ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1685–1702

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО НЕНУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

 С. Н. Тимергалиев

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

e-mail: samat_tim@mail.ru

Поступила в редакцию 25.01.2024 г., после доработки 27.09.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследуется разрешимость краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих непологих неоднородных изотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесённых к изометрическим координатам. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжимающих отображений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными, обобщённое решение, теорема существования

DOI: 10.31857/S0374064124120088, EDN: IPANHD

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача нахождения решений в плоской односвязной ограниченной области Ω системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$(DT^{j\lambda})_{\alpha^\lambda}+DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}-DB^j_\lambda(T^{\lambda\mu}\upsilon_\mu+T^{\lambda 3})+DR^j=0,\quad j=1,2,$$

$$(DT^{\lambda\mu}\upsilon_\mu)_{\alpha^\lambda}+(DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda}+DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}+DR^3=0,$$

$$(DM^{j\lambda})_{\alpha^\lambda}-DT^{j3}+DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu}+DL^j=0,\quad j=1,2, \tag{1}$$

удовлетворяющих на границе Γ области Ω условиям

$$D(T^{j1}d\alpha^2/ds-T^{j2}d\alpha^1/ds)=P^j(s),\quad j=1,2,$$

$$D(T^{13}d\alpha^2/ds-T^{23}d\alpha^1/ds)+D(T^{1\lambda}d\alpha^2/ds-T^{2\lambda}d\alpha^1/ds)\upsilon_\lambda=P^3(s),$$

$$D(M^{j1}d\alpha^2/ds-M^{j2}d\alpha^1/ds)=N^j(s),\quad j=1,2. \tag{2}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения: $T^{ij}\equiv T^{ij}(\gamma)=D^{ijkn}_{\lambda-1}\gamma^{\lambda-1}_{kn}$, $M^{ij}\equiv M^{ij}(\gamma)=$ $=D^{ijkn}_{\lambda}\gamma^{\lambda-1}_{kn}$, $\gamma=(\gamma^0,\gamma^1)$, $\gamma^k=(\gamma^k_{11},\gamma^k_{12},\gamma^k_{13},\gamma^k_{22},\gamma^k_{23},\gamma^k_{33})$, $k=0,1$;

$$D^{ijkn}_m=D^{ijkn}_m(\alpha^1,\alpha^2)=\int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2}B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)(\alpha^3)^m\,d\alpha^3,\quad m=\overline{0,2},\quad i,j,k,n=\overline{1,3};$$

$B^{1111}=B^{2222}=E/(1-\nu^2)$, $B^{1122}=\nu E/(1-\nu^2)$, $B^{1212}=E/(2(1+\nu))$, $B^{1313}=B^{2323}=E\kappa^2/(2(1+\nu))$; $\gamma_{jj}^0=w_{j\alpha^j}-G_{jj}^\lambda w_\lambda-B_{jj}w_3+\upsilon_j^2/2$, $j=1,2$; $\gamma_{12}^0=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}-2G_{12}^\lambda w_\lambda-2B_{12}w_3+\upsilon_1\upsilon_2$, $\gamma_{jj}^1=\psi_{j\alpha^j}-G_{jj}^\lambda\psi_\lambda$, $j=1,2$; $\gamma_{12}^1=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1}-2G_{12}^\lambda\psi_\lambda$, $\gamma_{j3}^0=\upsilon_j+\psi_j$, $j=1,2$; $\gamma_{33}^0\equiv 0$, $\gamma_{k3}^1\equiv 0$, $k=\overline{1,3}$; $\upsilon_j=w_{3\alpha^j}+B_j^\lambda w_\lambda$, $B_j^\lambda=A^{\lambda\mu}B_{\mu j}$, $A^{jj}=A_{3-j3-j}/D^2$, $j=1,2$; $A^{12}=A^{21}=-A_{12}/D^2$, $D^2=A_{11}A_{22}-A_{12}^2$; остальные B^{ijkn} равны нулю; $\alpha^j=\alpha^j(s)$ $(j=1,2)$ — уравнения кривой Γ, s — длина дуги Γ; нижний индекс α^λ означает дифференцирование по α^λ, $\lambda=1,2$.

Система (1) относительно функций w_1, w_2, w_3, ψ_1, ψ_2 является системой из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно ψ_1, ψ_2 и нелинейных относительно w_1, w_2, w_3. Совместно с граничными условиями (2) она описывает состояние равновесия упругой непологой изотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к криволинейной системе координат. При этом T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты; γ_{ij}^k $(i,j=\overline{1,3},\ k=0,1)$ — компоненты тензора деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, гомеоморфной области Ω; w_j $(j=1,2)$ и w_3 — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; ψ_i $(i=1,2)$ — углы поворота нормальных сечений S_0; B_{ij} $(i,j=1,2)$ — ковариантные компоненты тензора кривизны поверхности S_0, A_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0, G_{ij}^λ — символы Кристоффеля второго рода, которые в изометрической системе координат определяются формулами [2, с. 18]

$$A_{11}=A_{22}=\Lambda=\Lambda(\alpha^1,\alpha^2),\quad A_{12}=0,\quad D=\Lambda;$$
$$G_{jj}^1=(-1)^{j-1}\Lambda_{\alpha^1}/(2\Lambda),\quad G_{jj}^2=(-1)^j\Lambda_{\alpha^2}/(2\Lambda),\quad G_{12}^j=G_{21}^j=\Lambda_{\alpha^{3-j}}/(2\Lambda),\quad j=1,2; \tag{3}$$

R^j, P^j $(j=\overline{1,3})$, L^k, N^k $(k=1,2)$ — компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, κ^2 — коэффициент сдвига, $D=D(\alpha^1,\alpha^2)$ — якобиан; $h_0=\mathrm{const}$ — толщина оболочки; α^1, α^2 — декартовы координаты точек области Ω.

В (1), (2) и во введённых обозначениях (и в дальнейшем) по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим — от 1 до 2.

Разрешимость нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений теории упругих оболочек достаточно полно изучена в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява (см., например, работы [2–7] и библиографии в них) с использованием метода гильбертовых пространств, вариационных методов, теоремы о неявной функции. Эти же методы применялись к исследованию разрешимости нелинейных задач термоупругости для оболочек в рамках гипотез Григолюка–Чулкова [8, 9]. В то же время актуальными являются краевые задачи более сложных моделей теории оболочек [2, с. 349]. На сегодняшний день имеется ряд работ [10–15], в которых разрешимость нелинейных задач для упругих оболочек исследовалась в рамках сдвиговой модели Тимошенко. Для этого был предложен новый метод, основанный на сведении исходной нелинейной задачи к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве. В его основе лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные функции, в том числе произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений и линейным граничным условиям, выделенным специальным образом из исходной нелинейной задачи. В результате исходная нелинейная краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению с оператором, который представляется в виде суммы линейного и нелинейного операторов. При исследовании разрешимости нелинейного операторного уравнения наиболее существенным моментом является доказательство обратимости линейного оператора, которое зависит от физико-геометрических характеристик оболочки. Такой подход позволил доказать существование обобщённых решений нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко, отнесённых к евклидовой [10–13] и изометрической [14] системам координат, а также непологих оболочек типа Тимошенко нулевой гауссовой кривизны, отнесённых к евклидовой системе координат [15].

Настоящая статья посвящена исследованию нелинейных задач для непологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко ненулевой гауссовой кривизны. Исследования проведены в изометрических координатах и непосредственно развивают результаты работы [14]. Переход к непологим оболочкам ненулевой гауссовой кривизны, отнесённым к изометрическим координатам, усложняет систему дифференциальных уравнений равновесия оболочек и вносит существенные сложности в исследование разрешимости нелинейного операторного уравнения, связанные с доказательством обратимости линейного оператора.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(a) имеют место включения $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)\in(W_p^{(1)}(\Omega)\cap C_\beta(\overline{\Omega}))\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$, $i,j,k,n=\overline{1,3}$; $B_{\lambda\mu}(\alpha^1,\alpha^2)\in W_p^{(2)}(\Omega)$, $\lambda,\mu,k=1,2$;

(b) якобиан $D=\Lambda(\alpha^1,\alpha^2)>0$ в $\overline{\Omega}$ и $\Lambda(\alpha^1,\alpha^2)\in W_p^{(4)}(\Omega)$;

(c) гауссова кривизна $\kappa=(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)/\Lambda^2$ срединной поверхности оболочки не равна нулю в области $\overline{\Omega}$;

(d) компоненты внешних сил R^j $(j=\overline{1,3})$ и L^k $(k=1,2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j $(j=\overline{1,3})$, N^k $(k=1,2)$ — пространству $C_\beta(\Gamma)$, и внешние силы самоуравновешены;

(e) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma\in C_\beta^1$.

Здесь и далее $2<p<4/(2-\beta)$, $0<\beta<1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ *обобщённым решением задачи* (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ — пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$; здесь и везде далее $\alpha=(p-2)/p$. Заметим, что при $2<p<4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha<\beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k=e_{sij}^k+e_{cij}^k+\chi_{ij}^k,\quad i,j=\overline{1,3},\quad k=0,1, \tag{4}$$

где приняты обозначения: $e_{sjj}^0=w_{j\alpha^j}$, $e_{sj3}^0=w_{3\alpha^j}+\psi_j$, $e_{sjj}^1=\psi_{j\alpha^j}$, $j=1,2$; $e_{s12}^0=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}$, $e_{s12}^1=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1}$, $e_{cjj}^0=-G_{jj}^\lambda w_\lambda-B_{jj}w_3$, $e_{cjj}^1=-G_{jj}^\lambda\psi_\lambda$, $j=1,2$; $e_{c12}^0=-2G_{12}^\lambda w_\lambda-2B_{12}w_3$, $e_{c12}^1=-2G_{12}^\lambda\psi_\lambda$, $e_{cj3}^0=B_j^\lambda w_\lambda$, $\chi_{jj}^0=\upsilon_j^2/2$, $j=1,2$; $\chi_{12}^0=\upsilon_1\upsilon_2$, $\chi_{ij}^1=\chi_{j3}^0=e_{s33}^0=e_{sj3}^1=e_{c33}^k\equiv 0$, $i,j=\overline{1,3}$, $k=0,1$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Введём в рассмотрение комплексные функции

$$\begin{gathered}\omega_j=\omega_j(z)=D\big\{D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2})+D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2})+\\+i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1}-w_{1\alpha^2})+D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1}-\psi_{1\alpha^2})]\big\},\quad j=1,2,\quad z=\alpha^1+i\alpha^2.\end{gathered} \tag{5}$$

В системе (1) усилия T^{jk} и моменты M^{jk} запишем с учётом вида компонент деформаций γ_{jk}^n из (4). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвертому уравнению пятое, умноженное также на i, представим систему (1) с учётом функций $\omega_j(z)$ из (5) в удобной для дальнейших исследований форме:

$$\omega_{j\bar z}+h^j(a)=f_c^j(a)+f_\chi^j(a)-F^j(z),\quad j=1,2, \tag{6}$$

$$DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1}+w_{3\alpha^2\alpha^2})+h^3(a)=f_c^3(a)+f_\chi^3(a)-F^3(z),\quad z\in\Omega, \tag{7}$$

где приняты следующие обозначения: $\omega_{j\bar z}=(\omega_{j\alpha^1}+i\omega_{j\alpha^2})/2$, $j=1,2$; $h^j(a)=(-1)^{\mu-1}\times$ $\times[(DD^{1212}_{j+\lambda-2})_{\alpha^{3-\mu}}\nu_{\lambda 2\alpha^\mu}+i(DD^{1212}_{j+\lambda-2})_{\alpha^\mu}\nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}]-(j-1)DD_0^{1313}(e^0_{s13}+ie^0_{s23})/2$, $\nu_{1j}=w_j$, $\nu_{2j}=\psi_j$, $j=1,2$; $h^3(a)=(DD_0^{1313})_{\alpha^\lambda}w_{3\alpha^\lambda}+(DD_0^{1313}\psi_\lambda)_{\alpha^\lambda}$; $f_c^j(a)=(f_{c3j-2}+if_{c3j-1})/2$, $f_\chi^j(a)=(f_{\chi 3j-2}+$ $+if_{\chi 3j-1})/2$, $j=1,2$; $f_c^3(a)=f_{c3}(a)$, $f_\chi^3(a)=f_{\chi 3}(a)$, $f_{cj}(a)=-(DT^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda}-DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(e)+$ $+DB^j_\lambda T^{\lambda 3}(e)$, $f_{c3+j}(a)=-(DM^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda}-DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu}(e)+DT^{j3}(e_c)$, $f_{\chi j}(a)=-(DT^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda}-$ $-DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\chi)+DB^j_\lambda[T^{\lambda\mu}(\gamma)\upsilon_\mu+T^{\lambda 3}(\chi)]$, $f_{\chi 3+j}(a)=-(DM^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda}-DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu}(\chi)+DT^{j3}(\chi)$, $j=1,2$; $f_{c3}(a)=-(DT^{\lambda 3}(e_c))_{\alpha^\lambda}-DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(e)$, $f_{\chi 3}(a)=-(DT^{\lambda\mu}(\gamma)\upsilon_\mu)_{\alpha^\lambda}-(DT^{\lambda 3}(\chi))_{\alpha^\lambda}-$ $-DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\chi)$, $F^1=D(R^1+iR^2)/2$, $F^2=D(L^1+iL^2)/2$, $F^3=DR^3$; $e=e_s+e_c$, $e_s=(e_s^0,e_s^1)$, $e_c=(e_c^0,e_c^1)$, $e_s^k=(e^k_{s11},e^k_{s12},e^k_{s13},e^k_{s22},e^k_{s23},e^k_{s33})$, $e_c^k=(e^k_{c11},e^k_{c12},e^k_{c13},e^k_{c22},e^k_{c23},e^k_{c33})$, $k=0,1$; $\chi=(\chi^0_{11},\chi^0_{12},\chi^0_{22})$; e^k_{sij}, e^k_{cij}, χ^k_{ij} определены ранее.

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент тензора деформации γ, поэтому справедливо представление $\gamma=e+\chi$.

Аналогично граничные условия (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re}[(-i)^j t'\omega_k(t)]+2(-1)^j DD^{1212}_{k+\delta-2}\nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda}d\alpha^\lambda/ds=$$
$$=\varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t)+\varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t)-F^{3k+j}(s),\quad k,j=1,2,$$
$$DD_0^{1313}[(w_{3\alpha^2}+\psi_2)d\alpha^1/ds-(w_{3\alpha^1}+\psi_1)d\alpha^2/ds]=\varphi_{c3}(a)+\varphi_{\chi 3}(a)(t)-F^6(s), \tag{8}$$

где $\varphi_{cj}(a)(t)=D[T^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds-T^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds]$, $\varphi_{c3+j}(a)(t)=D[M^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds-M^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds]$, $\varphi_{\chi j}(a)(t)=D[T^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds-T^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds]$, $\varphi_{\chi 3+j}(a)(t)=D[M^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds-M^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds]$, $j=1,2$; $\varphi_{c3}(a)(t)=D[T^{13}(e_c)d\alpha^2/ds-T^{23}(e_c)d\alpha^1/ds]$, $\varphi_{\chi 3}(a)(t)=D[T^{1\lambda}(\gamma)d\alpha^2/ds-T^{2\lambda}(\gamma)d\alpha^1/ds]\upsilon_\lambda-$ $-D[T^{23}(\chi)d\alpha^1/ds-T^{13}(\chi)d\alpha^2/ds]$; $F^{3+j}=-P^j$, $j=1,2$; $F^6(s)=P^3(s)$, $F^{6+k}=-N^k$, $k=1,2$.

В основе исследования системы уравнений (6), (7) с граничными условиями (8) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$. Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar z}=\rho^j\quad (j=1,2),\quad DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1}+w_{3\alpha^2\alpha^2})=\rho^3, \tag{9}$$

где $\rho^1=\rho_1+i\rho_2$, $\rho^2=\rho_4+i\rho_5$, $\rho^3=\rho_3$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (9) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана, общие решения которых даются формулами [16, с. 29]

$$\omega_j(z)=\Phi_j(z)+T\rho^j(z)\equiv\omega_j(\Phi_j;\rho^j)(z),$$
$$T\rho^j(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta,\quad j=1,2,\quad \zeta=\xi+i\eta, \tag{10}$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [16, с. 39–41, 46], что T — вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C^{k+1}_\alpha(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar z}=f,\quad \frac{\partial Tf}{\partial z}\equiv Sf=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta, \tag{11}$$

где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p>1$, и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$.

Представления (10), в свою очередь, при помощи функций $\omega^0_1=w_2+iw_1$, $\omega^0_2=\psi_2+i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega^0_{j\bar z}=iT_j\omega,\quad j=1,2, \tag{12}$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega^0_j(z)=\Psi_j(z)+iTT_j\omega(z)\equiv\omega^0_j(\Psi_j;\omega)(z),\quad j=1,2. \tag{13}$$

В (12), (13) введены обозначения: $T_j\omega=d_{2j-1}[\omega_1]+d_{2j}[\omega_2]$, $\omega=(\omega_1,\omega_2)$,

$$d_{2j+\lambda-2}[\omega_\lambda]=d^1_{2j+\lambda-2}\omega_\lambda+(-1)^{j+\lambda}d^2_{2j+\lambda-2}\overline{\omega_\lambda},\quad j,\lambda=1,2,$$

$$d^j_{3k-2}=\frac{1}{4D}\left(\frac{D^{1111}_{4-2k}}{\delta_0}+(-1)^j\frac{D^{1212}_{4-2k}}{\delta_1}\right),\quad d^j_2=d^j_3=\frac{1}{4D}\left(\frac{D^{1212}_1}{\delta_1}+(-1)^j\frac{D^{1111}_1}{\delta_0}\right),\quad k,j=1,2,$$

$$\delta_0=D^{1111}_0D^{1111}_2-(D^{1111}_1)^2,\quad \delta_1=D^{1212}_0D^{1212}_2-(D^{1212}_1)^2;$$

$\Psi_j(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольные голоморфные функции, ω_j определены в (10).

Третье уравнение в (9) представим в виде

$$w_{3z\bar z}=\widetilde\rho_3/4,\quad \widetilde\rho_3=\rho_3/(DD^{1313}_0),\quad w_{3z}=(w_{3\alpha^1}-iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z)=\operatorname{Re}\Psi_3(z)-\widetilde T\widetilde\rho_3\equiv w_3(\Psi_3;\rho_3)(z),\quad \widetilde T\widetilde\rho_3=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\widetilde\rho_3(\zeta)\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\xi\,d\eta, \tag{14}$$

где $\Psi_3(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция.

Соотношения (13), (14) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений и лежат в основе предложенного метода исследования.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Представления (13), (14) для обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j=1,2)$, $\Psi_k(z)$ $(k=\overline{1,3})$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j=\overline{1,3})$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (6), (7) и граничным условиям (8), при этом правые части уравнений (6), (7) и граничных условий (8) временно считаем известными. С этой целью соотношения (13), (14) подставим в левые части системы уравнений (6), (7) и граничных условий (8). В результате система (6), (7) примет вид

$$\rho^j(z)+h^j_1(\rho)(z)+h^j_2(\Phi)(z)=f^j_c(a)(z)+f^j_\chi(a)(z)-F^j(z),\quad j=\overline{1,3},\quad z\in\Omega, \tag{15}$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$, которые содержат функции $\rho=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)$ и $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (8) с учётом представлений

$$S(T_j\Phi_0)^+(t)=-(\bar t')^2[d^1_{2j-1}(t)\Phi_1(t)+d^1_{2j}(t)\Phi_2(t)]+K_{0j}(\Phi_0)(t),\quad \Phi_0=(\Phi_1,\Phi_2),$$

$$K_{0j}(\Phi_0)(t)=-\frac{d^1_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau-t}\Phi_\mu(\tau)d\tau-(-1)^{j+\mu}\frac{d^2_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\bar\tau-\bar t}\overline{\Phi_\mu(\tau)}d\bar\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^1_{2j+\mu-2}(\zeta)-d^1_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta-t)^2}\Phi_\mu(\zeta)d\xi d\eta-\frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^2_{2j+\mu-2}(\zeta)-d^2_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta-t)^2}\overline{\Phi_\mu(\zeta)}d\xi d\eta,\quad j=1,2,$$

$$\psi(\tau,t)=(\bar\tau-\bar t)/(\tau-t),\quad \psi(t,t)=(\bar t')^2,$$

получаемых при помощи соотношений (10)–(12), формул (4.7), (4.9) из [16, с. 28] и формул Сохоцкого [17, с. 66], преобразуются к виду

$$(-1)^j d_{k\lambda}(t)\,\mathrm{Re}[i^jt'\Phi_\lambda(t)]-2DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\,\mathrm{Re}[i^{j-1}t'\Psi'_\lambda(t)]-2DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\,\mathrm{Re}[i^jt'K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)]+$$
$$+H_{3(k-1)+j}\rho(t)=\varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t)+\varphi_{\chi3(k-1)+j}(a)(t)-F^{3k+j}(s),\quad k,j=1,2,$$
$$DD^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}[it'\Psi'_3(t)]+K_{03}(\Phi)(t)+H_3\rho(t)=\varphi_{\chi3}(a)(t)-F^6(s),\tag{16}$$

где приняты следующие обозначения: $H_{3(k-1)+j}\rho(t)=\mathrm{Re}[(-i)^jt'T\rho^k(t)]-2DD^{1212}_{k+\lambda-2}(t)\times$ $\times\,\mathrm{Re}\{i^jt'(I+S)(T_\lambda T\rho_0)^+(t)\}$, $k,j=1,2$; $H_3\rho(t)=DD^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}[it'(T\widetilde\rho_3(t)/2+TT_2T\rho_0(t))]$, $K_{03}(\Phi)(t)=DD^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\{t'[\Psi_2(t)+iTT_2\Phi_0(t)]\}$; $d_{kj}(t)=(-1)^{j-1}[2(-1)^\lambda DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)d^2_{2\lambda+j-2}(t)+$ $+3-k-j]$, $k,j=1,2$; I — тождественный оператор, операторы T, S, T_λ и функции $d^k_j(t)$ определены в (10), (11); $\Phi_\lambda(t)\equiv\Phi^+_\lambda(t)$, $t\in\Gamma$; символ $\Phi^+_\lambda(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_\lambda(z)$ при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$, $\Phi_k(z)\in C_\alpha(\overline\Omega)$ $(k=1,2)$, $\Psi_j(z)\in C^1_\alpha(\overline\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$ получили систему уравнений (15), (16). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\Phi_k(z)=\Theta(\mu_{2k})(z)\equiv\Phi_k(\mu_{2k})(z),\quad k=1,2,$$
$$\Psi'_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z)\equiv\Psi'_j(\mu_{2j-1})(z),\quad j=\overline{1,3},$$
$$\Theta(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)},\tag{17}$$

где $\mu_j(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ $(j=\overline{1,5})$ — произвольные действительные функции, $\tau'=d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$ $(j=\overline{1,3})$ имеем представления

$$\Psi_j(z)=i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j}\equiv\Psi_j(\mu_{2j-1})(z)+c_{2j-1}+ic_{2j},\quad j=\overline{1,3},$$
$$\Theta^0(f)(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)}{\tau'}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau,\tag{18}$$

где c_j $(j=\overline{1,6})$ — произвольные действительные постоянные, под $\ln(1-z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Используя формулы Сохоцкого [17, с. 66], находим $\Phi_k(t)$ $(k=1,2)$, $\Psi'_j(t)$ $(j=\overline{1,3})$, $t\in\Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (18) в систему (15), (16), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho\in L_p(\Omega)$ и $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)\in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\mu)(z)=f_c^j(a)(z)+f_\chi^j(a)(z)+g_c^j(z)-F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=\overline{1,3},$$

$$\sum_{n=1}^{5}\left[a_{jn}(t)\mu_n(t)+b_{jn}(t)\int\limits_\Gamma\frac{\mu_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right]+K_j\,\mu(t)+H_j\rho(t)=$$

$$=\varphi_{cj}(a)(t)+\varphi_{\chi j}(a)(t)+g_c^{3+j}(t)-F^{3+j}(t),\quad t\in\Gamma,\quad j=\overline{1,5},\tag{19}$$

где приняты обозначения: $K_{3(n-1)+j}\mu(t)=(-1)^jd_{n\lambda}(t)\{\mathrm{Re}[i^jt'\Theta(\mu_{2\lambda})(t)]-i\mathrm{Re}(i^{j-1})\Theta(\tau'\mu_{2\lambda})(t)\}+$ $+2DD^{1212}_{\lambda+n-2}(t)\{\mathrm{Re}[i^{j+1}t'\Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)]-i\,\mathrm{Re}(i^j)\Theta(\tau'\mu_{2\lambda-1})(t)-\mathrm{Re}[i^jt'K_{0\lambda}(\mu_0)(t)]\}$, $n,j=1,2$; $K_3\mu(t)=K_{03}(\mu)(t)-DD_0^{1313}(t)\,\mathrm{Re}[t'\Theta(\mu_5)(t)]$; $g_c^2(z)=DD_0^{1313}(c_4+ic_3)/2$, $g_c^3(z)=-c_4(DD_0^{1313})_{\alpha^1}-$ $-c_3(DD_0^{1313})_{\alpha^2}$, $g_c^6(t)=DD_0^{1313}(t)(c_4d\alpha^2/ds-c_3d\alpha^1/ds)$, $g_c^1(z)=g_c^{3+j}(t)\equiv0$, $j=1,2,4,5$; $a_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t)=(-1)^jd_{k\lambda}(t)\mathrm{Re}(i^j)/2$, $b_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t)=(-1)^jd_{k\lambda}(t)\mathrm{Re}(i^{j-1})/(2\pi)$, $a_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t)=$ $=-DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\,\mathrm{Re}(i^{j-1})$, $b_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t)=DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\,\mathrm{Re}(i^j)/\pi$, $k,j,\lambda=1,2$; $a_{35}(t)=$ $=-DD_0^{1313}(t)/2$; остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z)\equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t)\equiv$ $\equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j=1,2$; $K_{03}(\mu)(t)\equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu)=(\Phi_1(\mu_2),\Phi_2(\mu_4),\Psi_1(\mu_1),\Psi_2(\mu_3),\Psi_3(\mu_5))$, $\mu_0=(\mu_2,\mu_4)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (d), (e). Тогда:*

1) $h_1^j(\rho)$ $(j=\overline{1,3})$ — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$;

2) $h_2^j(\mu)$ $(j=\overline{1,3})$ — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu\in(0,1)$ в $L_p(\Omega)$;

3) $K_j\mu$ $(j=\overline{1,5})$ — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu\in(0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любом $\gamma<\beta/2$;

4) $H_j\rho$ $(j=\overline{1,5})$ — линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ для любого $\alpha'<\alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;

5) имеют место $f_c^j(a)(z), f_\chi^j(a)(z), F^j(z), g_c^j(z)\in L_p(\Omega)$ $(j=\overline{1,3})$; $\varphi_{cj}(a)(t),\varphi_{\chi j}(a)(t)\in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g_c^6(t), a_{jk}(t), b_{jk}(t)\in C_\beta(\Gamma)$ $(j,k=\overline{1,5})$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 из работы [14].

Исследуем разрешимость системы уравнений (19) в пространстве $L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha'<\alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (19) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ и d_{jk}, вычисляем определитель

$$\det[A(t)-\pi iB(t)]=D^3D_0^{1313}\delta_1/(32\delta_0)(a_1^2-a_0a_2),\quad a_n=D_n^{1111}+D_n^{1122},\quad n=0,1,2,$$

где $A=(a_{jk})$, $B=(b_{jk})$ — квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $\det[A(t)-\pi iB(t)]\neq0$ на Γ и для индекса системы (19) получаем

$$\chi=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(A-\pi iB)}{\det(A+\pi iB)}\right]_\Gamma=0$$

(здесь $[\arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (19) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho,\mu)\in L_p(\Omega)\times C_{\alpha'}(\Gamma)$ — решение системы (19) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (17), (18) с постоянными $c_j=0$ $(j=\overline{1,6})$ соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_j(z)$, которые в свою очередь по формулам (13), (14) определяют функции w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$. Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (6), (7) $(f_c^j+f_\chi^j-F^j\equiv 0,\ j=\overline{1,3})$ и однородным линейным граничным условиям (8) $(\varphi_{cj}+\varphi_{\chi j}-F^{3+j}\equiv 0,\ j=\overline{1,5})$. Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (6), (7) умножим соответственно на w_1 и w_2, второго уравнения — соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение — на w_3. После этого проинтегрируем их по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (8) получаем, что w_j $(j=\overline{1,3})$, ψ_k $(k=1,2)$ удовлетворяют системе $\nu_{j1\alpha^1}=0$, $\nu_{j2\alpha^2}=0$, $\nu_{j1\alpha^2}+\nu_{j2\alpha^1}=0$, $w_{3\alpha^j}+\psi_j=0$, $j=1,2$, решение которой имеет вид

$$w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\quad w_2=c_0\alpha^1+c_2,\quad w_3=-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6,\quad \psi_1=c_4,\quad \psi_2=c_5, \tag{20}$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0)=0$ $(j=\overline{1,3})$, $w_3(0)=0$, то из (20) будем иметь $w_1=-c_0\alpha^2+c_1$, $w_2=c_0\alpha^1+c_2$, $w_3=\psi_1=\psi_2\equiv 0$. Тогда $\omega_j(z)=2ic_0DD_{j-1}^{1212}$ $(j=1,2)$ и из уравнений (9) следуют равенства

$$\rho^j(z)=2ic_0(DD_{j-1}^{1212})_{\bar z},\quad j=1,2,\quad \rho^3(z)\equiv 0,\quad z\in\Omega. \tag{21}$$

Используя формулы (10), (13) и (14), находим $\Phi_k(z)$ $(k=1,2)$, $\Psi_j'(z)$ $(j=\overline{1,3})$ и, подставляя их в (17), получаем

$$\mu_1(t)/t'-c_0(\bar t')^2=F_1^-(t),\quad \mu_{2j}(t)/t'-2ic_0DD_{j-1}^{1212}(t)=F_{2j}^-(t),\quad j=1,2,$$
$$\mu_{2j-1}(t)/t'=F_{2j-1}^-(t),\quad j=2,3,$$

где $F_j^-(t)$ — граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}[it'F_j^-(t)]=f_j^-(t)$, $j=\overline{1,5}$, где $f_1^-(t)=$ $=c_0\operatorname{Re}(it')$, $f_{2j}^-(t)=2c_0DD_{j-1}^{1212}(t)\operatorname{Re}t'$, $j=1,2$, $f_{2j-1}^-(t)=0$, $j=2,3$. Используя решение этой задачи [18, с. 253], получаем для функций $\mu_j(t)$ представления

$$\mu_j(t)=c_0\mu_j^0(t)+\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=1,2,4,\quad \mu_j(t)=\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=3,5, \tag{22}$$

где $\mu_j^k(t)$ — известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0, β_{0j} — произвольные действительные постоянные.

Равенства (21), (22) показывают, что однородная система уравнений (19) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (15) умножим соответственно на действительные функции $v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (16) умножим на действительные функции $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5\in C_\alpha^1(\Gamma)$ и проинтегрируем по кривой Γ, после чего их все складываем и приравниваем к нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi_k'(z)$ их выражениями из (17), (18) с равными нулю постоянными, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений:

$$\overline{v^j(z)} - T_{3+j}\widetilde{v}(z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Re} T_3\widetilde{v}(z) = 0, \quad z \in \Omega,$$

$$\operatorname{Re}\{i[T_{3+j}\widetilde{v}(t) - 2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Re}[Tg(v)(t) + \Theta^-(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(t)] = 0,$$

$$\operatorname{Re}\{T[(DD^{1212}_{\lambda+j-2})_{\overline{\zeta}} v^\lambda](t) - 2\Theta^-(\tau' DD^{1212}_{\lambda+j-2}\nu^\lambda)(t) +$$

$$+ (j-1)[iT^0 g(v)(t) - T^0_\Gamma(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} = 0, \quad t \in \Gamma, \quad j = 1, 2;$$

$$v^j = v_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + i\nu_{3j-1}, \quad j = 1, 2, \quad v^3 = v_3, \quad \nu^3 = \nu_3. \tag{23}$$

В уравнениях (23) приняты обозначения: $T_{3+j}\widetilde{v}(z) = 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda\widetilde{v}](z) + Td_{2+j}[T_3\widetilde{v}](z)$, $T_3\widetilde{v}(z) = -2Tg(v)(z) + 2DD_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z)$, $S_j\widetilde{v}(z) = S[(DD^{1212}_{j+\lambda-2})_{\overline{\zeta}} v^\lambda](z) - (DD^{1212}_{j+\lambda-2})_z v^\lambda(z) - 2\Theta'(\tau' DD^{1212}_{j+\lambda-2}\nu^\lambda)(z)$, $j=1,2$; $g(v)(z) = (DD_0^{1313})_{\overline{z}}(z)v_3(z) - DD_0^{1313}(z)v^2(z)/4$, $T^0 f(z) = -\dfrac{1}{\pi i}\iint\limits_\Omega f(\zeta)\ln\left(1 - \dfrac{\zeta}{z}\right)d\xi d\eta$, $T^0_\Gamma f(z) = -\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\tau)\ln\left(1 - \dfrac{\tau}{z}\right)d\sigma$, $\Theta'(f)(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \dfrac{f(\tau)d\tau}{\tau'(\tau - z)^2}$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\widetilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$, $\widetilde{v} = (v, \widetilde{\nu})$; $\Theta^-(f)(t)$ — граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ извне области Ω; операторы Tf, Sf, $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены ранее.

Система (23), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (23) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $\widetilde{\nu} \in C^1_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T, T^0, T^0_Γ определяют функции $Tf(z)$, $T^0 f(z)$, $T^0_\Gamma f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция $\Theta(f)(z)$. Поэтому последние пять равенств на кривой Γ в (23) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Тогда эти пять равенств на кривой Γ преобразуются к виду

$$T_{3+j}\widetilde{v}(z) - 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1, 2, \quad Tg(v)(z) + \Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z) = 0,$$

$$T[(DD^{1212}_{\lambda+j-2})_{\overline{\zeta}} v^\lambda](z) - 2\Theta(\tau' DD^{1212}_{\lambda+j-2}\nu^\lambda)(z) +$$

$$+ (j-1)[iT^0 g(v)(z) - T^0_\Gamma(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0, \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega_1 \equiv \mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}, \tag{24}$$

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость.

Из первых трёх равенств в (23) следует, что функции v_j $(j = \overline{1,5})$ принадлежат пространству $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$. В них перейдём к пределу при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω, а в первых трёх равенствах в (24) — извне области Ω, и последние прибавим к первым трём соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций $Tf(z)$ при $f \in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, находим

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1, 2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma. \tag{25}$$

Продифференцируем первые два равенства в (23) по $\overline{z}$. С учётом формул (11) получим равенства

$$\overline{v^j}_{\overline{z}} = 2d_{j+2\lambda-2}[S_\lambda\widetilde{v}](z) + d_{2+j}[T_3\widetilde{v}](z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно $X_1 = 2S_1\widetilde{v}$, $X_2 = 2S_2\widetilde{v} + T_3\widetilde{v}$ и решая её, будем иметь

$$X_j = D[(D^{1111}_{j+\lambda-2} - D^{1212}_{j+\lambda-2})\overline{v^\lambda_z} + (D^{1111}_{j+\lambda-2} + D^{1212}_{j+\lambda-2})v^\lambda_z], \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega. \tag{26}$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_j^{1212}, D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad j=0,1,2. \tag{27}$$

Используя соотношения для функций $T_3\widetilde{v}(z)$, $S_j\widetilde{v}(z)$ $(j=1,2)$, находим $X_{j\overline{z}}$ $(j=1,2)$, которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству $L_{q_1}(\Omega)$, $1<q_1<2/(1-\alpha)$. Теперь эти выражения $X_{j\overline{z}}$ $(j=1,2)$ подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по $\overline{z}$ равенств (26). Третье равенство в (23) дифференцируем по z и $\overline{z}$. При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением системы линейных уравнений (6), (7) при нулевой правой части.

Теперь в равенствах (26) переходим к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, при этом левую часть $X_j^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представлений $(S_j\widetilde{v})(z)$, $T_3\widetilde{v}(z)$. Затем из них вычтем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по z последних двух соотношений в (24) с последующим переходом в них к пределу при $z\to t\in\Gamma$ извне Ω. Далее, третьи равенства в (23) и (24) продифференцируем по z, в получившихся равенствах перейдём к пределу при $z\to t\in\Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и вычтем их друг из друга. При помощи полученных равенств на кривой Γ, используя соотношения (25) и формулы

$$(Sf)^+(t)-(Sf)^-(t)=-f(t)(\overline{t}\,')^2, \quad \theta'^+(\tau'f)(t)-\theta'^-(\tau'f)(t)=f_t+f_{\overline{t}}(\overline{t}\,')^2, \quad t\in\Gamma,$$

после несложных преобразований приходим к тому, что функции v_1, v_2, $2v_3$, v_4, v_5 удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (8).

Таким образом, вектор $(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений (6), (7), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям (8). Следовательно, в соответствии с (20) для функций v_j $(j=\overline{1,5})$ получим следующие представления:

$$v_1=-c_0\alpha^2+c_1, \quad v_2=c_0\alpha^1+c_2, \quad v_3=(-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6)/2, \quad v_4=c_4, \quad v_5=c_5,$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны формулами (25). Следовательно, решение $(v,\widetilde{\nu})^T$, $v= (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $\widetilde{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ союзной системы (23) можно представить в виде $(v,\widetilde{\nu})^T=c_0\gamma_1+c_1\gamma_2+c_2\gamma_3+c_4\gamma_4+c_5\gamma_5+c_6\gamma_6$, где $\gamma_k=(\gamma_{k1},\gamma_{k2},\ldots,\gamma_{k10})$ $(k=\overline{1,6})$ — линейно независимые решения системы (23). Тогда для разрешимости системы (19) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_{\Omega}\Big\{\mathrm{Re}\big[(f_c^1+f_\chi^1+g_c^1-F^1)(z)(\gamma_{k1}-i\gamma_{k2})(z)+(f_c^2+f_\chi^2+g_c^2-F^2)(z)(\gamma_{k4}-i\gamma_{k5})(z)\big]+$$

$$+(f_c^3+f_\chi^3+g_c^3-F^3)(z)\gamma_{k3}(z)\Big\}\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\sum_{j=1}^{5}\int\limits_{\Gamma}(\varphi_{cj}+\varphi_{\chi j}+g_c^{3+j}-F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t)\,ds=0, \quad k=\overline{1,6},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\iint\limits_{\Omega}DR^j\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^j\,ds+\iint\limits_{\Omega}D\big\{G_{\lambda\mu}^jT^{\lambda\mu}(\gamma)-B_\lambda^j[T^{\lambda\mu}(\gamma)v_\mu+T^{\lambda3}(\gamma)]\big\}\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0, \quad j=1,2,$$

$$\iint\limits_{\Omega}D(R^1\alpha^2-R^2\alpha^1)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}(P^1\alpha^2-P^2\alpha^1)\,ds+$$

$$+\iint_\Omega D\bigl\{(\alpha^2 G^1_{\lambda\mu}-\alpha^1 G^2_{\lambda\mu})T^{\lambda\mu}(\gamma)+(\alpha^1 B^2_\lambda-\alpha^2 B^1_\lambda)[T^{\lambda\mu}(\gamma)v_\mu+T^{\lambda 3}(\gamma)]\bigr\}\,\alpha^1\,d\alpha^2=0,$$

$$\iint_\Omega D(\alpha^j R^3-L^j)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int_\Gamma(\alpha^j P^3-N^j)\,ds+$$
$$+\iint_\Omega D\bigl[\alpha^j B_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)-G^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu}(\gamma)-T^{j\mu}(\gamma)v_\mu\bigr]\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,$$
$$\iint_\Omega DR^3\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int_\Gamma P^3\,ds+\iint_\Omega DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0, \qquad (28)$$

где $R^j,\ P^j\ (j=\overline{1,3}),\ L^k,\ N^k\ (k=1,2)$ — компоненты внешних сил, γ — произвольно фиксированный тензор деформации, $v_j\ (j=1,2)$ — произвольно фиксированные функции.

При выполнении условий (28) общее решение системы (19) можно представить в виде

$$(\rho,\mu)=(\rho_c,\mu_c)(a)+(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)+(\rho_*,\mu_*)+(\rho_F,\mu_F),\quad (\rho_c,\mu_c)(a)=\mathfrak{R}f_c(a),$$
$$(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)=\mathfrak{R}f_\chi(a),\quad (\rho_*,\mu_*)=\mathfrak{R}g_c+(\widetilde{\rho},\widetilde{\mu}),\quad (\rho_F,\mu_F)=-\mathfrak{R}F, \qquad (29)$$

где $f_c(a)=(f^1_c,f^2_c,f^3_c,\varphi_{c1},\ldots,\varphi_{c5})$, $f_\chi(a)=(f^1_\chi,f^2_\chi,f^3_\chi,\varphi_{\chi1},\ldots,\varphi_{\chi5})$, $g_c=(g^1_c,\ldots,g^8_c)$, $F=(F^1,\ldots,F^8)$; $\mathfrak{R}=(\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_8)$; $\mathfrak{R}_j\ (j=\overline{1,3})$ и $\mathfrak{R}_k\ (k=\overline{4,8})$ — линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\widetilde{\rho}=(\widetilde{\rho}_1,\widetilde{\rho}_2,\widetilde{\rho}_3)$, $\widetilde{\mu}=(\widetilde{\mu}_1,\ldots,\widetilde{\mu}_5)$ определены формулами (21), (22).

Если выражение для вектор-функции $\mu(t)$ из (29) подставить в соотношения (17), (18), то для голоморфной вектор-функции $\Phi(z)=(\Phi_0,\Psi)$, $\Phi_0=(\Phi_1,\Phi_2)$, $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ получим представление

$$\Phi(z)=\Phi_c(a)(z)+\Phi_\chi(a)(z)+\Phi_*(z)+\Phi_F(z),\quad z\in\Omega, \qquad (30)$$

где $\Phi_c(a)(z)=\Phi(\mu_c(a))(z)$, $\Phi_\chi(a)(z)=\Phi(\mu_\chi(a))(z)$, $\Phi_F(z)=\Phi(\mu_F)(z)$, $\Phi_*(z)=\Phi(\mathfrak{R}g_c)(z)+\widetilde{\Phi}(z)$, $\widetilde{\Phi}(z)=(c_0\beta_0(z),c_0\beta_1(z),c_0\gamma_0(z)+c_1+ic_2,0,0)$, $\beta_j(z)=2i\Theta(t'DD^{1212}_j)(z)$, $j=0,1$, $\gamma_0(z)=\Theta(t'\overline{t})(z)$; функция $\Theta(f)(z)$ определена в (17), c_j — произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения $\rho(z)$ из (29) и голоморфных функций из (30) подставим в (13), (14). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$, которую представим в виде

$$\omega^0_j(z)=\omega^0_{jc}(a)+\omega^0_{j\chi}(a)+\omega^0_{j*}(z)+\omega^0_{jF}(z),\quad j=1,2, \qquad (31)$$

$$w_3(z)=w_{3c}(a)+w_{3\chi}(a)+w_{3*}(z)+w_{3F}(z),\quad z\in\Omega, \qquad (32)$$

где $\omega^0_{jc}(a)=\omega^0_j(\Psi_{jc}(a);\omega_{jc}(a))$, $\omega_c(a)=(\omega_{1c},\omega_{2c})$, $\omega_{jc}(a)=\omega_j(\Phi_{jc}(a);\rho^j_c(a))$, $j=1,2$, $w_{3c}(a)=$ $=w_3(\Psi_{3c}(a);\rho^3_c(a))$; остальные слагаемые в системе (31), (32) определяются аналогично; операторы $\omega_j(\Phi_j;\rho^j)$, $\omega^0_j(\Psi_j;\omega_j)$ и $w_3(\Psi_3;\rho^3)$ определены в (10), (13) и (14) соответственно.

Отметим, что функции $\omega^0_{j*}(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\omega^0_{jF}(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $\omega^0_{1*}(z)=w_{2*}+iw_{1*}$, $\omega^0_{2*}(z)=\psi_{2*}+i\psi_{1*}$, $w_{3*}(z)$ имеют место представления (20).

Исследуем разрешимость системы (31), (32) в пространстве $W^{(2)}_p(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (a), (b), (d), (e). Тогда:*

1) $\omega^0_{jc}(a)$ $(j=1,2)$, $w_{3c}(a)$ — линейные вполне непрерывные операторы в $W^{(2)}_p(\Omega)$;

2) $\omega^0_{j\chi}(a)$ *(*$j=1,2$*),* $w_{3\chi}(a)$ *— нелинейные ограниченные операторы в* $W^{(2)}_p(\Omega)$*, причём для любых* $a^j=(w^j_1,w^j_2,w^j_3,\psi^j_1,\psi^j_2)\in W^{(2)}_p(\Omega)$ *(*$j=1,2$*) справедливы оценки*

$$\|\omega^0_{j\chi}(a^1)-\omega^0_{j\chi}(a^2)\|_{W^{(2)}_p(\Omega)},$$

$$\|w_{3\chi}(a^1)-w_{3\chi}(a^2)\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}\leqslant c\Big(\|a^1\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\|a^2\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\|w^1\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\|w^2\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}\Big)\|a^1-a^2\|_{W^{(2)}_p(\Omega)},$$

$$\|w^j\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}=\|w^j_1\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\|w^j_2\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)}+\|w^j_3\|^2_{W^{(2)}_p(\Omega)},\quad j=1,2, \tag{33}$$

где c *— известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;*

3) $\omega^0_{j*}(z),\omega^0_{jF}(z)\in W^{(2)}_p(\Omega)$*,* $j=1,2$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 из работы [14].

Систему (31), (32) запишем в виде

$$a-L(a)-G(a)=a_*+\widetilde{a}_F, \tag{34}$$

где $L=(L_1,\ldots,L_5)$, $G=(G_1,\ldots,G_5)$, $a_*=(w_{1*},w_{2*},w_{3*},\psi_{1*},\psi_{2*})$, $\widetilde{a}_F=(\widetilde{w}_{1F},\widetilde{w}_{2F},\widetilde{w}_{3F},\widetilde{\psi}_{1F},\widetilde{\psi}_{2F})$, $\omega^0_{1*}=w_{2*}+iw_{1*}$, $\omega^0_{2*}=\psi_{2*}+i\psi_{1*}$; $L_{3(n-1)+j}(a)=-\operatorname{Re}[i^j\omega^0_{nc}(a)]$, $G_{3(n-1)+j}(a)=-\operatorname{Re}[i^j\omega^0_{n\chi}(a)]$, $n,j=1,2$; $L_3(a)=w_{3c}(a)$, $G_3(a)=w_{3\chi}(a)$, $\widetilde{w}_{jF}=-\operatorname{Re}[i^j\omega^0_{1F}]$, $\widetilde{\psi}_{jF}=-\operatorname{Re}[i^j\omega^0_{2F}]$, $j=1,2$; $\widetilde{w}_{3F}=w_{3F}$.

Отметим, что $L(a)$ — линейный вполне непрерывный оператор, $G(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W^{(2)}_p(\Omega)$, причём для $G(a)$ имеет место оценка (33); $\widetilde{a}_F\in W^{(2)}_p(\Omega)$ — известная функция, зависящая от внешних сил; компоненты вектора a_* определяются по формулам (20).

Уравнение $a-L(a)=0$ имеет лишь нулевое решение в $W^{(2)}_p(\Omega)$. Действительно, если $a\in W^{(2)}_p(\Omega)$ — его ненулевое решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (19), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$w_{j\alpha^j}-G^\lambda_{jj}w_\lambda-B_{jj}w_3=0,\quad j=1,2,\quad w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}-2G^\lambda_{12}w_\lambda-2B_{12}w_3=0,$$
$$\psi_{j\alpha^j}-G^\lambda_{jj}\psi_\lambda=0,\quad j=1,2,\quad \psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1}-2G^\lambda_{12}\psi_\lambda=0,$$
$$w_{3\alpha^j}+B^\lambda_j w_\lambda+\psi_j=0,\quad j=1,2. \tag{35}$$

Выведем условия, при выполнении которых система (35) имеет только нулевое решение. С этой целью четвёртое и пятое равенства в (35) сложим и вычтем друг из друга. С учётом соотношений (3) для символов Кристоффеля получим систему

$$(\psi_1/\Lambda)_{\alpha^1}-(\psi_2/\Lambda)_{\alpha^2}=0,\quad (\psi_1/\Lambda)_{\alpha^2}+(\psi_2/\Lambda)_{\alpha^1}=0,\quad \psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2}=0,$$

которую при помощи комплексной функции $\psi=(\psi_1+i\psi_2)/\Lambda$ можно представить в виде

$$\psi_{\overline{z}}=0,\quad \operatorname{Re}(\Lambda\psi)_z=0. \tag{36}$$

Первое равенство в (36) означает, что $\psi(z)$ — голоморфная в области Ω функция, принадлежащая пространству $W^{(2)}_p(\Omega)$, а второе равенство представим в виде $\operatorname{Re}\psi'(z)=-\operatorname{Re}[(\ln\Lambda)_z\psi]$. Функция $\operatorname{Re}\psi'(z)$, как действительная часть голоморфной функции $\psi'(z)$, в области Ω является гармонической, т.е. $[\operatorname{Re}\psi'(z)]_{z\overline{z}}=0$. Следовательно, в области Ω имеет место равенство

$\mathrm{Re}(\Lambda_0\psi)_z=0$, где $\Lambda_0=(\ln\Lambda)_{z\bar z}$. Заметим, что из формулы Гаусса [19, с. 193] в силу условия (c) следует, что $\Lambda_0\equiv\Lambda_0(\alpha^1,\alpha^2)\neq 0$ в области $\overline{\Omega}$. Итак, голоморфная функция $\psi(z)$ удовлетворяет системе $\mathrm{Re}(\Lambda\psi)_z=0$, $\mathrm{Re}(\Lambda_0\psi)_z=0$, которая эквивалентна системе

$$2\Lambda u_{1\alpha^1}+\Lambda_{\alpha^1}u_1+\Lambda_{\alpha^2}u_2=0,\quad 2\Lambda_0 u_{1\alpha^1}+\Lambda_{0\alpha^1}u_1+\Lambda_{0\alpha^2}u_2=0,$$
$$u_{1\alpha^1}=u_{2\alpha^2},\quad u_{1\alpha^2}=-u_{2\alpha^1},\quad \Lambda_0=(\ln\Lambda)_{z\bar z}, \tag{37}$$

где $u_1\equiv u_1(\alpha^1,\alpha^2)=\mathrm{Re}\,\psi(z)$, $u_2\equiv u_2(\alpha^1,\alpha^2)=\mathrm{Im}\,\psi(z)$.

Пусть в области $\overline{\Omega}$ выполнено условие $[(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}]^2+[(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}]^2\neq 0$, которое с учётом соотношения Гаусса [19, с. 193] можно представить как

$$(\kappa_{\alpha^1})^2+(\kappa_{\alpha^2})^2\neq 0,\quad z=\alpha^1+i\alpha^2\in\overline{\Omega}, \tag{38}$$

где κ — гауссова кривизна срединной поверхности оболочки.

Пусть, для определённости, $(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}\neq 0$ в области $\overline{\Omega}$. Исключив из первых двух равенств в (37) производную $u_{1\alpha^1}$, получим

$$u_2=\Lambda_1u_1,\quad \Lambda_1=-(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}. \tag{39}$$

В силу условия (b) функция $\Lambda_1\equiv\Lambda_1(\alpha^1,\alpha^2)$ принадлежит пространству $W_p^{(1)}(\Omega)$. Выражение функции u_2 из (39) подставим в первое, третье и четвёртое равенства системы (37). После этого, исключив в них производные $u_{1\alpha^1}$, $u_{1\alpha^2}$, приходим к равенству $\Lambda_2u_1=0$, откуда при выполнении почти всюду в области Ω условия

$$\Lambda_2\equiv\Lambda_1\Lambda_{1\alpha^1}-\Lambda_{1\alpha^2}-(1+\Lambda_1^2)[(\ln\Lambda)_{\alpha^1}+\Lambda_1(\ln\Lambda)_{\alpha^2}]/2\neq 0 \tag{40}$$

получим, что $u_1=0$ в области $\overline{\Omega}$. Тогда из формулы (39) вытекает $u_2=0$ в $\overline{\Omega}$, т.е. $\psi=0$, следовательно, $\psi_1=\psi_2=0$ в области $\overline{\Omega}$. Если же $(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}\neq 0$ в области $\overline{\Omega}$, то при выполнении почти всюду в Ω условия

$$\Lambda_3\Lambda_{3\alpha^2}-\Lambda_{3\alpha^1}-(1+\Lambda_3^2)[(\ln\Lambda)_{\alpha^2}+\Lambda_3(\ln\Lambda)_{\alpha^1}]/2\neq 0,\quad \Lambda_3=-(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}, \tag{41}$$

также получаем, что $\psi_1=\psi_2=0$ в области $\overline{\Omega}$.

Вернёмся к системе (35). Из последних двух равенств с учётом $\psi_1=\psi_2=0$ будем иметь $[(B_{11}w_1+B_{12}w_2)/\Lambda]_{\alpha^2}=[(B_{12}w_1+B_{22}w_2)/\Lambda]_{\alpha^1}$. Заменяя здесь производные $w_{j\alpha^j}$ $(j=1,2)$ выражениями из (35) и рассматривая полученное соотношение совместно с третьим равенством из (35) как систему относительно $w_{1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^1}$, при выполнении в области $\overline{\Omega}$ условия

$$B_{11}+B_{22}\neq 0 \tag{42}$$

получаем выражения для производных $w_{1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^1}$:

$$w_{1\alpha^2}=w_{2\alpha^1}=[(\ln\Lambda)_{\alpha^2}w_1+(\ln\Lambda)_{\alpha^1}w_2]/2+B_{12}w_3. \tag{43}$$

Заметим, что условие (42) в силу соотношений Петерсона–Кодацци [19, с. 193] означает, что средняя кривизна κ_{cp} срединной поверхности оболочки не равна нулю, т.е. срединная поверхность не является минимальной [19, с. 198].

Теперь в системе (35) рассмотрим первые три равенства, которые, как и выше, представим в виде

$$(w_1/\Lambda)_{\alpha^1}-(w_2/\Lambda)_{\alpha^2}=(B_{11}-B_{22})w_3/\Lambda,\quad (w_1/\Lambda)_{\alpha^2}+(w_2/\Lambda)_{\alpha^1}=2B_{12}w_3/\Lambda,$$
$$w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2}=(B_{11}+B_{22})w_3. \tag{44}$$

С помощью комплексной функции $w=(w_1+iw_2)/\Lambda$ первые два равенства в (44) можно записать в виде неоднородного уравнения Коши–Римана $w_{\bar z}=b_1w_3$, общее решение которого даётся формулой

$$w=\varphi(z)+T(b_1w_3)(z), \quad b_1=(B_{11}-B_{22}+2iB_{12})/(2\Lambda), \tag{45}$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная в области Ω функция, принадлежащая пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, оператор T определён в (10).

Третье равенство в (44) представим в виде

$$(w_1/\Lambda)_{\alpha^1}+(w_2/\Lambda)_{\alpha^2}+(\Lambda_{\alpha^1}w_1+\Lambda_{\alpha^2}w_2)/\Lambda^2=2b_2w_3$$

и подставим в него выражения функций w_1, w_2 из (45). С учётом формул (11) в результате получим

$$\operatorname{Re}\varphi'(z)=b_2w_3-\Lambda_4w_1-\Lambda_5w_2-\operatorname{Re}S(b_1w_3)(z),$$
$$b_2=(B_{11}+B_{22})/(2\Lambda), \quad \Lambda_4=\Lambda_{\alpha^1}/(2\Lambda^2), \quad \Lambda_5=\Lambda_{\alpha^2}/(2\Lambda^2). \tag{46}$$

Левая часть равенства (46) представляет собой гармоническую функцию в области Ω. Следовательно, для правой части должно выполняться условие

$$[b_2w_3-\Lambda_4w_1-\Lambda_5w_2-\operatorname{Re}S(b_1w_3)(z)]_{z\bar z}=0, \quad z\in\Omega,$$

которое при помощи соотношений $(Sf)_{z\bar z}=f_{zz}$, $f_{z\bar z}=(f_{\alpha^1\alpha^1}+f_{\alpha^2\alpha^2})/4$, выражений функций b_1, b_2 из (45), (46), производных $w_{j\alpha^k}$ из (35), (43), а также выражений производных $w_{j\alpha^k\alpha^m}$ $(j,k,m=1,2)$, получаемых дифференцированием по переменным α^1, α^2 первых трёх равенств в (35), формул Петерсона–Кодацци [19, с. 193] можно представить в виде

$$(B_{11}w_{3\alpha^2\alpha^2}+B_{22}w_{3\alpha^1\alpha^1}-2B_{12}w_{3\alpha^1\alpha^2})/(4\Lambda)=a_1w_1+a_2w_2+a_3w_{3\alpha^1}+a_4w_{3\alpha^2}, \tag{47}$$
$$a_j=4\Lambda_0\Lambda_{3+j}+\Delta\Lambda_{3+j}+(-1)^{j-1}(\ln\Lambda)_{\alpha^j}(\Lambda_{4\alpha^1}-\Lambda_{5\alpha^2})+(\ln\Lambda)_{\alpha^{3-j}}\Lambda_{4\alpha^2}/2,$$
$$a_{2+j}=(-1)^{j-1}\Lambda_{3+j}(B_{22}-B_{11})/4-B_{12}\Lambda_{6-j}/2, \quad j=1,2; \tag{48}$$

Δ — оператор Лапласа, функция Λ_0 определена в (37).

Выражения производных $w_{3\alpha^j\alpha^k}$ $(j,k=1,2)$, полученных дифференцированием последних двух равенств в (35), в которых $\psi_1=\psi_2=0$, а также выражения $w_{3\alpha^k}$, $w_{j\alpha^k}$ $(j,k=1,2)$ из (35), (43) подставим в (47) и получим

$$w_3=a_5w_1+a_6w_2, \quad a_{4+j}=2\Lambda d_j/[\Lambda_0(B_{11}+B_{22})], \tag{49}$$

где $d_j=a_j-(B_{1j}a_3+B_{2j}a_4)/\Lambda-[B_{12}(B_{1j\alpha^2}+B_{2j\alpha^1})-B_{11}B_{2j\alpha^2}-B_{22}B_{1j\alpha^1}-2\Lambda_0\Lambda_{\alpha^j}]$, $j=1,2$.

Заметим, что в силу условия (b) функции d_j, a_{4+j}, $j=1,2$, принадлежат пространству $W_p^{(1)}(\Omega)$.

Теперь выражение w_3 из (49) внесём в последние два равенства системы (35). Появляющиеся при этом производные $w_{j\alpha^k}$ $(j,k=1,2)$ заменим их выражениями из (35), (43). В результате относительно w_1, w_2 запишем систему вида

$$c_{j1}w_1+c_{j2}w_2=0, \quad j=1,2, \tag{50}$$

где $c_{kj}=B_{kj}/\Lambda+a_{4+j\alpha^k}+[(-1)^{k+j}a_{4+k}(\ln\Lambda)_{\alpha^j}+a_{7-k}(\ln\Lambda)_{\alpha^{3-j}}]/2+B_{kj}a_{4+j}^2+B_{k3-j}a_5a_6$ $(k,j=$ $=1,2)$. Отметим, что функции c_{kj} принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Пусть почти всюду в области Ω выполняется условие

$$c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0. \tag{51}$$

Тогда из (50), (49) сразу получаем $w_1=w_2=w_3=0$ в области $\overline{\Omega}$. Итак, уравнение $a-L(a)=0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I-L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (34) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a-G_*(a)=a_F, \tag{52}$$

где $G_*(a)=(I-L)^{-1}G(a)$, $a_F=(I-L)^{-1}\widetilde{a}_F$.

Отметим, что вектор $a_c=(I-L)^{-1}a_*$ является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому в силу доказанного выше $a_c\equiv 0$, что и учтено нами при переходе к уравнению (52).

Также отметим, что вектор a_F в (52) зависит только от внешних сил и $a_F=0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (a)–(e). Тогда*

1) $G_*(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j=(w_1^j,w_2^j,w_3^j,\psi_1^j,\psi_2^j)$ $(j=1,2)$ справедлива оценка

$$\|G_*(a^1)-G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}\leqslant c_*\Big(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}\Big)\|a^1-a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$

$$\|w^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}=\|w_1^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_2^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_3^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)},\quad j=1,2,$$

где c_* — известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_F\in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов $(I-L)^{-1}$, G.

Исследуем разрешимость уравнения (52) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 3, для любых $a^j\in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j=1,2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}<r$, получаем

$$\|G_*(a^1)-G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}\leqslant q_*\|a^1-a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},\quad q_*=2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_*<1,\quad \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}<(1-q_*)r. \tag{53}$$

Тогда к уравнению (52) можно применить принцип сжимающих отображений [20, с. 146], согласно которому это уравнение в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}<r$ имеет единственное решение вида $a=\mathbb{R}(a_F)\in W_p^{(2)}(\Omega)$, где $\mathbb{R}$ — резольвента оператора G_*.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Вернёмся к условиям разрешимости (28), в которых под $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)\in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2). Используя равенства (1), (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (28) выполняются.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия (a)–(e), (27), (38), (40) или (41), (42), (51) и (53). Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)\in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2<p<4/(2-\beta)$.*

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00212).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимов, К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек : учеб. пособие / К.З. Галимов. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1975. — 328 с.
2. Ворович, И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. — М. : Наука, 1989. — 376 с.
3. Морозов, Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости / Н.Ф. Морозов. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1978. — 182 с.
4. Ворович, И.И. К задаче равновесия пластины, подкрепленной ребрами жесткости / И.И. Ворович, Л.П. Лебедев // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 1. — С. 87–92.
5. Карчевский, М.М. Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакрепленной оболочки / М.М. Карчевский // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — Т. 155, № 3. — С. 105–110.
6. Карчевский, М.М. О вариационных задачах теории трёхслойных пологих оболочек / М.М. Карчевский, В.Н. Паймушин // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 7. — С. 1217–1221.
7. Тимергалиев, С.Н. Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек / С.Н. Тимергалиев. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2011. — 260 с.
8. Кириченко, В.Ф. О существовании решения одной нелинейной связанной задачи термоупругости / В.Ф. Кириченко, В.А. Крысько // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 6. — С. 1583–1588.
9. Кириченко, В.Ф. О существовании решений в связанной задаче термоупругости для трехслойных оболочек / В.Ф. Кириченко // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 9. — С. 66–71.
10. Тимергалиев, С.Н. Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями / С.Н. Тимергалиев // Изв. вузов. Математика. — 2017. — № 4. — С. 59–75.
11. Тимергалиев, С.Н. К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко / С.Н. Тимергалиев // Прикл. математика и механика. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 98–113.
12. Тимергалиев, С.Н. Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко / С.Н. Тимергалиев // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 239–255.
13. Тимергалиев, С.Н. О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакреплёнными краями / С.Н. Тимергалиев // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 507–525.
14. Тимергалиев, С.Н. О существовании решений нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия оболочек типа Тимошенко в изометрических координатах / С.Н. Тимергалиев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 5. — С. 658–674.
15. Тимергалиев, С.Н. О существовании решений нелинейных краевых задач для непологих оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями / С.Н. Тимергалиев // Сиб. журн. индустр. математики. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 160–179.
16. Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
17. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1962. — 511 с.

18. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1963. — 640 с.
19. Векуа, И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1978. — 296 с.
20. Красносельский, М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Гостехиздат, 1956. — 392 с.

SOLVABILITY OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUILIBRIUM EQUATIONS OF NON-FLAT TIMOSHENKO TYPE SHELLS OF NON-ZERO GAUSSIAN CURVATURE IN ISOMETRIC COORDINATES

© 2024 / S. N. Timergaliev

Kazan State University of Architecture and Engineering, Russia
e-mail: samat_tim@mail.ru

We study the solvability of a boundary value problem for a system of five nonlinear second-order partial differential equations under given nonlinear boundary conditions, which describes the equilibrium state of elastic non-flat inhomogeneous isotropic shells with loose edges in the framework of the Timoshenko shear model, referred to isometric coordinates.The boundary value problem is reduced to a nonlinear operator equation with respect to generalized displacements in Sobolev space, the solvability of which is established using the principle of compressed mappings.

Keywords: partial differential equation, generalized solution, existence theorem

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00212).

REFERENCES

1. Galimov, K.Z., *Osnovy nelineynoy teorii tonkikh obolochek* (Fundamentals of Nonlinear Theory of Thin Shells), Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 1975.
2. Vorovich, I.I, *Matematicheskiye problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek* (Mathematical Problems of Nonlinear Theory of Shallow Shells), Moscow: Nauka, 1989.
3. Morozov, N.F., *Izbrannyye dvumernyye zadachi teorii uprugosti* (Selected two-dimensional problems of elasticity theory), Leningrad: Izd-vo LGU, 1978.
4. Vorovich, I.I. and Lebedev, L.P., On the problem of equilibrium of a plate reinforced with stiffeners, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 1, pp. 87–92.
5. Karchevskii, M.M., Study of the solvability of the nonlinear problem of the equilibrium of a shallow unsupported shell, *Uchenyye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki*, 2013, vol. 155, no. 3, pp. 105–110.
6. Karchevskii, M.M. and Paimushin, V.N., Variational problems in the theory of three-layer shallow shells, *Differ. Equat.*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1126–1130.
7. Timergaliev, S.N., *Teoremy sushchestvovaniya v nelineynoy teorii tonkikh uprugikh obolochek* (Existence Theorems in the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells), Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 2011.
8. Kirichenko, V.F. and Krys'ko, V.A., The existence of a solution to a nonlinear connected problem of thermoelasticity, *Differ. Equat.*, 1984, vol. 20, no. 9, pp. 1583–1588.
9. Kirichenko, V.F., Solvability of a connected thermoelasticity problem for three-layer shells, *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 9, pp. 57–61.
10. Timergaliev, S.N., A method of integral equations in nonlinear boundary-value problems for flat shells of the Timoshenko type with free edges, *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 49–64.
11. Timergaliev, S.N., On the problem of solvability of nonlinear equilibrium problems for shallow shells of Timoshenko type, *J. Appl. Math. Mech.*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 98–113.

12. Timergaliev, S.N., Method of integral equations for studying the solvability of boundary value problems for the system of nonlinear differential equations of the theory of Timoshenko type shallow inhomogeneous shells, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 243–259.
13. Timergaliev, S.N., On the solvability of nonlinear boundary value problems for the system of differential equations of equilibrium of shallow anisotropic Timoshenko-type shells with free edges, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 488–506.
14. Timergaliev, S.N., On the existence of solutions of nonlinear boundary value problems for a system of differential equilibrium equations for Timoshenko-type shells in isometric coordinates, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 5, pp. 670–687.
15. Timergaliev, S.N., On the existence of solutions of nonlinear boundary value problems for nonshallow Timoshenko-type shells with free edges, *J. Appl. Industr. Math.*, 2023, vol. 17, no. 4, pp. 874–891.
16. Vekua, I.N., *Obobshchennyye analiticheskiye funktsii* (Generalized Analytic Functions), Moscow: Nauka, 1988.
17. Muskhelishvili, N.I., *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* (Singular Integral Equations), Moscow: Nauka, 1962.
18. Gakhov, F.D., *Krayevyye zadachi* (Boundary Value Problems), Moscow: Fizmatgiz, 1963.
19. Vekua, I.N., *Osnovy tenzornogo analiza i teorii kovariantov* (Fundamentals of Tensor Analysis and Covariant Theory), Moscow: Nauka, 1978.
20. Krasnoselskii, M.A., *Topologicheskiye metody v teorii nelineynykh integral'nykh uravneniy* (Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations), Moscow: Gostekhizdat, 1956.