ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1373–1384

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НЕЧЁТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

© 2023 г. Т. Е. Моисеев

Исследована задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с краевым условием нечётности на границе области эллиптичности. Получены в явной форме все собственные значения и собственные функции. Доказано, что система собственных функций полна в эллиптической части области и неполна во всей области. Также доказана однозначная разрешимость задачи, решение записано в виде ряда для спектрального параметра не равного собственному значению. Для спектрального параметра, совпадающего с собственным значением, получены условия разрешимости, при выполнении которых семейство решений найдено в виде ряда. Получено условие разрешимости задачи в зависимости от собственных значений. Построенные аналитические решения могут быть эффективно использованы при численном моделировании задач трансзвуковой газовой динамики.

DOI: 10.31857/S0374064123100059, EDN: ONGOZC

1. Постановка задачи. В области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \bigcup \mathcal{D}_{1-} \bigcup \mathcal{D}_{2-}$, где $\mathcal{D}_+ = \{(r,\Theta) : 0 < r < 1, 0 < \Theta < \pi\}$ – полукруг в верхней полуплоскости, $\mathcal{D}_{1-} = \{(x,y) : -y < x < y+1, \ -1/2 < y < 0\}$, $\mathcal{D}_{2-} = \{(x,y) : -y-1 < x < y, \ -1/2 < y < 0\}$ – равнобедренные прямоугольные треугольники в нижней полуплоскости, требуется определить регулярное решение уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром μ

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \mu^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_+ \bigcup \mathcal{D}_{1-} \bigcup \mathcal{D}_{2-}, \tag{1}$$

которое удовлетворяет следующим краевым условиям: на границе области задаются нелокальное условие (условие нечётности)

$$u(x,y) = -u(-x,y) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

и нормальная производная

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\Theta) \quad \text{для} \quad \Theta \in (0, \pi/2). \tag{3}$$

В области гиперболичности уравнения задаются условия Геллерстедта

$$u(x,-x) = 0, \quad x \in (0, 1/2), \tag{4}$$

$$u(x,x) = 0, \quad x \in (-1/2, 0). \tag{5}$$

Заметим, что условие (2) можно заменить условием

$$u(1,\Theta) = -u(1, \pi - \Theta) \quad \text{для} \quad \Theta \in [0, \pi/2], \tag{6}$$

записанным в полярной системе координат. Регулярное решение задачи (1)–(5) (или (1), (3), (6)) изучается в классе функций $u \in C^0(\overline{\mathcal{D}}) \bigcap C^2(\mathcal{D}_+) \bigcap C^2(\mathcal{D}_{1-}) \bigcap C^2(\mathcal{D}_{2-})$, где $\overline{\mathcal{D}}$ – замыкание области $\mathcal{D}$. Кроме того, предполагается, что функция $u(x,y)$ непрерывно дифференцируема при переходе через отрезки $(0,1)$ и $(-1,0)$ действительной оси и $\operatorname{grad} u$ может обращаться в бесконечность медленнее первой степени в точках $(-1,0)$, $(0,0)$ и $(1,0)$. Для дальнейшего изложения удобно определить область $\mathcal{D}_{1+} = \{(r,\Theta) : 0 < r < 1,\ \ 0 < \Theta < \pi/2\}$, а $\overline{\mathcal{D}}_{1+}$ будет соответственно замыканием области $\mathcal{D}_{1+}$.

2. Сведение задачи (1)–(5) к решению смешанной краевой задачи. Область $\mathcal{D}$ является симметричной по x, что позволяет представить решение задачи (1)–(5) в следующем виде:

$$u(x,y) = U(x,y) + V(x,y),$$

где $u(x,y)$ – решение задачи (1)–(5), а $U(x,y)$ и $V(x,y)$ определяются по формулам

$$U(x,y) = (u(x,y) + u(-x,y))/2, \tag{7}$$

$$V(x,y) = (u(x,y) - u(-x,y))/2. \tag{8}$$

Непосредственно проверяется, что функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ являются решениями уравнения (1). Справедлива следующая

Лемма 1. *Если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи, то $U = 0$ при $x > 0$, и решение задачи в этом случае является нечётной по x функцией.*

Доказательство. Функция $U(x,y)$ является чётной по аргументу x, поэтому достаточно доказать, что $U = 0$ при $x > 0$. Как уже отмечалось, функция U является решением уравнения (1) в области $\mathcal{D}$, а значит и в области $\mathcal{D}_+ \bigcup \mathcal{D}_{1-}$, т.е.

$$U_{xx} + (\operatorname{sgn} y)U_{yy} + \mu^2 U = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}. \tag{9}$$

Из условия (2) и формулы (7) следует, что

$$U(1,\Theta) = 0, \quad \Theta \in [0,\pi/2]. \tag{10}$$

При $x = 0$ из формулы (7) вытекает условие

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad y \in (0,1). \tag{11}$$

Полагая в (7) $y = -x$ и учитывая условия (4), (5), имеем

$$U(x,-x) = 0, \quad x \in [0,1/2]. \tag{12}$$

Итак, мы получили, что функция U – решение смешанной краевой задачи (9)–(12). Задача (9)–(12) обладает только тривиальным (нулевым) решением, если только μ^2 не является точкой спектра [1]. Отсюда следует, что решение $u(x,y)$ – нечётная по x функция и справедливо равенство $u(x,y) = V(x,y)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи (9)–(12), то решение $u(x,y)$ задачи (1)–(5) является решением задачи Неймана–Трикоми в области $\mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}$.*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $u(x,y) = V(x,y)$. Как уже отмечалось, функция V является решением уравнения (1) во всей области $\mathcal{D}$, а значит, она будет решением уравнения в области $\mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}$, т.е.

$$V_{xx} + (\operatorname{sgn} y)V_{yy} + \mu^2 V = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_{1+} \bigcup \mathcal{D}_{1-}. \tag{13}$$

Положив в формуле (8) $x = 0$, получим равенство

$$V(0,y) = 0. \tag{14}$$

Так как $u(x,y) = V(x,y)$, то для функции $V(x,y)$ будет выполняться условие

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\Theta), \quad \Theta \in (0,\pi/2). \tag{15}$$

Наконец, пользуясь условиями (4), (5), находим

$$v(x,-x)=0, \quad x\in[0,1/2]. \tag{16}$$

Лемма доказана.

Итак, решение задачи (1)–(5) представимо в виде суммы решений смешанной краевой задачи (9)–(12) и задачи Неймана–Трикоми (13)–(16).

3. Собственные значения и собственные функции задачи (1)–(5). Собственные функции смешанной краевой задачи (9)–(12) могут быть записаны в виде

$$U=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{\sqrt{2}}\cos((2m+1/2)(\pi/2-\Theta)J_{2m+1/2}(r\mu)) & \text{в } \mathcal{D}_{1+},\\ \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{m+1/4}J_{2m+1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-},\end{cases} \tag{17}$$

где $m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Собственные значения μ_{mn} смешанной краевой задачи (9)–(12) определяются как корни уравнения

$$J_{2m+1/2}(\mu_{mn})=0, \quad m,n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{18}$$

где $J_{2m+1/2}(\mu_{mn})$ – функция Бесселя первого рода.

Аналогично записываются собственные функции задачи Неймана–Трикоми (13)–(16)

$$u_k=\begin{cases}\dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta)J_{2k-1/2}(r\overline{\mu})) & \text{в } \mathcal{D}_{1+},\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\overline{\mu}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-},\end{cases} \tag{19}$$

где $k\in\mathbb{N}$, C – произвольная постоянная, отличная от нуля. Собственные значения $\overline{\mu}_{kl}$ задачи Неймана–Трикоми (13)–(16) определяются как корни следующего уравнения:

$$J'_{2k-1/2}(\overline{\mu}_{kl})=0, \quad k,l\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что если спектральный параметр μ^2 не является корнем уравнения (18), а является корнем уравнения (20), то собственные функции задачи (1)–(5) будут иметь вид

$$v_{ml}=\begin{cases}\dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))J_{2k-1/2}(r\overline{\mu}_{ml}) & \text{в } \mathcal{D}_{1+},\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\overline{\mu}_{ml}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{1-},\\ C\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\overline{\mu}_{ml}\sqrt{x^2-y^2}) & \text{в } \mathcal{D}_{2-},\end{cases} \tag{21}$$

где $m,l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Перед тем как переходить к построению собственных функций, в случае когда μ^2 является точкой спектра задачи Трикоми, т.е. μ^2 является одним из корней уравнения (18), докажем важную теорему, из которой будет следовать полнота собственных функций в области эллиптичности уравнения (1).

4. Отсутствие кратных корней у уравнений для собственных значений.

Теорема 1. *Уравнения (18) и (20) не имеют общих корней, за исключением быть может нуля.*

Доказательство. Предположим, что нашлась точка z такая, что для некоторых чисел $k\in\mathbb{N}$ и $m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ справедливы равенства

$$J_{2m+1/2}(z)=0, \tag{22}$$

$$J'_{2k-1/2}(z) = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим сначала случай $k = m$. Справедлива следующая формула [2, с. 628]:

$$\frac{(2m-1/2)J_{2m-1/2}(z)}{z} - J'_{2m-1/2}(z) = J_{2m+1/2}(z), \tag{24}$$

из которой и из формул (22), (23) следует, что $J_{2m-1/2}(z) = 0$, поэтому с учётом (23) число z является кратным корнем уравнения $J_{2m-1/2}(z) = 0$. Но функция Бесселя может иметь кратный корень только в случае $z = 0$. Итак, в случае $k = m$ наше утверждение доказано.

Пусть $k > m$, т.е. $k = m + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Тогда из формулы (24) получаем

$$0 = J'_{2m+2p-1/2}(z) = \frac{(2m+2p-1/2)J_{2m+2p-1/2}(z)}{z} - J_{2m+2p+1/2}(z). \tag{25}$$

Используя полиномы Ломмеля [3, с. 322; 4, с. 43], запишем две формулы:

$$J_{2m-1/2+2p}(z) = J_{2m+1/2}(z)R_{2p-1,2m+1/2}(z) - J_{2m-1/2}(z)R_{2p-2,2m+3/2}(z), \tag{26}$$

$$J_{2m+1/2+2p}(z) = J_{2m+1/2}(z)R_{2p,2m+1/2}(z) - J_{2m-1/2}(z)R_{2p-1,2m+3/2}(z), \tag{27}$$

где $R_{2p-2,2m+3/2}(z)$ и $R_{2p-1,2m+1/2}(z)$ – многочлены Ломмеля степени $2p-2$ и $2p-1$ соответственно относительно переменной $1/z$.

Подставив формулы (26), (27) в равенство (25), получим

$$0 = J_{2m+1/2}(z)\left[\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-1,2m+1/2}(z) - R_{2p,2m+1/2}(z)\right] -$$

$$- J_{2m-1/2}(z)\left[\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z)\right].$$

С учётом (22) имеем

$$0 = J_{2m-1/2}(z)\left[\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z)\right].$$

Из последнего равенства следует, что либо $J_{2m-1/2}(z) = 0$, либо выражение в квадратной скобке равно нулю.

Если $J_{2m-1/2}(z) = 0$, то из формулы (24) с учётом (22) следует, что $J'_{2m-1/2}(z) = 0$, но тогда z – кратный корень уравнения $J_{2m-1/2}(z) = 0$, а этого быть не может.

Остаётся рассмотреть случай, когда квадратная скобка равна нулю, т.е.

$$\frac{(2m+2p-1/2)}{z}R_{2p-2,2m+3/2}(z) - R_{2p-1,2m+1/2}(z) = 0.$$

В этом случае z – алгебраическое число, но по теореме Зигеля [4, с. 74] с учётом (22) этого быть не может.

Рассмотрим теперь случай $k < m$, тогда $m = k + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Из уравнения (22) с использованием полиномов Ломмеля [3, с. 322; 4, с. 43] получаем

$$0 = J_{2m+1/2}(z) = J_{2k+1/2+2p}(z) = J_{2k+1/2}(z)R_{2p,2k+1/2}(z) - J_{2k-1/2}(z)R_{2p-1,2k+3/2}(z). \tag{28}$$

Далее, из равенства (24) при $m = k$ с учётом (23) сразу запишем

$$\frac{(2k-1/2)J_{2k-1/2}(z)}{z} = J_{2k+1/2}(z). \tag{29}$$

Подставив теперь (29) в (28), будем иметь

$$0 = J_{2k-1/2}(z)\left[\frac{(2k-1/2)}{z}R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z)\right]. \tag{30}$$

Из (30) следует, что либо $J_{2k-1/2}(z) = 0$, либо

$$\frac{(2k-1/2)}{z}R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) = 0.$$

Если $J_{2k-1/2}(z) = 0$, то в силу (23) число z – кратный корень уравнения $J_{2k-1/2}(z) = 0$, но этого быть не может. Если же

$$\frac{(2k-1/2)}{z}R_{2p,2k+1/2}(z) - R_{2p-1,2k+1/2}(z) = 0,$$

то z является рациональным числом и одновременно является корнем уравнения (22), но это противоречит теореме Зигеля [4, с. 74]. Теорема доказана.

5. Построение собственных функций в случае, когда спектральный параметр μ^2 является корнем уравнения (18). В случае если μ^2 является собственным значением смешанной задачи (9)–(12) функции, определяемые по формуле (21), не являются собственными для задачи (1)–(5) (следует из теоремы 1), и задача (9)–(12) имеет нетривиальное решение $U(x,y)$.

Поставим теперь задачу для определения функции $V(x,y)$ (формула (7)). Заметим, что эта функция нечётная, поэтому будет выполнено условие

$$V(0,y) = 0. \tag{31}$$

На характеристике $y = -x$ функция обращается в нуль:

$$V(x,-x) = 0. \tag{32}$$

Нормальная производная функции V удовлетворяет условию

$$\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=1}, \tag{33}$$

где U – собственная функция задачи (9)–(12) (формула (17)). Будем искать решение этой задачи (задачи Неймана–Трикоми) в виде

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k, \tag{34}$$

где

$$u_k = \begin{cases} \dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))J_{2k-1/2}(r\mu), & y>0, \\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4} J_{2k-1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}), & y<0, \end{cases}$$

при $\mu = \mu_{kn}$, μ_{kn} – корень уравнения (18), а коэффициенты A_k определяются из условия (33).

Теорема 2. *Ряд, определяемый по формуле (34), является решением задачи (31)–(33) и является равномерно сходящимся в $\overline{\mathcal{D}}$ вместе с производной по r при $\mu = \mu_{kn}$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция u_k удовлетворяет условиям (31), (32). Проверка условия (33) приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2k-1/2}(\mu) =$$

$$= -(-1)^m\sqrt{2}\cos((2m+1/2)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2m+1/2}(\mu). \tag{35}$$

Если мы докажем равномерную сходимость ряда в левой части равенства (35), то тем самым построим собственную функцию.

Исследуем на равномерную сходимость ряд (34). Для удобства изложения введём новые переменные

$$B_k := A_k\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\mu J'_{2k-1/2}(\mu), \quad \psi/2 := \pi/2-\Theta$$

и обозначим правую часть в (35) через

$$f(\Theta) := -(-1)^m\sqrt{2}\cos((2m+1/2)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2m+1}(\mu).$$

Из (35) получаем явное выражение для B_k в следующем виде:

$$B_k = \int\limits_0^\pi f(\pi/2-\psi/2)h_k^{1/2}\,d\psi, \tag{36}$$

где

$$h_k^{1/2} = \frac{2}{\pi\sqrt{2\cos\psi/2}}\biggl(\sum_{j=0}^k C^j_{-1/2}\sin((k-j)\psi)\biggr)$$

есть биортогональная система к системе $\{\sin((k-1/4)\psi)\}_1^\infty$. Далее из формулы (13) (см. [5]) получаем

$$-(k-1/4)h_k^{1/2} = (H_{k-1}^{-3/2})', \tag{37}$$

где

$$H_n^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos\psi/2)^\beta}\biggl(\sum_{k=0}^n C^k_\beta\sin((n-k)\psi) - C^n_\beta/2\biggr),$$

$n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\beta=-1/2$, а h_m^β определяются по формуле

$$h_m^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos(\psi/2))^\beta}\sum_{k=0}^{m-1}C^k_\beta\sin((m-k)\psi). \tag{38}$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C^m_β для $\beta=-1/2$ ведет себя при $m\to\infty$ как $1/\sqrt{m}$ [4, с. 67]. Далее, подставив формулу (37) в (36) и проинтегрировав по частям полученное выражение с учётом равенства $H_n^{-3/2}(\pi)=0$, вытекающего из (38), получим

$$B_k = \frac{f(0)H_{k-1}^{-3/2}(0)}{k-1/4} - \frac{1}{2k-1/2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)H_{k-1}^{-3/2}(\phi)\,d\phi = B'_k + B''_k. \tag{39}$$

Оценим скорость убывания второго слагаемого в (39). Для этого подставим в него формулу (18) из работы [6] и в результате получим

$$B''_{k+1}(2k+3/2) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)\cos((k+3/4)\phi)\,d\phi +$$

$$+\frac{(-1)^k}{\pi^2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)(2\cos(\phi/2))^{3/2}\,d\phi\int\limits_0^1\frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\,dt}{(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)}. \tag{40}$$

Заметим, что первое слагаемое есть величина порядка $O(1/k^{\alpha})$ [7], а внутренний интеграл второго слагаемого в (40) можно оценить через бета-функцию Эйлера:

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\,dt}{(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\,dt}{[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{1/4-\varepsilon}[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{3/4+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 2\frac{t^{k-1/2}(1-t)^{2\varepsilon-1}\,dt}{(2t\cos^2(\phi/2))^{3/4+\varepsilon}} \leqslant C\frac{B(k-1/4-\varepsilon,2\varepsilon)}{\cos^{3/2+4\varepsilon}(\phi/2)}. \tag{41}$$

В формуле

$$B(k-1/4-\varepsilon,2\varepsilon)=\frac{\Gamma(k-1/4-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(k-1/4+\varepsilon)},$$

связывающей бета- и гамма-функции Эйлера, величина, стоящая в правой части, имеет порядок $1/k^{2\varepsilon}$ при $k\to\infty$. Отсюда и из (41) следует, что

$$|B_k''|\leqslant\frac{c}{k^{1+2\varepsilon}}, \tag{42}$$

где c – некоторая положительная постоянная.

Оценим скорость убывания первого слагаемого в (39). Для этого достаточно оценить $H_{k-1}^{-3/2}(0)$. Опять, использовав формулу (8) из [6], получим

$$H_n^{-3/2}(0)=\frac{2}{\pi}+\frac{2^{5/2}(-1)^n}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}}{(1+t)^2}\,dt. \tag{43}$$

Нетрудно видеть, что интеграл в (43) допускает оценку

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}}{(1+t)^2}\,dt \leqslant \int\limits_0^1 t^{n+1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt = B(n+3/2,1/2)=\frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(1/3)}{\gamma(n+2)}\leqslant\frac{C}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда и из оценки (42) получаем

$$B_k=\frac{2}{\pi k}+\overline{B}_k, \tag{44}$$

где $\overline{B}_k$ удовлетворяет (42).

Ряд (34) можно записать следующим образом (через коэффициенты B_k):

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}\sin((2k-1/2)\phi/2). \tag{45}$$

Используя асимптотическое выражение

$$\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}=\frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2}(1+O(1/k)), \tag{46}$$

справедливое для больших k, запишем ряд (45) с учётом (44), (46) следующим образом:

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}\sin((2k-1/2)\phi/2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k-1/2}\mu}{\pi k^2}\sin((2k-1/2)\phi/2)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{B}_k\frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2}(1+O(1/k))\mu\sin{(2k-1/2)\phi/2}. \qquad (47)$$

Из оценки (47) и из формулы (42) для $\overline{B}_k$ следует равномерная сходимость ряда (34) и продифференцированного по r ряда (34), т.е. ряд (34) является решением задачи (31)–(33). Теорема доказана.

Следствие. *Если μ является корнем уравнения (18), то собственная функция нелокальной краевой задачи (1)–(5) имеет вид*

$$u(x,y)=\begin{cases}U(x,y)+V(x,y) & \textit{при}\quad x>0,\\ U(-x,y)-V(-x,y) & \textit{при}\quad x<0,\end{cases} \qquad (48)$$

где $U(x,y)$ определяется по формуле (34), а $V(x,y)$ – по формуле (17).

Подытожим результаты этого пункта.

Теорема 3. *Собственные функции задачи (1)–(5), отвечающие собственным значениям μ^2, где μ определяется из уравнения (18), вычисляются по формуле (48); если же μ определяются из уравнения (20), то собственные функции вычисляются по формуле (19). Других собственных значений и собственных функций, а также присоединённых функций, нелокальная краевая задача (1)–(5) не имеет.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что не существует других собственных значений и других собственных функций, что следует из работы [1], где это было доказано для задач Трикоми и Неймана–Трикоми.

6. Полнота собственных функций.

Теорема 4. *Система собственных функций задачи (1)–(5) полна в пространстве $L_2(\mathcal{D}_+)$, т.е. полна в области эллиптичности уравнения (1).*

Доказательство. Достаточно доказать, что не существует функции из $L_2(\mathcal{D}_+)$, которая ортогональна всем собственным функциям. Пусть такая функция $f\in L_2(\mathcal{D}_+)$ существует. Обозначим

$$F(x,y)=[f(x,y)+f(-x,y)]/2,\quad L(x,y)=[f(x,y)-f(-x,y)]/2. \qquad (49)$$

Очевидно, что $F(x,y)$ – чётная по x функция, а $L(x,y)$ – нечётная по x функция. При этом

$$f(x,y)=F(x,y)+L(x,y). \qquad (50)$$

Функция $f(x,y)$ ортогональна всем собственным функциям, определяемым равенством (19), которые нечётны по x, поэтому

$$\int\limits_{\mathcal{D}_+}f(x,y)u_k\,dx\,dy=\int\limits_{\mathcal{D}_+}F(x,y)u_k\,dx\,dy+\int\limits_{\mathcal{D}_+}L(x,y)v_{ml}\,dx\,dy=2\int\limits_{\mathcal{D}_{1+}}L(x,y)v_{ml}\,dx\,dy=0.$$

Итак, собственные функции задачи Неймана–Трикоми ортогональны функции $L(x,y)$ в области $\mathcal{D}_{1+}$. Так как собственные функции задачи Неймана–Трикоми полны в $L_2(\mathcal{D}_{1+})$, то $L(x,y)=0$ в области $\mathcal{D}_+$. Следовательно,

$$f(x,y)=F(x,y).$$

Далее, функция $f(x,y)$ (50) также ортогональна всем функциям вида (48). Так как $F(x,y)$ (49) чётная в $\mathcal{D}_+$, то с учётом вида (48) получаем равенства

$$0=\int\limits_{\mathcal{D}_+}f(x,y)u(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{\mathcal{D}_+}F(x,y)u(x,y)\,dx\,dy=2\int\limits_{\mathcal{D}_{1+}}F(x,y)U(x,y)\,dx\,dy.$$

Учитывая, что $V(x,y)$ – собственные функции смешанной краевой задачи (9)–(12) и они согласно [1] полны в пространстве $L_2(\mathcal{D}_{1+})$, получаем $F(x,y)=0$. Поэтому $f(x,y)=0$. Теорема доказана.

7. Исследование разрешимости задачи (1)–(5). В случае если μ^2 не является собственным значением смешанной краевой задачи (9)–(12) функция

$$U(x,y)=[u(x,y)-u(-x,y)]/2=0$$

согласно лемме 2. Поэтому $u(x,y)=V(x,y)$ является нечётной по x функцией, и её достаточно найти при $x>0$. Запишем теперь задачу для $V(x,y)$:

$$V_{xx}+(\operatorname{sgn}y)V_{yy}+\mu^2V=0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_{1+}\bigcup\mathcal{D}_{1-}, \tag{51}$$

в силу нечётности функции $V(x,y)$ при $x=0$ получаем условие

$$V(0,y)=0. \tag{52}$$

На характеристике $y=-x$ функция обращается в нуль:

$$V(x,-x)=0. \tag{53}$$

Нормальная производная $V(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=1}=f(\Theta) \quad \text{для} \quad \Theta\in(0,\pi/2). \tag{54}$$

Будем искать решение этой смешанной краевой задачи в виде

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}A_ku_k, \tag{55}$$

где

$$u_k=\begin{cases}\dfrac{C(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))J_{2k-1/2}(r\mu), & y>0,\\ C\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{k-1/4}J_{2k-1/2}(\mu\sqrt{x^2-y^2}), & y<0.\end{cases}$$

Теорема 5. *Если функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера $f'(\theta)\in C^{\alpha}([0,\pi/2])$ с некоторым показателем $\alpha>0$ и $f(\pi/2)=0$, то ряд, определяемый по формуле (55), является решением задачи (51)–(54) и равномерно сходится в $\overline{\mathcal{D}_{1+}\bigcup\mathcal{D}_{1-}}$ вместе с производной по r.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что функция u_k удовлетворяет условиям (52), (53). Проверка условия (54) приводит к условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\sin(2(k-1/4)(\pi/2-\Theta))\mu J'_{2k-1/2}(\mu)=f(\theta). \tag{56}$$

Если мы докажем равномерную сходимость ряда в левой части этого равенства, то тем самым построим решение задачи (51)–(54).

Исследуем на равномерную сходимость ряд, стоящий в (56). Для удобства изложения введём новые переменные

$$B_k:=A_k\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}\mu J'_{2k-1/2}(\mu), \quad \psi/2:=\pi/2-\Theta.$$

Из (56) получаем явное выражение для B_k в следующем виде:

$$B_k = \int\limits_0^\pi f(\pi/2 - \psi/2) h_k^{1/2}\, d\psi, \tag{57}$$

где

$$h_k^{1/2} = \frac{2}{\pi\sqrt{2\cos\psi/2}}\biggl(\sum_{j=0}^{k} C_{-1/2}^{j} \sin((k-j)\psi)\biggr)$$

есть биортогональная система к $\{\sin((k-1/4)\psi)\}_1^\infty$. Далее из формулы (8) [5] имеем

$$-(k-1/4)h_k^{1/2} = (H_{k-1}^{-3/2})', \tag{58}$$

где

$$H_n^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos\psi/2)^\beta}\biggl(\sum_{k=0}^{n} C_\beta^k \sin((n-k)\psi) - C_\beta^n/2\biggr), \tag{59}$$

$n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\beta = -1/2$, а h_m^β определяются по формуле

$$h_m^\beta = \frac{2}{\pi(2\cos\psi/2)^\beta}\sum_{k=0}^{m-1} C_\beta^k \sin((m-k)\psi).$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C_β^m для $\beta = -1/2$ ведет себя при $m \to \infty$ как $1/\sqrt{m}$ [4, с. 67]. Далее, подставляя формулу (58) в (57) и интегрируя по частям полученное выражение с учётом равенства $H_n^{-3/2}(\pi) = 0$, вытекающего из (59), и равенства $f(\pi/2) = 0$, будем иметь

$$B_k = \frac{2}{2k-1/2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2 - \phi/2) H_{k-1}^{-3/2}(\phi)\, d\phi. \tag{60}$$

Оценим скорость убывания полученного выражения. Для этого подставим в (60) формулу (8) из статьи [6] и в результате получим

$$B_{k+1}(2k+3/2) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)\cos((k+3/4)\phi)\, d\phi +$$

$$+\frac{(-1)^k}{\pi^2}\int\limits_0^\pi f'(\pi/2-\phi/2)(2\cos(\phi/2))^{3/2}\, d\phi \int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\, dt}{(1-t)^2 + 4t\cos^2(\phi/2)}. \tag{61}$$

Заметим, что первое слагаемое в (61) – величина порядка $O(1/k^\alpha)$ [7], а внутренний интеграл второго слагаемого можно оценить через бета-функцию Эйлера:

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\, dt}{(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{t^{k-1/2}(1-t)^{-1/2}(1+t)\, dt}{[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{1/4-\varepsilon}[(1-t)^2+4t\cos^2(\phi/2)]^{3/4+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 2\frac{t^{k-1/2}(1-t)^{2\varepsilon-1}\, dt}{(2t\cos^2(\phi/2))^{3/4+\varepsilon}} \leqslant C\frac{B(k-1/4-\varepsilon, 2\varepsilon)}{\cos^{3/2+4\varepsilon}(\phi/2)}. \tag{62}$$

В формуле

$$B(k-1/4-\varepsilon,2\varepsilon)=\frac{\Gamma(k-1/4-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(k-1/4+\varepsilon)},$$

связывающей бета- и гамма-функции Эйлера, величина, стоящая в правой части, имеет порядок $1/k^{2\varepsilon}$ при $k\to\infty.$ Отсюда и из (62) следует, что

$$|B_k|\leqslant\frac{c}{k^{1+2\varepsilon}},\tag{63}$$

где c – некоторая положительная постоянная. Ряд (55) можно записать следующим образом (через коэффициенты B_k):

$$V=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}\sin((2k-1/2)\phi/2).\tag{64}$$

Отметим асимптотическое выражение

$$\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)\mu}=\frac{r^{2k-1/2}\mu}{2k-1/2}(1+O(1/k)),$$

справедливое для больших $k,$ из которого вытекает верное при больших k неравенство

$$\left|\frac{J_{2k-1/2}(r\mu)}{J'_{2k-1/2}(\mu)}\right|\leqslant\frac{c}{k}.$$

Из этой оценки и из формулы (63) следует равномерная сходимость ряда (55) и продифференцированного по r ряда (55), т.е. функция, представимая формулой (55), является решением задачи (50)–(54). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случаи, когда μ^2 является собственным значением задачи (1)–(5), т.е. корнем уравнения (18) или уравнения (20).

Теорема 6. *Если μ является корнем уравнения (20) при некотором $k=p,$ функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера*

$$f'(\theta)\in C^{\alpha}([0,\pi/2]),\quad f(\pi/2)=0,$$

то задача (1)–(5) разрешима, если выполнено следующее условие:

$$\int\limits_0^{\pi}f(\pi/2-\phi/2)h_p^{1/2}\,d\phi=0,$$

где $h_p^{1/2}$ – функция из (38). В случае выполнения условия (64) решение задачи (1)–(5) неединственно и определяется с точностью до собственной функции (19), отвечающей собственному значению из уравнения (20).

Теорема 7. *Если μ является корнем уравнения (18), функция $f(\theta)$ непрерывно дифференцируема и её производная принадлежит классу Гёльдера*

$$f'(\theta)\in C^{\alpha}([0,\pi/2]),\quad f(\pi/2)=0,$$

то задача (1)–(5) разрешима, её решение неединственно и определяется с точностью до собственной функции (48), отвечающей собственному значению из уравнения (18).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
3. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1949.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1965.
5. *Моисеев Е.И.* О дифференциальных свойствах разложений по системе синусов и косинусов // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 1. С. 117–126.
6. *Моисеев Е.И.* О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794–798.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М., 1985.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.