

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференциальные уравнения”. 2023. Т. 59. № 11).**

Р. Г. Алимуратов, Н. Л. Марголина, К. Е. Ширяев (Кострома) “О соотношении старшего ляпуновского и дискретным способом определяемых центрального и особого верхних показателей” (16 февраля 2024 г.).

Для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A(t) \in C(\mathbb{R}^+, \text{End } \mathbb{R}^n) \quad (1)$$

старший показатель Ляпунова (см. [1, гл. 3, § 4]) задаётся формулой

$$\lambda_1(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \|X_A(t, 0)\|,$$

а верхние центральный и особый показатели определяются дискретным способом (см. [2, гл. 3, § 8]) соответственно как

$$\Omega(A) = \inf_{T>0} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^k \ln \|X_A(jT, (j-1)T)\|, \quad (2)$$

$$\Omega^0(A) = \inf_{T>0} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{T} \ln \|X_A(kT, (k-1)T)\|, \quad (3)$$

где X_A — оператор Коши системы (1). Из формул (2) и (3) сразу следует, что $\Omega(A) \leq \Omega^0(A)$. Кроме того [2, гл. 3, §§ 7, 8], для систем с ограниченными коэффициентами справедливы неравенства

$$\lambda_1(A) \leq \Omega(A) \leq \Omega^0(A),$$

в которых любая комбинация равенств и строгих неравенств реализуется на некоторой ограниченной системе (1).

В статьях [3, 4] указано, что каждой из двух цепочек соотношений

$$\Omega(A) < \Omega^0(A) < \lambda_1(A), \quad \Omega(A) < \lambda_1(A) < \Omega^0(A) \quad (4)$$

удовлетворяют показатели некоторой неограниченной системы (1).

* Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллиончиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара — И.Н. Сергеев, И.В. Астахова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара — В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

** Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Теорема. При любом $n \in \mathbb{N}$ для каждой цепочки неравенств (4), в которой какое-либо одно или сразу оба неравенства заменены равенствами, существует система вида (1), показатели которой удовлетворяют именно этой цепочке.

Литература. 1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с. 2. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с. 3. Троскина, А.Е. О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы / А.Е. Троскина // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 863–864. 4. Об отношении порядка между ляпуновским старшим, центральным и особым верхними показателями неограниченной системы / Р.Г. Алимуратов, Н.Л. Марголина, А.Е. Троскина, К.Е. Ширяев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 864.

А. А. Бондарев (Москва) “О совпадении классов обеспечения асимптотической и частной неустойчивостей” (16 февраля 2024 г.).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и фазовой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, содержащей точку нуль, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с правой частью $f: \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а значит, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех *непродолжаемых ненулевых* решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ — его подмножество, состоящее из тех решений x , которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что для системы (1) имеет место *перроновская* или, соответственно, *верхнепредельная*:

1) *асимптотическая устойчивость*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0; \quad (2)$$

2) *асимптотическая неустойчивость*, если асимптотическая устойчивость соответствующего типа не имеет места, т.е. для каждого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет условию (2);

3) *глобальная устойчивость*, если любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяет условию (2);

4) *частная неустойчивость*, если глобальная устойчивость соответствующего типа не имеет места, т.е. хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет условию (2).

Определение 2 [1, 2]. Будем говорить, что для системы (1) имеет место *ляпуновская*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| < \varepsilon; \quad (3)$$

2) *неустойчивость*, если ляпуновская устойчивость не имеет места, т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ и каждого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет условию (3);

3) *асимптотическая устойчивость*, если система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

4) *асимптотическая неустойчивость*, если ляпуновская асимптотическая устойчивость не имеет места, т.е. система обладает ляпуновской неустойчивостью или верхнепредельной асимптотической неустойчивостью;

5) *глобальная устойчивость*, если система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной глобальной устойчивостью;

6) *частная неустойчивость*, если ляпуновская глобальная устойчивость не имеет места, т.е. система обладает ляпуновской неустойчивостью или верхнепредельной частной неустойчивостью.

Далее приведём следующее

Определение 3 [3, 4]. Система (1) имеет *линейное приближение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad A \in C(\mathbb{R}_+, \text{End } \mathbb{R}^n), \quad (4)$$

если выполнено требование *равномерной малости* возмущения

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \rightarrow 0,$$

откуда следует, что $A(\cdot) \equiv f'_x(\cdot, 0)$. Также будем говорить, что линейное приближение (4):

- *обеспечивает* данное свойство из определений 1 и 2, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением;
- *допускает* данное свойство из определений 1 и 2, если им обладает хотя бы одна система (1) с этим линейным приближением,

а множество всех линейных приближений, обеспечивающих или допускающих конкретное свойство из определений 1 и 2, будем называть *классом обеспечения* или, соответственно, *классом допущения* этого свойства.

Для введённых в определении 3 классов обеспечения или допущения ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. При $n > 1$ совпадают классы обеспечения свойств в следующих парах:

- ляпуновской асимптотической и ляпуновской частной неустойчивостей;
- перроновской асимптотической и перроновской частной неустойчивостей;
- верхнепредельной асимптотической и верхнепредельной частной неустойчивостей.

Теорема 2. При $n > 1$ совпадают классы допущения свойств в следующих парах:

- ляпуновской асимптотической и ляпуновской глобальной устойчивостей;
- перроновской асимптотической и перроновской глобальной устойчивостей;
- верхнепредельной асимптотической и верхнепредельной глобальной устойчивостей.

Исследование выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 855–856. 2. Сергеев, И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1556–1557. 3. Сергеев, И.Н. Классы линейных приближений, обеспечивающих различные виды устойчивости или неустойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2023. — № 4. — С. 8–15. 4. Сергеев, И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2023. — Т. 33. — С. 353–423.

И. Р. Камаров, А. В. Филиновский (Москва) “Убывание при больших значениях времени решений смешанной задачи для волнового уравнения с линейной диссипацией” (1 марта 2024 г.).

Для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ исследуется поведение при больших значениях времени t решения смешанной задачи для волнового уравнения с диссипативным слагаемым

$$u_{tt} - \Delta u + b(x)u_t = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_1(x), \quad u_t(x, 0) = u_2(x), \quad x \in \Omega, \quad u_1 \in \dot{W}_2^1(\Omega), \quad u_2 \in L_2(\Omega), \quad (2)$$

где $b \in C^1(\bar{\Omega})$ — коэффициент диссипации, причём $0 \leq b(x) \leq b_1$ при некотором $b_1 > 0$. Для энергии $E(t) \equiv \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2) dx$ решения u задачи (1), (2) имеет место энергетическое соотношение

$$E(t) + 2 \int_0^t \int_{\Omega} b(x) u_t^2(x, \tau) dx d\tau = E(0) = \int_{\Omega} (u_2^2(x) + |\nabla u_1(x)|^2) dx, \quad (3)$$

поэтому функция $E(t)$ убывает.

Определение 1. Функция $u \in C([0, +\infty), \dot{W}_2^1(\Omega))$ называется *решением задачи* (1), (2) из энергетического класса, если $u_t \in C([0, +\infty), L_2(\Omega))$ и выполнены условия (2), (3), а для любого $T > 0$ при всех $w \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $w|_{\Gamma \times (0, T)} = 0$ и $w|_{t=T} = 0$, выполнено интегральное тождество

$$\int_{Q_T} ((\nabla u, \nabla w) - u_t(w_t - bw)) dt dx = \int_{\Omega} u_2(x) w(x, 0) dx, \quad Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Определение 2. Поверхность Γ называется *звёздной* относительно начала координат, если при всех $x \in \Gamma$ выполнено неравенство $(\nu, x) \leq 0$, где ν — единичный вектор внешней по отношению к области Ω нормали к Γ .

Для ограниченной области в работах [1–4] изучалось убывание энергии решений волновых уравнений с линейной диссипацией. Для неограниченных областей со звёздными границами и коэффициентом b , убывающим на бесконечности и удовлетворяющим двусторонним логарифмическим оценкам, в статьях [5, 6] при $n \geq 3$ получены логарифмические оценки скорости убывания функции $E(t)$. В [7, 8] было рассмотрено волновое уравнение с граничным условием диссипативного типа. Обзор этих результатов см. в [9].

Далее предполагается, что начало координат не принадлежит замыканию области Ω , а функции u_1, u_2 имеют ограниченный носитель.

Теорема 1. Если $n \geq 2$, а граница Γ является звёздной относительно начала координат и $b(x) \leq C_1/r^2$, $r \equiv |x|$, для некоторой константы $C_1 > 0$, то для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\int_{\Omega} ((t+r)^2(u_t + u_r)^2 + (t-r)^2(u_t - u_r)^2 + |\nabla u|^2 - u_r^2 + tb(x)u^2) dx \leq C_2(t+1) \int_{\Omega} (u_1^2 + |\nabla u_1|^2 + u_2^2) dx,$$

где константа C_2 зависит от диаметров носителей u_1 и u_2 .

Для решения задачи (1), (2) получены оценки скорости убывания при $t \rightarrow +\infty$ локальной энергии

$$E_R(t) \equiv \int_{\Omega_R} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx, \quad \Omega_R = \Omega \cap \{r < R\}.$$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то для решения задачи (1), (2) справедлива оценка $E_R(t) \leq C_3/t$, где константа C_3 зависит от диаметров носителей u_1, u_2 .

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Dafermos, C.M. Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations / C.M. Dafermos // Nonlinear Evolution Equations ; ed. by M.G. Crandall. — New York : Academic Press, 1978. — P. 103–123. 2. Haraux, A. Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations / A. Haraux // J. Differ. Equat. — 1985. — V. 59, № 2. — P. 145–154. 3. Nakao, M. Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation / M. Nakao // Israel J. Math. — 1996. — V. 95, № 1. — P. 25–42. 4. Cortes, L. About decay of solution of the wave equation with dissipation / L. Cortes, Y. Santiago // Proyecciones. — 2007. — V. 26, № 1. — P. 37–71. 5. Mochizuki, K. Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation / K. Mochizuki, H. Nakazawa // Publications RIMS Kyoto Univ. — 1996. — V. 32, № 3. — P. 401–414. 6. Mochizuki, K. Energy decay of solutions to the wave equations with linear dissipation localized near infinity / K. Mochizuki, H. Nakazawa // Publications RIMS Kyoto Univ. — 2001. — V. 37, № 3. — P. 441–458. 7. Muravei, L.A. Wave equation and Helmholtz equation in domains with perturbed star-shaped boundary / L.A. Muravei, A.V. Filinovski // Russian J. Math. Phys. — 1997. — V. 5, № 4. — P. 503–520. 8. Муравей, Л.А. Оценки скорости убывания решения импедансной смешанной задачи для волнового уравнения в области с некомпактной границей / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 3. — С. 393–400. 9. Филиновский, А.В. Стабилизация и спектр в задачах распространения волн / А.В. Филиновский // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа ; под ред. И.В. Астаховой. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 289–463.

Н. А. Лобода, А. Х. Сташ (Майкоп) “Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем” (15 марта 2024 г.).

Для заданного натурального n обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы, принадлежащих $\mathcal{M}^n$, и положим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–3]. Для момента $t > 0$ и функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ — число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ — число точек её *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ — число её *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ — число её *корней* (т.е. нулей с учётом их кратности) на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, t)$ — число её *гиперкорней* на промежутке $(0, t]$: при его подсчёте каждый некрatный корень берётся ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз;

$\nu^\alpha(x, m, t) \equiv \nu^\alpha(y, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$, $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $y \equiv (x, m)$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}_*^n$.

Определение 3 [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами*

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) & \left(\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) & \left(\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

Определение 4 [4]. Для функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с обозначением $\hat{}$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого нижнего (с обозначением $\check{}$) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без символов $\hat{}$ и $\check{}$;

2) если значение некоторого слабого (с нижним индексом $\circ$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого сильного (с нижним индексом $\bullet$) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без символов $\circ$ и $\bullet$.

Определение 5 [5, 6]. Множество всех значений показателя $\kappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, причём значение $a \in \kappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовём *существенным*, если подмножество $\{x(0): x \in \mathcal{S}_*(A), \kappa(x) = a\} \subset \mathbb{R}^n$ имеет положительную меру и заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра* (т.е. счётного объединения нигде не плотных подмножеств). Через $\text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя κ для системы A и назовём его *существенным спектром* системы A .

В работе [7] доказано существование линейной однородной дифференциальной двумерной системы, спектры всех показателей колеблемости которой содержат любое наперёд заданное число или счётное множество существенных значений. В случае конечного спектра этот результат был усилен для показателей колеблемости гиперкорней в [8]: для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой все значения спектров показателей колеблемости гиперкорней являются существенными и совпадают с этим множеством. Если все эти числа соизмеримы, то систему можно выбрать периодической. Эти свойства переносятся и на остальные показатели колеблемости, как показывает

Теорема 1. *Для любого конечного множества неотрицательных чисел S , содержащего нуль, существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$ (периодичная, если все элементы множества S попарно соизмеримы), что справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \nu^-(x) &= \nu^{\sim}(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \\ \kappa(\mathcal{S}_*(A)) &= \text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A)) = S, \quad \kappa = \nu^-, \nu^{\sim}, \nu^0, \nu^+, \nu^*. \end{aligned}$$

В работе [9] для любого замкнутого ограниченного счётного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой построена двумерная линейная ограниченная система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причём все значения существенны.

Обозначим через $\mathcal{I}$ класс всех счётных ограниченных подмножеств $X \subset (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел), у каждого из которых нуль — единственная предельная точка. Возможность управления счётными из класса $\mathcal{I}$ спектрами показателей колеблемости дифференциальной системы гарантирует следующая

Теорема 2. Для любого множества $X \in \mathcal{I}$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, для которой справедливы равенства

$$\begin{aligned}\nu^-(x) &= \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \\ \kappa(\mathcal{S}_*(A)) &= \text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A)) = X \cup \{0\}, \quad \kappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*.\end{aligned}$$

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294. 2. Сергеев, И.Н. Определение полных частот решений линейной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 908. 3. Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138. 4. Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2016. — Вып. 31. — С. 177–219. 5. Сергеев, И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1661–1662. 6. Сергеев, И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1567–1568. 7. Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 157–171. 8. Лобода, Н.А. Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем / Н.А. Лобода, А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 862–863. 9. Шишлянников, Е.М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1586–1587.

А. Х. Сташ (Майкоп) “Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений высокого порядка” (15 марта 2024 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными матричными функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой), а через $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. В множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ естественным образом выделим также подмножество $\mathcal{E}^n$ систем с матрицами вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям n -го порядка ($n > 2$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

каждое из которых задаётся своей непрерывной ограниченной функцией $a \equiv (a_1, \dots, a_n)$ и, преобразуясь в систему A стандартным переходом от скалярной переменной y к векторной

$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, отождествляется с этой системой. Множество всех ненулевых решений $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n = \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

В докладе [1] приведены формулы, задающие показатели колеблемости. Важным свойством асимптотических характеристик функций из множества $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n$, позволяющим облегчить их исследование, является остаточность [2], т.е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени.

Определение [2]. Назовём функционал $\varkappa: \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *остаточным*, если для любой пары функций $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$, совпадающих на всей полуоси $t \in \mathbb{R}_+$, кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, выполнено равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

Свойство остаточности на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка для характеристических частот строгих знаков и нулей было установлено в статье [3]. Слабые показатели колеблемости гиперкорней любых решений, как оказалось [4], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Из результатов работ [5–7] следует, что на множестве решений автономных систем все показатели колеблемости обладают свойством остаточности. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения попросту не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) характеристики колеблемости (характеристические частоты и показатели колеблемости) равны между собой [7]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости.

Отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости на множестве $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n$ при любом $n > 1$ доказано в работах [8, 9]. Оказалось, что при любом $n > 2$ сильные показатели колеблемости на подмножестве $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \subset \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n$ также не обладают свойством остаточности, как показывает следующая

Теорема. При любом $n > 2$ ни один из функционалов

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \hat{\nu}_{\bullet}^0, \check{\nu}_{\bullet}^0, \hat{\nu}_{\bullet}^+, \check{\nu}_{\bullet}^+, \hat{\nu}_{\bullet}^*, \check{\nu}_{\bullet}^*: \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

не является остаточным.

Следствие. При любом $n > 2$ существует вектор-функция $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющая соотношениям

$$\nu_{\circ}^{\sim}(y) = \nu_{\circ}^0(y) = \nu_{\circ}^+(y) = \nu_{\circ}^*(y) < \nu_{\bullet}^{\sim}(y) = \nu_{\bullet}^0(y) = \nu_{\bullet}^+(y) = \nu_{\bullet}^*(y).$$

Литература. 1. Лобода, Н.А. Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / Н.А. Лобода, А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 848–850. 2. Сергеев, И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 111–166. 3. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294. 4. Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138. 5. Бурлаков, Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93. 6. Сташ, А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Механ. Компьютер. науки. — 2019. — Т. 29, вып. 4. — С. 558–568. 7. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв.

РАН. Сер. математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172. 8. Сташ, А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы / А.Х. Сташ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2019. — № 5. — С. 48–51. 9. Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2021. — Т. 31, вып. 1. — С. 59–69.

И. Н. Сергеев (Москва) “О реализуемости контрастных сочетаний мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (22 марта 2024 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

а также её конкретные частные случаи: автономную систему (с независимой от t правой частью) и линейную однородную систему, для которой

$$f(t, x) \equiv A(t)x, \quad G \equiv \mathbb{R}^n, \quad A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Определение (см. [1–4] и ср. с [5]). *Ляпуновскую, перроновскую и верхнепределную меры устойчивости* (или *неустойчивости*) системы (1) зададим соответственно при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ формулами

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta} \quad \left(\text{или } \mu_{\bar{\varkappa}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta} \right), \quad (3)$$

где $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| < \delta\}$, $x(\cdot, x_0)$ — непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$, mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)$ (или $M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)$) — множество всех значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих (или не удовлетворяющих — в частности, когда решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче $\mathbb{R}_+$) соответствующему условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon.$$

Иными словами, мера устойчивости системы (1) — это такое наибольшее число $\mu_\varkappa(f)$, что при любых $\mu < \mu_\varkappa(f)$, $\varepsilon > 0$ и некотором $\delta(\mu, \varepsilon) > 0$ для любого $\delta \in (0, \delta(\mu, \varepsilon))$ верна оценка $\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta) \geq \mu \text{mes } B_\delta$, а мера неустойчивости — это такое наибольшее число $\mu_{\bar{\varkappa}}(f)$, что при любом $\mu < \mu_{\bar{\varkappa}}(f)$ и некоторых $\varepsilon > 0$ (отметим, что в [2] в этом месте у ε стоит не тот квантор), $\delta(\mu, \varepsilon) > 0$ для любого $\delta \in (0, \delta(\mu, \varepsilon))$ верна оценка $\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta) \geq \mu \text{mes } B_\delta$.

Введённые меры (3) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \mu_\lambda(f) \leq \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f) \leq 1, \quad 0 \leq \mu_{\bar{\pi}}(f) \leq \mu_{\bar{\sigma}}(f) \leq \mu_{\bar{\lambda}}(f) \leq 1,$$

а ситуация, в которой выполнены все равенства

$$\mu(f) \equiv \mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \bar{\mu}(f) \equiv \mu_{\bar{\lambda}}(f) = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = \mu_{\bar{\pi}}(f), \quad \mu(f) + \bar{\mu}(f) = 1, \quad (4)$$

реализуется при произвольном $n \in \mathbb{N}$, к примеру, уже на простейших линейных автономных системах (1): $\dot{x} = x$ или $\dot{x} = -x$, для которых $\mu(f) = 0$ или $\mu(f) = 1$ соответственно. Нас будут интересовать, наоборот, две следующие, наиболее контрастные (для мер) ситуации:

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \mu_\pi(f), \quad \mu_{\bar{\lambda}}(f) = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = 1 > 0 = \mu_{\bar{\pi}}(f), \quad (5)$$

$$\mu_\lambda(f) = 0 < 1 = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \mu_{\bar{\lambda}}(f) = 1 > 0 = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = \mu_{\bar{\pi}}(f). \quad (6)$$

В линейном и в одномерном случаях из указанных двух контрастных ситуаций реализуема только первая, что и подтверждают

Теорема 1 [3]. При каждом $n \in \mathbb{N}$ для линейной системы (1) имеются ровно две возможности:

- 1) либо $\mu_\lambda(f) = 1$, при этом реализуема только ситуация (4);
- 2) либо $\mu_\lambda(f) = 0$, при этом заведомо реализуемы (причём даже на ограниченных функциях A вида (2)) как ситуация (4), так и ситуация (5), но не реализуема ситуация (6).

Теорема 2 [3]. При $n = 1$ для системы (1) из двух контрастных ситуаций (5) и (6) реализуема только ситуация (5).

В автономном же одномерном случае ни одна из указанных двух контрастных ситуаций уже не реализуема вовсе, о чём и говорит

Теорема 3 [3, 4]. При $n = 1$ для любой автономной системы (1) имеет место ситуация (4), в которой реализуемы каждое из трёх значений $\mu(f) = 0, 1/2, 1$ и только они.

Известны примеры двумерных автономных нелинейных систем (1), в которых имеют место:

- а) контрастная ситуация (5) (см. теорему 11 в [3]);
- б) ситуация, отличающаяся от контрастной ситуации (6) только значениями мер ляпуновской устойчивости и неустойчивости: $\mu_\lambda(f) = \mu_{\bar{\lambda}}(f) = 1/2$ (см. [6, п. 6.3] или [7, § 18]).

На неодномерные автономные системы произвольной размерности оба этих примера распространяет, к тому же полностью реализуя контрастную ситуацию (6), следующая

Теорема 4 [4]. При каждом целом $n > 1$ существуют такие две автономные системы (1), что для одной из них имеет место ситуация (5), а для другой — ситуация (6).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 851–852. 2. Сергеев, И.Н. Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1577–1579. 3. Сергеев, И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 895–904. 4. Сергеев, И.Н. Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2024. — № 1. — С. 50–54. 5. Денисов, Н.В. Определение и свойства примитивной меры устойчивости нулевого решения дифференциальной системы / Н.В. Денисов, В.Д. Васильев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1579–1580. 6. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с. 7. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.

И. Н. Сергеев (Москва) “О возможной зависимости мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы от начального момента” (22 марта 2024 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

с правой частью f и временным лучом $\mathbb{R}_+$: замкнутым $[0, +\infty)$ или открытым $(0, +\infty)$.

В докладе [1] для системы (1) с замкнутым временным лучом определены *ляпуновские*, *перроновские* и *верхнепредельные меры устойчивости* $\mu_x(f)$ и *неустойчивости* $\mu_{\bar{x}}(f)$ при

$\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно. Ниже эти меры для каждой системы (1) рассматриваются ещё и как функции от начального момента t_0 .

Определение [2]. При $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовём *ляпуновской*, *перроновской* и, соответственно, *верхнепредельной мерой устойчивости* $\mu_\varkappa(f, t_0)$ (*неустойчивости* $\mu_\varkappa(f, t_0)$) системы (1) с начальным моментом $t_0 \in \mathbb{R}_+$ одноимённую меру устойчивости $\mu_\varkappa(f_{t_0})$ (*неустойчивости* $\mu_\varkappa(f_{t_0})$) системы, правая часть f_{t_0} которой является сдвигом на t_0 правой части системы (1):

$$f_{t_0}(t, x) \equiv f(t + t_0, x), \quad t \geq 0, \quad x \in G.$$

С одной стороны, в некоторых случаях меры устойчивости и неустойчивости не зависят от выбора начального момента, как показывают следующие утверждения.

Теорема 1. Если система (1) одномерна или автономна, то все её меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.

Теорема 2. Если система (1) линейна, то её ляпуновские и верхнепредельные меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.

Теорема 3. Если какая-либо из мер устойчивости или неустойчивости системы (1) хотя бы с одним начальным моментом принимает какое-либо из крайних значений 0 или 1, то она не зависит от начального момента.

С другой стороны, для некоторых систем меры устойчивости и неустойчивости существенно зависят от начального момента и, более того, принимают все свои потенциально возможные значения, о чём и говорят

Теорема 4. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с открытым временным лучом, у которой меры устойчивости трёх типов совпадают, а с ростом начального момента возрастают, пробегая весь интервал $(0, 1)$ и составляя 1 в сумме с мерой неустойчивости.

Теорема 5. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с открытым временным лучом, у которой меры устойчивости трёх типов совпадают, а с ростом начального момента убывают, пробегая весь интервал $(0, 1)$ и составляя 1 в сумме с мерой неустойчивости.

Замечание. Усилить непосредственно утверждения теорем 4 и 5, замкнув в них временной луч и/или добавив к интервалу $(0, 1)$ значений мер устойчивости или неустойчивости соответствующее их крайнее значение, не представляется возможным (в силу теоремы 3).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. О реализуемости контрастных сочетаний мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 852–853. 2. Сергеев, И.Н. Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2024. — Т. 34, вып. 1. — С. 80–90.

В. В. Быков (Москва) “Условные показатели линейной системы” (29 марта 2024 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными оператор-функциями A (которые отождествляем с задаваемыми ими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ функциями. Множества $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ наделим *компактно-открытой* топологией.

Приводимая ниже конструкция обобщает построение в [1] и позволяет рассматривать некоторые известные характеристики асимптотического поведения решений линейных систем с единой точки зрения.

Скажем, что системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ слабо ляпуновски эквивалентны, если для некоторых их фундаментальных матриц X, Y матричная функция $L(t) \equiv X(t)Y^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условию [2, гл. IV, § 2.1]

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (|L(t)| + |L^{-1}(t)|) < \infty.$$

Введённое отношение является отношением эквивалентности. В отличие от классической ляпуновской эквивалентности [3, § 18.2], здесь не требуется ограниченности на полуоси производной функции $L(\cdot)$, однако на множестве $\mathcal{M}^n$ эти отношения совпадают. Функционал, принимающий одинаковые значения на любых слабо ляпуновски эквивалентных системах, будем называть *слабо ляпуновским инвариантом*.

Определение 1. Сужением системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ (здесь и всюду ниже — ненулевое) будем называть всякую систему $\widehat{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\dim L}$, обладающую свойством: существует такой линейный изоморфизм $V: L \rightarrow \mathbb{R}^{\dim L}$, что для любых $\xi \in L$ и $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$|X_A(t, 0)\xi| = |X_{\widehat{A}}(t, 0)V\xi|,$$

где $X_B(\cdot, \cdot)$ — оператор Коши системы B .

Подчеркнём, что мы не требуем здесь инвариантности подпространства L относительно всех операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Следующее утверждение, вытекающее из теоремы Перрона о триангулируемости [3, гл. VII, § 20.1], показывает, что сужение системы на заданное подпространство всегда существует и определено с точностью до ортогонального преобразования.

Теорема 1. Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ существует её сужение $\widehat{A}$ на L , причём если $A \in \mathcal{M}^n$, то можно выбрать $\widehat{A} \in \mathcal{M}^{\dim L}$, а, кроме того, система $\widehat{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\dim L}$ является сужением системы A на L тогда и только тогда, когда существует такая ортогональная при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оператор-функция $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{\dim L}$, что

$$X_{\widehat{A}}(t, 0) = U(t)X_A(t, 0)U^{-1}(0), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определение 2. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ и функционал $\varphi: \widetilde{\mathcal{M}}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ (или $\varphi: \mathcal{M}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) является слабым ляпуновским инвариантом. Тогда будем называть k -м *условным φ -показателем* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ (или $A \in \mathcal{M}^n$) величину $\varphi_{(n,k)}(A) \equiv \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \varphi(A|_L)$, где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k -мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, а $\varphi(A|_L)$ — значение функционала φ на каком-либо сужении системы A на подпространство L . Если функционал φ определён только на множестве $\mathcal{M}^k$, то потребуем дополнительно, чтобы указанное сужение имело ограниченные коэффициенты. Набор $(\varphi_{(n,1)}(A), \dots, \varphi_{(n,n)}(A))$ условимся называть *спектром функционала φ системы A* .

Обозначим через $\Lambda(A)$ старший показатель Ляпунова системы (1), а через $\Omega^0(A)$ — её верхний генеральный показатель [2, гл. III, § 4.2]. Тогда k -й условный Λ -показатель системы (1) есть её k -й (в порядке нестрогого возрастания) показатель Ляпунова, а k -й условный Ω^0 -показатель есть k -й условный показатель Боля [4].

Определение 3 [5]. Будем называть функцию $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, заданную на метрическом пространстве M , *верхнепредельной*, если существует такая последовательность непрерывных функций $f_k: M \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, что

$$f(\mu) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Теорема 2. Для любых числа $k \in \{1, \dots, n\}$ и верхнепредельного слабо ляпуновского инварианта $\varphi: \widetilde{\mathcal{M}}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (или $\varphi: \mathcal{M}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) k -й условный φ -показатель $\varphi_{(n,k)}: \widetilde{\mathcal{M}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (или $\varphi_{(n,k)}: \mathcal{M}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) также является верхнепредельным слабо ляпуновским инвариантом.

Отметим, что из теоремы 2 вытекают результаты [4; 6, теорема 1].

Определение 4. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ назовём k -м *условным коэффициентом неправильности* Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^n$ величину

$$\sigma_{\text{Л}}^k(A) \equiv \inf_{(x_1, \dots, x_k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda[x_i] - \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \Gamma_{1\dots k}(t) \right),$$

где $\Gamma_{1\dots k}(t)$ — грамов объём векторов $x_1(t), \dots, x_k(t)$, а $\lambda[f] \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln |f(t)|$ — характеристический показатель функции f , причём точная нижняя грань берётся по всевозможным линейно независимым наборам $x_1, \dots, x_k$ решений системы A .

Следствие. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ функционал $\sigma_{\text{Л}}^k: \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является верхнепредельным.

Литература. 1. Миллионщиков, В.М. Классификация по Бэру относительных мажорант показателей Ляпунова / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 1088–1089. 2. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с. 3. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с. 4. Миллионщиков, В.М. Показатель Боля линейной системы, коэффициенты которой могут быть неограниченными / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 8. — С. 1461–1462. 5. Быков, В.В. Некоторые свойства мажорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами / В.В. Быков // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1291–1301. 6. Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. — 1988. — Т. 137, № 3. — С. 364–380.

В. А. Похачевский (Москва) “О бэровской классификации слабых показателей колеблемости корней линейной системы” (29 марта 2024 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (которые мы отождествляем с задаваемыми ими системами) и метрикой

$$\rho(A, B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t+1)^{-1}\}, \quad A, B \in \mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Определение 1 [1, 2]. Верхним и нижним слабыми показателями колеблемости корней ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{\nu}_\circ^+(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_+^*} \frac{\pi}{t} \nu^+((x, m), t), \quad \check{\nu}_\circ^+(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_+^*} \frac{\pi}{t} \nu^+((x, m), t),$$

где $\nu^+(y, t)$ — количество корней (т.е. нулей с учётом кратности) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(0, t]$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, а нижним индексом $*$ помечаем выкалывание нуля.

Введённые показатели являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которую мы наделяем стандартными порядком и топологией.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — некоторые классы подмножеств метрического пространства M . Будем говорить [3, с. 223–224], что функция $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathcal{M}, *)$ (или классу

$(*, \mathcal{N})$), если для всякого $r \in \mathbb{R}$ верно условие $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathcal{M}$ (или, соответственно, условие $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathcal{N}$). Далее, F_σ — класс, состоящий из всевозможных счётных объединений замкнутых множеств, а $F_{\sigma\delta}$ — класс, состоящий из всевозможных счётных пересечений множеств из класса F_σ . Кроме того, через $X_A(\cdot, \cdot)$ обозначаем оператор Коши системы A .

Теорема. Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:

- 1) функция $C^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $(A, \xi) \mapsto \check{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(F_\sigma, *)$ и второму классу Бэра;
- 2) функция $C^\infty \mathcal{M}^n \times \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $(A, \xi) \mapsto \hat{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(*, F_{\sigma\delta})$ и третьему классу Бэра.

Следствие. Для любой системы $A \in C^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n$ спектры слабых показателей колеблемости корней системы A , т.е. множества $\{\check{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}_*^n\}$ и $\{\hat{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}_*^n\}$, являются суслинскими подмножествами расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172. 2. Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. — 2015. — Вып. 2 (46). — С. 171–183. 3. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф; пер. с нем. Н.Б. Веденисова, под ред. и с доп. П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова. — М.–Л. : ОНТИ, 1937. — 304 с.

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра” (5 апреля 2024 г.).

Напомним определение топологической энтропии для неавтономных динамических систем [1]. Пусть X — компактное метрическое пространство, $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X . Наряду с исходной метрикой d , определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad (f^{\circ i} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1, f^{\circ 0} \equiv \text{id}_X), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N(f, \varepsilon, n)$ максимальное число точек в X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше ε . Тогда топологической энтропией неавтономной динамической системы (X, f) назовём величину

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N(f, \varepsilon, n). \quad (1)$$

Отметим, что топологическая энтропия не зависит от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому определение (1) корректно.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad (2)$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)). \quad (3)$$

Для произвольных $\mathcal{M}$, X и любой последовательности отображений (2) функция (3) принадлежит третьему бэровскому классу [2].

Теорема 1. Если $X = [0, 1]$ и пространство $\mathcal{M}$ содержит множество $\mathcal{E}$ типа $F_{\sigma\delta}$, не являющееся множеством типа $G_{\delta\sigma}$, то найдётся такая последовательность отображений (2), что функция (3) совпадает с характеристической функцией множества $\mathcal{E}$, а следовательно, не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.

Доказательство теоремы 1 конструктивно, но для нахождения последовательности (2) используется структура множества $\mathcal{E}$, поэтому построение последовательности отображений (2) достаточно громоздко. Дополним эту теорему конструктивными примерами метрических пространств $\mathcal{M}$ и семейств неавтономных динамических систем, для которых справедливо утверждение теоремы 1.

Для множества $\mathcal{M} \subset [0, 1]$ по непрерывной функции $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ построим последовательность функций $\alpha_i(\mu) = \alpha^{[\log_2(\log_2(i+4))]}(\mu)$ ($[\cdot]$ — целая часть), $i \in \mathbb{N}$, и последовательность отображений из $\mathcal{M} \times [0, 1]$ в $[0, 1]$:

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i(\mu, x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 - \alpha_i(\mu); \\ 1 - \frac{(2x - 2 + \alpha_i(\mu))^2}{\alpha_i(\mu)}, & 1 - \alpha_i(\mu) < x \leq 1 \quad (\alpha_i(\mu) \neq 0) \end{cases} \quad (4)$$

(в силу этого определения все функции f_i непрерывны).

В статье [3] установлена

Теорема 2. Если $\mathcal{M}$ — множество иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и $\alpha(\mu) = \{1/\mu\}$ ($\{\cdot\}$ — дробная часть числа), то для последовательности (4) функция (3) не принадлежит второму бэровскому классу на $\mathcal{M}$.

Из результатов [4, с. 114] выводятся следующие утверждения.

Теорема 3. Если $\mathcal{M} = [0, 1]$ и

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0; \\ \frac{\mu}{2} \left(1 - \sin \frac{1}{\mu} \right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

то для последовательности (4) функция (3) принадлежит второму и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Теорема 4. Если $\mathcal{M} = [0, 1]$ и

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0; \\ \mu \left(1 - \sin \frac{1}{\mu} \right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

то для последовательности (4) функция (3) не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Литература. 1. Kolyada, S. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems / S. Kolyada, L. Snoha // Random & Computational Dynamics. — 1996. — V. 4, № 2. — P. 205–233. 2. Ветохин, А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем / А.Н. Ветохин // Мат. заметки. — 2019. — Т. 106, № 3. — С. 333–340. 3. Ветохин, А.Н. О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра / А.Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 1. — С. 133–136. 4. Шарковский, А.Н. Аттракторы траекторий и их бассейны / А.Н. Шарковский. — Киев : Наукова думка, 2013. — 319 с.

И. В. Астапова, Ю. Н. Морозов, А. В. Филиновский, Г. А. Чечкин, Т. И. Шабатина (Москва) “О математическом моделировании криохимического синтеза лекарственных наночастиц” (12 апреля 2024 г.).

Исследуется математическая модель криохимического синтеза наночастиц фармацевтических субстанций. Их терапевтическая эффективность во многом зависит от размера и морфологии частиц. Уменьшение размера частиц фармацевтических веществ до наноразмеров позволяет получать высокоэффективные лекарственные средства, что даёт возможность использовать меньшие дозы лекарств, снижая таким образом вызываемые побочные эффекты и токсичность. Криохимический синтез — один из самых мощных методов получения наночастиц лекарственных средств. Этот совершенно новый метод основан на сублимации или испарении исходной фармацевтической субстанции в условиях высокого вакуума и введении образующихся паров в поток газа-носителя с последующей низкотемпературной конденсацией потока молекул субстанции из газовой фазы на охлаждаемую поверхность.

Первым шагом математического моделирования процессов криохимического синтеза является расчёт температурного поля в потоке газа-носителя, взаимодействующего с охлаждаемой поверхностью, с использованием стационарного уравнения теплопроводности с массопереносом в одномерном случае.

Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = v \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho C_V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где T — абсолютная температура, ρ , μ , λ — плотность, молекулярная масса и теплопроводность газа-носителя соответственно, C_V — молярная теплоёмкость газа-носителя при постоянном объёме, а v — линейная скорость фронта потока газа-носителя.

В стационарном режиме имеем $\partial T / \partial t = 0$ и уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{dx} - \frac{\mu}{\rho v C_V} \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (2)$$

Найдены в аналитической форме решения уравнения, изучены существование и единственность решений с граничными условиями Дирихле, Неймана и Робена. Заметим, что для рассматриваемой физико-химической задачи интерес представляют строго убывающие решения.

Регулируемый поток газа-носителя, проходя через нагретый медный экран цилиндрической формы, нагревается до определённой температуры, улавливает пары исходного вещества и выносит их в вакуумируемое пространство. Если площадь сопла (формирователя смешанного молекулярного потока) равна S , то молярный расход газа-носителя равен $\dot{N} = \rho v S / \mu$, а его отношение к площади сопла (плотность потока газа-носителя) равно $\dot{n} = \dot{N} / S = \rho v / \mu$. Теперь уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{C_V \dot{n}} \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3)$$

и решить, учитывая зависимость теплопроводности λ газа-носителя от температуры. Эта зависимость для многих газов (таких как азот, гелий, аргон и т.д.) выражается приближённой формулой

$$\lambda = \frac{ik}{3\pi^{3/2}d^2} \sqrt{RT/\mu} \equiv \alpha \sqrt{T}, \quad (4)$$

где i — сумма поступательных и вращательных степеней свободы молекул, k — постоянная Больцмана, d — эффективный диаметр молекул, R — универсальная газовая постоянная. Представив (4) в виде $\lambda = \alpha\sqrt{T}$ с соответствующим коэффициентом α , получим

$$\frac{\lambda}{C_V \dot{n}} = \frac{\alpha\sqrt{T}}{C_V \dot{n}} = b\sqrt{T}, \quad \text{где } b \equiv \frac{\alpha}{C_V \dot{n}}.$$

Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(T - b\sqrt{T} \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (5)$$

Теорема 1. Каждое положительное решение T уравнения (5) либо постоянно, либо строго монотонно, причём любое его строго убывающее решение имеет вид

$$T(x) = c^2 \Theta \left(\frac{x - x^*}{bc} \right)^2, \quad (6)$$

где $x^*, c > 0$ — произвольные константы, $\Theta: (-\infty, 0) \rightarrow (0, 1)$ — убывающая функция, неявно задаваемая формулой

$$x = 2\Theta(x) + \ln \frac{1 - \Theta(x)}{1 + \Theta(x)},$$

а выражение в скобках в уравнении (5) (не зависящее от x) для решения (6) равно c^2 . Если же T — непродолжаемое решение уравнения (5), то оно определено на полуоси $(-\infty, x^*)$ и удовлетворяет условиям

$$T(x) \rightarrow c^2, \quad T'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad T(x) \rightarrow 0, \quad T'(x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow x^*.$$

Теорема 2. Для любых констант $x_0 < x_1$, $T_0 > T_1 > 0$, $U_1 < 0$ и каждой из следующих пар условий:

- 1) $T(x_0) = T_0$, $T(x_1) = T_1$ (задача Дирихле);
- 2) $T(x_0) = T_0$, $T'(x_1) = U_1$ (задача Неймана);
- 3) $T(x_0) = T_0$, $T'(x_1) = U_1 T(x_1)$ (задача Робена)

существует единственное решение T уравнения (5), определённое на отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее именно этой паре условий.

Теорема 3. Если $b > 0$, $T_0 > T_1 > 0$ и $U_1 < 0$, то неравенство

$$b|U_1|\sqrt{T_1} > T_0 - T_1$$

эквивалентно существованию на некотором отрезке $[x_0, x_1]$ строго убывающего решения T уравнения (5), удовлетворяющего условиям

$$T(x_0) = T_0, \quad T(x_1) = T_1, \quad T'(x_1) = U_1.$$

Замечание. Физико-химическое описание задачи приводится в статьях [1, 2]. Доказательства части приведённых результатов изложены в [1]. Другие результаты авторов, связанные с математическим моделированием физических и биологических процессов, можно найти в [3–6], в частности, процессов, в основе модели которых лежит параболическое уравнение, — в [3, 4].

Работа выполнена в рамках программы развития МГУ имени М.В. Ломоносова (проект 23-НШ05-26).

Литература. 1. Mathematical modeling of cryochemical formation of medicinal substances in nanoforms. The role of temperature and dimensional parameters / I.V. Astashova, G.A. Chechkin, A.V. Filinovsky [et al.] // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2023. — V. 20. — P. 213–221. 2. Cryochemical production of drug nanoforms: particle size and crystal phase control of the antibacterial medication 2,3-quinoxalinedimethanol-1,4-dioxide (dioxidine) / T.I. Shabatina, Y.N. Morosov, A.V. Soloviev [et al.] // Nanomaterials. — 2021. — V. 11, № 6. — P. 1–17. 3. Astashova, I.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovsky // J. Math. Sci. — 2020. — V. 244, № 2. — P. 148–157. 4. On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems / G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva, A. Meidell, L.E. Persson // Russ. J. Math. Phys. — 2009. — V. 16, № 1. — P. 1–16. 5. Astashova, I.V. On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model / I.V. Astashova, K.N. Belikova // Funct. Differ. Equat. — 2022. — № 3–4. — P. 7–15. 6. Astashova, I. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PhaPl / I. Astashova, V. Chebotaeva, A. Cherepanov // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2018. — V. 15, № 12. — P. 112–118.

Е. В. Коробко (Москва) “Дискретный аналог уравнения типа Эмдена–Фаулера и его решения, эквивалентные степенным функциям” (19 апреля 2024 г.).

Рассмотрим дискретное уравнение

$$\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}(k_0) \equiv \{k_0, k_0 + 1, \dots\}, \quad \alpha, m \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad m \neq 0, 1, \quad (1)$$

где $\Delta u(k) \equiv u(k+1) - u(k)$ и $\Delta^2 u(k) \equiv \Delta(\Delta u(k)) = u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)$ — первая и вторая разности искомой функции $u: \mathbb{N}(k_0)(0, +\infty)$. Уравнение (1) является дискретным аналогом нелинейного уравнения второго порядка типа Эмдена–Фаулера [1, гл. 7]

$$y''(x) \pm x^\alpha y^m(x) = 0.$$

Определение. Функцию $u_{app}: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow (0, +\infty)$ назовём *приближённым решением* уравнения (1) *порядка* $g: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\Delta^2 u_{app}(k) \pm k^\alpha u_{app}^m(k))g(k) = 0,$$

а если g — степенная функция, то скажем, что это приближённое решение *степенного вида*.

В работе [2] сформулирован и доказан результат, для формулировки которого рассмотрим систему

$$\Delta Y(k) = F(k, Y(k)), \quad F(k, \cdot) \in C(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}(k_0), \quad (2)$$

где $Y \equiv (Y_0, \dots, Y_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ и $F(k, Y) \equiv (F_1(k, Y), \dots, F_n(k, Y))^T: \mathbb{N}(k_0) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Решение системы (2) с начальным условием

$$Y(k_0) = Y^0 \equiv (Y_0^0, \dots, Y_{n-1}^0)^T \in \mathbb{R}^n$$

единственно. При всех $i = \overline{1, n}$ для заданных функций $b_i, c_i: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $b_i(k) < c_i(k)$, $k \in \mathbb{N}(k_0)$, и заданного вектора $Y \in \mathbb{R}^n$ определим функции

$$B_i(k, Y) \equiv -Y_{i-1} + b_i(k), \quad C_i(k, Y) \equiv Y_{i-1} - c_i(k), \quad k \in \mathbb{N}(k_0),$$

И МНОЖЕСТВА

$$\Omega_B^i \equiv \{(k, Y) : k \in \mathbb{N}(k_0), B_i(k, Y) = 0, B_j(k, Y) \leq 0, C_l(k, Y) \leq 0, j, l = \overline{1, n}, j \neq i\},$$

$$\Omega_C^i \equiv \{(k, Y) : k \in \mathbb{N}(k_0), C_i(k, Y) = 0, B_j(k, Y) \leq 0, C_l(k, Y) \leq 0, j, l = \overline{1, n}, l \neq i\}.$$

Теорема 1 [2]. Если для системы (2) при $i = \overline{1, n}$, выполнены неравенства

$$F_i(k, Y) < \Delta b_i(k), \quad (k, Y) \in \Omega_B^i; \quad F_i(k, Y) > \Delta c_i(k), \quad (k, Y) \in \Omega_C^i,$$

то она имеет решение Y , удовлетворяющее условиям

$$b_i(k) < Y_{i-1}(k) < c_i(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{N}(k_0).$$

Теорема 2. Для уравнения (1) функция

$$u_{app}(k) = \frac{a}{k^s} + \frac{b}{k^{s+1}}, \quad k \in \mathbb{N}(k_0),$$

где

$$s = \frac{\alpha + 2}{m - 1}, \quad a = (\mp s(s+1))^{1/(m-1)}, \quad b = \frac{as(s+1)}{s+2-ms},$$

является приближённым решением (степенного вида) порядка $g(k) = k^{s+3}$.

Теорема 3. Если существуют такие числа $\gamma \in (0, 1)$, $s \neq -1, -2$ и $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что при $P \equiv (\gamma + s + 1)/(s + 1)$ и $Q \equiv (\gamma + s + 2)/(ms)$ выполняется хотя бы одно из следующих четырёх условий:

- 1) $ms > 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$;
- 2) $ms < 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 3) $ms < 0$, $s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 4) $ms > 0$, $s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее для всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ оценкам

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_1}{k^\gamma} &< \left(u(k) - \frac{a}{k^s} - \frac{b}{k^{s+1}}\right) \left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)^{-1} < \frac{\varepsilon_2}{k^\gamma}, \\ -\frac{\varepsilon_3}{k^\gamma} &< \left(\Delta u(k) - \Delta\left(\frac{a}{k^s}\right) - \Delta\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)\right) \left(\Delta\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)\right)^{-1} < \frac{\varepsilon_4}{k^\gamma}, \\ -\frac{\varepsilon_1}{k^\gamma} + O\left(\frac{1}{k}\right) &< \left(\Delta^2 u(k) - \Delta^2\left(\frac{a}{k^s}\right) - \Delta^2\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)\right) \left(\Delta^2\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right) \frac{ms}{s+2}\right)^{-1} < \frac{\varepsilon_2}{k^\gamma} + O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Теорема 4. Если существуют такие числа $s > -1$ и $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что при $R \equiv ms/(s+2)$ выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) $ms > 0$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_4$, $\varepsilon_3 > \varepsilon_1 R$, $\varepsilon_4 > \varepsilon_2 R$;
- 2) $ms < 0$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_4$, $\varepsilon_3 > -\varepsilon_2 R$, $\varepsilon_4 > -\varepsilon_1 R$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее для всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ всем оценкам теоремы 3 при $\gamma = 0$.

Теорема 5. Если имеет место хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $m > 1$, $-2 < \alpha < 0$;
- 2) $m < 0$, $-2 < \alpha < \min\{0, -(m+1)\}$;
- 3) $0 < m < 1$, $\alpha < -2$;
- 4) $\alpha > -(m+1)$, $\alpha < -2$, $\alpha > -4m/(m+1)$;
- 5) $-1 < m < 0$, $\alpha < -2$, $\alpha < -4m/(m+1)$;

6) $m < -1$, $\alpha < -2$, $\alpha > -4m/(m+1)$;

7) $m > 0$, $\alpha > -2$, $\alpha < -4m/(m+1)$, $\alpha < -(m+1)$,

то хотя бы одно из условий 1) и 2) теоремы 4 выполнено.

Доказательства некоторых из приведённых результатов изложены в работах [3–5].

Литература. 1. Белман, Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Белман. — М. : ИЛ, 1954. — 216 с. 2. Diblik, J. Discrete retract principle for systems of discrete equations / J. Diblik // Comput. Math. Appl. — 2001. — № 42. — P. 515–528. 3. Astashova, I. Existence of a solution of discrete Emden–Fowler equation caused by continuous equation / I. Astashova, J. Diblik, E. Korobko // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. — 2021. — V. 14, № 12. — P. 4159–4178. 4. Diblik, J. Asymptotic behavior of solutions of a second-order nonlinear discrete equation of Emden–Fowler type / J. Diblik, E. Korobko // Adv. Nonlin. Anal. — 2023. — V. 12, № 1. — P. 1–23. 5. Korobko, E. Asymptotic characterization of solutions of Emden–Fowler type difference equation / E. Korobko // Proc. II of the Conf. Student EEICT. — Brno, 2021. — P. 250–254.

А. В. Тюленев (Москва) “Вычислимость решений начальной задачи для уравнений с запаздыванием” (26 апреля 2024 г.).

Определение 1. Следующие объекты называются *вычислимыми* (см., например, [1, § 12, п. 3; 2, гл. 0, пп. 1–5]):

1) функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, если существует алгоритм (например, машина Тьюринга), который останавливается на тех и только тех $n \in \mathbb{N}$, для которых f определена, и выдаёт $f(n)$;

2) последовательность (r_n) рациональных чисел, если существуют такие всюду определённые вычислимые функции $a, b, s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$r_n = (-1)^{s(n)} \frac{a(n)}{b(n)+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(определение распространяется и на кратные последовательности);

3) последовательность (x_k) действительных чисел, если существует такая вычислимая последовательность (r_{kn}) рациональных чисел, что

$$|x_k - r_{kn}| \leq 2^{-n}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

(число $x \in \mathbb{R}$ *вычислимо*, если вычислима стационарная последовательность (x));

4) промежуток $I \subset \mathbb{R}$, если как верхняя, так и нижняя его границы являются вычислимыми (определение распространяется и на параллелепипеды в $\mathbb{R}^q$);

5) функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, где I — вычислимый промежуток, если:

i) для любой вычислимой последовательности $(x_k) \subset I$ последовательность $(f(x_k))$ вычислима;

ii) существует такая вычислимая функция $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$|x - y| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}, \quad x, y \in I, \quad n \in \mathbb{N}$$

(определение распространяется и на функции $f: I^p \rightarrow \mathbb{R}^q$).

Для заданных вычислимых положительных чисел σ, r , а рассмотрим банахово пространство $\mathfrak{C} \equiv C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ с нормой $\|x\| \equiv \max_{\tau \in [-r, 0]} |x(\tau)|$, а каждой функции $x \in C([\sigma - r, \sigma + a], \mathbb{R}^n)$ и каждому $t \in [\sigma, \sigma + a]$ поставим в соответствие функцию $x_t \in \mathfrak{C}$, $x_t(\tau) \equiv x(t + \tau)$, $\tau \in [-r, 0]$.

Определение 2. Для заданной выпуклой ограниченной области $D \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ назовём функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ *вычислимой*, если:

1) для любой вычислимой последовательности $((t_k, \varphi_k))$ последовательность $(f(t_k, \varphi_k))$ вычислима;

2) существует такая вычислимая функция $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$|t-s| + \|\varphi-\psi\| \leq \gamma^{-1}(k) \Rightarrow |f(t, \varphi) - f(s, \psi)| \leq 2^{-k}, \quad (t, \varphi), (s, \psi) \in D, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Определение 3. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

назовём *уравнением с запаздыванием*. Функцию $x \in C([\sigma-r, \sigma+a], \mathbb{R}^n)$ назовём *решением* уравнения (1) на отрезке $[\sigma-r, \sigma+a]$, если для всех $t \in [\sigma-r, \sigma+a]$ верны условие $(t, x_t) \in D$ и равенство (1) (в граничных точках производная односторонняя), а если при этом $x_\sigma = \varphi \in \mathfrak{C}$, то $x(\sigma, \varphi)$ — решение, *начинающееся в точке* (σ, φ) .

В [3, гл. 2] доказываются (неконструктивно) локальное существование и единственность такого решения, а также существование непродолжаемого решения. Имеет место конструктивный аналог этого факта.

Теорема 1. Если $D \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ — выпуклая ограниченная область, а функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ вычислима и липшицева по x , то для любой вычислимой пары $(\sigma, \varphi) \in D$, удовлетворяющей условию $(\sigma-r, \varphi) \in D$, найдётся такое вычислимое $a > 0$, что на отрезке $[\sigma-r, \sigma+a]$ существует единственное вычислимое решение (1), начинающееся в точке (σ, φ) .

Определение 4. Интервал $I \subset \mathbb{R}$ называется *перечислимо открытым*, если он представим в виде объединения вычислимых интервалов I_n , $n \in \mathbb{N}$ (см. [4, п. 2]). Полуинтервал $[a, b)$ назовём *перечислимо открытым справа*, если интервал (a, b) перечислимо открыт.

В [4] доказано, что непродолжаемое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является вычислимым, а промежуток, на котором оно определено, — перечислимо открытым. Оказывается, аналогичные утверждения справедливы и для уравнений с запаздыванием.

Теорема 2. Если $D \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ — выпуклая перечислимо открытая (возможно, неограниченная) область, а функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ вычислима и локально липшицева по x , то для любой вычислимой пары $(\sigma_0, \varphi_0) \in D$, удовлетворяющей условию $(\sigma_0-r, \varphi_0) \in D$, существует единственное непродолжаемое вычислимое решение уравнения (1), начинающееся в точке (σ_0, φ_0) , причём промежуток, на котором определено это непродолжаемое решение, является перечислимо открытым справа.

Литература. 1. Успенский, В.А. Лекции о вычислимых функциях / В.А. Успенский. — М. : Физматгиз, 1960. — 492 с. 2. Pour-El, M.B. Computability in Analysis and Physics / M.B. Pour-El, J.I. Richards. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1989. — 206 p. 3. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл ; пер. с англ. С.Н. Шиманова. — М. : Мир, 1984. — 421 с. 4. Graça, D. Computability, noncomputability and undecidability of maximum intervals of IVPs / D. Graça, N. Zhong, J. Buescu // Transactions of the American Mathematical Society. — 2009. — V. 361, № 6. — P. 2913–2927.