

Трансформация геодезической акустической моды в присутствии низкочастотного зонального течения в плазме токамака

Е. А. Сорокина¹⁾

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 августа 2024 г.

После переработки 2 октября 2024 г.

Принята к публикации 3 октября 2024 г.

Предложен механизм нелинейного взаимодействия геодезической акустической моды (ГАМ) и низкочастотного зонального течения (ЗТ), объясняющий наблюдаемое в экспериментах на токамаках появление спутников ГАМ. Взаимодействие собственных мод существенно различных частот приводит к модуляции амплитуды колебаний ГАМ на частоте колебаний ЗТ, что проявляется в спектре колебаний в виде двух боковых гармоник вблизи частоты ГАМ. Частоты указанных гармоник отвечают сумме и разности частот ГАМ и ЗТ. Триггером эффекта служит стационарное тороидальное вращение плазмы.

DOI: 10.31857/S0370274X24110039, EDN: ICDOQ

Геодезические акустические моды (ГАМ) относятся к числу наиболее активно исследуемых явлений современной физики плазмы [1]. ГАМ регистрируются практически на всех ведущих токамаках в виде полоидально и тороидально симметричных ($m = 0, n = 0$) колебаний электрического потенциала плазмы на частоте ~ 20 кГц, сопровождаемых полоидально асимметричными ($m = 1$) колебаниями плотности плазмы. При этом движение плазмы происходит вдоль магнитных поверхностей токамака, что относит ГАМ к высокочастотной ветви зональных течений²⁾. Тем не менее считается, что такие колебания играют существенную роль в физике турбулентного переноса [2]. В плазме зачастую присутствуют и относительно низкочастотные зональные течения, которые представляют собой довольно универсальный физический процесс, наблюдаемый, в том числе, в атмосферах планет солнечной системы [3].

Наиболее универсальным методом диагностики ГАМ является зондирование плазмы пучком тяжелых ионов [4–8]. Этой диагностикой ГАМ регистрируется как согласованные колебания электрического потенциала и концентрации электронов, наряду с которыми могут обнаруживаться также и магнитные флуктуации плазмы [9]. В ряде экспериментов для

регистрации ГАМ используются и другие средства, такие как корреляционная и доплеровская рефлектометрия, обратное рассеяние, ленгмюровские зонды [10–14]. Магнитная компонента ГАМ может быть обнаружена посредством использования магнитных зондов [15].

Отметим, что хотя ГАМ как магнитогидродинамическое (МГД) колебание затрагивает возмущения целого набора физических величин, его отличительной чертой является доминирующее колебание электрического потенциала. Поэтому в настоящей работе мы, следуя теории классических ГАМ, ограничиваемся электростатическим приближением.

Систематические исследования с использованием диагностики пучком тяжелых ионов на токамаке T-10 [12, 16–18] позволили установить, что в ряде разрядов в спектре колебаний потенциала плазмы вблизи теоретически рассчитанной частоты ГАМ наблюдаются два амплитудных пика, разделенные интервалом ~ 5 кГц; для более высокочастотного пика авторы использовали термин спутник.

Базовая теория сплошного спектра ГАМ [19] не объясняет данный эффект, предсказывая наличие лишь одной моды с частотой $\omega_{\text{ГАМ}} = \omega_s \sqrt{2 + 1/q^2}$, где ω_s – частота звука, q – коэффициент запаса устойчивости.

Стационарное вращение плазмы оказывает существенное влияние на ее параметры. Даже чисто тороидальное вращение приводит к тому, что в равновесии давление плазмы не является функцией магнитной поверхности $p \neq p(\Psi)$, т.е. плазма оказывается стратифицирована по полоидальному углу. В

¹⁾ e-mail: Sorokina_EA@nrcki.ru

²⁾ Здесь и ниже под зональными течениями понимаем колебательное движение плазмы вдоль магнитных поверхностей (компоненты смещения и макроскопической скорости плазмы в нормальном к поверхностям направлении отсутствуют), отделяя его от стационарного (в том числе дифференциального) вращения.

этом случае возмущение скорости в полоидальном направлении приводит к появлению колебаний конечной частоты [20, 21] – так называемому низкочастотному зональному течению (ниже, для краткости, ЗТ). В результате в спектре колебаний вращающейся плазмы присутствуют две собственные моды: высокочастотная (ВЧ) ГАМ и низкочастотное (НЧ) ЗТ. Частота ЗТ связана со скоростью стационарного вращения плазмы и обращается в нуль при его отсутствии.

К формированию ЗТ могут приводить и иные эффекты, в том числе дрейфовые [22], анизотропия давления плазмы [23, 24] и др.

На существование ЗТ имеются прямые указания в экспериментах [25], хотя их экстремально низкая частота существенно затрудняет возможность достоверной идентификации моды по сравнению с той же ГАМ. На токамаке Т-10 систематические исследования ЗТ не проводились, однако опубликованные спектрограммы колебаний электрического потенциала плазмы в ряде разрядов [26] отчетливо демонстрируют наличие амплитудного пика колебаний в районе ~ 2 кГц, который естественно ассоциировать с ЗТ. Присутствие ЗТ в плазме Т-10 также обнаруживаются средства корреляционной рефлектометрии [12].

В настоящей работе показано, что наблюдаемая экспериментально “двугорбость” спектра ГАМ (наличие сателлита) является естественным следствием нелинейного взаимодействия собственных мод потенциальных колебаний плазмы, ГАМ и ЗТ. Для такого взаимодействия существенными факторами оказываются кривизна магнитного поля и наличие стационарного тороидального вращения плазмы. Первый приводит к зацеплению колебаний электрического потенциала и давления плазмы, формируя ГАМ, а второй обеспечивает ненулевую частоту ЗТ.

Рассматриваемые колебания традиционно описываются стандартной системой МГД-уравнений (используется система единиц СГС, c – скорость света):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (4)$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = c \nabla \phi. \quad (5)$$

Уравнение (1) есть уравнение движения плазмы, уравнения (2), (3) – уравнения непрерывности и адиабаты с показателем γ , (4) – условие квазинейтральности. Последнее уравнение (5) отражает элек-

тростатический характер рассматриваемых возмущений. Используются стандартные обозначения: ρ – плотность плазмы, p – давление, ϕ – потенциал электрического поля, $\mathbf{v}$ – скорость, $\mathbf{j}$ – плотность тока, $\mathbf{B}$ – магнитное поле, возмущениями которого пренебрегается.

Любую величину $f(\mathbf{r}, t) = \{p, \rho, \phi, \mathbf{v}, \mathbf{j}\}$ в уравнениях (1)–(5) представим в виде комбинации ее стационарной (равновесной) части и возмущенной части, зависящей от времени: $f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}) + f'(\mathbf{r}, t)$. Интересующие нас возмущения в дальнейшем будем представлять в виде суперпозиции колебаний ГАМ и ЗТ:

$$f' = f'_{\text{ГАМ}} + f'_{\text{ЗТ}}. \quad (6)$$

Независящая от времени часть уравнений (1)–(5) описывает равновесие плазмы. В дальнейшем, следуя классическому подходу В. Д. Шафранова [27], будем использовать смешанное представление магнитного поля $\mathbf{B} = F(\Psi) \nabla \varphi + [\nabla \Psi \times \nabla \varphi]$, где Ψ – метка магнитной поверхности, F – функция полоидального тока. Поле скоростей тороидально вращающейся плазмы представим в стандартном виде $\mathbf{v}_0 = R^2 \Omega(\Psi) \nabla \varphi$, где Ω – угловая частота вращения. Полоидальная неоднородность давления плазмы, вызванная вращением, описывается уравнением [28–31]:

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial R} \right)_{\Psi} - \rho_0 \Omega^2 R = 0. \quad (7)$$

Здесь и далее используются цилиндрическая система координат $\{R, \varphi, z\}$ (φ – тороидальный угол), связанная с геометрическим центром тора, и полярные координаты $\{r, \theta\}$ (θ – полоидальный угол) в сечении $\varphi = \text{const}$, связанные с магнитной осью.

Ориентируясь, главным образом, на измерения, проведенные на установке Т-10, рассмотрим магнитную конфигурацию с круглыми концентрическими магнитными поверхностями

$$\Psi = \Psi(r) = \frac{B_a r^2}{2q(r)},$$

где B_a – поле на магнитной оси токамака, считая параметр r/R_0 (R_0 – большой радиус токамака) малым.

Решение уравнения (7) удобно искать в виде

$$p_0 = \rho_0^\alpha \Pi(\Psi),$$

где $\Pi(\Psi)$ – некая функция магнитной поверхности, а α – параметр, определяющий тип динамического равновесия плазмы [31, 32]. Значение $\alpha = \gamma$ соответствует равновесию с изоэнтропными магнитными

поверхностями, при $\alpha \rightarrow \infty$ функцией магнитной поверхности является плотность, а при $\alpha = 1$ – температура плазмы.

Тогда из уравнения (7) следуют выражения, описывающие зависимость давления и плотности плазмы от полоидального угла, которые в первом порядке разложения по r/R_0 имеют вид:

$$\begin{aligned} p_0 &= \bar{p}_0(r) \left(1 + \frac{r}{R_0} \gamma M^2 \cos \theta \right), \\ \rho_0 &= \bar{\rho}_0(r) \left(1 + \frac{r}{R_0} \frac{\gamma}{\alpha} M^2 \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\bar{p}_0$ и $\bar{\rho}_0$ – средние на магнитной поверхности величины давления и массовой плотности плазмы, соответственно; $\omega_s = \sqrt{\gamma \bar{p}_0 / \bar{\rho}_0} / R_0$ – рассчитанная по ним частота звука, $M = \Omega / \omega_s$ – тороидальное число Маха.

Неоднородность магнитного поля в том же приближении дается выражением

$$B = B_a \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right). \quad (9)$$

Нестационарная часть уравнений (1)–(5) описывает динамику ГАМ и ЗТ. Из уравнения (5) следует, что потенциал электрического поля постоянен на магнитной поверхности токамака, $\phi' = \phi'(\Psi)$, а возмущение скорости имеет вид

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{B}}{B^2} (B v'_{\parallel} - c F A) + c R^2 A \nabla \varphi, \quad (10)$$

где $A(\Psi) \equiv d\phi' / d\Psi$ обозначает величину, пропорциональную амплитуде колебаний электрического поля, $v'_{\parallel}$ – возмущение продольной скорости плазмы.

Уравнения, описывающие динамику плотности, давления и продольной скорости ГАМ и ЗТ, после подстановки выражения для возмущенной скорости (10) в уравнения (2), (3) и в продольную проекцию уравнения движения (1) имеют вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\rho_0}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla v'_{\parallel} - c F A \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\rho_0}{B^2} = \frac{c F A}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \rho', \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\gamma p_0}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla v'_{\parallel} - c F A \times \\ & \times \left(\gamma p_0 \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla p_0 \right) = \frac{c F A}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla p', \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial v'_{\parallel}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p'}{B \rho_0} - \frac{c \Omega A}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla R^2 = \frac{c F A}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla v'_{\parallel}. \quad (13)$$

Левые части уравнений (11)–(13) содержат линейные по амплитуде возмущений слагаемые, а правые

части – квадратичную нелинейность, рассмотрением которой мы ограничиваемся в настоящей работе.

Для анализа уравнения квазинейтральности представим возмущенную плотность тока в виде суммы поперечной и продольной к магнитному полю компонент: $\mathbf{j}' = \mathbf{j}'_{\perp} + \mathbf{B} j'_{\parallel} / B$. Тогда уравнение (4) принимает вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}'_{\perp} + \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{j'_{\parallel}}{B} = 0. \quad (14)$$

Для произвольной функции координат и времени $f(\mathbf{r}, t)$ введем операцию усреднения по магнитной поверхности,

$$\langle f \rangle = \frac{\oint J f d\theta d\varphi}{\oint J d\theta d\varphi},$$

где $J = ([\nabla \Psi \times \nabla \varphi] \cdot \nabla \theta)^{-1}$ – якобиан перехода от координат $\{R, \varphi, z\}$ к координатам $\{\Psi, \varphi, \theta\}$.

Тогда с использованием известных тождеств: $\langle \mathbf{B} \cdot \nabla f \rangle = 0$ и $\langle \operatorname{div} \mathbf{a} \rangle = d \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \Psi \rangle / d\Psi$ ($\mathbf{a}$ – произвольный вектор) – уравнение (14) приводит к условию $d(\oint J(\mathbf{j}' \cdot \nabla \Psi) d\theta) / d\Psi = 0$.

Для описания локализованных мод сплошного спектра потребуем равенство нулю самого интеграла, стоящего под производной $d/d\Psi$. Выражая поперечную компоненту плотности тока из $[\mathbf{B} \times \nabla \Psi]$ -проекции уравнения (1), имеем

$$\begin{aligned} & \oint \left[p' \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{c \rho_0 |\nabla \Psi|^2}{F B^2} \frac{\partial A}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{\Omega}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \left(\frac{\Omega \rho'}{2} + \frac{\rho_0 v'_{\parallel}}{R} \right) \right] d\theta = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (11)–(13) и (15) составляют замкнутую систему для описания ГАМ и ЗТ.

В дальнейшем удобно исключить возмущения $v'_{\parallel}$ и ρ' и свести систему уравнений (11)–(13), (15) к двум связанным уравнениям, описывающим зацепление возмущений давления и электрического поля:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\omega_s^2 R^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla p') + \frac{\gamma p_0 c \Omega A}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) - \\ & - c F \frac{\partial A}{\partial t} \left(\gamma p_0 \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla p_0 \right) = \\ & = \frac{c F}{B^2} \left(2 A \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \nabla p' \right) - c^2 R^2 A^2 \times \\ & \times \left(\gamma p_0 \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2}) + \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla p_0) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\oint \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\Omega^2 R^2}{2|\nabla\Psi|^2} A(\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \times \right. \\ \times \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0} - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p_0}{\gamma p_0} + \frac{2\mathbf{B} \cdot \nabla R^2}{R^2} \right) + \frac{1}{c\rho_0|\nabla\Psi|^2} \times \\ \times \left(FB^2 \frac{\partial p'}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + (\mathbf{B} \cdot \nabla R^2) \times \right. \\ \times \left(\frac{F\Omega^2}{2R^2\omega_s^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \Omega \mathbf{B} \cdot \nabla p' \right) \Big) - \\ \left. - \frac{\Omega F}{\gamma p_0} \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla R^2)}{|\nabla\Psi|^2} \left(A \frac{\partial p'}{\partial t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{cFA^2}{B^2} \left(\mathbf{B} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 B^2 \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B^2} \right) \right) \right] d\theta = 0. \quad (17)$$

В линейном приближении совместное решение уравнений (16), (17) определяет частоты двух независимых ветвей колебаний, амплитуды которых в рамках данного приближения, разумеется, не определены.

Поскольку частота ЗТ существенно ниже частоты ГАМ, будем полагать, что наличие ЗТ в силу нелинейности приведет к медленному изменению амплитуды ГАМ. Таким образом, будем искать решение уравнений (16), (17) в виде

$$p' = P(t) \exp(-i\omega t), \quad A = \bar{A}(t) \exp(-i\omega t),$$

где ω – частота моды, P и $\bar{A}$ – амплитуды колебаний давления и электрического поля соответственно, причем

$$\frac{\partial P}{\partial t} \ll \omega P, \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \ll \omega \bar{A}. \quad (18)$$

Тогда исходные уравнения разбиваются на “быстрые” и “медленные” части; при этом “быстрые” уравнения определяют частоты собственных мод, а “медленные” – изменение амплитуд мод под влиянием нелинейных слагаемых.

“Быстрые” уравнения совпадают с уравнениями линейной теории. Условие их совместности приводит к известному дисперсионному уравнению

$$\omega^4 - \omega_s^2 \omega^2 \left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \right) + \omega_s^4 \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \frac{M^4}{2q^2} = 0, \quad (19)$$

впервые полученному в аналогичном виде в работе [32] и впоследствии верифицированному при анализе глобальных мод ГАМ и ЗТ в [33, 34].

Дисперсионное уравнение (19) имеет два корня, больший из которых соответствует ГАМ, а меньший – ЗТ:

$$\omega_{\text{ZT}}^2 = \frac{\omega_s^2}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(2 + \frac{1}{q^2} + 4M^2 + \frac{\gamma M^4}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} \frac{2M^4}{q^2}} \right\}. \quad (20)$$

В линейном приближении ГАМ устойчива. Наличие стационарного тороидального вращения плазмы приводит к модификации частоты ГАМ; при $M = 0$ выражение (20) переходит в стандартный закон дисперсии $\omega_{\text{ГАМ}} = \omega_s \sqrt{2 + 1/q^2}$.

ЗТ устойчиво и обладает конечной частотой, если $\alpha < \gamma$, и апериодически неустойчиво в обратном случае [35]. При $M \rightarrow 0$ частота ЗТ стремится к нулю $\sim M^2$:

$$\omega_{\text{ZT}} \approx \frac{\omega_s M^2}{q \sqrt{2 + 1/q^2}} \sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{2\alpha}}. \quad (21)$$

В вырожденном случае изотропных магнитных поверхностей ($\alpha = \gamma$) частота ЗТ равна нулю, как и в стационарной плазме.

Далее исследуем влияние нелинейных эффектов на временную динамику амплитуды ГАМ, описываемую “медленными” частями уравнений (16), (17). Разделим возмущения электрического поля и давления плазмы на возмущения типа ГАМ и ЗТ согласно (6); при этом в нелинейных слагаемых учтем взаимодействие ГАМ–ЗТ, но пренебрежем самовоздействием моды, т.е. слагаемыми $\sim \bar{A}_{\text{ГАМ}}^2$. Итоговое уравнение для $\bar{A}_{\text{ГАМ}}$ имеет вид

$$\frac{\partial \bar{A}_{\text{ГАМ}}}{\partial t} = i\nu \bar{A}_{\text{ГАМ}} A_{\text{ZT}}, \quad (22)$$

где $\omega_{\text{ГАМ}}$, ω_{ZT} – собственные частоты (20), а

$$\nu = \frac{cM}{q^2} \frac{\omega_s^3 (1 + M^2/2)}{2\omega_{\text{ГАМ}}^2 - \omega_s^2 (1 + M^2/2)^2} \times \\ \times \left[\frac{4\omega_{\text{ГАМ}} + \omega_{\text{ZT}}}{\omega_{\text{ГАМ}}^2 - \omega_s^2/q^2} + \frac{3\omega_{\text{ГАМ}} + 2\omega_{\text{ZT}}}{\omega_{\text{ZT}}^2 - \omega_s^2/q^2} \right]$$

– коэффициент нелинейного взаимодействия ГАМ и ЗТ. Условие слабой нелинейности (18) имеет вид $\eta = |\nu A_{\text{ZT}}/\omega_{\text{ГАМ}}| \ll 1$.

Правая часть уравнения (22) пропорциональна произведению амплитуд колебаний электрического поля ГАМ и ЗТ, а также частоте стационарного вращения плазмы. Таким образом, в отсутствие стационарного вращения моды не взаимодействуют, и амплитуда ГАМ постоянна.

Рассмотрим случай устойчивого ЗТ конечной частоты, реализующийся при $\gamma > \alpha$. Будем решать уравнение (22) итерационно, используя в его пра-

вой части амплитуды линейных мод, не зависящие от времени: $\bar{A}_{\text{GAM}} = A_{\text{GAM}}^0 = \text{const}$ и

$$A_{\text{ZF}}(t) = A_{\text{ZF}}^0 \cos(\omega_{\text{ZF}} t), \quad A_{\text{ZF}}^0 = \text{const}. \quad (23)$$

Постоянство амплитуды ЗТ оправдано сильным взаимодействием зональных течений с дрейфовой турбулентностью в реальных условиях эксперимента [36], что делает их огромным энергетическим резервуаром.

Итоговое выражение, описывающее колебания электрического поля ГАМ переменной амплитуды, имеет вид:

$$A_{\text{GAM}}(t) = A_{\text{GAM}}^0 (1 + k \cos(\omega_{\text{ZF}} t)) \cos(\omega_{\text{GAM}} t), \quad (24)$$

где

$$k = \frac{cqA_{\text{ZF}}^0}{\omega_s M} \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma - \alpha}} \frac{(2 + 1/q^2)(3 - 2/q^2)}{(3 + 2/q^2)}.$$

Для большей наглядности мы приводим упрощенное выражение для коэффициента k , справедливое для дозвуковых скоростей вращения плазмы, $M < 1$. Коэффициент k связан с постоянной взаимодействия ν и параметром нелинейности η соотношениями: $k = -\nu A_{\text{ZF}}^0 / \omega_{\text{ZF}}$, $\eta = |k\omega_{\text{ZF}} / \omega_{\text{GAM}}|$.

Последнее слагаемое в (24) можно переписать в виде $0.5 (\cos(\omega_{\text{GAM}} - \omega_{\text{ZF}})t + \cos(\omega_{\text{GAM}} + \omega_{\text{ZF}})t)$. Таким образом, амплитудно-модулированное колебание ГАМ представляет собой сумму трех колебаний с частотами ω_{GAM} , $\omega_{\text{GAM}} + \omega_{\text{ZF}}$ и $\omega_{\text{GAM}} - \omega_{\text{ZF}}$. На языке радиотехники колебание на частоте ω_{GAM} является несущим. Две остальные частоты называются боковыми частотами, или спутниками (сателлитами). Амплитуда каждого спутника равна $kA_{\text{GAM}}^0/2$. Коэффициент k определяет глубину модуляции. Он пропорционален амплитуде ЗТ, а именно, отношению возмущения тороидальной скорости $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа к скорости звука и обратно пропорционален тороидальному числу Маха. Даже при слабой нелинейности, характеризующей параметром η , k может быть заметной величиной, особенно при небольших (дозвуковых) скоростях тороидального вращения. Поскольку частота ЗТ пропорциональна квадрату числа Маха, при стремлении стационарной скорости вращения к нулю эффект модуляции будет пропадать, несмотря на усиление коэффициента, характеризующего глубину модуляции. Так же сателлиты ГАМ естественным образом пропадают при стремлении к нулю амплитуды ЗТ.

Для сравнения с экспериментом удобно переписать параметр k , определяющий глубину модуляции, через отношение электрических полей, связанных с

ЗТ, E'_{ZF} , и со стационарным вращением плазмы, E_0 . Для определенности далее рассмотрим равновесие, в котором магнитные поверхности являются изотермами, т.е. $\alpha = 1$, $\gamma = 5/3$, считая при этом $1/q^2 \ll 1$. Тогда $k \approx 2\sqrt{3}qE'_{\text{ZF}}/E_0$.

На рисунке 1 приведены экспериментально измеренные спектры колебаний электрического потенциала в плазме Т-10³) в омической стадии разряда (рис. 1а) и в стадии разряда с комбинированным (центральным и нецентральным) ЭЦР-нагревом плазмы (рис. 1б) [26]. В омической стадии выделяются два пика вблизи частоты ГАМ ($f \approx 19$ кГц и $f \approx 23$ кГц). На рисунке 1а также отчетливо виден дополнительный максимум в районе 2 кГц, который, по нашей гипотезе, соответствует ЗТ. Режим с мощным дополнительным нагревом характеризуется наличием одного пика на частоте $f \approx 24$ кГц (рис. 1б). Конечная ширина спектров обусловлена ограниченным по времени измерением цуга сигнала ГАМ – см. [39, 40].

Простое сопоставление рис. 1а и б демонстрирует очевидную корреляцию наличия сателлита с присутствием ЗТ.

Наблюдаемая картина описывается предложенной моделью. На рисунке 2 представлен рассчитанный спектр мощности сигнала колебаний электрического поля плазмы $A(t) = A_{\text{GAM}} + A_{\text{ZF}}$, где A_{GAM} определяется уравнением (24), а A_{ZF} – уравнением (23). Частоты мод определены данными экспериментов: на рис. 2а $f_{\text{GAM}} = 21$ кГц, $f_{\text{ZF}} = 2$ кГц; на рис. 2б $f_{\text{GAM}} = 24$ кГц, $f_{\text{ZF}} \approx 0$. Частота дискретизации в обоих расчетах – 200 кГц. Для сопоставления с экспериментом анализируется сигнал конечной длины в 1.5 мс с наложением окна Кайзера с параметром 22.8. Точками на рис. 2 показан спектр мощности, полученный путем Фурье-преобразования “идеального” гармонического сигнала бесконечной длины без умножения на функцию окна. Амплитуда зонального течения выбрана равной $A_{\text{ZF}}^0 = 0.8A_{\text{GAM}}^0$; $q = 2$.

Будем полагать, что в омическом режиме величина электрического поля, связанного со стационарным вращением плазмы, превышает поле ЗТ, $E'_{\text{ZF}}/E_0 = -0.55$, что соответствует $k = -3.8$ ($\eta = 0.36$). Спектр мощности соответствующего сигнала, представленный на рис. 2а, помимо низкочастотного максимума, связанного с ЗТ, демонстрирует наличие двух пиков на частотах $f_{\text{GAM}} - f_{\text{ZF}} = 19$ кГц

³) Большой радиус токамака Т-10 – $R_0 = 1.5$ м, малый радиус – $a = 0.3$ м; представлены результаты измерений в центральной части плазменного шнура $r/a \sim 0.3-0.4$ (см. [37, 38] о возможности диагностики центральной области плазмы в токамаке Т-10 пучком тяжелых ионов)

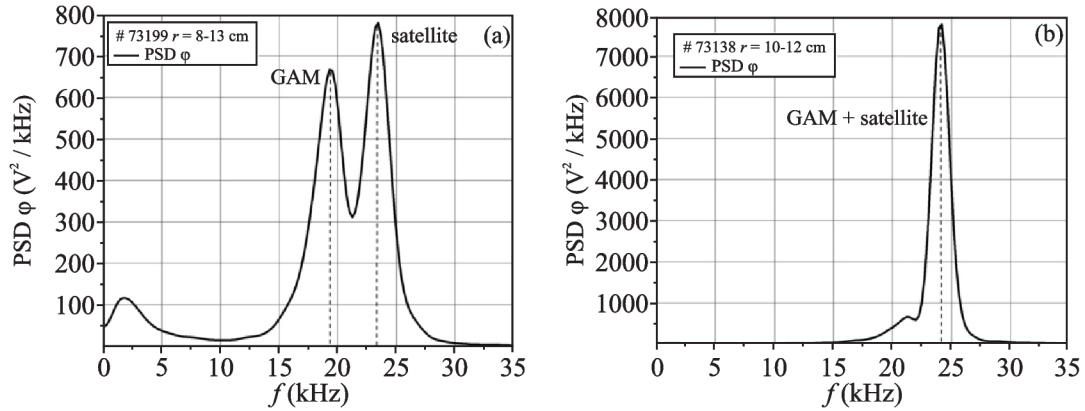


Рис. 1. Спектр мощности колебаний потенциала плазмы на токамаке Т-10 в омической стадии разряда (а) и в стадии разряда с комбинированным ЭЦР-нагревом (б). Рисунки воспроизведены с разрешения автора [26]

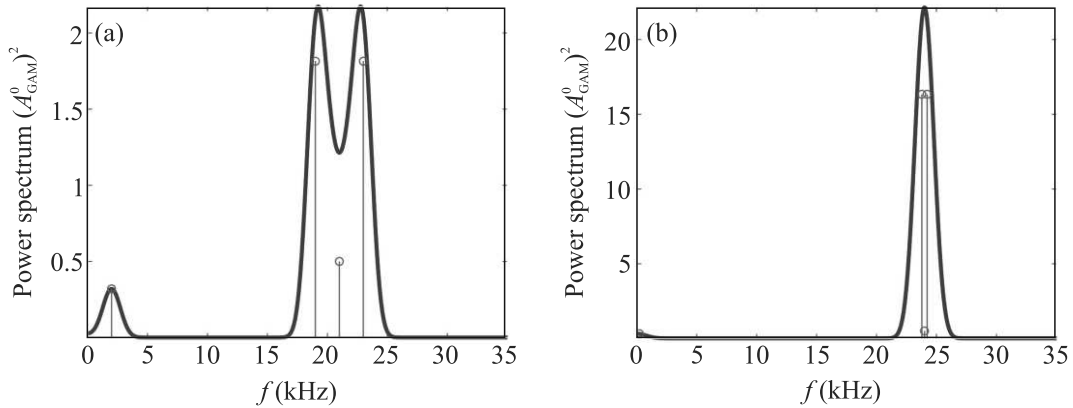


Рис. 2. (Цветной онлайн) Спектр мощности колебаний сигнала $A(t) = A_{\text{GAM}} + A_{\text{ZF}}$, рассчитанный с помощью уравнений (23) и (24) при: (а) – $E'_{\text{ZF}}/E_0 = -0.55$, $f_{\text{GAM}} = 21$ кГц, $f_{\text{ZF}} = 2$ кГц; (б) – $E'_{\text{ZF}}/E_0 = 1.65$, $f_{\text{GAM}} = 24$ кГц, $f_{\text{ZF}} = 0.2$ кГц. Сплошная линия отвечает спектру мощности сигнала конечной длины (моделирование эксперимента), точки – спектру мощности “идеального” сигнала

и $f_{\text{GAM}} + f_{\text{ZF}} = 23$ кГц. Помимо этого, в модельном спектре также присутствует несущая частота ГАМ $f_{\text{GAM}} = 21$ кГц, однако за счет перекрытия сигналов конечной ширины и близких частот пик ГАМ не наблюдается. Описанная картина идентична экспериментальной – ср. рис. 1а и 2а.

По мере нагрева плазмы в токамаке Т-10 происходит существенное снижение величины стационарного электрического поля в плазме и даже изменение его направления [26, 41]. Поэтому для второго расчета будем полагать $E'_{\text{ZF}}/E_0 = 1.65$, что соответствует трехкратному снижению скорости стационарного вращения плазмы по сравнению с омической фазой. Соответствующие результаты расчета с $k = 11.4$ ($\eta = 0.1$) представлены на рис. 2б. Ввиду малости M частота ЗТ близка к нулю, $f_{\text{ZF}} = 0.2$ кГц. В результате частоты ГАМ и спутников не разрешаются – вблизи частоты ГАМ наблюдается единый пик – ср. с рис. 1б.

Резюмируем, что предложенный механизм нелинейного взаимодействия ВЧ (ГАМ) и НЧ (ЗТ) мод зональных течений в плазме токамака, приводящий к амплитудной модуляции ГАМ на частоте ЗТ, объясняет наличие двух пиков в спектре колебаний электрического потенциала плазмы, наблюдаемое посредством измерений пучком тяжелых ионов. Частотный сдвиг между пиками ГАМ равен удвоенной частоте ЗТ. При этом как сила межмодового взаимодействия, так и частота ЗТ определяются скоростью стационарного вращения плазмы.

Наблюдаемая картина спектра существенно зависит не только от глубины модуляции и частоты взаимодействующих мод, но и от разрешения сигнала. При увеличении разрешения, помимо наблюдения спутников, следует ожидать появления в спектре центрального пика на несущей частоте ГАМ. Кроме того, влияние на спектр колебаний способны оказывать фазовые соотношения между ГАМ, ЗТ и

направлением стационарного вращения плазмы. Так, учет синусных гармоник в (24) приводит к различию амплитуд пиков сателлитов (см. рис. 1а).

Таким образом, можно заключить, что эксперименты по наблюдению ГАМ в токамаках демонстрируют классический механизм нелинейного взаимодействия ВЧ и НЧ мод. Аналогичные явления известны в различных областях физики и свойственны, например, плазменным разрядам [42], механическим колебаниям консольных балок и пластин [43–45], оптомеханическим системам [46] и др.

Отметим, что хотя сам результат рождения сателлитов при взаимодействии собственных мод существенно различных частот хорошо известен в теории нелинейных колебаний [47], особенностью ГАМ является отсутствие дисперсии, поэтому стандартные рассуждения в терминах параметрических резонансов к ней неприменимы. Сателлиты ГАМ не являются собственными модами, поэтому возможность последовательной генерации высших гармоник, характерной для процесса параметрического возбуждения [48], требует отдельного рассмотрения.

Автор благодарит В. И. Ильгисониса за идею рассмотрения взаимодействия НЧ и ВЧ собственных мод зональных течений в качестве причины наблюдения сателлитов ГАМ.

Финансирование работы. Работа проведена в рамках выполнения государственного задания Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

1. G. D. Conway, A. I. Smolyakov, and T. Ido, Nucl. Fusion **62**, 013001 (2022).
2. P. H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, and T. S. Hahm, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, R35 (2005).
3. A. V. Melnikov, Nature Phys. **12**, 386 (2016).
4. P. M. Schoch, K. A. Connor, D. R. Demers, and X. Zhang, Rev. Sci. Instrum. **74**, 1848 (2003).
5. T. Ido, Y. Miura, K. Kamiya, Y. Hamada, K. Hoshino, A. Fujisawa, K. Itoh, S.-I. Itoh, A. Nishizawa, H. Ogawa, Y. Kusama, and JFT-2M group, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, S41 (2006).
6. A. Fujisawa, K. Itoh, A. Shimizu et al. (Collaboration), Phys. Plasmas **15**, 055906 (2008).
7. A. V. Melnikov, L. I. Krupnik, L. G. Eliseev et al. (Collaboration), Nucl. Fusion **57**, 072004 (2017).
8. M. Sasaki, K. Itoh, T. Ido, A. Shimizu, T. Kobayashi, H. Arakawa, N. Kasuya, A. Fujisawa, and S.-I. Itoh, Plasma Fusion Res. **13**, 3403040 (2018).
9. Н. С. Сепгеев, А. В. Мельников, Л. Г. Елисеев, Письма в ЖЭТФ **119**, 817 (2024).
10. V. A. Vershkov, D. A. Shelukhin, S. V. Soldatov, A. O. Urazbaev, S. A. Grashin, L. G. Eliseev, A. V. Melnikov and the T-10 team, Nucl. Fusion **45**, S203 (2005).
11. G. D. Conway, B. Scott, J. Schirmer, M. Reich and ASDEX Upgrade Team, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, 1165 (2005).
12. A. V. Melnikov, V. A. Vershkov, L. G. Eliseev, S. A. Grashin, A. V. Gudozhnik, L. I. Krupnik, S. E. Lysenko, V. A. Mavrin, S. V. Perfilov, D. A. Shelukhin, S. V. Soldatov, M. V. Ufimtsev, A. O. Urazbaev, G. van Oost, and L. G. Zimeleva, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, S87 (2006).
13. C. Silva, J. C. Hillesheim, C. Hidalgo, E. Belonohy, E. Delabie, L. Gil, C. F. Maggi, L. Meneses, E. Solano, M. Tsalas, and JET Contributors, Nucl. Fusion **56**, 106026 (2016).
14. D. Prisiazhniuk, G. D. Conway, A. Krämer-Flecken, U. Stroth, and ASDEX Upgrade Team, Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 075003 (2018).
15. J. Seidl, J. Krbec, M. Hron et al. (Collaboration), Nucl. Fusion **57**, 126048 (2017).
16. A. V. Melnikov, C. Hidalgo, L. G. Eliseev et al. (Collaboration), Nucl. Fusion **51**, 083043 (2011).
17. A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. V. Perfilov, S. E. Lysenko, R. V. Shurygin, V. N. Zenin, S. A. Grashin, L. I. Krupnik, A. S. Kozachek, R. Yu. Solomatin, A. G. Elfimov, A. I. Smolyakov, M. V. Ufimtsev, and The HIBP Team, Nucl. Fusion **55**, 063001 (2015).
18. А. В. Мельников, В. А. Вершков, С. А. Грашин, М. А. Драбинский, Л. Г. Елисеев, И. А. Земцов, В. А. Крупин, В. П. Лахин, С. Е. Лысенко, А. Р. Немец, М. Р. Нурғалиев, Н. К. Харчев, Ф. О. Хабанов, Д. А. Шелухин, Письма в ЖЭТФ **115**, 360 (2022).
19. N. Winsor, J. L. Johnson, and J. M. Dawson, Phys. Fluids **11**, 2448 (1968).
20. S. Wang, Phys. Rev. Lett. **97**, 085002 (2006); Erratum: Phys. Rev. Lett. **97**, 129902 (2006).
21. C. Wahlberg, Phys. Rev. Lett. **101**, 115003 (2008).
22. R. G. F. Sgalla, A. I. Smolyakov, A. G. Elfimov, and M. F. Bashir, Phys. Lett. A **377**, 303 (2013).
23. H. Ren, Phys. Plasmas **21**, 044505 (2014).
24. V. P. Lakhin and E. A. Sorokina, Phys. Plasmas **25**, 072111 (2018).
25. A. Fujisawa, T. Ido, A. Shimizu et al. (Collaboration), Nucl. Fusion **47**, S718 (2007).
26. М. А. Драбинский, *Характеристики геодезической акустической моды и квазикогерентной моды колебаний плазмы токамака T-10 с омическим и СВЧ-нагревом: дис. канд. физ.-мат. наук: 1.3.9.*, М.

- (2023);
http://nrcki.ru/files/pdf/Diss_DMA.pdf
27. В. Д. Шафранов, *ЖЭТФ* **33**, 710 (1957).
 28. E. Hameiri, *Phys. Fluids* **26**, 230 (1983).
 29. J. P. Goedbloed and A. Lifschitz, *Phys. Plasmas* **4**, 3544 (1997).
 30. В. И. Ильгисонис, Ю. И. Поздняков, *Физика плазмы* **28**, 99 (2002).
 31. L. Guazzotto and R. Betti, *Phys. Plasmas* **12**, 056107 (2005).
 32. J. W. Haverkort, H. J. de Blank, and B. Koren, *J. Comput. Phys.* **231**, 981 (2012).
 33. В. П. Лахин, Е. А. Сорокина, В. И. Ильгисонис, Л. В. Коновальцева, *Физика плазмы* **41**, 1054 (2015).
 34. V. I. Ilgisonis, V. P. Lakhin, N. A. Marusov, A. I. Smolyakov, and E. A. Sorokina, *Nucl. Fusion* **62**, 066002 (2022).
 35. V. P. Lakhin, V. I. Ilgisonis, and A. I. Smolyakov, *Phys. Lett. A* **374**, 4872 (2010).
 36. P. Manz, M. Ramisch, and U. Stroth, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 165004 (2009).
 37. А. В. Мельников, Л. Г. Елисеев, С. Е. Лысенко, С. В. Перфилов, Р. В. Шурыгин, Л. И. Крупник, А. С. Козачок, А. И. Смоляков, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 633 (2014).
 38. A. V. Melnikov, M. A. Drabinskiy, L. G. Eliseev, P. O. Khabanov, N. K. Kharchev, L. I. Krupnik, J. L. De Pablos, A. S. Kozachek, S. E. Lysenko, A. Molinero, G. B. Igonkina, and M. M. Sokolov, *Fusion Eng. Des.* **146 Part A**, 850 (2019).
 39. H. L. Berk, C. J. Boswell, D. Borba, A. C. A. Figueiredo, T. Johnson, M. F. F. Nave, S. D. Pinches, S. E. Sharapov, and JET EFDA contributors, *Nucl. Fusion* **46**, S888 (2006).
 40. A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. E. Lysenko, S. V. Perfilov, D. A. Shelukhin, V. A. Vershkov, V. N. Zenin, L. I. Krupnik, N. K. Kharchev, and HIBP team, *J. Phys. Conf. Ser.* **591**, 012003 (2015).
 41. A. V. Melnikov, L. G. Eliseev, S. A. Grashin, M. A. Drabinskiy, P. O. Khabanov, N. K. Kharchev, V. A. Krupin, S. E. Lysenko, A. R. Nemets, M. R. Nurgaliev, D. A. Ryzhakov, R. V. Shurygin, N. A. Soloviev, V. A. Vershkov, and T-10 TEAM, 28th IAEA Fusion Energy Conference (FEC 2020). May 10–15, 2021. Virtual Event. <https://conferences.iaea.org/event/214/contributions/17104/>.
 42. R. A. Stern and N. Tzoar, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 903 (1966).
 43. S. A. Neyfeh and A. H. Neyfeh, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **3**, 417 (1993).
 44. A. H. Neyfeh and D. T. Mook, *Transactions of ASME* **117**, 186 (1995).
 45. H. F. Hu, W. J. Staszewski, N. Q. Hu, R. B. Jenal, and G. J. Qin, *Smart Mater. Struct.* **19**, 065017 (2010).
 46. M. Bagheri, M. Poot, M. Li, W. P. Pernice, and H. X. Tang, *Nature Nanotech.* **6**, 726 (2011).
 47. Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, М. (1976).
 48. A. S. Bakai, *Nucl. Fusion* **10**, 53 (1970).