ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1553–1561

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.65+517.938

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ В ЗАДАЧАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ

А. Н. Канатников[1], О. С. Ткачева[2]

[1,2]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
[2]Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва
e-mail: [1]skipper@bmstu.ru, [2]tkolga17@gmail.com

Поступила в редакцию 26.05.2024 г., после доработки 13.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

При численном решении задачи локализации основная проблема состоит в построении универсального сечения, отвечающего данной локализирующей функции. Предложены два метода решения этой проблемы, в которых использованы оценки производных первого и второго порядков. Проведён сравнительный анализ этих методов с методом, основанным на использовании всех узлов регулярной сетки. Он показал, что предложенные методы выигрывают и по вычислительной сложности, и по качеству полученной аппроксимации универсального сечения.

Ключевые слова: локализирующее множество, инвариантный компакт, универсальное сечение, аппроксимация

DOI: 10.31857/S0374064124110107, EDN: JDQQEW

ВВЕДЕНИЕ

При качественном анализе динамических систем хорошо зарекомендовал себя функциональный метод локализации, который позволяет строить в фазовом пространстве системы множество, содержащее все инвариантные компакты. Такое множество называют *локализирующим* [1, 2].

Инвариантными компактами являются многие характерные структуры фазового портрета системы: положения равновесия, предельные циклы, инвариантные торы, гомоклинические и гетероклинические траектории, аттракторы и репеллеры. Для динамической системы, описываемой автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, простейшим инвариантным компактом является ограниченная траектория с присоединёнными к ней α- и ω-предельными множествами.

Построение локализирующих множеств позволяет получить оценки колебательных и других сложных движений системы. Фактически такое множество разделяет фазовое пространство на область сложной динамики и область простой динамики [3, 4]. С помощью функционального метода локализации можно проводить анализ положений равновесия на устойчивость, важный в критическом случае [5], а также строить функцию Ляпунова для устойчивых положений равновесия [6]. Он, по существу, является топологическим и может использоваться для динамических систем самых разных типов: нестационарных систем [7], систем дискретного времени [8], систем с управлением и/или возмущением [9] разрывных систем и дифференциальных включений [10].

С помощью функционального метода локализации был исследован ряд динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые относятся к разным отраслям науки (см., например, [11–15]). Особенностью выполненных исследований является то, что все выкладки проведены чисто аналитически. В процессе построения локализирующего множества необходимо решить так называемую ассоциированную задачу на экстремум [1, 2], что не всегда можно сделать аналитически. Возникает проблема применения численных методов построения локализирующих множеств. Это особенно актуально при использовании итерационной процедуры, в которой на каждой итерации локализирующее множество уточняется применением новой локализирующей функции [1, 2]. При этом ассоциированная задача на условный экстремум с каждой итерацией усложняется.

Тему численных методов в задачах локализации затрагивает статья [16], где эти задачи исследовались при анализе асимптотической устойчивости положений равновесия.

Настоящая работа посвящена развитию и уточнению численных методов решения задач локализации. В п. 1 приведены основные сведения о функциональном методе локализации. В п. 2 описана численная процедура исследования положения равновесия на устойчивость с использованием этого метода. Пример численного построения универсального сечения с помощью трёх алгоритмов и сравнительный анализ результатов моделирования приведены в п. 3.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим динамическую систему, описываемую автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),$$

где $\dot{x} = dx/dt$, $x \in \mathbb{R}^n$; $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *инвариантным* для системы $\dot{x} = f(x)$, если вместе с любой точкой $x_0 \in K$ оно содержит и всю траекторию системы, проходящую через эту точку (под траекторией системы понимаем решение системы, определённое на максимальном интервале времени).

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Множество

$$S(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \dot{\varphi}(x) = 0\},$$

где $\dot{\varphi}(x)$ — производная функции φ в силу системы, называется *универсальным сечением*, соответствующим функции φ (это множество пересекается с любым инвариантным компактным множеством).

Для любого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим значения

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf\{\varphi(x)\colon x \in Q \cap S(\varphi)\}, \qquad \varphi_{\sup}(Q) = \sup\{\varphi(x)\colon x \in Q \cap S(\varphi)\}. \tag{1}$$

Теорема 1 [1, 2]. *Для любой функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ все инвариантные компакты, целиком содержащиеся в множестве Q, также содержатся в множестве*

$$\Omega(\varphi, Q) = \{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Множество $\Omega(\varphi, Q)$ будем называть *локализирующим множеством, соответствующим функции φ.*

Построение локализирующего множества связано с поиском значений (1), что можно сформулировать следующим образом:

$$\varphi(x) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{\varphi}(x) = 0, \quad x \in Q.$$

Однако следует уточнить, что в этой задаче в общем случае речь идёт не о поиске точек условного экстремума (соответствующую задачу обычно записывают так же), а о нахождении точных верхней и нижней граней функции на поверхности (кривой) $S(\varphi)$ с ограничением $x \in Q$.

Сформулируем простейшие свойства локализирующих множеств:

1) пересечение любого семейства локализирующих множеств является локализирующим множеством, т.е. содержит в себе все инвариантные компакты;

2) если функция $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и $\psi(x) = h(\varphi(x))$, то $S(\psi) \supset S(\varphi)$ и $\Omega(\psi, Q) \supset \Omega(\varphi, Q)$;

3) если функция φ достигает глобального (т.е. в $\mathbb{R}^n$) максимума (минимума) в точке $x_0 \in \in Q$, то неравенство $\varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)$ (неравенство $\varphi(x) \geqslant \varphi_{\inf}(Q)$) тривиально, т.е. выполняется на всём множестве Q.

Теорема 2 (итерационная процедура [1, 2]). *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ и $\{\varphi_n\}$ — последовательность непрерывно дифференцируемых функций, определённых на $\mathbb{R}^n$. Положим $K_0 = Q$, $K_m = \Omega(\varphi_m, K_{m-1})$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_m \supset \ldots$ и все инвариантные компакты системы, содержащиеся в Q, содержатся в множестве $K_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$.*

Можно выделить две тактики применения функционального метода локализации. При первой тактике выбирается некоторое семейство локализирующих функций (например, включением в выражение, определяющее функцию, одного или нескольких параметров). Для каждой локализирующей функции строится локализирующее множество, а затем находится пересечение всех найденных локализирующих множеств. При второй тактике используется последовательность локализирующих функций, возможно, повторяющихся. На каждом шаге итерационной процедуры учитывается уже найденное локализирующее множество.

Если при первой тактике мы имеем дело с ассоциированной задачей на условный экстремум, в которой, как правило, отсутствуют ограничения типа неравенств, то при второй тактике они появляются и их количество от шага к шагу может расти. Решать задачу на условный экстремум аналитически в первом случае проще, однако вторая тактика потенциально точнее, поскольку каждое новое локализирующее множество строится на базе уже найденного локализирующего множества.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ

При построении локализирующего множества с точки зрения численных методов ключевой является ассоциированная задача на условный экстремум. Её решение численно возможно, если множество $S(\varphi) \cap Q$ является ограниченным. В этом случае функция φ достигает своих точных верхней и нижней граней на этом множестве или на его границе. Эти значения можно вычислить приближённо, взяв значение в близкой точке. Если же множество $S(\varphi) \cap Q$ не ограничено, то точная верхняя или точная нижняя грани могут быть бесконечными или достигаться по последовательности, уходящей в бесконечность. Сам факт неограниченного возрастания значений функции или её аргументов установить численными методами не представляется возможным. Следовательно, и приближённое значение точной верхней или точной нижней грани в этой ситуации найти не удастся.

Если множество $S(\varphi) \cap Q$ ограничено, то можно попытаться представить его некоторым конечным множеством точек (назовём его *аппроксимирующим множеством* или *аппроксимацией*). Тогда задача сводится к поиску максимума или минимума функции по конечному множеству значений. Указанное аппроксимирующее множество должно быть ε-сетью множества $S(\varphi) \cap Q$, т.е. любая точка множества $S(\varphi) \cap Q$ должна быть на расстоянии не более ε от аппроксимирующего множества, что позволяет, исходя из непрерывности локализирующей функции, контролировать точность найденных экстремальных значений (1). Отметим, что при этом взаимное расположение точек представляющего множества не является существенным.

В работе [16] предложен численный алгоритм построения аппроксимирующего множества, который состоит в построении сетки точек $\{x_j\} \subset Q$, покрывающих ограниченное множество Q. Для каждой точки x_j численно решается уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$ и в итерационном процессе такого решения точка x_j выполняет роль начального значения. Для решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ выбран известный метод Левенберга–Марквардта, поскольку уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$ — пример вырожденной задачи поиска нулей функции: количество неизвестных превышает количество уравнений.

В результате решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ с различными начальными условиями x_j будет получен набор точек $\{\hat{x}_j\}$, которые можно считать лежащими на универсальном сечении (допуск определяется точностью, с которой решается уравнение). Этот набор точек рассматривается как аппроксимирующее множество для универсального сечения. Если итерационный процесс для данного узла x_j не сходится, то точка в аппроксимирующее множество не добавляется. Итерационный процесс также может вывести за пределы множества Q, и в этом случае точка в аппроксимирующее множество не добавляется. Таким образом, не каждой точке x_j сетки на Q соответствует точка $\hat{x}_j$ аппроксимирующего множества.

При численной реализации итерационной процедуры с использованием некоторого конечного циклически повторяющегося набора функций аппроксимирующие множества для универсальных сечений можно рассчитать один раз для исходного ограничивающего множества $K_0=Q$. На каждом m-м шаге итерационной процедуры достаточно выбрать одно из заранее рассчитанных аппроксимирующих множеств и отбросить точки, не попадающие в очередное множество K_{m-1}. В результате получим аппроксимирующее множество для $S(\varphi_m)\cap K_{m-1}$.

Предложенный численный метод оказался рабочим в рамках задач по анализу асимптотической устойчивости положений равновесия автономной системы [16]. Однако он не был обоснован, а его применение выявило два заметных недостатка.

Во-первых, данный метод имеет заметную вычислительную сложность. Например, если Q — единичный параллелепипед, на котором построена сетка с шагом $\delta=0.01$, то число точек x_j, для которых решается уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$, равно 100^n, где n — размерность системы. Мы имеем очень много итерационных процессов, каждый из которых требует времени. Однако из геометрических соображений ясно, что количество точек аппроксимирующего множества должно быть порядка 100^{n-1}. Видно, что вычислительная сложность описанного алгоритма избыточна. Напрашивается идея фильтра, который бы отбрасывал узлы сетки, находящиеся далеко от универсального сечения.

Во-вторых, даже в двумерном случае можно заметить, что набор точек $\{\hat{x}_j\}$, полученных в процессе решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$, неоднороден: в каких-то областях их много, а в каких-то не хватает (рис. 1). Неоднородность, с одной стороны, увеличивает объём вычислений, поскольку в аппроксимирующем множестве есть ненужные, слишком близкие друг к другу точки, а с другой — уменьшает точность, так как экстремальные значения могут быть в областях, где точек аппроксимирующего множества мало и расстояния между ними велики.

Существует, по-видимому, много способов построить аппроксимирующее множество для универсального сечения. В данной работе мы сохраняем идею описанного выше метода, но дополнительно используем фильтр, который проверяет, есть ли точки универсального сечения, достаточно близкие к очередному узлу x_j сетки на Q. Если некоторая окрестность точки x_j не пересекается с универсальным сечением, то итерационный процесс решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ не запускается и точка x_j не используется для построения аппроксимирующего множества. Это позволяет сократить количество итерационных процессов при построении аппроксимирующего множества и уменьшить количество шагов в каждом ите-

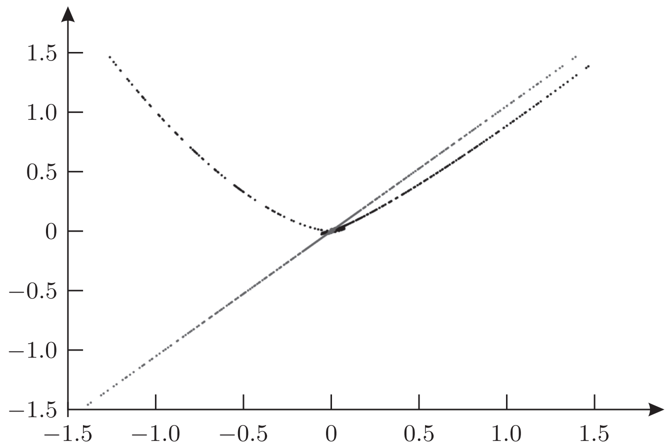

Рис. 1. Неоднородность множества точек аппроксимации универсального сечения

рационном процессе. Вряд ли существует способ оценить сверху расстояние от данной точки до множества $S(\varphi)\cap Q$. Но оценку снизу получить удаётся.

Далее для $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^n$ используем нормы

$$\|x\|_{h1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{h_i},\quad \|x\|_{hm}=\max_{i=\overline{1,\,n}}h_i|x_i|,$$

где $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)^{\text{т}}$, $h_i>0$, $i=\overline{1,\,n}$ (h — набор шагов регулярной сетки).

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируема в выпуклой области D и $M=\sup_{x\in D}\|f'(x)\|_{hm}<+\infty$. Пусть x_0 — точка множества $\{x\in D\colon f(x)=0\}$, ближайшая к точке $x\in D$. Тогда $|f(x)|\leqslant M\|x-x_0\|_{h1}$.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,1]$ функцию $g(t)=f(x_0+t(x-x_0))$. По теореме Лагранжа $g(1)-g(0)=g'(\theta)$. Переходя к функции f, получаем, что $f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$, где $f'(x)=\operatorname{grad}f(x)$ — вектор-строка частных производных функции f. Так как $f(x_0)=0$, то

$$|f(x)|=|f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)|\leqslant\|f'(x_0+\theta(x-x_0))\|_{hm}\,\|x-x_0\|_{h1}\leqslant M\|x-x_0\|_{h1}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что если $|f(x)|>M\varepsilon$, то в ε-окрестности точки x по норме $\|\cdot\|_{h1}$ нет нулей функции $f(x)$. На практике в качестве M можно взять максимум функции $\|f'(x)\|_{hm}$ по всем узлам сетки. Так как функция $\|f'(x)\|_{hm}$ непрерывна, точность такого приближения контролируется шагом сетки.

На основании полученной оценки можно предложить следующий алгоритм построения аппроксимирующего множества для универсального сечения $S(\varphi)$ функции φ, который обозначим $\hat{S}(\varphi)$. Полагаем, что исходное ограничивающее множество Q является параллелепипедом и задано неравенствами $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $i=\overline{1,\,n}$, которые удобно представить в векторной форме: $a\leqslant x\leqslant b$ (векторное неравенство выполняется поэлементно). Введём также обозначения: $i=(i_1, i_2, \ldots, i_n)^{\text{т}}$ — мультииндекс; $x*y$ — поэлементное умножение вектор-столбцов x и y.

1. Построим сетку $\{x^i\}$, где $x^i=a+i*h$, h — вектор-столбец шагов сетки.
2. Вычислим $M=\max\|\operatorname{grad}\dot\varphi(x^i)\|_{h1}$.
3. Для каждой точки x^i вычислим значение $f=|\dot\varphi(x^i)|$. Если $f>M$, то точку x^i пропускаем. Иначе решаем уравнение $\dot\varphi(x)=0$, используя точку x^i как начальную.

4. Если итерационный метод решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ не дал результата, т.е. решение x^* не найдено или $|f(x^*)|>\delta$ (δ — параметр алгоритма), то точку x^i пропускаем. Иначе точку x^* включаем в множество $\hat{S}(\varphi)$.

Критерий удалённости точек от универсального сечения, предложенный выше, основан на верхней границе для частных производных функции $\dot{\varphi}$ первого порядка. Можно получить более точный критерий, основанный на верхней границе частных производных второго порядка.

Рассмотрим некоторый узел x^i сетки в области и единичный шар $\|x-x^i\|_{h1}\leqslant 1$ — многогранник в $\mathbb{R}^n$, вершинами которого являются точки $x^i\pm h_je_j$, $j=\overline{1,\,n}$, где e_j — j-й вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Если непрерывная функция f в вершинах многогранника принимает значения разных знаков, то внутри многогранника или на его границе есть нули функции f. Таким образом, условие одинаковых знаков в вершинах многогранника является необходимым условием отсутствия нулей функции f в многограннике.

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в Q и

$$M_2=\sup_{x\in Q}\|f''(x)\|_{hm}=\sup_{x\in Q}\max_{i,j}\Big|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j\Big|,$$

где $f''(x)$ — матрица Гессе функции f в точке x.

Теорема 4. *Если функция f в точке x^i и в вершинах многогранника $\|x-x^i\|_{h1}\leqslant 1$ принимает значения одного знака и $|f(x^i)|>M_2/2$, то в указанном многограннике нет нулей функции f.*

Доказательство. Пусть для определённости все значения функции f в точке x^i и в вершинах многогранника положительны (иначе можно рассмотреть функцию $-f$). Предположим, что в многограннике есть точки с отрицательным или нулевым значением. Тогда функция внутри многогранника или на его границе достигает наименьшего значения в некоторой точке x^*. Если x^* — внутренняя точка многогранника, то, полагая $\Delta x=x-x^*$, запишем в точке x^* формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)\Delta x+\frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x=f(x^*)+\frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x$$

(так как $f'(x^*)=0$ в силу того, что x^* — точка локального минимума). Имеем

$$|\Delta x^{\mathrm{T}}f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x|\leqslant\|\Delta x\|_{h1}\|f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x\|_{hm}\leqslant\|f''(x^*+\theta\Delta x)\|_{hm}\|\Delta x\|^2_{h1}\leqslant M_2\|\Delta x\|^2_{h1}.$$

Следовательно, $|f(x)-f(x_*)|\leqslant 0.5M_2\|\Delta x\|^2_{h1}$, откуда $|f(x)|\leqslant 0.5M_2\|\Delta x\|^2_{h1}$. Выбрав в качестве x вершину многогранника, ближайшую к точке x^*, приходим к нужному утверждению.

Если минимум достигается на какой-то грани, то рассматриваем функцию только на этой грани и повторяем рассуждения. Так как частные производные сужения функции на грань выражаются в виде выпуклых комбинаций через частные производные функции f, получаем ту же оценку. Теорема доказана.

3. СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ ВАРИАНТОВ АЛГОРИТМА

Для анализа вариантов алгоритма построения аппроксимирующего множества для универсального сечения рассмотрим систему из работы [16]:

$$\dot{x}=-(2x-y)(3x-y)(4x-y),\quad \dot{y}=(x-3y)(x-4y)(x-5y).$$

Эта система имеет одно положение равновесия $E=(0,\,0)$, окрестность которого и рассмотрим. В качестве исходного ограничивающего множества Q выберем прямоугольник

$[-1.5, 1.5]\times[-1.5, 1.5]$. Возьмём локализирующие функции $\varphi_1(x,y)=y-x^2$, $\varphi_2(x,y)=y-5.5x$. Для численного построения универсального сечения в Q выберем регулярную сетку с 51 узлом по каждой оси, т.е. всего 2601 узел. Для оценки качества полученного приближения универсального сечения рассчитаем минимальное $\rho_{\min}$ и максимальное $\rho_{\max}$ расстояния между ближайшими точками, а именно, если $\{x_j\}$ — последовательность узлов сетки, то

$$\rho_{\min}=\min_i \min_j |x_j-x_i|, \qquad \rho_{\max}=\max_i \min_j |x_j-x_i|,$$

где $|x|$ — длина (евклидова норма) вектора x.

Результаты расчётов по трём вариантам алгоритма приведены в таблице: алгоритм 0 — без использования фильтра узлов сетки (метод из [16]); алгоритм 1 — с фильтром на основе частных производных первого порядка функции $\dot\varphi$ (в соответствии с теоремой 3, фильтр 1-го порядка); алгоритм 2 — с фильтром на основе частных производных второго порядка (в соответствии с теоремой 4, фильтр 2-го порядка). Видно, что и в случае фильтра 1-го порядка, и в случае фильтра 2-го порядка отбрасывается заметное число узлов, что приводит к существенному ускорению расчёта, но фильтр 2-го порядка более эффективен.

Таблица. Сравнение результатов расчёта по трём вариантам алгоритма при числе узлов 2601

Вариант алгоритма	Локализирующая функция	Число отфильтрованных узлов	$\rho_{\min}$	$\rho_{\max}$	Время, с
Алгоритм 0	$y-x^2$ $y-5.5x$	0 0	$2.6\cdot10^{-7}$ $1.6\cdot10^{-6}$	0.014 0.015	2.85
Алгоритм 1	$y-x^2$ $y-5.5x$	979 1254	$2.5\cdot10^{-7}$ $1.5\cdot10^{-6}$	0.028 0.015	1.55
Алгоритм 2	$y-x^2$ $y-5.5x$	2084 2322	$3.2\cdot10^{-6}$ $0.1\cdot10^{-4}$	0.053 0.043	0.41

Следует отметить, что оба фильтра отрабатывают не в полной мере: итерационный процесс решения уравнения запускался для многих узлов, около которых нет точек универсального сечения. Связано это с тем, что оценки, полученные в теоремах 3 и 4, основаны на оценке производных по всей области, а такая оценка в одних частях области оказывается не столь точной, как в других. На рис. 2 показаны результаты работы фильтров для первой локализирующей функции: узлы, в которых запускался итерационный процесс решения

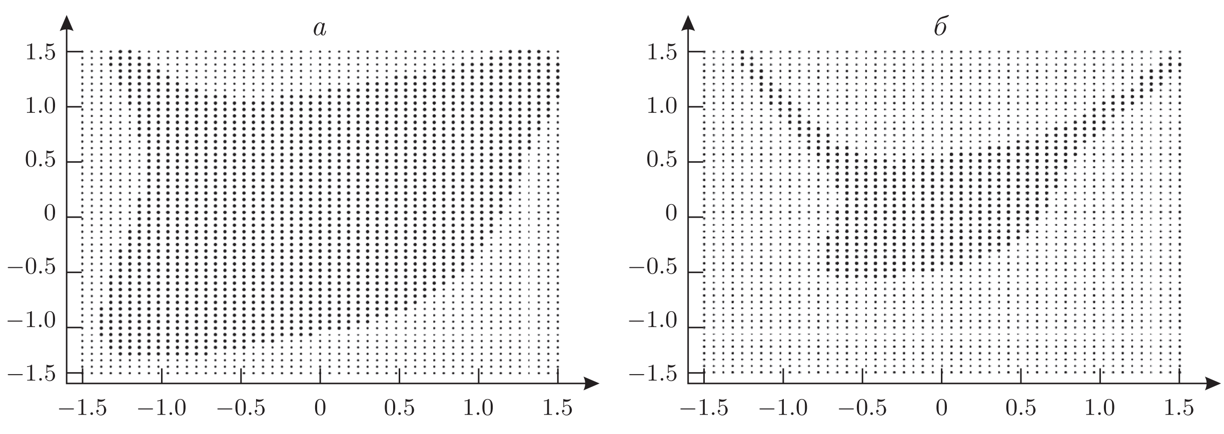

Рис. 2. Результаты фильтрации с помощью фильтров 1-го порядка (*а*) и 2-го порядка (*б*)

уравнения $\dot{\varphi}(x) = 0$, выделены бо́льшими точками. Видно, что "паразитные" узлы сосредоточены в окрестности нуля, т.е. там, где производные анализируемой локализирующей функции по абсолютной величине невелики.

Описанная особенность заметно сказывается на эффективности алгоритма, однако имеется ресурс для усиления. Во-первых, в теоремах 3 и 4 можно использовать оценки производных не по всей области, а по некоторой окрестности текущего узла (например, по всем узлам, отстоящим от текущего не далее чем на $2h$). Во-вторых, даже начав итерационный процесс решения уравнения $\dot{\varphi}(x) = 0$, можно его прервать, если очередной член итерационной последовательности удалился от текущего узла слишком далеко.

"Паразитные" узлы вызывают ещё одну проблему. В полученной аппроксимации универсального сечения слишком много точек и находятся они слишком близко друг к другу (см. таблицу), хотя было бы разумно, чтобы расстояния между соседними точками были того же порядка, что и шаг сетки. Эту проблему можно решить, организовав ещё один фильтр, который проверяет пары близких точек и, если расстояние между ними меньше некоторого предела, удаляет одну из них. Расчёты показывают, что подобный фильтр достаточно эффективен и заметно выравнивает расстояния между близкими точками.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крищенко, А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1597–1604.
2. Канатников, А.Н. Инвариантные компакты динамических систем / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 231 с.
3. Канатников, А.Н. Локализирующие множества и поведение траекторий / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2016. — Т. 470, № 2. — С. 133–136.
4. Крищенко, А.П. Локализация простой и сложной динамики в нелинейных системах / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1440–1447.
5. Крищенко, А.П. Анализ асимптотической устойчивости автономных систем методом локализации инвариантных компактов / А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2016. — Т. 469, № 1. — С. 17–20.
6. Крищенко, А.П. Построение функций Ляпунова методом локализации инвариантных компактов / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1447–1452.
7. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов неавтономных систем / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 47–53.
8. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов дискретных систем / А.Н. Канатников, С.К. Коровин, А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2010. — Т. 431, № 3. — С. 323–325.
9. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов непрерывных систем с возмущением / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2012. — Т. 446, № 1. — С. 30–32.
10. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов в дифференциальных включениях / А.Н. Канатников // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1433–1439.
11. Крищенко, А.П. Бифуркация Хопфа в системе хищник–жертва с инфекцией / А.П. Крищенко, О.А. Поддерегин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1566–1570.
12. Coria, L.N. Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor system / L.N. Coria, K.E. Starkov // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2009. — V. 14, № 11. — P. 3879–3888.
13. Starkov, K.E. Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems / K.E. Starkov // Phys. Lett. A. — 2011. — V. 375, № 36. — P. 3184–3187.
14. Starkov, K.E. Eradication conditions of infected cell populations in the 7-order HIV model with viral mutations and related results / K.E. Starkov, A.N. Kanatnikov // Mathematics. — 2021. — V. 9, № 16. — Art. 1862.

15. Starkov, K.E. On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model / K.E. Starkov, A.P. Krishchenko // Mathematics. — 2024. — V. 12, № 6. — Art. 843.
16. Воркель, А.А. Численное исследование асимптотической устойчивости положений равновесия / А.А. Воркель, А.П. Крищенко // Математика и мат. моделирование. — 2017. — № 3. — С. 44–63.

ON NUMERICAL METHODS IN LOCALIZATION PROBLEMS

© 2024 / **A. N. Kanatnikov[1], O. S. Tkacheva[2]**

[1,2]Bauman Moscow State Technical University, Russia
[2]V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
e-mail: [1]skipper@bmstu.ru, [2]tkolga17@gmail.com

When solving localization problem numerically, the main problem is to construct a universal cross section corresponding to a given localizing function. The paper proposes two methods for solving this problem, which use estimates of the first and second order derivatives. A comparative analysis of these methods with a method based on the use of all nodes of a regular grid was carried out. A comparative analysis shows that the proposed methods are superior both in terms of computational complexity and in the quality of the resulting approximation of the universal section.

Keywords: localizing set, invariant compact set, universal cross section, approximation

REFERENCES

1. Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676.
2. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., *Invariantnye kompakty dinamicheskikh sistem* (Invariant Compact Sets of Dynamical Systems), Moscow: Izd. MGTU im. N.E. Baumana, 2011.
3. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., Localizing sets and trajectory behavior, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 2, pp. 506–509.
4. Krishchenko, A.P., Localization of simple and complex dynamics in nonlinear systems, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1432–1439.
5. Krishchenko, A.P., Asymptotic stability analysis of autonomous systems by applying the method of localization of compact invariant sets, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 1, pp. 365–368.
6. Krishchenko, A.P., Construction of Lyapunov functions by the method of localization of invariant compact sets, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1413–1418.
7. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of nonautonomous systems, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 46–52.
8. Kanatnikov, A.N., Korovin, S.K., and Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of discrete systems, *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 326–328.
9. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., Localization of compact invariant sets of continuous-time systems with disturbance, *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 720–722.
10. Kanatnikov, A.N., Localization of invariant compact sets in differential inclusions, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1425–1431.
11. Krishchenko, A.P. and Podderegin, O.A., Hopf bifurcation in a predator–prey system with infection, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1573–1578.
12. Coria, L.N. and Starkov, K.E., Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor system, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, no. 11, pp. 3879–3888.
13. Starkov, K.E., Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A.*, 2011, vol. 375, no. 36, pp. 3184–3187.
14. Starkov, K.E. and Kanatnikov, A.N., Eradication conditions of infected cell populations in the 7-order HIV model with viral mutations and related results, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 16, art. 1862.
15. Starkov, K.E. and Krishchenko, A.P., On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 6, art. 843.
16. Vorkel', A.A. and Krishchenko, A.P., Numerical analysis of asymptotic stability of equilibrium points, *Mathematics Math. Model.*, 2017, no. 3, pp. 44–63.