

УДК 519.642.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Д. А. Когтнев¹, Н. Л. Замарашкин²

Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

e-mail: ¹kogtnev.da@phystech.edu, ²nikolai.zamarashkin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.04.2024 г., после доработки 15.04.2024 г.; принята к публикации 04.06.2024 г.

Разработан численный метод решения одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения, использующий аппроксимации матриц разреженными матрицами. Этот метод имеет тот же порядок сходимости, что и известные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений, но является более эффективным как по числу арифметических операций, так и по объёму памяти.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, вейвлет Хаара, кратномасштабный метод для интегрального уравнения

DOI: 10.31857/S0374064124090071, EDN: JWONRU

ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов решения краевой задачи для уравнений с частными производными является сведение её к граничному интегральному уравнению [1–3]. Существенное достоинство этого метода — снижение размерности в пространстве неизвестных: размерность граничного интегрального уравнения на единицу меньше, чем размерность исходной дифференциальной задачи, что приводит к меньшей размерности линейных систем, возникающих при дискретизации интегральных уравнений. С другой стороны, матрицы систем в граничных интегральных уравнениях являются плотными, что затрудняет их решение.

Снижение вычислительных затрат в методе граничных интегральных уравнений остаётся важной задачей. Применение мозаично-скелетонных приближений для матриц позволяет уменьшить размер памяти, необходимой для хранения матриц, и упростить алгоритм умножения матрицы на вектор. Тем не менее вопросы построения эффективных предобуславливателей остаются открытыми.

Использование вейвлетов в качестве базисных функций при численном решении интегральных уравнений позволяет получать матрицы, которые хорошо приближаются разреженными матрицами. Впервые такой эффект был продемонстрирован в работе [4]. В книге [5] можно найти наиболее полное изложение теории применения вейвлетов для решения интегральных уравнений Фредгольма.

Аппроксимация плотных матриц разреженными позволяет уменьшить сложность численного решения интегральных уравнений как по необходимому объёму памяти, так и по числу арифметических операций.

В данной статье используются вейвлеты Хаара для решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Хотя с точки зрения приложений наиболее важны двумерные векторные интегральные уравнения, возникающие, например, в задаче рассеяния [3], ниже

рассматриваются одномерные скалярные гиперсингулярные уравнения. Результаты исследования одномерной задачи могут быть полезны для построения аналогичных методов в двумерном случае. Мы совершенствуем известный метод коллокаций с кусочно-постоянными аппроксимациями [2]. Вейвлеты Хаара образуют ортогональный базис в этом пространстве, поэтому их удобно использовать для модификации метода коллокаций.

Цель работы заключается в построении численного метода решения того же порядка сходимости, что и метод коллокаций, но требующего не более $o(N^2)$ памяти и $O(N^2)$ арифметических операций и использующего аппроксимацию матрицы разреженной матрицей. По аналогии с [5–7] доказываются теоремы о сходимости метода и о степени заполненности разреженной матрицы. Оценивается сложность предложенных алгоритмов. Теоретические результаты иллюстрируются численными экспериментами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функция g непрерывна на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируема на интервале (a, b) . *Гиперсингулярным интегралом* в смысле конечного значения по Адамару функции g в точке $c \in (a, b)$ называется предел

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-c)^2} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{g(x)}{(x-c)^2} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{g(x)}{(x-c)^2} dx - \frac{2g(c)}{\varepsilon} \right).$$

Если $g \equiv 1$, то справедлива формула

$$\int_a^b \frac{ds}{(s-s_0)^2} = \frac{1}{a-s_0} - \frac{1}{b-s_0}. \quad (1)$$

Нас будет интересовать решение гиперсингулярного интегрального уравнения

$$\int_a^b \frac{g(s)}{(s-s_0)^2} ds + \int_a^b K(s_0, s)g(s) ds = f(s_0), \quad s_0 \in (a, b), \quad (2)$$

где $K \in H^\mu[a, b]^2$ и $f \in H^\mu[a, b]$ — заданные функции, g — неизвестная функция, $H^\mu[a, b]$ и $H^\mu([a, b] \times [a, b])$ — пространства функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\mu \in (0, 1]$ на отрезке $[a, b]$ и в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ соответственно, а первый интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару.

Характеристическим гиперсингулярным интегральным уравнением называется уравнение вида

$$\int_a^b \frac{g(s)}{(s-s_0)^2} ds = f(s_0), \quad s_0 \in (a, b), \quad f \in H^\mu[a, b]. \quad (3)$$

Назовём *классом D* линейное пространство функций, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $g(s) \in C[a, b]$;
- 2) $g(a) = g(b) = 0$;
- 3) g дифференцируема на интервале (a, b) ;
- 4) производная функции g представима в виде

$$g'(x) = \frac{g^*(x)}{(x-a)^\beta(b-x)^\beta},$$

где $\beta \in (0, 1)$, $g^* \in H^\theta[a, b]$, $\theta \in (0, 1]$.

Характеристическое уравнение (3) имеет единственное решение в классе D [2, п. 4.4.3]. Решение уравнения (2) также ищется в классе функций D . Далее будем полагать, что $\mu \leq 1/2$. Ответ на вопрос о разрешимости уравнения (2) даёт следующая

Лемма 1 [2, лемма 4.11]. *Для уравнения (2) имеет место альтернатива Фредгольма: либо уравнение (2) имеет решение в классе функций D для любой правой части $f \in H^\mu[a, b]$, либо соответствующее однородное уравнение (т.е. уравнение (2) с нулевой правой частью) имеет ненулевые решения.*

Всюду далее будем рассматривать случай однозначной разрешимости уравнения (2). Если оно имеет единственное решение $g \in D$ для любой правой части $f \in H^\mu[a, b]$, то выполнено условие $g \in H^{1/2}[a, b]$ и справедлива оценка

$$\|g\|_{H^{1/2}[a,b]} \leq C \|f\|_{C[a,b]}$$

с константой C , зависящей только от μ [2, п. 4.4.3].

2. ПРОСТРАНСТВА СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введём на отрезке $[a, b]$ две системы точек:

$$s_{0i} = a + ih, \quad i = \overline{0, N+1}; \quad s_i = a + (i - 1/2)h, \quad i = \overline{1, N+1},$$

где $h = (b - a)/(N + 1)$ и N — некоторое натуральное число. Множества точек s_{0i} и s_i будем обозначать как E_0 и E соответственно. Точки s_{0i} называются *точками коллокации*.

Введём пространство функций $C^h[a, b]$, состоящее из функций f , удовлетворяющих условиям:

1) функция f определена на отрезке $[a, b]$ всюду, возможно за исключением подмножества E ;

2) функция f непрерывна на каждом интервале (s_i, s_{i+1}) , $i = \overline{1, N}$.

Заметим, что имеет место вложение $C[a, b] \subset C^h[a, b]$.

Также введём N -мерное пространство функций $\mathbb{X} = \mathbb{X}^h$, состоящее из функций $\varphi(s)$ таких, что

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & s \in [s_{00}, s_1] \cup (s_{N-1}, s_{0N}), \\ \varphi_i, & s \in (s_i, s_{i+1}), \end{cases}$$

где φ_i — некоторые константы, $i = \overline{1, N}$.

Пусть функция $\varphi \in D$. Рассмотрим величину

$$S(\varphi, s_0) = \int_a^b \frac{\varphi(s)}{(s - s_0)^2} ds,$$

которую можно приближать в узлах сетки s_{0i} , $i = \overline{1, N}$, с помощью квадратурной формулы

$$\tilde{S}(\varphi, s_{0i}) = \sum_{j=1}^N \varphi(s_{0j}) \left(\frac{1}{s_j - s_{0i}} - \frac{1}{s_{j+1} - s_{0i}} \right),$$

при этом выполнена оценка [2, п. 4.3.2]

$$|S(\varphi, s_{0i}) - \tilde{S}(\varphi, s_{0i})| \leq \frac{Ch^\nu}{(s_{0i} - a)(b - s_{0i})}, \quad \nu \in (0, 1). \tag{4}$$

Здесь и далее под C подразумевается некая положительная константа, не зависящая от h .

Второй интеграл в уравнении (2) будем приближать с помощью квадратурной формулы

$$\int_a^b B(s_{0i}, s)g(s)ds \approx \sum_{j=1}^N g(s_{0j}) \int_{s_j}^{s_{j+1}} B(s_{0i}, s) ds,$$

для которой справедлива оценка [2, п. 4.4.3]

$$\left| \sum_{j=1}^N g(s_{0j}) \int_{s_j}^{s_{j+1}} B(s_{0i}, s) ds - \int_a^b B(s_{0i}, s)g(s) ds \right| \leq C \|g\|_{H^{1/2}[a,b]} h^{1/2}, \quad (5)$$

где $g \in H^{1/2}[a, b]$, $B \in H^\mu[a, b]^2$, $\mu \in (0, 1]$.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Численное решение уравнения (2) будем искать в пространстве \mathbb{X}^h . Пусть g_i — значение численного решения на интервале $[s_i, s_{i+1})$, $i = \overline{1, N}$. Числа g_i находятся из линейной системы

$$Ag = f, \quad (6)$$

где $A = \tilde{G} + \tilde{B}$, $\tilde{G}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $f \in \mathbb{R}^N$, причём

$$\tilde{G}_{ij} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{ds}{(s - s_{0i})^2} = \frac{1}{s_j - s_{0i}} - \frac{1}{s_{j+1} - s_{0i}}, \quad (7)$$

$$\tilde{B}_{ij} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} K(s_{0i}, s) ds, \quad (8)$$

$$f_i = f(s_{0i}),$$

где $f(s_{0i})$ — значение функции из правой части уравнения (2) в точке коллокации s_{0i} . Описанный выше метод принято называть *методом коллокаций*. Мы также будем называть его *методом коллокаций с плотными матрицами*. Известно, что метод коллокаций сходится, причём выполнена оценка

$$|g(s_{0i}) - g_i| \leq C(h^\nu + h^{1/2}), \quad (9)$$

где $g(s_{0i})$ — значение точного решения уравнения (2) в точке коллокации s_{0i} , а $\nu \in (0, 1)$ — некоторая константа [2, п. 4.4.3].

Рассмотрим некоторые свойства матрицы \tilde{G} . Прежде всего, матрица \tilde{G} невырождена. Далее, пусть вектор g является решением системы

$$\tilde{G}g = f$$

с некоторой правой частью $f \in \mathbb{R}^N$. Тогда для всех $i = \overline{1, N}$ выполнена оценка [2, п. 4.4.2]

$$|g_i| \leq \max_{j=1, \dots, N} \frac{f_j}{q_j}, \quad q_j = \frac{1}{s_{0j} - a} + \frac{1}{b - s_{0j}} > 0. \quad (10)$$

Из неравенства (10) следует оценка

$$\|\tilde{G}^{-1}\|_\infty \leq C = \max_{x \in [a, b]} \frac{|(b-x)(a-x)|}{b-a}. \quad (11)$$

Нам также понадобятся свойства матрицы $I + \tilde{K}$, где $\tilde{K} = \tilde{G}^{-1}\tilde{B}$. Известно [2, п. 4.4.2], что существует константа $h_1 > 0$ такая, что при всех $h < h_1$ матрица $I + \tilde{K}$ обратима, причём

$$\|(I + \tilde{K})^{-1}\|_\infty \leq C. \tag{12}$$

4. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХААРА

Рассмотрим вектор $x \in \mathbb{R}^N$, где $N = 2^n$ с некоторым натуральным числом n . *Дискретным преобразованием Хаара* будем называть линейное преобразование $\mathcal{H}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, которое задаётся алгоритмом 1, имеющим сложность порядка $O(N)$.

Алгоритм 1 Хаар(N, x)

- 1: if $N > 1$ then
 - 2: $y := 0$
 - 3: for $i = 1, \dots, N/2$ do
 - 4: $y_i := (x_{2i} + x_{2i+1})/2$
 - 5: $y_{N/2+i} := (x_{2i} - x_{2i+1})/2$
 - 6: end for
 - 7: $x := y$
 - 8: Хаар(N/2, x)
 - 9: end if
-

Матрицу этого преобразования будем обозначать как H . Видно, что H имеет блочный вид

$$H = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_n]^T, \tag{13}$$

где матрицы $H_0 \in \mathbb{R}^{1 \times N}$, $H_i \in \mathbb{R}^{2^{i-1} \times N}$, $i = \overline{1, n}$, и определяются как

$$H_0 = \left[\frac{1}{2^n} \ \dots \ \frac{1}{2^n} \ \frac{1}{2^n} \ \dots \ \frac{1}{2^n} \right], \tag{14}$$

$$H_1 = \left[\frac{1}{2^n} \ \dots \ \frac{1}{2^n} \ -\frac{1}{2^n} \ \dots \ -\frac{1}{2^n} \right], \tag{15}$$

$$H_2 = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & -\frac{1}{2^{n-1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} & \dots & -\frac{1}{2^{n-1}} \end{array} \right], \tag{16}$$

$$\dots$$

$$H_n = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]. \tag{17}$$

Введём также блочную матрицу

$$\tilde{H} = [\tilde{H}_0 \ \tilde{H}_1 \ \dots \ \tilde{H}_n]^T,$$

где

$$\tilde{H}_0 = 2^n H_0, \quad \tilde{H}_i = 2^{n-i+1} H_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

и матрицу

$$\tilde{H}^T = [\tilde{H}_0^T \quad \tilde{H}_1^T \quad \dots \quad \tilde{H}_n^T].$$

Легко проверить, что для матриц H и \tilde{H} справедливы соотношения

$$\tilde{H}^T H = I, \quad H^T \tilde{H} = I,$$

где I — единичная матрица порядка N .

Из выражений (14)–(18) следует, что

$$\|H_i\|_\infty = 1, \quad i = \overline{0, n}, \quad (19)$$

$$\|\tilde{H}_i^T\|_\infty = 1, \quad i = \overline{0, n}. \quad (20)$$

Для элементов матрицы H будем использовать трёхиндексную нумерацию: H_{ijk} , где $i = \overline{0, n}$ — номер блока H_i , $k = \overline{1, N}$ — номер столбца в блоке H_i , $j = \overline{1, m(i)}$, — номер строки в блоке H_i ,

$$m(i) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2^{i-1}, & i > 1. \end{cases}$$

Аналогичную нумерацию будем применять и для элементов матрицы \tilde{H} .

5. ПЕРЕХОД К БАЗИСУ ИЗ ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА В МЕТОДЕ КОЛЛОКАЦИЙ

В пространстве \mathbb{X}^h введём базис $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, где

$$\xi_i(s) = \begin{cases} 1, & s \in [s_i, s_{i+1}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим линейный оператор $J: \mathbb{X}^h \rightarrow C^h[a, b]$, определённый формулой

$$\begin{aligned} (J\xi_i)(s_0) &= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\xi_i(s)}{(s-s_0)^2} ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} K(s_0, s)\xi_i(s) ds = \\ &= \frac{1}{s_i - s_0} - \frac{1}{s_{i+1} - s_0} + \int_{s_j}^{s_{j+1}} K(s_0, s) ds, \quad s_0 \in [a, b] \setminus E. \end{aligned} \quad (22)$$

Введём также пространство линейных функционалов $\mathbb{L}^h = \langle \delta_i : i = \overline{1, N} \rangle$ над пространством $C^h[a, b]$, где δ_i задают линейные функционалы, действующие по правилу

$$\langle \delta_i, \varphi \rangle = \varphi(s_{0i}), \quad \varphi \in C^h[a, b]. \quad (23)$$

Пусть $\{c_i\}_{i=1}^N$ обозначают коэффициенты разложения линейного функционала $l \in \mathbb{L}^h$ по базису $\{\delta_i\}_{i=1}^N$. Носителем линейного функционала l будем называть множество

$$\text{supp } l = \bigcup_{i: c_i \neq 0} s_{0i}.$$

На пространстве \mathbb{L}^h введём норму $\|l\| = \max_{i=\overline{1, N}} |c_i|$.

Выражения (21)–(23) позволяют представить матрицу и правую часть линейной системы (6) в виде

$$A_{ij} = \langle \delta_i, J\xi_j \rangle, \quad f_i = \langle \delta_i, f \rangle, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (24)$$

где f — правая часть гиперсингулярного уравнения (2). Таким образом, мы сформулировали метод коллокаций в терминах базисных функций и линейных функционалов.

Всюду далее будем полагать, что $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. В пространствах \mathbb{X}^h и \mathbb{L}^h введём, соответственно, базисы $\{w_{ij}\}$ и $\{l_{ij}\}$:

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^N \tilde{H}_{ijk} \xi_k, \quad l_{ij} = \sum_{k=1}^N H_{ijk} \delta_k, \quad (25)$$

где $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$. По построению функция w_{00} является тождественно равной единице. Функции w_{ij} при $i > 0$ называются *вейвлетами Хаара*.

Запишем численную схему, использующую новые базисы. Обозначим через $u \in \mathbb{R}^N$ вектор коэффициентов разложения решения по базису $\{w_{ij}\}$. Вектор u будем находить из линейной системы

$$Mu = b, \quad (26)$$

где $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и $b \in \mathbb{R}^N$, причём

$$M_{i'ij'j} = \langle l_{i'j'}, Jw_{ij} \rangle, \quad b_{ij} = \langle l_{ij}, f \rangle, \quad (27)$$

$i, i' = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$ и $j' = \overline{1, m(i')}$. В представленной записи каждая строка матрицы M имеет двухиндексный номер (i', j') , а каждый столбец — двухиндексный номер (i, j) .

Из формул (24)–(27) следует, что

$$M = HA\tilde{H}^T, \quad b = Hf,$$

здесь A и f — соответственно матрица и правая часть линейной системы (6). Решение g системы (6) и решение u системы (26) связаны соотношением

$$g = \tilde{H}^T u.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства функций w_{ij} и линейных функционалов l_{ij} . Обозначим $S_{ij} = \text{supp } w_{ij}$, $\hat{S}_{ij} = \text{supp } l_{ij}$. Из (13)–(17) и (25) следует справедливость следующих свойств:

- 1) $|w_{ij}(s)| = 1$, $s \in S_{ij}$;
- 2) $\|l_{ij}\| = 2^{n-i+1}$, $i > 0$;
- 3) при любом $i > 0$ выполнено

$$d_i := \text{meas}(S_{ik}) = 2^{-i+1}(b-a-h), \quad k = \overline{1, 2^{i-1}};$$

- 4) $\hat{S}_{ij} \subset S_{ij}$;
- 5) при всех i выполнено

$$\bigcup_{j=1}^{m(i)} S_{ij} = [a+h/2, b-h/2], \quad i = \overline{0, n};$$

- 6) при всех i выполнено

$$\text{meas}(S_{ij} \cap S_{ik}) = 0, \quad i = \overline{2, n}, \quad j \neq k;$$

7) при всех i выполнено

$$\bigcup_{j=1}^{m(i)} \hat{S}_{ij} = E_0, \quad i = \overline{0, n},$$

где E_0 — множество, определённое в п. 2;

8) функции w_{ij} и линейные функционалы l_{ij} при $i > 0$ имеют равные нулю моменты:

$$\int_{S_{ij}} w_{ij}(s) ds = 0, \quad \langle l_{ij}, \varphi \rangle = 0,$$

где $\varphi(s) \equiv 1, s \in [a, b]$.

6. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА С РАЗРЕЖЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

Будем аппроксимировать матрицу M разреженной матрицей \tilde{M} , которую определим по правилу

$$\tilde{M}_{i'ij'j} = \begin{cases} M_{i'ij'j}, & \text{dist}(S_{i'j'}, S_{ij}) < \varepsilon_{i'}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\varepsilon_{i'}$ — заданный порог, а расстояние между множествами понимается в смысле

$$\text{dist}(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_2} |x - y|, \quad \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}.$$

Будем считать, что функция $K \in C^1([a, b] \times [a, b])$ и существует непрерывная производная $\partial^2 K(t, x) / \partial x \partial t \in C([a, b] \times [a, b])$.

Лемма 2. Пусть существует константа $r > 1$ такая, что при всех $i, i' = \overline{1, n}$ выполнено неравенство

$$\text{dist}(S_{i'j'}, S_{ij}) \geq r(d_i + d_{i'}). \tag{28}$$

Тогда найдётся положительная константа C такая, что при всех $i, i' = \overline{1, n}$ справедлива оценка

$$|M_{i'ij'j}| \leq \frac{C d_{i'} d_i}{2^{n-i'+1}} \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} \int_{S_{ij}} \frac{dx}{(x-t)^4}.$$

Доказательство. Условие (28) означает, что множества $\hat{S}_{i'j'}$ и S_{ij} не пересекаются, поэтому имеет место представление

$$(Jw_{ij})(t) = \int_{S_{ij}} \varphi(t, x) w_{ij}(x) dx, \quad t \in \hat{S}_{i'j'}, \tag{29}$$

где интеграл понимается как собственный интеграл Римана, и

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{(x-t)^2} + K(t, x).$$

Обозначим $R(t, x) = \partial^2 \varphi(t, x) / \partial x \partial t$. Если t_0 и x_0 обозначают середины отрезков $\hat{S}_{i'j'}$ и S_{ij} соответственно, то

$$\varphi(t, x) = -\varphi(t_0, x_0) + \varphi(t, x_0) + \varphi(t_0, x) + (t-t_0)(x-x_0)\nu(t, x), \quad t \in \hat{S}_{i'j'}, \quad x \in S_{ij},$$

где

$$\nu(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 R(t_0 + y_1(t-t_0), x_0 + y_2(x-x_0)) dy_1 dy_2.$$

Из выражения (29) и свойства 8) равенства нулю моментов следует, что

$$M_{i'ij'j} = \langle l_{i'j'}, \psi_{ij} \rangle, \tag{30}$$

где

$$\psi_{ij}(t) = \int_{S_{ij}} (t-t_0)(x-x_0)\nu(t,x)w_{ij}(x) dx, \quad t \in \hat{S}_{i'j'}.$$

Нам понадобится оценка

$$|\psi_{ij}(t)| \leq d_{i'}d_i \int_{S_{ij}} |\nu(t,x)w_{ij}(x)| dx, \quad t \in \hat{S}_{i'j'}. \tag{31}$$

По определению линейных функционалов $l_{i'j'}$ и множеств $\hat{S}_{i'j'}$ можем записать равенство

$$l_{i'j'} = \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} c_t \delta_t \tag{32}$$

с некоторыми коэффициентами c_t . Используя выражения (30)–(32), получаем

$$\begin{aligned} |\Delta M_{i'ij'j}| &\leq \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |c_t \psi(t)| \leq \max_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |c_t| \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |\psi(t)| = \|l_{i'j'}\| \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} |\psi(t)| \leq \\ &\leq d_{i'}d_i \|l_{i'j'}\| \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} \int_{S_{ij}} |\nu(t,x)w_{ij}(x)| dx. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и свойств 1), 2) имеем

$$|M_{i'ij'j}| \leq \frac{d_{i'}d_i}{2^{n-i'+1}} \sum_{t \in \hat{S}_{i'j'}} \int_{S_{ij}} |\nu(t,x)| dx. \tag{33}$$

Легко проверить, что при всех $(x,t) \in [a,b] \times [a,b]$, $x \neq t$, выполнено неравенство

$$|R(t,x)| \leq \frac{\Lambda}{(x-t)^4}$$

с константой

$$\Lambda = 6 + \max_{(t,x) \in [a,b] \times [a,b]} \left| (x-t)^4 \frac{\partial^2 K(t,x)}{\partial t \partial x} \right|.$$

Тогда, согласно интегральной теореме о среднем, для всех $t \in \hat{S}_{i'j'}$ и $x \in S_{ij}$ найдутся такие $t_1 \in \hat{S}_{i'j'}$ и $x_1 \in S_{ij}$, что

$$|\nu(t,x)| \leq \frac{\Lambda}{(x_1-t_1)^4}. \tag{34}$$

Учитывая условие (28) и свойство 4), получаем, что для всех $t \in \hat{S}_{i'j'}$ и $x \in S_{ij}$ справедливо неравенство

$$|x_1-t_1| \geq |x-t| - d_i - d_{i'} \geq (1-r^{-1})|x-t|. \tag{35}$$

Объединяя неравенства (33)–(35), выводим требуемую оценку с константой

$$C = \frac{\Lambda}{(1-r^{-1})^4}.$$

Лемма доказана.

Введём матрицу $\Delta M = M - \tilde{M}$, которую будем рассматривать как блочную матрицу, состоящую из блоков $\Delta M_{i'i} \in \mathbb{R}^{m(i') \times m(i)}$ вида $\Delta M_{i'i} = \{\Delta M_{i'ij'j}\}$, $i, i' = \overline{0, n}$. Из свойства 5) следует, что $S_{01} = [a+h/2, b-h/2]$. Это означает, что $\text{dist}(S_{01}, S_{ij}) = 0$ при всех $i = \overline{0, n}$,

$j = \overline{1, m(i)}$, поэтому $\Delta M_{0i} = \Delta M_{i0} = 0$ при любом выборе порогов ε_{i0} и ε_{0i} . Таким образом, матрица ΔM представима в виде

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta M_{11} & \dots & \Delta M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \Delta M_{n1} & \dots & \Delta M_{nn} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Лемма 3. Для любого $r > 1$ существует константа $C > 0$ такая, что при любом выборе $\varepsilon = \varepsilon_{i' i} \geq r(d_{i'} + d_i)$, $i, i' = \overline{1, n}$, выполнено неравенство

$$\|\Delta M_{i' i}\|_\infty \leq C\varepsilon^{-3}d_{i'}d_i.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|\Delta M_{i' i}\|_\infty = \max_{j'=1, \dots, 2^{i'-1}} \sum_{j \in \mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)} |M_{i' i j' j}|,$$

где

$$\mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon) = \{j = \overline{1, 2^{i'-1}} : \text{dist}(\hat{S}_{i' j'}, S_{ij}) > \varepsilon\}.$$

Тогда, используя лемму 2, получаем

$$\|\Delta M_{i' i}\|_\infty \leq \frac{Cd_{i'}d_i}{2^{n-i'+1}} \max_{j'=1, \dots, 2^{i'-1}} \sum_{t \in \hat{S}_{i' j'}} \sum_{j \in \mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)} \int_{S_{ij}} \frac{dx}{(x-t)^4}. \tag{37}$$

Далее, в силу определения множества $\mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)$ и равенства $\text{meas}(S_{ij} \cap S_{ik}) = 0$ при $j \neq k$ заключаем, что для всех $t \in \hat{S}_{i' j'}$ имеет место неравенство

$$\sum_{j \in \mathbb{N}_{i' j'}(\varepsilon)} \int_{S_{ij}} \frac{dx}{(x-t)^4} < \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{dx}{(x-t)^4} = \frac{2}{3\varepsilon^3}. \tag{38}$$

Объединяя неравенства (37), (38) и учитывая, что $|\hat{S}_{i' j'}| = 2^{n-i'+1}$ при всех $j' = \overline{1, 2^{i'-1}}$, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть пороги $\varepsilon_{i' i}$, $i, i' = \overline{0, n}$, удовлетворяют условию

$$\varepsilon_{i' i} \geq \max\{r(d_{i'} + d_i), 2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}\}$$

с некоторыми $\lambda > 0$, $\alpha > 3/2$ и $r > 1$ такими, что $2 - 2\alpha + \lambda > 0$. Тогда выполнено неравенство

$$\|\Delta A\|_\infty \leq Ch^\omega, \quad \omega = 2 - 2\alpha + \lambda.$$

Доказательство. Будем использовать равенство $\Delta A = \tilde{H}^T \Delta M H$. Обозначим $V = \Delta M H$. С учётом равенств (13), (36) можем записать матрицу V в блочном виде:

$$V = [0 \quad V_1 \quad \dots \quad V_n]^T,$$

где

$$V_{i'} = \sum_{i=1}^n \Delta M_{i' i} H_i, \quad i' = \overline{1, n}.$$

Условие $\varepsilon_{i'i} \geq r(d_{i'} + d_i)$ позволяет использовать лемму 3, в силу которой и равенства $\|H_i\|_\infty = 1$ (см. (19)) получаем оценку

$$\|V_{i'}\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|\Delta M_{i'i}\|_\infty \|H_i\|_\infty \leq C d_{i'} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i'i}^{-3} d_i.$$

Учитывая выражение для $\varepsilon_{i'i}$ и то, что $d_i = O(2^{-i})$ (см. свойство 3)), выводим

$$\|V_{i'}\|_\infty \leq C 2^{-\lambda n + (\alpha-1)i'} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-1)i} \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 1)n + (\alpha-1)i'}.$$

Далее запишем

$$\Delta A = \tilde{H}^T V = \sum_{i=1}^n \tilde{H}_i^T V_i.$$

Так как $\|\tilde{H}_i^T\|_\infty = 1$ (см. (20)), имеем

$$\|\Delta A\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|\tilde{H}_i^T\|_\infty \|V_i\|_\infty \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 1)n} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-1)i} \leq C 2^{(-\lambda + 2\alpha - 2)n} = C 2^{-n\omega},$$

откуда, учитывая, что $2^{-n} = O(h)$, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 4 условие $\varepsilon_{i'i} \geq r(d_{i'} + d_i)$ позволило использовать лемму 3, а условие $\varepsilon_{i'i} \geq 2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}$ — свести оценку нормы $\|\Delta A\|_\infty$ к суммированию геометрических прогрессий. Теперь зададим более конкретное правило выбора порогов $\varepsilon_{i'i}$, удовлетворяющих этим двум условиям. Будем полагать, что пороги $\varepsilon_{i'i}$ выбираются по правилу

$$\varepsilon_{i'i} = \max\{2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}, r(d_{i'} + d_i)\}, \quad i, i' = \overline{0, n}, \tag{39}$$

где $\lambda, \alpha > 0$ и $r > 1$ — заданные параметры.

Обозначим через $g_{ex} \in \mathbb{R}^N$ вектор с компонентами $g_{ex,k} = g(s_{0k})$, где $g(s_{0k})$ — значение точного решения уравнения (2) в точке коллокации s_{0k} , $k = \overline{1, N}$. Введём также вектор $u_{ex} = H g_{ex}$, имеющий блочный вид:

$$u_{ex} = [u_{ex,0} \quad u_{ex,1} \quad \dots \quad u_{ex,n}]^T = [H_0 g_{ex} \quad H_1 g_{ex} \quad \dots \quad H_n g_{ex}]^T. \tag{40}$$

Из определения блоков H_i и условия $g \in H^{1/2}[a, b]$ следует оценка

$$\|u_{ex,i}\|_\infty \leq 2^{-(i-1)/2} (b-a)^{1/2} |g|_{H^{1/2}[a,b]}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{41}$$

где $|g|_{H^{1/2}[a,b]} = \sup_{x,y \in [a,b], x \neq y} |g(x) - g(y)| / |x - y|^{1/2}$ — полунорма в пространстве $H^{1/2}[a, b]$.

Лемма 5. Пусть пороги $\varepsilon_{i'i}$ выбраны по правилу (39) с параметрами $\lambda > 0$ и $\alpha > 3/2$ такими, что $2 - 2\alpha + \lambda > 0$. Тогда выполнена оценка

$$\|\Delta A g_{ex}\|_\infty \leq C h^{\omega+1/2}, \quad \omega = 2 - 2\alpha + \lambda.$$

Доказательство. Будем пользоваться равенством

$$\Delta A g_{ex} = \tilde{H}^T \Delta M u_{ex}.$$

Обозначим $v = \Delta M u_{ex}$. Равенства (36), (40) позволяют записать вектор v в блочном виде

$$v = [0 \quad v_1 \quad \dots \quad v_n]^T,$$

где

$$v_{i'} = \sum_{i=1}^n \Delta M_{i'i} u_{ex,i}, \quad i' = \overline{1, n}.$$

Используя лемму 3 и оценку (41), получаем

$$\|v_{i'}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \Delta \|M_{i'i}\|_{\infty} \|u_{ex,i}\|_{\infty} \leq C d_{i'} \sum_{i=1}^n 2^{-i/2} \varepsilon_{i'}^{-3} d_i.$$

Учитывая выражение для $\varepsilon_{i'}$ и то, что $d_i = O(2^{-i})$ (см. свойство 3)), имеем

$$\|v_{i'}\|_{\infty} \leq C 2^{-\lambda n + (\alpha-1)i'} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-3/2)i} \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 3/2)n + (\alpha-1)i'}.$$

Далее можем записать

$$\Delta A g_{ex} = \tilde{H}^T v = \sum_{i=1}^n \tilde{H}_i^T v_i.$$

Ввиду равенства $\|\tilde{H}_i^T\|_{\infty} = 1$ (см. (20)) получаем соотношения

$$\|\Delta A g_{ex}\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^n \|\tilde{H}_i^T\|_{\infty} \|v_i\|_{\infty} \leq C 2^{(-\lambda + \alpha - 3/2)n} \sum_{i=1}^n 2^{(\alpha-1)i} \leq C 2^{(-\lambda + 2\alpha - 5/2)n} = C 2^{-n(\omega+1/2)},$$

откуда с учётом $2^{-n} = O(h)$ выводим требуемую оценку. Лемма доказана.

Численная схема, использующая аппроксимацию матрицы M разреженной матрицей \tilde{M} , основана на решении линейной системы

$$\tilde{M} \tilde{u} = b, \tag{42}$$

решив которую, можно перейти в базис кусочно-постоянных функций, вычислив вектор

$$\tilde{g} = \tilde{H}^T \tilde{u}.$$

Компоненты вектора \tilde{g} аппроксимируют значения точного решения уравнения (2) в точках коллокации.

Теорема 1. Пусть пороги $\varepsilon_{i'}$, $i, i' = \overline{0, n}$, выбраны по правилу (39) с параметрами $\lambda > 0$ и $\alpha > 3/2$ такими, что $2 - 2\alpha + \lambda > 0$. Тогда существует константа $h_0 > 0$ такая, что при всех $h \leq h_0$ линейная система (42) имеет единственное решение и выполнена оценка

$$\|g_{ex} - \tilde{g}\|_{\infty} \leq C(h^{1/2} + h^{\nu} + h^{\omega+1/2}), \quad \omega = 2 - 2\alpha + \lambda, \quad \nu \in (0, 1).$$

Другими словами, численная схема, использующая аппроксимацию матрицы разреженной матрицей, имеет порядок сходимости $O(h^{1/2} + h^{\nu} + h^{\omega+1/2}) = O(h^{1/2} + h^{\nu})$ в абсолютной норме.

Доказательство. Матрица \tilde{M} подобна матрице \tilde{A} , значит, однозначная разрешимость системы (42) эквивалентна обратимости матрицы \tilde{A} . Будем использовать представление

$$\tilde{A} = A - \Delta A = \tilde{G} + \tilde{B} - \Delta A,$$

где \tilde{G} , \tilde{B} — матрицы, определяемые выражениями (7), (8). Матрица \tilde{G} обратима, поэтому обратимость матрицы \tilde{A} эквивалентна обратимости матрицы

$$I + \tilde{K} + \tilde{G}^{-1} \Delta A,$$

где $\tilde{K} = \tilde{G}^{-1}\tilde{B}$. Известно (см. п. 5), что при всех $h < h_1$ матрица $I + \tilde{K}$ обратима, поэтому при таких h обратимость матрицы \tilde{A} эквивалентна обратимости матрицы $I + F$, где

$$F = (I + \tilde{K})^{-1}\tilde{G}^{-1}\Delta A.$$

Используя оценки (11), (12) и лемму 4, получаем

$$\|F\|_\infty \leq \|(I + \tilde{K})^{-1}\|_\infty \|\tilde{G}^{-1}\|_\infty \|\Delta A\|_\infty \leq Ch^\omega \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

это означает, что найдётся положительная константа $h_0 \leq h_1$ такая, что при всех $h < h_0$ матрица $I + F$ обратима, причём выполняется оценка

$$\|(I + F)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - Ch^\omega}. \tag{43}$$

Таким образом, система (42) имеет единственное решение при всех $h < h_0$. Теперь докажем, что схема сходится с требуемым порядком.

Введём векторы $\Delta f_1, \Delta f_2 \in \mathbb{R}^N$ по формулам

$$\Delta f_{1,i} = \int_a^b \frac{g(s)}{(s - s_{0i})^2} ds - (\tilde{G}g_{ex})_i, \quad \Delta f_{2,i} = \int_a^b K(s_{0i}, s)g(s) ds - (\tilde{B}g_{ex})_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где g — точное решение уравнения (2). Из оценок (4), (5) следует, что

$$|\Delta f_{1,i}| \leq \frac{Ch^\nu}{(s_{0i} - a)(b - s_{0i})}, \tag{44}$$

$$|\Delta f_{2,i}| \leq C\|g\|_{H^{1/2}[a,b]}h^{1/2}, \tag{45}$$

где $i = \overline{1, N}$, $\nu \in (0, 1)$. В силу равенств $Ag_{ex} = (\tilde{G} + \tilde{B})g_{ex} = f + \Delta f_1 + \Delta f_2$, $\tilde{A}\tilde{g} = (\tilde{G} + \tilde{K} - \Delta A)\tilde{g} = f$ можем записать

$$\tilde{A}(g_{ex} - \tilde{g}) = (\tilde{G} + \tilde{B} - \Delta A)(g_{ex} - \tilde{g}) = \Delta f_1 + \Delta f_2 - \Delta Ag_{ex}.$$

Отсюда следует, что при $h < h_0$

$$g_{ex} - \tilde{g} = (I + F)^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}\tilde{G}^{-1}(\Delta f_1 + \Delta f_2 - \Delta Ag_{ex}).$$

Используя оценки (11), (12), (43), получаем

$$\|g_{ex} - \tilde{g}\|_\infty \leq C\|\tilde{G}^{-1}\Delta f_1\|_\infty + C\|\Delta f_2\|_\infty + C\|\Delta Ag_{ex}\|_\infty. \tag{46}$$

Из оценок (10), (44) находим

$$\|\tilde{G}^{-1}\Delta f_1\|_\infty \leq Ch^\nu, \quad \nu \in (0, 1). \tag{47}$$

Далее, из оценки (45) следует, что

$$\|\Delta f_2\|_\infty \leq Ch^{1/2}. \tag{48}$$

Наконец, из леммы 5 вытекает неравенство

$$\|\Delta Ag_{ex}\|_\infty \leq Ch^{\omega+1/2}. \tag{49}$$

Объединив оценки (46)–(49), получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Утверждение теоремы состоит в том, что при подходящем выборе порогов $\varepsilon_{i'i}$ численная схема, использующая аппроксимацию матрицы M разреженной матрицей \tilde{M} , имеет порядок сходимости $O(h^{1/2} + h^\nu + h^{\omega+1/2})$. Из доказательства теоремы видно, что слагаемое порядка $O(h^{1/2} + h^\nu)$ связано с погрешностью квадратурных формул, а слагаемое порядка $O(h^{\omega+1/2})$ — с разреженной аппроксимацией. Таким образом, предлагаемый алгоритм имеет такой же порядок сходимости, что и метод коллокаций с плотной матрицей. На самом деле константы в слагаемых порядка $O(h^{1/2})$ и $O(h^\nu)$ в асимптотической оценке (9) и в теореме 1 отличаются на множитель $(1 - Ch_0^\omega)^{-1} \rightarrow 1$ при $h_0 \rightarrow 0$.

Теперь оценим степень разреженности матрицы \tilde{M} . Для этого рассмотрим матрицу \tilde{M} в таком же блочном виде, как и ранее матрицу ΔM :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{00} & \tilde{M}_{01} & \dots & \tilde{M}_{0n} \\ \tilde{M}_{10} & \tilde{M}_{11} & \dots & \tilde{M}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{M}_{n0} & \tilde{M}_{n1} & \dots & \tilde{M}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Через $\mathcal{N}(Y)$ обозначим число ненулевых элементов матрицы Y .

Теорема 2. Пусть пороги $\varepsilon_{i'i}$, $i, i' = \overline{0, n}$, выбраны по правилу (39) с параметрами $\lambda > 0$ и $3/2 < \alpha < 3$ такими, что $2 - 2\alpha/3 + \lambda/3 > 1$. Тогда

$$\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N^{2-2\alpha/3+\lambda/3}).$$

Доказательство. Оценим число ненулевых элементов в строке $\tilde{M}_{i'j'i}$ блока $\tilde{M}_{i'i}$, $i, i' = \overline{0, n}$. Пусть a', b' — соответственно начало и конец отрезка $S_{i'j'}$. Заметим, что если $\tilde{M}_{i'j'ij} \neq 0$, то имеет место вложение $S_{ij} \subset L$, где L — отрезок вида

$$L = [a' - \varepsilon_{i'i} - d_i, b' + \varepsilon_{i'i} + d_i].$$

При любом фиксированном i множества S_{ij} дизъюнкты (свойство 6)), поэтому

$$\mathcal{N}(\tilde{M}_{i'j'i}) \leq \frac{\text{meas}(L)}{\min_j \text{meas}(S_{ij})} = \frac{d_{i'} + 2d_i + 2\varepsilon_{i'i}}{d_i} = 2 + \frac{d_{i'}}{d_i} + \frac{2\varepsilon_{i'i}}{d_i}. \tag{50}$$

Для чисел $\varepsilon_{i'i}$ будем использовать оценку

$$\varepsilon_{i'i} = \max\{r(d_{i'} + d_i), 2^{\lambda n/3 - \alpha i' - \alpha i}\} < r(d_{i'} + d_i) + 2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 - \alpha i/3}. \tag{51}$$

Свойство 3) означает, что при всех $h < h_0$ выполнено неравенство

$$(b - a - h_0)2^{-i} < d_i < 2(b - a)2^{-i}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{52}$$

Объединив оценки (50)–(52), будем иметь

$$\mathcal{N}(\tilde{M}_{i'j'i}) \leq 2 + 2r + \frac{(2 + 4r)(b - a)}{b - a - h_0} 2^{i-i'} + \frac{2}{b - a - h_0} 2^{\lambda n/3 - \alpha i'/3 + (1 - \alpha/3)i}.$$

Блок $\tilde{M}_{i'i}$ имеет не более $2^{i'}$ строк, поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\mathcal{N}(\tilde{M}_{i'i}) \leq 2^{i'} \mathcal{N}(\tilde{M}_{i'j'i}) \leq C(2^{i'} + 2^i + 2^{\lambda n/3 + (1 - \alpha/3)i' + (1 - \alpha/3)i}).$$

Далее оценим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tilde{M}) &= \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n \mathcal{N}(\tilde{M}_{i'i}) \leq C \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n 2^i + C \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n 2^{i'} + C \sum_{i=0}^n \sum_{i'=0}^n 2^{\lambda n/3 + (1 - \alpha/3)i' + (1 - \alpha/3)i} \leq \\ &\leq 2C(n + 1)2^{n+1} + C2^{(2 - 2\alpha/3 + \lambda/3)n}. \end{aligned} \tag{53}$$

Так как $n = \log_2 N$, получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 следует, что метод, использующий аппроксимацию матрицы разреженной матрицей, имеет тот же порядок сходимости, что и метод коллокаций с плотной матрицей, а соответствующая разреженная матрица имеет число ненулевых элементов порядка $O(N^\gamma)$ с показателем $\gamma = 2 - 2\alpha/3 + \lambda/3 < 2$, если только пороги ε_{i^i} выбраны по правилу (39) с параметрами λ и α , удовлетворяющими условиям

$$\lambda > 0, \quad 3/2 < \alpha < 3, \quad \lambda < 2\alpha, \quad 2 - 2\alpha + \lambda > 0, \quad 2 - 2\alpha/3 + \lambda/3 > 1.$$

Легко убедиться, что данные условия совместны, выбрав, например, $\alpha = 5/2$ и $\lambda = 10/3$, тогда разреженная матрица будет иметь $O(N^{1+4/9})$ ненулевых элементов.

7. ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ

Линейную систему (42) будем решать методом GMRES [8] при отсутствии рестартов и преобуславливания. В качестве критерия останова используется условие, что относительная невязка принимает значение, меньшее заданного порога τ , не зависящего от N . Для m итераций потребуется $O(mN(\tilde{M}) + m^2N)$ арифметических операций [8]. Пусть $\mathcal{I}(N) = \mathcal{I}_\tau(N)$ — число итераций метода, необходимое для достижения относительной невязки меньшей τ . Тогда решение системы (42) потребует $O(\mathcal{I}(N)\mathcal{N}(\tilde{M}) + N\mathcal{I}^2(N))$ арифметических операций. В отсутствие теоретических оценок на величину $\mathcal{I}(N)$ нами будут использоваться дополнительные предположения.

Пример 1. Пусть $\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$, $\tau = 10^{-8}$. Такой выбор параметров α , λ удовлетворяет условиям теоремы 1. При этом согласно теореме 2 $\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N^{1+4/9})$. Будем предполагать, что $\mathcal{I}(N) = O(1)$ (предположение согласуется с результатами численных экспериментов, см. табл. 1 в п. 8). GMRES в таком случае потребует $O(N^{1+4/9})$ арифметических операций.

Пример 2. Пусть $\alpha = 3$, $\lambda = 3$, $\tau = 10^{-8}$. При таком выборе параметров α , λ сходимость нового метода теоремой 1 не гарантируется, однако наблюдается в численных экспериментах (см. табл. 2 в п. 8). Из (53) следует, что $\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N \log N)$. Предположим, что $\mathcal{I}(N) = O(\log N)$. Это предположение не противоречит результатам численных экспериментов в табл. 2. GMRES при этом потребует $O(N \log^2 N)$ арифметических операций.

Наконец, рассмотрим вопрос формирования матрицы \tilde{M} . Перейдём к одноиндексной нумерации базисных функций: $w_p = w_{ij}$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$, где $p = 1$ при $i = 0$, $j = 1$; $p = 1 + 2^{i-1} + j - 1$ иначе. Аналогичным образом перенумеруем линейные функционалы l_{ij} . Отсюда, с учётом (27), получаются выражения для матрицы M с одноиндексной нумерацией строк и столбцов: $M_{pq} = \langle l_p, Jw_q \rangle$, $p, q = \overline{1, N}$. Такую же одноиндексную нумерацию будем использовать и для матрицы \tilde{M} . Введём матрицу $W = A\tilde{H}^T$. Из (25), (27) получаем $W_{pq} = \langle \delta_p, Jw_q \rangle$, т.е.

$$W_{pq} = \int_{S_q} \frac{w_q(s)}{(s - s_{0p})^2} ds + \int_{S_q} K(s_{0p}, s)w_q(s) ds, \quad p, q = \overline{1, N}. \tag{54}$$

По построению функций w_p имеет место равенство $w_1(s) \equiv 1$, $s \in [a + h/2, b - h/2]$, и

$$w_p(s) = \begin{cases} 1, & s \in [a_p, c_p), \\ -1, & s \in [c_p, b_p), \quad p = \overline{2, N}. \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{55}$$

Для чисел a_p , b_p , c_p можно найти явные выражения с помощью (25). Из соотношений (1), (54), (55) получаем

$$W_{pq} = \frac{1}{a_q - s_{0p}} - \frac{2}{c_q - s_{0p}} + \frac{1}{b_q - s_{0p}} + \int_{a_q}^{c_q} K(s_{0p}, s) ds - \int_{c_q}^{b_q} K(s_{0p}, s) ds, \quad p = \overline{1, N}, \quad q = \overline{2, N}. \tag{56}$$

Выражение для W_{pq} при $q=1$ получается аналогично. Обозначим через M_p и W_p p -й столбец матриц M и W соответственно. Введём множество

$$P = \{(p, q) : \tilde{M}_{pq} \neq 0, p, q = \overline{1, N}\}.$$

Будем вычислять ненулевые элементы матрицы \tilde{M} по алгоритму 2.

Алгоритм 2 Вычисление матрицы \tilde{M}

```

1: for  $p = 1, \dots, N$  do
2:   Вычислить столбец  $W_p$ 
3:   Вычислить  $M_p = HW_p$ 
4:   for  $q = 1, \dots, N, (p, q) \in P$  do
5:      $\tilde{M}_{pq} := M_{pq}$ 
6:   end for
7: end for

```

Теорема 3. Пусть интегралы в выражении (56) можно вычислить, используя $O(1)$ арифметических операций. Тогда алгоритм 2 требует $O(N^2)$ арифметических операций.

Доказательство. Оценим сложность p -й итерации внешнего цикла. По условию теоремы каждый элемент столбца W_p можно вычислить за $O(1)$ арифметических операций, следовательно, вычисление всего столбца требует $O(N)$ операций. Вектор $M_p = HW_p$ можно вычислить с помощью дискретного преобразования Хаара за $O(N)$ арифметических операций. Внутренний цикл, начинающийся в строке 4, также имеет сложность $O(N)$. Таким образом, одна итерация внешнего цикла требует $O(N)$ арифметических операций. Всего проводится N итераций внешнего цикла, значит, алгоритм имеет сложность $O(N^2)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Алгоритм 2 требует $O(\mathcal{N}(\tilde{M}))$ памяти для хранения матрицы \tilde{M} и $O(N)$ дополнительной памяти для хранения столбцов W_p, M_p .

Замечание 2. Предположение, что интегралы в (56) можно вычислить, используя $O(1)$ арифметических операций, верно, если эти интегралы вычисляются аналитически без использования квадратурных формул. Это будет верно, если уравнение (2) окажется следствием краевой задачи для уравнения Лапласа. Тогда имеет место равенство $K(s_0, s) = \partial K^*(s_0, s) / \partial s$ с некоторой функцией K^* , для которой есть явное выражение [2, доказательство леммы 5.13]. Тогда интегралы в (56) можно выразить через значения функции K^* в трёх точках.

8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^- = 1, \quad x \in \Gamma,$$

где кривая $\Gamma = \{(\cos s, \sin s) : s \in [0, \pi]\}$ — полуокружность. Решение этой задачи представимо в виде [2, п. 5.4.3]

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} g(y) ds, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|},$$

причём для кривой Γ используется натуральная параметризация $y = y(s)$, неизвестная функция $g(s)$ является решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} g(y) ds = 1, \quad x = x(s_0), \quad s_0 \in (0, \pi), \tag{57}$$

здесь $x = x(s_0)$ — та же натуральная параметризация кривой Γ .

Уравнение (57) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{g(s)}{(s-s_0)^2} ds + \int_0^\pi K(s_0, s)g(s) ds = 1, \quad s_0 \in (0, \pi), \tag{58}$$

где

$$K(s_0, s) = \begin{cases} \frac{-\cos(s_0-s)}{2\pi(2-2\cos(s_0-s))} + \frac{\sin^2(s_0-s)}{\pi(2-2\cos(s_0-s))^2} - \frac{1}{2\pi(s_0-s)^2}, & s \neq s_0, \\ 0, & s = s_0. \end{cases}$$

Все численные эксперименты проводились для уравнения (58). В качестве “точного” рассматривалось решение на сетке $N = 65\,536$. В качестве оценки порядка сходимости будем использовать двоичный логарифм от отношения нормы разности между численным и точным решениями на сетке мелкости $2h$ и на сетке мелкости h . Для решения линейных систем использовался метод GMRES без рестартов и предобуславливания с критерием остановки $\tau = 10^{-8}$.

Результаты экспериментов при $\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$, $r = 2$ представлены в табл. 1, где приводятся точность решения и порядок сходимости. Также нельзя не отметить быструю

Таблица 1. Сходимость метода коллокаций с разреженной матрицей ($\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$)

N	Заполненность \tilde{M}	$\frac{\ \tilde{g} - g_{ex}\ _\infty}{\ g_{ex}\ _\infty}$	Порядок сходимости	Число итераций GMRES	Относительная невязка GMRES
256	0.23	0.103866	—	8	$2.5 \cdot 10^{-10}$
512	0.15	0.071602	0.537	8	$1.4 \cdot 10^{-9}$
1024	0.10	0.048661	0.557	8	$4.0 \cdot 10^{-9}$
2048	0.071	0.032395	0.587	8	$5.5 \cdot 10^{-9}$
4096	0.051	0.020877	0.634	8	$4.5 \cdot 10^{-9}$
8192	0.037	0.012726	0.714	8	$3.8 \cdot 10^{-9}$

Таблица 2. Сходимость метода коллокаций с разреженной матрицей ($\alpha = 3$, $\lambda = 3$)

N	Заполненность \tilde{M}	$\frac{\ \tilde{g} - g_{ex}\ _\infty}{\ g_{ex}\ _\infty}$	Порядок сходимости	Число итераций GMRES	Относительная невязка GMRES
256	0.23	0.10387	—	8	$1.9 \cdot 10^{-9}$
512	0.14	0.071603	0.537	9	$1.4 \cdot 10^{-9}$
1024	0.08	0.048657	0.557	10	$8.6 \cdot 10^{-10}$
2048	0.045	0.032389	0.587	11	$7.3 \cdot 10^{-10}$
4096	0.025	0.020872	0.634	12	$9.0 \cdot 10^{-10}$
8192	0.014	0.012723	0.714	12	$7.6 \cdot 10^{-9}$

сходимость метода GMRES. Как показывает эксперимент, аналогичную точность решения можно получить и при меньшей заполненности матрицы \tilde{M} . Возьмём $\alpha = 3$, $\lambda = 3$, $r = 2$. Такие значения параметров α и λ не удовлетворяют условиям теоремы 1. Согласно (53) при данном выборе α , λ число ненулей в разреженной матрице будет оцениваться в виде $\mathcal{N}(\tilde{M}) = O(N \log N)$. Эти результаты представлены в табл. 2. Точность решения при таком выборе α , λ почти идентична точности решения при $\alpha = 5/2$, $\lambda = 10/3$, а заполненность матрицы \tilde{M} существенно меньше.

На рис. 1 показан портрет матрицы M , нормированной на единицу в абсолютной норме, и шаблон разреженности матрицы \tilde{M} при $N = 1024$, $\lambda = 5/2$, $\alpha = 10/3$.

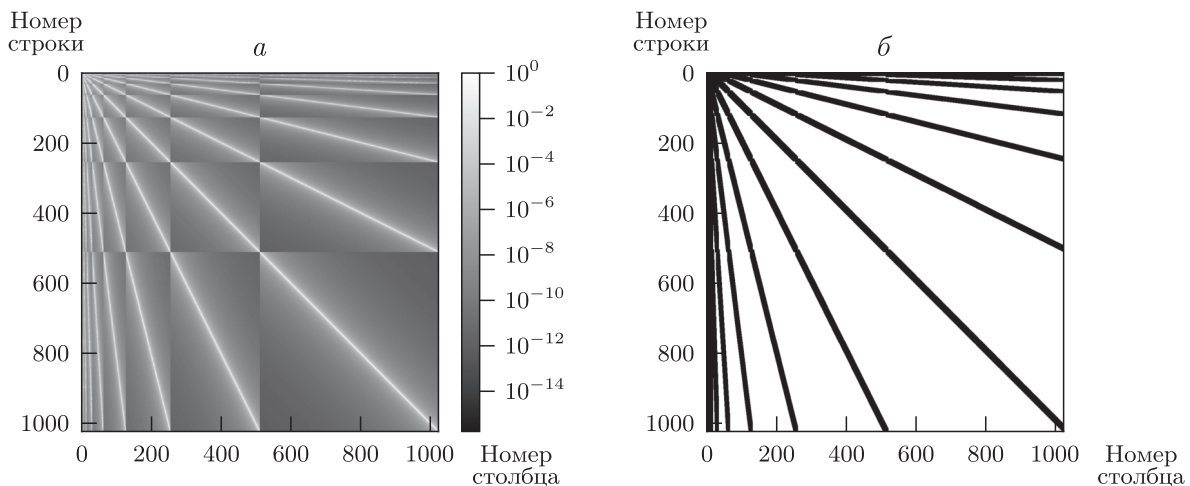


Рис. 1. Абсолютные значения матрицы M (а) и шаблон разреженности матрицы \tilde{M} (б) при $\lambda = 5/2$ и $\alpha = 10/3$

На рис. 2 представлены графики сходимости метода GMRES для $N = 4096$ при $\lambda = 5/2$, $\alpha = 10/3$ и при $\lambda = 3$, $\alpha = 3$. На графиках изображена зависимость относительной невязки от числа итераций.

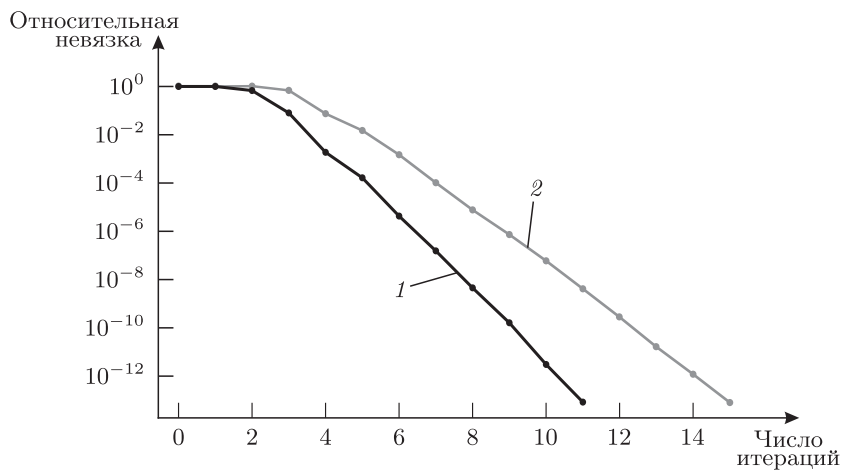


Рис. 2. Сходимость метода GMRES при $N = 4096$ при различных значениях λ и α : 1 — $\lambda = 5/2$, $\alpha = 10/3$; 2 — $\lambda = 3$, $\alpha = 3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен численный алгоритм решения одномерного гиперсингулярного уравнения, использующий в качестве базисных функций вейвлеты Хаара для получения разреженного приближения матрицы линейной системы. Алгоритм имеет тот же порядок сходимости, что и метод коллокаций с плотной матрицей. Новый метод не требует хранения плотной матрицы. Учитывая, что разреженный формат матриц даёт возможность асимптотически быстрого умножения матрицы на вектор на каждой итерации GMRES, а также быструю (по числу итераций) сходимость GMRES, наблюдаемую в численных экспериментах даже при больших размерах матриц, можно ожидать, что решение возникающих в новом методе линейных систем методом GMRES потребует много меньше арифметических операций (суммарно для всех итераций GMRES, необходимых для достижения заданной точности), чем прямой метод для систем, возникающих в методе коллокаций с плотными матрицами.

Теоретические результаты были подтверждены численными экспериментами. По сути, настоящая работа является адаптацией вейвлет-методов решения интегральных уравнений, приводящих к линейным системам с разреженными матрицами, на случай гиперсингулярных интегральных уравнений. Большой интерес представляет разработка аналогичных методов решения двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М. : Физматлит, 1958. — 545 с.
2. Сетуха, А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения / А.В. Сетуха. — М. : Аргмак-Медиа, 2014. — 256 с.
3. Захаров, Е.В. Численное решение трёхмерных задач дифракции элетромагнитных волн на системе идеально проводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений / Е.В. Захаров, Г.В. Рыжаков, А.В. Сетуха // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 55, № 9. — С. 1253–1263.
4. Beylkin, G. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I / G. Beylkin, R. Koifman, V. Rokhlin // Comm. Pure Appl. Math. — 1991. — V. 44. — P. 141–183.
5. Chen, Z. Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations / Z. Chen, C.A. Micchelli, Y. Xu. — Cambridge : Cambridge University Press, 2015.
6. Aparinov, A.A. Low rank methods of approximation in an electromagnetic problem / A.A. Aparinov, A.V. Setukha, S.L. Stavtsev // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40, № 11. — P. 1771–1780.
7. Amaratunga, K. Surface wavelets: a multiresolution signal processing tool for 3D computational modelling / K. Amaratunga, J.E. Castrillon-Candas // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2001. — V. 55, № 3. — P. 239–271.
8. Saad, Y. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems / Y. Saad, M.H. Schultz // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, № 3. — P. 856–869.

SOLVING OF ONE-DIMENSIONAL HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION
USING HAAR'S WAVELETS© 2024 / D. A. Kogtenev¹, N. L. Zamarashkin²*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of RAS, Moscow, Russia*
e-mail: ¹kogtenev.da@phystech.edu, ²nikolai.zamarashkin@gmail.com

We constructed a numerical method for the one-dimensional hypersingular integral equation which uses sparse matrix approximations. This method has the same convergence order as conventional methods for hypersingular integral equations but the new method is more effective in both memory and arithmetic operations.

Keywords: hypersingular integral equation, Haar's wavelet, multiscale method for integral equation

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-286.

REFERENCES

1. Gakhov, F.D., *Boundary Value Problems*, Oxford: Pergamon Press, 1966.
2. Setukha, A.V., *Chislennyyi metody v integral'nykh uravneniyakh ee ikh prilozhenia* (Numerical Methods for Integral Equations and their Applications), Moscow: Argamak-Media, 2014.
3. Zakharov, E.V., Ryzhakov, G.V., and Setukha, A.V., Numerical solution of 3D problems of electromagnetic wave diffraction on a system of ideally conducting surfaces by the method of hypersingular integral equations, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 55, no. 9, pp. 1240–1251.
4. Beylkin, G., Koifman, R., and Rokhlin, V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 2019, vol. 44, pp. 141–183.
5. Chen, Z., Micchelli, C.A., and Xu, Y., *Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
6. Aparinov, A.A., Setukha, A.V., and Stavtsev, S.L., Low rank methods of approximation in an electromagnetic problem, *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1771–1780.
7. Amaratunga, K. and Castrillon-Candas, J.E., Surface wavelets: a multiresolution signal processing tool for 3D computational modelling, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2001, vol. 55, no. 3, pp. 239–271.
8. Saad, Y. and Schultz, M.H., GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1986, vol. 7, no. 3, pp. 856–869.