

К теории катастроф для гомотопий Хованова–Рожанского

А. Анохина¹⁾

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 февраля 2024 г.

После переработки 5 марта 2024 г.

Принята к публикации 6 марта 2024 г.

Мы предлагаем еще один способ рассматривать наблюдаемые в когомологической квантовой теории поля, которые являются инвариантами узлов Хованова(–Рожанского). Для этого мы кратко резюмируем наши результаты относительно скачков в аналитических формулах для полиномов Хованова(–Рожанского). Из эмпирических данных мы заключаем, что здесь имеют место “регулярные” и “странные” катастрофы, которые кардинально различаются видом связанных с ними скачков в полиномах Хованова(–Рожанского). Это первый шаг к теории катастроф для наблюдаемых в когомологической квантовой теории поля.

DOI: 10.31857/S1234567824070012, EDN: KRBBVK

1. Введение. В последние несколько десятилетий топологические объекты активно изучаются в физическом контексте, так как они связаны с непертурбативными эффектами в различных физических моделях [1]. Относительно простым, но глубоко нетривиальным топологическим объектом являются узлы. Узлы возникают как топологические классы вильсоновских петель в квантовой теории поля, а инварианты узлов играют роль наблюдаемых в топологических квантовых теориях поля (таких, как трехмерная теория Черна–Саймонса), где существует только топологический класс вильсоновской петли [2]. С другой стороны, узлы можно использовать для описания квантовой запутанности, а инварианты узлов могут иметь приложения к теории топологического квантового компьютера [3]. В настоящем письме мы обсуждаем возможный подход к классу инвариантов узлов, который весьма близок к Теории катастроф для динамических систем.

Теория катастроф [4] – это мощный метод математической физики для изучения нелинейных динамических систем [5]. Обычно он применяется к системам дифференциальных уравнений, но близок по духу к гомотопическому исчислению в топологии [6]. Своего рода гибрид этих двух областей известен как когомологическая квантовая теория поля (ККТП) [7–10]. Такие модели представляются очень интересными и глубокими, и они могли бы быть полезными в различных приложениях как новые инструменты теории катастроф. Наша задача – использовать гомотопическое исчисление для узлов, чтобы раз-

вивать “Когомологическую теорию катастроф”. Под этим мы понимаем изучение семейства конструктивно определенных моделей ККТП, связанных с гомотопиями Хованова–Рожанского [11–14] для различных семейств узлов [15–17].

В обычном и изначальном смысле теорий катастроф называют метод работы с функциями, которые в ответ на непрерывное изменение аргумента испытывают дискретный скачок. Здесь же речь о функции дискретной величины: набора целых чисел – параметров, задающих узел внутри заданного семейства узлов. Основное сообщение этого письма состоит в том, что с этой функцией тем не менее можно работать методом, аналогичным классической теории катастроф. А именно, в определенных областях пространства параметров данная функция удовлетворяет разностным уравнениям и задается выражением, которое допускает аналитическое продолжение от целых к произвольным вещественным значениям параметров (для краткости мы здесь называем такую зависимость аналитической). В отличие от этого, на границах областей функция меняется скачком, который нарушает аналитическую зависимость, а разностные уравнения не выполняются. Как именно это может происходить, иллюстрируют примеры ниже. Каждый случай подробнее разобран в предыдущих работах нашей группы, приведенных в списке литературы. Здесь мы хотим подвести итог этим исследованиями и сделать выводы из накопленного материала.

2. Два основных вида катастроф полиномов KhR_N . Полином Хованова–Рожанского для калибровочной группы SU_N (KhR_N) в качестве индек-

¹⁾e-mail: anokhina@itep.ru

са ранг группы N , зависит от формальной “квантовой” переменной q и от формальной “гомологической” переменной t , а также равен полиному ХОМФЛИ в качестве граничного условия при $t = -1$: $KhR_N(t = -1, q) = H_N(q)$. Коэффициенты при степенях q и t в KhR_N нумеруют размерности гомологий, и поэтому они целые положительные. Ниже мы называем полином Лорана со всеми положительными (отрицательными) коэффициентами *положительным (отрицательным) полиномом*, а полином с различными знаками коэффициентов – *знаконеопределенным*.

Формализм $\mathcal{R}$ -матриц для полинома ХОМФЛИ [18] подразумевает, что полиномы ХОМФЛИ для семейства узлов, порожденного *эволюцией* диаграммы узла, то есть вставкой в ее некое место повторяющегося фрагмента (например, двунитевой косы с $2n + 1$ пересечениями), аналитически зависит от параметров семейства n_i через экспоненты $\lambda_i^{n_i}$, где λ_i (которые мы называем *собственными значениями*) – общие для семейства узлов, и, более того, для многих семейств узлов [19]. Удивительным образом, очень похожее экспоненциальное поведение на тех же семействах узлов наблюдается для полиномов KhR_N [15–17] – с точностью до отдельных скачков в аналитических выражениях, которые в силу граничного условия имеют вид $KhR_N \rightarrow KhR_N + (1 + t)KhR'_N$. С тем же успехом можно написать:

$$KhR_N = KhR'_N + (-t)^{\Theta_s} KhR''_N, \quad (1)$$

$$\Theta_s = \begin{cases} 1, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases},$$

– где s зависит как от параметров семейства $\{n_i\}$, так и от начального узла (с $n_i = 0$), но ни KhR'_N , ни KhR''_N не имеют скачков в окрестности точки $s = 0$. Мы называем такие нарушения аналитической зависимости **катастрофами** KhR_N (по аналогии с катастрофами аналитических решений нелинейных ОДУ).

3. Регулярные катастрофы. В настоящем разделе мы рассмотрим случаи, когда KhR''_N в (1) есть полином KhR_N для двунитевого узла, либо его небольшая модификация (см. примеры ниже). Мы называем такие катастрофы *регулярными*. Комплекс KhR_N для двунитевой косы имеет практически одинаковый вид для всех N [14]. Поэтому мы можем сосредоточиться здесь на полиноме Хованова $Kh \equiv KhR_2$, к которому относятся большинство наших явных формул.

Двунитевые торические и скрученные узлы. Основная составляющая в примерах ниже – это Kh

двунитевого торического узла [12], который является стандартным замыканием двунитевой параллельной косы (рис. 1а),

$$Kh^{\text{Tor}_{2,2n+1}} = (-t)^{-\Theta_n} q^{2n} F_{2n+1}(q^2 t),$$

$$\Theta_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$F_{2n+1}(\lambda) = 1 + \lambda^2 \frac{1 - \lambda^{2n}}{1 - \lambda} =$$

$$= \begin{cases} 1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{2n+1}, & n \geq 0 \\ -\lambda - \lambda^{-1} - \lambda^{-2} - \dots - \lambda^{2-2n} & n < 0 \end{cases}.$$

При $n > 0$ $F_{2n+1}(\lambda)$ – положительный полином от λ , чьи коэффициенты есть размерности гомологий Kh . При $n < 0$, $F_{2n+1}(\lambda)$ – отрицательный полином, чьи коэффициенты не могут быть размерностями гомологий. Однако множитель $(-t)^{-\Theta_n}$ изменяет свое значение с 1 при $n > 0$ на $-t^{-1}$ при $n < 0$ и компенсирует знаки². Граничное условие для Kh сохраняется, так как $(-t)^{\Theta_n} \equiv 1$ при $t = -1$. Как показывает непосредственная проверка, (2) согласовано с зеркальной симметрией для полиномов Хованова [11], а именно: $Kh_2^{\text{Tor}_{2,2n+1}}(q, t) = Kh_2^{\text{Tor}_{2,-2n-1}}(\frac{1}{q}, \frac{1}{t})$.

Скрученный узел, который получается с помощью замыкающего элемента из двунитевой антипараллельной косы (рис. 1б), имеет полином Kh

$$Kh^{\text{Tw}_{2n}} = (-t)^{-\Theta_n} (q^2 t)^{-2n} G_{2n}(q^2 t), \quad (3)$$

$$G_{2n}(\lambda) = 1 + \lambda \frac{(1 + \lambda^2)(1 - \lambda^{2n})}{1 - \lambda},$$

похожий на таковой для двунитевого торического узла³. Более того, можно аналогичным образом рассмотреть некий гибрид двунитевых торических и скрученных узлов [21].

Множественные двунитевые косы в “тонких” крендельных узлах. Следующий случай – это крендельный узел рода g , $P_{n_0, \dots, n_g}$ (рис. 1с). Как показано в [16], аналитическая формула для полинома Kh узла $P_{n_0, \dots, n_g}$ существует при всех $n_i > 0$. Далее, есть ряд так называемых регулярных областей в пространстве параметров $\{n_i\}$, где некоторые $n_i < 0$ и

²Ценой уменьшения всех степеней t на 1, что соответствует сдвигу последовательности гомологических размерностей на один относительно последовательности пространств комплекса.

³Заметим, что зеркальный образ скрученного узла имеет также зеркально отраженный замыкающий элемент (рис. 1б), так что Tw_{-2n} – не зеркальный образ Tw_{2n} . В [20] узел $(2n)_1$ – зеркальный образ Tw_{-2n} , а узел $(2n-1)_2$ топологически эквивалентен Tw_{2n} .

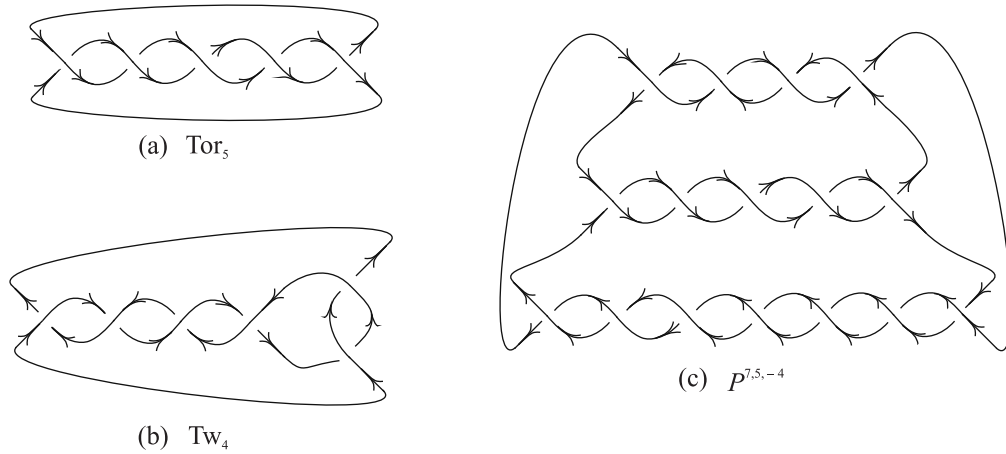


Рис. 1. (a), (b) – Двунитевой торический и скрученный узлы. (c) – Крендельный узел

$|n_i|$ достаточно велики, а полиномы Хованова удовлетворяют

$$Kh^{P_{n_0, \dots, n_g}} = (-t)^a Kh^{P_{n_0 > 0, \dots, n_g > 0}} \quad (4)$$

для некоторого a в зависимости от области. В частности, в наиболее изученном случае крендельного узла рода 2, полином Kh в регулярных областях задается как

$$\begin{aligned} Kh^{P_{n_0, n_1, n_2}} &= (-t)^a q^3 \Phi_{n_0, n_1, n_2}(q^2 t), \\ \Phi_{n_0, n_1, n_2}(\lambda) &= \lambda^{n_0 + n_1} \left\{ F_{n_0} \left(\frac{1}{\lambda} \right) F_{n_1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \right. \\ &\quad \left. + F_{>>_{n_0, n_1}} \left(\frac{1}{\lambda} \right) F'_{n_2}(\lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где F' и $F_{>>}$ – слегка измененные версии F из (2):

$$\begin{aligned} F_n(\lambda) &= 1 + \lambda^2 \frac{1 - \lambda^{n-1}}{1 - \lambda}, \\ F'_n(\lambda) &= \lambda^{-1} F_{n-1} + \lambda^n, \end{aligned}$$

$$F_{>>_{n_0, n_1}}(\lambda) = 1 + \lambda + \lambda^2 \frac{1 - \lambda^{n_0-1}}{1 - \lambda} + \lambda^2 \frac{1 - \lambda^{n_1-1}}{1 - \lambda}. \quad (6)$$

С точностью до циклических перестановок ручек кренделя и поворота плоскости проекции на π (на рис. 1c), можно положить $n_0 \geq n_1 \geq n_2$. Тогда (5) верно для $n_0 \geq n_1 \geq n_2 > 0$ (с $a = 0$), $n_0 \geq n_1 > 0 > -n_1 > n_2$ (с $a = -1$), $n_0 > -n_1 > 0 > n_1 \geq n_2$ (с $a = -1$), $0 > n_0 \geq n_1 \geq n_2$ (с $a = -2$)⁴.

Полином Φ (5) явно положительный для $n_0 > n_1 > n_2 > 1$. На самом деле, он явно положительный либо явно отрицательный на всем объединении

⁴Области коразмерности 1 с $n_i = 0$ или $n_i = \pm 1$ должны рассматриваться отдельно.

регулярных областей, как можно увидеть из эквивалентных форм (6). Множитель $(-t)^a$ в (5) тогда делает полином Kh явно положительным.

Все крендельные узлы во всех областях “гомологически тонкие”, т.е., их полиномы KhR_N получаются из их полиномов ХОМФЛИ подстановкой $q^2 \rightarrow -tq^2$, $q^{2N} \rightarrow -tq^{2N}$ [16]. В частности, это предполагает аналитическую зависимость KhR_N от N .

Двунитевой паттерн в сателлитах. Более сложным случаем являются двунитевые (торические и скрученные) сателлиты (рис. 2). В [17] мы изучили такие сателлиты для торических и скрученных узлов, для простых узлов не более чем с 7 пересечениями, для отдельных узлов с 8–10 пересечениями, а также для торических узлов $T[3, 5]$ и $T[3, 7]$. Теперь множитель с Θ возникает как коэффициент перед одним из слагаемых в ответе:

$$(q^3 t)^{-n} Kh^{S_{\text{Tor2}, n}^{\mathcal{K}}} = Kh^{\text{Tor2}, n+s} + (q^t)^{-n} \mu \mathfrak{K}^{\mathcal{K}}, \quad (7)$$

$$Kh^{S_{\text{Tw}_n}^{\mathcal{K}}} = Kh^{\text{Tw}_n+s} + (q^t)^{-n} \tau \mathfrak{K}^{\mathcal{K}},$$

где $\mu = -t^{-1} \frac{1-q^6 t^3}{1-q^2 t}$, $\tau = q(1+q^2 t)\mu$ не зависят от узла, а s – целочисленный инвариант $\mathcal{K}^5$.

В (7) Θ -скачки содержатся в $Kh^{\text{Tor2}, n+s}$ (2), Kh^{Tw_n+s} (3), в то время как функция $\mathfrak{K}$ – без скачков по n . Граничное условие при $t = -1$ для (7) подразумевает, что $\mathfrak{K}$ лишь немногим отличается от раскрашенного полинома ХОМФЛИ. Таким образом $\mathfrak{K}$ может быть использован как заместитель раскрашенного полинома Kh без скачков [17].

4. Странные катастрофы. Ниже мы приводим некоторые примеры катастроф, которые мы называем *странными*, – где скачки не имеют вида (2), и

⁵Мы не смогли распознать в s никакой из известных инвариантов узла.

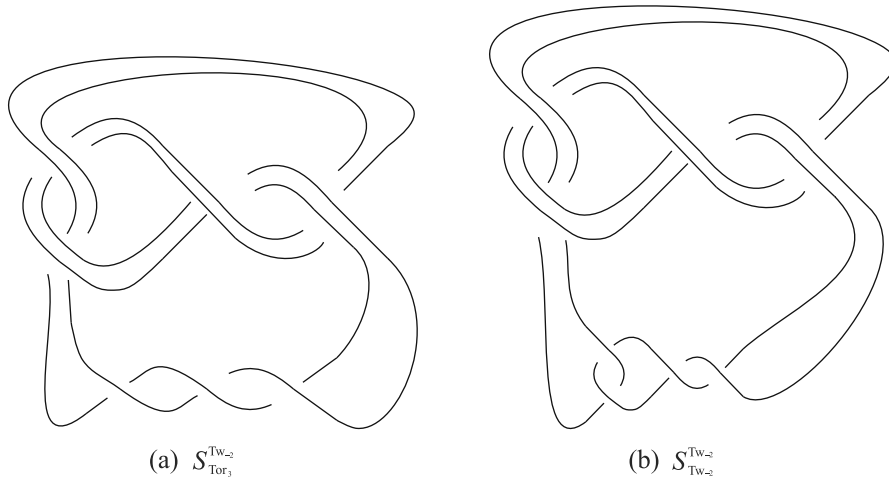


Рис. 2. (а), (б) – Торический и скрученный сателлиты узла-восьмерки

где KhR_N'' из (1) не содержится очевидным образом в KhR_N .

“Толстые” крендельные узлы Помимо описанных ниже “регулярных” областей⁶⁾, существуют исключительные области $-n_1 < n_2 < 0 < n_1 \leq n_0$ и $n_2 < n_1 < 0 < n_0 < -n_1$. Скачок полинома KhR крендельного узла рода два вблизи границы, например, первой исключительной области имеет вид

$$\begin{aligned} Kh^{P_{n_0, n_1, n_2}} &= q^3 \Phi_{n_0, n_1, n_2}^{\text{exc}}(q^2 t), \\ \Phi_{n_0, n_1, n_2}^{\text{exc}}(\lambda) &= \lambda^{n_0 + n_1 + n_2} \times \\ &\times \left\{ \lambda^{n_2} \Phi^{\text{exc}(1)}(\lambda) + (-t)^{\Theta_{\text{exc}}} \Phi^{\text{exc}(2)}(\lambda) \right\} \quad (8) \\ \Phi^{\text{exc}(1)} &= F_{n_0 + n_2} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \left\{ F_{n_1 + n_2 - 1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} \right\}, \\ \Phi^{\text{exc}(2)} &= f_{n_2 - 1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) F'_{n_2 + 1}(\lambda), \end{aligned}$$

где $f_n(\lambda) = \frac{1 - \lambda^{n-1}}{1 - \lambda}$, и $\Theta_{\text{exc}} = \begin{cases} 1, & -\min(n_1, n_2) < n_2 < 0 < n_1, n_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

Здесь нужно обратить внимание на два особых свойства крендельных узлов в исключительных областях. Во-первых, “поправка” $\Phi^{\text{exc}(2)}$ – это единственный член в $Kh^{P_{n_0, n_1, n_2}}$, который содержит n_2 в двух множителях одновременно. В этом смысле⁷⁾ $\Phi^{\text{exc}(2)}$ и $Kh^{P_{n_0, n_1, n_2}}$ в исключительной области зависят от $(q^2 t)^{2n_2}$ вместо $(q^2 t)^{n_2}$.

Во-вторых, в исключительных областях крендельные узлы “гомологически толстые”, т.е. их

⁶⁾И не рассмотренных здесь вырожденных случаев $\{n_0, n_1, n_2\} \in \{0, \pm 1\}$.

⁷⁾Мы называем это явление ускоренной эволюцией в [16].

KhR_N не получаются из соответствующих ХОМ-ФЛИ только лишь подстановкой, которая сохраняет аналитическую зависимость от N [16]. В согласии с этим, компьютерные вычисления с помощью *KhCa* [22] (применимы, когда одно из n_i четно) показывают скачок полинома KhR_N как функции N между $N = 2$ и $N = 3$ (с аналитической зависимостью для $N \geq 3$), для крендельных узлов как рода два, так и старших родов.

Зеркальная симметрия для многонитевых торических и для сателлитных узлов. В [15] полином Kh для положительной трехнитевой торической косы выражался как функция числа пересечений с двумя ветвями:

$$Kh^{Tor_{3, 3n+p}}(q, t) = \mathcal{K}_{3, n}^p(q, t), \quad p = 1, 2, n > 0. \quad (9)$$

Хотя полином Хованова обладает зеркальной симметрией по построению [11]:

$$Kh^{Tor_{3, 3n+1}}(q, t) = Kh^{Tor_{3, -3n-1}}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{t}\right) \quad (10)$$

– функция $\mathcal{K}$ ей не обладает. Вместо этого $\mathcal{K}_{3, n}^1(q, t) = -\frac{1}{t} \mathcal{K}_{3, n}^2\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{t}\right)$. Начиная с четырех нитей, аналогичные формулы для торических узлов $T[m, nm + p]$ ($1 \leq p \leq m - 1$ и взаимно просто с m) содержат функцию $\mathcal{K}_{m, n}^p(q, t)$, знаконеопределенную для отрицательных n . Полином Kh этих узлов задается другой аналитической функцией $\tilde{\mathcal{K}}_{m, n}^p(q, t)$, и, например, $\tilde{\mathcal{K}}_{4, n}^1(q, t) \sim \mathcal{K}_{4, n}^{-1}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{t}\right)$, и аналогично для большего числа нитей. Кроме того, узлы $Tor_{m, \mp 1}$ при $n = 0$ – тривиальные узлы с $Kh = 1$, что не является значением соответствующей аналитической функции ни для положительных, ни для отрицательных n .

Мы наблюдали аналогичную проблему для тех неторических четырехнитевых узлов, которые являются двунитевыми сателлитами двунитевых узлов,

как и для двунитевых сателлитов скрученных узлов, а также для скрученных сателлитов обоих типов узлов. Явные выражения для положительных и отрицательных узлов даны в [23], и они действительно связаны нетривиально.

Собственные значения для многонитевых торических и для сателлитных узлов. Полиномы Kh и даже Kh_N для всех торических узлов содержат зависимость от числа пересечений в виде двунитевого множителя $f_n(\lambda) = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$. Но чем больше растет число нитей, тем больше возникает собственных значений λ [15]. А именно, для некоторых положительных полиномов $P_I^\pm(q, t)$ (ниже $I \in \{\emptyset, 1, 2, 12, 13, 23, 24\}$),

$$\begin{aligned} \boxed{N=2} \quad \Lambda &= -q^2 t & (11) \\ \lambda_1 &= q^4 t^2 \mathcal{K}_{2,2n+1} = \Lambda^n \{1 + P^\pm(q, t) f_n(\lambda_1)\} \\ \lambda_2 &= q^6 t^4 \mathcal{K}_{3,3n\pm 1} = \Lambda^n \{1 + P_1^\pm(q, t) f_n(\lambda_2)\} \\ \lambda_3 &= q^8 t^6 \mathcal{K}_{4,4n\pm 1} = \Lambda^n \left\{1 + P_1^\pm(q, t) \frac{1}{1-\lambda_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (P_{12}^\pm(q, t) f_{2n}(\lambda_2) + P_{23}^\pm(q, t) f_n(\lambda_3))\right\} \\ n &> 0. \end{aligned}$$

Однако число собственных значений растет также вместе с рангом калибровочной группы N при $n > 2$. Например,

$$\begin{aligned} \boxed{N=3} \quad \lambda_4 &= q^8 t^5, \quad 3\Lambda = -q^4 t, \\ 3\mathcal{K}_{4,4n\pm 1} &= 3\Lambda^n \left\{1 + P_2^\pm \frac{1}{(1-\lambda_1)^2} f_{2n}(\lambda_2) + P_1^\pm(q, t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_1^2)} (P_{13}^\pm(q, t) f_n(\lambda_3) + P_{24}^\pm(q, t) f_n(\lambda_4))\right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Четырехнитевые собственные значения также присутствуют в полиномах Kh для двунитевых торических и скрученных сателлитов торических и скрученных узлов [23].

Таким образом, присутствие экспонент, отличных от $\lambda = q^2 t$ (катастрофа по λ), нетривиальное соотношение $Kh = KhR_2$ и KhR_3 (катастрофа по N) и странная катастрофа (по числу пересечений n), связанная с нетривиальной зеркальной симметрией полинома KhR_N , – для одного и того же узла – как будто имеют нечто общее друг с другом.

5. Заключение. Основываясь на примерах выше, мы различаем два вида катастроф полиномов KhR_N относительно вида скачка в аналитическом выражении для KhR_N . Катастрофы, которые мы называем регулярными, приводят к скачку (1) с положительными полиномами KhR'_N и KhR''_N (которые в этом смысле содержатся в KhR_N во всем пространстве параметров). Более того, KhR''_N составлен из полиномов KhR_N для двунитевой косы, единственный скачок в каждом из которых происходит

при $N = 0$ и необходим, чтобы обеспечить положительность полинома KhR_N [15–17]. Мы предполагаем, что регулярные катастрофы случаются, когда комплекс KhR_N содержит подкомплекс для положительной двунитевой косы, и он “переключается” в подкомплекс для отрицательной двунитевой косы [24, 25].

Другие катастрофы, которые мы называем странными, приводят к скачкам, где полиномы KhR'_N и KhR''_N в (1) не обязательно положительные [15–17] (в отличие от KhR_N). Более того, аналитическая зависимость полиномов KhR_N от параметров семейства узлов может всерьез различаться по обе стороны скачка. Такие скачки случаются, когда аналитическая зависимость содержит экспоненты $\lambda_k^{n_i}$ с λ_k , отличными от двунитевого значения $\lambda = q^2 t$. Например, новые λ_k появляются в двунитевых множителях $f_n(\lambda_k)$ в наших формулах для торических узлов с более чем двумя нитями, а также из члена $F_{n_2}(q^2 t) F'_{n_2}(q^2 t) \sim (q^4 t^2)^{n_2} + \dots$ в наших формулах для “толстых” крендельных узлов. Наиболее удивительно, что полиномы KhR_N вблизи странной катастрофы имеют скачки в аналитической зависимости от N для некоторого $N = N_0$. Более того, мы предполагаем здесь наличие подкомплекса (комплекса KhR_N), который является не двунитевым, но является периодическим, и содержит отображения, вырождающиеся при некоторых значениях N . “Схлопывание” такого подкомплекса и вызывает странную катастрофу KhR_N .

Наша следующая цель таким образом состоит в изучении комплексов KhR_N для обсуждавшихся здесь семейств узлов, особенно когда для них случаются катастрофы. Мы ожидаем, что это поможет нам как понять уже обнаруженные явления, так и сделать новые предсказания для более общих семейств узлов.

Мы надеемся, что наш подход даст новые инструменты для построения и изучения ККТП, как и для того, чтобы сделать гомотопические инварианты узлов более прозрачными через их интерпретацию как наблюдаемых в ККТП.

Финансирование работы. Работа была поддержана фондом развития теоретической физики и математики “Базис”, грант PostDoc-22-1-3-34-1.

Конфликт интересов. Автор не имеет конфликта интересов.

1. A. S. Anokhina. Phys. Part. Nucl. **51**(2), 223 (2020) [Phys. Part. Nucl. **51**, 172 (2020)].
2. J. M. F. Labastida, AIP Conf. Proc. **484**, 1 (1999); arXiv: 9905057 [hep-th].

3. N. Kolganov, S. Mironov, and Andrey Morozov; Nucl. Phys. B **987**, 116072 (2023); arXiv: 2105.03980 [hep-th].
4. V.I. Arnold, *Catastrophe theory*, Berlin Heidelberg, Springer (1992), p. XIII, 150.
5. V. Dolotin and A. Morozov, *The universal Mandelbrot set. Beginning of the story*, World Scientific, New Jersey (2006), p. 162.
6. S.I. Gelfand and Yu.I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer, Berlin (1994), p. 222.
7. M. Stosic and S. Gukov, Geometry & Topology Monographs **18**, 309 (2012); arXiv: 1112.0030 [hep-th].
8. S. Gukov, A. Schwarz, and C. Vafa, Lett. Math. Phys. **74**, 53 (2005); arXiv: 0412243 [hep-th].
9. D. Galakhov, JHEP **05**, 085 (2019); arXiv: 1702.07086 [hep-th].
10. A. Anokhina, Adv. Theor. Math. Phys. **33**(6), 1850221 (2018); arXiv: 1710.07306 [hep-th].
11. M. Khovanov, Duke Math. J. **101**, 359 (2000); arXiv: 9908171 [math.QA].
12. D. Bar-Natan, Algebr. Geom. Topol. **2**, 337 (2002); arXiv: 0201043 [math.QA].
13. M. Khovanov and L. Rozansky, Fund. Math. **199**, 1 (2008); arXiv: 0401268 [math.QA].
14. N. Carqueville and D. Murfet, Algebr. Geom. Topol. **14**, 489 (2014); arXiv: 1108.1081 [hep-th].
15. A. Anokhina and A. Morozov, JHEP **1804**, 066 (2018); arXiv: 1802.09383 [hep-th].
16. A. Anokhina, A. Morozov, and A. Popolitov, Eur. Phys. J. C **79**, 867 (2019); arXiv: 1904.10277 [hep-th].
17. A. Anokhina, E. Lanina, and A. Morozov, Nucl. Phys. B **998**, 116403 (2024); arXiv: 2308.13095 [hep-th].
18. A. Morozov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **835**, 284 (2010); arXiv: 1001.2003 [hep-th].
19. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, AIP Conf. Proc. **1562**, 123 (2013); arXiv: 1306.3197 [hep-th].
20. D. Bar-Natan, M. Scott, The Knot Atlas; url: <http://katlas.org>.
21. P. Dunin-Barkowski, A. Popolitov, and S. Popolitova, Int. J. Mod. Phys. A **37**(36), 2250216 (2022); arXiv:1812.00858 [math-ph].
22. L. Lewark, Knot software; <http://lewark.de/lukas/software.html>.
23. A. Anokhina, A. Morozov, and A. Popolitov. Int. J. Mod. Phys. B A **36**(34n35), 2150243 (2021); arXiv:2104.14491 [hep-th].
24. V. Dolotin and A. Morozov, Nucl. Phys. B **878**, 12 (2014); arXiv: 1308.5759 [hep-th].
25. A. Anokhina and A. Morozov, JHEP **07**, 063 (2014); arXiv: 1403.8087 [hep-th].