ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 10, с. 1422–1428

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ПАМЯТЬ СРЕДЫ

А. В. Звягин[1], М. И. Струков[2]

Воронежский государственный университет

e-mail: [1]zvyagin.a@mail.ru, [2]mixail.strukov12@gmail.com

Поступила в редакцию 04.03.2024 г., после доработки 24.06.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Исследована слабая разрешимость начально-краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров с учётом памяти среды вдоль траектории движения частиц, определяемой полем скоростей. При доказательстве разрешимости использованы аппроксимационно-топологический подход и теория регулярных лагранжевых потоков.

Ключевые слова: слабое решение, теорема существования, вязкоупругая жидкость

DOI: 10.31857/S0374064124100103, EDN: JSZTMX

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega\in\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, на временно́м промежутке $[0,T]$, $T>0$, начально-краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu_0\Delta v-\mu_1\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-2\mu_1\operatorname{Div}\biggl(\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\biggr)-$$

$$-2\mu_1\operatorname{Div}\biggl(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho\mathcal{E}(v)\biggr)-\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\operatorname{Div}\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds+\nabla p=f, \qquad (1)$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds, \quad t,\tau\in[0,T], \quad x\in\Omega, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}v(t,x)=0, \quad t\in[0,T], \quad x\in\Omega, \qquad (3)$$

$$v|_{t=0}=v_0, \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0. \qquad (4)$$

Здесь $v(x,t)=(v_1,\ldots,v_n)$ — вектор-функция скорости движения частицы среды; $p=p(x,t)$ — функция давления; $f=f(x,t)$ — вектор-функция плотности внешних сил; $z(\tau,t,x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке x; $\mu_0,\mu_1>0$, $\mu_2\geqslant 0$, $0<\alpha<1$ — некоторые константы; $\mathcal{E}(v)=(\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, $\mathcal{E}_{ij}(v)=(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)/2$ — тензор скоростей деформаций; $W(v)=(W_{ij}(v))_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, $W_{ij}(v)=(\partial v_i/\partial x_j-\partial v_j/\partial x_i)/2$ — тензор завихрённости; $W_\rho(v)=\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x-y)W(y)\,dy$, $\rho\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n}\rho(y)\,dy=1$ и $\rho(x)=\rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами;

$\Gamma(1-\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(1-\alpha)=\int_0^\infty t^{-\alpha}e^{-t}\,dt$. Через $\operatorname{Div} A$ обозначена дивергенция тензора $A=(a_{ij})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$, т.е. вектор

$$\operatorname{Div} A=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{1j}}{\partial x_j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{nj}}{\partial x_j}\right).$$

Задача (1)–(4) возникает, например, при изучении движения воды с добавлением в неё небольшого количество полимеров. В таких средах равновесное состояние устанавливается не мгновенно после изменения внешних условий, а с некоторым запаздыванием, которое характеризуется значением времени релаксации. Это запаздывание объясняется процессами внутренней перестройки. Отметим, что первая теоретическая модель движения водного раствора полимеров, учитывающая их релаксационные свойства, была сформулирована в работах [1, 2], поэтому рассматриваемую в данной статье модель часто называют *моделью Павловского* [3–5].

В изучаемой модели используется реологическое соотношение со сглаженной объективной производной Яуманна (см. [6–8]), а также с дробной производной Капуто (см. [9, 10]). Заметим, что математические модели со сглаженной объективной производной Яуманна является частным случаем модели Ривлина–Эриксена для описания реологических свойств так называемых жидкостей второго порядка [11]. Модель Ривлина–Эриксена используется при расчёте выдавливания вязкоупругого полимера из экструдера на горизонтальную плоскость. Движения данных жидкостей описываются очень сложными системами уравнений, поэтому в настоящее время установлены только некоторые теоремы существования для локальных случаев или при малых данных. Наличие дробной производной Капуто обеспечивает учёт памяти жидкости. Интегральная модель учитывает все предшествующие состояния вязкоупругой среды, как бы далеко ни отстояли они от текущего момента времени. Такие модели используются при значительном влиянии эффектов памяти и большом времени релаксации. Цель данной статьи — исследовать вопрос слабой разрешимости начально-краевой задачи (1)–(4).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых вектор-функций с компактным носителем. Пусть множество $\mathcal{V}=\{v(x)=(v_1,\ldots,v_n)\in C_0^\infty(\Omega)\colon\ \operatorname{div} v=0\}$, V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, V^1 — замыкание по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ и $V^2=W_2^2(\Omega)\cap V^1$.

Введём шкалу пространств V^β (см. [12, § 4.2]), $\beta\in\mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P\colon L_2(\Omega)\to V^0$ и оператор $A=-P\Delta$, определённый на $D(A)=V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряжённым положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через $E_\infty=\bigl\{v=\sum_{j=1}^n v_je_j\colon v_j\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\bigr\}$ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^β, $\beta\in\mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\beta}=\bigl(\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^\beta|v_k|^2\bigr)^{1/2}$, где $v=\sum_{k=1}^\infty v_ke_k$. В [13, лемма 4.5] показано, что на пространстве V^β, $\beta>-1/2$, эта норма эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$. Через $V^{-\beta}=(V^\beta)^*$, $\beta\in\mathbb{N}$, будем обозначать сопряжённое пространство к V^β. Определим пространство, в котором будет доказана разрешимость задачи (1)–(4):

$$W_1=\{v\colon v\in L_\infty(0,T,V^1),\ \ v'\in L_2(0,T,V^{-1})\}.$$

Заметим, что для корректной постановки начально-краевых задач необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, другими словами, чтобы уравнение (1) имело единственное решение для поля скоростей v. Однако существование решений уравнения (2) при фиксированном v известно лишь в случае $v \in L_1(0,T;C(\overline{\Omega}))$, и это решение единственно для $v \in L_1(0,T;C(\overline{\Omega}))$ таких, что $v|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0$ (см., например, [14]). Поэтому даже для сильных решений, частные производные которых, входящие в уравнение (2), содержатся в $L_2(0,T,L_2(\Omega))$, траектории движения не определяются однозначно. Одно из возможных решений этой проблемы — регуляризация поля скоростей в каждый момент времени t с помощью усреднения по переменной x и определение траекторий $z(\tau,t,x)$ для регуляризованного поля скоростей (см. [15]). Однако в работах [16–18] была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (2) в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков — обобщения понятия классического решения.

Определение 1. *Регулярным лагранжевым потоком* (РЛП), порождённым v, называется функция $z(\tau,t,x)$, $(\tau,t,x) \in [0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для п.в. $x\in\overline{\Omega}$ и $t\in[0,T]$ функция $\gamma(\tau)=z(\tau,t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (2);

2) для любых $t,\tau\in[0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset\overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau,t,B))=m(B)$;

3) для всех $t_i\in[0,T]$, $i=1,2,3$, и п.в. $x\in\overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3;t_1,x)=z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x))$.

Теорема 1. *Пусть $v \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega))$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $\operatorname{div} v(t,x)=0$, $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$ и $v|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0$. Тогда существует единственный регулярный лагранжевый поток $z\in C(D;L)$, порождённый v, где $C(D;L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D=[0,T]\times\times[0,T]$ со значениями в метрическом пространстве L измеримых на Ω вектор-функций. Более того, $z(\tau;t,\overline{\Omega})\subset\overline{\Omega}$ с точностью до множества меры нуль и $\partial z(\tau;t,x)/\partial\tau=v(\tau,z(\tau;t,x))$, $t,\tau\in[0,T]$, при п.в. $x\in\Omega$.*

Таким образом, в силу теоремы 1 для каждого $v\in L_2(0,T;V^1)$ и для п.в. $x\in\Omega$ уравнение (2) имеет единственное решение $z(v)$ в классе РЛП. Сформулируем определение слабого решения для изучаемой начально-краевой задачи.

Определение 2. Пусть $f\in L_2(0,T;V^{-1})$ и $v_0\in V^1$. *Слабым решением начально-краевой задачи* (1)–(4) называется функция $v\in W_1$, удовлетворяющая при любом $\varphi\in V^3$ и при п.в. $t\in(0,T)$ равенству

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + \mu_1\int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi\,dx -$$

$$-\mu_1\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx - \mu_1\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx +$$

$$+2\mu_1\int_\Omega(\mathcal{E}(v)W_\rho(v)-W_\rho(v)\mathcal{E}(v)):\nabla\varphi dx +$$

$$+\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(v)(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) = \langle f,\varphi\rangle \qquad (5)$$

и начальному условию $v(0)=v_0$. Здесь $z(v)$ — РЛП, порождённый v. Для произвольных квадратных матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ используется символ $A:B=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и* $v_0 \in V^1$. *Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение* $v \in W_1$.

Доказательство теоремы основано на аппроксимационно-топологическом подходе к исследованию математических задач гидродинамики, разработанном проф. В.Г. Звягиным (см. [13]).

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2

Введём семейство вспомогательных задач: найти функцию $v \in W_2 = \{v\colon v \in C([0,T,V^3]),\ v' \in L_2(0,T,V^3)\}$, удовлетворяющую для любой $\varphi \in V^3$ и п.в. $t \in (0,T)$ начальному условию

$$v|_{t=0} = \xi v_0, \quad \xi \in [0,1], \quad v_0 \in V^3, \tag{6}$$

и равенству

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \xi\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + \mu_1\int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi\,dx -$$
$$-\varepsilon\int_\Omega \nabla\left(\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx - \xi\mu_1\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx -$$
$$-\xi\mu_1\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx + 2\xi\mu_1\int_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx +$$
$$+\frac{\xi\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}\,\mathrm{Div}\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(v)(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) = \langle \xi f, \varphi\rangle. \tag{7}$$

Введём следующие операторы:

$$J\colon V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Jv,\varphi\rangle = \int_\Omega v\varphi\,dx, \quad v,\varphi \in V^3;$$

$$A\colon V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Av,\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx, \quad v,\varphi \in V^1;$$

$$N\colon V^3 \to V^{-3}, \quad \langle Nv,\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx, \quad v,\varphi \in V^3;$$

$$B_1\colon L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(v),\varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B_2\colon V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_2(v),\varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^3;$$

$$B_3\colon V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_3(v),\varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^3;$$

$$B_4\colon V^1 \to V^{-3}, \quad \langle B_4(v),\varphi\rangle = \int_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^3;$$

$$C\colon V^1\times[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}\to V^{-1},\quad (C(v,z)(t),\varphi)=\left(\int\limits_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right),$$

$$v\in V^1,\quad z\in[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega},\quad \varphi\in V^3,\quad t\in(0,T);$$

$$L\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3,\quad L(v)=\big((J-\varepsilon N+\mu_1A)v'+\mu_0Av,v|_{t=0}\big);$$

$$K\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3,\quad K(v)=\big(B_1(v)+\mu_1B_2(v)+\mu_1B_3(v)-2\mu_1B_4(v),0\big);$$

$$G\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\quad G(v)=\left(\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\alpha)}C(v,z),0\right).$$

Таким образом, поиск решения уравнения (7), удовлетворяющего начальному условию (6), эквивалентен нахождению решения операторного уравнения

$$L(v)=\xi(K(v)-G(v)+(f,v_0)). \tag{8}$$

Лемма. *Справедливы следующие свойства:*

1) оператор $L\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ *обратим и обратный оператор непрерывен;*

2) оператор $K\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ *компактен;*

3) отображение $C\colon W_2\to L_2(0,T;V^{-3})\times V^3$ *является* L*-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского.*

Для решений операторного равенства (8) справедливы следующие априорные оценки.

Теорема 3. *Если* $v\in W_2$ *— решение операторного уравнения (8) для некоторого* $\xi\in[0,1]$, *то справедливы оценки*

$$\varepsilon\|v\|^2_{C([0,T],V^3)}\leqslant C_1(\varepsilon),\quad \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant C_2, \tag{9}$$

$$\mu_1\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}\leqslant C_3,\quad \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_4. \tag{10}$$

В (9) $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Все решения уравнения (8) в силу априорных оценок (9) лежат в шаре $B_R\subset W_2$, а значит, определена степень для уплотняющих векторных полей (см. [19, 20]), отличная от нуля. Следовательно, существует хотя бы одно решение $v\in W_2$ уравнения (8) при $\xi=1$. Отсюда вытекает, что аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение.

В силу оценок (10) получаем сходимости: $v_m\rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$, $v_m\rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^1)$, $v_m'\rightharpoonup v_*'$ слабо в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m\to+\infty$. Сильную сходимость $v_m\to v_*$ в $C([0,T],L_4(\Omega))$ получаем в силу теоремы Симона. В работах [17, 18] установлена следующая сходимость РЛП: последовательность $z^m(\tau;t,x)$ сходится к $z(\tau;t,x)$ по мере Лебега на множестве $[0,T]\times\Omega$ относительно (τ,x) равномерно по $t\in[0,T]$.

Используя полученные сходимости и переходя к пределу в интегральном равенстве (7) при $\xi=1$, получаем, что предельная функция v^* удовлетворяет интегральному равенству (5) и начальному условию $v(0)=v_0$. Это и завершает доказательство теоремы 2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10026).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Войткунский, Я.И. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств / И.Я. Войткунский, В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский // Тр. Ленинград. ордена Ленина кораблестроит. ин-та. — 1970. — Т. 69. — С. 19–26.
2. Павловский, В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В.А. Павловский // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.
3. Пухначев, В.В. О модели Войткунского–Амфилохиева–Павловского движения водных растворов полимеров / В.В. Пухначев, О.А. Фроловская // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. — 2018. — Т. 300. — С. 176–189.
4. Frolovskaya, O.A. Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions / O.A. Frolovskaya, V.V. Pukhnachev // Polymer. — 2018. — V. 10. — P. 684.
5. Звягин, А.В. Слабая разрешимость нелинейно-вязкой модели Павловского / А.В. Звягин // Изв. вузов. Математика. — 2022. — № 6. — С. 87–93.
6. Звягин, А.В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 245–249.
7. Звягин, А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 5. — С. 1066–1085.
8. Zvyagin, A.V. Attractors for model of polymer solutions motion / A.V. Zvyagin // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2018. — V. 38, № 12. — P. 6305–6325.
9. Звягин, А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта / А.В. Звягин // Изв. РАН. Сер. матем. — 2021. — Т. 85, № 1. — С. 66–97.
10. Звягин, А.В. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А.В. Звягин, Е.И. Костенко // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1710–1714.
11. Rivlin, R.S. Stress deformation relations for isotropic materials / R.S. Rivlin, J.L. Ericksen // Arch. Rational Mech. Anal. — 1955. — V. 4. — P. 323–425.
12. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 350 с.
13. Звягин, В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. — М. : КРАСАНД УРСС, 2012. — 416 с.
14. Orlov, V.P. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differ. Integral Equat. — 1991. — V. 4. — P. 103–115.
15. Звягин, В.Г. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 12. — С. 1633–1645.
16. DiPerna, R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.L. Lions // Invent. Math. — 1989. — V. 98, № 3. — P. 511–547.
17. Crippa, G. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow / G. Crippa, C. de Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616. — P. 15–46.
18. Crippa, G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields / G. Crippa // Boll. Unione Mat. Ital. — 2008. — V. 1, № 2. — P. 333–348.
19. Садовский, Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы / Б.Н. Садовский // Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, № 1. — С. 81–146.
20. Дмитриенко, В.Т. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений / В.Т. Дмитриенко, В.Г. Звягин // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 801–812.

ON WEAK SOLVABILITY OF MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING THE MOTION OF POLYMER SOLUTIONS WITH MEMORY

A. V. Zvyagin[1], M. I. Strukov[2]

Voronezh State University, Russia
e-mail: [1]zvyagin.a@mail.ru, [2]mixail.strukov12@gmail.com

The weak solvability of the initial-boundary value problem describing the motion of weakly concentrated aqueous polymer solutions taking into account the memory of the fluid is considered in the paper. In this model the memory is considered along the trajectory of fluid particles, determined by the velocity field. The topological approximation approach and the theory of regular Lagrangian flows are used.

Keywords: weak solution, existence theorem, viscoelastic fluid

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23–71–10026).

REFERENCES

1. Voitkunskii, Y.I., Amfilokhiev, V.B., and Pavlovskii, V.A., Equations of motion of a fluid, with its relaxation properties taken into account, *Trudy Leningrad. Korablestr. Inst.*, 1970, vol. 69, pp. 19–26.
2. Pavlovskii, V.A., Theoretical description of weak aqueous polymer solutions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1971, vol. 200, pp. 809–812.
3. Pukhnachev, V.V. and Frolovskaya, O.A., On the Voitkunskii–Amfilokhiev–Pavlovskii model of motion of aqueous polymer solutions, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, pp. 168–181.
4. Frolovskaya, O.A. and Pukhnachev, V.V., Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions, *Polymer*, 2018, vol. 10, p. 684.
5. Zvyagin, A.V., Weak solvability of the nonlinearly viscous Pavlovskii model, *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 6, pp. 73–78.
6. Zvyagin, A.V., Optimal control problem for a stationary model of low concentrated aqueous polymer solutions, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 246–250.
7. Zvyagin, A.V., Study of solvability of a thermoviscoelastic model describing the motion of weakly concentrated water solutions of polymers, *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 5, pp. 843–859.
8. Zvyagin, A.V., Attractors for model of polymer solutions motion, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, vol. 38, no. 12, pp. 6305–6325.
9. Zvyagin, A.V., Investigation of the weak solubility of the fractional Voigt alpha-model, *Izv. Math.*, 2021, vol. 85, no. 1, pp. 61–91.
10. Zvyagin, A.V. and Kostenko, E.I., On the existence of feedback control for one fractional Voigt model, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1778–1783.
11. Rivlin, R.S. and Ericksen, J.L., Stress deformation relations for isotropic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1955, vol. 4, pp. 323–425.
12. Fursikov, A.V., *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*, Providence: Amer. Math. Soc., 2000.
13. Zvyagin, V.G. and Turbin, M.V., *Matematicheskiye voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* (Mathematical Questions in the Hydrodynamics of Viscoelastic Media), Moscow: KRASAND URSS, 2012.
14. Orlov, V.P. and Sobolevskii, P.E., On mathematical models of a viscoelasticity with a memory, *Differ. Integral Equat.*, 1991, vol. 4, pp. 103–115.
15. Zvyagin, V.G. and Dmitrienko, V.T., On weak solutions of a regularized model of a viscoelastic fluid, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1731–1744.
16. DiPerna, R.J. and Lions, P.L., Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.*, 1989, vol. 98, no. 3, pp. 511–547.
17. Crippa, G. and de Lellis, C., Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow, *J. Reine Angew. Math.*, 2008, vol. 616, pp. 15–46.
18. Crippa, G., The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 333–348.
19. Sadovskii, B.N., Limit-compact and condensing operators, *Russ. Math. Surv.*, 1972, vol. 27, no. 1, pp. 85–155.
20. Dmitrienko, V.T. and Zvyagin, V.G., Homotopy classification of a class of continuous mappings, *Math. Notes*, 1982, vol. 31, no. 5, pp. 404–410.