

Связанные состояния и рассеяние магнонов на сверхпроводящем вихре в гетероструктурах ферромагнетик–сверхпроводник

Д. С. Катков^{+,*}, С. С. Апостолов^{+,×}, И. С. Бурмистров^{+,×}1)

⁺Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 142432 Черноголовка, Россия

^{*}Московский физико-технический институт, 141700 Москва, Россия

[×]Лаборатория физики конденсированного состояния, Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 2024 г.

После переработки 16 сентября 2024 г.

Принята к публикации 19 сентября 2024 г.

Изучен магнонный спектр в тонкой гетероструктуре ферромагнетик–сверхпроводник в присутствии сверхпроводящего вихря. Для этого используется гамильтониан типа Боголюбова–де Жена, описывающий магноны в присутствии внешнего магнитного поля и неоднородного профиля намагниченности, создаваемого этим вихрем. Показано, что на вихре образуются связанные состояния магнонов подобно тому, как заряженный центр создает связанные состояния электронов из-за экранированного кулоновского взаимодействия в двумерном электронном газе. Число этих локализованных состояний определяется только материальными параметрами ферромагнитной пленки. Также решена задача рассеяния для плоской падающей спиновой волны и вычислены полное и транспортное сечения рассеяния. Показано, что профиль намагниченности, создаваемый вихрем в пленке кирального ферромагнетика приводит к асимметричному рассеянию магнонов. Обсуждены особенности квантовой задачи рассеяния, соответствующие орбитальному обращению в классическом пределе.

DOI: 10.31857/S0370274X24110057, EDN: AGNCGO

Исследование взаимного влияния магнетизма и сверхпроводимости привлекает интерес исследователей на протяжении практически полувека [1]. Последние десятилетия фокус исследований сместился в сторону физических явлений в гетероструктурах сверхпроводник–ферромагнетик (SF) [2–9]. В таких структурах обе подсистемы могут содержать топологические объекты: вихри в сверхпроводящей и скирмионы в ферромагнитной пленках [10]. Связанные пары из скирмиона и абрикосовского вихря могут образовываться под действием спин-орбитального взаимодействия и эффекта близости [11, 12] или под действием полей рассеяния [13–19]. Недавно такое устойчивое сосуществование скирмиона и вихря было экспериментально реализовано в гетероструктурах $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1]_{10}/\text{MgO}/\text{Nb}$ [20, 21] и $[\text{CoFeB}/\text{Ir}/\text{Ta}]_7/\text{Nb}$ [22]. Дополнительной мотивацией таких исследований служит тот факт, что скирмионы [23–28] и пары скирмион–вихрь [29, 30] могут содержать майорановские моды, которые предложено использовать в качестве платформы для масштабированных квантовых вычислений [31, 32].

Продолжительное время спиновые волны воспринимались как интересный и полезный инструмент изучения магнетизма [33]. Недавно существенный прогресс был достигнут в использовании спиновых волн как носителей информации на наномасштабах, что привело к образованию новой области исследований – магноники [34–36]. Контроль и манипуляции спиновыми волнами осуществляются внешними (градиент намагниченности [37]) или внутренними (доменные стенки [38–41], скирмионы [42–44]) неоднородностями в профилях намагниченности.

Общеизвестно [45, 46], что флуктуации сверхпроводящего параметра порядка влияют на спиновые волны в ферромагнитном сверхпроводнике [45, 46]. Аналогичный эффект возникает в случае пространственно разделенных сверхпроводимости и магнетизма. Магнонный спектр в SF гетероструктурах испытывает влияние сверхпроводящей пленки через несколько механизмов: (i) изменение полей рассеяния (или благодаря эффекту Мейснера) [47–54], (ii) существование вихревой решетки в сверхпроводнике [55, 56] и (iii) из-за механизма спинового вращательного момента [57].

В настоящей работе, мотивированной недавними экспериментальными исследованиями [47, 48, 53, 55],

¹⁾e-mail: burmi@itp.ac.ru

рассматривается тонкая SF гетероструктура и изучается магнетонный спектр в ферромагнитной пленке в присутствии одиночного сверхпроводящего вихря. В отличие от работ [54, 56], в работе принимается во внимание, что однородный профиль намагниченности в ферромагнитной пленке изменяется [18] под действием пирловского вихря в сверхпроводнике [58]. Следуя работе [43], выводится и решается гамильтониан Боголюбова–де Жена (БдЖ), описывающий магныны в присутствии неоднородного профиля намагниченности и внешнего магнитного поля, создаваемого сверхпроводящим вихрем. Обнаруживается, что пирловский вихрь приводит к образованию связанных состояний, подобных связанным состояниям электронов на заряженном центре вследствие экранированного кулоновского взаимодействия в двумерном электронном газе [59]. Число связанных состояний (≈ 10 для параметров эксперимента [20]) полностью определяется материальными параметрами ферромагнитной пленки.

Также в работе решается квантовая задача рассеяния для плоской падающей спиновой волны на возмущении магнитного порядка в магнитном поле, создаваемом вихрем. Вычисляется полное и транспортное сечения рассеяния. Обнаруживается, что создаваемая вихрем неоднородность профиля намагниченности приводит к асимметричности рассеяния в случае кирального ферромагнетика. Демонстрируется, что квантовая задача рассеяния имеет особенности, связанные с орбитальным движением в классическом пределе.

Модель. Рассмотрим гетероструктуру, состоящую из ферромагнитной (сверху) и сверхпроводящей (снизу) пленок. Чтобы пренебречь эффектом близости, предполагается наличие тонкого слоя изолятора между пленками (толщиной много меньше лондонской глубины проникновения λ_L). Основываясь на экспериментах, толщина сверхпроводящей пленки считается малой, $d_S \ll \lambda_L$. В сверхпроводящей пленке предполагается наличие пирловского вихря, при этом ферромагнитная пленка считается тоньше пирловской длины, $\lambda = \lambda_L^2/d_S$, $d_F \ll \lambda$. Свободная энергия ферромагнитной пленки в этом случае выражается через единичный вектор направления намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ и дается следующим выражением

$$\mathcal{F}[\mathbf{m}] = d_F \int d^2\mathbf{r} \{ A(\nabla\mathbf{m})^2 + K(1-m_z^2) + D[m_z \nabla \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla)m_z] - M_s \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_V|_{z=+0} \}. \quad (1)$$

Здесь константы $A > 0$ и $K > 0$ соответствуют обменному взаимодействию и перпендикуляр-

ной анизотропии²⁾ соответственно. Кроме того, в свободную энергию (1) добавлено взаимодействие Дзялошинского–Мории (DMI), величина которого определяется константой D . Ось z направлена перпендикулярно плоскости пленок. M_s соответствует намагниченности насыщения. Последний член в выражении (1) описывает эффект Зеемана в магнитном поле, создаваемом пирловским вихрем, расположенным в начале координат (квант магнитного потока $\phi_0 = hc/2e$) [58, 61, 62],

$$\mathbf{B}_V = \phi_0 \text{sgn}(z) \nabla \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-q|z|+i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{q(1+2q\lambda)}. \quad (2)$$

Заметим, что свободная энергия (1) обращается в нуль для ферромагнитного состояния $m_z = 1$ в отсутствие пирловского вихря $\mathbf{B}_V = 0$.

В пределе тонких пленок удобно представлять магнитное поле в ферромагнитной пленке в виде $\mathbf{B}_V|_{z=+0} = -(\phi_0/4\pi l_w \lambda)[b_r(r)\mathbf{e}_r + b_z(r)\mathbf{e}_z]$, где $b_r(r)$ и $b_z(r)$ – безразмерные функции расстояния r до центра вихря, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, и $\mathbf{e}_z$ – ортонормированные координатные вектора в полярной системе координат и $l_w = \sqrt{A/K}$ – толщина доменной стенки. Функции $b_{r,z}(r)$ выражаются через функции Бесселя второго рода (Y_α) и функции Струве (H_α)

$$b_r = -\frac{\pi l_w}{4\lambda} \left[Y_1\left(\frac{r}{2\lambda}\right) + H_{-1}\left(\frac{r}{2\lambda}\right) \right], \quad (3)$$

$$b_z = \frac{l_w}{r} \left\{ 1 + \frac{\pi r}{4\lambda} \left[Y_0\left(\frac{r}{2\lambda}\right) - H_0\left(\frac{r}{2\lambda}\right) \right] \right\}.$$

Эти функции имеют следующие асимптотики: $b_r \simeq b_z \simeq l_w/r$ для $r \ll \lambda$, и $b_z \simeq 2\lambda b_r/r \simeq 4\lambda^2 l_w/r^3$ для $r \gg \lambda$. Далее, вместо точных выражений (3) используются приближенные формулы [63], которые корректно воспроизводят не только асимптотики, но и промежуточные участки функций:

$$b_z \simeq \frac{l_w}{r[1+r/(2\lambda)]^2}, \quad b_r \simeq \frac{l_w}{r[1+r/(2\lambda)]}. \quad (4)$$

Магнитное состояние, возмущенное пирловским вихрем. В связи с отсутствием азимутальной компоненты магнитного поля вихря, решение для направления намагниченности ферромагнетика ищется в виде $\mathbf{m} = \mathbf{e}_r \sin \theta(r) + \mathbf{e}_z \cos \theta(r)$. В результате минимизации $\mathcal{F}[\mathbf{m}]$ в ур. (1) относительно

²⁾Для тонкой ферромагнитной пленки можно учесть вклад поля размагничивания в константе эффективной перпендикулярной анизотропии, $K=K_0-2\pi M_s^2$ [14, 16, 60].

но угла намагниченности $\theta(r)$, получается уравнение Эйлера–Лагранжа [18],

$$\frac{l_w^2}{r} \partial_r [r \partial_r \theta(r)] - \frac{(l_w^2 + r^2)}{2r^2} \sin 2\theta(r) + 2\epsilon \frac{\sin^2 \theta(r)}{r/l_w} + \gamma [b_z(r) \sin \theta(r) - b_r(r) \cos \theta(r)] = 0, \quad (5)$$

которое дополняется граничными условиями $\theta(0) = \theta(\infty) = 0$. Сила ДМИ определяется безразмерным параметром $\epsilon = D/2\sqrt{AK}$. Влияние пирловского вихря проявляется в безразмерном параметре $\gamma = (l_w/\lambda)(M_s\phi_0/8\pi A)$. С учетом того, что $\gamma \sim 0.1$ в экспериментах [20], в дальнейшем рассматривается случай $\gamma \ll 1$.

В режиме $\gamma \ll 1$, возмущение однородного магнитного состояния, соответствующего $\theta = 0$, слабо: $\theta = \theta_\gamma \ll 1$. Тогда можно линейаризовать ур. (5) и получить:

$$\theta_\gamma(r) = \frac{\pi\gamma\lambda l_w}{4\lambda^2 + l_w^2} \left[I_1\left(\frac{r}{l_w}\right) - L_{-1}\left(\frac{r}{l_w}\right) + \frac{4\lambda}{\pi l_w} K_1\left(\frac{r}{l_w}\right) + Y_1\left(\frac{r}{2\lambda}\right) + H_{-1}\left(\frac{r}{2\lambda}\right) \right], \quad (6)$$

где I_α и K_α обозначают модифицированные функции Бесселя первого и второго родов соответственно, а L_α – модифицированную функцию Струве. Точное решение (6) упрощается как

$$\theta_\gamma(r) = -\gamma \begin{cases} [r/(2l_w)] \ln(l_w/r), & r \ll l_w, \\ l_w/r, & l_w \ll r \ll \lambda, \\ 2\lambda l_w/r^2, & r \gg \lambda. \end{cases} \quad (7)$$

Магноны. Магноны соответствуют малым отклонениям $\delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_\gamma$ намагниченности $\mathbf{m}$ от стационарного состояния $\mathbf{m}_\gamma$, определяемого θ_γ . Для описания $\delta \mathbf{m}$, применяется подход из работы [43]. Вводится локальный ортогональный базис $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_2 = [\mathbf{m}_\gamma \times \mathbf{e}_\varphi]$, и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{m}_\gamma$, а вектор намагниченности в произвольной точке плоскости $\mathbf{r}$ параметризуется как

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_3 \sqrt{1 - 2|\psi|^2} + \mathbf{e}_+ \psi + \mathbf{e}_- \psi^*, \quad (8)$$

где $\mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, а $\psi(\mathbf{r})$ – комплексная функция. Подстановка параметризации (8) в выражение для свободной энергии (1) и разложение до второго порядка по ψ дает энергию спиновых волн. После восстановления динамической части задачи получается следующий лагранжиан в безразмерном мнимом времени [43]:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{d_F K}{2} (\Psi^\dagger \sigma^z \partial_t \Psi + \Psi^\dagger \hat{H} \Psi), \quad (9)$$

который определяет динамику магнонов. Здесь были введены спинор $\Psi = (\psi, \psi^*)^T$, стандартные матрицы Паули $\sigma^{x,y,z}$ и эффективный гамильтониан типа БДЖ:

$$\hat{H} = 1 + \frac{l_w^2}{r^2} - l_w^2 \Delta + 2i\sigma^z \frac{l_w^2}{r^2} \partial_\varphi + \hat{V}, \quad (10)$$

где $\hat{V} = V_0 + \sigma^x V_x + 2i\sigma^z V_z \partial_\varphi$ является 2×2 матричным потенциалом, с компонентами, зависящими от $b_{r,z}$, θ_γ и r :

$$\begin{aligned} V_0 &= -\gamma(b_z \cos \theta_\gamma + b_r \sin \theta_\gamma) - \frac{3}{2} \frac{l_w^2 + r^2}{r^2} \sin^2 \theta_\gamma - \frac{l_w^2}{2} (\partial_r \theta_\gamma)^2 - \epsilon \left[\frac{3 \sin(2\theta_\gamma)}{2r/l_w} + l_w \partial_r \theta_\gamma \right], \\ V_x &= \frac{l_w^2 + r^2}{2r^2} \sin^2 \theta_\gamma - \frac{l_w^2}{2} (\partial_r \theta_\gamma)^2 + \epsilon \left[\frac{\sin(2\theta_\gamma)}{2r/l_w} - l_w \partial_r \theta_\gamma \right], \\ V_z &= -2 \frac{l_w^2}{r^2} \sin^2(\theta_\gamma/2) - \epsilon \frac{l_w}{r} \sin \theta_\gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Гамильтониан (10) обладает симметрией частица-дырка: $\hat{H} = \sigma^x K \hat{H} \sigma^x K$, где K обозначает комплексное сопряжение. В таком случае удобно искать решение динамического уравнения, соответствующего лагранжиану (9) в следующей форме: $\Psi = e^{-tE} \tilde{\Psi} + e^{tE} \sigma^x K \tilde{\Psi}$, где $\tilde{\Psi}$ удовлетворяет уравнению типа БДЖ:

$$\hat{H} \tilde{\Psi} = E \sigma^z \tilde{\Psi}. \quad (12)$$

Если $\tilde{\Psi}_E$ – решение ур. (12) с энергией E , то состояние $\tilde{\Psi}_{-E} = \sigma^x K \tilde{\Psi}_E$ также является решением этого уравнения с энергией $-E$.

В отсутствие пирловского вихря, $b_{r,z} = 0$, однородное ферромагнитное состояние соответствует $\theta = 0$. Тогда гамильтониан (10) сводится к

$$\hat{H}_0 = 1 + l_w^2 \left[-\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} (-i\partial_\varphi - \sigma^z)^2 \right]. \quad (13)$$

Поскольку $\hat{H}_0$ представляет из себя оператор Лапласа со сдвигом углового момента, нетрудно найти соответствующие собственные функции и энергии

$$\begin{aligned} E_{k,\pm} &= \pm(1 + k^2 l_w^2), \quad \tilde{\Psi}_{\mathbf{k},m,\pm} = \tilde{\Psi}_\pm J_{m_\pm}(kr) e^{im_\varphi}, \\ \tilde{\Psi}_+ &= (1, 0)^T, \quad \tilde{\Psi}_- = (0, 1)^T, \quad m_\pm = m \mp 1, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь J_α обозначает функции Бесселя первого рода.

В пределе $\gamma \ll 1$, достаточно разложить потенциал $\hat{V}$ до первого порядка по θ_γ , оставляя только члены, пропорциональные γ . Таким образом получается:

$$\begin{aligned} V_0 &\simeq -\gamma b_z - \epsilon \left[\frac{3l_w \theta_\gamma}{r} + l_w \partial_r \theta_\gamma \right], \\ V_x &\simeq \epsilon \left[\frac{l_w \theta_\gamma}{r} - l_w \partial_r \theta_\gamma \right], \quad V_z \simeq -\epsilon \frac{l_w \theta_\gamma}{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Интересно, что при $r \gg l_w$ в потенциале $\hat{V}$ главным оказывается член, пропорциональный b_z : $\hat{V} \simeq -\gamma b_z$. А именно, используя ур. (4) и (7), обнаруживается, что при $l_w \ll r \ll \lambda$ члены, пропорциональные θ_γ малы по параметру $l_w/r \ll 1$, в то время как при $r \gg \lambda$ эти члены малы по параметру $l_w/\lambda \ll 1$. Лишь при $r \sim l_w$ необходимо их учитывать как сопоставимые с ведущим приближением γb_z . Поэтому исследование начинается с приближенного гамильтониана,

$$\hat{H} \simeq 1 + \frac{l_w^2}{r^2} - l_w^2 \Delta + 2i\sigma_z \frac{l_w^2}{r^2} \partial_\varphi - \gamma b_z, \quad (16)$$

а затем результаты обобщаются на гамильтониан (10) с $\hat{V}$ из ур. (15), вычислением необходимых поправок от членов, пропорциональных θ_γ .

Гамильтонианы такого типа, как в ур. (16) с точным (3) или приближенным (4) выражением для b_z активно изучались в контексте связанных состояний электронов на заряженных центрах с экранированным кулоновским взаимодействием в двумерном электронном газе [59, 63–67]. Далее используется приближенное выражение (4) для b_z .

Локализованные магнотонные состояния. Эффективный экранированный кулоновский потенциал, $\hat{V} \simeq -\gamma b_z$, локализует магнотонные состояния. При $r \ll \lambda$ гамильтониан (16) соответствует задаче о двумерном атоме водорода, $\hat{V} \simeq -\gamma l_w/r$, для частицы с массой $1/(2l_w^2)$ и зарядом $\sqrt{\gamma l_w}$. Энергии и волновые функции даются [68]

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{n,m,\pm} &= \tilde{\Psi}_\pm e^{im\varphi - \frac{2r}{na_\gamma}} \left(\frac{r}{na_\gamma} \right)^{|m_\pm|} L_{n_r}^{2|m_\pm|} \left(\frac{4r}{na_\gamma} \right), \\ E_{n,m,\pm} &= \pm \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2} \right), \quad n = 2n_r + 2|m_\pm| + 1, \quad n_r = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $L_n^a(x)$ обозначает полиномы Сонина–Лаггера, $a_\gamma = 2l_w/\gamma$ – эффективный боровский радиус, а $\tilde{\Psi}_\pm$ и $m_\pm$ определены в ур. (14).

В первом приближении энергии связанных состояний гамильтониана (16) не зависят от ДМИ. Чтобы определить зависимость от параметра ДМИ ϵ , необходимо принять в расчет члены, пропорциональные θ_γ в ур. (15). Соответствующие поправки оказываются малыми, поскольку состояния (17) локализованы на масштабах порядка эффективного боровского радиуса $a_\gamma \gg l_w$. Следовательно, возможно применить теорию возмущений, для нахождения поправки

$$\delta E_{n,m,\pm}^{(\text{DMI})} \simeq \mp \frac{4\gamma^3 \epsilon}{n^3} \text{sgn}(2m_\pm - 1). \quad (18)$$

Интересно, что вклад от ДМИ-члена не полностью снимает вырождение спектра по отношению к угловому моменту m .

Важно, что эффективный боровский радиус a_γ меньше пирловской длины λ для экспериментальных условий. Отношение между этими длинами определяется только материальными параметрами ферромагнитной пленки, $\zeta \equiv 2\lambda/a_\gamma = \gamma\lambda/l_w = M_s\phi_0/(8\pi A)$. Так, например, $\zeta \approx 8.3$ для SF гетероструктуры из работы [20]. Таким образом, далее предполагается $\zeta \gg 1$ и, следовательно, $a_\gamma \ll \lambda$.

Характерный пространственный масштаб водородоподобных состояний (17) пропорционален $n^2 a_\gamma$. Для n , больших $\sqrt{\zeta}$, волновые функции водородоподобных состояний выходят за пределы λ , где не применима асимптотика $1/r$ для $\hat{V}$. Для наблюдения влияния на собственные энергии спадания b_z по закону $1/r^3$ на больших масштабах $r \gg \lambda$ следует использовать квазиклассическое приближение. Для двумерной задачи (16), правило квантования Бора–Зоммерфельда с поправкой Лангера записывается как

$$\text{Re} \int_0^\infty \frac{dr}{\pi l_w} \sqrt{\frac{4\gamma l_w \lambda^2}{r(r+2\lambda)^2} - \frac{m_\pm^2}{r^2/l_w^2} - |1 \mp E_{n,m,\pm}|} = n_r + \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Это позволяет рассчитать поправку к энергиям (17) водородоподобных состояний при $n^2 \ll \zeta$, которая снимает вырождение спектра относительно углового момента

$$\delta E_{n,m,\pm}^{(\text{WKB})} = \pm (\gamma^2/\zeta) [1 + 3(4m_\pm^2 - 3n^2)/(16\zeta)]. \quad (20)$$

Поправки (18) и (20) одного порядка при $\epsilon\gamma\zeta^2 \sim n^5$.

Для собственных состояний, близких к непрерывному спектру, $1 - E_{n,m,\pm} \ll \gamma^2/\zeta$, и имеющих не малый угловой момент, $1 \ll m_\pm^2 \sim \zeta$, энергии равны

$$E_{n,m,\pm} \simeq \pm \left[1 - \frac{\gamma^2}{4\zeta} \frac{(2m_\pm^2/\zeta)^{5/2}}{3 - 4m_\pm^2/\zeta} \left(1 - \frac{n + 2|m_\pm|}{2\sqrt{2\zeta}} \right) \right]. \quad (21)$$

Заметим, что радиальное квантовое число удовлетворяет неравенству $0 \leq n_r \leq \sqrt{2\zeta} - 2|m_\pm|$. Квазиклассический спектр (21) предполагает существование конечного числа связанных состояний. Их количество оценивается стандартно и равно ζ [64]. Физически конечность количества состояний можно понимать следующим образом. Для неэкранированного кулоновского потенциала $1/r$ число состояний бесконечно, и они сгущаются при приближении к непрерывному спектру. Для потенциала λ^2/r^3 число состояний также бесконечно, но их число неограниченно растет по мере удаления от непрерывного спектра.

В результате конкуренции между $1/r$ и λ^2/r^3 при $r \sim \lambda$, выживает лишь конечное число состояний $\sim \zeta$.

Рассеяние плоских спиновых волн. Теперь обсуждается задача рассеяния спиновых волн. Будем предполагать, что на вихрь налетает плоская спиновая волна с энергией $E_{k,\pm} = \pm(1 + k^2 l_w^2)$. В пределе $1/\lambda$ и ϵ к нулю, задача сводится к задаче рассеяния на двумерном кулоновском потенциале, как видно из упрощенного гамильтониана (16) при $b_z \simeq l_w/r$. В таком случае точно известно дифференциальное сечение рассеяния [69]:

$$\frac{d\sigma(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\gamma \tanh[\gamma\pi/(2kl_w)]}{4k^2 l_w \sin^2(\varphi/2)}. \quad (22)$$

Следует обратить внимание, что хотя транспортное сечение рассеяния конечно, полное сечение рассеяния расходится из-за сингулярности при $\varphi = 0$ в выражении (22). Поэтому принципиально необходимо учесть, то, что b_z спадает как $1/r^3$ при $r \gg \lambda$. Тогда дифференциальное сечение рассеяния регулируется при малых углах $|\varphi| \lesssim 1/(k\lambda)$. В борновском приближении легко найти

$$\frac{d\sigma_{\pm}^{(B)}(\varphi)}{d\varphi} \simeq \frac{2\pi\zeta^2/k}{(1+2q_\varphi\lambda)^2} \left(1 + \frac{2\epsilon q_\varphi l_w}{1+q_\varphi^2 l_w^2}\right). \quad (23)$$

Здесь $q_\varphi = 2k|\sin(\varphi/2)|$ изменение импульса магнона при рассеянии. В дополнение к гамильтониану (16), в ур. (23) учтены DMI-члены из ур. (15), которые считаются малыми, $\epsilon \ll 1$. Заметим, что в рассматриваемом случае большого ζ борновское приближение (23) применимо только для относительно быстрых магнонов, $k\lambda \gg \zeta \gg 1$ или, иначе говоря, $kl_w \gg \gamma$.

Интегрируя ур. (23) по φ получается, что при $kl_w \gtrsim 1 \gg \gamma$ полное и транспортное сечения рассеяния равны следующим выражениям

$$\begin{aligned} \sigma^{(B)} &\simeq 2\pi\zeta^2/(k^2\lambda)\{1 + \epsilon[\ln(\lambda/l_w) - 1](l_w/\lambda)\}, \\ \sigma_{\text{tr}}^{(B)} &\simeq \pi^2\zeta^2/(2k^3\lambda^2)[1 - 2\epsilon \ln(4kl_w)/(\pi kl_w)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что выражение для $\sigma_{\text{tr}}^{(B)}$ фактически не зависит от λ , и потому без учета DMI может быть получено непосредственно из ур. (22).

Для нахождения сечения рассеяния в других областях параметра $k\lambda$ следует применить квазиклассическое приближение для расчета фаз рассеяния δ_m . Вводя параметры $g = \zeta/[2(k\lambda)^2]$ и $\alpha_m = |m_{\pm}|/(2k\lambda)$, фазы рассеяния записываются как [68]

$$\frac{\delta_m}{2\lambda k} = \int_{x_0}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{g}{x(1+x)^2} - \frac{\alpha_m^2}{x^2}} - 1 \right) dx - x_0 + \frac{\pi\alpha_m}{2}. \quad (25)$$

Здесь $x_0 > 0$ обозначает наибольшую точку остановки, а также пренебрежено DMI. Заметим, что ур. (13) предполагает зависимость δ_m от $m_{\pm} = m \mp 1$, нежели от m . Впрочем, физическим смыслом обладает $\mathbf{m}$, а не ψ , см. ур. (8). Переход от ψ к $\mathbf{m}$ дает дополнительный множитель $\exp(\pm i\varphi)$, который приводит к эффективной замене $m_{\pm}$ на m . Заметим, что δ_m – четная функция $m_{\pm}$, так что амплитуда рассеяния $f(\varphi) = \sqrt{2/(\pi k)} \sum_m \exp(im\varphi + i\delta_m) \sin \delta_m$ имеет четное по φ абсолютное значение. Квазиклассическое приближение для фаз рассеяния применимо при $1/\zeta \ll k\lambda \ll \zeta$.

Поведение интеграла в ур. (25) интересным образом зависит от g . Точка поворота x_0 остается единственной при $g < g_c = 4(316+119\sqrt{7})/27 \approx 93.5$. В результате фаза рассеяния остается гладкой функцией α_m . Для $g > g_c$ и α в интервале (α_g, α'_g) появляются две дополнительные точки поворота, см. вставку на рис. 1. В результате скачок δ_m как функции α_m происходит при $\alpha_g \geq \alpha_c = \sqrt{(37+14\sqrt{7})}/3 \approx 4.97$. При $g \gg 1$ возможна оценка $\alpha_g \simeq \sqrt{3}[(g/2)^{1/3} - 2/3]$. Скачок в δ_m связан с внезапным возникновением большего корня x_0 подкоренного выражения в ур. (25).

При $g \gg 1$ фазы рассеяния в квазиклассическом приближении могут быть вычислены как

$$\frac{\delta_m}{2k\lambda} = \begin{cases} I_0(g) - \frac{\pi\alpha_m}{2} - I_1(g)\alpha_m^2 + O(\alpha_m^4), & \alpha_m \ll \alpha_g, \\ g/(2\alpha_m^2), & \alpha_m \gg \alpha_g, \end{cases} \quad (26)$$

где $I_{0,1}(g)$ оцениваются как $I_0 \simeq \pi g^{1/2} - 2.59g^{1/3} + 2/3$ и $I_1 \simeq 1.40g^{-1/3} - 1.15g^{-2/3}$. Точная асимптотика зависимости фазы рассеяния δ_m от углового момента при различных значениях $g \gg 1$ показана на главной части рис. 1.

Полное и транспортное сечения рассеяния могут быть найдены через стандартные выражения: $\sigma = (4/k) \sum_m \sin^2 \delta_m$ и $\sigma_{\text{tr}} = (2/k) \sum_m \sin^2(\delta_m - \delta_{m+1})$. При $g \gg 1$ сумма набирается в области $m \sim (\zeta k\lambda)^\nu \gg 1$, где $\nu = 1/2$ и $1/3$ для полного и транспортного сечений рассеяния соответственно. Тогда, используя асимптотическое выражение (26) для $\alpha_m \gg \alpha_g$, в области $\sqrt{\zeta} \gg k\lambda \gg 1/\zeta$ получают следующие оценки для полного и транспортного сечений рассеяния:

$$\sigma^{(\text{WKB})} \simeq 4\lambda \sqrt{\frac{2\pi\zeta}{k\lambda}}, \quad \sigma_{\text{tr}}^{(\text{WKB})} \sim \lambda \left[\frac{\zeta}{(k\lambda)^2} \right]^{1/3}. \quad (27)$$

Следует отметить, что оба сечения рассеяния имеют вклады, осциллирующие с $k\lambda$, что детально показано на рис. 2 и 3. Тем не менее осциллирующая часть

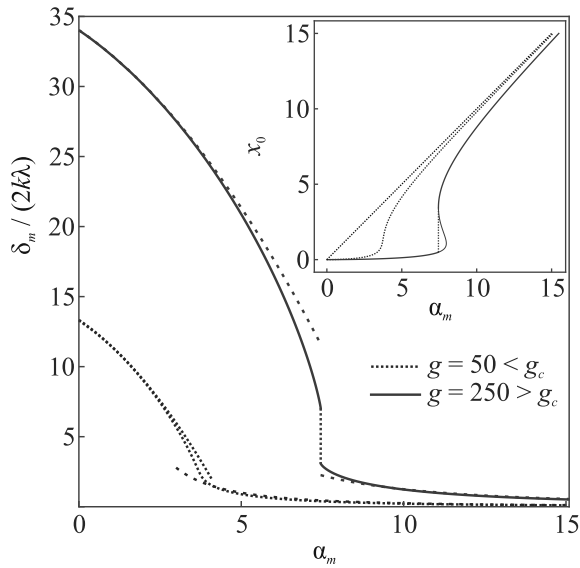


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость $\delta_m / (2k\lambda)$ от параметра α_m для $g < g_c$ и $g > g_c$, изображенная сплошной и штриховой линиями для точного интегрирования в ур. (25) и пунктирными точечными линиями для асимптотик из ур. (26). Вставка: зависимость точки остановки x_0 от α_m для тех же величин g

$\sigma^{(WKB)}$ параметрически меньше монотонной части, определяемой ур. (27). С другой стороны, осциллирующая часть $\sigma_{tr}^{(WKB)}$ оказывается одного порядка с его монотонной частью, ур. (27), в существенном интервале параметров.

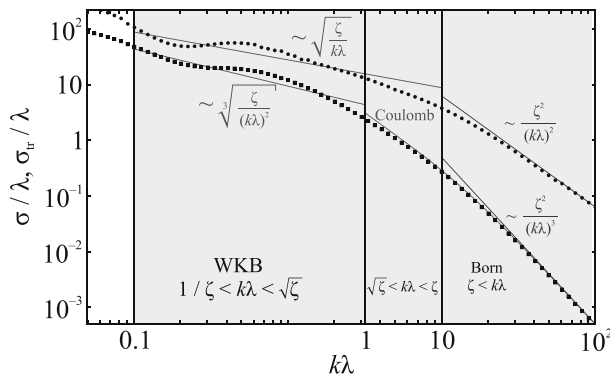


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость нормированных полного (σ/λ , круглые символы) и транспортного (σ_{tr}/λ , квадратные символы) сечений рассеяния от $k\lambda$ при $\zeta = 10$. Прямые линии задаются ур. (24) и ур. (27) в борновском и квазиклассическом приближениях соответственно. Кривая соответствует σ_{tr}/λ полученному из ур. (22) результату для двумерного кулоновского потенциала

В области применимости квазиклассики $\sqrt{\zeta} \ll k\lambda \ll \zeta$ ($g \ll 1$) имеются следующие асимптотические выражения для фаз рассеяния

$$\frac{\delta_m}{2\lambda k} = \frac{g}{2} \begin{cases} \ln[4/(g + 2e\alpha_m)], & \alpha_m \ll 1, \\ 1/\alpha_m^2, & \alpha_m \gg 1. \end{cases} \quad (28)$$

Заметим, что для $\alpha_m \gg 1$ зависимость δ_m от α_m в ур. (28) совпадает с борновским приближением. Тем не менее в обсуждаемой области параметра $k\lambda$ фазы рассеяния δ_m могут быть не малы. Полное сечение рассеяния дается тем же выражением, что и в ур. (27), в то время как транспортное сечение рассеяния оценивается как $\sigma_{tr}^{(WKB)} \sim \zeta/(k^2\lambda)$.

Полное и транспортное сечения рассеяния спадают по мере увеличения k для $k\lambda \gtrsim \sqrt{\zeta}$. На таких импульсах доминирует рассеяние вперед, поскольку $\sigma_{tr}/\sigma \ll 1$ при $k\lambda \gg \sqrt{\zeta}$. Рисунок 2 иллюстрирует зависимость нормированного сечения рассеяния от $k\lambda$, найденную численно (круглые и квадратные символы) решением ур. (12) с определенным угловым моментом m и аналитически (сплошные линии) различными асимптотиками из ур. (24), (27), и (22).

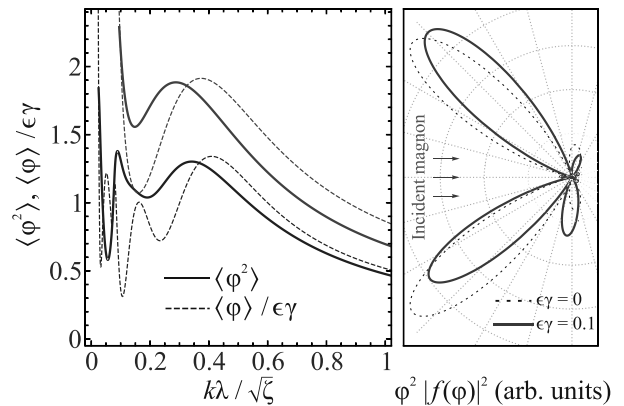


Рис. 3. (Цветной онлайн) Левая панель – зависимость $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle \varphi \rangle / \epsilon\gamma$ от нормированного импульса $k\lambda / \sqrt{\zeta}$ для $\zeta = 10$ (верхние кривые) и $\zeta = 30$ (нижние кривые). Правая панель – диаграмма направленности $d\sigma/d\varphi = |f(\varphi)|^2$ с весом φ^2 , построенная в полярных координатах для $\zeta = 30$, $k\lambda = 0.6$, $\epsilon\gamma = 0$ (штрихованная линия) и $\epsilon\gamma = 0.1$ (сплошная линия)

В вышеописанных расчетах пренебрежено параметром ДМІ ϵ . Теперь примем во внимание опущенные малые члены из ур. (15) для оценки среднего угла рассеяния магнов $\langle \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi d\sigma(\varphi) / \sigma$, что характеризует асимметрию рассеяния. Главный асимметричный вклад в амплитуду рассеяния $f(\varphi)$ приходит из V_z и дает дополнительный член $\epsilon\gamma m_{\pm} / [2(k\lambda x)^2(1+x)]$ в подкоренном выражении в ур. (25). Когда $\epsilon\gamma \ll 1$, средний угол рассеяния $\langle \varphi \rangle$ в главном приближении пропорционален $\epsilon\gamma$, тогда $\langle \varphi \rangle / \epsilon\gamma$ зависит только от $k\lambda$ и ζ .

На левой панели на рис. 3 иллюстрируется зависимость нормированного усредненного угла рассеяния $\langle\varphi\rangle/\epsilon\gamma$ (штрихованные линии) и среднего квадрата угла рассеяния $\langle\varphi^2\rangle$ (сплошные линии) от нормированного импульса $k\lambda/\sqrt{\zeta}$ для $\zeta = 10$ (верхние кривые) и $\zeta = 30$ (нижние кривые). Видно, что кривые демонстрируют осцилляции для небольших $k\lambda \lesssim \sqrt{\zeta}$, причем амплитуда осцилляций сравнима с величиной самих средних. Эти осцилляции обусловлены подавлением вклада рассеяния вперед при вычислении $\langle\varphi\rangle$ и $\langle\varphi^2\rangle$, за счет чего асимметричность рассеяния становится более выраженной, как видно на правой части рис. 3. Таким образом, неоднородность профиля намагниченности, создаваемая пирловским вихрем при наличии DMI создает слабую асимметрию рассеяния.

Обсуждение. Разрывность фазы рассеяния для $g > g_c$ при $\alpha_m = \alpha_g$, могла бы предполагать наличие направлений, в которых не распространяется рассеянная волна в квазиклассическом приближении. Однако это оказывается не так. Тем не менее точка разрыва α_g имеет прозрачный физический смысл. Как известно [70], физический угол рассеяния χ как функция прицельного параметра $\rho = |m|/k \simeq 2\alpha_m\lambda$ может быть получен из выражения $\pm\chi = 2\pi n - \vartheta$, где $\vartheta = 2d\delta_m/dm \simeq (k\lambda)^{-1}d\delta_m/d\alpha_m$, и n является целым. Ненулевое n предполагает феномен орбитального обращения. Для $g < g_c$ зависимость χ и ϑ от ρ показана на рис. 4. Для малого прицельного параметра $\rho/(2\lambda) \lesssim 4$, классическая траектория оборачивается некоторое (конечное) количество раз вокруг центра рассеяния. Однако при $g > g_c$ число оборотов классической траектории стремится к бесконечности по мере приближения прицельного параметра к $2\alpha_g\lambda$. Другими словами, при данном прицельном параметре должно происходить падение классической частицы на центр рассеяния. Заметим, что $2\alpha_g\lambda$ всегда превосходит $2\alpha_c\lambda \approx 10\lambda$.

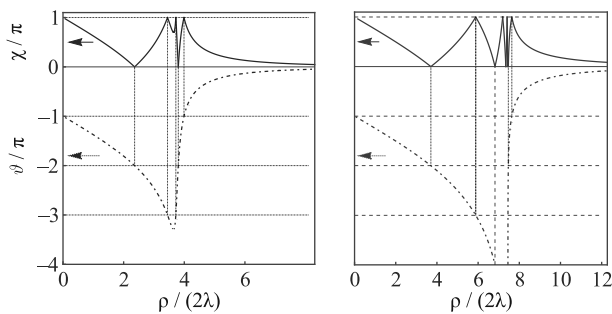


Рис. 4. (Цветной онлайн) Угол ϑ и физическое направление рассеяния χ как функции прицельного параметра $\rho/(2\lambda)$ для $g = 50 < g_c$ (слева) и для $g = 250 > g_c$ (справа)

Заметим, что для пирловского анти-вихря, чье магнитное поле направлено в обратную сторону, потенциал (11) в гамильтониане (10) меняет знак. Это приводит к исчезновению связанных состояний. Задача рассеяния также становится менее интересной. В частности пропадает эффект орбитального обращения.

Закключение. В работе рассмотрена тонкая SF гетероструктура и изучен спектр магнонов в ферромагнитной пленке в присутствии в сверхпроводнике пирловского вихря. Вихрь создает внешнее магнитное поле и возмущение профиля намагниченности. В результате образуется набор связанных состояний магнонов, подобных связанным состояниям электронов на заряженном центре с экранированным кулоновским взаимодействием в двумерном электронном газе. Число этих состояний полностью определяется только материальными параметрами ферромагнитной пленки.

Решена задача рассеяния для плоской спиновой волны, падающей на пирловский вихрь. Найдены полное и транспортное сечения рассеяния. Обсуждены особенности квантовой задачи рассеяния, соответствующие эффекту орбитального обращения в классическом пределе. Обнаружено, что взаимодействие Дзялошинского–Мории и искаженный вихрем профиль намагниченности приводят к асимметрии рассеяния магнонов.

Работа может быть развита в нескольких направлениях. Во-первых, интересно было бы рассмотреть рассеяние цилиндрической спиновой волны. Во-вторых, изучения заслуживают локализованные состояния магнонов на связанных парах пирловского вихря и неелевского скирмиона.

Авторы благодарны Я. Фоминову, А. Калашниковой и М. Парфенову за полезные обсуждения. Также выражаем признательность Е. Андрияхиной за сотрудничество по связанному проекту. И. С. Бурмистров и Д. С. Катков благодарят за личную поддержку Фонд развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Финансирование работы. Работа поддержана грантом Российского научного фонда # 24-12-00357.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. E. I. Blount and C. M. Varma, *Electromagnetic effects near the superconductor-to-ferromagnet transition*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1079 (1979).
2. V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. S. Prokofiev, V. V. Bolginov, and A. K. Feofanov, J. Low Temp. Phys. **136**, 385 (2004).

3. I. F. Lyuksyutov and V. L. Pokrovsky, *Adv. Phys.* **54**, 67 (2005).
4. A. I. Buzdin, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 935 (2005).
5. F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1321 (2005).
6. M. Eschrig, *Rep. Prog. Phys.* **78**, 104501 (2015).
7. C. Back, V. Cros, H. Ebert, K. Everschor-Sitte, A. Fert, M. Garst, T. Ma, S. Mankovsky, T. L. Monchesky, M. Mostovoy, N. Nagaosa, S. S. P. Parkin, C. Pfeiderer, N. Reyren, A. Rosch, Y. Taguchi, Y. Tokura, K. von Bergmann, and J. Zang, *J. Phys. D: Applied Phys.* **53**, 363001 (2020).
8. B. Göbel, I. Mertig, and O. A. Tretiakov, *Phys. Rep.* **895**, 1 (2021).
9. A. O. Zlotnikov, M. S. Shustin, and A. D. Fedoseev, *J. Supercond. Nov. Magn.* **34**, 3053 (2021).
10. A. N. Bogdanov and D. Yablonskii, *Sov. Phys. JETP* **68**, 101 (1989).
11. K. M. D. Hals, M. Schechter, and M. S. Rudner, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 017001 (2016).
12. J. Baumard, J. Cayssol, F. S. Bergeret, and A. Buzdin, *Phys. Rev. B* **99**, 014511 (2019).
13. S. M. Dahir, A. F. Volkov, and I. M. Eremin, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 097001 (2019).
14. R. M. Menezes, J. F. S. Neto, C. C. de Souza Silva, and M. V. Milošević, *Phys. Rev. B* **100**, 014431 (2019).
15. S. M. Dahir, A. F. Volkov, and I. M. Eremin, *Phys. Rev. B* **102**, 014503 (2020).
16. E. S. Andriyakhina and I. S. Burmistrov, *Phys. Rev. B* **103**, 174519 (2021).
17. E. S. Andriyakhina, S. Apostoloff, and I. S. Burmistrov, *JETP Lett.* **116**, 825 (2022).
18. S. S. Apostoloff, E. S. Andriyakhina, P. A. Vorobyev, O. A. Tretiakov, and I. S. Burmistrov, *Phys. Rev. B* **107**, L220409 (2023).
19. S. S. Apostoloff, E. S. Andriyakhina, and I. S. Burmistrov, *Phys. Rev. B* **109**, 104406 (2024).
20. A. P. Petrović, M. Raju, X. Y. Tee, A. Louat, I. Maggio-Aprile, R. M. Menezes, M. J. Wyszyński, N. K. Duong, M. Reznikov, Ch. Renner, M. V. Milosević, and C. Panagopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 117205 (2021).
21. P. Machain, *Skyrmion-Vortex Interactions in Chiral-Magnet/Superconducting Hybrid Systems*, Ph. D. thesis, Nanyang Technological University, Singapore (2021).
22. Y. Xie, A. Qian, B. He, Y. Wu, S. Wang, B. Xu, G. Yu, X. Han, and X. Qiu, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 166706 (2024).
23. W. Chen and A. P. Schnyder, *Phys. Rev. B* **92**, 214502 (2015).
24. G. Yang, P. Stano, J. Klinovaja, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **93**, 224505 (2016).
25. U. Güngördü, S. Sandhoefner, and A. A. Kovalev, *Phys. Rev. B* **97**, 115136 (2018).
26. E. Mascot, S. Cocklin, S. Rachel, and D. K. Morr, *Phys. Rev. B* **100**, 184510 (2019).
27. M. Garnier, A. Mesaros, and P. Simon, *Commun. Phys.* **2**, 126 (2019).
28. U. Güngördü and A. A. Kovalev, *J. Appl. Phys.* **132**, 041101 (2022).
29. S. Rex, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **100**, 064504 (2019).
30. S. Rex, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **102**, 224501 (2020).
31. J. Nothhelfer, S. A. Díaz, S. Kessler, T. Meng, M. Rizzi, K. M. D. Hals, and K. Everschor-Sitte, *Phys. Rev. B* **105**, 224509 (2022).
32. S. T. Konakanchi, J. I. Väyrynen, Y. P. Chen, P. Upadhyaya, and L. P. Rokhinson, *Phys. Rev. Res.* **5**, 033109 (2023).
33. A. I. Akhiezer, V. G. Bar'yakhtar, and S. V. Peletminskii, *Spin Waves*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam (1968).
34. S. A. Nikitov, D. V. Kalyabin, I. V. Lisenkov, A. N. Slavin, Yu. N. Barabanenkov, S. A. Osokin, A. V. Sadovnikov, E. N. Beginin, M. A. Morozova, Yu. P. Sharaevsky, Yu. A. Filimonov, Yu. V. Khivintsev, S. L. Vysotsky, V. K. Sakharov, and E. S. Pavlov, *Phys.-Uspekhi* **58**, 1002 (2015).
35. A. Barman, G. Gubbiotti, S. Ladak et al. (Collaboration), *J. Phys.: Condens. Matter* **33**, 413001 (2021).
36. A. Brataas, B. van Wees, O. Klein, G. de Loubens, and M. Viret, *Phys. Rep.* **885**, 1 (2020).
37. C. Davies, A. Francis, A. Sadovnikov, S. Chertopalov, M. Bryan, S. Grishin, D. Allwood, Y. Sharaevskii, S. Nikitov, and V. Kruglyak, *Phys. Rev. B* **92**, 020408 (2015).
38. H.-B. Braun, *Phys. Rev. B* **50**, 16485 (1994).
39. R. Hertel, W. Wulfhchel, and J. Kirschner, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 257202 (2004).
40. S. J. Hämäläinen, M. Madami, H. Qin, G. Gubbiotti, and S. van Dijken, *Nat. Commun.* **9**, 4853 (2018).
41. V. Laliena, A. Athanasopoulos, and J. Campo, *Phys. Rev. B* **105**, 214429 (2022).
42. J. Iwasaki, A. J. Beekman, and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* **89**, 064412 (2014).
43. C. Schütte and M. Garst, *Phys. Rev. B* **90**, 094423 (2014).
44. D. N. Aristov, S. S. Kravchenko, and A. O. Sorokin, *JETP Lett.* **102**, 511 (2015).
45. T. K. Ng and C. M. Varma, *Phys. Rev. B* **58**, 11624 (1998).
46. V. Braude and E. B. Sonin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 117001 (2004).
47. I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, V. V. Bolginov, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, and A. V. Ustinov, *Adv. Funct. Mater.* **28**, 1802375 (2018).

48. I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, V. V. Bolginov, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, and A. V. Ustinov, *J. Appl. Phys.* **127**, 093903 (2020).
49. I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, V. S. Stolyarov, V. I. Chichkov, M. Silaev, I. V. Shchetinin, A. A. Golubov, V. V. Ryazanov, A. V. Ustinov, and M. Yu. Kupriyanov, *Phys. Rev. Applied* **14**, 024086 (2020).
50. T. Yu and Gerrit E. W. Bauer, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 117201 (2022).
51. M. Silaev, *Phys. Rev. Applied* **18**, L061004 (2022).
52. I. A. Golovchanskiy, N. N. Abramov, O. V. Emelyanova, I. V. Shchetinin, V. V. Ryazanov, A. A. Golubov, and V. S. Stolyarov, *Phys. Rev. Applied* **19**, 034025 (2023).
53. M. Borst, P. H. Vree, A. Lowther, A. Teepe, S. Kurdi, I. Bertelli, B. G. Simon, Y. M. Blanter, and T. van der Sar, *Science* **382**, 430 (2023).
54. J. Kharlan, K. Sobucki, K. Szulc, S. Memarzadeh, and J. W. Klos, *Phys. Rev. Applied* **21**, 064007 (2024).
55. O. V. Dobrovolskiy, R. Sachser, T. Brächer, T. Böttcher, V. Kruglyak, R. V. Vovk, V. A. Shklovskij, M. Huth, B. Hillebrands, and A. V. Chumak, *Nat. Phys.* **15**, 477 (2019).
56. B. Niedzielski, C. L. Jia, and J. Berakdar, *Phys. Rev. Applied* **19**, 024073 (2023).
57. I. V. Bobkova, A. M. Bobkov, A. Kamra, and W. Belzig, *Commun. Mater.* **3**, 95 (2022).
58. J. Pearl, *Appl. Phys. Lett.* **5**, 65 (1964).
59. F. Stern and W. E. Howard, *Phys. Rev.* **163**, 816 (1967).
60. M. A. Kuznetsov, K. R. Mukhamatchin, and A. A. Fraerman, *Phys. Rev. B* **107**, 184428 (2023).
61. A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, North-Holland, Amsterdam (1988).
62. G. Carneiro and E. H. Brandt, *Phys. Rev. B* **61**, 6370 (2000).
63. C. Tanguy, arXiv:cond-mat/0106184.
64. M. E. Portnoi and I. Galbraith, *Solid State Commun.* **103**, 325 (1997).
65. D. G. W. Parfitt and M. E. Portnoi, *Exactly-solvable problems for two-dimensional excitons*, in Proceedings of the XI Regional Conference, Tehran, Iran, 3-6 May 2004: *Mathematical Physics* **52** (2005); https://doi.org/10.1142/9789812701862_0014.
66. A. J. Makowski, *Phys. Rev. A* **83**, 022104 (2011).
67. A. J. Makowski, *Phys. Rev. A* **84**, 022108 (2011).
68. V. Galitski, B. Karnakov, V. Kogan, and V. Galitski Jr., *Exploring quantum mechanics: A collection of 700+ solved problems for students, lecturers, and researchers*, Oxford University Press, London (2013).
69. Q.-G. Lin, *Am. J. Phys.* **65**, 1007 (1997).
70. G. L. Kotkin and V. G. Serbo, *Collections of problems in classical mechanics*, Pergamon Press, N. Y. (1971).