

Случайная лазерная генерация в условиях диссипативного туннелирования в сетевом квантовом материале¹⁾

Д. В. Царёв, Е. С. Моругин, А. П. Алоджанц²⁾

Национальный исследовательский университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15 июля 2024 г.

После переработки 23 июля 2024 г.

Принята к публикации 24 июля 2024 г.

В работе выявлен новый механизм генерации случайного лазера, выполненного на основе случайной фотонной сети с диссипативным туннелированием фотонов между микрорезонаторами, помещенными в узлы такой сети и содержащими идентичные квантовые двухуровневые системы. Показано, что дополнительный источник фотонных потерь при туннелировании способствует выделению отдельных мод случайного лазера и достижению ими порога генерации даже при исчезающе малой инверсии населенностей. Усиление мод лазера в данном случае имеет интерференционную природу и связано с перераспределением энергии между узлами фотонной сети, соответствующими разным знакам отстройки частоты стационарных колебаний мод случайного лазера от частоты перехода двухуровневых систем. Показано, что для области нулевой этой отстройки присутствует традиционный механизм лазерной генерации, который демонстрирует особенности спектра одиночных микрорезонаторов, т.е. практически не зависит от топологических свойств сети и параметра туннелирования.

DOI: 10.31857/S0370274X24090029, EDN: YNDYNX

Физический эффект лазерной генерации в неупорядоченных средах, содержащих активные элементы и образующих так называемый случайный лазер, вот уже несколько десятков лет привлекает внимание в связи со своей доступностью и отсутствием резонаторов, столь необходимых для обычных лазеров [1]. С недавних пор здесь особый интерес связан со структурами, имеющими сетевое строение, среди которых следует выделить эффективно двухмерные материалы в виде фотонных сетей, ФС (*photonic networks*) [2, 3]. В таких средах продемонстрировано, что порог генерации существенно зависит от топологии графа [4]. В [5] нами предложена модель случайного лазера, состоящего из квантовых двухуровневых систем (ДУС), помещенных в микрорезонаторы (МР), между которыми имеется туннельная связь. Показано, что такой лазер обладает рядом особенностей в спектре, связанными со статистическими свойствами сетевой структуры. Среди них – существование топологически защищенного собственного значения Перрона, а также делокализация/локализация мод излучения в зависимости от вероятности связи произвольных МР между собой. Однако до сих пор вопросы интерференции излучения, приводящие к усилению или ослаблению излучения в таких слож-

ных системах, до конца не выяснены. Как правило, они хорошо известны для случаев наличия (или отсутствия) андерсоновской локализации излучения в среде [6]. Для ФС все выглядит сложнее ввиду особенностей спектра сетей, математически представляющих случайные графы, см., например, [7]. В этой связи было бы важным иметь механизм управления фазой светового излучения в рассматриваемых материалах, чтобы выявить особенности, вызываемые интерференцией излучения с учетом сложной топологии ФС. В данной работе предложено использовать явление диссипативного туннелирования, которое хорошо изучено, в частности, для джозефсоновских контактов Бозе-систем, см., например, [8]. В нашем случае речь идет о диссипативном туннелировании фотонов между различными МР, образующими 2D материал ФС. Поскольку эти МР имеют разное (но статистически управляемое в эксперименте) число связей между собой, то следует ожидать, что изменение фазы излучения при отдельных актах туннелирования оказывает неодинаковое влияние на усиление или, наоборот, ослабление излучения в различных участках ФС. Иначе говоря, диссипативное туннелирование при определенных условиях способно ускорить процесс лазерной генерации в материале с сетевым интерфейсом, что, по сути, является новым и нетривиальным эффектом. Здесь стоит отметить интерес к исследованиям эффектов, обуслов-

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: alexander_ap@list.ru

ленных диссипативным туннелированием в упорядоченных средах в виде цепочек волноводов [9]. Было показано, что в таких системах при определенном подборе коэффициентов туннелирования можно определенным образом перераспределять излучение в массиве волноводов. Однако в предлагаемой здесь работе речь идет именно о новом механизме лазерной генерации вследствие интерференции в диссипативной сетевой структуре.

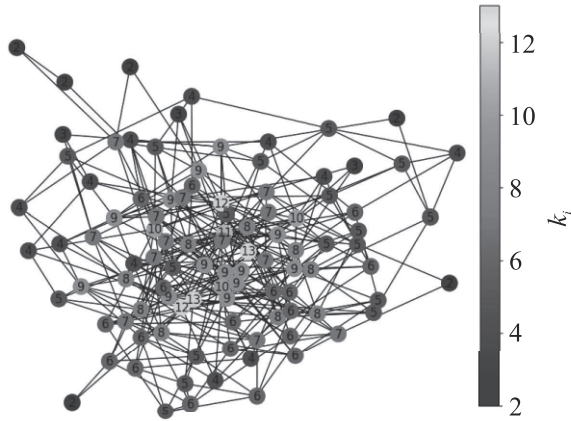


Рис. 1. (Цветной онлайн) Случайный граф фотонной сети с числом узлов $N = 100$ и степенями узлов от $k_{\min} = 2$ до $k_{\max} = 13$, что дает среднюю связность $\langle k \rangle = 6.32$ и второй момент $\zeta = 7.29$. Числа в узлах как их цвет обозначают степень узла k_i

На рисунке 1 изображен граф, соответствующий некоторой физической реализации ФС. Как пример, современные технологии изготовления и выращивания микро- и наноструктур позволяют, в принципе, получить случайную ФС, состоящую из туннельно связанных между собой полупроводниковых квантовых МР, содержащих ДУС, ср. с [10, 11]. Граф на рис. 1 сгенерирован с помощью библиотеки Python NetworkX по алгоритму Эрдоса–Реньи. Топологические особенности графа описываются распределением степеней узлов k_i , которые отмечены на рис. 1 цветом и цифрами в узлах. В частности, для дальнейшего анализа нам понадобятся первый и второй моменты этого распределения, $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k_j$ и $\zeta \equiv \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum_{j=1}^N k_j^2$, ср. с [12].

Эрмитов гамильтониан ФС для графа, изображенного на рис. 1, аналогичен рассмотренному нами ранее в [5]:

$$\hat{H} = \hbar \sum_{i=1}^N \left[\frac{\omega_0 \hat{\sigma}_i^z}{2} + \omega_{ph,i} \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_i + g(\hat{f}_i \hat{\sigma}_i^+ + \hat{f}_i^\dagger \hat{\sigma}_i^-) \right] - \frac{\hbar}{2} J \sum_{i,j=1}^N \tau_{ij} (\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_i + \hat{f}_i^\dagger \hat{f}_j), \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_i^z$ – оператор инверсии i -й ДУС; $\hat{\sigma}_i^\pm$ – лестничные операторы, описывающие возбуждения i -й ДУС; g – параметр взаимодействия одиночной ДУС с квантованным полем частоты $\omega_{ph,i}$ в i -м МР; τ_{ij} – элемент (случайной) матрицы смежности $\mathbf{T}$ сетевой структуры материала. Если i -й и j -й МР связаны между собой, то $\tau_{ij} = 1$, и фотоны имеют возможность туннелировать между ними с частотой, которую пока описываем вещественно определенным параметром J ; $\tau_{ij} = 0$ в противном случае.

Для получения основных уравнений на данном этапе анализа задачи можно воспользоваться подходом Гейзенберга–Ланжевена, который относительно просто позволяет учесть взаимодействие квантованного излучения с ансамблем ДУС, ср. с [13]. В работе нас будет интересовать приближение среднего поля, когда квантовыми корреляциями и флуктуациями величин можно пренебречь, заменяя соответствующие операторы средними значениями. В этом пределе с помощью (1) можно получить систему уравнений типа Максвелла–Блоха в виде (см. дополнительные материалы):

$$\dot{\mathcal{E}}_i = -(i\Delta_i + \kappa_i)\mathcal{E}_i - ig\bar{P}_i + iJ \sum_{j=1}^N \tau_{ij}\mathcal{E}_j; \quad (2a)$$

$$\dot{\bar{P}}_i = -\Gamma\bar{P}_i + ig\sigma_i^z \mathcal{E}_i; \quad (2b)$$

$$\dot{\sigma}_i^z = (\gamma_P - \gamma_D) - (\gamma_P + \gamma_D)\sigma_i^z + 2ig(\mathcal{E}_i^* \bar{P}_i - \mathcal{E}_i \bar{P}_i^*), \quad (2c)$$

где $\mathcal{E}_i = \langle \hat{f}_i \rangle$, $\bar{P}_i = \langle \hat{\sigma}_i^- \rangle$, $\sigma_i^z = \langle \hat{\sigma}_i^z \rangle$ – средние значения соответствующих операторных величин, $i = 1, \dots, N$, для которых “быстрые” колебания были отброшены заменой $\bar{P}_i(t) \rightarrow \bar{P}_i e^{-i\omega_0 t}$, $\mathcal{E}_i(t) \rightarrow \mathcal{E}_i e^{-i\omega_0 t}$. В (2) введены следующие обозначения: Γ – скорость затухания поляризации, которую считаем одинаковой для всех ДУС, κ_i – скорость потерь фотонов в i -м МР; $\Delta_i = \omega_{ph,i} - \omega_0$ – частотная отстройка для i -го МР, величину которой полагаем относительно небольшой, $|\Delta_i| \ll g$ для всех $i = 1, \dots, N$; γ_P – скорость накачки; γ_D – скорость затухания инверсии населенностей.

В работе нас интересуют стационарные состояния $\dot{\sigma}_i^z = 0$, $\bar{P}_i = P_i e^{-i\omega t}$, $\mathcal{E}_i = E_i e^{-i\omega t}$, для которых из (2) получаем

$$0 = (i\omega - i\Delta_i - \kappa_i)E_i - igP_i + iJ \sum_{j=1}^N \tau_{ij}E_j; \quad (3a)$$

$$0 = (i\omega - \Gamma)P_i + ig\sigma_i^z E_i; \quad (3b)$$

$$0 = (\gamma_P - \gamma_D) - (\gamma_P + \gamma_D)\sigma_i^z + 2ig(E_i^* P_i - E_i P_i^*), \quad (3c)$$

где ω физически представляет отстройку частоты стационарных колебаний моды случайного лазера от

частоты перехода ω_0 . А именно, если предположить, что частота стационарных колебаний некоторой моды есть ϖ , то эта отстройка, которую будем ниже называть просто частотой, будет $\omega = \varpi - \omega_0$. В частности, $\omega = 0$, если частота стационарных колебаний моды случайного лазера в точности равна частоте перехода $\varpi = \omega_0$.

Исследование системы связанных МР с учетом диссипативных эффектов при туннелировании фотонов между МР проводим на основе феноменологического подхода, полагая в уравнениях (3) параметр туннелирования $J \equiv J_R + iJ_I$ комплексным, где действительная часть $J_R > 0$ описывает когерентные эффекты туннелирования фотонов в условиях слабой связи микрорезонаторов, а мнимая часть $J_I > 0$ определяет величину потерь фотонов при туннелировании между ними, ср. с [8]. При этом мы ограничиваемся случаем, когда $J_I < J_R$. В пренебрежении эффектами насыщения, обусловленными кубичной нелинейностью среды, из (3) получим систему алгебраических уравнений

$$(\omega - \Delta_i + i\kappa_i)E_i - gP_i + J \sum_{j=1}^N \tau_{ij}E_j = 0; \quad (4a)$$

$$(\omega + i\Gamma)P_i + g\sigma_i^z E_i = 0; \quad (4b)$$

$$\sigma_i^z \simeq \sigma \equiv \frac{\gamma_P - \gamma_D}{\gamma_P + \gamma_D}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4c)$$

Система (4) в итоге сводится к уравнению

$$\{(\omega - \Delta_i + i\kappa_i)(\omega + i\Gamma) + g^2\sigma\}E_i + (J_R + iJ_I)(\omega + i\Gamma)\bar{E}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где $\bar{E}_i = \sum_{j=1}^N \tau_{ij}E_j$ – эффективное локальное среднее поле, действующее на i -й МР со стороны других МР, туннельно связанных с ним.

На рисунке 2 приведено численное решение для собственных частот системы (4), отражающее физику диссипативного туннелирования в ФС в виде случайного графа. Все физические величины и численные зависимости в работе, имеющие размерность частоты (т.е. обратной секунды), по сути, нормированы на константу связи g (также имеющую размерность $[c^{-1}]$) и являются безразмерными при численных расчетах. Для удобства этих расчетов формально полагам $g = 1$. Таким образом, значения выбираемых нами параметров κ_i , Γ физически соответствуют условию сильной связи, имеющим в данном случае вид неравенства $\kappa_i, \Gamma < 1$, ср. с [14].

Зелеными точками на рис. 2 изображен предел вещественного параметра туннелирования между МР при $J^{(1)} = J_R$, который был описан нами в [5];

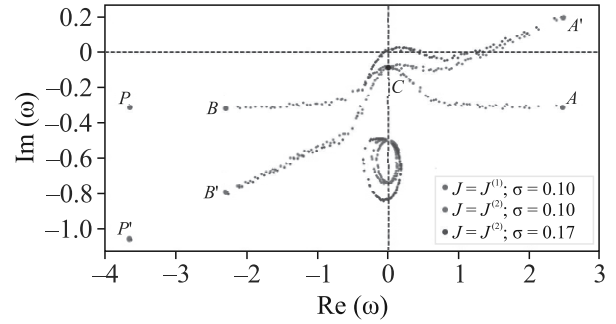


Рис. 2. (Цветной онлайн) Безразмерные собственные частоты случайного лазера на основе графа ФС, представленного на рис. 1 для $J = J^{(1)} = 0.5$ (зеленые точки), $J = J^{(2)} = 0.5 + 0.1i$ (красные и синие точки). Остальные параметры следующие: $g = 1$; $\Gamma = 0.5$; $\kappa_i \in [0.5\Gamma, 0.8\Gamma]$ и $\Delta_i \in [-0.1, 0.1]$ – случайные величины с равномерным распределением и средними значениями $\bar{\kappa} = 0.325$ и $\bar{\Delta} = 0$. Жирными зелеными точками выделены: частота Перрона (P), второе по величине собственное значение частоты после Перрона (A), вторая минимальная (с учетом знака) частота (B) и нулевая частота (C), соответственно. Для $J^{(2)}$ аналогичные частоты (жирные красные точки) обозначены заглавными буквами со штрихом

здесь он приведен для сравнения. Из рисунка 2 видно, что существует две области элементарных колебаний, соответствующих стационарным решениям системы (4). Они разделены энергетической щелью, равной $|\bar{\kappa} - \Gamma|$, где $\bar{\kappa} = \sum \kappa_i / N$ – среднее значение фотонных потерь из МР. Верхняя (оптическая) ветвь своей асимптотикой (снизу) имеет значение $\text{Im}(\omega_1) = -\bar{\kappa}$.

Собственные значения матрицы смежности $\mathbf{T}$ обладают определенной иерархией для случайного графа ФС на рис. 1, ср. с [7]. А именно, крайняя слева на рис. 2 точка P характеризует так называемое собственное значение Перрона, найденное численно для максимальной (по модулю) собственному значению матрицы смежности $\mathbf{T}$, и собственным вектором, содержащим только положительные числа, см. например, [15].

Второе по абсолютной величине собственное значение матрицы $\mathbf{T}$ описывается точкой A на рис. 2. Заметим, что точка B , располагающаяся второй слева после P на рис. 2, уже может и не являться третьим по абсолютной величине собственным значением матрицы смежности $\mathbf{T}$.

Важно отметить, что обе ветви элементарных колебаний, отмеченные зеленым цветом на рис. 2, полностью находятся в области потерь $\text{Im}(\omega_{1,2}) < 0$, т.е.

ниже порога лазерной генерации, определяемого черной штриховой линией $\text{Im}(\omega) = 0$. Как показано нами в [5], порог достигается с ростом накачки (с достижением необходимой инверсии σ), в первую очередь для точек вблизи значений $\text{Re}(\omega) = 0$, которые “стремятся вверх”, пересекая линию $\text{Im}(\omega) = 0$.

Ниже мы детально проанализируем случай диссипативного туннелирования, когда $J_I \neq 0$. На рис. 2 ему соответствуют значения собственных частот, обозначенные красным и синим цветами и рассчитанные в условиях наличия небольшой инверсии в ДУС. Численный расчет демонстрирует, что нижняя ветвь колебаний для красного и зеленого распределений (при достаточно малых J_I) на рис. 2 практически не изменяется для данных значений σ . При этом особого внимания заслуживает поведение верхней ветви частот. Распределения частот на рис. 2, отмеченные красным и синим цветом, демонстрируют наклон верхней частотной ветви. При этом “хвост”, включающий в себя собственное значение Перрона, “опускается”, т.е. происходит уменьшение (с учетом знака) величины $\text{Im}(\omega)$. Одновременно, с этим правый “хвост” частот на рис. 2 “поднимается”, переходя в область положительных значений мнимой части частот, $\text{Im}(\omega) > 0$, что уже соответствует усилению излучения в ФС.

В дополнительных материалах нами показано, за счет чего происходит “наклон” кривых относительно оси абсцисс на рис. 2. А именно, возникает дополнительный фазовый сдвиг, мнимая часть которого ответственна за увеличение потерь в области собственных частот $\text{Re}(\omega) < 0$ и, наоборот, усиление поля в области $\text{Re}(\omega) > 0$, т.е. когда частота стационарных колебаний мод случайного лазера больше частоты перехода ДУС, $\varpi > \omega_0$. При этом точка C , соответствующая значению центральной частоты, т.е. $\text{Re}(\omega) = 0$, остается неподвижной.

Чтобы разобраться в физике происходящего проведем оценку характерных частот, которые на рис. 2 описываются точками A (A'), B (B'), C и P , (P') для зеленых (красных) точек, соответственно. Здесь наиболее простым оказывается случай $\text{Re}(\omega) = 0$, соответствующий точке C . Из рисунка 2 видно, что диссипация при туннелировании не сказывается на положении этой точки. Численное моделирование показывает, что для центральной частоты влиянием локального поля в (2)–(5) можно пренебречь, поскольку выполняется условие $|\bar{E}_i| \ll |E_i|$ для всех i .

Как показано нами в дополнительных материалах, точка с максимальным значением поля для частоты с $\text{Re}(\omega) = 0$ имеет минимальную связность на графе, рис. 1, $k_i = 2$, что физически означает нали-

чие только двух МР, связанных с данным. Физически это означает, что в сумме (5) имеется только два слагаемых, которые вычитаются друг из друга, когда поля от этих МР деструктивно интерферируют. Таким образом, излучение случайного лазера на данной частоте почти не зависит от J и физически соответствует излучению N невзаимодействующих ДУС. В результате характерные частоты могут быть найдены с помощью (5), где влиянием туннельных эффектов можно пренебречь, так что

$$\{(\omega - \Delta_i + i\kappa_i)(\omega + i\Gamma) + g^2\sigma\} E_i = 0, \quad (6)$$

которое приводит нас к частотным зависимостям в виде

$$\omega_{C;1,2} = \frac{1}{2} \left(\Delta_i - i\xi_{\pm,i} \pm \sqrt{(\Delta_i - i\xi_{-,i})^2 - 4\sigma g^2} \right), \quad (7)$$

где $\xi_{\pm,i} \equiv \kappa_i \pm \Gamma$ – характерные диссипационные параметры для комбинированной системы МР и квантованного поля в i -м МР. Выражения (7) определяют две ветви элементарных возмущений, которые в пределе малой плотности возмущений ($\sigma \simeq -1$) уместно связывать с поляритонами верхней ($\omega_{C;1}$) и нижней ($\omega_{C;2}$) дисперсионных ветвей, см. например, [16]. С другой стороны, в обратном пределе, при $\sigma \simeq 1$, (7) описывают элементарные возмущения (поляритоны) рамановского типа, ср. с [17]. Далее нас будет интересовать случай с инверсией ДУС, когда $0 < \sigma < 1$.

Рассмотрим свойства частоты Перрона, которым для верхней ветви на рис. 2 соответствуют точки P и P' . Чтобы аналитически получить характерную частоту Перрона можно воспользоваться приближением отожденной сети $\tau_{ij} = k_i k_j / N \langle k \rangle$, которое справедливо для сложных (в том числе и безмасштабных) сетей при $N \gg 1$, см., например, [18]. При $J_I > 0$ частота Перрона для верхней ($\omega_{P;1}$) и нижней ($\omega_{P;2}$) ветвей может быть выведена на основе (5) в виде

$$\text{Re}(\omega_{P;1}) = \bar{\Delta} - J_R \zeta; \quad \text{Im}(\omega_{P;1}) = -\bar{\kappa} - J_I \zeta; \quad (8a)$$

$$\text{Re}(\omega_{P;2}) = -\varphi_P; \quad \text{Im}(\omega_{P;2}) = -\Gamma, \quad (8b)$$

где $\bar{\Delta} = \sum_i \Delta_i / N$ – среднее значение отстройки; $\varphi_P = \frac{g^2 \sigma J_R}{\zeta J_I^2}$ – набег фазы поля на частоте ω_P , обусловленный эффектами туннелирования. В отсутствие диссипативного слагаемого, т.е. при $J_I = 0$, выражения (8) описывают положение точки P для зеленой верхней ветви на рис. 2, ср. с [5].

При $J_I \neq 0$ мнимая часть $\text{Im}(\omega_{P;1})$ уменьшается на величину $J_I \zeta$, что уже определяет положение точки P' (красная кривая) на рис. 2, где $\zeta = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ – нормированный второй момент степени узла сети.

Если воспользоваться распределением степени узлов k_i по Пуассону, то можно получить оценку $\zeta \simeq 1 + \langle k \rangle$ (ср. с [12]), которая хорошо согласуется с численными данными из рис. 2; строгого равенства здесь не имеется, поскольку суммирование происходит на конечных пределах изменения k_i .

Для полной картины происходящего проанализируем теперь крайние точки A, A' и B, B' на рис. 2, располагающиеся на верхней ветви правее частоты Перрона. В частности, рассмотрим вторую по величине частоту после Перрона, которой соответствуют точки A, A' на рис. 2, обладающие максимальной положительной величиной $\text{Re}(\omega)$. Численное моделирование показывает, что фотонное поле на частоте ω_A распределено по узлам таким образом, что для всех узлов амплитуды полей E_i находятся в противофазе с эффективным локальным средним полем $\bar{E}_i$, т.е. можно записать $E_i \simeq e^{i\pi} \eta_A |\bar{E}_i|$, где $\eta_A = |\bar{E}_i|/|E_i|$ – эффективный параметр, характеризующий степень физического влияния соседей на i -й узел, численно равный $\eta_A \simeq 5$ для всех i , см. дополнительные материалы. Более того, численно выявлено, что значение η_A определяется лишь топологией графа на рис. 1 и не зависит ни от каких иных параметров случайного лазера. В результате чего (5) примет вид

$$(\omega_A - \bar{\Delta} + i\bar{\kappa})(\omega_A + i\Gamma) + g^2\sigma - \eta_A(J_R + iJ_I)(\omega_A + i\Gamma) = 0. \quad (9)$$

В этом случае для частоты ω_A получим

$$\text{Re}(\omega_{A;1}) \simeq \bar{\Delta} + \eta_A J_R; \quad \text{Im}(\omega_{A;1}) \simeq -\bar{\kappa} + \eta_A J_I; \quad (10a)$$

$$\text{Re}(\omega_{A;2}) \simeq -\varphi_A; \quad \text{Im}(\omega_{A;2}) \simeq -\Gamma, \quad (10b)$$

где $\varphi_A = \frac{g^2\sigma}{\eta_A|J|^2}$ – малая фазовая поправка на частоте ω_A .

Из (10a) можно заметить, что для точки A' на рис. 2 величина $\text{Im}(\omega_{A;1})$ увеличивается на $\eta_A J_I$, т.е. диссипативное туннелирование ведет к перераспределению энергии между узлами сети так, что в некоторой ее части происходит эффективное усиление поля. Как показывает численный анализ, выражение для (10a) оказывается справедливым (с точностью до замены η_A на соответствующий η -параметр, уникальный для каждой частоты) для всех частот, удовлетворяющих соотношению $\text{Re}(\omega_1) \gtrsim 1$, т.е. находящихся на асимптотике $\kappa_i \simeq \bar{\kappa} = 0.325$, см. зеленую верхнюю кривую на рис. 2.

Для характерных частот, обозначенных точками B, B' на рис. 2, можно считать, что поле E_i произвольного i -го МР синфазно со своим эффектив-

ным локальным средним полем, т.е. положить в (5) $E_i \simeq \eta_B |\bar{E}_i|$ ($\eta_B \simeq 4.67$), в результате чего имеем

$$\text{Re}(\omega_{B;1}) \simeq \bar{\Delta} - \eta_B J_R; \quad \text{Im}(\omega_{B;1}) \simeq -\bar{\kappa} - \eta_B J_I; \quad (11a)$$

$$\text{Re}(\omega_{B;2}) \simeq -\varphi_B; \quad \text{Im}(\omega_{B;2}) \simeq -\Gamma, \quad (11b)$$

где $\varphi_B = \frac{g^2\sigma}{\eta_B|J|^2}$.

Заметим, что фазовые поправки, аналогичные $\varphi_{P,A,B}$ (см. (8b), (10b) и (11b)) существуют для всех собственных частот случайного лазера; их влияние сводится к небольшому смещению нижней ветви влево, как это видно из рис. 2.

Из выражений (10a), (11a) следует, что в отсутствие диссипации при туннелировании $J_I = 0$ мнимые части характерных частот $\text{Im}(\omega_{A;1}) = \text{Im}(\omega_{B;1}) \simeq \bar{\kappa}$, что справедливо для точек A, B , принадлежащих верхней (зеленой) ветви на рис. 2. С другой стороны, при $J_I \neq 0$ из (10a), (11a) видно, что $\text{Im}(\omega_{A;1}) - \text{Im}(\omega_{B;1}) \simeq (\eta_A + \eta_B)J_I$, что определяет величину наклона верхней (красной) ветви на рис. 2, см. также дополнительные материалы.

При этом из (8b), (10b) и (11b) следует, что значения соответствующих характерных частот для нижней ветви устойчивы к умеренной диссипации фотонов в условиях туннелирования, поскольку в рассматриваемом приближении не зависят от J_I , ср. зеленую и красную точечную кривые на рис. 2.

С ростом J_I , когда этот параметр становится сопоставимым с J_R , происходит объединение верхней и нижней ветвей колебаний. С другой стороны, такой же эффект наблюдается при увеличении инверсии σ и фиксированном J_I . В этом случае область, занимаемая нижней ветвью увеличивается до соприкосновения с верхней ветвью, см. синие точки на рис. 2. Однако, как показывает численный анализ данного процесса, такой сценарий является несколько упрощенным. В процессе “притяжения” верхней и нижней ветвей с изменением соответствующих параметров они сперва терпят разрыв, и лишь потом объединяются определенным образом. Такое поведение собственных частот в рассматриваемой задаче, безусловно, представляет самостоятельный интерес и будет отдельно проанализировано как численно, так и аналитически.

На рисунке 3 представлены зависимости $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$ для случайного лазера на основе ФС, представленной графом на рис. 1, как функции от инверсии населенностей σ в логарифмическом масштабе. Рисунок 3а демонстрирует знакомый эффект затягивания частоты [6], при котором с ростом инверсии σ частоты мод излучения стремятся к частоте перехода ДУС, что в наших обозначениях соответствует нулевой частоте $\omega \simeq 0$. Затягивание частот наиболее

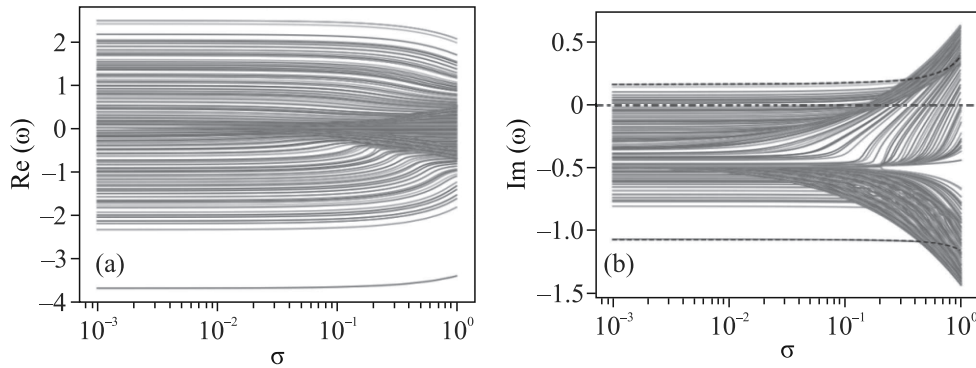


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости: (а) – $\text{Re}(\omega)$ и (б) – $\text{Im}(\omega)$ от инверсии населенностей σ (в логарифмическом масштабе). $J = 0.5 + 0.1i$, остальные параметры такие же как на рис. 2. На рисунке (б) нижней штриховой линии соответствует частота Перрона, а верхней – вторая по величине частота после перроновской; штрих-пунктирная линия определяет пороговое значение случайного лазера, когда $\text{Im}(\omega) = 0$

выражено для мод, изначально близких к этой частоте, находящихся в интервале вещественных значений частоты $-1 \leq \text{Re}(\omega) \leq 1$, см. рис. 2. Стоит отметить, что при наличии диссипативного туннелирования, $J_I > 0$, данный эффект выражен слабее, чем при $J_I = 0$. В то же время частота Перрона (нижняя синяя кривая на рис. 3а) защищена от эффекта затягивания частоты; аналогично, верхняя линия на рис. 3а, которой соответствует вторая по величине частота после Перрона, слабо меняются с ростом σ .

Мнимые части частот, $\text{Im}(\omega)$, изображенные на рис. 3б, дают понимание об усилении или подавлении отдельных мод случайного лазера. Физическая картина здесь значительно богаче и сложнее, чем в случае отсутствия диссипации при туннелировании, рассмотренном в [5]. Значение $\text{Im}(\omega) = 0$ (горизонтальная штрих-пунктирная линия на рис. 3б) определяет порог, который моды должны преодолеть для достижения усиления, соответствующего условию $\text{Im}(\omega) > 0$.

На рисунке 3б отчетливо различимы две области частот, попадающих в режим лазерной генерации. В частности, из рис. 3б следует, что в условиях реализации достаточно малой инверсии ДУС, $0 < \sigma \leq 0.15$, часть мод уже находится в области усиления за счет диссипативного туннелирования между МР. Эти моды связаны со второй частотой Перрона (верхняя штриховая линия) и ее соседями в правом (“поднимающемся”) хвосте распределения частот на рис. 2. Можно видеть, что эти моды не меняются с ростом σ , оставаясь равномерно усиленными при любых $\sigma > 0$. Вместе с тем с увеличением инверсии населенностей $\sigma > 0.15$ в область усиления попадает мода с $\text{Re}(\omega) = 0$, а также другие моды, расположенные вокруг нее, т.е. моды, соответствующие излучению N невзаимодействующих ДУС, см. синюю верхнюю

ветвь на рис. 2. По сути, этот механизм генерации аналогичен описанному нами в [5] и имеет место в отсутствие диссипации при туннелировании. Здесь же интересно заметить, что максимум верхней синей ветви несколько смещен в сторону положительных $\text{Re}(\omega) > 0$, см. рис. 2. При приближении к полной инверсии ДУС, $\sigma \rightarrow 1$, уже моды около этого максимума (центральной частоты $\text{Re}(\omega) = 0$) преобладают в излучении случайного лазера, так как их усиление $\text{Im}(\omega) > 0$ существенно превышает усиление, сформированное на второй частоте, следующей за частотой Перрона. На рисунке 3б этим модам соответствует верхняя область треугольной формы, ограниченная в нижней своей части черной штриховой линией.

Таким образом, можно выделить два механизма лазерной генерации в ФС, представленной случайным графом на рис. 1. Первый механизм схож с излучением одиночных ДУС и связан непосредственно с инверсией населенностей σ , он не зависит от свойств сети, и от J , в частности. Принципиально иной механизм генерации связан с диссипативным туннелированием в ФС. Он имеет интерференционную природу и связан с перераспределением энергии излучения по сети, а потому зависит от J и слабо зависит от σ . А именно, область сильного усиления мод с $\text{Im}(\omega) > 0$ компенсируется ростом потерь в модах с $\text{Im}(\omega) < 0$, как это следует из рис. 2 и 3б.

В заключение, в работе исследована модель случайного лазера, состоящего из микрорезонаторов с ДУС, помещенных в узлы фотонной сети, представляемой случайным графом Эрдоса–Реньи. Ребра графа характеризуют фотонную туннельную связь между МР, которая в нашем случае допускает потери фотонов при туннелировании. Показано, что данная ФС обеспечивает новый, ранее не изученный механизм лазерной генерации в сложно структуриро-

ванных средах, имеющий интерференционную природу. Выявлено, что внесение дополнительного источника потерь в случайный лазер приводит к усилению отдельных его мод, что способствует достижению лазерной генерации при малых значениях инверсии населенностей. Численный анализ показал, что спектральные моды излучения случайного лазера по-разному зависят от свойств сети. С одной стороны, вторая по величине частота в спектре, и все моды с $\text{Re}(\omega) > 0$ испытывают интерференцию с разностью фаз π между локальными полями и полями отдельных МР в сети, так что излучение на этих модах усиливается. С другой стороны, излучение на частоте Перрона, а также на частотах мод в области $\text{Re}(\omega) < 0$ находится в фазе с локальными полями и релаксируют быстрее, чем это было бы в отсутствие диссипации при туннелировании. При этом моды спектра в самой близости от значения $\text{Re}(\omega) = 0$, когда частота лазерной генерации равна частоте перехода в ДУС, выявляют свойства излучения N неавтодействующих ДУС. Для этих мод туннелирование фотонов в ФС эффективно подавляется, и как результат – только инверсия населенностей, добротность микрорезонаторов и деполяризация ДУС влияют на переход к лазерной генерации для данных мод. Большинство же мод случайного лазера в той или иной мере демонстрирует оба механизма лазерной генерации.

В данной работе не рассматривались кубично-нелинейные (по полю) эффекты, которые могут быть весьма полезными с точки зрения различных приложений предсказанных нами явлений на практике. В частности, речь идет о возможности создания эффективной когерентной машины Изинга – физического устройства для ускорения расчетов задач оптимизации, ср. с [19]. Эти вопросы будут в фокусе нашего внимания в последующих публикациях.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда # 23-22-00058 “Когерентные эффекты в двумерных квантовых материалах с интерфейсом сложных сетей”.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. F. Luan, B. Gu, A. S. Gomes, K. T. Yong, S. Wen, and P. N. Prasad, *Nano Today* **10**, 168 (2015).
2. S. Rotter, *Nat. Phot.* **13**, 140 (2019).
3. G. D. Scholes, *Proc. R. Soc. A* **476**, 20200278 (2020).
4. M. Gaio, D. Saxena, J. Bertolotti, D. Pisignano, A. Camposeo, and R. Sapienza, *Nat. Commun.* **10**, 226 (2019).
5. А. Ю. Баженов, М. М. Никитина, Д. В. Царёв, А. П. Алоджанц, *Письма в ЖЭТФ* **117**, 819 (2023).
6. Ю. В. Юанов, А. А. Зябловский, Е. С. Андриянов, И. В. Доронин, А. А. Пухов, А. П. Виноградов, А. А. Лисянский, *Письма в ЖЭТФ* **112**, 725 (2020).
7. S. Chauhan, M. Girvan, and E. Ott, *Phys. Rev. E* **80**, 056114 (2009).
8. I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and Y. G. Rubo, *Phys. Rev. B* **85**, 121301(R) (2012).
9. M. Thornton, A. Sakovich, A. Mikhalychev, J. D. Ferrer, P. de la Hoz, N. Korolkova, and D. Mogilevtsev, *Phys. Rev. Appl.* **12**, 064051 (2019).
10. L. Sapienza, H. Thyrestrup, S. Stobbe, P. D. Garcia, S. Smolka, and P. Lodahl, *Science* **327**, 1352 (2010).
11. A. Dousse, J. Suffczyński, R. Braive, A. Miard, A. Lemaître, I. Sagnes, L. Lanco, J. Bloch, P. Voisin, and P. Senellart, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 121102 (2009).
12. A.-L. Barabási, *Network Science*, Cambridge University Press, Cambridge (2016).
13. T. Golubeva, Yu. Golubev, and D. Ivanov, *Phys. Rev. A* **75**, 023815 (2007).
14. F. Kockum, A. Miranowicz, D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, *Nat. Rev. Phys.* **1**, 19 (2019).
15. I. J. Farkas, I. Derényi, A.-L. Barabási, and T. Vicsek, *Phys. Rev. E* **64**, 026704 (2001).
16. I. Chestnov, S. Demirchyan, A. Alodjants, Yu. Rubo, and A. V. Kavokin, *Sci. Rep.* **6**, 19551 (2016).
17. A. Y. Bazhenov, D. V. Tsarev, and A. P. Alodjants, *Phys. B: Cond. Mat.* **579**, 411879 (2020).
18. S. H. Lee, M. Ha, H. Jeong, J. D. Noh, and H. Park, *Phys. Rev. E* **80**, 051127 (2009).
19. S. K. Vadlamani, T. P. Xiao, and E. Yablonovitch, *PNAS* **117**(43), 26639 (2020).