ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1522–1532

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 г. В. И. Максимов

Рассмотрена задача гарантированного управления нелинейным распределённым уравнением диффузионного типа, суть которой состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, обеспечивающего отслеживание решением заданного уравнения решение другого аналогичного уравнения, которое подвержено влиянию неизвестного возмущения. Изучен случай, когда допустимым возмущением может быть разрывная неограниченная функция. Задача решена в условиях неточного измерения в дискретные моменты времени решений каждого из уравнений, при этом указан устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения.

DOI: 10.31857/S0374064123110079, EDN: PEJGWV

1. Введение. Постановка задачи. В статье обсуждается задача управления по принципу обратной связи дифференциальным уравнением диффузионного типа с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\nu,t)-\Delta x(\nu,t)+e^{-\eta t}R(e^{\eta t}x(\nu,t))+\eta x(\nu,t)+L(K_\eta(t)x_{0,t}(\cdot))(\nu)=u(\nu,t)+f(\nu,t)\ \text{ в }\ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu x(\nu,t)=0\ \text{ в }\ \Sigma_\vartheta,$$

$$x(\nu,0)=x_0(\nu)\ \text{ в }\ \Omega. \tag{1}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; $R(y)=k(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$, $L>0$, $k>0$, η и $y_1<y_2<y_3$ – действительные числа; $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество с липшицевой границей $\partial\Omega$, $n=1,2,3$; $\vartheta>0$ – конечный момент времени; $Q_\vartheta=\Omega\times T$, $T=[0,\vartheta]$; $\Sigma_\vartheta=\partial\Omega\times\times T$; $f(\cdot)\in L_\infty(T;H^1(\Omega))$ – фиксированная функция; $u(\cdot)$ – управление; μ и ∂_μ обозначают соответственно вектор единичной внешней нормали и производную по внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω; $K_\eta(t)$ – семейство зависящих от параметра η линейных операторов

$$(K_\eta(t)w_{0,t}(\cdot))(\nu)=\gamma\int\limits_0^t e^{-(\beta+\eta)(t-s)}w(\nu,s)\,ds\quad\text{при п.в.}\quad \nu\in\Omega,$$

где β и γ – положительные числа. Символ $x_{0,t}(\cdot)$ обозначает функцию $x(s)$, $s\in[0,t]$. В дальнейшем считаем $x_0\in H^1(\Omega)$.

Функцию $x(\cdot)=x(\cdot\,;0,x_0,u(\cdot))\in W\bigcap L_\infty(Q_\vartheta)$ назовём *решением* (*слабым*) *уравнения* (1), если выполняется равенство

$$\int\limits_0^\vartheta\langle\dot x(t),\varphi(t)\rangle\,dt+\int\limits_0^\vartheta\int\limits_\Omega\{\nabla x(\nu,t)\cdot\nabla\varphi(\nu,t)+[e^{-\eta t}R(e^{\eta t}x(\nu,t))+\eta x(\nu,t)]\varphi(\nu,t)\}\,d\nu\,dt+$$

$$+\int\limits_0^\vartheta\int\limits_\Omega L(K_\eta(t)x_{0,t}(\cdot))(\nu)\varphi(\nu,t)\,d\nu\,dt=\int\limits_0^\vartheta\int\limits_\Omega\{u(\nu,t)+f(\nu,t)\}\varphi(\nu,t)\,d\nu\,dt$$

(при всех $\varphi \in W$), причём $x(0) = x_0$. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – двойственность между пространствами Соболева $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$; $\nabla x(\nu,t)$ – градиент функции $\nu \to x(\nu,t)$; производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений. Символ W означает пространство функций $z(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$, производные $\dot{z}(\cdot)$ которых являются элементами пространства $L_2(T; (H^1(\Omega))^*)$. Норма в пространстве W задаётся формулой

$$|z(\cdot)|_W = \bigg(\int\limits_0^{\vartheta} (|z(t)|^2_{H^1(\Omega)} + |\dot{z}(t)|^2_{(H^1(\Omega))^*})\,dt\bigg)^{1/2}.$$

Как известно, после изменения на множестве нулевой лебеговской меры всякая функция из пространства W является непрерывной со значениями в пространстве H. Поэтому считаем пространство W вложенным в пространство $C(T;H)$, где $H = L_2(\Omega)$. В таком случае решение уравнения (1) определено в каждый момент $t \in T$.

Уравнение вида (1) введено в работе [1]. К нему сводятся известные: в физике – уравнение Schlögl, в нейрологии – уравнение FitzHugh–Nagumo. Задачи оптимального управления последними рассматривались, например, в работах [1–5], где имеется соответствующая библиография, причём в статье [4] рассматривалось стохастическое уравнение, а в [5] обсуждалась задача стабилизации такого уравнения. В настоящей статье будет исследована одна задача гарантированного управления, суть которой состоит в следующем. Наряду с (1), рассмотрим задачу с уравнением того же вида

$$\frac{\partial}{\partial t}y(\nu,t) - \Delta y(\nu,t) + e^{-\eta t}R(e^{\eta t}y(\nu,t)) + \eta y(\nu,t) + L(K_\eta(t)y_{0,t}(\cdot))(\nu) = v(\nu,t) + f(\nu,t) \ \text{ в } \ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu y(\nu,t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_\vartheta,$$
$$y(\nu,0) = y_0(\nu) \ \text{ в } \ \Omega. \qquad (2)$$

В правой части этого уравнения стоит неизвестное возмущение $v(\cdot)$, которое является элементом пространства $L_2(T; H^1(\Omega))$. Следовательно, наличие каких либо “мгновенных” ограничений на $v(\cdot)$ не предполагается. В дискретные моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $\tau_m = \vartheta$, измеряются фазовые состояния $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$ уравнений (1) и (2). Результаты измерений – функции ξ_i^h и $\psi_i^h \in L_p(\Omega)$, $i = \overline{0, m-1}$, $p > 5/2$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \qquad (3)$$

где $h \in (0,1)$ – величина ошибки измерения. Задача состоит в построении алгоритма формирования управления $u(\cdot)$ по результатам измерений состояний $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$, обеспечивающего отслеживание решением уравнения (1) решения уравнения (2). Таким образом, управление, стоящее в правой части уравнения (1), вычисляется по правилу

$$u(t) = u^h(\xi_i^h, \psi_i^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Полагаем, что начальные состояния $x_0 \in H^1(\Omega)$ и $y_0 \in H^1(\Omega)$ связаны соотношением

$$|x_0 - y_0|_{H^1(\Omega)} \leqslant h. \qquad (4)$$

Одним из важных разделов математической теории управления является теория управления по принципу обратной связи, которая довольно активно развивается в последние годы и нацелена на решение задач управления динамическими системами в условиях неполной и меняющейся информации о их структурных характеристиках. Последние также могут быть подвержены влиянию неконтролируемых возмущений. В настоящее время разработано значительное число подходов, ориентированных на исследование задач подобного типа. Среди них можно выделить, например, теорию позиционных дифференциальных игр [6], H_2-теорию [7], теорию робастного управления [8], теорию матричных неравенств [9], метод, основанный на отслеживании возмущения [10], метод подавления возмущения [11] и т.д. Решение задач управления в условиях дефицита информации существенно усложняется, когда речь идёт о системах с распределёнными параметрами [11–13].

Один из подходов к решению задач управления по принципу обратной связи системами с распределёнными параметрами был развит в работах [14–19]. Он основан на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр, развиваемой екатеринбургской школой [6, 20, 21]. Задача слежения – классическая задача математической теории управления [22]. Одна из задач теории позиционных дифференциальных игр, как известно [6], решается путём отслеживания траектории так называемой стабильной дорожки путём экстремального сдвига на эту дорожку. В указанных выше работах рассматривались управляемые системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. При этом предполагалось, что управления игроков стеснены мгновенными ограничениями в виде компактных множеств. Настоящая статья продолжает указанные выше исследования. Следует отметить, что отсутствие ограничений на управления и (или) возмущения существенно усложняет математическое обоснование сконструированных тем или иным образом процедур построения разрешающих управлений. Не в последнюю очередь это вызвано некомпактностью пучков решений управляемых систем, порождённых множеством допустимых управлений и (или) возмущений в случае отсутствия мгновенных ограничений на них. Кроме того, при отсутствии таких ограничений экстремальный сдвиг вырождается, вследствие чего требуется его регуляризация (как правило по методу А.Н. Тихонова), которая была предложена в работах [23, 24] при решении задач устойчивого динамического обращения.

Задачи гарантированного управления уравнением вида (1) при наличии мгновенных ограничений (в виде ограниченных замкнутых множеств) как на управления, так и на возмущения с позиций отмеченного выше подхода исследовались в статье [19]. В настоящей работе рассмотрен случай отсутствия таких ограничений.

2. Алгоритм решения. Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи, приведём вспомогательные утверждения. Пусть выполнено

Условие. Параметр η в уравнении (1) удовлетворяет неравенству

$$\max\{3|c_R|, 3L\gamma\vartheta^{1/2}, 0.5-\beta\} \leqslant \eta,$$

где $c_R \leqslant dR/dy$ при всех $y \in \mathbb{R}$.

Символ $|\cdot|$ здесь и всюду ниже означает модуль числа, символ $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в пространстве H, а $|\cdot|_n$ – норму в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *При выполнении сформулированного условия если* $u(\cdot) \in L_p(Q_\vartheta)$, $p > 5/2$ *и* $x_0 \in L_\infty(\Omega)$, *то существует единственное решение уравнения (1)* $x(\cdot) \in W \bigcap L_\infty(Q_\vartheta) \bigcap C(\tilde\Omega \times \times (0,\vartheta])$. *Если к тому же* $x_0 \in C(\tilde\Omega)$, *то* $x(\cdot) \in C(\tilde\Omega \times [0,\vartheta])$.

Здесь $\tilde\Omega$ означает замыкание множества Ω.

Нетрудно доказать, что если выполнены условия леммы 1 и, кроме того, $x_0 \in H^1(\Omega)$, то $\dot x(\cdot) \in L_2(T;H)$. Заметим, что при $n = 1,2,3$ и $p \leqslant 6$ пространство $H^1(\Omega)$ вложено плотно и непрерывно в пространства $L_p(\Omega)$. В свою очередь, $H^1(\Omega)$ вложено в $L_\infty(\Omega)$ только при $n = 1$.

Стандартным образом доказывается

Лемма 2. *Можно указать число* $C > 0$ *(не зависящее от* x_0 *и* $u(\cdot)$*) такое, что равномерно по всем* $u(\cdot) \in L_p(Q_\vartheta)$ *верно неравенство*

$$\sup_{t\in T} |x(t)|_H^2 + \int\limits_0^\vartheta |\dot x(t)|_H^2\,dt \leqslant C\biggl(|x_0|^2_{H^1(\Omega)} + \int\limits_0^\vartheta \{|u(t)|_H^2 + |f(t)|_H^2\}\,dt\biggr),$$

где $x(\cdot) = x(\cdot\,;0,x_0,u(\cdot))$ *– решение уравнения (1).*

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 3 [25] (дискретное неравенство Гронуолла). *Пусть* $0 \leqslant \phi_j$, $0 \leqslant f_j$ *при* $j = \overline{0, m}$ *и* $f_j \leqslant f_{j+1}$ *при* $j = \overline{0, m-1}$. *Тогда из неравенств*

$$\phi_{j+1} \leqslant c_0 \delta \sum_{i=1}^{j} \phi_i + f_j, \quad j = \overline{1, m-1},$$

следуют неравенства

$$\phi_{j+1} \leqslant f_j \exp(c_0 j \delta), \quad j = \overline{0, m-1},$$

если $c_0 = \mathrm{const} > 0$, $\phi_1 \leqslant f_0$.

Пусть взято семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0,1), \quad h \in (0,1),$$

и функция $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$.

Перейдём к описанию алгоритма решения задачи. До начала его работы зафиксируем числа $h \in (0,1)$ и $\alpha = \alpha(h)$, а также разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$, отрезка T с шагом $\delta = \delta(h) = \tau_{i+1} - \tau_i$. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ однотипных шагов. На полуинтервале $[0, \tau_1)$ полагаем

$$u^h(t) = u_0^h = (\psi_0^h - \xi_0^h)\alpha^{-1}. \tag{5}$$

В результате действия этого управления реализуется решение $x^h(\cdot) = x(\cdot\,; 0, x_0, u^h_{0,\tau_1}(\cdot))$ уравнения (1). В свою очередь, в результате действия возмущения $v_{0,\tau_1}(\cdot)$ реализуется решение уравнения (2) $y(\cdot) = y(\cdot\,; 0, y_0, v_{0,\tau_1}(\cdot))$ на промежутке $[0, \tau_1]$. В момент $t = \tau_1$ вычислим u_1^h по формуле

$$u_1^h = (\psi_1^h - \xi_1^h)\alpha^{-1}, \tag{6}$$

где

$$|\xi_1^h - x^h(\tau_1)|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad |\psi_1^h - y(\tau_1)|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad \xi_1^h, \psi_1^h \in L_p(\Omega),$$

и положим

$$u^h(t) = u_1^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_1, \tau_2).$$

После этого реализуются $x^h(\cdot) = x(\cdot\,; \tau_1, x^h(\tau_1), u^h_{\tau_1,\tau_2}(\cdot))$ и $y(\cdot) = y(\cdot\,; \tau_1, y(\tau_1), v_{\tau_1,\tau_2}(\cdot))$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно на промежутке $[\tau_1, \tau_2]$.

Пусть решения $x^h(\cdot)$ (уравнения (1)) и $y(\cdot)$ (уравнения (2)) определены на отрезке $[0, \tau_i]$. В момент $t = \tau_i$ вычислим

$$u_i^h = (\psi_i^h - \xi_i^h)\alpha^{-1}, \tag{7}$$

где

$$|\xi_i^h - x^h(\tau_i)|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad \xi_i^h, \psi_i^h \in L_p(\Omega),$$

и положим

$$u^h(t) = u_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

В результате действия этого управления и неизвестного возмущения $v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$ реализуются $x^h(\cdot) = x(\cdot\,; \tau_i, x^h(\tau_i), u^h_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot))$ и $y(\cdot) = y(\cdot\,; \tau_i, y(\tau_i), v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot))$ – решения уравнений (1) и (2) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Описанная выше процедура заканчивается в момент ϑ.

В дальнейшем c_0, c_1, $\ldots$, d_1, d_2, $\ldots$ означают положительные постоянные, не зависящие от h, δ и α.

Лемма 4. *Пусть управление* $u = u^h(\cdot)$, *стоящее в правой части уравнения (1), находится по формулам (5)–(7). Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{i=\overline{0,m}} \varepsilon(\tau_i) \leqslant d_1 F(h, \delta, \alpha). \tag{8}$$

Здесь

$$F(h,\delta,\alpha) = (\alpha + \delta + \delta h^2\alpha^{-2} + h^2\delta^{-1})\exp\{d_2(1+\delta\alpha^{-2})\},$$

$$\varepsilon(t) = |\mu^h(t)|_H^2 + 2\int\limits_0^t \bigg\{ \int\limits_\Omega |\nabla\mu^h(\nu,s)|_n^2 d\nu + \frac{2}{3}\eta|\mu^h(s)|_H^2 \bigg\} ds,$$

$\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, $\mu^h(t) = x^h(t) - y(t)$, $x^h(\cdot)$ и $y(\cdot)$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Для доказательства леммы оценим изменение функции $\varepsilon(t)$ при $t \in T$. Обозначим $R_\eta(t,v) = e^{-\eta t}R(e^{\eta t}v) + (\eta/3)v$. Тогда задачи (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}x^h(\nu,t) - \Delta x^h(\nu,t) + R_\eta(t,x^h(\nu,t)) + \frac{2}{3}\eta x^h(\nu,t) + L(K_\eta(t)x^h_{0,t}(\cdot))(\nu) = u^h(\nu,t) + f(\nu,t) \ \text{ в } \ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu x^h(\nu,t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_\vartheta,$$
$$x^h(0) = x_0(\nu) \ \text{ в } \ \Omega \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}y(\nu,t) - \Delta y(\nu,t) + R_\eta(t,y(\nu,t)) + \frac{2}{3}\eta y(\nu,t) + L(K_\eta(t)y_{0,t}(\cdot))(\nu) = v(\nu,t) + f(\nu,t) \ \text{ в } \ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu y(\nu,t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_\vartheta,$$
$$y(\nu,0) = y_0(\nu) \ \text{ в } \ \Omega. \tag{10}$$

Вычтем (10) из (9) и умножим полученную разность скалярно (в H) на $\mu^h(t)$. Учитывая монотонность отображения $v \to R_\eta(t,v)$, будем иметь

$$\rho^h(t) + L(K_\eta(t)\{x^h_{0,t}(\cdot) - y_{0,t}(\cdot)\}, \mu^h(t)) \leqslant \langle \mu^h(t), u^h(t) - v(t)\rangle,$$

где

$$\rho^h(t) = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} + \int\limits_\Omega |\mu^h(\nu,t)|^2\,d\nu + \frac{2}{3}\eta\varepsilon_1(t), \quad \varepsilon_1(t) = |\mu^h(t)|_H^2.$$

Так как при $p > 5/2$ пространство $L_p(\Omega)$ вложено плотно и непрерывно в пространство H, то $|z|_H \leqslant c_0|z|_{L_p(\Omega)}$ для всех $z \in L_p(\Omega)$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|x^h(\tau_i) - \xi^h_i|_H \leqslant c_0 h, \quad |y(\tau_i) - \psi^h_i|_H \leqslant c_0 h, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

В силу известного свойства троек Гельфанда если $u^h(t), v(t) \in H^1(\Omega)$, $\mu^h(t) \in H$, то двойственность на $(H^1(\Omega))^* \times H^1(\Omega)$ эквивалентна скалярному произведению в H:

$$\langle \mu^h(t), u^h(t) - v(t)\rangle = (\mu^h(t), u^h(t) - u(t)).$$

Поэтому при п.в. $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(\tau_i = \tau_{h,i},\ m = m_h)$ верно неравенство

$$\langle \mu^h(t), u^h(t) - v(t)\rangle \leqslant (u^h(t) - v(t), \xi^h_i - \psi^h_i) + \varrho_i(t,h).$$

Здесь

$$\varrho_i(t,h) = c_1(|u^h(t)|_H + |v(t)|_H)\bigg(h + \int\limits_{\tau_i}^t \{|\dot{x}^h(\tau)|_H + |\dot{y}(\tau)|_H\}\,d\tau\bigg).$$

В таком случае для п.в. $t \in \delta_i$ выполнено соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \leqslant (u^h(t) - v(t), \xi_i^h - \psi_i^h) + \phi_t + \varrho_i(t,h), \tag{11}$$

где

$$\phi_t = L|(K_\eta(t)\{x_{0,t}^h(\cdot) - y_{0,t}(\cdot)\}, \mu^h(t))|.$$

Пусть

$$\varepsilon^h(t) = \varepsilon(t) + \alpha\int\limits_0^t \{|u^h(\tau)|_H^2 - |v(\tau)|_H^2\}\, d\tau.$$

Из (11) вытекает неравенство

$$\frac{d\varepsilon^h(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \alpha\{|u^h(t)|_H^2 - |v(t)|_H^2\} \leqslant 2(u^h(t), \xi_i^h - \psi_i^h) + \alpha|u^h(t)|_H^2 - \tag{12}$$

$$- 2(v(t), \xi_i^h - \psi_i^h) - \alpha|v(t)|_H^2 + 2\varrho_i(t,h) + 2\phi_t \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Учитывая правило определения управления $u^h(\cdot)$ (см. (5)–(7)), из (12) получаем справедливую при всех $t \in \delta_i$ и $i = \overline{0, m-1}$ цепочку неравенств

$$\varepsilon^h(t) \leqslant \varepsilon^h(\tau_i) + 2c_1\int\limits_{\tau_i}^t \{|u^h(\tau)|_H + |v(\tau)|_H\}\, d\tau\biggl(h + \int\limits_{\tau_i}^t \{|\dot{x}^h(\tau)|_H + |\dot{y}(\tau)|_H\}\, d\tau\biggr) + 2\int\limits_{\tau_i}^t \phi_\tau\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^h(\tau_i) + c_2h^2 + c_3\delta\int\limits_{\tau_i}^t \{|u^h(\tau)|_H^2 + |v(\tau)|_H^2\}\, d\tau + c_4\delta\int\limits_{\tau_i}^t \{|\dot{x}^h(\tau)|_H^2 + |\dot{y}(\tau)|_H^2\} d\tau + 2\int\limits_{\tau_i}^t \phi_\tau\, d\tau. \tag{13}$$

Суммируя правую и левую части неравенств (13) по i, в силу леммы 2 при $t \in T$ будем иметь

$$\varepsilon^h(t) \leqslant \varepsilon^h(0) + c_5h^2\delta^{-1} + c_6\delta\biggl(1 + \int\limits_0^t \{|u^h(\tau)|_H^2 + |v(\tau)|_H^2\}\, d\tau\biggr) + 2\int\limits_0^t \phi_\tau\, d\tau. \tag{14}$$

Теперь воспользуемся включением $v(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$, а также соотношением

$$\int\limits_0^t |u^h(\tau)|_H^2\, d\tau = \sum_{j=0}^{i_h(t)-1}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |u^h(\tau)|_H^2\, d\tau + \int\limits_{\tau_{i_h}(t)}^t |u^h(\tau)|_H^2\, d\tau \leqslant \delta\sum_{j=0}^{i_h(t)} |u_j^h|_H^2.$$

Символ $i_h(t)$ означает целую часть числа $t\delta^{-1}(h)$. Из (14) выводим

$$\varepsilon^h(t) \leqslant \varepsilon^h(0) + c_5h^2\delta^{-1} + c_7\delta + c_8\gamma_{h,\delta}(t) + 2\int\limits_0^t \phi_\tau\, d\tau. \tag{15}$$

Здесь

$$\gamma_{h,\delta}(t) = \delta^2\sum_{j=0}^{i_h(t)} |u_j^h|_H^2.$$

Следовательно, при $t \in \delta_i$

$$\gamma_{h,\delta}(t) = \delta^2\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2. \tag{16}$$

Заметим, что ввиду (4)

$$\varepsilon^h(0) \leqslant c_9 h^2. \tag{17}$$

Далее, при $t \in \delta_i$ справедливо соотношение

$$\varepsilon_1(t) = \left|\mu^h(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \{\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)\}\,ds\right|_H^2 \leqslant 2\varepsilon_1(\tau_i) + 2\delta \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|_H^2\,ds, \tag{18}$$

поэтому при $t \in \delta_i$

$$\int\limits_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2\delta^2 \sum_{j=0}^{i-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|_H^2\,ds +$$

$$+ 2\delta^2 \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|_H^2\,ds \leqslant 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2\delta^2 \int\limits_0^t |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|_H^2\,ds. \tag{19}$$

В силу леммы 2 при $t \in \delta_i$ выполняются неравенства

$$\int\limits_0^t |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|_H^2\,ds \leqslant c_{10}\biggl(1 + \int\limits_0^t \{|u^h(s)|_H^2 + |v(s)|_H^2\}\,ds\biggr) \leqslant c_{11}\biggl(1 + \delta \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2\biggr). \tag{20}$$

Из (19), учитывая (20), получаем

$$\int\limits_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2c_{11}\delta^2\biggl(1 + \delta \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2\biggr) =$$

$$= 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2c_{11}\delta(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)), \quad t \in \delta_i. \tag{21}$$

Обозначим

$$\nu_i(t) = L \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1^{1/2}(s)|K_\eta(s)(x_{0,s}^h(\cdot) - y_{0,s}(\cdot))|_H\,ds.$$

Из результатов работы [1] следует $(0 \leqslant b_1 < b_2 \leqslant \vartheta)$, что

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} |K_\eta(s) w_{0,s}(\cdot)|_H^2\,ds = \int\limits_{b_1}^{b_2} \biggl(\int\limits_\Omega (K_\eta(\tau) w_{0,\tau}(\cdot))(\varrho)\,d\varrho\biggr)^2 d\tau =$$

$$= \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_\Omega \left|\int\limits_0^\tau e^{-(\beta+\eta)(\tau-s)} w(\varrho,\tau)\,ds\right|^2 d\varrho\,d\tau \leqslant d_* \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\tau w^2(\varrho,s)\,ds\,d\varrho\,d\tau =$$

$$= d_* \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_0^\tau |w(s)|_H^2\,ds\,d\tau, \quad w(\cdot) \in L_2([b_1,b_2];H), \tag{22}$$

где $d_* = \gamma^2/\sqrt{2(\beta+\eta)}$. Кроме того, как нетрудно видеть, имеет место оценка

$$\nu_i(t) \leqslant \frac{2}{3}\eta \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1(s)\,ds + 3L^2/(8\eta)\pi_i(t). \tag{23}$$

Здесь

$$\pi_i(t) = \int\limits_{\tau_i}^{t} |K_\eta(s)(x^h_{0,s}(\cdot) - y_{0,s}(\cdot))|^2_H\,ds.$$

В силу (22) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верно неравенство

$$\pi_i(t) \leqslant d_* \int\limits_{\tau_i}^{t}\int\limits_{0}^{\tau} |x^h(s) - y(s)|^2_H\,ds\,d\tau = d_* \int\limits_{0}^{\tau_i}\int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1(s)\,d\tau\,ds + d_* \int\limits_{\tau_i}^{t}\int\limits_{s}^{t} \varepsilon_1(s)\,d\tau\,ds =$$

$$= d_*(t-\tau_i) \int\limits_{0}^{\tau_i} \varepsilon_1(s)\,ds + d_* \int\limits_{\tau_i}^{t} (t-s)\varepsilon_1(s)\,ds, \tag{24}$$

поэтому, воспользовавшись (24), устанавливаем оценку

$$\pi_i(t) \leqslant d_*\delta \int\limits_{0}^{t} \varepsilon_1(s)\,ds, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Учитывая (21) и (23), получаем справедливое при всех $t \in \delta_i$ соотношение

$$\pi_i(t) \leqslant 2d_1\delta^2 \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2c_{11}d_1\delta^2(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)). \tag{25}$$

В силу (18) и (20) имеет место цепочка неравенств

$$\frac{2}{3}\eta \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + \frac{4}{3}\eta\delta^2 \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|^2_H\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + \tag{26}$$

$$+ \frac{4}{3}c_{11}\eta\delta^2\left(1 + \delta\sum_{j=0}^{i} |u^h_j|^2_H\right) \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + \frac{4}{3}c_{11}\eta\delta(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)).$$

Нетрудно видеть, что при $t \in \delta_i$

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \phi_s\,ds \leqslant \nu_i(t).$$

Отсюда, с учётом (26), (25) и (23), выводим

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \phi_s\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + c_{12}\delta^2 \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + c_{13}\delta(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)), \quad t \in \delta_i. \tag{27}$$

При $t \in \delta_i$ из (27) после суммирования получаем

$$\int\limits_0^t \phi_s\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j) + c_{12}\delta^2\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\varepsilon_1(\tau_k) + c_{13}\delta\Big(\vartheta + \sum_{j=0}^{i}\gamma_{h,\delta}(\tau_j)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant c_{13}\vartheta\delta + c_{14}\delta\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j) + c_{13}\delta\sum_{j=0}^{i}\gamma_{h,\delta}(\tau_j). \tag{28}$$

Далее из (3) и правила определения u_i^h (см. (5)–(7)) вытекает соотношение

$$|u_i^h|_H^2 \leqslant c_{14}(\varepsilon_1(\tau_i) + h^2)\alpha^{-2}. \tag{29}$$

Кроме того,

$$\varepsilon_1(\tau_i) \leqslant \varepsilon(\tau_i). \tag{30}$$

В силу (29), (30) и (16) при $t \in \delta_i$ верно неравенство

$$\gamma_{h,\delta}(t) \leqslant c_{14}\delta^2\sum_{j=0}^{i}(\varepsilon(\tau_j) + h^2)\alpha^{-2}, \tag{31}$$

которое влечёт за собой

$$\sum_{j=0}^{i}\gamma_{h,\delta}(\tau_j) \leqslant c_{15}\delta\sum_{j=0}^{i}(\varepsilon(\tau_j) + h^2)\alpha^{-2}, \quad i = \overline{0,m}. \tag{32}$$

В таком случае из (15), учитывая (17), (28), (30) и (32), имеем

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant c_{16}h^2\delta^{-1} + c_{17}\delta + c_{14}\delta\sum_{j=0}^{i}\varepsilon(\tau_j) + c_{18}\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon(\tau_j) + c_{19}\delta h^2\alpha^{-2} + c_{20}\alpha.$$

Воспользовавшись дискретным неравенством Гронуолла (лемма 3), отсюда выводим

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant [c_{16}h^2\delta^{-1} + c_{17}\delta + c_{19}\delta h^2\alpha^{-2} + c_{20}\alpha]\exp\{(c_{14} + c_{18}\delta\alpha^{-2})\vartheta\}, \quad i = \overline{0,m}.$$

Неравенство (8) является следствием последнего неравенства. Лемма доказана.

Прямым следствием леммы 4 является

Теорема. *Пусть семейство разбиений Δ_h отрезка T и функция $\alpha(h)$ обладают следующими свойствами:*

$$h^2\delta^{-1}(h) \to 0, \quad \delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to +0.$$

Тогда равномерно по всем $h \in (0,1)$ верны неравенства

$$\max_{i=\overline{0,m_h}}\varepsilon(\tau_i) \leqslant d_2\Phi(h),$$

где $\Phi(h) = h^2\delta^{-1}(h) + \delta(h) + \alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Из теоремы вытекают два следствия.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы справедливо неравенство*

$$\max_{t\in T}\varepsilon_1(t) \leqslant d_3\Phi(h). \tag{33}$$

Доказательство. Действительно, из (18) и (20) следует справедливое при всех $t \in \delta_i$ неравенство

$$\varepsilon_1(t) \leqslant 2\varepsilon_1(\tau_i) + 2\delta c_{11}\left(1 + \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2\right) = 2\varepsilon_1(\tau_i) + 2c_{11}(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)). \tag{34}$$

Если $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$, то можно считать

$$\delta(h)\alpha^{-2}(h) \leqslant c_{21} \quad \text{при} \quad h \in (0,1). \tag{35}$$

В таком случае, учитывая (8), (35) и (31), заключаем, что при всех $i = \overline{0,m}$ верны соотношения

$$\gamma_{h,\delta}(\tau_i) \leqslant c_{22}\delta \sum_{j=0}^{i} (\varepsilon(\tau_i) + h^2) \leqslant c_{23}\Phi(h). \tag{36}$$

Из (34), снова учитывая (8), а также (36), получаем (33). Следствие доказано.

Одна из стандартных норм в пространстве $H^1(\Omega)$ задаётся следующим образом:

$$|x|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla x(\nu)|_n^2 \, d\nu + |x|_H^2\right)^{1/2}.$$

В таком случае имеет место

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы равномерно по всем $h \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\max_{t\in T} \left\{ |x^h(t) - y(t)|_H^2 + \int\limits_0^t |x^h(s) - y(s)|_{H^1(\Omega)}^2 \, ds \right\} \leqslant d_4\Phi(h).$$

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре, при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2023-913.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casas E., Ryll C., Tröltzsch F.* Sparse optimal control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems // Comput. Methods in Appl. Math. 2014. V. 13. № 1. P. 415–442.
2. *Buchholz R., Engel H., Kanimann E., Tröltzsch F.* On the optimal control of the Schlögl-model // Comput. Optimization and Appl. 2013. V. 56. № 1. P. 153–185.
3. *Rull K., Lober J., Martems S., Engel H., Tröltzsch F.* Analytical, optimal, and Sparse optimal control of traveling wave solutions to reaction-diffusion systems. Control and self-organizing nonlinear systems / Eds. F. Scholl, S.H.L. Klapp, P. Hovel. Cham, 2016. P. 189–210.
4. *Cordoni F., Persio L.D.* Optimal control for the stochastic Fitzhugh–Nagumo model with recovery variable // Evolution Equat. and Control Theory. 2018. V. 7. № 4. P. 571–585.
5. *Bretten T., Kunisch K.* Riccati-based feedback control of the monodomian equations with the FitzHugh–Nagumo model // SIAM J. Control and Optimization. 2014. V. 52. № 6. P. 4057–4081.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
7. *Kwakernaak H.* H_2-optimization theory and applications control design // Ann. Rev. in Control. 2002. V. 26. № 1. P. 45–56.
8. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М., 2002.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе матричных неравенств. М., 2007.
10. *Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H.* Disturbance-observer-based-control and related methods: an overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2015. V. 63. № 2. P. 1083–1095.

11. *Guo B.Z., Liu J.J., Al-Fhaid A.S., Younas A.M., Asiri A.* The active disturbance rejection approach to stabilization of coupled heat and ODE system subject to boundary control matvhed disturbance // Int. J. of Control. 2015. V. 88. № 8. P. 1554–1564.
12. *Ke Z., Logemann H., Rebarber R.* Approximate tracking and disturbance rejection for stable infinite-dimensional systems using sampled-data low-gain control // SIAM J. of Control and Optimization. 2009. V. 48. № 1. P. 641–671.
13. *Pisano A., Orlov Y.V., Usai L.* Tracking control of the uncertain heat and wave equation via power-fractional and sliding-mode techniques // SIAM J. Control and Optimization. 2011. V. 49. № 1. P. 363–382.
14. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры в системах с последействием // Докл. АН СССР. 1975. Т. 196. № 4. С. 761–768.
15. *Осипов Ю.С.* Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 42. № 2. С. 341–346.
16. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М., 2009.
17. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 18–30.
18. *Осипов Ю.С., Максимов В.И.* Отслеживание решения нелинейного распределённого дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычислит. математики. 2018. Т. 21. № 2. С. 201–213.
19. *Maksimov V.* Some problems of guaranteed control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems // Evolution Equat. and Control Theory. 2017. V. 6. № 4. P. 559–586.
20. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
21. *Ушаков В.Н.* К построению стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
22. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М., 2004.
23. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
24. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
25. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.
После доработки 21.06.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.