$ – угол, характеризующий извилистость квантовой закоротки, $\theta^2(m, u) = 2(mu/\mathcal{L} - 1)$ [10, 11].

Заметим, что поскольку из-за экспоненциально быстрого убывания вероятности $p_m(c, u)$ (27) при увеличении аргумента u , главный вклад в интегралы (25), (26) накапливается вблизи нижнего предела $u_{\min} = \mathcal{L}/m$, то верхний предел в этих интегралах формально можно положить равным $u_{\max} = \infty$.

Анализ формул (21)–(27) показывает:

1. Поскольку, в соответствии с (17), при $\beta = 0$ все “парциальные” мультипликаторы $\varphi_m < 1$, а в формальном пределе $|\beta| \rightarrow \infty$ все $\varphi_m > 1$, то из (23), (25), (26) следует, что при $\beta = 0$ мультипликатор $\Phi < 1$, а при $|\beta| \rightarrow \infty$ мультипликатор $\Phi > 1$. Это означает, что уравнение

$$\Phi(c, \beta) = 1 \tag{28}$$

имеет решение, которое задает на плоскости (c, β) линию кроссовера – демаркационную кривую $\beta_c(c)$, разделяющую на этой плоскости область $\Phi(c, \beta) < 1$ – с недостатком тока (отрицательная девиация: $D(c, \beta) = \Phi(c, \beta) - 1 < 0$) и область $\Phi(c, \beta) > 1$ – с избытком тока (положительная девиация: $D(c, \beta) = \Phi(c, \beta) - 1 > 0$) на одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта.

2. Так как в силу (14), (16), (17), (23), (25), (26) мультипликатор $\Phi(c, \beta)$ инвариантен относительно замены $\beta \rightarrow -\beta$, то линия кроссовера $\beta_c(c)$ имеет две ветви $\beta_c^+(c)$ и $\beta_c^-(c)$, симметричные относительно оси $\beta = 0$.

3. На плоскости параметров (c, β) существует ограниченная область $\Omega_d(c, \beta)$, внутри которой осуществляется сильная знакопеременная девиация $D(c, \beta)$ одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта. Линия кроссовера $\beta_c(c)$ делит эту область на две подобласти:

$$\Omega_d(c, \beta) = \Omega_d^-(c, \beta) + \Omega_d^+(c, \beta), \tag{29}$$

где $\Omega_d^-(c, \beta)$ – подобласть с сильной отрицательной девиацией ВАХ, расположенная между кривыми $\beta_c^+(c)$ и $\beta_c^-(c)$, $\Omega_d^+(c, \beta)$ – подобласть с сильной положительной девиацией ВАХ.

4. В области параметров $\Omega_d(c, \beta)$ величина “приведенного” тока (21)

$$F(c, \beta) = \frac{J(V, T, c, \beta)}{J(V, T, c, \beta = 0)} = \frac{G_n(c, \beta)\Phi(c, \beta)}{G_n(c, \beta = 0)\Phi(c, \beta = 0)} \tag{30}$$

имеет два ярко выраженных максимума вблизи линий $\beta = \pm 1$.

В следующем пункте приведен численный пример, иллюстрирующий описанный выше “сценарий”.

5. Численный пример. На основе формул (21)–(27) проведено численное исследование влияния де-

виации примесного уровня $\beta = (\varepsilon_0 - \mu)/\Delta_0$ на одночастичный ток $J(V, T, c, \beta)$ (21) и мультипликатор $\Phi(c, \beta)$ (23) для следующих характерных значений параметров грязного SIN-контакта: $U_0 = 10$ эВ, $\mu = 5$ эВ, $\Delta_0 = 10^{-3}$ эВ, $\mathcal{L} = 10$. Показано, что при этих значениях параметров случайные квантовые закоротки оказывают сильное влияние на одночастичный ток J и мультипликатор Φ в области $\Omega_d = \{10^{-6} \leq c \leq 10^{-4}, -2 \leq \beta \leq 2\}$ на плоскости параметров (c, β) . В этой области главные вклады в величины J и Φ дают наиболее вероятные однопримесные ($m = 1$) квантовые закоротки, имеющие ширину туннельного резонанса $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ эВ, и, следовательно, являющиеся узкозонными: $\gamma_1/\Delta_0 = 0.2$. При этом, менее вероятные двупримесные ($m = 2$) квантовые закоротки имеют ширину туннельного резонанса $\gamma_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ эВ и являются широкозонными: $\gamma_2/\Delta_0 = 40 \gg 1$, а, следовательно, как и более широкозонные закоротки с $m \geq 3$, не влияют на девиацию одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта (см. рис. 2 и комментирующий его текст). За пределами области Ω_d суммарный вклад всех возможных m -примесных ($m \geq 1$) квантовых закороток в величины J и Φ пренебрежимо мал по сравнению с “фоновыми” значениями этих величин, определяемыми параметрами чистого ($c = 0$) SIN-контакта.

На рисунке 3 приведены графики зависимостей логарифмического индекса $\lambda(c, \beta)$ мультипликатора (23) от безразмерной девиации примесного уровня β в интервале $-2 \leq \beta \leq 2$ для трех значений концентрации примеси: $c = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$:

$$\lambda(c, \beta) = \lg \Phi(c, \beta). \tag{31}$$

Эти графики демонстрируют ярко выраженные минимумы мультипликатора Φ при значении $\beta = 0$, соответствующие сильной отрицательной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта (недостаток тока) и столь же ярко выраженные максимумы мультипликатора Φ при значениях $\beta = \pm 1$, соответствующие сильной положительной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта (избыток тока). Точки демаркации для всех трех графиков практически одинаковы $\beta_c^\pm \simeq \pm 0.5$. При $|\beta| > 2$ девиация ВАХ практически отсутствует.

На рисунке 4 приведены графики зависимостей логарифмического индекса $\iota(c, \beta)$ “приведенного” тока (30) от безразмерной девиации примесного уровня β в интервале $-2 \leq \beta \leq 2$ для трех значений концентрации примеси: $c = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$:

$$\iota(c, \beta) = \lg F(c, \beta). \tag{32}$$

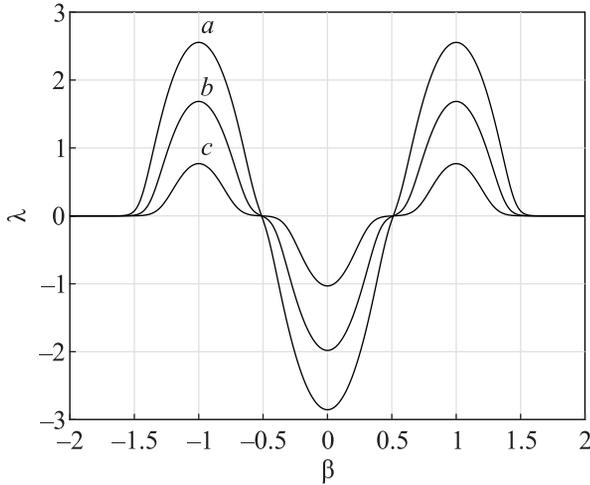


Рис. 3. Логарифмический индекс $\lambda(c, \beta)$ мультипликатора $\Phi(c, \beta)$: $\lambda(c = 10^{-4}, \beta)$ – кривая *a*, $\lambda(c = 10^{-5}, \beta)$ – кривая *b*, $\lambda(c = 10^{-6}, \beta)$ – кривая *c*

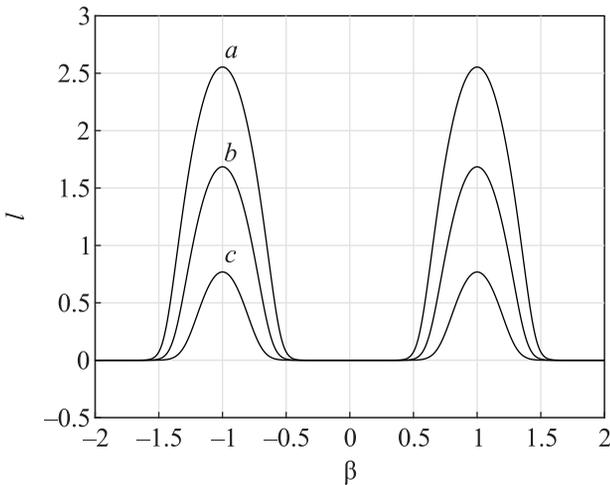


Рис. 4. Логарифмический индекс $\nu(c, \beta)$ мультипликатора $F(c, \beta)$: $\nu(c = 10^{-4}, \beta)$ – кривая *a*, $\nu(c = 10^{-5}, \beta)$ – кривая *b*, $\nu(c = 10^{-6}, \beta)$ – кривая *c*

Эти графики демонстрируют ярко выраженные максимумы приведенного одночастичного тока при значениях $\beta = \pm 1$, соответствующие особенностям плотности одночастичных состояний $\nu_s(\varepsilon)$ на краю сверхпроводящей щели $|\varepsilon| = \Delta_0$ в S-береге контакта [12]:

$$\nu_s(\varepsilon) \sim \begin{cases} |\varepsilon|(\varepsilon^2 - \Delta_0^2)^{-1/2}, & |\varepsilon| > \Delta_0, \\ 0, & |\varepsilon| < \Delta_0. \end{cases} \quad (33)$$

6. Обсуждение модели и полученных результатов. Отметим несколько существенных аспектов рассмотренной здесь модели грязного SIN-контакта и полученных в рамках этой модели резуль-

татов, для чего ответим на несколько актуальных в этом контексте вопросов:

1. Является ли уединенная квантовая закоротка в неупорядоченном I-слое грязного SIN-контакта достаточно “слабой связью” между его берегами – такой, чтобы можно было вычислять одночастичный ток через нее в рамках теории возмущений в форме метода туннельного гамильтониана (7)–(14)?

Безразмерным малым параметром теории возмущений в методе туннельного гамильтониана является малый коэффициент прохождения (туннельная прозрачность) слабой связи $D \ll 1$. Для случая m -примесной квантовой закоротки коэффициент прохождения (10) с учетом предэкспоненты [11] имеет вид:

$$D_m^{res}(\varepsilon, \delta, u) = \frac{\sigma(\varepsilon_0)}{2} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \delta)^2}{\gamma_m^2(u)} \right], \quad (34)$$

где $\sigma(\varepsilon_0) = (U_0 - \varepsilon_0)\varepsilon_0 / (2\pi^4 U_0^2)$, $\delta = \varepsilon_0 - \mu$ – девиация примесного уровня ε_0 , $\gamma_m(u) = 4(U_0 - \varepsilon_0)u^{-1}e^{-u}$ – энергетическая ширина туннельного резонанса, ассоциированного с этой закороткой, u – “шаг” квантовой закоротки. Для типичных значений параметров SIN-контакта (см. п. 5) имеем:

$$D_m^{res} = 10^{-3} \div 10^{-4} \ll 1 \text{ при } |\varepsilon - \delta| \leq \gamma_m(u), \quad (35)$$

и, следовательно, квантовые закоротки являются “слабыми связями”. Отметим, что такие достаточно малые значения $D_m^{res} \ll 1$ обусловлены отражениями электронов на границах I-слоя даже при резонансных энергиях туннелирующих электронов [10, 11].

Заметим также, что для тех же значений параметров контакта коэффициент прохождения электронов через “фон” (24), т.е. “в обход” квантовых закороток в I-слое, на несколько порядков меньше:

$$D_0 = \frac{8(U_0 - \mu)\mu}{\pi U_0^2 \mathcal{L}} e^{-2\mathcal{L}} = 10^{-9} \div 10^{-10}. \quad (36)$$

Таким образом, в грязном SIN-контакте имеем:

$$D_0 \ll D_m^{res} \ll 1, \quad (37)$$

и, следовательно, метод туннельного гамильтониана применим не только для вычисления одночастичного тока через “фон”, но и через уединенную квантовую закоротку.

2. Существует ли не только теоретическая, но и экспериментальная возможность выделить одночастичный вклад в суммарный (одночастичный + андреевский) ток в грязном SIN-контакте со случайными квантовыми закоротками в неупорядоченном I-слое?

В эксперименте (см. рис. 2 и комментирующий его текст в [1]) показано, что одночастичный вклад в суммарный ток доминирует над андреевским (двухчастичным) вкладом в области температур $T_A < T < \Delta_0$ и напряжений $0 \leq |eV| < \Delta_0$, где $T_A \ll \Delta_0$ – температура кроссовера между одночастичным и двухчастичным тунелированием. Экспериментальные значения, приведенные в [1]: $T_A = 0.2$ К, $\Delta_0 = 2.2$ К.

T_A – температура, при которой экспоненциально “вымерзающий” при понижении T одночастичный дифференциальный кондактанс SIN-контакта (или уединенной квантовой закоротки в “грязном” SIN-контакте) $G_d(V = 0, T) \sim D e^{-\Delta_0/T}$ сравнивается с андреевским дифференциальным кондактансом $G_{Ad}(V = 0, T) \sim D^2$, который “не вымерзает” даже при $T = 0$. Здесь $D \ll 1$ – коэффициент прохождения I-слоя, либо уединенной квантовой закоротки.

Качественная (с логарифмической точностью) теоретическая оценка для T_A следует из соотношения $G_d(V = 0, T_A) = G_{Ad}(V = 0, T_A)$ и имеет вид:

$$T_A \sim \frac{\Delta_0}{|\ln D|}, \quad D \ll 1. \quad (38)$$

Отсюда, с учетом (35), для уединенной квантовой закоротки в грязном SIN-контакте имеем:

$$T_A \sim \frac{\Delta_0}{|\ln D_m^{\text{res}}|} \sim 0.1 \Delta_0, \quad (39)$$

а для “чистого” ($c = 0$) SIN-контакта, с учетом (36), имеем:

$$T_A \sim \frac{\Delta_0}{|\ln D_0|} \sim 0.01 \Delta_0. \quad (40)$$

Заметим, что, если в (39) подставить упомянутое выше экспериментальное значение [1] $\Delta_0 = 2.2$ К, то для квантовой закоротки получаем $T_A \sim 0.2$ К, что, во всяком случае, не противоречит экспериментальному значению [1] $T_A = 0.2$ К. Если же подставить $\Delta_0 = 2.2$ К в (40), то получаем для “чистого” SIN-контакта $T_A \sim 0.02$ К, что на порядок меньше экспериментального значения $T_A = 0.2$ К. Учитывая качественный характер этих оценок, отметим, тем не менее, что исследованный в эксперименте [1] SIN-контакт, весьма вероятно, оказался “грязным”, т.е. содержащим примеси и ассоциированные с ними квантовые закоротки в I-слое.

Таким образом, как видно из (39), даже в грязном SIN-контакте со случайными квантовыми закоротками в неупорядоченном I-слое, существует область температур $T_A < T < \Delta_0$, $T_A \ll \Delta_0$, внутри которой одночастичный вклад в суммарный ток доминирует

над двухчастичным, и, следовательно, возможен эксперимент по обнаружению и исследованию девиаций его одночастичной ВАХ, описываемых мультипликаторами (23) и (30).

3. Поскольку эффект аномальной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта (рис. 3) теоретически предсказан в рамках модели с “горизонтальным” (недиагональным) беспорядком Лифшица [9], учитывающим случайный “разброс” пространственных координат одинаковых примесей в неупорядоченном I-слое, то возникает естественный вопрос о “границе устойчивости” этого эффекта по отношению к возмущениям модели Лифшица, обусловленным, например, дополнительным – “вертикальным” (диагональным) беспорядком Андерсона [13], учитывающим случайный “разброс” энергий актуальных для рассматриваемой задачи примесных уровней ε_i в неупорядоченном I-слое.

В рамках модели Андерсона энергия примесного уровня ε_i представляется в виде:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \xi, \quad (41)$$

где ξ – статистическая флуктуация энергии примесного уровня, имеющая некоторое непрерывное распределение плотности вероятности $\rho(\xi)$, которое можно выбирать из соображений математического удобства [14]. В рассматриваемой здесь задаче будем считать его гауссовским:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}w} e^{-\xi^2/w^2}, \quad 0 \leq w \ll \mu, \quad U_0 - \mu, \quad (42)$$

где w – характерная ширина распределения. Очевидно, что $\langle \xi \rangle_\xi = 0$, $\langle \varepsilon_i \rangle_\xi = \varepsilon_0$, где $\langle \dots \rangle_\xi$ – символ усреднения по распределению $\rho(\xi)$.

Граница устойчивости эффекта аномальной девиации определяется критическим значением ширины распределения (42) $w = w_c$, при превышении которого эта девиация “разрушается” сильными андерсоновскими флуктуациями энергии примесного уровня (41). Как и в задаче о переходе Андерсона “металл – андерсоновский диэлектрик” [13, 14], в рассматриваемой здесь задаче необходимо получить теоретическую оценку критического значения w_c .

В рамках модели Лифшица (все $\varepsilon_i = \varepsilon_0 = \text{const}$) причиной аномальной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта является сильная и резкая неоднородность коэффициента прохождения $D(\varepsilon)$ неупорядоченного I-слоя на характерных масштабах $0 \leq |\varepsilon| \sim \Delta_0$. Такая неоднородность $D(\varepsilon)$ “обеспечивается” наиболее вероятными и наиболее узкозонными ($\gamma_1/\Delta_0 < 1$) однопримесными ($m = 1$) квантовы-

ми закоротками при значениях девиации примесных уровней $\delta = \varepsilon_0 - \mu$ в пределах $0 \leq |\delta| \sim \Delta_0$.

При учете андерсоновских флуктуаций (41), (42) коэффициент прохождения однопримесной квантовой закоротки (34) становится функцией случайного аргумента ξ :

$$D_1^{\text{res}}(\varepsilon, \delta + \xi, u = \mathcal{L}) = \frac{\sigma(\varepsilon_0 + \xi)}{2} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \delta - \xi)^2}{\gamma_1^2(u)} \right], \quad (43)$$

которая при вычислении одночастичного тока через весь грязный SIN-контакт должна усредняться по статистическому ансамблю однопримесных квантовых закороток, присутствующих в неупорядоченном I-слое, т.е. по распределению $\rho(\xi)$ (42):

$$\langle D_1^{\text{res}}(\varepsilon, \delta + \xi, u = \mathcal{L}) \rangle_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} D_1^{\text{res}}(\varepsilon, \delta + \xi, u = \mathcal{L}) \rho(\xi) d\xi. \quad (44)$$

Среднее (44) легко вычисляется в предельных случаях слабых ($w/\gamma_1 \ll 1$) и сильных ($w/\gamma_1 \gg 1$) андерсоновских флуктуаций:

$$\langle D_1^{\text{res}}(\varepsilon, \delta + \xi, u = \mathcal{L}) \rangle_\xi = \left[1 - 0 \left(\frac{w^2}{\gamma_1^2} \right) \right] \frac{\sigma(\varepsilon_0)}{2} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \delta)^2}{\gamma_1^2} \right], \quad \frac{w}{\gamma_1} \ll 1, \quad (45)$$

$$\langle D_1^{\text{res}}(\varepsilon, \delta + \xi, u = \mathcal{L}) \rangle_\xi = \frac{\gamma_1 \sigma(\varepsilon_0)}{w} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \delta)^2}{w^2} \right], \quad \frac{w}{\gamma_1} \gg 1, \quad (46)$$

В пределе слабых флуктуаций усредненный коэффициент прохождения (45) с точностью до малых поправок $\sim (w^2/\gamma_1^2) \ll 1$ совпадает с соответствующим коэффициентом прохождения в модели Лифшица (34) и, следовательно, аномальная девиация одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта остается, практически, неизменной.

В пределе сильных флуктуаций энергетическая ширина усредненного коэффициента прохождения (46) “размазывается” андерсоновскими флуктуациями до значения $w \gg \gamma_1$, а его амплитуда уменьшается присутствием множителя $\gamma_1/w \ll 1$ в предэкспоненте.

Если $w \gg \Delta_0 > \gamma_1$, то усредненный коэффициент прохождения (46) на масштабах энергий $0 \leq |\varepsilon| \sim \Delta_0$ и девиаций примесного уровня $0 \leq |\delta| \sim \Delta_0$ становится практически однородной функцией энергии ε , и, следовательно, девиация одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта “разрушается” сильными андерсоновскими флуктуациями.

Таким образом, на качественном уровне становится ясно, что критическое значение безразмерно-

го параметра w/γ_1 , характеризующего силу андерсоновских флуктуаций, находится в интервале $1 < w_c/\gamma_1 < \Delta_0/\gamma_1$, внутри которого и происходит плавный переход от аномально сильной девиации одночастичной ВАХ грязного SIN-контакта к отсутствию девиации. Для рассмотренного в п. 5 численного примера $\Delta_0/\gamma_1 = 5$ и, следовательно, для этого примера $1 < w_c/\gamma_1 < 5$. Если, достаточно условно, в качестве критического выбрать значение в середине этого интервала, то для рассмотренного примера имеем: $w_c/\gamma_1 = 3$.

7. Возможные эксперименты. Эксперименты должны проводиться с контактами достаточно большой площади S (2), необходимой для подавления мезоскопических флуктуаций туннельного кондактанса G_n грязного контакта в области температур $T_A < T < \Delta_0$ и напряжений $0 \leq |eV| \ll T$, где $T_A \ll \Delta_0$ – температура кроссовера между одночастичным и двухчастичным туннелированием (см. п. 6). Возможны два типа экспериментов:

1. Эксперимент первого типа ассоциирован с рис. 3. Принципиальная схема эксперимента первого типа – основываясь на формуле (21), проводятся косвенные измерения мультипликатора Φ по результатам прямых независимых измерений одночастичного тока J , туннельного кондактанса G_n , сверхпроводящей щели Δ_0 , температуры T и напряжения V . Если полученные значения Φ оказываются заметно меньше единицы, то это может свидетельствовать о наличии в I-слое примесных уровней и соответствующих квантовых закороток со значениями девиации примесного уровня вблизи значения $\beta = 0$, а если значения Φ оказываются заметно больше единицы – вблизи значений $\beta = \pm 1$. Если с высокой точностью $\Phi = 1$, то либо “фазовая точка” контакта (c, β) находится вне области $\Omega_d(c, \beta)$, либо андерсоновские флуктуации превышают критическое значение и “разрушают” девиацию одночастичной ВАХ.

2. Эксперимент второго типа ассоциирован с рис. 4 и предполагает наличие электростатического затвора у SIN-контакта, с помощью которого можно изменять положение примесных уровней ε_0 в I-слое относительно уровня электронного химпотенциала контакта μ , т.е. регулировать девиацию примесного уровня по закону:

$$\beta(V_G) = \beta(V_G = 0) + \alpha V_G, \quad (47)$$

где V_G – потенциал затвора, α – некоторая константа.

Принципиальная схема эксперимента второго типа – провести измерения одночастичного тока (21) при постоянных значениях V и T , изменяя в соответ-

ствии с (47) девиацию $\beta(V_G)$ с помощью потенциала электростатического затвора V_G . Если зависимость тока J от девиации β будет иметь максимумы (аналогично рис. 4), при изменении β на несколько единиц, то это будет означать наличие актуальных для данной задачи квантовых закороток в I-слое.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова”. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. А. В. Селиверстов, М. А. Тарасов, В. С. Эдельман, *ЖЭТФ* **151**, 752 (2017).
2. F. W. J. Hekking and Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. B* **49**, 6847 (1994).
3. D. Golubev and I. Kuzmin, *J. Appl. Phys.* **89**, 6484 (2001).
4. В. Я. Кирпиченков, Н. В. Кирпиченкова, О. И. Лозин, А. А. Постников, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 530 (2016).
5. В. Я. Кирпиченков, Н. В. Кирпиченкова, О. И. Лозин, А. А. Пухлова, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 577 (2017).
6. А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **46**, 1823 (1964).
7. Л. С. Левитов, А. В. Шитов, *Функции Грина. Задачи с решениями*, Физматлит, М. (2002).
8. В. Я. Кирпиченков, Н. В. Кирпиченкова, О. И. Лозин, А. А. Косач, *Письма в ЖЭТФ* **112**, 114 (2020).
9. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, М. (1982).
10. И. М. Лифшиц, В. Я. Кирпиченков, *ЖЭТФ* **77**, 989 (1979).
11. В. Я. Кирпиченков, *ЖЭТФ* **116**, 1048 (1999).
12. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, М. (1987).
13. P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
14. Дж. Займан, *Модели беспорядка*, Мир, М. (1982).