ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 1, с. 30–34

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.954

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ p-ЛАПЛАСИАНА НА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ С МОДЕЛЬНЫМ КОНЦОМ

© 2023 г. В. В. Бровкин

Получен критерий существования решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых параболических многообразиях с модельным концом.

DOI: 10.31857/S0374064123010041, EDN: OBUWCJ

Пусть M – полное связное ориентированное риманово многообразие с краем (возможно пустым). Будем рассматривать задачу

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{на} \quad M, \tag{1}$$

$$|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial M} = h, \tag{2}$$

где $p>1$ – некоторое вещественное число, ∇ и div – римановы градиент и дивергенция, ν – вектор внешней нормали к ∂M, а f и h – обобщённые функции из пространства $\mathcal{D}'(M)$, причём $\operatorname{supp} h\subset\partial M$.

Если край многообразия M пустой, то условие Неймана (2) предполагается выполненным автоматически. В этом случае всюду ниже считаем, что $h=0$.

Под $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где Ω – открытое подмножество M, понимается линейное пространство функций, принадлежащих классу $W^1_p(\Omega'\bigcap\Omega)$ для любого открытого множества $\Omega'\subset M$ с компактным замыканием. Пространство $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ определяется аналогично. Через $C_0^\infty(M)$ обозначаем пространство бесконечно гладких функций на M с компактным носителем.

Через $L^1_p(\Omega)$, где Ω – открытое подмножество M, обозначим линейное пространство обобщённых функций $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что $\nabla u\in L_p(\Omega)$ [1, с. 12]. Полунорма в $L^1_p(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L^1_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\,dV\right)^{1/p}.$$

Решения задачи (1), (2) будем понимать в слабом смысле. Именно, говорим, что функция $u\in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ является *решением* (1), (2), если

$$-\int\limits_M |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dV = (f-h,\varphi)$$

для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(M)$, где dV – элемент объёма многообразия M.

На решения задачи (1), (2) будем накладывать следующее условие на бесконечности:

$$\int\limits_M |\nabla u|^p\,dV<\infty. \tag{3}$$

Краевые задачи в неограниченных областях и на гладких многообразиях привлекают внимание многих математиков [2–14]. Задача (1)–(3) на гиперболических многообразиях с модельным концом рассмотрена в статье [5]. В данной работе получен критерий существования решений задачи (1)–(3) в случае параболического многообразия.

Определение 1. *Ёмкость* компакта $B \subset \Omega$ относительно открытого множества $\Omega \subset M$ определяется соотношением

$$\operatorname{cap}_p(B,\Omega) = \inf_{\varphi} \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^p \, dV,$$

где $\inf$ берётся по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, тождественно равным единице в окрестности этого компакта.

Если $\Omega = M$, то вместо $\operatorname{cap}_p(B,\Omega)$ пишем $\operatorname{cap}_p(B)$. Для произвольного замкнутого множества $H \subset M$ полагаем, что

$$\operatorname{cap}_p(H) = \sup_{B} \operatorname{cap}_p(B),$$

где $\sup$ берётся по всем компактам $B \subset H$. Ёмкость пустого множества считается равной нулю.

Определение 2. Многообразие M называется *p-параболическим*, если его ёмкость равна нулю, т.е. $\operatorname{cap}_p(M) = 0$. В противном случае многообразие M называется *p-гиперболическим*.

Заметим, что многообразие M является p-параболическим тогда и только тогда, когда произвольную константу можно приблизить в полунорме пространства $L_p^1(M)$ функциями из $C_0^\infty(M)$, равными единице в окрестности компакта ненулевой меры.

Несложно убедиться в том, что $\mathbb{R}^n$ – p-параболическое многообразие при $p \geqslant n$ и p-гиперболическое при $p < n$.

Для всех $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$ обозначим

$$N_\Omega(l) = \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\\ \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}=1}} |(l,\varphi)|.$$

При этом не исключается случай $N_\Omega(l) = \infty$.

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \bigcup D \times [r_0,\infty), \quad \omega \bigcap D \times [r_0,\infty) = \varnothing, \tag{4}$$

где ω – предкомпактная область, D – компактное риманово многообразие с краем, а $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число. Пусть также на множестве $D \times [r_0,\infty)$ задана метрика

$$ds^2 = a^2(r)\,dr^2 + b^2(r)\tilde g_{ij}(\theta)\,d\theta^i\,d\theta^j,$$

где a и b – положительные бесконечно гладкие функции на $[r_0,\infty)$, а $\tilde g_{ij}$ и θ^i – метрический тензор и локальные координаты на D. Назовём множество $D \times [r_0,\infty)$ *модельным концом* многообразия M по отношению к области ω (см. [3]). Обозначим

$$M_{r_0} = \omega, \quad M_r = \omega \bigcup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Из явного выражения для ёмкостного потенциала компакта $\overline{\omega}$ можно увидеть, что многообразие M с модельным концом является p-параболическим в том и только том случае, когда

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds = \infty.$$

Положим

$$E(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)}\,ds, \quad r > r_0. \tag{5}$$

Легко проверить, что функция E является p-гармонической на множестве $M\setminus\overline{\omega}$. Возьмём последовательность вещественных чисел $r_i>r_0$, $i\in\mathbb{N}$, такую, что

$$E(r_1)=1,\quad E(r_i)=2E(r_{i-1}),\quad i=2,3,\ldots$$

Теорема 1. *Пусть M – p-параболическое многообразие с модельным концом (4). Обозначим $\Omega_1=M_{r_1}$ и $\Omega_i=M_{r_{i+1}}\setminus\overline{M}_{r_{i-2}}$, $i=2,3,\ldots$ Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{\infty}N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(f-h)<\infty \tag{6}$$

и при этом для некоторой последовательности $\eta_i\in C_0^\infty(M)$ были выполнены условия

$$\lim_{i\to\infty}(f-h,\eta_i)=0,\quad \lim_{i\to\infty}\|\eta_i\|_{L_p^1(M)}=0\quad и\quad \eta_i\big|_K=1,\quad i\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

где K – компакт положительной меры.

Приведём примеры, демонстрирующие применения теоремы 1. Всюду в этих примерах будем считать, что $p>2$.

Пример 1. Пусть $M=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_3^2-x_1^2-x_2^2=1,\ x_3>0\}$ – плоскость Лобачевского. Можно показать, что M является многообразием с модельным концом (4), где $\omega=\{(x_1,x_2,x_3)\in M: x_3<2\}$, $r=x_3$, $r_0=2$ и D – единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с угловой координатой θ. При этом, очевидно, имеем равенство

$$ds^2=a^2(r)\,dr^2+b^2(r)\,d\theta,$$

где

$$a(r)=\sqrt{\frac{2r^2-1}{r^2-1}}\quad и\quad b(r)=\sqrt{r^2-1}.$$

Обозначим через Q_i^+ точку многообразия M с координатами $r=2^i$ и $\theta=\pi/2$, а через Q_i^- – с координатами $r=2^i$ и $\theta=-\pi/2$. Рассмотрим задачу (1)–(3), где $h=0$ и

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(\delta_{Q_i^+}(x)-\delta_{Q_i^-}(x)).$$

Здесь $\alpha_i\geqslant 0$ – вещественные числа, а $\delta_{Q_i^+}(x)$ и $\delta_{Q_i^-}(x)$ – дельта-функции Дирака, сосредоточенные в точках Q_i^+ и Q_i^-. Другими словами,

$$(f,\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(\varphi(Q_i^+)-\varphi(Q_i^-)),\quad \varphi\in C_0^\infty(M).$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что M – p-параболическое многообразие, причём

$$r_i\asymp 2^{i(p-1)/(p-2)}\quad при\quad i\to\infty.$$

Несложно также увидеть, что множества Ω_i, $i\in\mathbb{N}$, определённые в теореме 1, являются предкомпактными областями, причём из оценок, полученных на основе теорем вложения, следует, что

$$N_{\Omega_i}(f)\asymp 2^{i(p-1)/p}\sum_{\log_2 r_{i-2}<j<\log_2 r_{i+1}}\alpha_j\quad при\quad i\to\infty.$$

Возьмём невозрастающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице на промежутке $(-\infty, 0]$ и нулю на $[1, \infty)$. Можно убедиться в том, что последовательность $\eta_i(x_3) = \eta(2^{-i}x_3)$, $i \in \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом, применив эту теорему, получим, что задача (1)–(3) имеет решение в том и только том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \alpha_i^{p/(p-1)} < \infty.$$

Пример 2. Пусть M – часть плоскости Лобачевского, рассмотренной в предыдущем примере, состоящая из точек (x_1, x_2, x_3) таких, что $x_1 \geqslant 0$. Положим правую часть f уравнения (1) равной нулю, а функцию h, параметризуя край многообразия координатой x_2, зададим соотношением

$$h(x_2) = (1 + x_2^2)^{\sigma/2} \operatorname{sign} x_2,$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$. Заметим, что h – нечётная, вообще говоря, разрывная функция переменной x_2. Из оценок, полученных на основе теорем вложения, имеем

$$N_{\Omega_i}(h) \asymp 2^{i(p-1)(\sigma+2(p-1)/p)/(p-2)} \quad \text{при} \quad i \to \infty,$$

где Ω_i – множества, определённые в теореме 1. Тем самым, применив теорему 1 с той же последовательностью $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$, что и в предыдущем примере, получим, что для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma < -\frac{2(p-1)}{p}.$$

Теорема 1 обобщается на случай произвольного p-параболического риманова многообразия (не обязательно с модельным концом). Именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть M – p-параболическое многообразие и $\Omega \subset M$ – липшицева область с компактным замыканием. Предположим, что существует функция $\mathcal{E}$ такая, что*

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \ \ \text{на} \ \ M \setminus \overline{\Omega}, \quad \mathcal{E} > 0 \ \ \text{на} \ \ M \setminus \overline{\Omega}, \quad \mathcal{E}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu}\right|_{\partial M \setminus \overline{\Omega}} = 0,$$

и при этом для любого вещественного числа $A > 0$ множество $\{x \in M \setminus \Omega : \mathcal{E}(x) \leqslant A\}$ компактно. Положим

$$\Omega_1 = \Omega \bigcup \{x \in M \setminus \Omega : \mathcal{E}(x) < 4\}, \quad \Omega_i = \{x \in M \setminus \Omega : 2^{i-1} < \mathcal{E}(x) < 2^{i+1}\}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (6) и (7), где $\eta_i \in C_0^\infty(M)$, $i \in \mathbb{N}$, а K – компакт положительной меры.

Замечание. Функцию $\mathcal{E}$, определённую в теореме 2, принято называть *потенциалом Эванса–Селберга* многообразия M. В случае p-параболического многообразия с модельным концом примером такого потенциала, очевидно, является функция E, заданная равенством (5). В общем случае теоремы существования потенциала Эванса–Селберга можно найти в работах [13, 14].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А. Конькову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л., 1985.
2. *Cheng S.Y., Yau S.T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. № 3. P. 333–354.
3. *Korolkov S.A., Losev A.G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Math. Z. 2012. V. 272. № 1–2. P. 459–472.
4. *Losev A.G., Mazepa E.A.* On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds // Пробл. анал. Issues Anal. 2019. V. 8 (26). № 3. P. 73–82.
5. *Бровкин В.В.* О существовании решений задачи Неймана для p-лапласиана на гиперболических многообразиях с модельным концом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 139–141.
6. *Бровкин В.В., Коньков А.А.* О существовании решений второй краевой задачи для p-лапласиана на римановых многообразиях // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 2. С. 180–195.
7. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
8. *Григорьян А.А.* О размерности пространств гармонических функций // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 55–61.
9. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* О параболических по времени решениях параболических уравнений второго порядка во внешних областях // Вестн. Московского ун-та. Сер. Математика. 1985. Т. 39. № 4. С. 38–47.
10. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
11. *Коньков А.А.* О пространстве решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 805–813.
12. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряжённых эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1967. Т. 31. № 5. С. 1179–1199.
13. *Pigola S., Rigoli M., Setti A.G.* Aspects of potential theory on manifolds, linear and non-linear // Milan J. Math. 2008. V. 76. P. 229–256.
14. *Pigola S., Rigoli M., Setti A.G.* Some non-linear function theoretic properties of Riemannian manifolds // Rev. Mat. Iberoamericana. 2006. V. 22. № 3. P. 801–831.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24.07.2022 г.
После доработки 21.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.