

# Ленты эллипсов поляризации в непараксиальных оптических полях (Мини-обзор)

К. С. Григорьев, Н. Ю. Кузнецов, В. А. Макаров<sup>1)</sup>

Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 марта 2024 г.

После переработки 9 марта 2024 г.

Принята к публикации 11 марта 2024 г.

Приведен краткий обзор выполненных в последние пять лет научных работ, посвященных описанию особенностей возникающих в пространстве нетривиальных топологических трехмерных структур электромагнитного поля – оптических лент, образуемых векторами, характеризующими размеры и ориентацию эллипса поляризации светового поля, при отслеживании изменения ориентации этих векторов вдоль замкнутых контуров различной формы, сцепленных с линиями сингулярности поляризации или расположенными в непосредственной близости от них. Описаны характеристики лент поляризации, построенных на произвольно ориентированных круговых контурах малых размеров, окружающих уединенную линию сингулярности круговой поляризации электромагнитного поля. Обсуждается топология лент поляризации света, рассеянного диэлектрической сферой и металлическим сфероидом субволновых размеров при падении на них плоских эллиптически поляризованных гармонических волн. Описаны оптические ленты поляризации, существующие в фокальной области параболического зеркала при острой фокусировке падающих на него лазерных пучков различного типа. Обсуждается топология лент эллипсов поляризации в электромагнитном поле лазерного излучения, распространяющегося в планарном метаматериале.

DOI: 10.31857/S1234567824080019, EDN: ANFKQQ

**Введение.** В 2005 году Айзек Фройнд предсказал [1] возможность управления поляризацией света, в результате которой происходит сворачивание поверхностей, образуемых характеризующими эллипс поляризации векторами при их прослеживании вдоль различно ориентируемых в пространстве замкнутых кривых, в различные геометрические фигуры: конусы, спирали, ленты Мебиуса и т.д. Спустя десять лет оптические ленты Мебиуса были экспериментально обнаружены в жестко сфокусированном излучении, поперечный профиль которого предварительно был специальным образом сконструирован при помощи жидкокристаллического устройства [2]. Позднее в схемах с жесткой фокусировкой излучения был продемонстрирован способ создания экзотических оптических лент Мебиуса, характеризующих поляризацию света векторов с переменной скоростью скручивания [3] и показана возможность генерации сложных топологических структур света путем управления сингулярностями поляризации в формируемых непараксиальных световых полях [4]. Недавние теоретические исследования [5] показывают, что при изменении эксцентриситета, азимутальной ориентации или центрирования траектории, используемой для

построения ленты, может меняться количество ее оборотов. Непараксиальные электромагнитные поля, содержащие ленты Мебиуса, могут быть образованы не только путем жесткой фокусировки излучения, но и простым скрещиванием параксиальных световых пучков [6].

Необходимая для генерации оптических лент современная экспериментальная техника позволяет в настоящее время получать лазерные пучки, состояние поляризации света в которых имеет сложную пространственную структуру. В частности, при помощи различных методик, включая спиральные фазовые пластинки, конические линзы [7] и зеркала [8], голографические пластины [9, 10], оптические элементы Панчаратнама–Берри [11, 12], создаются световые пучки, пространственные распределения характеризующих эллипс поляризации векторов в которых имеют достаточно сложную форму. Это позволяет генерировать и исследовать трехмерные распределения эллипсов поляризации света в случае, когда они не лежат в параллельных плоскостях. Примерами таких структур являются конфигурации сингулярных линий фазы, образующих в пространстве нетривиальные узлы [13–15], а также упомянутые выше оптические ленты Мебиуса [2, 5, 16–18].

<sup>1)</sup>e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

Более простыми топологическими структурами, в то же время тесно связанными с оптическими лентами, являются точки сингулярности поляризации светового поля. В таких точках один или несколько параметров, задающих форму и ориентацию эллипса поляризации распространяющегося излучения, становятся неопределенными [19]. Картины эллипсов поляризации, формируемые в окрестности таких точек, являются устойчивыми по отношению к малым возмущениям электромагнитного поля и обладают рядом схожих особенностей [4, 19–23]. В общем случае в непараксиальных электромагнитных полях точки пространства, в которых эллипс поляризации вырождается в окружность ( $C$ -точки), образуют изолированные кривые –  $C$ -линии, а точки пространства, в которых излучение линейно поляризовано ( $L$ -точки), – образуют  $L$ -линии [24]. В точках  $C$ -линии ориентации окружностей в пространстве, по которым движется конец вектора напряженности электрического поля, необязательно одинаковы. В непараксиальных электромагнитных полях, для характеристики сингулярностей поляризации используются параметры изотропии  $C$ - и  $L$ -точек. Они обобщают широко используемый при исследовании точек сингулярности поляризации параксиальных световых полей топологический индекс поляризационной сингулярности, равный нормированному на  $2\pi$  изменению угла поворота главной оси эллипса поляризации при обходе точки сингулярности по замкнутому контуру малого радиуса, лежащему в плоскости перпендикулярной направлению распространения излучения. Параметры изотропии совпадают по знаку с топологическими индексами паттернов, образуемых проекциями эллипсов поляризации вблизи точек сингулярности на специально выбранную плоскость. Для точек сингулярности круговой поляризации эта плоскость совпадает с плоскостью вращения вектора напряженности электрического поля, а для точек сингулярности линейной поляризации она перпендикулярна направлению, колебаний этого вектора.

Несмотря на возрастающее в последнее время количество теоретических работ, посвященных разнообразным вариантам оптических лент и их трансформациям [1, 5, 16–18, 25–30], а также развитию экспериментальных методов, позволяющих наблюдать оптические ленты [2, 6, 31, 32], создание строгой классификации лент и нахождение однозначной связи их характеристик с параметрами электромагнитного поля и геометрией контуров построения к настоящему моменту находятся в зачаточном состоянии, и работы в этом направлении практически единич-

ны. В [16] показано, что оптические ленты векторов главных осей эллипса поляризации, прослеженных при движении вдоль окружности исчезающе малого радиуса, имеют топологию листа Мебиуса только в том случае, когда данная окружность охватывает точку сингулярности поляризации, лежащую в плоскости контура построения ленты. В [27, 30] была установлена связь числа  $C$ -линий, охватываемых окружностью, вдоль которой строится лента связанных с эллипсом поляризации векторов, с числом полных оборотов, которые совершает соответствующий вектор вокруг контура построения, и показано, что это число всегда принимает полуцелые значения если число охватываемых  $C$ -линий нечетно. Авторы [33] утверждают, что при жесткой фокусировке пучков, содержащих сингулярности круговой поляризации, генерируются ленты Мебиуса, вид которых зависит от топологического индекса  $C$ -точки и направления вращения в ней вектора напряженности электрического поля. В [34] теоретически и численно показано, что при жесткой фокусировке светового пучка, изначально содержащего линии сингулярности круговой поляризации, в отдельных случаях вместо  $C$ -линий образуются  $C$ -точки, вокруг которых вращаются оси эллипсов поляризации, образуя в трехмерном пространстве ленты, имеющие топологию листа Мебиуса. В работе [29] было показано, что при произвольной ориентации контура построения оптической ленты относительно  $C$ -линии, число ее перекручиваний почти всегда равно  $1/2$ , а направление перекручивания обусловлено тем, как контур построения ленты ориентирован относительно плоскости, в которой преимущественно лежат эллипсы поляризации светового поля. Малые отклонения эллипсов от этой плоскости не влияют на число перекручиваний оптической ленты. Однако ленты эллипсов поляризации, описанные в ранних работах [1, 16] и экспериментально обнаруженные в [2], строились на контурах, лежащих в плоскости, в которой движется конец вектора напряженности электрического поля в точке сингулярности круговой поляризации. При этом их авторы обращают внимание на наличие в этом случае лент не только с числом перекручиваний, равным  $1/2$ , но и с числом перекручиваний, равным  $3/2$ .

Классическим способом получения оптических лент в полях электромагнитного излучения, обладающих достаточно большой продольной компонентой, является предложенная в [1, 18] схема с перекрытием двух пучков с различной круговой поляризацией, один из которых имеет фазовую сингулярность. Ленты могут наблюдаться при острой фокусировке пуч-

ков Пуанкаре [32], а также в некоторых задачах рассеяния света [25, 26]. В работах [26, 28] исследована связь топологии оптических лент, образуемых задающими эллипс поляризации векторами, с расположением и ориентацией контура их построения относительно топологического каркаса линий сингулярности поляризации (совокупности всех  $C$ - и  $L$ -линий) лазерного излучения, рассеянного металлической и диэлектрической частицами субволнового размера. Показано, что поверхности, заметаемые векторами осей эллипса поляризации при его прослеживании вдоль замкнутого контура, имеют топологию лент Мебиуса тогда и только тогда, когда их контуры построения сцеплены с  $C$ -линиями поля с нечетным коэффициентом зацепления.

Ниже описаны характеристики лент поляризации, построенных на произвольно ориентированных круговых контурах малых размеров, окружающих уединенную линию сингулярности круговой поляризации электромагнитного поля [29]. Обсуждается топология лент поляризации света, рассеянного диэлектрической сферой и металлическим сфероидом субволновых размеров при падении на них плоских эллиптически поляризованных гармонических волн [26, 28]. Описаны оптические ленты поляризации, существующие в фокальной области параболического зеркала при острой фокусировке падающих на него лазерных пучков различного типа [35]. Обсуждается топология лент эллипсов поляризации в электромагнитном поле лазерного излучения, распространяющегося в планарном метаматериале [36].

**2. Параметры эллипсов поляризации в непараксиальных оптических полях. Линии сингулярности круговой поляризации. Определение и основные свойства лент, образуемых эллипсами поляризации.** Напряженность полностью поляризованного электрического поля монохроматического света с частотой  $\omega$  в любой точке пространства, задаваемой радиус-вектором  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , может быть представлена в виде  $\text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\}$ , где комплексная амплитуда  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I$ . За один период колебаний поля конец вектора напряженности в общем случае описывает эллипс, лежащий в плоскости действительных векторов  $\mathbf{E}_R$  и  $\mathbf{E}_I$ . Нормаль к ней коллинеарна вектору  $\mathbf{N} = 0.5i[\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*]$ . Направления полуосей эллипса поляризации удобно описывать при помощи директоров (двунаправленных векторов) его большой и малой осей  $\vec{\mathbf{A}} = \{\mathbf{A}, -\mathbf{A}\}$  и  $\vec{\mathbf{B}} = \{\mathbf{B}, -\mathbf{B}\}$ , где взаимно перпендикулярные векторы  $\mathbf{A} = \text{Re}\{\mathbf{E}^* \sqrt{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})/|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|}\}$  и

$\mathbf{B} = \text{Im}\{\mathbf{E}^* \sqrt{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})/|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|}\}$  параллельны большой и малой осям эллипса поляризации. Директоры  $\vec{\mathbf{A}}$  и  $\vec{\mathbf{B}}$  являются неупорядоченными парами противоположно направленных векторов и тождественны сами себе при повороте на  $180^\circ$ . Вид эллипса поляризации в рассматриваемой точке пространства также ярко характеризует его степень эллиптичности  $M = 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}|/(|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2)$ , которая равна единице в случае циркулярно поляризованного излучения ( $C$ -точка) и нулю в случае линейно поляризованного излучения ( $L$ -точка).

При дополнительном не ограничивающем общности требовании коллинеарности векторов  $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$  и  $\mathbf{N}$ , комплексную амплитуду электрического поля  $\mathbf{E}$  можно записать в виде:  $\mathbf{E} = (\mathbf{A} + i\mathbf{B})e^{i\epsilon}$ , где  $\epsilon = \arg(\sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}})$  – выпрямляющая фаза. В силу неоднозначности извлечения комплексного корня, выпрямляющая фаза  $\epsilon$  определена с точностью до  $\pi$ , а векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – с точностью до одновременной смены знака, что соответствует симметрии эллипса относительно поворота на  $180^\circ$ . В случае, когда  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = 0$ , эллипс поляризации вырождается в окружность, что делает определение  $\epsilon$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  невозможным. Комплексное равенство  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = 0$  приводит к двум условиям, задающим в трехмерном пространстве изолированные  $C$ -линии, вдоль которых излучение имеет чисто круговую поляризацию.

В трехмерном пространстве  $C$ - и  $L$ -линии могут иметь достаточно сложную форму, образуя, в частности, торические узлы различного типа. Их можно представить в виде тонких эластичных нитей с сомкнутыми концами. Два и более непересекающихся узлов образуют зацепление, характеризующее их коэффициентом зацепления. При изменении параметров падающего излучения, среды, оптических элементов и т.д. может происходить деформация линий сингулярности поляризации электрического поля, их сближение, а затем – пересечение двух линий, в результате которого происходит их пересоединение (разрыв линий в точке пересечения с последующим мгновенным соединением образовавшихся частей в иную, отличающуюся от первоначальной, комбинацию их частей). Результатом такого пересоединения может быть возникновение нового, либо исчезновение или изменение коэффициента имеющегося зацепления.

Рассмотрим некоторую точку на  $C$ -линии и обозначим комплексную амплитуду электрического поля в ней за  $\mathbf{E}_0$ . Совместим с этой точкой начало декартовой системы координат и направим ее оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  вдоль трех взаимно перпендикулярных векторов  $\text{Re}\mathbf{E}_0$ ,  $\text{Im}\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{N}_0 = 0.5i[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*]$ . При таком выборе

осей  $\mathbf{E}_0 = A_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$ ,  $\mathbf{N}_0 = A_0^2\mathbf{e}_z$ , где  $A_0 = |\mathbf{E}_0|/\sqrt{2}$ . Произведение  $\mu \equiv (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$ , определяющее выпрямляющую фазу  $\epsilon$ , в достаточно малой окрестности начала координат может быть аппроксимировано линейной зависимостью

$$\mu(\mathbf{r}) = |\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|e^{2i\epsilon} \approx (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{g} = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})|_{\mathbf{r}=0}$ , а векторный дифференциальный оператор  $\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ .

В свою очередь, комплексная комбинация  $\mathbf{A} + i\mathbf{B}$  вблизи  $C$ -точки может быть также аппроксимирована, как

$$\mathbf{A} + i\mathbf{B} = \mathbf{E}e^{-i\epsilon} \approx \{\mathbf{E}_0 + (\mathbf{r}\nabla)\mathbf{E}\}|_{\mathbf{r}=0} \sqrt{\frac{\mu^*(\mathbf{r})}{|\mu(\mathbf{r})|}}. \quad (2)$$

Отметим, что значение комплексного корня в (2) не зависит от модуля  $\mathbf{r}$ , а только от его направления. Легко показать, что комплексный аргумент подкоренного выражения принимает все возможные значения от 0 до  $2\pi$ . При достаточно малом  $|\mathbf{r}|$  можно пренебречь вторым слагаемым в фигурных скобках при оценке векторных проекций  $\mathbf{A}_\perp$  и  $\mathbf{B}_\perp$  векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  на плоскость  $Oxy$ . Заметим, что это нельзя делать при оценке  $z$ -проекций этих векторов, так как первое слагаемое  $\mathbf{E}_0$  в фигурных скобках в (2) не имеет проекции на ось  $z$ .

В итоге, описывать распределение полюсов эллипса вблизи  $C$ -точки можно с помощью двух выражений:

$$\mathbf{A}_\perp + i\mathbf{B}_\perp \approx \mathbf{E}_0 e^{-i\epsilon}, \quad (3)$$

$$A_z + iB_z \approx (\mathbf{r} \cdot \nabla E_z)|_{\mathbf{r}=0} e^{-i\epsilon} \equiv -(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r})e^{-i\epsilon}. \quad (4)$$

Вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  в формуле (4) также непосредственно связан с распределением вектора нормали  $\mathbf{N}$  вблизи  $C$ -точки. Так как скалярное произведение  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{N})$  всюду равно нулю, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &= -\nabla E_z = -A_0^{-2} \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_0) = \\ &= A_0^{-2} \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{N}) = A_0^{-1} \nabla(N_x + iN_y), \end{aligned} \quad (5)$$

где все производные берутся в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Для дальнейшего описания  $C$ -точки нам будет удобно рассмотреть следующие комбинации декартовых компонент векторов  $\mathbf{g}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} g_+ &= g_x - ig_y = g_\perp \sqrt{1 + \Upsilon} e^{i\varphi_0}, \\ g_- &= g_x + ig_y = g_\perp \sqrt{1 - \Upsilon} e^{(3i\varphi_0 - i\beta)}, \\ g_z &= \kappa g_\perp e^{(2i\varphi_0 + i\varphi_z)}, \\ \gamma_+ &= \gamma_x - i\gamma_y = \gamma_\perp \sqrt{1 + \Upsilon} e^{i\beta_z}, \\ \gamma_- &= \gamma_x + i\gamma_y = \gamma_\perp \sqrt{1 - \Upsilon} e^{i(2\varphi_0 - \nu)}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) введены следующие обозначения:  $g_\perp = \sqrt{|g_x|^2 + |g_y|^2}$ ,  $\Upsilon = (|g_+|^2 - |g_-|^2)/(|g_+|^2 + |g_-|^2)$ ,  $\varphi_0 = \arg g_+$ ,  $\beta = \arg(g_+^3 g_-^*)$ ,  $\gamma_\perp = \sqrt{|\gamma_x|^2 + |\gamma_y|^2}$ ,  $\Upsilon_z = (|\gamma_+|^2 - |\gamma_-|^2)/(|\gamma_+|^2 + |\gamma_-|^2)$ ,  $\beta_z = \arg \gamma_+$  и  $\nu = \arg(g_+^2 \gamma_-^*)$ . Отметим, что параметр  $\varphi_0$  отвечает за поворот всего распределения электрического поля вблизи  $C$ -точки вокруг оси  $Oz$ . В дальнейшем без ограничения общности будем считать  $\varphi_0 = 0$ .

Точки сингулярности круговой поляризации принято делить на различные классы, анализируя изменение ориентации векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  при обходе  $C$ -точки по малому замкнутому контуру, как правило, лежащему в плоскости  $Oxy$ . Для простоты в качестве такого контура выбирают окружность с радиусом  $r_0$  и центром в начале координат:  $\mathbf{r} = r_0(\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi)$  и рассматривают две комбинации проекций векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$A_x + iA_y = -i(B_x + iB_y) = A_0 e^{i\epsilon(\varphi)}, \quad (7)$$

$$A_r + iB_r = A_0 e^{i\varphi - i\epsilon(\varphi)}, \quad (8)$$

где нижние индексы обозначают проекции векторов на оси  $Ox$  и  $Oy$  или на сам вектор  $\mathbf{r}$ , задающий точку на рассматриваемом круговом контуре. Аргументы комплексных выражений  $A_x + iA_y$  и  $B_x + iB_y$ , полученные из формулы (7), с одной стороны равны  $\epsilon$  и  $\epsilon + \pi/2$ , а с другой стороны являются углами  $\psi_A$  и  $\psi_B$  между соответствующими полуосями эллипса и осью  $Ox$ . Эти углы, как и  $\epsilon$ , определены с точностью до  $\pi$ . Производная функции  $\epsilon(\varphi)$

$$\epsilon'(\varphi) = \frac{\Upsilon}{2 + 2\sqrt{1 - \Upsilon^2} \operatorname{Re}(e^{2i\varphi} e^{i\beta})}, \quad (9)$$

причем знаменатель дроби неотрицателен. Следовательно, при  $\Upsilon > 0$  функция  $\epsilon(\varphi)$  монотонно возрастает, а при  $\Upsilon < 0$  функция  $\epsilon(\varphi)$  монотонно убывает. Соответственно проекции полюсов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  на плоскость  $xy$  совершают пол-оборота против ( $\Upsilon > 0$ ) или по ( $\Upsilon < 0$ ) часовой стрелке при однократном обходе начала координат (т.е. изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ ). Поэтому  $C$ -точки разделяются на два класса с положительным ( $\Upsilon > 0$ ) и отрицательным ( $\Upsilon < 0$ ) топологическим индексом [21]. Вторая характеристика  $C$ -точек ( $L$ -характеристика) равна количеству корней уравнений  $A_r(\varphi) = 0$  или  $B_r(\varphi) = 0$ . Используя (8), несложно показать, что корни  $\varphi_{An}$  и  $\varphi_{Bn}$  уравнений  $A_r(\varphi) = 0$  и  $B_r(\varphi) = 0$  попарно отличаются на  $\pi$  и их совокупность совпадает с множеством корней уравнения  $\operatorname{Im}[(A_r + iB_r)^2] = 0$ . При помощи замены  $u = e^{2i\varphi}$  это уравнение может быть сведено к виду

$$g_-^* u^3 + g_+^* u^2 - g_+ u - g_- = 0. \quad (10)$$

Физический смысл имеют только унимодулярные корни такого многочлена (они удовлетворяют условию  $|u_n| = 1$ ). Их количество равно 1 или 3, если дискриминант

$$D_L = (|g_+|^2 - 3|g_-|^2)^2 - \frac{4}{3}|g_+|^4 - \frac{8}{3}\text{Re}(g_-^* g_+^3) = \\ = \frac{4}{3}g_+^4 \left( 11\Upsilon^2 - 14\Upsilon + 2 - 2(1 + \Upsilon)\sqrt{1 - \Upsilon^2} \cos \beta \right) \quad (11)$$

отрицателен или положителен, соответственно.

Две вышеупомянутые характеристики не рассматривают зависимости  $z$ -проекций векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  от пространственных координат, а потому не могут полностью описать поле вблизи  $C$ -точки. Дополнить описание можно, рассмотрев в ее окрестности также поведение вектора  $\mathbf{N}$ , перпендикулярного к плоскостям эллипсов поляризации. В самой  $C$ -точке  $\mathbf{N}$  параллелен оси  $Oz$ , но в близлежащих к ней точках он также имеет малые ненулевые проекции на плоскость  $Oxy$ . Вид картины проекций вектора  $\mathbf{N}_\perp$  на эту плоскость  $Oxy$  определяется вектором  $\gamma$ . В начале координат эти картины имеют особую точку одного из трех возможных типов: “вихрь”, “седло” или “узел”. В соответствии с формулой (5)

$$N_x + iN_y \approx A_0(\gamma \cdot \mathbf{r}) = 0.5r_0 A_0(\gamma_+ e^{i\varphi} + \gamma_- e^{-i\varphi}), \quad (12)$$

$$N_\varphi = N_y \cos \varphi - N_x \sin \varphi \approx 0.5r_0 A_0 \text{Im}(\gamma_+ + \gamma_- e^{-2i\varphi}). \quad (13)$$

Здесь  $N_\varphi$  – проекция вектора  $\mathbf{N}$  на направление, задаваемое вектором  $[\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r]$ , где  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi$ . По аналогии с формулой (7), комплексный аргумент  $\arg(N_x + iN_y)$  равен углу между векторной проекцией  $\mathbf{n}_\perp$  и осью  $Ox$ . Этот угол увеличивается при обходе точки сингулярности, если  $|\gamma_+| > |\gamma_-|$  (т.е.  $\Upsilon_z > 0$ ) и уменьшается, когда  $|\gamma_+| < |\gamma_-|$ . Это позволяет разделить картины распределений  $\mathbf{N}_\perp$  на два класса с положительным и отрицательным топологическим индексом. Тип особой точки, лежащей в начале координат, определяется из зависимости  $N_\varphi(\varphi) = 0$ . При  $\Upsilon_z < 0$  корней такого уравнения всегда 4, и картина проекций  $\mathbf{n}_\perp$  имеет особенность типа “седло”. При  $\Upsilon_z > 0$  уравнение  $N_\varphi(\varphi) = 0$  может не иметь корней при  $|\gamma_-| < |\text{Im}\gamma_+|$  (или  $|\sin \beta_z| > \sqrt{(1 - \Upsilon_z)/(1 + \Upsilon_z)}$ ) или также иметь четыре корня, если последнее неравенство не выполняется, что соответствует типам “вихрь” и “узел”. Отметим, что картины проекций полуосей эллипса, задаваемых векторами  $\mathbf{A}$  (или  $\mathbf{B}$ ), и векторов нормали  $\mathbf{N}$  определяются наборами различных параметров и, следовательно, не связаны друг с другом.

Рассматривая поведение определенных проекций директоров  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ ,  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$  и вектора  $\mathbf{N}$ , задающих эллипс поляризации, мы неизбежно теряем часть информации о полном распределении непараксиального электромагнитного поля. Описанные выше оптические ленты позволяют восполнить эти потери. Дадим более строгое определение этому понятию. Будем называть оптической лентой, образуемой вектором  $\mathbf{V}$ , совокупность значений  $\mathbf{V}$ , вычисленных и отложенных от всех точек замкнутой гладкой кривой (кривой построения ленты). В роли вектора  $\mathbf{V}$  может выступать любой из векторов полуосей  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  или вектор  $\mathbf{N}$ , а кривая построения не обязана лежать в одной плоскости, но не должна иметь самопересечений. Кривую построения удобно задать параметрически при помощи вектор-функции  $\mathbf{r}(s)$ , где  $s$  изменяется от 0 до  $l$  ( $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(l)$ ), а  $l$  – длина кривой. Основной топологической характеристикой ленты  $\mathbf{V}(\mathbf{r}(s))$ , построенной на плоском контуре, является число перекручиваний  $\tau$ , определенное в работе [16]. Все ленты, рассматривавшиеся в этой работе, строились исключительно на контурах в виде окружностей. Для вычисления  $\tau$  в каждой точке такой окружности, параметрически задаваемой уравнением  $\mathbf{r}(s)$ , строится локально ортогональная ей плоскость  $\Pi_s$ . Индекс  $\tau$  определяется как число полных оборотов векторной проекции  $\mathbf{V}$  на плоскость  $\Pi_s$ , сосчитанное при однократном обходе контура построения. Для лент векторов  $\mathbf{N}$  он может принимать только целые значения, в то время как для лент директоров  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  и  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$  значения могут быть и полуцелыми, из-за тождественности  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  и  $-\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ .

**3. Ленты эллипсов поляризации, построенных на круговых контурах малых размеров, окружающих уединенную линию сингулярности поляризации электромагнитного поля.** В качестве контура построения ленты поляризации будем использовать окружность малого радиуса  $r_0$  с центром в начале координат (т.е. в точке сингулярности круговой поляризации), нормаль к плоскости которой выбирается произвольно и задается единичным вектором  $\mathbf{e}_\zeta$  (рис. 1). Вводя два ортогональных ему вектора  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta = [\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi]$ , зададим контур построения ленты формулой  $\mathbf{r}(s) = r_0(\mathbf{e}_\xi \cos(s/r_0) + \mathbf{e}_\eta \sin(s/r_0))$ , где  $s \in [0; 2\pi r_0)$ . Направление обхода контура связано с направлением нормали к нему правилом правого винта.

Векторная проекция  $\mathbf{A}$  на плоскость, перпендикулярную контуру построения ленты, имеет составляющие, направленные вдоль параллельного  $\mathbf{r}(s)$  единичного вектора и орта  $\mathbf{e}_\zeta$ . Приближенное выражение для величин  $A_r$  и  $A_\zeta$  этих составляющих можно

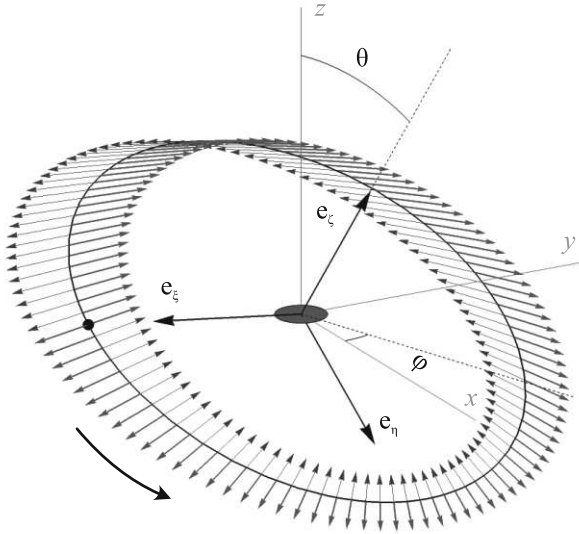


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пример ленты, образованной большой осью эллипса поляризации с числом перекручивания  $1/2$ . Каждая половина большой оси (толстая красная и тонкая синяя стрелки) совершает пол-оборота вокруг контура за один полный проход вдоль направления, указанного изогнутой стрелкой. Начальная (конечная) точка контура построения показана закрашенным черным кружком. Эллипс поляризации (круг) в начале координат показан красным цветом

получить из формулы (3) для проекции  $A_{\perp}$  на плоскость  $Oxy$ , игнорируя малую проекцию  $Oz$ :

$$A_r(\psi) = \operatorname{Re} \left\{ (E_{0\xi}^* \cos \psi + E_{0\eta}^* \sin \psi) e^{i\epsilon(\psi)} \right\}, \quad (14)$$

$$A_{\zeta}(\psi) = |E_{0\zeta}| \cos(\epsilon(\psi) - \arg(E_{0\zeta})). \quad (15)$$

При изменении  $\psi$  от 0 до  $2\pi$  обе проекции меняют знак на противоположный, что соответствует повороту эллипса поляризации на половину оборота, т.е. модуль числа перекручивания края ленты равен  $1/2$ , а сама лента является неориентируемой лентой Мебиуса. Начальная (конечная) точка замкнутого контура обхода и его направление могут быть выбраны таким образом, чтобы проекция  $A_{\zeta}(\psi)$  была в ней нулевой, а в прочих точках контура положительной. Если при этом знак проекции  $A_r(0)$  положительный (отрицательный), а знак  $A_r(2\pi)$ , соответственно, отрицательный (положительный), то эллипс поляризации совершает половину оборота против часовой стрелки (по часовой стрелке) при обходе контура. Поэтому число перекручиваний ленты, образуемой большими осями эллипсов поляризации, может быть вычислено по формуле:

$$\begin{aligned} \tau_A &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} A_r(0) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \operatorname{Re} (-i E_{0\xi}^* \exp(i \arg E_{0\zeta})) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} (E_{0\xi}^* E_{0\zeta}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn} ([\mathbf{e}_{\zeta} \times \mathbf{e}_{\xi}] \cdot \mathbf{N}_0) = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \{ ((\mathbf{g}^* \cdot \mathbf{N}_0) - g_{\zeta}^* N_{0\zeta}) E_{0\zeta}^2 \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вычисления числа перекручивания  $\tau_B$  используются аналогичные рассуждения, приводящие к выражению, совпадающему по виду с предпоследним выражением в (16). Однако, для выполнения условия  $B_{\zeta} > 0$  на всем контуре интегрирования, кроме начальной (конечной) точки замкнутого контура, саму начальную точку надо выбирать диаметрально противоположной той, которая использовалась для расчета  $\tau_A$ . В итоге число  $\tau_B$  оказывается *противоположным* числу  $\tau_A$ . Отметим, что числа  $\tau_A$  и  $\tau_B$  зависят не только от характеристик поля в  $S$ -точке, но и от ориентации плоскости самого контура построения.

Важно подчеркнуть, что формула (16) неприменима для тех случаев, когда аргумент функции  $\operatorname{sgn}$  в точности равен нулю. В первую очередь это соответствует ситуации, когда контур построения ленты лежит в плоскости  $Oxy$ . При полном пренебрежении величинами проекций  $A_z$  и  $B_z$  лента, построенная вдоль вышеупомянутого контура, окажется целиком лежащей в плоскости  $Oxy$  и, как следствие, незакрученной. В качестве базиса контура обхода выберем  $\mathbf{e}_{\xi} = \mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_{\eta} = \mathbf{e}_y$ , тогда параметр  $\psi$  будет тождественен полярному углу  $\varphi$  в плоскости  $Oxy$ .

Формулы (3)–(4) позволяют утверждать, что в малой окрестности точки сингулярности круговой поляризации проекция  $A_z$  пропорциональна модулю радиус-вектора  $r$ , в отличие от длины векторной проекции  $A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi$ . Поэтому для большей части контура построения ленты оси эллипса поляризации слабо отклонены от плоскости  $Oxy$ . Исключения из этого правила составляют малые участки контура построения, лежащие вблизи точек, в которых  $A_r$  обращается в нуль. Рассмотрим точку  $\varphi_1$ , такую, что  $A_r(\varphi_1) = 0$ . Если в ней знак производной  $A'_r(\varphi_1)$  положителен, то  $A_r$  меняет знак с отрицательного на положительный, когда монотонно меняющийся параметр  $\varphi$  проходит значение  $\varphi = \varphi_1$ . Если при этом значение  $A_z(\varphi_1)$  также положительно, то векторная проекция  $\mathbf{A}$  на плоскость  $Orz$  совершает при прохождении точки  $\varphi = \varphi_1$  пол-оборота по часовой стрелке и наоборот.

Аналогичное правило работает и для случая  $A'_r(\varphi) < 0$ : проекция совершит пол-оборота против часовой стрелки при  $A_z(\varphi_1) > 0$  и наоборот. В итоге число перекручиваний ленты, образуемой большими

осями эллипсов поляризации вдоль выбранного контура построения можно вычислить с помощью правила:

$$\tau_A = -\frac{1}{2} \sum_{\varphi_n} \operatorname{sgn} (A'_r(\varphi_n) A_z(\varphi_n)). \quad (17)$$

Здесь суммирование проводится по всем  $\varphi_n \in [0; 2\pi)$ , таким что  $A_r(\varphi_n) = 0$ . При помощи формул (1), (14), (15) выражение (17) можно записать в более конкретном виде

$$\tau_A = \frac{1}{2} \sum_{u_n} \operatorname{sgn} \left\{ \left[ 1 - 0.5\Upsilon + \sqrt{1 - \Upsilon^2} \operatorname{Re} (u_n e^{i\beta}) \right] \times \right. \\ \left. \left[ \sqrt{1 + \Upsilon_z} \sin \beta_z - \sqrt{1 - \Upsilon_z} \operatorname{Im} (u_n e^{i\nu}) \right] \right\}, \quad (18)$$

где  $u_n$  – унимодулярные корни уравнений (10), определяющие  $L$ -характеристику  $C$ -точки в центре контура построения ленты. Таким образом, если  $C$ -точка имеет тип “лимон”, модуль числа  $\tau_A$  может быть равен только  $1/2$ , в то время как для  $C$ -точек типа “монстар” и “звезда”  $|\tau_A|$  может иметь значения как  $1/2$ , так и  $3/2$ .

Формула для числа перекручиваний ленты  $\tau_B$ , образованной малыми осями эллипса поляризации, полностью аналогична (17) и, несмотря на различия в выражениях для векторов полуосей **A** и **B**, приводит к идентичному результату, т.е. для данного класса лент  $\tau_A = \tau_B$ . Анализ выражения (18) показывает, что, за исключением случая одновременного выполнения условия  $\Upsilon \in (0; 0.8)$  и  $D_L > 0$  (тип “монстар”), первая скобка в (18) может быть опущена без изменения итогового значения  $\tau_A$ . Кроме того, если картина проекций векторов нормали **N** к плоскостям эллипсов поляризации на плоскость  $Oxy$  (см. формулу (13)) имеет тип “вихрь”, выражения во вторых квадратных скобках в (18) всегда совпадают со знаком  $\sin \beta_z$ . Последнее также упрощает формулу для числа  $\tau_A$ :

$$\tau_A = \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \Upsilon \right) \operatorname{sgn} \sin \beta_z. \quad (19)$$

**4. Свойства оптических лент, построенных на не лежащих в одной плоскости контурах.** Для определения числа перекручиваний  $\tau$  оптической ленты, образуемой вектором **V**, необходимо построить ортогональные базисные векторы в плоскостях  $\Pi_s$ , перпендикулярных к касательной к контуру построения ленты, в каждой его точке [16]. В случае плоских контуров построения такого базиса не вызывает затруднений: один его вектор выбирается перпендикулярным к плоскости контура и является всюду постоянным, а другой лежит в плоскости контура и в каждой точке ему перпендикулярен. Однако в случае неплоского контура алгоритм построения

такого базиса гораздо более сложен и неоднозначен, поэтому в качестве альтернативы числу перекручиваний рассматривают его обобщение, известное как коэффициент перекручивания [37]:

$$\mathcal{T}_W = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial s} \times \mathbf{V}_p \right] \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) ds, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{V}_p = \frac{\mathbf{V} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{|\mathbf{V} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{r}})|}. \quad (21)$$

Для плоских контуров  $\mathcal{T}_W = \tau$ , однако для контуров, не лежащих в одной плоскости, интеграл (20) не всегда принимает целые или полуцелые значения, и, следовательно, теряет роль топологического индекса. Число перекручиваний  $\tau$  формально совпадает с интегралом  $\mathcal{T}_W$ , если для его вычисления в случае неплоских контуров строить в плоскостях  $\Pi_s$  так называемый базис Френе. Однако, такое требование может приводить к мнимому “перекручиванию”, независимому от вращения самого вектора **V**<sub>*p*</sub>, поскольку поперечные векторы базиса Френе при полном обходе вокруг не лежащей в одной плоскости кривой **r**(*s*) совершают вокруг нее

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{[\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)] \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} ds \quad (22)$$

оборотов [38]. В (22) двумя и тремя точками обозначаются вторая и третья производные параметрически заданной векторной функции **r**(*s*) по *s*. Интеграл  $\mathcal{T}$  также не обязательно является целым числом и называется коэффициентом полного геометрического кручения. Отметим, что этот коэффициент характеризует только контур построения, но не построенную на нем оптическую ленту.

Для неплоских контуров в качестве величины, аналогичной числу перекручивания  $\tau$ , следует выбрать целочисленный индекс внутреннего перекручивания  $\mathcal{N}$ , дискретность которого сохраняет за ним роль топологического индекса. Величина  $\mathcal{N}$  определяется как разность между двумя необязательно целыми числами  $\mathcal{T}_W$  и  $\mathcal{T}$ . Существует также возможность найти индекс  $\mathcal{N}$  как число перекручиваний  $\tau$ , если вместо базиса Френе в плоскостях  $\Pi_s$  использовать минимизирующее вращение базис Бишоп [39]. В случае плоских контуров базисы Френе и Бишоп тождественны, коэффициент полного геометрического кручения контура  $\mathcal{T} = 0$ , и все три числа  $\tau$ ,  $\mathcal{T}_W$  и  $\mathcal{N}$  совпадают.

Однако  $\mathcal{N}$  – не единственный дискретный индекс, обобщающий понятие числа перекручиваний. Если

образованная вектором  $\mathbf{V}$  оптическая лента имеет два края, задаваемых кривыми  $\mathbf{r}(s)$  и  $\mathbf{h}(s) = \mathbf{r}(s) + \varepsilon \mathbf{V}(\mathbf{r}(s))$ , то ее перекрученность также может быть охарактеризована при помощи интегральной формы Гаусса индексом зацепления ее краев [37]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{h}(s_2)}{|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{h}(s_2)|} \cdot [\dot{\mathbf{r}}(s_1) \times \dot{\mathbf{h}}(s_2)] ds_1 ds_2. \quad (23)$$

Здесь  $\varepsilon$  – коэффициент, обеспечивающий согласование размерностей векторов  $\mathbf{r}(s)$  и  $\mathbf{V}$  и отсутствие взаимных пересечений линий, определяемых векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{h}$  и имеющих длины  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. При этом  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(l_1)$ , а  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(l_2)$ . Для лент, имеющих только один край (оптические ленты Мебиуса), определение (23) неприменимо, но в этом случае индекс зацепления можно формально вычислить, представив край такой ленты как две независимые (не замкнутые) кривые, соответствующие выбору разного знака, образующего ленту вектора  $\mathbf{V}$ . В этом случае индекс зацепления краев ленты будет полуцелым числом.

Индекс внутреннего перекручивания  $\mathcal{N}$  в общем случае не совпадает с индексом зацепления краев  $\mathcal{L}$ , и их разность определяется теоремой Кэлугэряну [40], согласно которой:

$$\mathcal{L} - \mathcal{N} = \mathcal{T} + \mathcal{W}. \quad (24)$$

Здесь  $\mathcal{W}$  – еще одна характеристика контура построения ленты, называемая коэффициентом скрюченности [37]:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2)}{|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2)|^3} \cdot [\dot{\mathbf{r}}(s_1) \times \dot{\mathbf{r}}(s_2)] ds_1 ds_2. \quad (25)$$

Характеристика  $\mathcal{W}$  выражает число петель на плоской проекции кривой контура, усредненное по всем возможным направлениям проецирования, и необязательно является целым числом.

Важными характеристиками контура построения оптической ленты  $\mathbf{r}(s_1)$  являются его индексы зацепления  $\mathcal{L}_{C,L}$  с находящимися вблизи него линиями сингулярности круговой поляризации  $\mathbf{h}_C(s_2)$  и линейной поляризации  $\mathbf{h}_L(s_2)$ . Для нахождения  $\mathcal{L}_C$  необходимо положить в формуле (23)  $\mathbf{h}(s_2) = \mathbf{h}_C(s_2)$ , а для определения  $\mathcal{L}_L$  следует считать в ней  $\mathbf{h}(s_2) = \mathbf{h}_L(s_2)$ . Числа  $\mathcal{L}_{C,L}$  равны количествам охватов контуром построения линий сингулярности круговой и линейной поляризации. Знаки индексов  $\mathcal{L}_{C,L}$  не имеют особой важности, поскольку невозможно за-

дать физически связанные направления обхода контуров, определяемых векторами  $\mathbf{r}(s_1)$  и  $\mathbf{h}_{C,L}(s_2)$ .

**5. Топология лент эллипсов поляризации света, рассеянного диэлектрической сферой и металлическим сфероидом субволновых размеров.** В [26] взаимодействие эллиптически поляризованной плоской электромагнитной волны (длина волны  $\lambda = 710$  нм) с диэлектрической сферой радиусом  $R_0 = 90$  нм исследовалось с помощью пакета COMSOL Multiphysics методом конечных элементов (Finite Element Method). Для фиксированного набора параметров падающего излучения и диэлектрической среды задавалась граница расчетной области, на которой использовались периодические граничные условия. Расчетная область полностью окружалась модельной средой, способной поглощать все падающее на нее излучение (Perfectly Matched Layers). Это позволило избежать возможного “отражения” волны от ее границ. Используемая расчетная сетка состояла более чем из 50000 конечных элементов. При построении лент авторы ограничивались контурами, имеющими форму окружностей достаточно малого радиуса  $R$ , который был на порядок (или более) меньше, чем  $R_0 \ll \lambda$ .

Было установлено, что непараксиальное электрическое поле излучения, рассеянного диэлектрической сферой, содержит ленты поляризации с различными топологическими характеристиками. Ленты векторов  $\mathbf{N}$ ,  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  и  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ , построенные вдоль плоских контуров, которые не охватывают линии сингулярности поляризации, почти всегда являются тривиальными ( $\mathcal{L} = 0$ ). Пример такой ленты показан на рис. 2. Исключением является ситуация, когда нормаль к контуру обхода перпендикулярна к “усредненному” направлению одного из векторов  $\mathbf{N}$ ,  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  или  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ . В этом случае на контуре существует, по крайней мере, две точки, в которых упомянутый вектор будет практически коллинеарен касательной к контуру. В результате топология соответствующей ленты определяется поведением малых компонент этого вектора, которые описывают его отклонение от “среднего” направления и коэффициент зацепления рассматриваемой ленты может быть отличен от нуля. Авторы обнаружили в ближнем поле диэлектрической сферы ленты с коэффициентом зацепления  $\mathcal{L} = \pm 1$ , т.е. перекрученные на один полный оборот по или против часовой стрелки (см. рис. 2).

Результаты работы [26] сформулированы на основе построения и описания свойств около трех тысяч оптических лент, заметаемых векторами  $\mathbf{N}$ ,  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  и  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$  при их движении по различно ориентируемым в пространстве окружностям радиусом  $R \approx 10$  нм в ма-



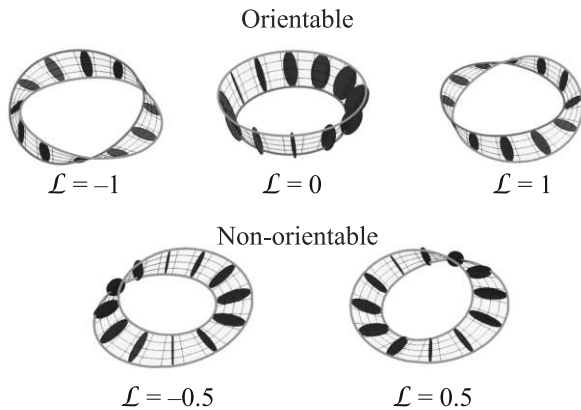


Рис. 2. (Цветной онлайн) Примеры лент, описываемых двунаправленным вектором  $\vec{A}$  большой оси эллипса поляризации с разными коэффициентами зацепления их краев. Эллипсы поляризации окрашены в красный цвет, если вектор электрического поля кажется наблюдателю вращающимся по часовой стрелке, и синий – в противоположном случае. Края лент показаны разными цветами, если их два (т.е. лента ориентируемая)

лой окрестности 27 случайным образом выбранных точек, находящихся как внутри, так и вне наночастицы на расстоянии порядка нескольких  $R$  от ближайшей линии сингулярности поляризации. Направление нормали к плоскости этих контуров менялось с шагом  $5^\circ$ . В результате только у 184 из 2916 лент, контуры которых были практически компланарны с отслеживаемым вектором, коэффициент зацепления был отличен от нуля, при этом положительные и отрицательные значения коэффициента  $\mathcal{L}$  встречались приблизительно в равной пропорции.

Численное моделирование, проведенное в широком диапазоне значений степени эллиптичности  $M$  падающей плоской электромагнитной волны, подтвердило, что ленты директоров осей эллипса поляризации  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  рассеянного излучения, построенные при их перемещении вдоль малых локально ортогональных  $C$ -линиям контуров, охватывающих их в различных точках этих линий, являются нетривиальными (характеризуются коэффициентом зацепления ее краев  $\mathcal{L} = \pm 1/2$ ). Это возможно благодаря неоднозначности выбора направлений  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  в точках, принадлежащих линиям. Ленты с полуцелым коэффициентом зацепления краев неориентируемы и представляют собой оптические ленты Мебиуса с полуоборотом в положительном ( $\mathcal{L} = 1/2$ ), или отрицательном ( $\mathcal{L} = -1/2$ ) направлениях по мере обхода охватывающего  $C$ -линию контура в положительном направлении (рис. 2). Исключением являются ленты, построенные вокруг точек, около которых происхо-

дит максимальное сближение двух  $C$ -линий, и контур, используемый для построения ленты, охватывает сразу обе линии сингулярности поляризации. В этом случае  $\mathcal{L} = \pm 1$  (рис. 2). Знаки коэффициентов зацепления лент  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  совпадали для определенных участков  $C$ -линий и были противоположны на других ее участках.

На рисунке 3 показано типичное распределение значений коэффициентов зацепления  $\mathcal{L}$  краев лент

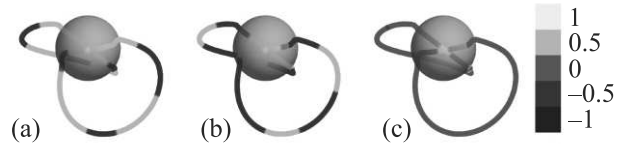


Рис. 3. (Цветной онлайн) Величина коэффициентов зацепления краев лент векторов  $\vec{A}$  (a),  $\vec{B}$  (b) и  $\vec{N}$  (c), охватывающих  $C$ -линию, при падении на сферу волны со степенью эллиптичности эллипса поляризации  $M = 0.75$

векторов  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{N}$ , построенных вокруг различных точек существующей около диэлектрической сферы  $C$ -линии, в случае, когда она один раз пересекает плоскость окружности, вдоль которой строилась лента. Большинство лент, заметаемых вектором  $\vec{N}$ , ожидаемо являются тривиальными. Исключение составляют те контуры построения, плоскость которых практически совпадают с “усредненным” направлением вектора  $\vec{N}$  в небольшой области вблизи центра контура. В результате численного моделирования не обнаружено связи между топологическим типом лент, заметаемых векторами  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{N}$  и охватывающих линию сингулярности поляризации, и знаком входящего в формулу (6) параметра изотропии  $\Upsilon$   $C$ -точки этой линии [22], в которой они пересекают плоскость контура построения. Знак  $\Upsilon$  совпадает со знаком топологического индекса паттерна, образуемого проекциями эллипсов поляризации вблизи  $C$ -точки на плоскость, совпадающую с плоскостью вращения  $\vec{E}$  в точке сингулярности круговой поляризации. Данный результат согласуется с ранней работой [27] и, несомненно, указывает на то, что для определения топологического типа ленты учет даже малой непланарности распределения осей эллипсов поляризации вблизи  $C$ -точки является необходимым.

Оптические ленты, построенные на неплоских контурах (см. рис. 4), имеют значительно более сложную форму. Примеры таких лент, приведены в работе [28], в которой они строились на основе аналитических формул [41] для компонент вектора напряжен-



Рис. 4. (Цветной онлайн) Примеры не лежащих в одной плоскости контуров построения лент

ности электрического поля электромагнитного излучения, рассеянного золотой частицей, имеющей форму вытянутого эллипсоида с межфокусным расстоянием 30 нм, в случае падения на нее плоской эллиптически поляризованной монохроматической волны ( $\lambda = 600$  нм). В [22] подробно описана возникающая в ближнем поле рассеянного излучения структура линий сингулярности поляризации и ее зависимость от угла между волновым вектором падающей на частицу волны и главной осью эллипсоида, от степени эллиптичности падающего излучения и от угла, задающего в плоскости перпендикулярной волновому вектору ориентацию главной оси его эллипса поляризации.

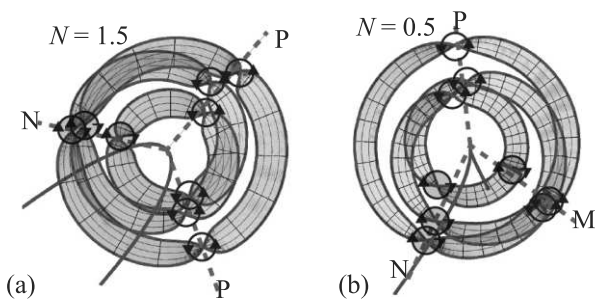


Рис. 5. (Цветной онлайн) Неориентируемые ленты, заметаемые векторной проекцией директора большой оси эллипса поляризации на ортогональную направлению обхода ленты плоскость, построенные вдоль контура 5 рис. 3, имеющего индекс зацепления с  $C$ -линией  $\mathcal{L}_C = 3$ , при значениях индексов внутреннего перекручивания равных 1.5 (а) и 0.5 (б). Красным цветом изображена сцепленная с лентой  $C$ -линия. Незакрашенными окружностями выделены точки положительного перекручивания ленты, закрашенными оранжевым цветом – отрицательного перекручивания (направление перекручивания показано стрелками)

Анализ более 20000 построенных лент и вычисленных характеризующих их коэффициентов  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{T}_W$  и индексов  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{L}$  позволил авторам работы [28] утверждать, что для всех оптических лент осей эллипса поляризации индекс их внутреннего перекручивания  $\mathcal{N}$  принимает целочисленные значения тогда и только тогда, когда зацепление их контуров построения с  $C$ -линией имеет четный индекс  $\mathcal{L}_C$ , и

полуцелые значения, когда индекс  $\mathcal{L}_C$  нечетный, что соответствует неориентируемой топологии ленты. На рисунке 5 в качестве примера приведены две неориентируемые ленты, заметаемые нормированной векторной проекцией  $\vec{A}_\perp$  директора большой оси эллипса поляризации на ортогональную направлению обхода ленты плоскость, построенные вдоль контура 5 рис. 4, имеющего индекс зацепления с  $C$ -линией  $\mathcal{L}_C = 3$ . Значения индексов внутреннего перекручивания  $\mathcal{N}$  оптических лент Мебиуса, соответственно равны 1.5 (рис. 5а) и 0.5 (рис. 5б). Красным цветом изображена сцепленная с лентой  $C$ -линия. Около 60 % из 20000 построенных лент имеют значения  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{L}_C|/2$ . Для остальных 40 % выполняется неравенство  $|\mathcal{N}| < |\mathcal{L}_C|/2$ .

Проведенный анализ показал, что перекручивание оптической ленты при движении вдоль контура ее построения происходит неравномерно. Резкие перекручивания ленты происходят в точках контура построения, наиболее приближенных к трем близко лежащим линиям, изображенным на рис. 5 голубым цветом, которые пересекаются в принадлежащей  $C$ -линии точке. Незакрашенными окружностями окружены точки, в которых происходит положительное перекручивание ленты. Окружности, ограничивающие закрашенную оранжевым цветом область, окружают точки, в которых происходит отрицательное перекручивание ленты. Направление перекручивания в обоих случаях показано черными стрелками. Буквой Р (N) отмечены те лучи, вблизи которых сгруппированы области положительного (отрицательного) перекручивания. Вблизи лучей, отмеченных буквой М, наблюдаются перекручивания в обоих направлениях. Для лент, обладающих свойством  $|\mathcal{N}| = |\mathcal{L}_C|/2$ , перекручивания вблизи двух из этих линий происходят в одном направлении, а вблизи третьей линии – в противоположном направлении (рис. 5а). Более редким является случай, когда вблизи двух голубых линий направления перекручивания ленты противоположны, а вблизи третьей линии присутствуют перекручивания и в одном, и в другом направлении (рис. 5б). Менее, чем для 0.2 % построенных лент направления перекручиваний вблизи двух линий совпадают, а вблизи третьей – смешаны.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев оптические ленты, заметаемые векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  при их прослеживании вдоль одного и того же контура имеют противоположенные знаки индекса внутреннего перекручивания  $\mathcal{N}$ . Последнее не является артефактом статистического обобщения. Как и в случае планарных контуров построения в схожей задаче рассеяния [26], для подавляющего большин-

ства контуров построения ленты векторов  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  и  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$  имеют противоположные знаки  $\mathcal{N}$ .

**6. Ленты поляризации света при его острой фокусировке параболическим зеркалом.** Оптические ленты, обладающие коэффициентами перекручивания  $\mathcal{T}_W = 1/2$  и  $\mathcal{T}_W = 3/2$ , обнаружены при жесткой фокусировке (числовая апертура  $NA = 0.9$ ) неоднородно поляризованных лазерных пучков параболическим зеркалом, вблизи фокуса которого топологический каркас электрического поля имеет весьма сложную структуру линий сингулярности поляризации [35]. Неоднородно поляризованный лазерный пучок падал параллельно оси  $z$  декартовой системы координат  $xyz$  из области  $z > 0$  на вогнутое параболическое зеркало, фокус и центр которого были расположены на оси  $z$ , в точках  $z = 0$  и  $z = -f$  соответственно. Для численного расчета компонент вектора напряженности электрического поля отраженного зеркалом пучка в окрестности его геометрического фокуса авторами использовалось точное решение уравнений Максвелла в квадратурной форме, полученное в классической работе [42]. Численное моделирование проводилось в условиях, разумно соответствующих эксперименту [2]: пучок радиусом  $w = 1$  мм имел длину волны  $\lambda = 530$  нм, фокусное расстояние зеркала  $f = 1.128$  мм, числовая апертура, определенная по уровню  $e^{-2}$ , составляла  $NA = 0.9$ . Интегрирование проводилось по поверхности зеркала от  $-5f$  до  $5f$  с разрешением  $\Delta x = \Delta y = f/10$ . Расчетная область представляла собой куб со стороной 4 мкм и центром в фокусе зеркала. Разрешение вдоль каждой из осей декартовой системы координат составляло 10 нм.

Рассматривалась фокусировка параболическим зеркалом эллиптически поляризованных Гауссова и Лагерр–Гауссова пучков и двух типов пучка Пуанкаре. В последнем вектор комплексной амплитуды напряженности электрического поля задавался формулой:

$$\mathbf{E}_\perp(x, y) = E_0 \{ \mu \mathbf{e}_+ + [\Lambda_+(x + iy)/w + \Lambda_-(x - iy)/w] \mathbf{e}_- \} \exp[-(x^2 + y^2)/w^2], \quad (26)$$

где  $E_0$  – размерная константа,  $\mathbf{e}_\pm = \mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_{x,y}$  – орты декартовой системы координат,  $\mu$  – вещественный коэффициент, определяющий относительный вклад гауссовой компоненты в напряженность электрического поля. Пучку Пуанкаре типа “звезда” соответствуют  $\Lambda_+ = 0$  и  $\Lambda_- = 1$ , а пучку Пуанкаре типа “лимон” –  $\Lambda_+ = 1$  и  $\Lambda_- = 0$ .

Для всех пучков падающего излучения в широком диапазоне значений их параметров в фокальной

области параболического зеркала  $C$ - и  $L$ -линии образуют нетривиальные торические узлы и зацепления [28], геометрия и топология которых определяется состоянием поляризации падающего излучения. Изменение последней, а также параметров зеркала, приводят к деформации линий сингулярности поляризации, их пересоединениям с изменением числа и топологии этих линий. Вблизи линий сингулярности поляризации в фокальной области зеркала существует большое количество оптических лент, образуемых в результате движения по окружностям радиуса  $R$  векторов  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ ,  $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$  и  $\mathbf{N}$ . Среди них встречаются оптические ленты с различными значениями коэффициента перекручивания, в том числе и ленты Мебиуса. Наиболее интересные из них образуются при жесткой фокусировке пучков Пуанкаре, если контуры их построения лежат в фокальной плоскости зеркала. При увеличении радиуса контура построения оптической ленты ее топология может меняться с неориентируемой на ориентируемую и обратно в зависимости от значения коэффициента зацепления между контуром построения ленты и линиями сингулярности циркулярной поляризации, входящими в топологический каркас электрического поля сфокусированного лазерного пучка.

На рисунке 6 в качестве примера изображены неориентируемые (а) и ориентируемые (б) оптические ленты директора большой оси эллипса поляризации, построенные вдоль лежащих в фокальной плоскости круглых контуров радиусом  $R$ , при острой фокусировке пучка Пуанкаре типа “звезда” ( $\mu = 3$ ). Две  $C$ -линии  $C1$  и  $C2$ , находящиеся в фокальной области параболического зеркала, изображены на нем толстыми кривыми в теплых тонах, а  $L$ -линии – тонкими в холодных тонах. Цвет  $C$ - и  $L$ -линий соответствует значениям индексов изотропии точек сингулярности поляризации электрического поля, связь которых с топологией оптических лент не рассматривалась. При малых  $R$  контур построения охватывает только линию  $C2$ , и оптическая лента является неориентируемой ( $\mathcal{T}_W = 3/2$ ). Она показана на рис. 6а (внутренняя лента). При увеличении  $R$  (но неизменности ориентации и положения центра контура построения ленты) контур начинает пересекать внутренние витки линии  $C1$ , причем вследствие симметрии электрического поля пучка Пуанкаре типа “звезда”, одновременно в трех точках. В результате коэффициент зацепления контура построения с линиями  $C1$  и  $C2$  становится четным, и оптическая лента  $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$  – ориентируемой (лента на рис. 6б,  $\mathcal{T}_W = 0$ ). При дальнейшем увеличении  $R$  контур построения вновь пересекает линию  $C1$  в трех точках

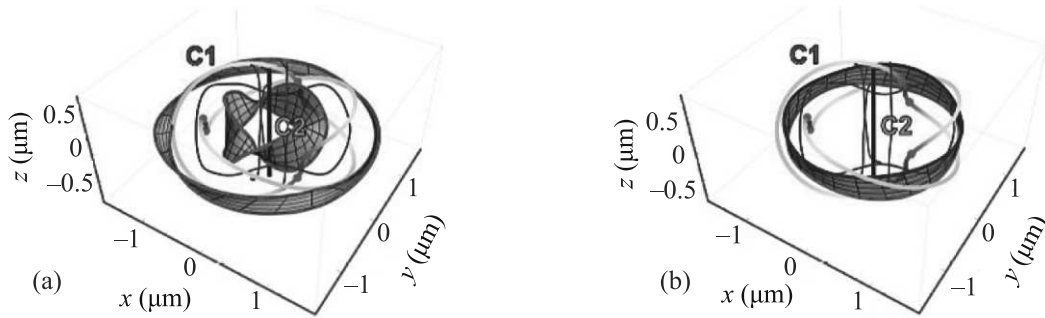


Рис. 6. (Цветной онлайн) Неориентируемые (а) и ориентируемые (б) оптические ленты  $\vec{A}$ , построенные вдоль лежащих в фокальной плоскости круглых контуров радиусами  $R_1$  ((а), внутренняя лента),  $R_2$  (б) и  $R_3$  ((а), внешняя лента) при острой фокусировке пучка Пуанкаре типа “звезда”, если  $R_1 < R_2 < R_3$ . Желто-красная и почти черная кривые –  $C$ -линии  $C1$  и  $C2$ , сине-зеленые кривые –  $L$ -линии

внешних витков, коэффициент  $\mathcal{L}_C$  становится равным единице и лента опять становится неориентируемой ( $\mathcal{T}_W = 3$ , внешняя лента на рис. 6а).

В электрическом поле сфокусированного пучка Пуанкаре типа “лимон” при малых значениях  $\mu$  также существуют оптические ленты Мебиуса директоров  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , но их индекс перекручивания равен  $1/2$ . Увеличение  $R$  сопровождается изменением их топологии, происходящем при каждом пересечении контуром построения новой  $C$ -линии. Однако эти пересечения происходят по одному, а не по три одновременно, как это имеет место в случае острой фокусировки пучка Пуанкаре типа “звезда”. Форма и свойства отдельных лент качественно совпадают с найденными ранее численно и обнаруженными в эксперименте [2].

**7. Топология лент эллипсов поляризации в электромагнитном поле лазерного излучения, распространяющегося в планарном метаматериале.** В [43, 36] с использованием метода конечных элементов высокого порядка проведено численное моделирование взаимодействия эллиптически поляризованного монохроматического излучения с обладающим ярко выраженными дисперсионными свойствами планарным метаматериалом, базовый элемент которого состоит из двух серебряных полосок, расположенных на расстоянии 70 нм друг от друга и имеющих форму параллелепипедов размерами  $65 \times 150 \times 20$  нм и  $65 \times 135 \times 20$  нм. Период структуры в направлениях, перпендикулярных волновому вектору падающей эллиптически поляризованной плоской монохроматической волны ( $\lambda = 690$  нм), был одинаков и равен 520 нм. Комплексная диэлектрическая проницаемость металла  $\tilde{\epsilon} = 1 - \omega_p^2 / [\omega(\omega - i\gamma)]$ , где  $\omega_p = 1.366 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$  – плазменная частота, а  $\gamma = 3.07 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$  – коэффициент затухания. Диэлектрическая проницаемость материала, окружающего полоски, считается равной единице.

Алгоритмы нахождения удовлетворяющего уравнению

$$\text{rot rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} [\tilde{\epsilon} \mathbf{E}] = 0, \quad (27)$$

комплексного вектора напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля распространяющейся в метаматериале волны и построения оптических лент поляризации подробно описаны в [36, 43].

Было зафиксировано наличие достаточно длинной (по сравнению с размерами металлических полосок) линии сингулярности циркулярной поляризации, имеющей две точки, вблизи которых различные ее сегменты сближаются на расстояние, сопоставимое с пространственным разрешением метода ее обнаружения. Ленты, построенные вдоль окружающих  $C$ -линию контуров в виде окружностей малого радиуса ( $R \leq 10$  нм), плоскости которых ортогональны касательным к  $C$ -линии, вдали от областей максимального близкого сближения двух ее отдельных частей имеют топологию лент Мебиуса. Модули векторов, определяющих оси эллипса поляризации, заметно изменяются в них вдоль контуров их построения. В случае, когда радиус окружности такой, что она охватывает одновременно два сегмента  $C$ -линии (это происходит в областях максимального сближения отдельных частей линии сингулярности круговой поляризации), оптические ленты поляризации являются ориентируемыми поверхностями.

На рисунке 7 в качестве примера приведены оптические ленты директора большой оси эллипса поляризации, построенные вдали (ленты (а) и (д), имеющие топологию лент Мебиуса) и вблизи (ленты (б) и (с), являющиеся ориентируемыми поверхностями) области максимального сближения сегментов  $C$ -линии. Для лучшей видимости сцепленные с  $C$ -линией ленты (построенные при  $R = 10$  нм) на рис. 7

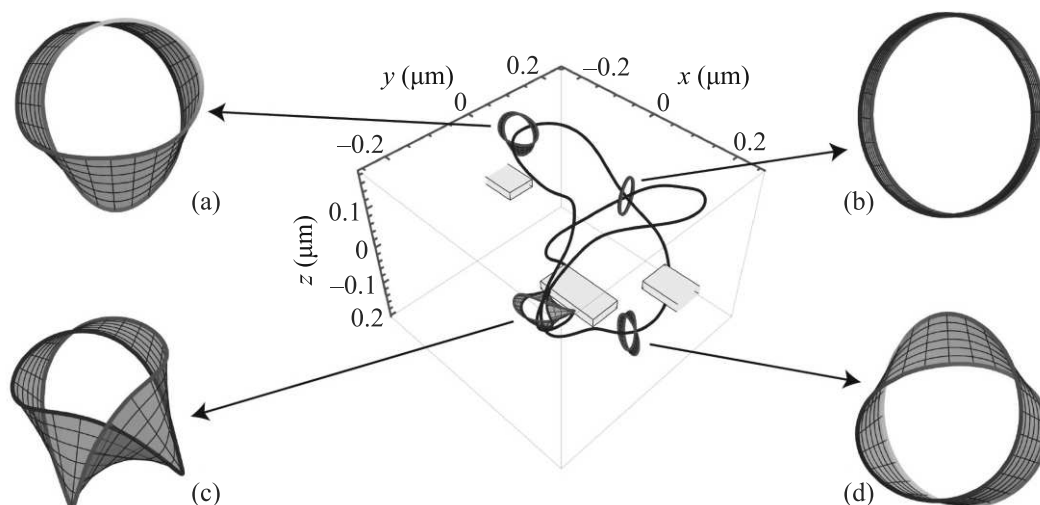


Рис. 7. (Цветной онлайн) Оптические ленты директора большой оси эллипса поляризации, построенные вдали (ленты (a) и (d)) и вблизи (ленты (b) и (c)) областей максимального сближения сегментов  $C$ -линии, окрашенной в фиолетовый цвет

увеличены в размерах при полном сохранении их характерных особенностей.

**8. Заключение.** Оптические ленты являются интереснейшим примером топологически нетривиальных структур электромагнитного поля лазерного излучения. Количество работ, в которых сообщается о демонстрации все новых и новых оптических лент поляризации и об их уникальных свойствах увеличивается с каждым месяцем. В ряде случаев они необыкновенно красивы. Так получены лента Мебиуса в форме сердца, двойная лента Мебиуса в форме цифры “8”, круглые ленты Мебиуса с различной скоростью скручивания поляризации [3] и многие другие. Ограниченный объем настоящей статьи не позволяет рассказать обо всех. Теоретическое описание условий появления и топологических свойств оптических лент поляризации представляется достаточно сложной, но весьма интересной задачей. Ее решение способствует лучшему пониманию тонких особенностей распространения света в различных оптических устройствах и его взаимодействия с веществом. Наряду с экспериментами по генерации лент поляризации теоретические работы стимулируют новые исследования, направленные на практическое их применение в различных задачах нанофотоники, например, в производстве метаматериалов с экзотическими оптическими свойствами, а также для создания уникальных оптических устройств, к которым можно отнести пинцеты для манипуляций с крошечными частицами материи. В частности, микрорезонаторы в виде ленты Мебиуса перспективны в новых классических и квантовых фотонных приложениях

(см., например, [44], где сообщается об экспериментальном наблюдении оптических фаз Берри, возникающих в микрорезонаторах в виде ленты Мебиуса с заданной геометрией поперечного сечения). Особенности оптических лент поляризации характерны для любого сложного векторного поля. Они естественным образом появляются и в неоднородных, но монохроматических, звуковых и поверхностных волновых полях в жидкостях или газах [45] (например, гравитационных или капиллярных). Отдельный интерес представляют оптические ленты в задачах нелинейной оптики, в которых появление точек сингулярности поляризации происходит в процессе нелинейного оптического преобразования регулярных эллиптически поляризованных пучков и импульсов [46].

**Финансирование работы.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (РНФ) # 23-22-00019.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. I. Freund, Opt. Commun. **249**, 7 (2005).
2. T. Bauer, P. Banzer, E. Karimi, S. Orlov, A. Rubano, L. Marrucci, E. Santamato, R.W. Boyd, and G. Leuchs, Science **347**, 964 (2015).
3. C. Wan and Q. Zhan, Opt. Express **27**, 11516 (2019).
4. K. Tekce, E. Otte, and C. Denz, Opt. Express **27**, 29685 (2019).
5. I. Freund, Opt. Lett. **45**, 3333 (2020).
6. E.J. Galvez, I. Dutta, K. Beach, J.J. Zeosky, J.A. Jones, and B. Khajavi, Sci. Rep. **7**, 13653 (2017).

7. F. Bouchard, H. Mand, M. Mirhosseini, E. Karimi, and R. W. Boyd, *New J. Phys.* **16**, 123006 (2014).
8. N. Radwell, R. D. Hawley, J. B. Götte, and S. Franke-Arnold, *Nat. Commun.* **7**, 10564 (2016).
9. F. Cardano, E. Karimi, S. Slussarenko, L. Marrucci, C. de Lisio, and E. Santamato, *Appl. Opt.* **51**, C1 (2012).
10. F. Cardano, E. Karimi, L. Marrucci, C. de Lisio, and E. Santamato, *Opt. Express* **21**, 8815 (2013).
11. Z. Bomzon, V. Kleiner, and E. Hasman, *Opt. Lett.* **26**, 1424 (2001).
12. H. Larocque, J. Gagnon-Bischoff, F. Bouchard, R. Fickler, J. Upham, R. W. Boyd, and E. Karimi, *J. Opt.* **18**, 124002 (2016).
13. D. Sugic and M. R. Dennis, *JOSA A* **35**, 1987 (2018).
14. H. Larocque, A. D'Errico, M. F. Ferrer-Garcia, A. Carmi, E. Cohen, and E. Karimi, *Nat. Commun.* **11**, 5119 (2020).
15. J. Zhong, S. Liu, X. Guo, P. Li, B. Wei, L. Han, S. Qi, and J. Zhao, *Opt. Express* **29**, 38849 (2021).
16. I. Freund, *Opt. Commun.* **283**, 1 (2010).
17. I. Freund, *Opt. Commun.* **283**, 16 (2010).
18. I. Freund, *Opt. Lett.* **35**, 148 (2010).
19. J. F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1999).
20. M. V. Berry, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, **6**, 675 (2004).
21. M. R. Dennis, *Opt. Lett.* **33**, 2572 (2008).
22. K. S. Grigoriev, N. Yu. Kuznetsov, Yu. V. Vladimirova, and V. A. Makarov, *Phys. Rev. A* **98**, 063805 (2018).
23. I. Freund, *Opt. Commun.* **199**, 47 (2001).
24. J. F. Nye and J. V. Hajnal, *Proc. R. Soc. A* **409**, 1836 (1987).
25. A. Garcia-Etxarri, *ACS Photonics* **4**, 1159 (2017).
26. N. Yu. Kuznetsov, K. S. Grigoriev, and V. A. Makarov, *Phys. Rev. A* **104**, 043505 (2021).
27. M. R. Dennis, *Opt. Lett.* **36**, 3765 (2011).
28. N. Yu. Kuznetsov, K. S. Grigoriev, and V. A. Makarov, *Laser Phys. Lett.* **20**, 085401 (2023).
29. K. S. Grigoriev and V. A. Makarov, *Opt. Lett.* **48**, 4420 (2023).
30. I. Freund, *Opt. Lett.* **36**, 4506 (2011).
31. T. Bauer, M. Neugebauer, G. Leuchs, and P. Banzer, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 013601 (2016).
32. T. Bauer, P. Banzer, F. Bouchard, S. Orlov, L. Marrucci, E. Santamato, R. W. Boyd, E. Karimi, and G. Leuchs, *New J. Phys.* **21**, 053020 (2019).
33. S. Kumar Pal, L. Somers, R. Kumar Singh, P. Senthilkumaran, and A. Arie, *Phys. Scr.* **98**, 055507 (2023).
34. V. V. Kotlyar, S. S. Stafeev, and A. G. Nalimov, *Computer Optics* **45**, 800 (2021).
35. N. Yu. Kuznetsov, A. E. Ryadchenko, K. S. Grigoriev, and V. A. Makarov, *Phys. Rev. A* **107**, 063506 (2023).
36. N. Yu. Kuznetsov, N. N. Potravkin, and V. A. Makarov, *Laser Phys. Lett.* **21**, 055401 (2024).
37. O. O'Reilly, *Link, Writhe, and Twist*, Springer International Publishing, Cham, Switzerland (2017).
38. J. J. Stoker, *Differential Geometry*, in series *Pure and Applied Mathematics*, Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey (2011), v. 20.
39. R. L. Bishop, *Am. Math. Mon.* **82**, 246 (1975).
40. G. Călugăreanu, *Czechoslovak Mathematical Journal* **11**, 588 (1961).
41. E. D. Chubchev, Yu. V. Vladimirova, and V. N. Zadkov, *Opt. Express* **22**, 20432 (2014).
42. P. Varga and P. Török, *JOSA A* **17**, 2090 (2000).
43. N. N. Potravkin, I. A. Perezhogin, N. Yu. Kuznetsov, K. S. Grigoriev, and V. A. Makarov, *Laser Phys. Lett.* **15**, 115403 (2018).
44. J. Wang, S. Valligatla, Y. Yin, L. Schwarz, M. Medina-Sánchez, S. Baunack, Ch. Hua Lee, R. Thomale, S. Li, V. M. Fomin, L. Ma, and O. G. Schmidt, *Nat. Photonics* **17**, 120 (2023).
45. K. Yu. Bliokh, M. A. Alonso, D. Sugic, M. Perrin, F. Nori, and E. Brasselet, *Phys. Fluids* **33**, 077122 (2021).
46. K. S. Grigoriev and V. A. Makarov, *JETP Lett.* **109**, 642 (2019).