

Интерференционные резонансы фотона и нелинейности в ангармоническом осцилляторе

А. М. Башаров¹⁾

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 августа 2024 г.

После переработки 22 августа 2024 г.

Принята к публикации 22 августа 2024 г.

Резонансные взаимодействия когерентного поля с ангармоническим осциллятором классифицированы на основе установленной аналогии с многофотонными взаимодействиями света с атомами. Показано, что интерференционные взаимодействия, при которых поглощение одного кванта когерентного поля вызывает многоквантовый переход в ангармоническом осцилляторе, есть суперпозиция резонансов типа “каскад” и типа “лямбда-V”, которым дано общее описание. Для нелинейности третьего и четвертого порядков общие формулы применены к резонансному процессу с поглощением одного фотона и двухкратным возбуждением осциллятора. Предсказаны и описаны резонансные процессы генерации второй гармоники и “выпрямления” излучения, экспериментальное изучение которых позволит судить о параметрах ангармонизма рассмотренной модели.

DOI: 10.31857/S0370274X24090162, EDN: HMZRZO

1. Введение. Модели классического и квантового осцилляторов являются базовыми моделями физики, позволяющими не только описывать многие явления, но и подводить единую основу под, казалось бы, различные процессы и явления. Например, резонансные взаимодействия света (высокочастотного излучения) с двухуровневой системой, обладающей постоянным дипольным моментом, приводят к генерации низкочастотного излучения (иначе, “выпрямление света”) и генерации гармоник (см., [1, 2] и ссылки там). Здесь дополнительным требованием является существование постоянного дипольного момента. Постоянный дипольный момент характерен для частиц, состояния которых не характеризуются четностью, в частности для ангармонического осциллятора. И, казалось бы, резонансное взаимодействие ангармонического осциллятора с когерентной волной можно просто описать феноменологически при помощи двухуровневой системы с постоянным дипольным моментом. Однако при таком описании теряются интерференционные эффекты [3, 4], что характерно для многих задач, в которых под феноменологическим описанием кроются разного рода взаимодействия, учтенные через некоторые их следствия. В нашем случае примером служит ангармонизм, обеспечивающий как неэквидистантный спектр осциллятора, так и существование постоянного дипольного момента. В настоящее время выхо-

дит много работ, посвященных динамике нелинейного квантового осциллятора (см., например, [5–10]). Вопрос о существовании разных типов резонансного взаимодействия внешнего когерентного поля с ангармоническим осциллятором, в которых выявлена роль интерференционного взаимодействия одного фотона и нелинейности осциллятора, в этих работах не обсуждался и подобные исследования автору неизвестны. Многофотонное возбуждение осциллятора неоднократно исследовалось ([7] и ссылки там), в том числе многофотонный резонанс с керровской нелинейностью рассмотрен в работе [8] при учете модельной нелинейности высших порядков и картины классического фазового портрета.

В данной статье проанализирован другой механизм формирования резонансного взаимодействия фотона и нелинейности в ангармоническом осцилляторе и показано, что корректное описание резонансного взаимодействия когерентного поля с ангармоническим осциллятором приводит не только к традиционному резонансу, когда поглощение одного фотона вызывает одноквантовое возбуждение осциллятора, а эффективная двухуровневая система характеризуется постоянным дипольным моментом, но и к новым типам оптического резонанса, которые могут быть экспериментально исследованы. Другими словами, доказывается возможность существования новых типов резонанса, когда поглощение одного фотона когерентной волны вызывает n -квантовое возбуждение осциллятора. Построена общая теория, в которой ре-

¹⁾e-mail: basharov@gmail.com

зонансы классифицированы как резонансы дипольного взаимодействия и нелинейности. Схематически говорим о резонансах типа “каскад” и типа “лямбда-V”, при которых поглощение/испускание одного фотона когерентной волны обуславливает многоквантовые переходы в осцилляторе. Во введенном названии использована аналогия с резонансами в атомной системе. В частном случае рассмотрено двухквантовое возбуждение линейного ангармонического осциллятора одним фотоном. При таком резонансном взаимодействии возникают как генерация низкочастотного излучения на частоте Раби, так и генерация второй гармоники. Описание этих процессов дано ниже. Также показано, что исследование простейших когерентных эффектов, а именно оптической нутации и ее проявлений на разных частотах генерации, позволит экспериментально судить о параметрах ангармонизма.

Следует подчеркнуть, что учет ангармонизма важен для осцилляторных моделей, так как ангармонизм характерен для реальных задач. К тому же существует значительное количество моделей таких осцилляторов. Чтобы прояснить механизм интерференционного формирования резонанса фотоном и нелинейностью, необходим достаточно общий подход. В статье использован общий метод анализа резонансных ситуаций при помощи алгебраической теории возмущений [3, 4].

Заметим, что при исследовании задач, связанных с ангармоническими осцилляторами, например, [11, 12], сходный с алгебраической теорией возмущений подход называют канонической теорией возмущений ван Флека. В работе [4] указано на отличие нашего подхода и подчеркнута ведущая роль алгебраической теории возмущений в задачах о резонансном взаимодействии оптических когерентных полей с квантовыми системами.

2. Алгебраическая теория возмущений и эффективные операторы. Возникновение интерференционного резонанса легко понять из следующих общих рассуждений, основанных на алгебраической теории возмущений [3, 4]. Пусть систему, взаимодействующую с электромагнитным полем, помимо собственно оператора взаимодействия с электромагнитным полем $V_{\text{int}}(t) \equiv V_1(t)$, характеризует также некоторый оператор нелинейного взаимодействия внутри системы V_2 (в реальной задаче таких операторов может быть несколько). Тогда общий оператор взаимодействия системы будет представлен суммой операторов взаимодействия $V_1(t) + V_2(t)$. Явное написание аргумента времени используем для указания принадлежности операторов к картине Дирака, в ко-

торой удобно формулировать требования алгебраической теории возмущений. Условие формирования картины Дирака будет отдельно оговорено в дальнейшем.

Суть алгебраической теории возмущений состоит в таком унитарном преобразовании операторов и матрицы плотности системы $\rho(t) \rightarrow \tilde{\rho}(t)$: $\tilde{\rho}(t) = e^{-iS(t)}\rho(t)e^{iS(t)}$, $S(t) = S(t)^+$, при котором в уравнении фон Неймана для преобразованной матрицы $\tilde{\rho}(t)$:

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (1)$$

$$\tilde{V}(t) = e^{-iS(t)}(V_1(t) + V_2(t))e^{iS(t)} - i\hbar e^{-iS(t)} \frac{d}{dt} e^{iS(t)}$$

отсутствовали бы быстроменяющиеся во времени слагаемые. Это требование обосновано для открытых систем, чье окружение моделируется дельта-коррелированными полями [13]. В резонансных взаимодействиях с волнами, характеризующимися несущей частотой и медленно меняющейся амплитудой, указанное требование отличает алгебраическую теорию возмущений от других [4]. Отметим, что в [10] обсуждалась открытая система и унитарное преобразование ее операторов, но требования алгебраической теории возмущений не учитывались. В работах [1, 9] указанные требования также не учитывались, но обсуждался выход за рамки приближения вращающейся волны, которое до сих пор составляет основу феноменологического рассмотрения резонансного взаимодействия. Однако именно требование отсутствия быстроменяющихся во времени слагаемых “автоматически” выделяет в задаче все возможные случаи оптического резонанса. Обсуждение разных методов на основе унитарной симметрии квантовой теории дано в [4].

Считаем энергию резонансного электромагнитного взаимодействия малой по сравнению с энергией квантового перехода в осцилляторе и раскладываем генератор преобразования и преобразованный гамильтониан в ряды

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= V^{(1,0)}(t) + V^{(0,1)} + V^{(1,1)} + V^{(2,0)} \dots, \\ S(t) &= S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + S^{(2,0)}(t) + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

в которых верхние индексы каждой пары индексов указывают на порядок разложения по константам рассматриваемых взаимодействий $V_1(t)$ и $V_2(t)$. Формула Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа приводит к стандартным формулам алгебраической теории возмущений [3, 4]:

$$V^{(1,0)}(t) = \frac{\hbar dS^{(1,0)}(t)}{dt} + V_{\text{int}}(t),$$

$$V^{(0,1)}(t) = \frac{\hbar dS^{(0,1)}(t)}{dt} + V_2(t),$$

$$V^{(2,0)}(t) = \frac{\hbar dS^{(2,0)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), V_{\text{int}}(t)], \dots$$

Требование алгебраической теории возмущений состоит в том, чтобы величины $V^{(i,j)}(t)$ включали в себя все медленно меняющиеся во времени слагаемые, а величины $S^{(i,j)}(t)$ все быстроменяющиеся во времени слагаемые [3, 4]. В результате, отмечая одним и двумя штрихами медленно и быстроменяющиеся во времени слагаемые выражений, имеем

$$S^{(i,j)}(t) \equiv S^{(i,j)}(t)'', \quad V^{(1,0)}(t) = V_{\text{int}}(t)',$$

$$V^{(0,1)}(t) = V_2(t)', \quad (3)$$

$$V^{(1,1)}(t) = -\frac{i}{2}[S^{(0,1)}(t), V_2(t)]' -$$

$$-\frac{i}{2}[S^{(0,1)}(t)[S^{(0,1)}(t), V_{\text{int}}(t)]',$$

$$V^{(2,0)}(t) = -\frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), V_{\text{int}}(t)]', \dots$$

Эти формулы определяют не только эффективный гамильтониан задачи $V^{\text{Eff}}(t) \approx \tilde{V}(t)$, где в разложении (2) преобразованного гамильтониана $\tilde{V}(t)$ оставлено конечное число первых слагаемых ряда, но и поляризацию ангармонического осциллятора, которая после преобразования задается эффективным оператором дипольного момента $d^{\text{Eff}}(t)$. Как и эффективный гамильтониан, оператор эффективного дипольного момента определяется преобразованным оператором дипольного момента $\tilde{d}(t) = e^{-iS(t)}d(t)e^{iS(t)}$, в котором оставлены лишь первые слагаемые разложений (2):

$$d^{\text{Eff}}(t) = d(t) - i[S^{(1,0)}(t), d(t)] - i[S^{(0,1)}(t), d(t)],$$

$$D^{(1,0)}(t) = -i[S^{(1,0)}(t), d(t)], \quad (4)$$

$$D^{(0,1)}(t) = -i[S^{(0,1)}(t), d(t)].$$

Обсудим следствия этих стандартных формул для предельно простых модельных выражений для операторов $V_1(t)$ и $V_2(t)$. В электродипольном приближении оператор V_{int} однозначен и состоит из слагаемых, в которых отличны от нуля только матричные элементы $\langle E_n | V_{\text{int}}(t) | E_{n\pm 1} \rangle$ для переходов с изменением возбуждения осциллятора на единицу ($|E_n\rangle$ – стационарное состояние ангармонического осциллятора энергии E_n с n возбуждениями). Будем

использовать такой вид оператора электродипольного взаимодействия и оператора дипольного момента квантового осциллятора

$$\langle E_n | V_{\text{int}}(t) | E_{n+1} \rangle = g(\mathcal{E}_{cl} e^{-i\omega_{cl}t - i\Phi} +$$

$$+ \mathcal{E}_{cl}^* e^{i\omega_{cl}t + i\Phi}) \sqrt{n+1} e^{-i\Omega_{n+1,n}t},$$

$$\Omega_{m,n} = (E_m - E_n)/\hbar. \quad (5)$$

$$d(t) = -g \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (|E_{n-1}\rangle \langle E_n| e^{-i\Omega_{n,n-1}t} +$$

$$+ |E_n\rangle \langle E_{n-1}| e^{i\Omega_{n,n-1}t}). \quad (6)$$

Здесь ω_{cl} – несущая частота когерентного поля амплитуды $\mathcal{E}_{cl}$, Φ – фаза, g – константа связи, учитывающая геометрию и вбирающая в себя знак “минус” из оператора электродипольного взаимодействия.

Отличные от нуля матричные элементы $V_2(t)$ определяются принятой моделью нелинейности ангармонического осциллятора. Переберем простейшие возможности для матричных элементов. При этом постоянные во времени диагональные элементы у оператора $V_2(t)$ исключаем и включаем их в “нулевой гамильтониан”, определяющий переход к картине Дирака. Обоснование этой процедуры в рамках алгебраической теории возмущений дано в [14]. Простейшие ситуации, которые обсудим далее, определяются следующим видом оператора $V_2(t)$:

$$V_2(t) \equiv V^{[p,\chi]}(t) = \hbar \chi \Omega_c (c^p \varphi_p(N) e^{i\Omega_{n-p,n}t} + \text{H.c.}) \quad (7)$$

Здесь p – натуральное число, которое будем использовать для характеристики типа нелинейного взаимодействия (взаимодействие или нелинейность p типа); χ – безразмерная константа взаимодействия, $\varphi_p(N)$ – операторозначная функция числа возбуждений осциллятора, $N = c^\dagger c$. При этом $[c, c^\dagger] = 1$, а $d = -g(c + c^\dagger)$. Для перехода между операторами алгебры Гейзенберга–Вейля и проекционными операторами применяем соответствие $c \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n|$.

Используем нотацию

$$S^{(i,j)}(t) = \hat{S}^{(i,j)}(t) + \text{H.c.}, \quad V^{(i,j)}(t) = \hat{V}^{(i,j)}(t) + \text{H.c.},$$

$$D^{(i,j)}(t) = \hat{D}^{(i,j)}(t) + \text{H.c.}$$

Тогда

$$\hat{S}^{(1,0)}(t) = -\frac{g}{i\hbar} \sum_n'' \bar{\bar{s}}_{n-1,n}(t) e^{i\Omega_{n-1,n}t} |E_{n-1}\rangle \langle E_n|,$$

$$\bar{\bar{s}}_{n-1,n}(t) =$$

$$= \left(\frac{\mathcal{E}_{cl} \exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi)}{-\omega_{cl} + \Omega_{n-1,n}} + \frac{\mathcal{E}_{cl} \exp(i\omega_{cl}t + i\Phi)}{\omega_{cl} + \Omega_{n-1,n}} \right) \sqrt{n};$$

$$\hat{S}^{(0,1)}(t) = i\chi\Omega_c \sum_{n=p}^{\infty} \frac{h_{n-p,n}}{\Omega_{n-p,n}} |E_{n-p}\rangle \langle E_n| e^{i\Omega_{n-p,n}t},$$

$$h_{n-p,n} = \sqrt{n(n-1)\dots(n-p+1)}\varphi_p(n),$$

$$h_{n-1,n} = \sqrt{n}\varphi_1(n), \quad h_{n-2,n} = \sqrt{n(n-1)}\varphi_2(n),$$

$$h_{n-3,n} = \sqrt{n(n-1)(n-2)}\varphi_3(n).$$

Выпишем общий вид оператора $V^{(1,1)}(t)$, чтобы оценить все возможные резонансы в системе:

$$\begin{aligned} \hat{V}^{(1,1)}(t) = & \frac{g}{2}\chi\Omega_c \sum_n (\bar{s}_{n,n+1}(t)h_{n+1,n+p+1} - \\ & - h_{n,n+p}\bar{s}_{n+p,n+p+1}(t))e^{i\Omega_{n,n+p+1}t}|E_n\rangle\langle E_{n+p+1}| + \\ & + \frac{g}{2}\chi\Omega_c \sum_n (h_{n,n+p}\bar{s}_{n+p-1,n+p}^*(t) - \\ & - \sum_n'' \bar{s}_{n-1,n}^*(t)h_{n-1,n+p-1})e^{i\Omega_{n,n+p-1}t}|E_n\rangle\langle E_{n+p-1}| + \\ & + \frac{g}{2}\chi\Omega_c \sum_{m=p}^{\infty} \left(\frac{h_{n,n+p}}{\Omega_{n,n+p}} \bar{s}_{n+p,n+p+1}(t) - \right. \\ & \left. - \bar{s}_{n,n+1}(t) \frac{h_{n+1,n+p+1}}{\Omega_{n+1,n+p+1}} \right) e^{i\Omega_{n,n+p+1}t}|E_n\rangle\langle E_{n+p+1}| + \\ & + \frac{g}{2}\chi\Omega_c \sum_{m=p}^{\infty} \left(\bar{s}_{n+p-1,n+p}^*(t) \frac{h_{n,n+p}}{\Omega_{n,n+p}} - \right. \\ & \left. - \frac{h_{n-1,n+p-1}}{\Omega_{n-1,n+p-1}} \bar{s}_{n-1,n}^*(t) \right) e^{i\Omega_{n,n+p-1}t}|E_n\rangle\langle E_{n+p-1}|; \\ & \bar{s}_{n-1,n}(t) = (\mathcal{E}_{cl} \exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi) + \\ & + \mathcal{E}_{cl}^* \exp(i\omega_{cl}t + i\Phi))\sqrt{n} = \bar{s}_{n-1,n}(t)^*. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что выписаны слагаемые выражения $-\frac{i}{2}[S^{(1,0)}(t), V_2(t)] - \frac{i}{2}[S^{(0,1)}(t), V_{int}(t)]$. Отбор в них медленно меняющихся во времени слагаемых в соответствии с условиями резонанса и определяет слагаемое в эффективном операторе резонансного взаимодействия.

Общий вид слагаемых эффективного дипольного момента:

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(1,0)}(t) = & -\frac{g^2}{\hbar} \left(\sum_n (\bar{s}_{n-1,n}(t)\sqrt{n+1} - \right. \\ & \left. - \bar{s}_{n,n+1}(t)\sqrt{n})|E_{n-1}\rangle\langle E_{n+1}|e^{i\Omega_{n-1,n+1}t} \right) + \\ & + \frac{g^2}{\hbar} \left(\sum_n (\sqrt{n}\bar{s}_{n-1,n}(t) - \bar{s}_{n,n+1}(t)\sqrt{n+1})|E_n\rangle\langle E_n|, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(0,1)}(t) = & -g\chi\Omega_c \left(\sum_n \frac{h_{n-p,n}}{\Omega_{n-p,n}} \sqrt{n+1}|E_{n-p}\rangle\langle E_{n+1}|e^{i\Omega_{n-p,n+1}t} - \right. \\ & \left. - \sum_n \sqrt{n} \frac{h_{n,n+p}}{\Omega_{n,n+p}} |E_{n-1}\rangle\langle E_{n+p}|e^{i\Omega_{n-1,n+p}t} \right) - \\ & -g\chi\Omega_c \left(\sum_n \frac{h_{n-p,n}}{\Omega_{n-p,n}} \sqrt{n}|E_{n-p}\rangle\langle E_{n-1}|e^{i\Omega_{n-p,n-1}t} - \right. \\ & \left. - \sum_n \sqrt{n} \frac{h_{n-1,n+p-1}}{\Omega_{n-1,n+p-1}} |E_n\rangle\langle E_{n+p-1}|e^{i\Omega_{n,n+p-1}t} \right). \end{aligned}$$

3. Интерференционные взаимодействия и резонансы. Обсудим новые возможные резонансы в рассматриваемой системе. Они обусловлены интерференционным взаимодействием фотона и нелинейности. Речь идет об интерференционном взаимодействии, поскольку, как показано ниже, это взаимодействие подразделяется на два типа. Согласно приведенной формуле для $\hat{V}^{(1,1)}(t)$, из требования медленного изменения слагаемых $\hat{V}^{(1,1)}(t)$ возможны следующие резонансы:

$$\omega_{cl} + \Omega_{n,n+p+1} \approx 0 \text{ и } \omega_{cl} + \Omega_{n,n+p-1} \approx 0.$$

По аналогии с традициями теории двухфотонных резонансов в атомных системах [3] назовем возможные резонансы резонансами типа “каскад” ($\omega_{cl} + \Omega_{n,n+p+1} \approx 0$) и типа “лямбда-V” ($\omega_{cl} + \Omega_{n,n+p-1} \approx 0$) (см. рис. 1). Заметим, что резонанс типа “лямбда-V” есть суперпозиция резонанса лямбда типа и резонанса V-типа. Поскольку иногда резонансы типа лямбда и типа V называют комбинационными, мы используем термин “интерференционные взаимодействия и резонансы”.

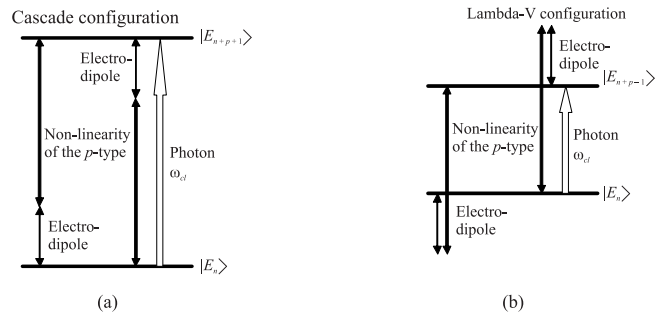


Рис. 1. Условные схемы резонанса фотона и нелинейности в ангармоническом осцилляторе. (а) – конфигурация “каскад”; (б) – конфигурация “лямбда-V”

В общих формулах для оператора интерференционного взаимодействия $\hat{V}^{(1,1)}(t)$ нелинейности типа p отвечают множители $h_{n,n+p}$, $h_{n+1,n+p+1}$, $h_{n-1,n+p-1}$,

электродипольному виртуальному переходу – множителю $\bar{s}_{n,n+1}$, $\bar{s}_{n+p,n+p+1}$, $\bar{s}_{n+p-1,n+p}$. В первом приближении других электродипольных переходов нет. Они учитываются автоматически в более высоких порядках теории возмущений.

Как увидим ниже, в рассматриваемой модели ангармонического осциллятора можно приближенно считать $\Omega_{n+p,n} \approx p\Omega_c$, причем все переходы $E_{n+p} \rightarrow E_n$ можно считать неперекрывающимися в случае резонансного взаимодействия с когерентной волной. Тогда общую формулу для различных конфигураций можно немного упростить. Получаем следующие матричные элементы оператора интерференционно-го взаимодействия:

Конфигурация “каскад” $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+p+1,n}$ (в предэкспоненциальных множителях полагаем $\omega_{cl} \approx (p+1)\Omega_c$):

$$\begin{aligned} \langle E_n | \hat{V}^{(1,1)}(t) | E_{n+p+1} \rangle &= \frac{\chi g}{p} \times \\ &\times \mathcal{E}_{cl}^* e^{i(\omega_{cl} + \Omega_{n,n+1+p})t + i\Phi} \times \\ &\times \sqrt{(n+p+1)(n+p)\dots(n+1)} (\varphi_p(n+p+1) - \varphi_p(n+p)). \end{aligned}$$

Конфигурация “лямбда-V” $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+p-1,n}$ (в предэкспоненциальных множителях полагаем $\omega_{cl} \approx (p-1)\Omega_c$):

$$\begin{aligned} \langle E_n | \hat{V}^{(1,1)}(t) | E_{n+p-1} \rangle &= \frac{g\chi}{p} \mathcal{E}_{cl}^* e^{i(\omega_{cl} - \Omega_{n+p-1,n})t + i\Phi} \times \\ &\times \sqrt{(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+1)} \times \\ &\times (n\varphi_p(n+p-1) - (n+p)\varphi_p(n+p)). \end{aligned}$$

Заметим, что условия $\omega_{cl} \approx (p+1)\Omega_c$ и $\omega_{cl} \approx (p-1)\Omega_c$ наглядно иллюстрируются на рис. 1а и б.

Общий вид слагаемого $\hat{D}^{(1,0)}(t)$ оператора эффективного дипольного момента говорит о возможностях генерации гармоник. При резонансном взаимодействии $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+2,n}$ возможна генерация второй гармоники. При этом для любого резонансная генерация гармоник более высокого порядка при простом возбуждении осциллятора невозможна.

4. Применение к ангармонизму вида $\alpha x^3 + \beta x^4$. Гамильтониан ангармонического осциллятора

$$H_{\text{osc}} = \hbar\Omega_c [c^\dagger c + \alpha(c + c^\dagger)^3 + \beta(c + c^\dagger)^4]$$

представим в виде

$$H_{\text{osc}} = H_{\text{osc-Diag}} + H_{\text{osc-Non-D}},$$

$$H_{\text{osc-Diag}} = \hbar\Omega_c N + W_1, \quad W_1 = \hbar\Omega_c 6\beta(N + N^2),$$

$$H_{\text{osc-Non-D}} = W_\alpha + W_\beta,$$

$$W_\alpha = \hbar\alpha\Omega_c((3cN + c^3) + \text{H.c.}),$$

$$W_\beta = \hbar\beta\Omega_c((c^4 - 2c^2 + 4c^2N) + \text{H.c.}).$$

Картину Дирака определяет диагональный оператор [12]

$$H_{\text{osc-Diag}} = \hbar\Omega_c N + W_1.$$

При этом

$$E_n = \hbar\Omega_c[n + 6\beta(n + n^2)],$$

$$\Omega_{n+p,n} = \Omega_c(p + 6\beta(2n + 1)p + 6\beta p^2).$$

Переход к картине Дирака дается формулами ($i = 2, 3$):

$$\rho_{\text{osc}}(t) = \exp(iH_{\text{Diag}}t/\hbar)\rho_{\text{osc}}\exp(-iH_{\text{Diag}}t/\hbar),$$

$$V_{\text{int}}(t) = \exp(iH_{\text{Diag}}t/\hbar)V_{\text{int}}\exp(-iH_{\text{Diag}}t/\hbar),$$

$$V^{[p,\chi]}(t) = \exp(iH_{\text{Diag}}t/\hbar)V^{[p,\chi]}\exp(-iH_{\text{Diag}}t/\hbar),$$

$$W_i(t) = \exp(iH_{\text{Diag}}t/\hbar)W_i\exp(-iH_{\text{Diag}}t/\hbar).$$

При этом оператор взаимодействия

$$V(t) = V_{\text{int}}(t) + W_\alpha(t) + W_\beta(t).$$

В терминах предыдущего анализа

$$W_\alpha(t) = V^{[1,\alpha]}(t) + V^{[3,\alpha]}(t), \quad W_\beta(t) = V^{[2,\beta]}(t) + V^{[4,\beta]}(t),$$

$$\varphi_1(n) = 3n, \quad \varphi_2(n) = 4n - 2, \quad \varphi_3(n) = 1, \quad \varphi_4(n) = 1.$$

Оператор $\hat{V}^{(1,1)}(t)$ линеен по операторам внутриосцилляторного взаимодействия $W_\alpha(t)$ и $W_\beta(t)$, так что, складывая предыдущие результаты, можно описать интерференционные взаимодействия в ангармоническом осцилляторе с рассматриваемым ангармонизмом. При этом пренебрегаем интерференционными взаимодействиями между внутриосцилляторными взаимодействиями.

5. Резонанс в ангармоническом осцилляторе в случае $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$. Этот резонанс является суперпозицией интерференционных резонансов типа “каскад” и типа “лямбда” (см. рис. 2) с матричным элементом перехода $\langle E_0 | \hat{V}^{(1,1)}(t) | E_2 \rangle$ эффективного оператора взаимодействия (диагональный элемент в резонансных состояниях равен нулю). Здесь в случае атомов возможна конструктивная и деструктивная суперпозиция интерференционных взаимодействий. В случае рассматриваемого ангармонизма имеем конструктивную суперпозицию

$$\langle E_0 | \hat{V}^{(1,1)}(t) | E_2 \rangle = g^{\text{Eff}} \mathcal{E}_{cl}^* e^{i(\omega_{cl} - \Omega_{2,0})t + i\Phi},$$

$$g^{\text{Eff}} = -2\sqrt{2}g\alpha.$$

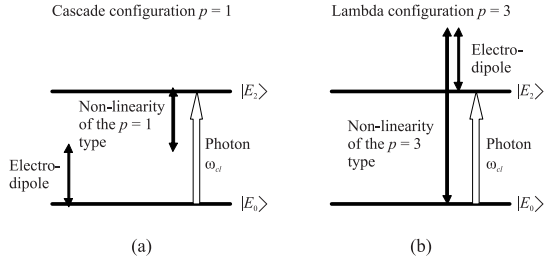


Рис. 2. Резонанс $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$ в ангармоническом осцилляторе как суперпозиция интерференционного резонанса типа “каскад” (а) и “лямбда” типа (б)

Эффективный дипольный момент $d^{\text{Eff}}(t) = D^{(1,0)}(t) + D^{(0,1)}(t)$ имеет матричные элементы, как зависящие от когерентного поля, так и не зависящие от него.

Матричные элементы, не зависящие от когерентного поля, целиком определяются оператором $\hat{D}^{(0,1)}(t)$. Они характеризуют динамику поляризации после окончания воздействия когерентного поля и ответственны за такие явления, как оптическая индукция и фотонное эхо [3]. До сих пор эти явления в среде ангармонических осцилляторов при обсуждаемом резонансе не рассматривались. Мы приведем вид оператора $\hat{D}^{(0,1)}(t)$ в терминах введенных величин, так как они отчетливо показывают вклад каждого из обсуждаемых типов резонанса:

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(0,1)} &= g\alpha(h_{0,1}\sqrt{2} + h_{0,1}3\sqrt{3} - h_{1,2})|E_0\rangle\langle E_2|e^{i\Omega_{0,2}t} + \\ &+ g\alpha h_{0,1}|E_0\rangle\langle E_0| + g\alpha(h_{2,3}\sqrt{3} - h_{1,2}\sqrt{2})|E_2\rangle\langle E_2|, \\ h_{0,1} &= 3, \quad h_{1,2} = 6\sqrt{2}, \quad h_{2,3} = 27, \quad h_{0,3} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Следует отметить наличие постоянных дипольных моментов $\langle E_0|\hat{D}^{(0,1)}(t)|E_0\rangle$ и $\langle E_2|\hat{D}^{(0,1)}(t)|E_2\rangle$. Именно они служат прообразами постоянных дипольных моментов в феноменологической двухуровневой модели резонансного взаимодействия с ангармоническим осциллятором.

Матричные элементы, зависящие от когерентного поля, целиком определяются оператором $\hat{D}^{(1,0)}(t)$. Здесь нелинейность проявляется двояко: 1) через эффективный оператор резонансного взаимодействия, который, в свою очередь, определяет динамику заселенностей резонансных состояний и резонансных переходов, которые затем и определяют поляризацию ангармонического осциллятора; 2) явно.

Недиагональные элементы $\hat{D}^{(1,0)}(t)$ не связаны с процессами переизлучения квантов на частоте накачки $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$, а определяют генерацию второй гармоники (первое слагаемое в скобках) и генерацию

низкочастотного излучения (второе слагаемое в скобках):

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(1,0)}(t)_{0,2} &= \frac{g^2\beta}{\hbar\Omega_c}\sqrt{2}e^{i\Omega_{0,2}t} \times \\ &\times \left(\frac{4}{3}\mathcal{E}_{cl}e^{-i\omega_{cl}t-i\Phi} + 12\mathcal{E}_{cl}^*e^{i\omega_{cl}t+i\Phi} \right). \end{aligned}$$

Диагональные матричные элементы $\hat{D}^{(1,0)}(t)$ не постоянны во времени и определяют поляризацию ангармонического осциллятора на частоте когерентной волны.

$$\hat{D}^{(1,0)}(t)_{00} = 0, \quad \hat{D}^{(1,0)}(t)_{22} = -\frac{2g^2}{2\hbar\Omega_c}\mathcal{E}_{cl}e^{-i\omega_{cl}t-i\Phi}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d^{\text{Eff}}(t) &= \left(\frac{g^2\beta}{\hbar\Omega_c}\sqrt{2} \left(\frac{4}{3}\mathcal{E}_{cl}e^{-i\omega_{cl}t-i\Phi} + 12\mathcal{E}_{cl}^*e^{i\omega_{cl}t+i\Phi} \right) + \right. \\ &+ g\alpha 6\sqrt{2} \Big) |E_0\rangle\langle E_2|e^{i\Omega_{0,2}t} + 3g\alpha |E_0\rangle\langle E_0| + \\ &+ \left(g\alpha(27\sqrt{3} - 12) - \frac{2g^2}{3\hbar\Omega_c}\mathcal{E}_{cl}e^{-i\omega_{cl}t-i\Phi} \right) |E_2\rangle\langle E_2| + \text{H.c.} \end{aligned}$$

6. Оптическая нутация в системе ангармонических осцилляторов в случае $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$. Пусть на среду одинаковых ангармонических осцилляторов, заселяющих нижний энергетический уровень, подается прямоугольный импульс когерентной электромагнитной волны

$$\mathcal{E}_{cl} = \begin{cases} a, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases} \quad \Phi = 0.$$

Тогда динамика населенности резонансных уровней и когерентности дается простыми формулами [3]:

$$\tilde{\rho}_{20}(0)(t) = \frac{i}{2} \sin \Omega_R t, \quad \tilde{\rho}_{00}(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega_R t),$$

$$\tilde{\rho}_{22}(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_R t), \quad \Omega_R = \frac{2|g^{\text{Eff}}|a}{\hbar}.$$

В результате имеем:

1. На несущей частоте падающего поля на выходе из среды возникают нутационные колебания интенсивности I возбуждающего поля (c – скорость света, L – длина оптически тонкой среды, n – плотность ангармонических осцилляторов частиц в единице объема)

$$I = \frac{ca^2}{2\pi} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{a} \right), \quad \varepsilon = (1 - \cos \Omega_R t) \frac{2\pi L g^2 a n}{3\hbar\Omega_c}.$$

Период нутационных колебаний определяется через величину $|g^{\text{Eff}}| = 2\sqrt{2}g\alpha$ параметром нелинейности α .

2. На частоте второй гармоники, т.е. на частоте $2\omega_{cl}$, интенсивность излучения $I = \frac{c|\varepsilon|^2}{2\pi}$, усредненная, как и выше, по периоду быстрых колебаний, определяется амплитудой генерируемой гармоники

$$\varepsilon = i \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi L \frac{g^2 \beta a n}{\hbar \Omega_c} \sin \Omega_R t.$$

Величина интенсивности сигнала второй гармоники оказывается пропорциональной квадрату нелинейности β .

3. “Низкочастотное” излучение оптически тонких сред возникает на частоте Раби. В однонаправленном приближении сама напряженность электрического поля низкочастотного излучения $E^{\text{Low fr}}(t)$ дается выражением

$$E^{\text{Low fr}}(t) = \frac{\pi n \Omega_R}{c} g \alpha (15 - 27\sqrt{3}) \sin \Omega_R t.$$

Если экспериментально исследовать описанные случаи излучения ангармонических осцилляторов при их возбуждении резонансной когерентной накачкой с несущей частотой $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$, то по периоду пульсаций нетрудно определить основные параметры ангармонического осциллятора.

7. Заключение. Рассмотренные в статье модельные ситуации с нелинейным взаимодействием вида (7) позволили провести аналогию между интерференционными резонансами в нелинейном осцилляторе и многофотонными резонансами в атомах. В результате резонансные ситуации в ангармоническом осцилляторе представлены как суперпозиция резонансов типа “каскад” и типа “лямбда-V”, чьи характеристики и основные операторы представлены в работе. Поскольку о взаимодействии волн в конфигурации “лямбда-V” часто говорят как о комбинационном взаимодействии, мы при описании типов резонанса говорим об интерференционном взаимодействии.

Полученные общие формулы характеризуют каждый тип резонанса и могут быть использованы для описания различных случаев их суперпозиции. В качестве примера рассмотрен интерференционный резонанс в ангармоническом осцилляторе с нелинейностью вида $\alpha x^3 + \beta x^4$ с поглощением одного фотона и двухквантовом возбуждении осциллятора. Установлено, что: 1) резонанс является суперпозицией резонансов типа “каскад” и типа “лямбда”; 2) при таком резонансе возникает генерация второй гармоники и эффект выпрямления; 3) параметры ангармонизма α и β могут быть получены из

экспериментальных исследований рассмотренных ситуаций.

Проведенный анализ продемонстрировал возможности алгебраической теории возмущений в исследовании резонансных процессов и взаимодействий, поскольку другие сходные подходы, например, каноническая теория возмущений ван Флека [11, 12], не дают критериев выделения резонансных условий и соответствующих эффективных операторов в процессах взаимодействия волн с квантовыми системами.

Автор выражает благодарность С. В. Сазонову за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета института. Никаких дополнительных грантов на проведение данного конкретного исследования получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Оптика и спектроскопия* **106**, 467 (2009).
2. А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 16 (2016).
3. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear optical waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999).
4. А. М. Башаров, *ЖЭТФ* **158**, 978 (2020).
5. V. Leyton, V. Peano, and M. Thorwart, *New J. Phys.* **14**, 093024 (2012).
6. S. Ding, G. Maslennikov, R. Hablutzel, H. Loh, and D. Matsukevich, *PRL* **119**, 150404 (2017).
7. Zh. Wang, M. Pechal, E. A. Wollack, P. Arrangoiz-Arriola, M. Gao, N. R. Lee, and A. H. Safavi-Naeini *Phys. Rev. X* **9**, 021049 (2019).
8. E. V. Anikin, N. S. Maslova, N. A. Gippius, and I. M. Sokolov, *Phys. Rev. A* **104**, 003100 (2021).
9. C. Navarrete-Benlloch, R. Garces, N. Mohseni, and G. J. de Valcarcel, *Phys. Rev.* **103**, 023713 (2021).
10. I. García-Mata, R. G. Cortinas, X. Xiao, J. Chávez-Carlos, V. S. Batista, L. F. Santos, and D. A. Wisniacki, *Quantum* **8**, 1298 (2024).
11. I. M. Efremova, D. V. Millionshchikov, and S. V. Krasnoshchekova, *Russ. J. Phys. Chem. A* **98**, 78 (2024).
12. С. В. Краснощеков, Е. О. Добролюбов, Ч. Сюаньхао, *Оптика и спектроскопия* **128**, 1795 (2020).
13. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 632 (2020).
14. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, *Оптика и спектроскопия* **132**, 524 (2024).