ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 11

Ноябрь 2023

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ДУ

www.sciencejournals.ru

300 лет

Российская Академия Наук

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 11, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.9

О НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2023 г. **А. В. Арутюнов, З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский**

Рассмотрены автономные дифференциальные включения с нелинейными краевыми условиями. Для них получены достаточные условия существования решений в классе абсолютно непрерывных функций. Показано, что соответствующая теорема существования применима к задаче Коши и к антипериодической краевой задаче. Полученный результат использован для выведения нового неравенства среднего значения для непрерывно дифференцируемых функций.

DOI: 10.31857/S0374064123110018, EDN: PEUEVQ

Введение. Пусть задано натуральное число n. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, через $|\cdot|$ – соответствующую норму на $\mathbb{R}^n$, через $B(x,r)$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x\in\mathbb{R}^n$ радиуса $r\geqslant 0$, т.е. $B(x,r):=\{z\in\mathbb{R}^n: |x-z|\leqslant r\}$.

Пусть заданы область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, многозначное отображение $G:\Omega\rightrightarrows\mathbb{R}^n$, вектор $x_0\in\Omega$, число $R>0$ такое, что $\mathcal{B}:=B(x_0,R)\subset\Omega$, число $\tau>0$ и отображения $\Psi,\Phi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального включения

$$\dot x\in G(x),\quad \Psi(x(0))=\Phi(x(\tau)),\quad x(t)\in\mathcal{B},\quad t\in[0,\tau]. \tag{1}$$

Под решением этой задачи будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}^n$ такую, что $x(t)\in\mathcal{B}$ и $\dot x(t)\in G(x(t))$ для почти всех $t\in[0,\tau]$, при этом имеет место равенство $\Psi(x(0))=\Phi(x(\tau))$.

Цель настоящей работы – получить достаточные условия существования решения задачи (1). Утверждения о существовании и свойствах решений дифференциальных включений имеют приложения в теории управления, оптимальном управлении и негладком анализе. В данной статье мы применим полученную теорему существования решения задачи (1) для нахождения неравенств среднего значения для непрерывно дифференцируемых функций.

1. Основной результат. Сформулируем достаточные условия существования решения краевой задачи (1). Для этого предварительно введём необходимые обозначения.

Обозначим график многозначного отображения G на шаре $\mathcal{B}$ через Γ, т.е.

$$\Gamma:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n: x\in\mathcal{B},\quad y\in G(x)\}.$$

Множество Γ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Норму в этом пространстве определим по формуле

$$|(x,y)|:=|x|+|y|,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Для произвольного множества $A\subset\mathbb{R}^n$ положим

$$\operatorname{dist}(x,A):=\inf_{a\in A}|x-a|,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Здесь и далее инфимум пустого множества считаем равным $+\infty$, а супремум пустого множества – равным $-\infty$. Функцию dist будем использовать также для векторов и подмножеств пространства $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Напомним, что многозначное отображение $G:\Omega\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ называется *полунепрерывным сверху* (см., например, [1, гл. 2, § 5; 2, § 2.3]), если для любого $x\in\Omega$ имеет место соотношение

$$\sup_{v\in G(u)}\operatorname{dist}(v,G(x))\to 0\quad\text{при}\quad u\to x.$$

Предположим, что:

(A1) множество $G(x)$ является непустым выпуклым компактом для любого $x \in \Omega$, многозначное отображение G полунепрерывно сверху;

(A2) отображения Ψ и Φ непрерывны.

Положим

$$\alpha := \max_{x\in\mathcal{B}} |\Psi(x) - x|, \quad \beta := \max_{x\in\mathcal{B}} |\Phi(x) + x - 2x_0|, \quad \gamma := \max_{(x,y)\in\Gamma} |y|.$$

Из предположений (A1) и (A2) вытекает, что указанные α, β и γ корректно определены.

Теорема A. *Пусть выполняются предположения (A1) и (A2). Если*

$$\alpha + \beta < 2R, \tag{2}$$

то для любого положительного числа τ, удовлетворяющего неравенству

$$\tau\gamma \leqslant 2R - \alpha - \beta, \tag{3}$$

существует решение $\bar{x} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи (1).

Доказательство этой теоремы приведено в п. 2. Прежде чем перейти к доказательству, обсудим её и сформулируем следствия.

Пусть $x_0 = 0$, $\Psi(x) \equiv x$ и $\Phi(x) \equiv -x$. Тогда задача (1) является антипериодической краевой задачей, т.е. принимает вид

$$\dot{x} \in G(x), \quad x(0) + x(\tau) = 0, \quad x(t) \in B(0,R), \quad t \in [0,\tau]. \tag{4}$$

В рассматриваемом случае имеем $\alpha = \beta = 0$. Значит, условие (2) выполняется. Таким образом, для задачи (4) справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть выполняется предположение (A1). Тогда для любого положительного числа τ, для которого $\gamma\tau \leqslant 2R$, существует решение $\bar{x} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи (4).*

Аналогичное утверждение для антипериодической краевой задачи для неявного обыкновенного дифференциального уравнения с несколько более слабой оценкой длины интервала времени τ было получено в статье [3].

Пусть теперь $x_0 = 0$, $\Psi(x) \equiv x$ и $\Phi(x) \equiv -x$. Тогда задача (1) является периодической краевой задачей, т.е. принимает вид

$$\dot{x} \in G(x), \quad x(0) = x(\tau), \quad x(t) \in B(0,R), \quad t \in [0,\tau].$$

В рассматриваемом случае $\alpha = 0$ и $\beta = 2R$. Поэтому условие (2) нарушается. Таким образом, теорема A неприменима к периодической краевой задаче.

Пусть теперь $\Psi(x) \equiv x$ и $\Phi(x) \equiv x_0$. Тогда задача (1) является задачей Коши, т.е. принимает вид

$$\dot{x} \in G(x), \quad x(0) = x_0, \quad x(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0,\tau].$$

В данном случае $\alpha = 0$ и $\beta = R$. Значит, условие (2) выполняется. Следовательно, для задачи Коши теорема A гарантирует существование решения на отрезке $[0,\tau]$ при τ таком, что $\gamma\tau \leqslant R$. Это утверждение о существовании решения задачи Коши хорошо известно (см., например, [1, § 7, теорема 1]).

Завершая обсуждение теоремы A, отметим, что в ней предположение (A1) можно заменить предположением

(A1′) множество $G(x)$ является непустым выпуклым компактом для любого $x \in \Omega$, многозначное отображение G полунепрерывно снизу*).

А именно, справедливо следующее утверждение.

*) Многозначное отображение G называется *полунепрерывным снизу*, если для любого $x \in \Omega$ имеет место соотношение $\sup\limits_{y\in G(x)} \operatorname{dist}(y, G(u)) \to 0$ при $u \to x$.

Следствие 2. *Пусть выполняются предположения (A1′), (A2) и (2). Тогда для любого положительного числа τ, для которого $\gamma\tau \leqslant 2R$, существует решение $\bar{x} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи (1).*

Действительно, если выполняется (A1′), то по теореме Майкла о непрерывном селекторе (см., например, [2, теорема 2.6.1]) существует непрерывное отображение $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ такое, что $g(x) \in G(x)$ при всех $x \in \Omega$. Поэтому для задачи

$$\dot{x} = g(x), \quad \Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)), \quad x(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0,\tau],$$

выполняются предположения теоремы А. Решение $\bar{x}$ этой задачи существует по теореме А и, очевидно, является решением задачи (1).

2. Доказательство теоремы А. Зафиксируем произвольное положительное число τ такое, что справедливо неравенство (3). Доказательство теоремы разобьем на три этапа.

Этап I. Построим последовательность липшицевых отображений $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, приближающих многозначное отображение G в следующем смысле:

$$\operatorname{dist}((x, g_j(x)), \Gamma) \leqslant \frac{1}{j}, \quad x \in \mathcal{B}; \quad |g_j(x)| \leqslant \gamma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

В силу теоремы Челлины (см., например, [2, теорема 2.5.2]) существует последовательность непрерывных отображений $\widetilde{g}_j : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, для которой имеют место соотношения

$$\operatorname{dist}((x, \widetilde{g}_j(x)), \Gamma) \leqslant \frac{1}{3j}, \quad |\widetilde{g}_j(x)| \leqslant \gamma, \quad x \in \mathcal{B}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Положим $\theta_j := (3j\gamma)^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. По теореме Вейерштрасса–Стоуна о приближении непрерывных функций многочленами (см., например, [4, гл. XVI, § 4, теорема 3]) существуют полиномиальные отображения $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, приближающие отображения $(1-\theta_j)\widetilde{g}_j$ в следующем смысле:

$$|(1-\theta_j)\widetilde{g}_j(x) - p_j(x)| \leqslant \frac{1}{3j}, \quad x \in \mathcal{B}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Отображения p_j удовлетворяют условию Липшица на шаре $\mathcal{B}$, т.е. при каждом j существует число $\ell_j \geqslant 0$ такое, что $|p_j(x_1) - p_j(x_2)| \leqslant \ell_j |x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$.

Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\pi(x)$ ближайшую точку к x в множестве $\mathcal{B}$. Как известно [5, § 1.9], поскольку множество $\mathcal{B}$ выпукло, то такое отображение $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ однозначно определено и является липшицевым с константой, равной единице. Кроме того,

$$\pi(x) = x, \quad x \in \mathcal{B}; \quad \pi(x) \in \mathcal{B}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Зададим отображения $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по формуле

$$g_j(x) = p_j(\pi(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \mathbb{N}.$$

При каждом $j \in \mathbb{N}$ отображение g_j липшицево с константой Липшица ℓ_j, поскольку π липшицево с константой, равной единице, и принимает значения в шаре $\mathcal{B}$, а отображение g_j липшицево с константой Липшица ℓ_j на $\mathcal{B}$. Кроме того,

$$g_j(x) = p_j(x), \quad x \in \mathcal{B}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

в силу равенства (8).

Для любых $x \in \mathcal{B}$ и $j \in \mathbb{N}$ имеем соотношения

$$\operatorname{dist}((x, g_j(x)), \Gamma) = \operatorname{dist}((x, p_j(x)), \Gamma) \leqslant$$

$$\leqslant |(x, p_j(x)) - (x, (1-\theta_j)\widetilde{g}_j(x))| + |(x, (1-\theta_j)\widetilde{g}_j(x)) - (x, \widetilde{g}_j(x))| + \operatorname{dist}((x, \widetilde{g}_j(x)), \Gamma) =$$

$$= |g_j(x) - (1-\theta_j)\widetilde{g}_j(x)| + \theta_j|\widetilde{g}_j(x)| + \operatorname{dist}((x, \widetilde{g}_j(x)), \Gamma) \leqslant \frac{1}{3j} + \theta_j\gamma + \frac{1}{3j} = \frac{1}{j}.$$

Здесь первое равенство вытекает из (9), первое неравенство – из неравенства треугольника для функции dist, второе равенство – из определения нормы в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а последнее неравенство вытекает из неравенств в (6) и соотношения $\theta_j = (3j\gamma)^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$|g_j(x)| = |p_j(\pi(x))| \leqslant |p_j(\pi(x)) - (1-\theta_j)\widetilde{g}_j(\pi(x))| + |(1-\theta_j)\widetilde{g}_j(\pi(x))| \leqslant \frac{1}{3j} + (1-\theta_j)\gamma = \gamma$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $j \in \mathbb{N}$. Здесь первое равенство вытекает из определения отображения g_j; первое неравенство – это неравенство треугольника для нормы; второе неравенство вытекает из (7), второго соотношения в (6) и условия $\pi(x) \in \mathcal{B}$ в силу (8); а последнее равенство вытекает из равенства $\theta_j = (3j\gamma)^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Итак, существование липшицевых отображений g_j, удовлетворяющих (5), доказано.

Этап II. Покажем, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ краевая задача

$$\dot{x} = g_j(x), \quad \Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)), \quad x(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0, \tau], \tag{10}$$

имеет абсолютно непрерывное решение $x_j : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$.

Зафиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Для доказательства существования искомой функции $x_j(\cdot)$ построим сначала вспомогательные отображения $\xi(\cdot)$, $\widetilde{\Psi}(\cdot)$, $\widetilde{\Phi}(\cdot)$ и вектор $\bar{a} \in \mathcal{B}$, и опишем их свойства.

Из второго неравенства в (5) и липшицевости отображения g_j на всём пространстве $\mathbb{R}^n$ в силу теорем о существовании и единственности решения (см., например, [6, теоремы II.4.1, II.4.5]) следует, что для любого $a \in \mathcal{B}$ существует единственное решение $\xi(a, \cdot) : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши

$$\dot{x} = g_j(x), \quad x(0) = a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \tau]. \tag{11}$$

Из [7, следствие 1.10.2] вытекает непрерывность отображения $\xi : \mathcal{B} \times [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|\xi(a, \tau) - a| = \left| \int_0^\tau g_j(\xi(t, a))\, dt \right| \leqslant \int_0^\tau |g_j(\xi(t, a))|\, dt \leqslant \tau\gamma, \quad a \in \mathcal{B}. \tag{12}$$

Здесь последнее неравенство вытекает из второй оценки в (5).

Непрерывные отображения $x \mapsto \Psi(x) - x$ и $x \mapsto \Phi(x) + x - 2x_0$, $x \in \mathcal{B}$, ограничены константами α и β, т.е. $|\Psi(x) - x| \leqslant \alpha$ и $|\Phi(x) + x - 2x_0| \leqslant \beta$ для всех $x \in \mathcal{B}$. Поэтому, по теореме Титце о продолжении, существуют непрерывные отображения $\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$|\widetilde{\Psi}(x) - x| \leqslant \alpha, \quad |\widetilde{\Phi}(x) + x - 2x_0| \leqslant \beta, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$\Psi(x) = \widetilde{\Psi}(x), \quad \Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x), \quad x \in \mathcal{B}. \tag{13}$$

Покажем теперь, что существует решение уравнения

$$\widetilde{\Psi}(a) = \widetilde{\Phi}(\xi(a, \tau)), \quad a \in \mathcal{B}, \tag{14}$$

с неизвестным a. Сделаем замену $b = a - x_0$ и положим

$$\Upsilon(b) := b - \widetilde{\Psi}(b + x_0) + \widetilde{\Phi}(\xi(b + x_0, \tau)), \quad b \in B(0, R).$$

Тогда уравнение (14) принимает вид

$$b = \Upsilon(b), \quad b \in B(0, R). \tag{15}$$

Для каждого элемента $b \in \mathbb{R}^n$, для которого $|b| = R$, справедливо неравенство

$$\langle b, \Upsilon(b)\rangle \leqslant R^2. \tag{16}$$

Действительно,

$$\langle b, \Upsilon(b)\rangle = \langle b, b - \widetilde{\Psi}(b+x_0) + \widetilde{\Phi}(\xi(b+x_0,\tau))\rangle = \langle b, b + x_0 - \widetilde{\Psi}(b+x_0)\rangle +$$
$$+ \langle b, \widetilde{\Phi}(\xi(b+x_0,\tau)) + \xi(b+x_0,\tau) - 2x_0\rangle + \langle b, b + x_0 - \xi(b+x_0,\tau)\rangle - \langle b, b\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \alpha R + \beta R + R\tau\gamma - R^2 \leqslant 2R^2 - R^2 = R^2.$$

Здесь первое равенство вытекает из определения отображения Υ, первое неравенство – из первой строки в (13), из соотношения (12) и из $|b| = R$, а последнее неравенство вытекает из (3).

Заметим, что

$$b \neq \lambda\Upsilon(b) \quad \text{для любых } \lambda \in (0,1) \text{ и } b \in \mathbb{R}^n \text{ такого, что } |b| = R. \tag{17}$$

Действительно, в противном случае если $b = \lambda\Upsilon(b)$ для некоторых b $(|b| = R)$ и λ $(\lambda \in \in (0,1))$, то

$$\langle b, \Upsilon(b)\rangle = \langle b, \lambda^{-1}b\rangle = \lambda^{-1}R^2 > R^2,$$

что противоречит (16).

Из (17) и непрерывности отображения Υ на шаре $B(0,R)$ по теореме Боля о неподвижной точке (см., например, [8, § 5, теорема 7.2]) следует, что существует решение $\bar{b} \in B(0,R)$ уравнения (15). Значит, точка $\bar{a} := x_0 + \bar{b}$ является решением уравнения (14).

На этом построение отображений $\xi(\cdot)$, $\widetilde{\Psi}(\cdot)$, $\widetilde{\Phi}(\cdot)$ и вектора $\bar{a} \in \mathcal{B}$ завершено. Положим $x_j(t) := \xi(\bar{a}, t)$, $t \in [0,\tau]$, и покажем, что функция $x_j(\cdot)$ является искомой.

По определению функции $\xi(\cdot)$ функция $x_j(\cdot)$ является решением задачи Коши (11) при $a = \bar{a}$. Кроме того, поскольку $\bar{a} = x_j(0)$, $\xi(\tau, \bar{a}) = x_j(\tau)$ и $\bar{a}$ является решением уравнения (14), то

$$\widetilde{\Psi}(x_j(0)) = \widetilde{\Psi}(\bar{a}) = \widetilde{\Phi}(\xi(\tau,\bar{a})) = \widetilde{\Phi}(x_j(\tau)).$$

Таким образом,

$$\dot{x}(t) = g_j(x(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad \widetilde{\Psi}(x(0)) = \widetilde{\Phi}(x(\tau)), \quad x_j(0) = \bar{a} \in \mathcal{B}. \tag{18}$$

Покажем, что функция $x_j(\cdot)$ является решением задачи (10).

Из первого равенства в (18) и из второго неравенства в (5) следует, что

$$|x_j(t) - x_j(0)| \leqslant t\gamma, \quad |x_j(\tau) - x_j(t)| \leqslant (\tau - t)\gamma, \quad t \in [0,\tau] \tag{19}$$

(доказательство этих неравенств аналогично рассуждениям в (12)).

Для $t \in [0,\tau]$ имеем соотношения

$$2|x_j(t) - x_0| =$$
$$= |(x_j(t) - x_j(0)) + (x_j(0) - \widetilde{\Psi}(x_j(0))) + (\widetilde{\Phi}(x_j(\tau)) + x_j(\tau) - 2x_0) + (x_j(t) - x_j(\tau))| \leqslant$$
$$\leqslant |x_j(t) - x(0)| + |x_j(0) - \widetilde{\Psi}(x_j(0))| + |\widetilde{\Phi}(x_j(\tau)) + x_j(\tau) - 2x_0| + |x_j(t) - x_j(\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant t\gamma + \alpha + \beta + (\tau - t)\gamma \leqslant 2R.$$

Здесь равенство вытекает из того, что $\widetilde{\Psi}(x_j(0)) = \widetilde{\Phi}(x_j(\tau))$ в силу (18); первое неравенство – это неравенство треугольника для нормы; второе неравенство вытекает из первой строки в (13) и из (19), а последнее неравенство вытекает из (3). Из доказанного неравенства следует, что

$$x_j(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0,\tau]. \tag{20}$$

Имеем

$$\Psi(x_j(0)) = \widetilde{\Psi}(x_j(0)) = \widetilde{\Phi}(x_j(\tau)) = \Phi(x_j(\tau)).$$

Здесь первое и последнее равенства вытекают из второй строки в (13) и включения (20); а второе равенство вытекает из второго равенства в (18). Из полученного равенства, из тождества в (18) и из включения (20) следует, что функция $x_j(\cdot)$ является решением краевой задачи (10).

Этап III. Построенная на этапе II последовательность непрерывно дифференцируемых функций $x_j : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Это вытекает из того, что $x_j(\cdot)$ является решением краевой задачи (10) и из второго неравенства в (5). Поэтому, по теореме Арцела (см., например, [9, гл. II, § 7.7]), существует равномерно сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_j(\cdot)\}$. Переходя к подпоследовательности, не ограничивая общности, будем считать, что $\{x_j(\cdot)\}$ сходится равномерно к некоторой функции $\bar{x} : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$. По построению $\bar{x}(t) \in \mathcal{B} \subset \Omega$ для любого $t \in [0,\tau]$. Докажем, что функция $\bar{x}$ является искомой.

Сначала покажем, что

$$\dot{x}_j(t) \in B(\operatorname{conv} G(B(x_j(t), 2j^{-1})), 2j^{-1}), \quad t \in [0,\tau]. \tag{21}$$

Здесь conv – это выпуклая оболочка множества, $B(A,r) := \bigcup_{a\in A} B(a,r)$ для любого непустого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, для любого $r \geqslant 0$.

Зафиксируем $t \in [0,\tau]$. Поскольку функция $x_j(\cdot)$ является решением задачи (10), то $\dot{x}_j(t) = g(x_j(t))$. Отсюда и из (5) следует, что существует точка $(x,y) \in \Gamma$ такая, что

$$|x_j(t) - x| + |\dot{x}_j(t) - y| \leqslant 2j^{-1}.$$

Следовательно, $x \in B(x_j(t), 2j^{-1})$, $\dot{x}_j(t) \in B(y, 2j^{-1})$ и $y \in G(x)$. Поэтому

$$\dot{x}_j(t) \in B(y, 2j^{-1}) \subset B(G(x), 2j^{-1}) \subset B(G(B(x_j(t), 2j^{-1})), 2j^{-1}).$$

Отсюда, в силу произвольности выбора t, следует, что выполняется включение (21).

Поскольку $\bar{x}(t) \in \Omega$ для любого $t \in [0,\tau]$, из (21) по лемме о приближении решений включения (см., например, [2, лемма 2.8.1] или [1, § 7, лемма 1]) следует, что функция $\bar{x}(\cdot)$ является решением включения $\dot{x} \in G(x)$, т.е. $\dot{\bar{x}}(t) \in G(\bar{x}(t))$ для п.в. $t \in [0,\tau]$. Кроме того, поскольку функции $x_j(\cdot)$ являются решениями краевых задач (10), то $\Psi(x_j(0)) = \Phi(x_j(\tau))$. Отсюда, из непрерывности отображений Ψ и Φ и из равномерной сходимости $x_j(\cdot)$ к $\bar{x}(\cdot)$ вытекает, что $\Psi(\bar{x}(0)) = \Phi(\bar{x}(\tau))$. Значит, $\bar{x}(\cdot)$ является решением задачи (1). Теорема А доказана.

3. Неравенства среднего значения. Применим теорему А для получения неравенств среднего значения для гладких функций. Пусть далее $x_0 = 0$, $\mathcal{B} = B(0,R) \subset \Omega$ и задана функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Известно (см., например, [10, 11]) следующее утверждение. Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда существует точка $a \in \mathcal{B}$ такая, что имеет место оценка

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1}{2R}\left(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)\right), \tag{22}$$

где $f'(a)$ – градиент функции f в точке a.

Для чётной на $\mathcal{B}$ функции f, не являющейся постоянной, это утверждение тривиально выполняется с $a = 0$. При этом правая часть неравенства в (22) положительна. Поэтому представляется естественным получение более сильной оценки, чем (22), которая будет точной для чётных функций f. Такую оценку даёт следующее утверждение.

Предложение. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда существует точка $a \in \mathcal{B}$ такая, что*

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1}{2R}\max_{x\in\mathcal{B}}(f(x) - f(-x)). \tag{23}$$

Доказательство. Если $f'(x) = 0$ в некоторой точке $x \in \mathcal{B}$, то точка $a = x$ является искомой. Поэтому далее будем предполагать, что $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathcal{B}$. Тогда существует область $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ такая, что $\mathcal{B} \subset \widetilde{\Omega}$ и $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in \widetilde{\Omega}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Omega = \widetilde{\Omega}$.

Положим $\varepsilon := \min\limits_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|$. По предположению $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau := 2\varepsilon R$. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = \frac{f'(x)}{|f'(x)|^2}, \quad x(0) + x(\tau) = 0, \quad x(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0, \tau],$$

которая совпадает с задачей (4) при $G(x) := \{f'(x)|f'(x)|^{-2}\}$, $x \in \Omega$. Для отображения G выполняется предположение (A1), поскольку функция f непрерывно дифференцируема и $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in \Omega$. Кроме того,

$$\gamma := \max_{x\in\mathcal{B}} \left| \frac{f'(x)}{|f'(x)|^2} \right| = \max_{x\in\mathcal{B}} \frac{1}{|f'(x)|} = \frac{1}{\min\limits_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|} = \varepsilon^{-1}.$$

Значит, $\gamma\tau \leqslant 2R$. Поэтому, в силу следствия 1, существует абсолютно непрерывная функция $\bar{x} : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\dot{\bar{x}}(t) \equiv \frac{f'(\bar{x}(t))}{|f'(\bar{x}(t))|^2}, \quad \bar{x}(0) + \bar{x}(\tau) = 0, \quad \bar{x}(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0, \tau]. \tag{24}$$

Имеем

$$f(\bar{x}(\tau)) - f(\bar{x}(0)) = \int\limits_0^\tau \langle f'(\bar{x}(t)), \dot{\bar{x}}(t) \rangle \, dt = \int\limits_0^\tau \left\langle f'(\bar{x}(t)), \frac{f'(\bar{x}(t))}{|f'(\bar{x}(t))|^2} \right\rangle dt = \tau.$$

Здесь первое равенство – это формула Ньютона–Лейбница, а второе равенство вытекает из тождества в (24). Отсюда, поскольку в силу (24) имеет место равенство $\bar{x}(0) = -\bar{x}(\tau)$, полагая $x_* := \bar{x}(\tau)$, получаем, что

$$f(x_*) - f(-x_*) = f(\bar{x}(\tau)) - f(-\bar{x}(\tau)) = f(\bar{x}(\tau)) - f(\bar{x}(0)) = \tau = 2\varepsilon R.$$

Из последнего равенства имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{2R}(f(x_*) - f(-x_*)) \leqslant \frac{1}{2R} \max_{x\in\mathcal{B}} (f(x) - f(-x)).$$

Отсюда и из того, что $\varepsilon = \min\limits_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|$, получаем (23). Предложение доказано.

Сравним оценки (22) и (23). Во-первых, для правых частей неравенств (22) и (23) очевидно справедливо соотношение

$$\max_{x\in\mathcal{B}} (f(x) - f(-x)) \leqslant \max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x).$$

Во-вторых, для произвольной чётной на $\mathcal{B}$ функции f, не являющейся постоянной, правая часть в (22) положительна, а правая часть в (23) равна нулю. Таким образом, оценка (23) сильнее оценки (22) и неравенство в (23) превращается в равенство для чётных функций f.

Приведём простое следствие предложения.

Следствие 3. *Пусть функция $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ чётна на $\mathcal{B}$, функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Тогда существует точка $a \in \mathcal{B}$ такая, что*

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1}{R} \max_{x\in\mathcal{B}} |f(x) - f_0(x)|.$$

Доказательство. Из предложения следует, что существует точка $a \in \mathcal{B}$ такая, что

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1}{2R}\max_{x\in\mathcal{B}}(f(x)-f(-x)) \leqslant \frac{1}{2R}\max_{x\in\mathcal{B}}(|f(x)-f_0(x)|+|f(-x)-f_0(-x)|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2R}(\max_{x\in\mathcal{B}}|f(x)-f_0(x)|+\max_{x\in\mathcal{B}}|f(-x)-f_0(-x)|) = \frac{1}{R}\max_{x\in\mathcal{B}}|f_1(x)|.$$

Здесь второе неравенство вытекает из чётности функции f_0 и неравенства треугольника для модуля, а последнее неравенство вытекает из неравенства треугольника для функции $\max$. Следствие доказано.

Из приведённого утверждения следует, что нуль является устойчивой критической точкой чётной функции в следующем смысле: если последовательность гладких функций f_j сходится равномерно к чётной (не обязательно гладкой) функции, то существует сходящаяся к нулю последовательность точек $\{a_j\} \subset \mathcal{B}$ такая, что $f_j'(a_j) \to 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
2. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М., 2014.
3. *Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 205–213.
4. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. II. М., 2012.
5. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2004.
6. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
7. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
8. *Granas A., Dugundji J.* Fixed Point Theory. New York, 2003.
9. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2004.
10. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S.* Mean value inequalities // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. № 4. P. 1075–1083.
11. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Variational principles and mean value estimates // J. Optim. Theory Appl. 2022. V. 193. P. 21–41.

Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича РАН, г. Москва,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.
После доработки 24.05.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1451–1461

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ

© 2023 г. **А. Н. Канатников, О. С. Ткачева**

Рассмотрена модель взаимодействия вируса иммунодефицита человека с иммунной системой человека. Проанализированы положения равновесия в фазовом пространстве системы и их устойчивость, построены итоговые (предельные) границы траекторий. Доказано, что локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия, соответствующего отсутствию болезни, равносильна его глобальной асимптотической устойчивости. Показано, что потеря устойчивости вызвана транскритической бифуркацией.

DOI: 10.31857/S037406412311002X, EDN: PFOXHT

Введение. Вирус иммунодефицита человека (ВИЧ) привлекает внимание многих исследователей из различных областей мировой науки с 1980-х гг. В частности, интерес многих учёных был сосредоточен на разработке и изучении математических моделей, описывающих иммунологический ответ на инфекцию. Существуют различные типы таких динамических моделей, характеризующих взаимодействие ВИЧ с клетками иммунной системы [1–8].

В настоящее время во многих отраслях науки для предварительных исследований используются математические модели различных явлений и процессов, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Чаще всего такие модели возникают как упрощённый вариант более сложных моделей, включающих уравнения в частных производных, интегральные уравнения и т.д. Такие упрощённые модели, хотя и не дают точной информации, сохраняют многие качественные свойства протекающих процессов [9]. Особенно актуален и распространён анализ качественных свойств динамических систем, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений невысокой размерности, которые используются как модели различных процессов в биологии и медицине. Качественный анализ динамической системы традиционно включает исследование положений равновесия, анализ их количества в зависимости от параметров системы и анализ устойчивости, бифуркационный анализ, асимптотическое поведение траекторий, решение задач локализации циклов, сепаратрис, аттракторов и других структур фазового портрета системы [10, 11].

Эффективными методами поиска и анализа динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений являются функциональный метод локализации и теорема Ла-Салля [10–13]. Применение этих методов позволяет делать заключения об асимптотическом поведении траекторий, в частности, находить множества, которые захватывают все траектории системы.

В статье рассмотрена модель, описывающая взаимодействие иммунной системы человека с вирусом иммунодефицита человека [1, 7, 8, 14]. Модель учитывает взаимодействие четырёх популяций клеток: неинфицированных T-клеток, латентно инфицированных (пассивных) T-клеток, активно инфицированных T-клеток, а также свободных вирусных частиц.

В п. 1 описывается рассматриваемая математическая модель взаимодействия имунной системы с ВИЧ, п. 2 содержит некоторые теоретические сведения об используемых математических методах. Анализу положений равновесия в фазовом пространстве системы (неотрицательном ортанте) посвящён п. 3. В п. 4 определены условия локальной устойчивости. В п. 5 построены итоговые (предельные) границы траекторий системы, в п. 6 исследуется глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия E_0, соответствующего отсутствию инфицированных клеток и вирусных частиц. Ситуация потери устойчивости в положении равновесия E_0 и характер бифуркации потери устойчивости обсуждаются в п. 7.

1. Математическая модель ВИЧ. Рассмотрим модель взаимодействия ВИЧ с T-клетками, являющимися составной частью иммунной системы человека. Эта модель, ранее предложенная в работах [1, 8], представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \frac{a_0}{1+v} - a_1 x - a_2 v x + a_3 x\left(1 - \frac{x+y+z}{a_4}\right),$$

$$\dot{y} = a_2 v x - a_1 y - a_5 y, \quad \dot{z} = a_5 y - a_6 z, \quad \dot{v} = a_7 z - a_2 v x - a_8 v. \qquad (1)$$

Здесь x – концентрация неинфицированных T-клеток; y – концентрация инфицированных пассивных T-клеток (т.е. латентных, не воспроизводящих вирус); z – концентрация инфицированных активных T-клеток; v – концентрация вирусных частиц. Все фазовые переменные предполагаются неотрицательными, а параметры системы a_i – положительными.

Показано [1], что модель имеет два состояния равновесия: неинфицированное состояние, в котором вирус отсутствует, и эндемически инфицированное состояние, в котором присутствуют вирус и инфицированные T-клетки. Согласно рассматриваемой модели разные вирусные штаммы, характеризующиеся образованием разного количества инфекционных вирионов в инфицированных T-клетках, могут вызывать различную степень истощения T-клеток, и истощение может проходить с разной скоростью. Для данной модели в статье [8] найдены положения равновесия, введено оптимальное управление. Управление представляет собой процент эффекта химиотерапии на продукцию вируса. В работе [14] рассмотрена семимерная модель ВИЧ. Подход к исследованию динамики модели основан на сочетании метода локализации компактных инвариантных множеств и теоремы Ла-Салля. Изучены возможности искоренения популяций инфицированных клеток на ранней стадии инфекции пациента. Найдены конечные верхние границы для всех переменных моделей, определяющих политоп, со свойствами аттрактора.

В качестве фазового пространства системы (1) выбран неотрицательный ортант:

$$\mathbb{R}^4_{+,0} = \{(x,y,z,v) \in \mathbb{R}^4 : x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad v \geqslant 0\}.$$

Отметим, что неотрицательный ортант является положительно инвариантным множеством, что можно интерпретировать как биологическую адекватность модели: траектории системы, начинающиеся в $\mathbb{R}^4_{+,0}$, остаются в этом множестве при возрастании времени.

2. Предварительные сведения. Качественное исследование модели распространения ВИЧ в значительной мере опирается на метод локализации инвариантных компактных множеств – функциональный метод локализации [10, 11]. В рамках этого метода строятся множества в фазовом пространстве системы, которые содержат все компактные множества, инвариантные для системы. В дальнейшем такие множества называются *локализирующими*. Локализирующие множества строятся с помощью гладких функций, называемых *локализирующими функциями*. Рассмотрим два ключевых факта этого метода.

Для произвольной функции ϕ, непрерывно дифференцируемой на фазовом пространстве Φ системы $\dot{x} = f(x)$, через $S(\phi)$ обозначим множество

$$S(\phi) = \{x \in \Phi : \dot{\phi}(x) = 0\},$$

где $\dot{\phi}(x)$ – производная функции ϕ в силу системы: $\dot{\phi}(x) = \phi'(x) f(x)$. Указанное множество будем называть *универсальным сечением*, соответствующим функции ϕ.

Теорема 1 [10]. *Пусть функция ϕ непрерывно дифференцируема на фазовом пространстве Φ системы $\dot{x} = f(x)$ и $Q \subseteq \Phi$. Тогда любой инвариантный компакт, содержащийся в Q, также содержится в множестве*

$$\Omega(\phi, Q) = \{x \in Q : \phi_{\inf}(Q) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi_{\sup}(Q)\},$$

где

$$\phi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in S(\phi) \bigcap Q} \phi(x), \quad \phi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in S(\phi) \bigcap Q} \phi(x).$$

Сформулированная теорема позволяет организовать итерационную процедуру построения локализирующих множеств. Пусть задана последовательность $\{\phi_i\}$ локализирующих функций. Положим

$$Q_0 = Q, \quad Q_i = \Omega(\phi_i, Q_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда, согласно построению,

$$Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots \supseteq Q_n \supseteq \ldots$$

Обозначим $Q_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Теорема 2 [10, 15]. *Любой инвариантный компакт, содержащийся в множестве Q, также содержится и в множестве Q_∞.*

В последовательности $\{\phi_n\}$ функции могут повторяться. На практике такая последовательность часто является некоторым циклически повторяющимся набором из нескольких функций.

Далее *итоговыми границами* траекторий динамической системы будем называть ограниченную область в фазовом пространстве системы, в которую в конечном счёте попадает любая траектория системы.

Ещё одним инструментом, использующимся при качественном анализе, является следующий принцип инвариантности Ла-Салля.

Теорема 3 [13]. *Пусть $K \subset \Phi$ – компактное множество, положительно инвариантное для системы $\dot{x} = f(x)$. Если функция V непрерывно дифференцируема в Φ и $\dot{V}(x) \leqslant 0$ в K, то для любой траектории системы, имеющей стартовую точку $x_0 \in K$, её ω-предельное множество содержится в множестве M, являющимся наибольшим положительно инвариантным множеством в $S(V) \bigcap K$.*

3. Положения равновесия. Чтобы найти положения равновесия системы (1) в неотрицательном ортанте, приравняем к нулю правые части системы (1):

$$\frac{a_0}{1+v} - a_1 x - a_2 v x + a_3 x\left(1 - \frac{x+y+z}{a_4}\right) = 0,$$

$$a_2 v x - a_1 y - a_5 y = 0, \quad a_5 y - a_6 z = 0, \quad a_7 z - a_2 v x - a_8 v = 0. \tag{2}$$

В системе (2) последние три уравнения линейны относительно переменных y и z, что позволяет редуцировать систему, исключив из неё y и z. Из второго и третьего уравнений выражаем

$$y = \frac{a_2}{a_1 + a_5} v x \quad \text{и} \quad z = \frac{a_5 a_2}{a_6(a_1 + a_5)} v x$$

соответственно. В результате приходим к системе двух уравнений:

$$\frac{a_0}{1+v} - a_1 x - a_2 v x + \frac{a_3 x}{a_4}\left(a_4 - x\left(1 + \frac{a_2}{a_1 + a_5} v + \frac{a_5 a_2}{a_6(a_1 + a_5)} v\right)\right) = 0,$$

$$\left(a_7 \frac{a_5 a_2}{a_6(a_1 + a_5)} x - a_2 x - a_8\right) v = 0. \tag{3}$$

Отметим, что любому неотрицательному решению системы (3) соответствует неотрицательное решение системы (2).

Из последнего уравнения системы (3) вытекают два случая: $v = 0$ и $v \neq 0$. При $v = 0$ $y = z = 0$, а x находится как положительное решение следующего квадратного уравнения:

$$\frac{a_3}{a_4} x^2 - (a_3 - a_1) x - a_0 = 0. \tag{4}$$

Так как свободный член этого уравнения $-a_0 < 0$, то корни уравнения имеют разные знаки. Отрицательному корню соответствует решение системы (2), расположенное вне $R^4_{+,0}$, а положительному корню – расположенное на границе фазового пространства.

Таким образом, система (1) при любых значениях параметров имеет в неотрицательном ортанте положение равновесия $E_0 = (x_0, 0, 0, 0)$, где

$$x_0 = \frac{a_4(a_3 - a_1) + \sqrt{a_4^2(a_3 - a_1)^2 + 4a_4a_0a_3}}{2a_3}.$$

При $v \neq 0$ система может иметь в $\mathbb{R}^4_{+,0}$ ещё одно положение равновесия $E_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1)$, которое находится как решение следующей системы:

$$\begin{gathered}\frac{a_0}{1+v} - a_1x - a_2vx + \frac{a_3x}{a_4}\left(a_4 - x\left(1 + \frac{a_2}{a_1+a_5}v + \frac{a_5a_2}{a_6(a_1+a_5)}v\right)\right) = 0,\\ a_7\frac{a_5a_2}{a_6(a_1+a_5)}x - a_2x - a_8 = 0. \end{gathered}\tag{5}$$

Из второго уравнения находим

$$x_1 = \frac{a_8}{a_2(d-1)},\tag{6}$$

где $d = a_7a_5/(a_6(a_1+a_5))$.

Первое уравнение системы (5) при известном x преобразуется к виду $a_0/(1+v) = d_1 + d_2v$, где

$$d_1 = (a_1 - a_3)x_1 + \frac{a_3}{a_4}x_1^2, \quad d_2 = a_2x_1\left(1 + \frac{(a_5+a_6)a_3}{(a_1+a_5)a_6a_4}x_1\right).$$

Оно имеет два решения, меньшее из которых отрицательно и приводит к положению равновесия вне $\mathbb{R}^4_{+,0}$. Большее решение v_1 этого уравнения положительно при $d_1 < a_0$. По найденным значениям x_1 и v_1 можем найти значения

$$y_1 = \frac{a_2}{a_1+a_5}v_1x_1, \quad z_1 = \frac{a_5a_2}{a_6(a_1+a_5)}v_1x_1.$$

Если $x_1 > 0$, $v_1 > 0$, то и $y_1 > 0$, $z_1 > 0$. Таким образом, положение равновесия E_1 попадает в $\mathbb{R}^4_{+,0}$ тогда и только тогда, когда $d > 1$ и $a_0 > d_1$. Отметим, что условие $a_0 > d_1$ означает выполнение неравенства

$$a_0 - (a_1 - a_3)x_1 - \frac{a_3}{a_4}x_1^2 > 0.$$

Сравнивая его с неравенством (4), заключаем, что условие $a_0 > d_1$ равносильно условию $x_1 < x_0$.

4. Условия локальной устойчивости. Условие локальной устойчивости положения равновесия можно получить на основе анализа собственных значений матрицы системы линейного приближения. Такое условие, полученное для положения равновесия E_0 системы (1), представлено в следующей теореме.

Теорема 4. *Для того чтобы положение равновесия E_0 системы (1) было локально асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$d < 1 + \frac{a_8}{a_2x_0}.\tag{7}$$

Доказательство. Запишем матрицу Якоби для системы (1):

$$J(x,y,z,v) = \begin{pmatrix} F_x & \dfrac{-a_3x}{a_4} & \dfrac{-a_3x}{a_4} & F_v \\ a_2v & -a_1-a_5 & 0 & a_2x \\ 0 & a_5 & -a_6 & 0 \\ -a_2v & 0 & a_7 & -a_2x-a_8 \end{pmatrix},$$

где

$$F_x = -a_1 - a_2 v - a_3\left(\frac{2x+y+z}{a_4} - 1\right), \quad F_v = -\frac{a_0}{(1+v)^2} - a_2 x.$$

В точке E_0 матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J_0 = \begin{pmatrix} a_3 - a_1 - \dfrac{2x_0 a_3}{a_4} & \dfrac{-a_3 x_0}{a_4} & \dfrac{-a_3 x_0}{a_4} & -a_0 - a_2 x_0 \\ 0 & -a_1 - a_5 & 0 & a_2 x_0 \\ 0 & a_5 & -a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 & -a_2 x_0 - a_8 \end{pmatrix}.$$

Очевидным собственным значением матрицы J_0 является

$$\lambda_1 = a_3 - a_1 - \frac{2x_0 a_3}{a_4}.$$

Отметим, что $-\lambda_1$ – это значение производной левой части квадратного уравнения (4) в точке x_0, которое, таким образом, является положительным. Следовательно, $\lambda_1 < 0$.

Остальные три собственных значения представляют собой собственные значения блока третьего порядка в правом нижнем углу матрицы J_0. Запишем этот блок в виде

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & -\alpha_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_1 = a_1 + a_5, \quad \beta_1 = a_2 x_0, \quad \alpha_2 = a_6, \quad \beta_2 = a_5, \quad \alpha_3 = a_2 x_0 + a_8, \quad \beta_3 = a_7, \tag{8}$$

т.е. все параметры α_i и β_i положительные.

Для анализа знаков действительных частей собственных значений используем критерий Гурвица [13, 16]. С этой целью запишем характеристический многочлен

$$P(\lambda) = (\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)(\alpha_3 + \lambda) - \beta_1\beta_2\beta_3 =$$

$$= \lambda^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\lambda^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)\lambda + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\beta_2\beta_3. \tag{9}$$

Для многочлена третьей степени $Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ условия критерия Гурвица сводятся к трём неравенствам:

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

В случае многочлена (9) эти неравенства принимают вид

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 > 0, \quad (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_1+\alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3 > 0, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 > \beta_1\beta_2\beta_3.$$

Первое и второе из этих неравенств выполняются при любых значениях параметров. Поэтому устойчивость многочлена $P(\lambda)$ определяется третьим неравенством, которое с учётом значений параметров (8) запишем как

$$(a_1 + a_5)a_6(a_2 x_0 + a_8) > a_2 x_0 a_5 a_7,$$

что эквивалентно неравенству (7). Теорема доказана.

5. Итоговые границы для траекторий системы. Как уже сказано, условием адекватности биологической модели является условие, что траектории не покидают неотрицательный ортант. Также биологического смысла не имеют траектории, уходящие в бесконечность, отсутствие которых можно назвать вторым условием адекватности модели.

Построим итоговые границы траекторий системы (1) в неотрицательном ортанте, т.е. укажем ограниченную область в $\mathbb{R}^4_{+,0}$, в которую в конечном счёте попадает любая траектория системы.

Теорема 5. *Все инвариантные компакты системы (1), содержащиеся в* $\mathbb{R}^4_{+,0}$, *содержатся в компактном политопе*

$$\Pi = \{(x,y,z,v) \in \mathbb{R}^4_{+,0} : x \leqslant x_1, \quad x+y \leqslant H_2, \quad z \leqslant z_{\max}, \quad v \leqslant v_{\max}\},$$

где

$$x_1 = \frac{a_8}{a_2(d-1)}, \quad H_2 = \max\left\{\frac{a_0}{a_1+a_5}, \frac{(a_3+a_5)a_4}{a_3}\right\}, \quad z_{\max} = \frac{a_5}{a_6}H_2, \quad v_{\max} = \frac{a_5 a_7}{a_6 a_8}H_2.$$

Доказательство. Используем итерационную процедуру построения локализирующих множеств, последовательно применяя несколько локализирующих функций.

В качестве первой локализирующей функции выберем $\phi_1(x,y,z,v) = x$. Тогда универсальное сечение $S(\phi_1)$ будет описываться уравнением

$$\frac{a_0}{1+v} - a_1 x - a_2 v x + a_3 x\left(1 - \frac{x+y+z}{a_4}\right) = 0. \tag{10}$$

Необходимо найти минимальное и максимальное значения x, при которых уравнение (10) имеет решения. Заметим, что данное уравнение – квадратное уравнение относительно x. Запишем его в виде

$$\frac{a_3}{a_4}x^2 + q_0(y,z,v)x - \frac{a_0}{1+v} = 0, \tag{11}$$

где $q_0(y,z,v) = a_3 a_4^{-1}(y+z) + a_2 v + (a_1 - a_3)$. Уравнение (11) имеет корни разных знаков, поэтому следует рассматривать только больший корень

$$x_{10} = \frac{a_4}{2a_3}\left(-q_0 + \sqrt{q_0^2 + 4\frac{a_0 a_3}{a_4(1+v)}}\right) = \frac{2a_0}{1+v}\left(q_0 + \sqrt{q_0^2 + 4\frac{a_0 a_3}{a_4(1+v)}}\right)^{-1}.$$

Из второго представления величины x_{10} видно, что оно увеличивается при убывании q_0. Следовательно, наименьшее значение $x_{\min} = 0$ достигается при $q_0 \to +\infty$ (например, при $y \to +\infty$ и фиксированных z и v). Максимальное значение x_{10} достигается при минимально возможном значении q_0. Следовательно, необходимо положить $y = z = 0$. Далее анализируем переменную v и делаем вывод, что при убывании v величина x_{10} возрастает, так что необходимо положить $v = 0$. В результате получаем, что

$$x_{\max} = \frac{a_4(a_3 - a_1) + \sqrt{a_4^2(a_3-a_1)^2 + 4a_4 a_0 a_3}}{2a_3} = x_0.$$

Мы нашли локализирующее множество $\Omega_1 = \Omega(\phi_1)$, определяемое неравенствами $0 \leqslant x \leqslant x_0$.

В качестве следующей локализирующей функции выбираем $\phi_2(x,y,z,v) = x + y$. Тогда универсальное сечение будет описываться уравнением

$$\frac{a_0}{1+v} - a_1 x + a_3 x\left(1 - \frac{x+y+z}{a_4}\right) - (a_1 + a_5)y = 0.$$

Чтобы найти экстремальные значения локализирующей функции на универсальном сечении, исключим из уравнения универсального сечения y с помощью замены $y = \phi_2 - x$:

$$\frac{a_0}{1+v} - a_1 x + a_3 x\left(1 - \frac{\phi_2 + z}{a_4}\right) - (a_1 + a_5)(\phi_2 - x) = 0.$$

В таком виде уравнение позволяет выразить ϕ_2 через координатные переменные:

$$\phi_2(x,z,v)=\left(\frac{a_0}{1+v}+\left(a_3+a_5-\frac{z}{a_4}\right)x\right)\left(\frac{a_3x}{a_4}+a_1+a_5\right)^{-1}.$$

Функция ϕ_2 в таком представлении неотрицательна, а нулевого значения достигает при $x=0$, $v\to+\infty$, что определяет значение $\phi_{2,\min}$.

Её максимум по z и v при фиксированном x достигается при $z=v=0$, так как функция по z и v убывает:

$$\phi_{2,\sup}=\max_x\phi_2(x,0,0)=\max_x\left\{(a_0+(a_3+a_5)x)\left(\frac{a_3x}{a_4}+a_1+a_5\right)^{-1}\right\}. \tag{12}$$

Дробно-линейная функция переменного x в (12) монотонна на интервале $(0,\infty)$, поэтому её максимальное значение достигается либо при $x=0$, либо при $x\to\infty$:

$$\phi_{2,\sup}=\max\left\{\frac{a_0}{a_1+a_5},\frac{(a_3+a_5)a_4}{a_3}\right\}=H_2.$$

Таким образом, получаем второе локализирующее множество $\Omega_2=\Omega(\phi_2)$, которое описывается неравенствами $0\leqslant x+y\leqslant H_2$.

В качестве третьей локализирующей функции выбираем $\phi_3(x,y,z,v)=z$. Универсальное сечение $S(\phi_3)$ описывается уравнением $a_5y-a_6z=0$, откуда находим $\phi_3=z=a_5a_6^{-1}y$. Локализирующее множество Ω_2 даёт границы для переменной y: $0\leqslant y\leqslant H_2$. Поэтому

$$\phi_{3,\sup}=z_{\max}=\frac{a_5}{a_6}H_2,\quad \phi_{3,\inf}=z_{\min}=0.$$

Таким образом, получаем третье локализирующее множество $\Omega_3=\Omega(\phi_3,\Omega_2)$, которое описывается неравенствами

$$0\leqslant z\leqslant\frac{a_5}{a_6}H_2,\quad 0\leqslant x+y\leqslant H_2.$$

В качестве последней локализирующей функции выберем $\phi_4(x,y,z,v)=v$. Универсальное сечение для этой функции задаётся уравнением $a_7z-a_2vx-a_8v=0$, из которого имеем

$$\phi_4=v=\frac{a_7z}{a_2x+a_8}.$$

Учитывая границы $0\leqslant x\leqslant x_{\max}$, $0\leqslant z\leqslant z_{\max}$, определяемые локализирующими множествами Ω_1 и Ω_3, заключаем, что

$$\phi_{4,\inf}=v_{\min}=0,\quad \phi_{4,\sup}=v_{\max}=\frac{a_7z_{\max}}{a_8}=\frac{a_5a_7}{a_6a_8}H_2.$$

Мы получили локализирующее множество Ω_4, которое описывается неравенствами $0\leqslant v\leqslant v_{\max}$. Пересечение четырёх локализирующих множеств даёт политоп Π. Теорема доказана.

Теорема 6. *Политоп Π – положительно инвариантное множество, все траектории в $\mathbb{R}^4_{+,0}$ либо попадают в Π и остаются в этом множестве, либо неограниченно приближаются к нему.*

Доказательство. Для доказательства этого факта рассмотрим политоп

$$\Pi(\varepsilon)=\{(x,y,z,v)\in\mathbb{R}^4_{+,0}: x\leqslant x_1+\varepsilon,\ \ x+y\leqslant H_2+\varepsilon,\ \ z\leqslant z_{\max}+\varepsilon_1,\ \ v\leqslant v_{\max}+\varepsilon_2\},$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, а $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ будут далее подобраны в зависимости от значения ε. Покажем, что при соответствующем согласовании ε_1, ε_2 с ε политоп $\Pi(\varepsilon)$ является положительно инвариантным.

Из доказательства теоремы 5 вытекает, что в полупространстве $x > x_{\max}$ производная $\dot{\phi}_1$ не обращается в нуль и потому сохраняет знак. Легко убедиться в том, что эта производная отрицательна. Следовательно, на границе $x = x_{\max}+\varepsilon$ политопа $\Pi(\varepsilon)$ векторное поле системы направлено внутрь политопа.

Аналогично в области $\phi_2(x,y,z,v) > H_2 + \varepsilon$ производная $\dot{\phi}_2$ сохраняет знак и является отрицательной, значит на границе $x + y = H_2 + \varepsilon$ политопа $\Pi(\varepsilon)$ траектории системы направлены внутрь политопа.

Ограничение $x + y \leqslant H_2 + \varepsilon$ даёт ограничение переменной y: $y \leqslant H_2 + \varepsilon$. В полосе $0 \leqslant y \leqslant H_2 + \varepsilon$ универсальное сечение $S(\phi_3)$ попадает в множество $0 \leqslant z \leqslant z_{\max} + a_5 a_6^{-1}\varepsilon$. Выбрав $\varepsilon_1 = 2a_5 a_6^{-1}\varepsilon$, заключаем, что в множестве $x+y < H_2+\varepsilon$, $z > z_{\max}+\varepsilon_1$ производная $\dot{\phi}_3$ сохраняет знак и является отрицательной. Это означает, что на части границы $z = z_{\max}+\varepsilon_1$ политопа $\Pi(\varepsilon)$ траектории направлены внутрь.

Наконец, в политопе $\Pi(\varepsilon)$ имеется ограничение $0 \leqslant z \leqslant z_{\max} + \varepsilon_1$. При этом ограничении универсальное сечение $S(\phi_4)$ попадает в полосу $0 \leqslant v \leqslant a_7 a_8^{-1}(z_{\max} + \varepsilon_1)$. Следовательно, выбрав $\varepsilon_2 = 2a_7 a_8^{-1}\varepsilon_1$, получаем, что в множестве $0 \leqslant z \leqslant z_{\max}+\varepsilon_1$, $v > v_{\max}+\varepsilon_2$ производная $\dot{\phi}_4$ сохраняет знак и является отрицательной, значит на границе $v = v_{\max} + \varepsilon_2$ политопа $\Pi(\varepsilon)$ траектории системы направлены внутрь.

Тем самым доказано, что политоп $\Pi(\varepsilon)$, если выбраны $\varepsilon_1 = 2a_5 a_6^{-1}\varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2a_7 a_8^{-1}\varepsilon_1$, является положительно инвариантным множеством, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Но имеем соотношения

$$\bigcap_{\varepsilon}\Pi(\varepsilon) = \Pi, \quad \bigcup_{\varepsilon}\Pi(\varepsilon) = \mathbb{R}^4_{+,0}.$$

Первое соотношение показывает, что политоп Π является положительно инвариантным (как пересечение положительно инвариантных множеств). Второе соотношение означает, что траектория системы, стартующая в произвольной точке $x_* \in \mathbb{R}^4_{+,0}$, оказывается в одном из множеств $\Pi(\varepsilon)$, а в силу его положительной инвариантности не выходит за пределы этого множества. Так как все политопы $\Pi(\varepsilon)$ компактны, каждая траектория в $\mathbb{R}^4_{+,0}$ остаётся ограниченной при возрастании времени. Следовательно, у такой траектории ω-предельное множество не пусто и компактно. В силу теоремы 5 ω-предельное множество принадлежит Π. Теорема доказана.

6. Условия глобальной асимптотической устойчивости. Условия глобальной асимптотической устойчивости для положения равновесия E_0 можно получить с помощью принципа инвариантности Ла-Салля.

Теорема 7. *Если выполнено условие (7), то положение равновесия E_0 системы (1) является глобально асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $V = \eta_1 y + \eta_2 z + \eta_3 v$, положительные параметры η_1, η_2, η_3 которой подберём так, чтобы производная $\dot{V}$ этой функции в силу системы сохраняла знак.

Вычисляем производную $\dot{V}$:

$$\dot{V} = \eta_1(a_2vx - a_1y - a_5y) + \eta_2(a_5y - a_6z) + \eta_3(a_7z - a_2vx - a_8v) =$$
$$= v(a_2x(\eta_1 - \eta_3) - a_8\eta_3) + y(-(a_1 + a_5)\eta_1 + a_5\eta_2) + z(a_7\eta_3 - a_6\eta_2).$$

Условие $\dot{V} \leqslant 0$ выполняется внутри Π при любых значениях переменных x, y, z, v тогда и только тогда, когда верны неравенства

$$a_2x(\eta_1 - \eta_3) - a_8\eta_3 < 0, \quad -(a_1 + a_5)\eta_1 + a_5\eta_2 < 0, \quad a_7\eta_3 - a_6\eta_2 < 0. \tag{13}$$

Преобразуем записанные неравенства, разрешив их относительно параметров

$$\eta_1 < \frac{a_2x + a_8}{a_2x}\eta_3, \quad \eta_2 < \frac{a_1 + a_5}{a_5}\eta_1, \quad \eta_3 < \frac{a_6}{a_7}\eta_2.$$

Первое неравенство должно выполняться при всех допустимых значениях $x \in [0, x_{\max}]$, где $x_{\max} = x_0$, поэтому в нём выражение $(a_2x + a_8)/(a_2x)$ нужно заменить минимальным:

$$\eta_1 < \left(1 + \frac{a_8}{a_2x_0}\right)\eta_3.$$

Второе и третье неравенства позволяют исключить параметр η_2, в результате чего получим систему двух неравенств

$$\eta_1 < \left(1 + \frac{a_8}{a_2x_0}\right)\eta_3, \quad \eta_3 < \frac{a_6(a_1 + a_5)}{a_7a_5}\eta_1.$$

Эта система имеет решение относительно η_1, η_3, если

$$\frac{a_7a_5}{a_6(a_1 + a_5)} < 1 + \frac{a_8}{a_2x_0},$$

что эквивалентно условию (7).

Итак, существуют такие значения параметров η_1, η_2, η_3, что выполняются неравенства (13). Это означает, что $\dot V \leqslant 0$ в Π, причём $\dot V = 0$ только при выполнении условий

$$y = z = v = 0.$$

Согласно принципу инвариантности Ла-Салля ω-предельные множества всех траекторий в $\mathbb{R}^4_{+,0}$ принадлежат максимальному положительно инвариантному множеству на оси Ox. Но таким является положение равновесия E_0. Поэтому все траектории в $\mathbb{R}^4_{+,0}$ стремятся к E_0. Теорема доказана.

7. О бифуркации потери устойчивости. Согласно теореме 4 при возрастании параметра d положение равновесия E_0 теряет устойчивость. Это происходит в момент, когда неравенство (7) переходит в равенство

$$d = 1 + \frac{a_8}{a_2x_0}. \tag{14}$$

В такой ситуации мы можем рассматривать параметр d как бифуркационный, а значение d, определяемое формулой (14), как бифуркационное. Возникает вопрос, какого рода бифуркация приводит к потере устойчивости?

Если выполнено равенство (14), то, согласно (6),

$$x_1 = a_8\left(a_2\left(1 + \frac{a_8}{a_2x_0} - 1\right)\right)^{-1} = x_0.$$

При этом $d_1 = a_0$, и из системы (5) заключаем, что $v_1 = 0$. Следовательно, $y_1 = z_1 = 0$.

Таким образом, в момент бифуркации положения равновесия E_0 и E_1 совпадают. На рис. 1 показаны изменения координат положений равновесия при возрастании параметра d.

Из проведённого анализа следует, что потеря устойчивости положения равновесия E_0 вызвана транскритической бифуркацией. При такой бифуркации происходит обмен собственными значениями: устойчивое собственное значение E_0 переходит к E_1.

Динамика собственных значений двух положений равновесия при изменении бифуркационного параметра показана на рис. 2 (собственные значения λ_1 и λ_2 в обоих положениях равновесия являются комплексно-сопряжёнными, приведена динамика их действительной части). Видно, что действительные части собственных значений λ_1, λ_2, λ_3 обоих положений равновесия отрицательны, в то время как собственное значение λ_4 в момент бифуркации меняет знак: в положении равновесия E_0 с минуса на плюс, а в положении равновесия E_1 с плюса на минус. Таким образом, положение равновесия E_0 теряет устойчивость, а положение равновесия E_1 её приобретает.

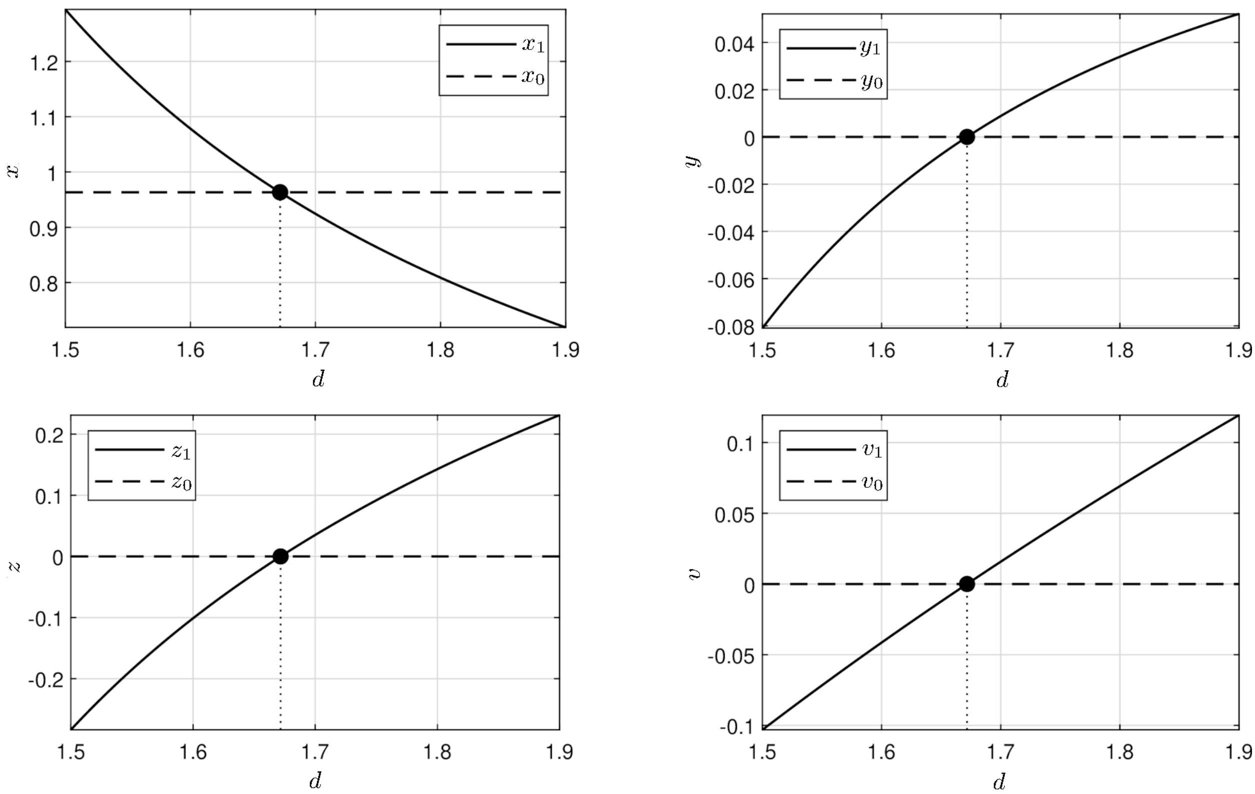

Рис. 1. Графики зависимости координат x, y, z, v от параметра d.

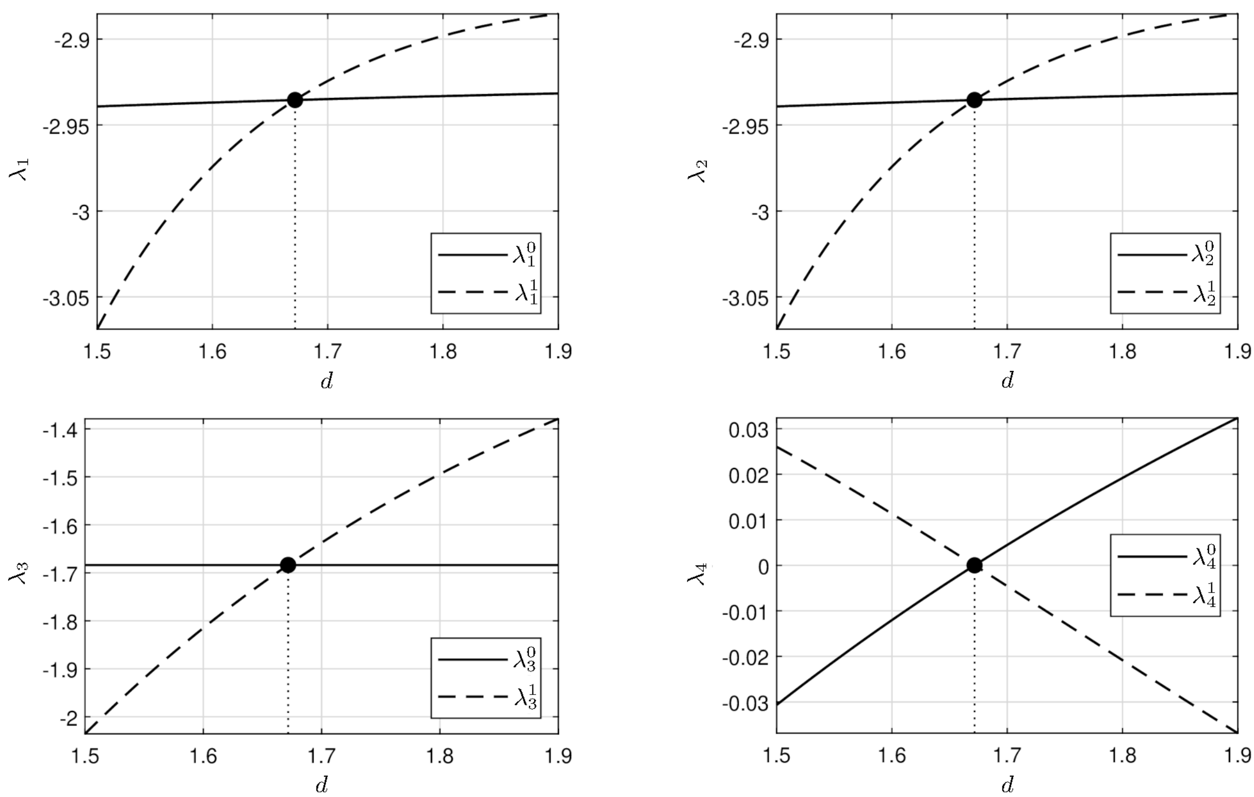

Рис. 2. Графики зависимости собственных чисел от параметра d.

Заключение. В работе проведён анализ четырёхмерной модели взаимодействия вируса иммунодефицита человека с клетками иммунной системы. Доказано, что все траектории в неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^4_{+,0}$ являются ограниченными и имеют ω-предельные множества в компактном политопе Π. Также проведён анализ асимптотической устойчивости положения равновесия E_0, отражающего отсутствие инфицированных клеток и вирусных частей в организме. Показано, что локальная асимптотическая устойчивость этого положения равновесия эквивалентна и глобальной асимптотической устойчивости. Потеря асимптотической устойчивости происходит в рамках транскритической бифуркации, при этом в неотрицательном ортанте возникает второе положение равновесия, которое в рассмотренном примере оказывается устойчивым. Это положение равновесия можно интерпретировать как стабилизировавшееся состояние болезни. Исследование не отвечает на вопрос, всегда ли второе положение равновесия приобретает асимптотическую устойчивость и сохраняет ли её при дальнейшем изменении параметров системы.

Работа выполнена при поддержке программы "Приоритет 2030" МГТУ имени Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kirschner D., Lenhart S., Serbin S.* Dynamics of HIV infection of CD4+T cells // Math. Biosci. 1993. V. 114. P. 81–125.
2. *Perelson A.S., Nelson P.W.* Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo // SIAM Rev. 1999. V. 41. P. 3–44.
3. *Elaiw A.M.* Global properties of a class of HIV models // Nonlin. Anal. Real World Appl. 2010. V. 11. P. 2253–2263.
4. *Hadjiandreou M., Conejeros R., Vassiliadis V.S.* Towards a long-term model construction for the dynamic simulation of HIV infection // Math. Biosci. Eng. 2007. V. 4. P. 489–504.
5. *De Leenheer P., Smith H.L.* Virus dynamics: a global analysis // SIAM J. Appl. Math. 2003. V. 63. P. 1313–1327.
6. *Nowak M., May R.M.* Virus Dynamics: Mathematical Principles of Immunology and Virology. Oxford, 2000.
7. *Dehghan M., Nasri M., Razvan M.R.* Global stability of a deterministic model for HIV infection in vivo // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. V. 34. P. 1225–1238.
8. *Kirschner D., Lenhart S., Serbin S.* Optimal control of the chemotherapy of HIV // J. Math. Biol. 1997. V. 35. P. 775–792.
9. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. М., 2017.
10. *Крищенко А.П.* Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. V. 41. № 12. С. 1597–1604.
11. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Инвариантные компакты динамических систем. М., 2011.
12. *Крищенко А.П.* Поведение траекторий автономных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1445–1450.
13. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.; Ижевск, 2009.
14. *Starkov K.E., Kanatnikov A.N.* Eradication conditions of infected cell populations in the 7-order HIV model with viral mutations and related results // Math. 2021. V. 9. Art. 1862.
15. *Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P.* Iteration procedure of localization in a chronic Leukemia model // AIP Conf. Proc. 2020. Art. 210004-1.
16. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М., 1965.

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 01.05.2023 г.
После доработки 01.05.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1462–1470

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров

Предлагается новый подход к вопросу разрешимости как обыкновенных уравнений, так и с частными производными, в теории линейных дифференциальных уравнений, а также в теории интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123110031, EDN: PDRKWE

Введение. Пусть X и Y – векторные пространства, которые оба являются либо вещественными, либо комплексными, A – линейный оператор, определённый на линеале $D(A) \subset X$, с множеством значений $R(A) \subset Y$. Рассмотрим линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где y – заданный элемент пространства Y, а x – искомый элемент из $D(A)$, и введём понятие его решения.

Элемент $x \in D(A)$ называется *решением уравнения* (1), где $y \in R(A)$, если Ax и y совпадают как элементы из пространства Y.

При таком подходе к понятию решения следует ответить на два вопроса: при каких ограничениях на оператор A

1) у уравнения (1) не может быть двух решений;

2) уравнение (1) имеет решение при каждом $y \in Y$?

Ответы на эти два вопроса – суть общей теории разрешимости уравнений.

Для дифференциальных уравнений с частными производными часто не удаётся ввести удовлетворительное понятие решения. М. Громов отметил [1]: "Классическая теория уравнений в частных производных уходит корнями в физику, где, как считается, эти уравнения описывают законы природы. "Законопослушные" функции, удовлетворяющие таким уравнениям, весьма редки в пространстве всех "допустимых" функций (независимо от выбора топологии в рассматриваемом функциональном пространстве)".

Пусть математическая модель физического процесса описывается уравнением

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha(t) D^\alpha u = f(t), \quad t \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = \partial/\partial x_k$.

Классическим решением уравнения (2) называется функция u, имеющая непрерывные частные производные $D^\alpha u$ при $|\alpha| \leqslant m$ и обращающая уравнение в тождество.

Многие задачи математической физики требуют расширения понятия решения, поскольку из физических соображений следует, что искомые функции не имеют необходимого числа производных. Это привело к понятию обобщённого решения [2]. Существуют дифференциальные уравнения, не имеющие и обобщённого решения. Например, математическая модель вынужденных 2π-периодических колебаний закреплённой на концах отрезка $[0, \pi]$ струны имеет вид

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = \mathbb{R} \times [0, \pi],$$

$u, u_t, f(t, x) \in L_1^2(\Omega)$ – 2π-периодические по t функции, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$. В работе [3] показано, что эта модель имеет или не имеет обобщённого решения при каждой функции

$f(t,x)$ в зависимости от того, не является или является c числом Лиувилля, что отражает сложность рассматриваемого процесса.

Предлагается идея: записывается счётная система $\phi = \{\phi_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ элементов, имеющая в некотором векторном пространстве H_1 со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_1$ биортогональную систему $\phi^* = \{\phi_p^*,\ p \in \mathbb{N}\}$, причём в некотором векторном пространстве H_2 со скалярным произведением $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_2$ системы $A\phi = \{A\phi_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ и $(A\phi)^* = \{(A\phi_p)^*,\ p \in \mathbb{N}\}$ биортогональны. Если существуют пространства X и Y, в которых сходятся ряды $\sum_p a_p\phi_p$, $\sum_p a_p A\phi_p$, где a_p – числа и x, y – соответствующие их суммы, то элемент x следует называть *решением уравнения* (1); так как это решение определяется множеством ϕ, то естественно назвать его *ϕ-решением.*

На первой стадии разработки теории разрешимости возникает вопрос: в каких случаях можно построить пространства X и Y, в которых при всех a_p, b_p, $p \in \mathbb{N}$, сходились бы ряды $\sum_p a_p\phi_p$ и $\sum_p b_p A\phi_p$? Эту идею удалось реализовать в статьях [4–6].

Было построено полное топологическое векторное пространство D'_ϕ, элементы u которого и только они представимы в виде $u = \sum_p a_p\phi_p$, и доказано, что уравнение (1) имеет ϕ-решение, если $y = \sum_p b_p A\phi_p$.

Отметим, что в работе [7] вводится самый широкий класс обобщённых периодических функций, который можно отождествить с множеством формальных тригонометрических рядов. Предложенный там подход является частным случаем разработанного нами подхода.

Введение пространства D'_ϕ позволило значительно расширить множество разрешимых дифференциальных уравнений, в том числе и тех, которые не имели обобщённых решений. В частности, упомянутая выше задача о колебании струны при иррациональном c однозначно разрешима в пространстве D'_ϕ [5], т.е. она однозначно разрешима при $f \in D'_\phi$ и

$$\phi = \{\exp(ik_1t)\sin(k_2x),\quad k_1 \in \mathbb{Z},\quad k_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидны и недостатки.

1. Если систему ϕ мы выбираем сами, то ничто не мешает выбрать её так, что выполнится не только биортогональность, но и равенство $\phi = \phi^*$, существование у $A\phi$ биортогональной $(A\phi)^*$ в общем случае под вопросом.

2. Если элемент y задан, то возможно ли равенство $y = \sum_p b_p\phi_p$?

3. Не решены вопросы регулярности ϕ-решения.

Поэтому ниже приводится новый подход (при введённом понятии решения) к вопросу разрешимости дифференциальных уравнений. Разработанный метод универсален в том смысле, что применим к линейным уравнениям разных типов (скалярным, матричным, дифференциальным, интегральным, алгебраическим, функциональным, с отклонениями и без отклонений аргументов и многим другим), что будет показано на конкретных типах уравнений.

1. Абстрактные результаты.

1.1. Известные результаты, гарантирующие разрешимость уравнения (1). Пусть A отображает конечномерное линейное пространство L^m в конечномерное линейное пространство L^n. С помощью базисов $e_{(1)}$ в L^m и $e_{(2)}$ в L^n уравнение преобразуется к системе уравнений $A_0u = v$, в которой A_0 – прямоугольная числовая матрица размерности $m \times n$ и справедлива

Теорема 1 [8, с. 49]. *Уравнение (1) разрешимо (однозначно) тогда и только тогда, когда совпадают ранги матриц A_0 и расширенной $(A_0|y)$ (в системе $A_0e_{(1)}$ – линейно независимые элементы).*

Проблема разрешимости резко усложняется тогда, когда либо m, либо n, либо и m и n одновременно равны $+\infty$. Хотя и в этом случае часто уравнение $Ax = y$ можно преобразовать в систему $A_0u = v$, однако матрица A_0 окажется бесконечномерной и неизвестно, будет ли справедлива теорема 1.

Пусть A – линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения и замкнутым в банаховом пространстве Y множеством значений $R(A)$. Пусть A^* – оператор, сопряжённый к A, с областью определения $D(A^*)$, $N(A^*) = \{\psi \in D(A^*),\ A^*\psi = 0\}$.

Теорема 2 [9, с. 229]. *1. Если* $N(A^*) = \{0\}$, *то* $R(A) = Y$.

2. Если $N(A^*) \neq \{0\}$, *то для разрешимости уравнения* $Ax = y$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\langle y, \psi\rangle = 0$ *для всех решений уравнения* $A^*\psi = 0$.

Здесь и далее через 0 обозначаем число нуль, нулевой вектор, нулевую матрицу, нулевой элемент. По смыслу всегда будет понятно, что подразумевается под записью 0. В случае конкретных пространств X теоремы о разрешимости выглядят проще.

Теорема 3 [10, с. 44]. *Пусть* X *– полное метрическое пространство с метрикой* ρ *и оператор* $A : X \to X$ *таков, что для всех* $x, y \in X$ $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, *где* $\alpha < 1$ *и не зависит от* x *и* y. *Тогда уравнение* $Ax = x$ *имеет одно и только одно решение* x.

Теорема 4 [11, с. 37]. *Пусть* X *– банахово пространство,* A *– вполне непрерывный оператор, отображающий ограниченное замкнутое выпуклое множество* $\Omega \subset X$ *в себя. Тогда уравнение* $Ax = x$ *имеет решение* $x \in \Omega$.

Мы привели эти известные теоремы для полноты изложения.

1.2. Пространства, в которых заданный набор линейно независимых элементов образует ортогональный базис. Пусть L – векторное пространство, $g = \{g_p \in L,\ p \in N \subset \mathbb{Z}^n\}$ и $L_g = \{\sum_{|p|=0}^M c_p g_p,\ c_p \in \mathbb{C},\ M \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$ – линейная оболочка множества g. Здесь и далее $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{Z}^n$ – множество всех n-мерных векторов $p = (p_1, \ldots, p_n)$ с целочисленными координатами, $|(p_1, \ldots, p_n)| = |p_1| + \cdots + |p_n|$, $\sum_{|p|=0}^M(\cdot)$ означает, что суммирование производится по всем $p \in N$, для которых $|p| \leqslant M$. Всюду $\mu = \{\mu_p \neq 0,\ p \in N\}$.

На первом этапе предполагаем, что в множестве g элементы линейно независимы, т.е. при каждом M из условия $\sum_{|p|=0}^M c_p g_p = 0$ следует, что $c_p = 0$ при всех p. Элементы $u \in L_g$, $v \in L_g$ однозначно представимы в виде $u = \sum u_p g_p$, $v = \sum v_p g_p$, причём в множествах $\{u_p\}$, $\{v_p\}$ имеется конечное количество ненулевых чисел. Поэтому $\langle u, v\rangle_\mu = \sum |\mu_p|^2 u_p \bar{v}_p$ – скалярное произведение в L_g и $(\langle u, u\rangle_\mu)^{1/2} = \|u\|_\mu$ – норма элемента u. Итак, L_g – предгильбертово пространство.

Пополнение L_g с нормой $\|\cdot\|_\mu$ до гильбертова пространства обозначим $H_\mu(g)$. Итак, $f \in H_\mu(g)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $u_m \in L_g$ такая, что $\|f - u_m\|_\mu \to 0$ при $m \to +\infty$.

Так как $\langle g_p, g_r\rangle_\mu = 0$ при $p \neq r$ и $\langle g_p, g_p\rangle_\mu = |\mu_p|^2$, то

$$\{\mu_p^{-1} g_p,\ p \in N\} \text{ – ортонормированный базис в } L_g. \tag{3}$$

Если дополнительно не оговорено, то в дальнейшем суммирование проводится по $p \in N$.

Теорема 5. *(3) – ортонормированный базис в пространстве* $H_\mu(g)$.

Доказательство. Пусть $f \in H_\mu(g)$. Существуют $f_m = \sum f_{m,p}\mu_p^{-1} g_p \in L_g$, при которых $\|f - f_m\|_\mu \to 0$ при $m \to +\infty$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \|f_m\|_\mu = \|f\|_\mu$. В силу (3) имеем

$$\|f_{m_1} - f_{m_2}\|_\mu^2 = \sum |f_{m_1,p} - f_{m_2,p}|^2 \to 0$$

при $m_1 \geqslant m_2 \to +\infty$. Поэтому существуют f_p, для которых $\sum |f_{m,p} - f_p|^2 \to 0$ при $m \to +\infty$.

Составим ряд $\sum f_p \mu_p^{-1} g_p$ и его частные суммы $S_m = \sum_{|p|\leqslant m} f_p \mu_p^{-1} g_p$. Ввиду (3)

$$\|f_m - S_m\|_\mu^2 = \sum |f_{m,p} - f_p|^2 \to 0,$$

если $m \to +\infty$. Тогда

$$\|f - S_m\|_\mu \leqslant \|f - f_m\|_\mu + \|f_m - S_m\|_\mu \to 0$$

при $m \to +\infty$. Это означает, что ряд $\sum f_p \mu_p^{-1} g_p$ сходится по норме к элементу f. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 5 следует, что ряд $\sum a_p\mu_p^{-1}g_p$ сходится в $H_\mu(g)$ по норме тогда и только тогда, когда $\sum |a_p|^2 < +\infty$; если $f \in H_\mu(g)$, $f_p = \langle f, \mu_p^{-1}g_p\rangle_\mu$, то $\sum |f_p|^2 < +\infty$, $f = \sum f_p\mu_p^{-1}g_p$, в частности, f – нулевой элемент в $H_\mu(g)$, т.е. $f_p = 0$ при всех $p \in N$. Если $h \in H_\mu(g)$ и $\hat{\mu}_p \leqslant c_1\mu_p$ при всех достаточно больших $|p|$, где c_1 не зависит от p, то $h \in H_{\hat{\mu}}(g)$.

Обозначим $H(g) = \bigcup_\mu H_\mu(g)$. Элементы из $H(g)$ называем *g-распределениями.*

Определение 1. Ряд $\sum b_pg_p$ *сходится в пространстве* $H(g)$, если существует μ, при котором ряд сходится в $H_\mu(g)$ по норме.

Теорема 6. *Все ряды* $\sum b_pg_p$ *сходятся в пространстве* $H(g)$.

Доказательство. Если $\sum |b_p|^2|\mu_p|^2 < +\infty$, то ряд сходится в силу замечания 1. Убедимся в том, что эта оценка выполняется при некотором μ. Положим $\mu_p = x_p|b_p|^{-1}$, если $b_p \neq 0$, $\mu_p = x_p$ в случае $b_p = 0$, где $x_p \neq 0$, $\sum |x_p|^2 < +\infty$. Так как $|b_p\mu_p| \leqslant |x_p|$, то $\sum |b_p|^2|\mu_p|^2 <$ $< +\infty$.

Очевидно, что если множество $\hat{g} = \{\hat{g}_p,\ p \in N_1\}$ состоит из линейно независимых элементов и $g \subset \hat{g}$, то $H_\mu(g) \subset H_\mu(\hat{g})$. Теорема доказана.

На втором этапе построим пространство $X(g)$, в котором сходятся все ряды

$$\sum_{p\in N} a_pg_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

в случае, когда нет линейной зависимости элементов.

Как установлено на первом этапе, $X(g) = H(g)$, если в множестве g все элементы линейно независимые. Так как элементы $g_r = 0$ не влияют на сходимость ряда (4), то предполагаем, что $g_p \neq 0$ при всех $p \in N$.

Теорема 7. *Предположим, что после удаления из множества g конечного числа элементов g_p, $p \in N_2$, линейно зависимых от оставшихся, в полученной системе $\hat{g} = \{g_p,\ p \in N_1\}$ элементы линейно независимы. Тогда $X(g) = H(\hat{g})$.*

Доказательство. Нужно доказать, что в $H(\hat{g})$ сходится каждый ряд (4). Итак,

$$\sum_{p\in N} a_pg_p = \sum_{p\in N_2} a_pg_p + \sum_{p\in N_1} a_pg_p.$$

По предположению число N_2 конечное и $g_p = \hat{g}_p$ при $p \in N_1$. Поэтому $\sum_{p\in N_2} a_pg_p =$ $= \sum_{p\in N_1} c_p\hat{g}_p$, и среди c_p, $p \in N_1$, имеется конечное количество ненулевых элементов. Поэтому $\sum a_pg_p = \sum_{p\in N_1}(c_p + a_p)\hat{g}_p$ и ряд (4) сходится в $H(\hat{g})$. Теорема доказана.

Замечание 2. При выполнении предположения теоремы 7 ряд (4) сходится в $H(\hat{g})$ тогда и только тогда, когда $\sum |\mu_p|^2|a_p|^2 < +\infty$ при некотором μ. Это объясняется тем, что среди c_p, $p \in N$, количество ненулевых элементов конечно.

1.3. Разрешимость линейных уравнений. Зафиксируем систему $\phi = \{\phi_p,\ p \in N\}$, принадлежащую некоторому векторному пространству L. Предположим, что все элементы в ϕ линейно независимы. Тогда существует пространство $H(\phi)$, в котором сходятся все ряды

$$\sum a_p\phi_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

причём ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда $\sum |a_p|^2|\mu_p|^2 < +\infty$.

Пусть A_0 – линейный оператор, применимый к каждому элементу множества ϕ. Введём множество $A_0\phi = \{A_0\phi_p,\ p \in N\}$, принадлежащее некоторому другому векторному пространству. Обозначим $N_3 = \{p : A_0\phi_p = 0\}$.

Предположение (P). *Из множества $\{A_0\phi_p,\ p \in N,\ p \notin N_3\}$ можно так удалить конечное количество элементов (множество их индексов обозначим через N_4), линейно зависимых от оставшихся $\{A_0\phi_p,\ p \in N_4\}$, что в $A_0\hat{\phi} = \{A_0\phi_p,\ p \in N_4\}$ элементы линейно независимы.*

При выполнении предположения (P) все ряды

$$\sum_{p\in N} a_p A_0\phi_p, \quad a_p \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

сходятся в $H(A_0\hat{\phi})$, причём ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\hat{\phi})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum{}' |a_p|^2|\mu_p|^2 < +\infty.$$

Здесь запись $\sum'(\cdot)$ означает, что суммирование проводится по всем $p\in N_4$. Итак, справедлива

Теорема 8. *Пусть выполняется предположение (P). Если ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$, то ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\hat{\phi})$; если ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\hat{\phi})$ и в N_3 конечное количество элементов, то ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$; если в $A_0\phi$ элементы линейно независимы, то ряд (5) сходится в $H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда ряд (6) сходится в $H_\mu(A_0\phi)$.*

Введём оператор $A: H(\phi)\to H(A_0\hat{\phi})$, положив $Ax=\sum a_pA_0\phi_p$ для $x=\sum a_p\phi_p$. Отметим, что $A\phi_p = A_0\phi_p$, $p\in N$.

Рассмотрим уравнение (1), в котором неизвестно x. Через $\|x\|_{\mu,1}$ (соответственно $\|y\|_{\mu,2}$) обозначим норму $x\in H_\mu(\phi)$ (соответственно $y\in H_\mu(A\hat{\phi})$). Как доказано ранее,

$$\Big\|\sum x_p\mu_p^{-1}\phi_p\Big\|^2_{\mu,1} = \sum|x_p|^2, \quad \Big\|\sum{}' y_p\mu_p^{-1}A\hat{\phi}_p\Big\|^2_{\mu,2} = \sum{}'|y_p|^2,$$

поэтому $\|x\|_{\mu,1} = \|y\|_{\mu,2}$, если $x\in H_\mu(\hat{\phi})$ является решением уравнения $Ax=y$ и $y\in H_\mu(A\hat{\phi})$.

2. Приложения.

2.1. Дифференциальные уравнения в частных производных с отклонениями аргументов. Рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j}(t)x^{(\alpha)}(t+\tau_{\alpha,j}) = u(t), \quad t\in\Omega\subset\mathbb{R}^s, \quad s\geqslant 1. \tag{7}$$

В этом пункте используем обозначения и предположения: Φ – конечное множество мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$; $C_{\alpha,j}(t)$ – квадратные $n\times n$-матрицы, не зависящие от x; $x^{(\alpha)}$ – производная порядков α_1 по t_1, …, α_s по t_s, $s\geqslant 1$; $\tau_{\alpha,j}\in\mathbb{R}^s$ и не зависят от x, t; $[0,2\pi]^s\subset\Omega$; если $t\in\mathbb{R}^s$, $\xi\in\mathbb{R}^s$, то полагаем $t\xi=(t_1\xi_1,\ldots,t_s\xi_s)$, $t\geqslant\xi$ означает, что $t_j\geqslant\xi_j$, $j=\overline{1,s}$; i – мнимая единица; k, p, r, M_j – элементы из $\mathbb{Z}^s$; $e_q=(e_{q,1},\ldots,e_{q,n})$, $e_{q,q}=1$, $e_{q,j}=0$, если $q\neq j$; $u(t)$ не зависит от x.

Уравнение вида (7) пытаются решить, полагая $x(\xi)=\psi(\xi)$ при $\xi\notin\Omega$, где $\psi(\xi)$ – заданная достаточно гладкая функция [12].

Введём систему $\phi=\{e_q\exp((\lambda+ik)t),\ q=\overline{1,n},\ k\in\mathbb{Z}^s,\ s\geqslant 1\}$, где $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ не зависит от k. Пусть

$$(\lambda+ik)^\alpha = \prod_{j=1}^s(\lambda_j+ik_j)^{\alpha_j}.$$

В ϕ функции линейно независимые, поэтому существуют пространства $H_\mu(\phi)$, $H(\phi)$. Использовав обозначение

$$A_k(t,\lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j}(t)(\lambda+ik)^\alpha\exp((\lambda+ik)\tau_{\alpha,J}),$$

получим $A\phi = \{A_k(t,\lambda)e_q\exp((\lambda+ik)t),\ \ q=\overline{1,n},\ \ k\in\mathbb{Z}^s,\ \ s\geqslant 1\}$. Предполагая, что $C_{\alpha,j}(t)$ – тригонометрические многочлены, т.е.

$$C_{\alpha,j}(t)=\sum_{r=M_1}^{M_2} C_{\alpha,j,r}\exp(irt)$$

при всех $\alpha\in\Phi$, $j=\overline{1,n_1}$, и используя обозначения

$$A_{k,r}(\lambda)=\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{j=1}^{n_1} C_{\alpha,j,r}(\lambda+ik)^\alpha\exp((\lambda+ik)\tau_{\alpha,j}),$$

будем иметь

$$A_k(t,\lambda)=\sum_{r=M_1}^{M_2} A_{k,r}(\lambda)e_q\exp((\lambda+ik+ir)t). \tag{8}$$

Теорема 9. *Пусть выполняются равенства (8). Тогда:*

1) если матрицы $A_{k,M_2}(\lambda)$ обратимы при $k\geqslant M_4$, то в $A\phi(M_4)\equiv\{A(e_q\exp((\lambda+ik)t)),$ $q=\overline{1,n},\ \ k\geqslant M_4\}$ элементы линейно независимы;

2) если матрицы $A_{k,M_1}(\lambda)$ обратимы при $k\leqslant M_3$, то в $A\phi(M_2)\equiv\{A(e_q\exp((\lambda+ik)t)),$ $q=\overline{1,n},\ \ k\leqslant M_3\}$ элементы линейно независимы;

3) если матрицы $A_{k,M_2}(\lambda)$ обратимы при всех k (либо матрицы $A_{k,M_1}(\lambda)$ обратимы при всех k), то в $\{A(e_q\exp((\lambda+ik)t)),\ \ q=\overline{1,n},\ \ k\in\mathbb{Z}^s\}$ элементы линейно независимы.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Предположим, что в $A\phi(M_4)$ имеются линейно зависимые элементы, т.е. существуют такие числа $b_{k,q}$, при которых

$$\sum_{k=M_4}^{M_5}\sum_{q=1}^{n} b_{k,q}A(e_q\exp((\lambda+ik)t))\equiv 0,\quad \sum_{k=M_4}^{M_5}\sum_{q=1}^{n}|b_{k,q}|\neq 0. \tag{9}$$

После обозначений $b_k=(b_{k,1},\ldots,b_{k,n})$ в силу (9) получим тождество

$$\sum_{k=M_4}^{M_5}\sum_{r=M_1}^{M_2} A_{k,r}(\lambda)b_k\exp(i(k+r)t)\equiv 0. \tag{10}$$

При этом было учтено, что λ не зависит от k и $\exp(\lambda t)\neq 0$. Ввиду (9), не нарушая общности, можно считать $b_{M_5}\neq 0$. Запишем (10) в виде

$$A_{M_5,M_2}b_{M_5}\exp(i(M_5+M_2)t)+{\sum}' D_{k,r}\exp(i(k+r)t),$$

здесь штрих указывает на то, что суммирование проводится по тем $k\in[M_4,M_5]$, $r\in[M_1,M_2]$, для которых $k+r\leqslant M_5+M_2$, $|k+r|<|M_5+M_2|$, т.е. $\exp(i(M_5+M_2)t)$ отсутствует в $\sum'(\cdot)$. Поэтому $A_{M_5,M_2}b_{M_5}=0$, $b_{M_5}=0$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение. Аналогично доказываются второе и третье.

Ниже $A\hat{\phi}=\{A\phi_{q,p},\ \ q,p\in N_6\}$ получается удалением из $A\phi$ всех нулевых элементов и конечного количества ненулевых элементов, линейно зависимых от оставшихся. На основании доказанных результатов сформулируем основной результат данного пункта.

Теорема 10. *Пусть в $A\hat{\phi}$ элементы линейно независимы. Тогда*

1) уравнение (7) имеет решение $x\in H(\phi)$ тогда и только тогда, когда $u\in H(A\hat{\phi})$;

2) если в $A\phi$ конечное количество нулевых элементов, то $x\in H_\mu(\phi)$ тогда и только тогда, когда $u\in H_\mu(A\hat{\phi})$;

3) уравнение (7) однозначно разрешимо в $H(\phi)$ тогда и только тогда, когда в $A\phi$ элементы линейно независимы, $u \in H(A\phi)$.

Доказательство. Нужно доказать только второе утверждение. Пусть $x \in H_\mu(\phi)$, т.е. $x = \sum x_{q,p}\mu_p^{-1}e_q \exp((\lambda+ik)t)$. Тогда $\sum |x_{q,p}|^2 < +\infty$. Значит, ряд $\sum_{q,p\in N_6} x_{q,p}\mu_p^{-1}A(e_q \exp((\lambda + ik)t))$ сходится в $H_\mu(A\hat{\phi})$, т.е. $u = Ax \in H_\mu(A\hat{\phi})$.

В случае $u \in H_\mu(A\hat{\phi})$ имеем

$$u = \sum_{q,p\in N_6} u_{q,p}\mu_p^{-1}A(e_q \exp((\lambda+ik)t)), \qquad \sum_{q,p\in N_6} |u_{q,p}|^2 < +\infty.$$

Добавив конечное количество чисел, получим $\sum |u_{q,p}|^2 < +\infty$. Следовательно, ряд

$$\sum x_{q,p}\mu_p^{-1}e_q \exp((\lambda+ik)t)$$

сходится в $H_\mu(\phi)$ и его сумма x является решением уравнения (7).

Для уравнения (7) второй по важности является проблема регулярности решений, т.е. выделения дополнительных свойств решений. Например, если

$$x = \sum_k z_k \exp((\lambda+ik)t) \tag{11}$$

и ряд сходится при всех $t \in \Omega$, то x следует считать обычной функцией в Ω; если ряд сходится равномерно в Ω, то x следует считать непрерывной функцией в Ω и так далее.

Выделим условия на коэффициенты z_p, гарантирующие сходимость ряда (11) в $D'(\Omega)$ – пространстве обобщённых функций (распределений Шварца).

Пространство обобщённых функций строится по схеме:

1) фиксируется открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ненулевой меры;

2) через $C_0^{+\infty}(\Omega)$ обозначается множество всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(t) \equiv 0$ вне ограниченного замкнутого множества $K_f \subset \Omega$ ненулевой меры;

3) последовательность $\{f_m(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega),\ m = 1, 2, \ldots\}$ называется *сходящейся в* $C_0^{+\infty}(\Omega)$, если существует такое ограниченное замкнутое $K \subset \Omega$, что $f_m(t) \equiv 0$ вне K для всех m и при некоторой $f_0(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$, каждом α имеет место $\sup\limits_{t\in\Omega} |f_m^{(\alpha)}(t) - f_0^{(\alpha)}(t)| \to 0$ при $m \to +\infty$;

4) каждый линейный непрерывный функционал, заданный на $C_0^{+\infty}(\Omega)$, называется *обобщённой функцией*;

5) ряд (11) называется *сходящимся в множестве обобщённых функций*, если при каждой $f(t) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ сходится числовой ряд

$$\sum_k z_k \int\limits_\Omega f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt. \tag{12}$$

Теорема 11. *Пусть выполняется равенство (11) и существует $p \in \mathbb{Z}^s$, при котором*

$$\sum_k |z_k||(\lambda+ik)^p| < +\infty.$$

Тогда ряд из (11) сходится в пространстве обобщённых функций.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что все координаты в p отрицательны. Докажем абсолютную сходимость ряда (12). Так как

$$(\lambda+ik)^{-p}\exp((\lambda+ik)t) = (\exp((\lambda+ik)t))^{(-p)},$$

то
$$\int\limits_{\Omega} f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt=(\lambda+ik)^p\int\limits_{\Omega} f(t)(\exp((\lambda+ik)t))^{(-p)}\,dt.$$
Напомним, что $z^{(\alpha)}$ – производная порядка α. Интегрируя по частям и учитывая $f(t)\equiv 0$ вне $K_f\subset\Omega$, получаем соотношение
$$\int\limits_{\Omega} f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt=(-1)^{|p|}(\lambda+ik)^p\int\limits_{\Omega} f^{(-p)}(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt,$$
при этом
$$\Bigl|\int\limits_{\Omega} f^{(-p)}(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt\Bigr|\leqslant\int\limits_{K_f}|f^{(-p)}(t)||\exp(\lambda t)|\,dt=C_p<+\infty,$$
так как K_f – ограниченное и замкнутое множество, а подынтегральные функции непрерывны в K_f. Следовательно,
$$\sum_k|z_k|\Bigl|\int\limits_{\Omega} f(t)\exp((\lambda+ik)t)\,dt\Bigr|\leqslant C_p\sum_k|z_k||(\lambda+ik)^p|<+\infty.$$

Замечание 3. При выполнении предположений теоремы 11 решение x уравнения (7) можно считать в Ω обобщённой функцией. Следует отметить, что фразы “x можно назвать обобщённым решением уравнения (7)” и “x – обобщённое решение уравнения (7)” имеют разный смысл. Чтобы убедиться в этом, достаточно напомнить понятие обобщённого решения.

Обобщённая функция x называется *обобщённым решением уравнения* (7), если при каждой $f\in C_0^{+\infty}(\Omega)$ выполняется $x[A^*f]=u[f]$, где A^* – сопряжённый к A оператор, $u\in D'(\Omega)$, $v[f]$ – значение обобщённой функции на f, т.е. об обобщённом решении может идти речь только тогда, когда существует A^*, $A^*C_0^{+\infty}(\Omega)\subset C_0^{+\infty}(\Omega)$, u – обобщённая функция.

Мы выбрали систему $\phi=\{e_q\exp((\lambda+ik)t)\}$, так как многие волновые процессы после замены аргументов описываются функцией $\exp(\lambda t)v(t)$, где $v(t)$ – периодическая функция; легко проверяется независимость элементов в ϕ; в случае $\det A_{k,r}(\lambda)=z(\lambda)\not\equiv 0$ всегда можно подобрать λ так, чтобы $\det A_{k,r}(\lambda)\neq 0$ при всех k, r. Действительно, положив $\lambda=\lambda_0(1,\ldots,1)$, получим скалярную, аналитическую при всех λ_0 функцию $z(\lambda_0)$. Известно, что у таких функций не более счётного множества нулей.

Полученные в п. 2.1 результаты с естественными изменениями переносятся на случай, когда $\phi=\{e_q(t-t_0)^p,\ q=\overline{1,n},\ p\in\mathbb{Z}^s\}$, где $t_j\neq t_{j,0}$ при всех j; $C_{\alpha,j}(t)=\sum_{|r|\leqslant m}C_{\alpha,j,r}(t-t_0)^r$, $t=(t_1,\ldots,t_s)$, $t_0=(t_{1,0},\ldots,t_{s,0})$. Возникающие при этом ряды называются *рядами Лорана.*

При $s=1$ уравнение (7) можно записать в виде
$$Ax\equiv\sum_{m=0}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}C_{m,j}(t)x^{(m)}(t+\tau_{m,j})=u(t),\quad t\in[a,b]\subset\mathbb{R}^1.$$
Важно отметить, что в этом случае предыдущие результаты применимы и к сингулярным дифференциальным уравнениям.

2.2. Интегральные уравнения. Речь пойдёт о линейном уравнении
$$C(t)x(t)+\int\limits_{\Omega} G(t,\xi)x(\xi)d\xi=f(t),\quad t\in\Omega_1\subset\mathbb{R}^n\quad(\text{кратко } Ax=y),\tag{13}$$
где $C(t)$, $G(t,\xi)$, $f(t)$ – известные, не обязательно скалярные, функции, $\Omega\subset\Omega_1$. Линейность означает, что $C(t)$, $G(t,\xi)$, $f(t)$ не зависят от x.

Зафиксируем $\phi = \{\phi_p(\tau),\ \ p \in N\}$, $t \in \Omega_1$, – множество линейно независимых функций, для которых можно вычислить

$$A\phi = \left\{ C(t)x(t) + \int\limits_{\Omega} G(t,\tau)\phi_p(\tau)d\tau, \quad p \in N \right\}. \tag{14}$$

Очевидно, что функции в $A\phi$ будут линейно независимы тогда и только тогда, когда уравнение не имеет ненулевых решений вида $\sum_{|p|\leqslant m} b_p\phi_p(t)$, $m < +\infty$. Справедливо

Утверждение. *Если функции в системе (14) линейно независимы, то существует пространство* $H(A\phi)$ *и при каждой функции* $f \in H(A\phi)$ *уравнение (13) имеет единственное решение* $x_f \in H(\phi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации Программы стратегического академического лидерства (“Приоритет–2030”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М., 1990.
2. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
3. *Мокейчев В.С., Мокейчев А.В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. I // Изв. вузов. Математика. 1999. № 1. С. 25–35.
4. *Мокейчев В.С.* О разложении в ряды по заданной системе элементов // Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 27. Казань, 2011. С. 144–152.
5. *Мокейчев В.С.* Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов // Евразийское научное объединение. 2016. Т. 1. № 10. С. 24–31.
6. *Мокейчев В.С.* Метрические, банаховы, гильбертовы пространства ϕ_B-распределений // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 64–70.
7. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Тригонометрические ряды и обобщённые периодические функции // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 4. С. 799–804.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1978.
9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
10. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М., 1965.
11. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
12. *Мокейчев В.С.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. Казань, 1985.

Казанский (Приволжский)
федеральный университет

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.
После доработки 31.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1471–1499

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ СИСТЕМЫ ВЛАСОВА–ПУАССОНА С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© 2023 г. А. Л. Скубачевский

Рассмотрена первая смешанная задача для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в области с кусочно-гладкой границей. Эта задача описывает кинетику двухкомпонентной высокотемпературной плазмы под действием самосогласованного электрического поля и внешнего магнитного поля. Доказано существование глобальных слабых решений. В случае цилиндрической области получены достаточные условия существования глобальных слабых решений с носителями в строго внутреннем цилиндре, что соответствует удержанию высокотемпературной плазмы в пробочной ловушке.

DOI: 10.31857/S0374064123110043, EDN: PDXVTF

Введение. Уравнения Власова, или кинетические уравнения с самосогласованным полем, были впервые получены в статье [1]. В настоящее время они представляют собой одну из наиболее распространённых моделей кинетической теории газов. Им посвящена обширная литература как в физике (см. [2–6]), так и в математике (см. [7–25]). Обобщённые решения задачи Коши для системы уравнений Власова–Пуассона рассматривались в работах [8, 13, 16] и др. Существование глобального классического решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона изучалось в статьях [11, 19, 22, 23] и др. Рядом авторов исследовались слабые решения смешанных задач для указанных уравнений (см., например, [7, 9, 12, 24, 25]). Отметим, что для уравнений Власова нет исчерпывающих результатов о повышении гладкости обобщённых решений смешанных задач, как в случае классических уравнений в частных производных второго порядка. Вопрос о существовании классических и сильных решений смешанных задач в общем случае является нерешённой проблемой ([18, 25], см. также важные работы [15, 17], посвящённые этому вопросу).

Актуальность исследования смешанных задач для системы уравнений Власова в ограниченной области относительно функций плотности распределения заряженных частиц противоположных знаков связана с созданием управляемого термоядерного синтеза. Как известно [6], в случае попадания значительного числа частиц на стенки реактора может произойти его разрушение. Для удержания заряженных частиц на некотором расстоянии от стенок реактора используется внешнее магнитное поле. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что внешнее магнитное поле должно обеспечивать существование решений системы Власова–Пуассона с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих на некотором расстоянии от границы области. Существование классических решений этой задачи рассматривалось в работах [26–32].

В настоящей работе будет исследован вопрос существования глобальных слабых решений первой смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающей кинетику двухкомпонентной плазмы в ограниченной области с кусочно-гладкой границей. В случае цилиндрической области будут также получены достаточные условия существования глобальных слабых решений с носителями функций плотности распределения заряженных частиц, лежащих в строго внутреннем цилиндре. Это соответствует модели удержания плазмы в пробочной ловушке.

Постановке задачи и используемым в работе обозначениям посвящён п. 1, п. 2 – свойствам характеристик уравнений Власова. В п. 3 рассмотрены сильные решения системы уравнений

Власова для фиксированной напряжённости электрического поля, доказано существование сильного решения. Сглаженной системе уравнений Власова–Пуассона посвящён п. 4, доказано существование сильного решения для произвольного параметра сглаживания $\varkappa > 0$. В п. 5 доказано существование слабого решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона, которое является слабым пределом подпоследовательности решений сглаженной системы. Полученные результаты являются обобщением работ [24, 25] на случай двухкомпонентной плазмы с внешним магнитным полем. Использование результатов пп. 2–4 совместно с методом априорной оценки напряжённости электрического поля через нормы начальных функций плотности распределения заряженных частиц, разработанном в статье [32], позволило доказать в п. 6 существование слабого решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона в цилиндре с компактными носителями функций плотности распределения заряженных частиц.

1. Постановка задачи и обозначения. Будем рассматривать систему уравнений Власова–Пуассона

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{\beta}\beta f^{\beta}(x,v,t)\,dv, \quad x\in Q, \quad 0<t<T, \quad \beta=\pm1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^{\beta}\rangle + \frac{\beta e}{m_{\beta}}\Big\langle -\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}[v,B], \nabla_v f^{\beta}\Big\rangle = 0, \quad x\in Q, \quad v\in\mathbb{R}^3, \quad 0<t<T, \quad \beta=\pm1, \tag{2}$$

относительно неизвестных функций $\varphi(x,t)$ и $f^{\beta}(x,v,t)$ $(\beta=\pm1)$. Здесь $\varphi=\varphi(x,t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; $f^{\beta}=f^{\beta}(x,v,t)$ – функция распределения положительно заряженных ионов, если $\beta=+1$, и электронов, если $\beta=-1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $Q\subset\mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\partial Q\in C^{\infty}$ или цилиндр $G\times(-d,d)$, $G\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G\in C^{\infty}$; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона соответственно; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Введём множество $K\subset\partial Q$ следующим образом: $K=\varnothing$, если $\partial Q\in C^{\infty}$, и $K=(\partial G\times\times\{-d\})\bigcup(\partial G\times\{d\})$, если $Q=G\times(-d,d)$.

Добавим начальные и граничные условия на функции f^{β} следующего вида:

$$f^{\beta}(x,v,t)|_{t=0} = \mathring{f}^{\beta}(x,v), \quad x\in\bar{Q}, \quad v\in\mathbb{R}^3, \quad \beta=\pm1, \tag{3}$$

$$f^{\beta}(x,v,t) = f^{\beta}(x,R^{-1}(x,v),t), \quad x\in\partial Q\setminus K, \quad v\in\mathbb{R}^3, \quad 0<t<T, \quad \langle n(x),v\rangle<0, \quad \beta=\pm1, \tag{4}$$

а также условия Дирихле для потенциала самосогласованного электрического поля:

$$\varphi(x,t)=0, \quad x\in\partial Q, \quad 0\leqslant t<T, \tag{5}$$

где $\mathring{f}^{\beta}(x,v)$, $\beta=\pm1$, – заданные начальные функции распределения заряженных частиц; $\mathcal{R}(x,v,t): B_+\times(0,T)\to B_-\times(0,T)$ – биективное отображение, действующее по формулам

$$\mathcal{R}(x,v,t) := (x, R(x,v), t), \quad R(x,v) := (x, v-2\langle v,n(x)\rangle n(x)), \tag{6}$$

где

$$B_+ = \{(x,v)\in(\partial Q\setminus K)\times\mathbb{R}^3 : \langle v,n(x)\rangle>0\},$$
$$B_- = \{(x,v)\in(\partial Q\setminus K)\times\mathbb{R}^3 : \langle v,n(x)\rangle<0\},$$
$$B_0 = \{(x,v)\in(\partial Q\setminus K)\times\mathbb{R}^3 : \langle v,n(x)\rangle=0\}, \tag{7}$$

$n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q в точке x. Отображение $\mathcal{R}$ называется *оператором зеркального отражения*.

Введём следующие обозначения:

$C^k(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$, – пространство функций, непрерывных в $\bar{D}$ и имеющих непрерывные производные в $\bar{D}$ вплоть до k-го порядка с конечной нормой

$$\|u\|_{k,\bar{D}} = \max_{|\alpha|\leqslant k} \sup_x |D^\alpha u(x)|,$$

где $D = \mathbb{R}^n$ или $D \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область;

$C^1(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$ – пространство функций, непрерывных и ограниченных в $\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T]$, у которых производные первого порядка также непрерывны и ограничены на этом множестве;

$\mathring{C}^k(\mathbb{R}^n)(\mathring{C}^k(Q))$, $k,n \in \mathbb{N}$, – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n(Q)$ с компактными носителями;

$\hat{C}^k(\bar{Q})$ – пространство вектор-функций $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : \bar{Q} \to \bar{Q}$ с координатами $Y_i \in C^k(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{N}$;

$C([0,T], C^k(\bar{Q}))$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$, – банахово пространство непрерывных функций $[0,T] \ni t \mapsto \varphi(\,\cdot\,,t) \in C^k(\bar{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{k,T} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\varphi(\,\cdot\,,t)\|_k;$$

$L_p(Y)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – пространство измеримых функций в области $Y \subset \mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|v\|_{L_p(Y)} = \|v\|_p = \left\{ \int\limits_Y |v(y)|^p\,dy \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty(Y)} = \|v\| = \operatorname{ess\,sup}_{y\in Y} |v(y)|, \quad \text{если} \quad p = \infty;$$

$W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant p < \infty$, – пространство Соболева функций $v \in L_p(Q)$, имеющих все обобщённые производные $D^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \leqslant k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int\limits_Q |D^\alpha v(x)|^p\,dx \right\}^{1/p}.$$

Очевидно, для $v \in C^0(\bar{D})$ $\|v\|_{0,\bar{D}} = \|v\|$. Поэтому в дальнейшем для упрощения обозначений норму функции в $C^0(\bar{D})$ будем заменять на норму в смысле пространства $L_\infty(D)$. Через c_i и k_j будем обозначать положительные константы в неравенствах, не зависящие от правой части. Будем полагать, что $B_R(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\}$ и $B_R := B_R(0)$.

2. Уравнения характеристик. Перейдём к уравнениям характеристик для системы уравнений Власова (2) с фиксированным потенциалом электрического поля φ. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{8}$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(X_\varphi^\beta,\tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \tag{9}$$

где $\nabla_x\varphi(X_\varphi^\beta,\tau) = \nabla\varphi_x(x,\tau)|_{x=X_\varphi^\beta}$.

Далее в работе будем предполагать, что вектор-функции $E(x,t) = -\nabla_x\varphi(x,t)$ и $B(x)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Пусть вектор-функция $E(x,t)$ непрерывна и ограничена на множестве $\bar{Q} \times [0,T)$ и непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q} \setminus K) \times [0,T)$, а вектор-функция $B(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}$. Кроме того, для любой точки $x^0 \in \partial Q \setminus K$

существует шар $B_\varepsilon(x^0)$, $\varepsilon > 0$, такой, что $E(x,t)$ может быть продолжена в $(\bar{Q} \bigcup \overline{B_\varepsilon(x^0)}) \times$ $\times [0,T)$ до функции $\tilde{E}(x,t)$, которая непрерывна и ограничена на множестве $(\bar{Q} \bigcup \overline{B_\varepsilon(x^0)}) \times$ $\times [0,T)$ и непрерывно дифференцируема по x в $((\bar{Q} \setminus K) \bigcup \overline{B_\varepsilon(x^0)}) \times [0,T)$.

Замечание 1. Введём векторное поле $\Psi^\beta : \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T) \to \mathbb{R}^7$ по формуле

$$\Psi^\beta(x,v,t) := \left(v, \frac{\beta e}{m_\beta} E(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], 1\right).$$

Очевидно, что

$$\operatorname{div}_v \left(\frac{\beta e}{m_\beta} E(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)]\right) = 0, \quad (x,v,t) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T).$$

Замечание 2. В работах [26–30] получены достаточные условия на начальные функции распределения, напряжённость электрического поля и индукцию внешнего магнитного поля, которые гарантируют, что все характеристики, для которых начальные условия по пространственным переменным лежат на компакте внутри области, не пересекаются с границей для любых $t \in [0,T)$.

Добавим к системе (8), (9) начальные условия вида

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = v, \tag{10}$$

где $(x,v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \bigcup B_-$, $t \in [0,T)$ (см. (7)).

Обозначим $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0,T)$ и $A_\pm := B_\pm \times (0,T)$.

В силу условия 1 для любых $p := (x,v,t) \in \Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (8)–(10) на некотором полуинтервале $[t, t_1^\beta(p))$. Обозначим это решение через $S_\varphi^\beta(\tau,p) := (X_\varphi^\beta(\tau,p), V_\varphi^\beta(\tau,p))$. Очевидно, существует предел

$$(x_1^\beta, v_1^\beta) := \lim_{\tau \to t_1^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau,p), V_\varphi^\beta(\tau,p)) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3.$$

В силу леммы 1.4 из работы [24] возможны следующие случаи:

a) $t_1^\beta = t_1^\beta(p) = T$;

b) $t_1^\beta < T$ и $(x_1^\beta, v_1^\beta) \in B_+ = \{(x,v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle > 0\}$;

c) $t_1^\beta < T$ и $(x_1^\beta, v_1^\beta) \in B_0 = \{(x,v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle = 0\}$;

d) $t_1^\beta \in K$.

В случае a) мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t,T)$. В случае b) рассмотрим задачу (8), (9) с начальными условиями (10), в которых в соответствии с формулой (6), описывающей зеркальное отражение, положим

$$(x,v) = (x_1^\beta, R(x_1^\beta, v_1^\beta)) \in B_- = \{(x,v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x)\rangle < 0\}.$$

Поскольку вектор $R(x_1^\beta, v_1^\beta)$ направлен внутрь области Ω, в силу условия 1 на некотором полуинтервале $[t_1^\beta, t_2^\beta)$ существует единственное непродолжаемое решение системы (8), (9) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = x_1^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = R(x_1^\beta, v_1^\beta).$$

Обозначим это решение через $S_\varphi^\beta(\tau, p_1^\beta)$, где $p_1^\beta = (x_1^\beta, R(x_1^\beta, v_1^\beta), t_1^\beta)$. Очевидно, $S_\varphi^\beta(\tau,p) \subset$ $\subset Q \times \mathbb{R}^3$, $t \in (t_1^\beta, t_2^\beta)$.

Для t_2^β также возможны случаи a)–d). В случае $t_2^\beta = T$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $[t_1^\beta, T)$. Функция $S_\varphi^\beta(\tau,p)$, рассматриваемая на полуинтервале $[t,T)$, имеет разрывы первого рода в точках t_1^β и t_2^β и удовлетворяет системе уравнений (8), (9) на интервалах (t, t_1^β) и (t_1^β, t_2^β).

В случае $t_2^\beta < T$ и $(x_2^\beta, v_2^\beta) := \lim\limits_{\tau\to t_2^\beta - 0}(X_\varphi^\beta(\tau,p), V_\varphi^\beta(\tau,p)) \in B_+$ опять рассмотрим систему (8), (9) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = x_2^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = R(x_2^\beta, v_2^\beta). \tag{11}$$

Существует единственное непродолжаемое решение $S_\varphi^\beta(\tau, p_2^\beta)$ задачи (8), (9), (11), где $p_2^\beta = (x_2^\beta, R(x_2^\beta, v_2^\beta), t_2^\beta)$, на некотором полуинтервале $[t_2^\beta, t_3^\beta)$ и т.д.

Если $t > 0$, то аналогичные построения можно провести для $0 < \tau < t$. Рассмотрим систему (8), (9) при $0 < \tau < t$ с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = R^{-1}(x, v). \tag{12}$$

В силу условия 1 для любых $p = (x, v, t) \in \Omega \bigcup A_-$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (8), (9), (12) на некотором полуинтервале $(t_{-1}^\beta, t]$. Обозначим это решение $S_\varphi^\beta(\tau, p_0)$, где $p_0 := (x, R^{-1}(x, v))$. Очевидно, существует предел

$$(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) := \lim_{\tau\to t_{-1}^\beta + 0}(X_\varphi^\beta(\tau, p_0), V_\varphi^\beta(\tau, p_0)) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^3.$$

Аналогично предыдущему, возможны следующие случаи:

a) $t_{-1}^\beta = t_{-1}^\beta(p_0) = 0$;

b) $t_{-1}^\beta > 0$ и $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) \in B_-$;

c) $t_{-1}^\beta > 0$ и $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) \in B_0$;

d) $t_{-1}^\beta \in K$.

В случае $t_{-1}^\beta = 0$ мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале $(0, t]$. В случае b) рассматриваем задачу (8), (9) с начальными условиями (10), в которых положим $(x, v) = (x_{-1}^\beta, R^{-1}(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta)) \in B_+$. В силу условия 1 на некотором полуинтервале $(t_{-2}^\beta, t_{-1}^\beta]$ существует единственное непродолжаемое решение этой задачи и т.д.

Точки t_1^β, t_2^β, $\ldots$, t_{-1}^β, t_{-2}^β, $\ldots$ мы назовём *моментами отражения.*

Обозначим через S множество точек $p = (x, v, t) \in \Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, для которых существует $t < t_k^\beta < T$, $k \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{либо} \quad (x_k^\beta, v_k^\beta) = \lim_{\tau\to t_k^\beta - 0}(X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \quad \text{либо} \quad (x_k^\beta, v_k^\beta) \in K,$$

или $0 < t_{-j}^\beta < t$, $j \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\text{либо} \quad (x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) = \lim_{\tau\to t_{-j}^\beta + 0}(X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \quad \text{либо} \quad (x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) \in K,$$

или число моментов отражения бесконечно.

Положим $\Lambda = (\Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})) \setminus S$. Очевидно, множество Λ состоит из всех точек $p = (x, v, t) \in \Omega \bigcup A_- \bigcup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ в начальных условиях (10), при которых построенные кусочно-непрерывные решения $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, p)$ существуют на всём интервале $(0, T)$, имеют конечное число моментов отражения и множество моментов отражения t_k^β $(0 < t_k^\beta < T$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ таких, что $(x_k^\beta, v_k^\beta) \in B_0$ или $t_k^\beta \in K$ пусто.

Через $\mu_n(\cdot)$ обозначим n-мерную меру Лебега. Пусть $\mathcal{B}(A_\pm)$ – σ-алгебра борелевских множеств на множестве $A_\pm := B_\pm \times (0,T)$ с мерой $\nu_\pm$, определённой по формуле

$$\nu_\pm(B) := \int\limits_{A_\pm} \chi_B(x,v,t)|\langle n(x),v\rangle|\,d\sigma(x)\,dv\,dt, \quad B \in \mathcal{B}(A_\pm),$$

где $\chi_B(x,v,t)$ – характеристическая функция множества B.

Решения $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$, $0 \leqslant t < T$, при $(x,v,t) \in \Lambda$ назовём *порождающими характеристиками.* Заметим, что при $t \leqslant \tau < T$ порождающие характеристики $\hat{S}^\beta_\varphi(\tau,x,v,t)$ непрерывны по τ справа, а при $0 < \tau \leqslant t$ они непрерывны по τ слева.

Положим $S_1 = S \bigcap \Omega$, $\Lambda_1 = \Lambda \bigcap \Omega$, $S_2 = S \bigcap A_-$, $\Lambda_2 = \Lambda \bigcap A_-$, $S_3 = S \bigcap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$, $\Lambda_3 = \Lambda \bigcap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$.

Из леммы 1.34 в [24] вытекает

Теорема 1. $\mu_7(S_1) = 0$, *а множество* Λ_1 *открыто в* $\mathbb{R}^7$, $\nu_-(S_2) = 0$, $\mu_6(S_3) = 0$.

Обозначим $\Gamma_t = \{(x,v,\tau) \in \Lambda_1 : \tau = t\}$. Из замечания 1 следует

Лемма 1. *Для* $0 \leqslant s,t < T$ *отображение* $\hat{S}^\beta_\varphi(s,\ldots,t) : \Gamma_t \to \Gamma_s$ *биективно и сохраняет меру Лебега* $\mu_6(\cdot)$.

Подробное доказательство см. в предложении 3 из работы [24, с. 52].

3. Сильные решения уравнений Власова. Пусть $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^0(Q \times \mathbb{R}^3)$ – непрерывные функции с компактным носителем в $Q \times \mathbb{R}^3$, $\mathring{f}^\beta \geqslant 0$. Обозначим через $w_\pm : A_\pm \to \mathbb{R}$ измеримые по Борелю функции. Введём оператор $\mathcal{K}$ по формуле

$$\mathcal{K}w_+(x,v,t) := w_+(\mathcal{R}^{-1}(x,v,t)) \quad \text{для п.в.} \quad (x,v,t) \in A_-.$$

Пусть $f^\beta \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\beta = \pm 1$. Зададим функции $f^\beta_\pm$, $\beta = \pm 1$, по формулам

$$f^\beta_+(x,v,t) := \lim_{\tau \to t-0} f^\beta(S^\beta_\varphi(\tau,x,v,t),\tau), \quad (x,v,t) \in A_+, \tag{13}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) := \lim_{\tau \to t+0} f^\beta(S^\beta_\varphi(\tau,x,v,t),\tau), \quad (x,v,t) \in A_-. \tag{14}$$

Существование почти всюду этих пределов вытекает из результатов п. 2 и того, что $C^0(\bar{\Omega})$ всюду плотно в $L_p(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу для уравнений Власова:

$$Vf^\beta := \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta}E(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)], \nabla_v f^\beta \right\rangle = 0, \tag{15}$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in (0,T)$, $\beta = \pm 1$,

$$f^\beta(x,v,0) = \mathring{f}^\beta(x,v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \tag{16}$$

$$f^\beta_-(x,v,t) = \mathcal{K}f^\beta_+(x,v,t), \quad (x,v,t) \in A_-, \quad \beta = \pm 1. \tag{17}$$

Будем предполагать, что вектор-функции $E(x,t)$ и $B(x)$ удовлетворяют условию 1.

Определение 1. Измеримые функции $f^\beta(x,v,t)$, $\beta = \pm 1$, будем называть *сильным решением задачи* (15)–(17), если f^β п.в. в Ω являются константами вдоль порождающих характеристик, удовлетворяют начальному условию (16) для п.в. $x \in \bar{Q}$ и $v \in \mathbb{R}^3$ и краевому условию (17) для п.в. $(x,v,t) \in A_-$.

Лемма 2. *Существует сильное решение задачи (15)–(17), определяемое формулой*

$$f^\beta(x,v,t) = \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t)), \quad (x,v,t) \in \Lambda_1, \tag{18}$$

которое является единственным с точностью до множества меры нуль.

Доказательство. 1. Докажем, что при подстановке порождающих характеристик в формулу (18) мы получим константу, не зависящую от t.

Из группового свойства порождающих характеристик следует, что

$$\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(s,y,w,\tau)=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(s,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t). \tag{19}$$

Подставив в функцию $f^{\beta}(x,v,t)$ вместо (x,v) порождающую характеристику $\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau)$, используя формулу (18) и равенство (19) при $s=0$, получим

$$f^{\beta}(x,v,t)=f^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t)=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(t,y,w,\tau),t))=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,y,w,\tau)). \tag{20}$$

Очевидно, правая часть (20) не зависит от t, т.е. является константой.

2. Проверим выполнение условий (16). В силу непрерывности справа в точке 0 порождающих характеристик имеем

$$f^{\beta}(x,v,0)=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,0))=\mathring{f}^{\beta}(x,v).$$

3. Убедимся в справедливости условия (17). По построению порождающих характеристик для $(x,v,t)\in A_-$ существует $\varepsilon>0$ такое, что при $|t-\tau|<\varepsilon$ выполняются соотношения

$$S^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t)=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\quad \tau>t, \tag{21}$$

$$S^{\beta}_{\varphi}(\tau,\mathcal{R}^{-1}(x,v,t))=\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\quad \tau<t. \tag{22}$$

Использовав последовательно (14), (21), (18), (22) и (13), получим

$$f^{\beta}_{-}(x,v,t)=\lim_{\tau\to t+0}f^{\beta}(S^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\tau)=\lim_{\tau\to t+0}f^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\tau)=$$

$$=\lim_{\tau\to t+0}\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t)),\tau)=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,t+0))=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,x,v,t-0))=$$

$$=\lim_{\tau\to t-0}\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(0,\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t)),\tau)=\lim_{\tau\to t-0}f^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi}(\tau,x,v,t),\tau)=$$

$$=\lim_{\tau\to t-0}f^{\beta}(S^{\beta}_{\varphi}(\tau,\mathcal{R}^{-1}(x,v,t)),\tau)=f^{\beta}_{+}(\mathcal{R}^{-1}(x,v,t))=\mathcal{K}f^{\beta}_{+}(x,v,t),\quad \beta=\pm1,\quad (x,v,t)\in A_-.$$

Единственность очевидна. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta}\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$. *Тогда сильное решение задачи (15)–(17) непрерывно дифференцируемо в* Λ_1.

Лемма 3. *Пусть* $\mathring{f}^{\beta}\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\psi\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ *и* $I:=[0,T)$, *а* $\{f^{\beta}\}$, $\beta=\pm1$, *– сильное решение задачи (15)–(17). Тогда отображение*

$$\Bigg(t\longmapsto\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi(x,v)f^{\beta}(x,v,t)\,dx\,dv\Bigg)\in C^1(I)$$

и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\psi(x,v)f^{\beta}(x,v,t)\,dx\,dv=$$

$$=\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\Bigg(\langle v,\nabla_x\psi(x,v)\rangle+\bigg\langle-\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(x,t)+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v\psi(x,v)\bigg\rangle\Bigg)f^{\beta}(x,v,t)\,dx\,dv. \tag{23}$$

Доказательство. В силу лемм 1, 2 имеем

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x,v)\mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t))\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} g(x,v,t)\,dx\,dv, \qquad (24)$$

где $g(x,v,t) := \psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv$. Аналогично доказательству леммы 3.3 в [25] можно показать, что функция $\int_{Q\times\mathbb{R}^3} g(x,v,t)\,dx\,dv$ непрерывно дифференцируема по t на полуинтервале $[0,T)$ и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} g(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \frac{dg(x,v,t)}{dt}\,dx\,dv. \qquad (25)$$

Из (24), (25), уравнений характеристик (8), (9), леммы 1 и равенства (18) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \frac{d}{dt}\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))}{\partial\hat{X}^\beta_{\varphi,i}}\frac{d\hat{X}^\beta_{\varphi,i}}{dt} + \frac{\partial\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))}{\partial\hat{V}^\beta_{\varphi,i}}\frac{d\hat{V}^\beta_{\varphi,i}}{dt}\right)\right\}\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \Bigg\{\langle\hat{V}^\beta_\varphi(t,x,v,0), \nabla_{\hat{X}^\beta_\varphi}\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\rangle + \Bigg\langle -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_{\hat{X}^\beta_\varphi}\varphi(\hat{X}^\beta_\varphi(t,x,v,0),t) +$$

$$+ \frac{\beta e}{m_\beta c}[\hat{V}^\beta_\varphi(t,x,v,0), B(\hat{X}^\beta_\varphi(t,x,v,0))], \nabla_{\hat{V}^\beta_\varphi}\psi(\hat{S}^\beta_\varphi(t,x,v,0))\Bigg\rangle\Bigg\}\mathring{f}^\beta(x,v)\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\langle v, \nabla_x\psi(x,v)\rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v\psi(x,v)\right\rangle\right\}\mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varphi(0,x,v,t))\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left\{\langle v, \nabla_x\psi(x,v)\rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi(x,t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v\psi(x,v)\right\rangle\right\}f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv.$$

Таким образом, интегральное тождество (23) доказано. Лемма доказана.

Обозначим $A_T := Q\times\mathbb{R}^3\times\{T\}$ и $A_0 := Q\times\mathbb{R}^3\times\{0\}$.

Лемма 4. *Пусть* $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, *– сильное решение задачи (15)–(17), и пусть* $\psi\in\mathring{C}^1(\bar{Q}\times\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$. *Тогда (см. (15))*

$$\langle f^\beta, V\psi\rangle = \int\limits_{A_+}\psi f^\beta_+ d\nu_+ + \int\limits_{A_T}\psi(x,v,T)f^\beta(x,v,T)\,dx\,dv -$$

$$- \int\limits_{A_-}\psi f^\beta_- d\nu_- - \int\limits_{A_0}\psi(x,v,0)f^\beta(x,v,0)\,dx\,dv.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.5 из работы [24, с. 68].

4. Сильные решения сглаженной системы Власова–Пуассона. Обозначим через $G=G(x,y)$ функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Q. Так как Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, функция Грина существует. Единственность функции Грина следует из теоремы 2.4 в [33]. Подробное изложение результатов, посвящённых функции Грина, также можно найти в статье [33].

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{\partial f_\varkappa^\beta}{\partial t}+\langle v,\nabla_x f_\varkappa^\beta\rangle+\left\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E_\varkappa+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v f_\varkappa^\beta\right\rangle=0,\quad x\in Q,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\in(0,T),\quad \beta=\pm1, \tag{26}$$

где $f_\varkappa^\beta$ – неизвестные функции, $\varkappa>0$.

Введём ядро усреднения $\omega_\varkappa(x)$ следующим образом. Пусть

$$\omega(t):=\begin{cases} ce^{-1/(1-t^2)}, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1,\end{cases} \tag{27}$$

где постоянная $c>0$ определяется из условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\omega(|x|)\,dx=1. \tag{28}$$

Очевидно, $\omega\in\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\operatorname{supp}\omega=[-1,1]$. Положим $\omega_\varkappa(x):=\varkappa^{-3}\omega(|x|/\varkappa)$. Тогда $\omega_\varkappa\in$ $\in\mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\operatorname{supp}\omega_\varkappa=\overline{B_\varkappa(0)}$, при этом в силу (27), (28)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(x)\,dx=1. \tag{29}$$

Функцию $E_\varkappa$ будем определять из соотношений

$$G_\varkappa(x,y)=\int\limits_Q G(x,\xi)\omega_\varkappa(y-\xi)d\xi, \tag{30}$$

$$E_\varkappa(x,t)=-\nabla_x\varphi_\varkappa(x,t),\quad \varphi_\varkappa(x)=\int\limits_Q G_\varkappa(x,y)\rho_\varkappa(y,t)\,dy, \tag{31}$$

$$\rho_\varkappa(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f_\varkappa^{+1}(x,v,t)-f_\varkappa^{-1}(x,v,t))\,dv. \tag{32}$$

Вместе с уравнениями (26) рассмотрим начальные условия

$$f_\varkappa^\beta(x,v,0)=\mathring{f}^\beta(x,v),\quad x\in\bar{Q},\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad \beta=\pm1, \tag{33}$$

где $\mathring{f}^\beta(x,v)\in\mathring{C}^0(Q\times\mathbb{R}^3)$, а также краевые условия

$$f_{\varkappa,-}^\beta(x,v,t)=\mathcal{K}f_{\varkappa,+}^\beta,\quad x\in A_-,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\in(0,T),\quad \beta=\pm1, \tag{34}$$

где

$$f_{\varkappa,+}^\beta:=\lim_{\tau\to t-0}f_\varkappa^\beta(S_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t),\tau),\quad (x,v,t)\in A_+,$$

$$f_{\varkappa,-}^\beta:=\lim_{\tau\to t+0}f_\varkappa^\beta(S_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t),\tau),\quad (x,v,t)\in A_-,$$

а $S_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t):=(X_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t),V_\varkappa^\beta(\tau,x,v,t))$ – решение следующей системы уравнений характеристик:

$$\frac{dX_\varkappa^\beta}{d\tau}=V_\varkappa^\beta,\quad 0<\tau<T,\quad \beta=\pm1, \tag{35}$$

$$\frac{dV_\varkappa^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[V_\varkappa^\beta, B(X_\varkappa^\beta)], \quad 0<\tau<T, \quad \beta=\pm 1, \tag{36}$$

с начальными условиями $X_\varkappa^\beta(t,x,v,t)=x$, $V_\varkappa^\beta(t,x,v,t)=v$, соответствующих сглаженной системе Власова–Пуассона (26), (30)–(32).

Для множества $X\subset\mathbb{R}^n$ и отображения $f:X\to\mathbb{R}$ обозначим через $\tilde f$ продолжение f нулём на $\mathbb{R}^n\setminus Q$. Тогда в уравнении (26) при определении $E_\varkappa(x,t)$ плотность заряда $\rho_\varkappa(x,t)$ мы заменим на сглаженную плотность $\sigma_\varkappa=(\omega_\varkappa*\tilde\rho_\varkappa)(x,t)$, и в силу (30) получим выражение

$$\varphi_\varkappa(x,t)=\int\limits_Q G(x,y)(\omega_\varkappa*\tilde\rho_\varkappa)(y,t)\,dy,$$

где $(\omega_\varkappa*\tilde\rho_\varkappa)(y,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(y-\xi)\tilde\rho_\varkappa(\xi,t)d\xi$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathring f^\beta\in\mathring C^0(Q\times\mathbb{R}^3)$, $\mathring f^\beta\geqslant 0$. *Тогда для любого* $\varkappa>0$ *существует сильное решение* $\{f_\varkappa^\beta\}$, $\beta=\pm1$, *уравнений (26), (30)–(32) с условиями (33), (34).*

Доказательство. 1. Зафиксируем $\varkappa>0$ и построим последовательность сильных решений уравнений Власова $f_{\varkappa,n}^\beta$ для заданных полей $E_{\varkappa,n-1}$.

Положим

$$f_{\varkappa,0}^\beta(x,v):=\mathring f^\beta(x,v), \quad \rho_{\varkappa,0}(x):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f_{\varkappa,0}^{+1}-f_{\varkappa,0}^{-1})\,dv.$$

Тогда $\sigma_{\varkappa,0}:=\omega_\varkappa*\tilde\rho_{\varkappa,0}\in\mathring C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и задача

$$-\Delta\varphi_{\varkappa,0}(x)=4\pi e\sigma_{\varkappa,0}(x), \quad \varphi_{\varkappa,0}|_{\partial Q}=0$$

имеет единственное классическое решение $\varphi_{\varkappa,0}$. Поскольку $\partial Q\setminus K\in C^\infty$, функция $\varphi_{\varkappa,0}(x)$ непрерывна по x, непрерывно дифференцируема по x в $\bar Q$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $\bar Q\setminus K$, при этом $\varphi_{\varkappa,0}\in C^\infty(\bar Q\setminus K)$. Таким образом, функции $E_{\varkappa,0}(x):=-\nabla_x\varphi_{\varkappa,0}(x)$ и $B(x)$ в уравнении (26) удовлетворяют условию 1. Следовательно, для $p=(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,0}\subset\Omega$ существуют порождающие характеристики, которые обозначим через $\hat S^\beta_{\varphi_{\varkappa,0}}(\tau,p)$. Множество $(\Lambda_1)_{\varkappa,0}\subset\Omega$ является открытым и $\mu_7(\Omega\setminus(\Lambda_1)_{\varkappa,0})=0$ (см. теорему 1).

Далее в качестве $f_{\varkappa,1}^\beta$ возьмём функцию

$$f_{\varkappa,1}^\beta(x,v,t):=\mathring f^\beta(\hat S^\beta_{\varphi_{\varkappa,0}}(0,x,v,t)),$$

которая для $p(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,0}$ является сильным решением уравнений Власова для заданного поля $E_{\varkappa,0}(x)=-\nabla_x\varphi_{\varkappa,0}(x)$. Обозначим теперь

$$\rho_{\varkappa,1}(x,t):=\int\limits_{\mathbb{R}^3}(f_{\varkappa,1}^{+1}-f_{\varkappa,1}^{-1})\,dv,$$

$$\sigma_{\varkappa,1}(x,t)=\tilde\rho_{\varkappa,1}*\omega_\varkappa=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(\tilde f_{\varkappa,1}^{+1}(\xi,v,t)-\tilde f_{\varkappa,1}^{-1}(\xi,v,t))\,dv\bigg)\omega_\varkappa(x-\xi)d\xi. \tag{37}$$

Из свойств ядра усреднения $\omega_\varkappa(x)$, равенств (37) и леммы 1 получим следующие соотношения:

$$\|\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\|_1=\|\tilde\rho_{\varkappa,1}*\omega_\varkappa\|_1\leqslant\|\mathring f^{+1}\|_1+\|\mathring f^{-1}\|_1, \quad \|\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\|\leqslant C_\varkappa(\|\mathring f^{+1}\|_1+\|\mathring f^{-1}\|_1).$$

Рассмотрим отображение

$$t\mapsto\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\in L_1(Q)\bigcap L_\infty(Q). \tag{38}$$

Из условия компактности носителей начальных функций $\mathring{f}^{\beta}$ и непрерывности отображения $(t,y,w)\mapsto \hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,0}}(t,y,w,0)$ (см. лемму 2.1 из [25]) следует ограниченность множества

$$\bigcup_t \operatorname{supp}_{x,v} f^{\beta}_{\varkappa,1}(x,v,t)=\bigcup_t \operatorname{supp}_{x,v}\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,0}}(0,x,v,t))\subset\mathbb{R}^6$$

для $|t-t_0|<\varepsilon$, $(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,0}$.

Отсюда, а также из непрерывности отображения $(x,v,t)\mapsto \hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,0}}(0,x,v,t)$ и очевидной оценки $|\sigma_{\varkappa,1}(x,t)-\sigma_{\varkappa,1}(x,t_0)|\leqslant C_{\varkappa,1}\sum_{\beta=\pm1}\|f^{\beta}_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,\cdot\,,t)-f^{\beta}_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,\cdot\,,t_0)\|_1$ вытекает непрерывность отображения (38).

По построению $\sigma_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\in\mathring{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ для всех $t\in[0,T)$ и непрерывна по (x,t) в $\bar{Q}\times[0,T)$.

Обозначим через $\varphi_{\varkappa,1}(x,t)$ классическое решение задачи

$$-\Delta\varphi_{\varkappa,1}(x,t)=4\pi e\sigma_{\varkappa,1}(x,t),\quad \varphi_{\varkappa,1}|_{\partial Q}=0,$$

существование которого гарантировано в силу принадлежности $\sigma_{\varkappa,1}(x,t)$ классу $\mathring{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ для всех $t\in[0,T)$.

Поскольку $\partial Q\setminus K\in C^{\infty}$, функция $\varphi_{\varkappa,1}(x,t)$ непрерывна по (x,t), непрерывно дифференцируема по x в $\bar{Q}\times[0,T)$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $(\bar{Q}\setminus K)\times[0,T)$, при этом $\varphi_{\varkappa,1}(\,\cdot\,,t)\in C^{\infty}(\bar{Q}\setminus K)$ для $t\in[0,T)$, а $\nabla\varphi_{\varkappa,1}$ ограничена в $\bar{Q}\times[0,T)$. Следовательно, функции $E_{\varkappa,1}(x,t):=-\nabla_x\varphi_{\varkappa,1}(x,t)$ и $B(x)$ в уравнении (26) удовлетворяют условию 1. Таким образом, для $p\in(\Lambda_1)_{\varkappa,1}\subset\Omega$ существуют порождающие характеристики, которые мы обозначим через $\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,1}}(\tau,p)$. Множество $(\Lambda_1)_{\varkappa,1}\subset\Omega$ является открытым и $\mu_7(\Omega\setminus(\Lambda_1)_{\varkappa,1})=0$.

Продолжив построения аналогичным образом, получим последовательность сильных решений уравнений Власова $f^{\beta}_{\varkappa,n}$ для заданных полей $E_{\varkappa,n-1}$:

$$f^{\beta}_{\varkappa,n}(x,v,t):=\mathring{f}^{\beta}(\hat{S}^{\beta}_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(0,x,v,t)),\quad n\geqslant1.$$

2. Обозначим $I:=[0,T)$. Докажем, что существует подпоследовательность $f^{\beta}_{\varkappa,n_k}\subset f^{\beta}_{\varkappa,n}$ и функция

$$f^{\beta}_{\varkappa}: I\to L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$$

такая, что

(a) для всех $g\in L_{\infty}(\mathbb{R}^6)$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{t\in I}\left|\int(\tilde{f}^{\beta}_{\varkappa,n_k}(y,v,t)-\tilde{f}^{\beta}_{\varkappa}(y,v,t))g(y,v)\,dy\,dv\right|=0, \tag{39}$$

(b) отображение $\tilde{f}^{\beta}_{\varkappa}: I\to L_1(\mathbb{R}^6)$ непрерывно в слабой топологии на $L_1(\mathbb{R}^6)$.

В силу леммы 4.5 из работы [16] достаточно показать, что:

1) семейство функций $f^{\beta}_{\varkappa,n}$ является слабо компактным в $L_1(Q\times\mathbb{R}^3)$ для всех $t\in I$;

2) для любых $g(y,v)\in L_{\infty}(Q\times\mathbb{R}^3)$ семейство функций $\int_{Q\times\mathbb{R}^3}f^{\beta}_{\varkappa,n}(y,v,t)g(y,v)\,dy\,dv$ равностепенно непрерывно по t.

Первое утверждение следует из теоремы 4.2 в [16] (теорема Данфорда–Петтиса). Доказательство второго утверждения аналогично предложению 5 в [24]. Переобозначим подпоследовательность $f^{\beta}_{\varkappa,n_k}$ снова как $f^{\beta}_{\varkappa,n}$.

3. Пусть $\tilde{\rho}_{\varkappa}(y,t):=\int_{\mathbb{R}^3}(\tilde{f}^{+1}_{\varkappa}(y,v,t)-\tilde{f}^{-1}_{\varkappa}(y,v,t))\,dv$ и $\sigma_{\varkappa}(x,t):=\int_{\mathbb{R}^3}\tilde{\rho}_{\varkappa}(y,t)\omega_{\varkappa}(x-y)\,dy$. Докажем справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\|\sigma_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t)-\sigma_{\varkappa}(\,\cdot\,,t)\|_1=0. \tag{40}$$

Для каждого фиксированного $x \in Q$ имеем

$$\sigma_{\varkappa,n}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}^{+1}_{\varkappa,n}(y,v,t) - \tilde{f}^{-1}_{\varkappa,n}(y,v,t))\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv,$$

$$\sigma_{\varkappa}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6} (\tilde{f}^{+1}_{\varkappa}(y,v,t) - \tilde{f}^{-1}_{\varkappa}(y,v,t))\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv,$$

где $\omega_\varkappa(x-y) \in L_\infty(\mathbb{R}^6)$.

Из последних двух соотношений и (39) получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} |\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)| = 0 \tag{41}$$

для любого $x \in Q$.

Используя лемму 1 об инвариантности меры относительно отображения $\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(s,\cdot,\cdot,t) : \Gamma_t \to \Gamma_s$ и групповое свойство порождающих характеристик, будем иметь

$$\|f^\beta_{\varkappa,n}\|_1 = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa,n}(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(0,x,v,t))\,dx\,dv =$$

$$= \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(0,\hat{S}^\beta_{\varphi_{\varkappa,n-1}}(t,y,w,0),t))\,dy\,dw = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \mathring{f}^\beta(y,w)\,dy\,dw = \|\mathring{f}^\beta\|_1.$$

Из непрерывности отображения $\tilde{f}^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t) : I \to L_1(\mathbb{R}^6)$ в слабой топологии и теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает неравенство

$$\sup_{t\in I} \|f^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t)\|_1 \leqslant c_{\varkappa,1},$$

где $c_{\varkappa,1} > 0$ – некоторая константа, не зависящая от t.

Отсюда и из (41) получим

$$|\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)| \leqslant |\sigma_{\varkappa,n}(x,t)| + |\sigma_\varkappa(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\varkappa,2} \sum_\beta (\|\mathring{f}^\beta\|_1 + \|f^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t)\|_1) \leqslant c_{\varkappa,2} \sum_\beta (\|\mathring{f}^\beta\|_1 + c_{\varkappa,1}), \tag{42}$$

где $c_{\varkappa,2} > 0$ не зависит от x, n и t.

Из (41), (42) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\sup_{t\in I} \int\limits_Q |\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_Q \sup_{t\in I} |\sigma_{\varkappa,n}(x,t) - \sigma_\varkappa(x,t)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

4. Покажем теперь, что для фиксированного $\varkappa > 0$ предел последовательности сильных решений уравнений Власова $f^\beta_{\varkappa,n}$, определённый в п. 2 доказательства, является сильным решением сглаженной системы Власова–Пуассона (26), (30)–(32) с начальными условиями (33) и краевыми условиями (34).

В п. 2 доказательства мы определили функции $f^\beta_\varkappa$, а в п. 3 – функции $\rho_\varkappa$ и $\sigma_\varkappa$. Обозначим

$$\varphi_\varkappa(x,t) := \int\limits_Q G(x,\xi)\sigma_\varkappa(\xi,t)\,d\xi, \quad x\in\bar{Q}, \quad t\in I, \tag{43}$$

$$E_\varkappa(x,t) := -\nabla_x\varphi_\varkappa(x,t), \quad x\in\bar Q, \quad t\in I. \tag{44}$$

Из известных свойств функции Грина [33]

$$G(x,y)\leqslant \frac{c_1}{|x-y|}, \quad |\nabla_x G(x,y)|\leqslant \frac{c_1}{|x-y|^2}, \quad x,y\in Q, \quad x\neq y, \tag{45}$$

а также соотношений (42)–(45) и неравенства Гёльдера следует оценка

$$\|E_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t)-E_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|\leqslant c_2\|\sigma_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t)-\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_1^{1/4}, \quad t\in I,$$

где $E_{\varkappa,n}(x,t)=-\nabla\varphi_{\varkappa,n}(x,t)$, $\varphi_{\varkappa,n}(x,t)=\int_Q G(x,y)\sigma_{\varkappa,n}(y,t)\,dy$, $x\in\bar Q$, $t\in I$.

Отсюда и из (40) получим

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\|E_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,t)-E_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|=0. \tag{46}$$

Таким образом, отображение

$$I\ni t\to E_\varkappa(\,\cdot\,,t)\in C(\bar Q)$$

непрерывно, т.е. функция $E_\varkappa(x,t)$ непрерывна по x и t на множестве $\bar Q\times I$.

По построению функция $\varphi_\varkappa$ является решением задачи

$$-\Delta\varphi_\varkappa(x,t)=4\pi e\sigma_\varkappa(x,t), \quad x\in Q, \quad t\in I, \tag{47}$$

$$\varphi_\varkappa(x,t)=0, \quad x\in\partial Q, \quad t\in I, \tag{48}$$

где по определению $\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\in C^\infty(\bar Q)$, $t\in I$. Поэтому по теореме 6.18 из [34] о регулярности решений эллиптических задач вблизи гладкой границы $\varphi_\varkappa(x,t)$ непрерывна по x и t, непрерывно дифференцируема по x в $\bar Q\times[0,T)$ и дважды непрерывно дифференцируема по x в $(\bar Q\setminus K)\times[0,T)$. Таким образом, выполнено условие 1, которое обеспечивает существование порождающих характеристик для сглаженного уравнения Власова (26) на открытом множестве $(\Lambda_1)_\varkappa\subset\Omega$, при этом $\mu_7(\Omega\setminus(\Lambda_1)_\varkappa)=0$. Из равенства (46) следует, что вектор-функции $E_{\varkappa,n}$ и $E_\varkappa$ удовлетворяют условиям леммы 2.1 в [25]. Отсюда вытекает существование числа $N\in\mathbb N$ такого, что для любых $(x,v,t)\in(\Lambda_1)_\varkappa$, $s\neq t_k(x,v,t)$ $(k\in\mathbb Z)$ и $n\geqslant N$ мы имеем $(x,v,t)\in(\Lambda_1)_{\varkappa,n}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\hat S^\beta_{\varkappa,n}(s,x,v,t)=\hat S^\beta_\varkappa(s,x,v,t),$$

где $(\Lambda_1)_{\varkappa,n}\subset\Omega$ – открытое множество, $\mu_7(\Omega\setminus(\Lambda_1)_{\varkappa,n})=0$.

Следовательно, для всех $(x,v,t)\in(\Lambda_1)_\varkappa$

$$\lim_{n\to\infty}f^\beta_{\varkappa,n}(x,v,t)=\lim_{n\to\infty}\mathring f^\beta(\hat S^\beta_{\varkappa,n}(0,x,v,t))=\mathring f^\beta(\hat S^\beta_\varkappa(0,x,v,t))=:g^\beta_\varkappa(x,v,t). \tag{49}$$

Из (49) получим

$$\sup_{x,v,t}|f^\beta_{\varkappa,n}(x,v,t)|,\sup_{x,v,t}|g^\beta_\varkappa(x,v,t)|\leqslant\|\mathring f^\beta\|.$$

Из соотношений (49), последнего неравенства и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f^\beta_{\varkappa,n}(\,\cdot\,,\cdot\,,t)-g^\beta_\varkappa(\,\cdot\,,\cdot\,,t)\|_1=0, \quad t\in I,$$

поэтому

$$f^\beta_\varkappa(x,v,t)=g^\beta_\varkappa(x,v,t)=\mathring f^\beta(\hat S^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) \quad \text{для п.в.} \quad (x,v,t)\in\Omega. \tag{50}$$

Отсюда имеем

$$\sigma_\varkappa(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^6}(\tilde f_\varkappa^{+1}(y,v,t)-\tilde f_\varkappa^{-1}(y,v,t))\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv=\int\limits_{\mathbb{R}^6}(\tilde g_\varkappa^{+1}(y,v,t)-\tilde g_\varkappa^{-1}(y,v,t))\,dy\,dv. \quad (51)$$

Таким образом, функции $g_\varkappa^\beta$ удовлетворяют сглаженной системе уравнений Власова–Пуассона (26), (30)–(32). Легко видеть, что начальные условия (33) и краевые условия (34) также выполняются.

Мы доказали, что функция $g_\varkappa^\beta(x,v,t)=\mathring{f}^\beta(\hat S_\varkappa^\beta(0,x,v,t))$ является сильным решением задачи (26), (30)–(34). Теорема доказана.

5. Слабые решения смешанной задачи для системы Власова–Пуассона. Докажем теорему существования слабых решений системы Власова–Пуассона (1), (2) с начальным условием (3) и краевыми условиями (4), (5).

Пусть $f^\beta\in L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$, $\Omega:=Q\times\mathbb{R}^3\times(0,T)$, а функция $E=E(x,t)$ такова, что $f^\beta E$ локально интегрируема на Ω.

Определение 2. Функции f^β назовём *слабо дифференцируемыми* по направлению

$$l^\beta:=\left(v,\frac{\beta e}{m_\beta}E+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],1\right),$$

если существуют функции $h^\beta\in L_p(\Omega)$ такие, что для всех $g^\beta\in\mathring{C}^1(\Omega)$

$$\langle h^\beta,g^\beta\rangle=-\langle f^\beta,L^\beta g^\beta\rangle:=-\int\limits_\Omega f^\beta L^\beta g^\beta\,dx\,dvdt,$$

где

$$L^\beta g^\beta:=\langle v,\nabla_x g^\beta\rangle+\left\langle\frac{\beta e}{m_\beta}E+\frac{\beta e}{m_\beta c}[v,B(x)],\nabla_v g^\beta\right\rangle+\frac{\partial g^\beta}{\partial t}.$$

Функции $h^\beta\in L_p(\Omega)$ определены единственным образом и обозначаются через $L^\beta f^\beta$.

Определение 3. Пусть функции $f^\beta\in L_p(\Omega)$ $(1\leqslant p<\infty)$ слабо дифференцируемы по направлению l^β. Функции $f_\pm^\beta\in L_{p,loc}(A_\pm)$ будем называть *следами* f^β на $A_\pm$, если

$$\langle L^\beta f^\beta,\psi^\beta\rangle+\langle f^\beta,L^\beta\psi^\beta\rangle=\int\limits_{A_+}f_+^\beta\psi^\beta d\nu_+-\int\limits_{A_-}f_-^\beta\psi^\beta d\nu_-$$

для любых $\psi^\beta\in\mathring{C}^1(\bar\Omega\times\mathbb{R}^3\times(0,T))$.

В силу определения 1 и лемм 3, 4 любое сильное решение $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, задачи (1)–(5) с начальными функциями $\mathring{f}^\beta\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ слабо дифференцируемо по направлению l^β, при этом $L^\beta f^\beta=0$, следы f^β на $A_\pm$ существуют и задаются формулами (13), (14).

Запишем задачу (1)–(5) следующим образом:

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t}+\langle v,\nabla_x f^\beta\rangle+\frac{\beta e}{m_\beta}\left\langle E+\frac1c[v,B],\nabla_v f^\beta\right\rangle=0,\quad x\in Q,\quad v\in\mathbb{R}^3,\quad t\in(0,T),\quad \beta=\pm1, \quad (52)$$

$$E(x,t)=-\int\limits_Q\nabla_x G(x,\xi)\rho(\xi,t)d\xi,\quad \rho(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_\beta\beta f^\beta(x,v,t)\,dv,\quad x\in\bar Q,\quad t\in[0,T), \quad (53)$$

$$f^\beta(x,v,0)=\mathring{f}^\beta(x,v),\quad x\in\bar Q,\quad v\in\mathbb{R}^3, \quad (54)$$

$$f_-^\beta(x,v,t)=\mathcal{K}f_+^\beta(x,v,t),\quad (x,v,t)\in A_-,\quad \beta=\pm1. \quad (55)$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $1 \leqslant p' \leqslant \infty$ такие, что $1/p + 1/p' = 1$, и пусть X – измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$. Для $1 \leqslant p < \infty$ обозначим через $\sigma(p, p')$ слабую топологию в $L_p(X)$, а через $\sigma(\infty, 1)$ – слабую-* топологию в пространстве $L_\infty(X)$.

Определение 4. Функции $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, будем называть *слабым решением системы уравнений* (52)–(55), если выполняются следующие условия:

1) отображения $f^\beta : I \to (L_1(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(1, \infty)) \bigcap (L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(\infty, 1))$ непрерывны, $\beta = \pm 1$;

2) $f^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v)$ для почти всех $x \in \bar{Q}$, $v \in \mathbb{R}^3$ и $\beta = \pm 1$;

3) для почти всех $(x, t) \in Q \times [0, T)$ и $\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x, v, t)\, dv$ положим $E(x, t) = -\int_Q \nabla_x G(x, \xi)\rho(\xi, t)\, d\xi$, тогда функции $f^\beta E$ локально интегрируемы на $\Omega \times \mathbb{R}^3$;

4) для всех $\psi \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ имеем

$$\left(t \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t)\, dx\, dv\right) \in C^1(I),$$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t)\, dx\, dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta \psi)(x, v, t) f^\beta(x, v, t)\, dx\, dv,$$

где

$$(X^\beta \psi)(x, v, t) := \langle v, \nabla_x \psi(x, v)\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v)\right\rangle;$$

5) следы f^β на $A_\pm$ существуют и $f^\beta_- = \mathcal{K} f^\beta_+$ на A_-, $\beta = \pm 1$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, $\mathring{f}^\beta \geqslant 0$. *Тогда существует слабое решение* $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, *задачи (52)–(55).*

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $1 \leqslant r < 3$, $r \leqslant q < 3r/(3 - r)$, *и пусть* $K \subset \mathbb{R}^3$ *область такая, что* $\bar{K} \subset Q$. *Тогда оператор* $A_G : L_r(Q) \to L^3_q(Q)$, *определённый по формуле*

$$(A_G \sigma)(x) = \chi_K(x) \int\limits_Q \nabla_x G(x, y)\sigma(y)\, dy,$$

является компактным, где $\chi_K(x)$ *– характеристическая функция множества* K.

Доказательство см. в [24, лемма 4.3].

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть* $\{f^\beta_\varkappa\}$, $\varkappa > 0$, *– сильное решение задачи (26), (29)–(34). Тогда для любой последовательности* $\{\varkappa_n\}$, $\varkappa_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\varkappa_n > 0$, *существуют подпоследовательность* $\{\varkappa_{n_k}\}$ *и функции* $f^\beta \in C(I, (L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p')))$ *такие, что для любых* $p, p' \in [1, \infty]$, $1/p + 1/p' = 1$, *справедливы утверждения:*

a) $f^\beta_{\varkappa_{n_k}} \rightharpoonup f^\beta$ *в* $(L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p'))$ *равномерно по* $t \in I$ *при* $k \to \infty$;

b) $f^\beta_{\varkappa_{n_k}} \rightharpoonup f^\beta$ *в* $(L_p(\Omega), \sigma(p, p'))$ *при* $k \to \infty$;

c) существуют $g^\beta_\pm \in L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ *такие, что* $f^\beta_{\varkappa_{n_k},\pm} \rightharpoonup^* g^\beta_\pm$ *в* $L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство аналогично [24, лемма 4.5].

В дальнейшем для упрощения будем обозначать подпоследовательность $\{\varkappa_{n_k}\}$ через $\varkappa_n$.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3.*

a) Пусть, кроме того, $1 \leqslant p \leqslant 5/3$, *а функции* $\rho^\beta_{\varkappa_n} : I \to L_p(Q)$ *определены по формуле*

$$\rho^\beta_{\varkappa_n}(x, t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x, v, t)\, dv.$$

Тогда $\rho^\beta_{\varkappa_n}(x, t) \rightharpoonup \rho^\beta(x, t)$ *при* $n \to \infty$ *в* $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$ *равномерно по* $t \in I$.

b) Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\psi \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\,\cdot\,, v) f^\beta_{\varkappa_n}(\,\cdot\,, v, t)\, dv \rightharpoonup \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\,\cdot\,, v) f^\beta(\,\cdot\,, v, t)\, dv$$

в $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по* $t \in I$.

Доказательство см. в [24, лемма 4.7].

Доказательство теоремы 3. 1. Рассмотрим функции f^β, $g^\beta_\pm$, $\beta = \pm 1$, из леммы 6. Покажем, что $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, – слабое решение задачи (52)–(55). Выполнение условий 1)–3) для функций $\{f^\beta\}$ в определении слабого решения следует из леммы 6, равенства (33), а также соотношений (53) и (46).

2. Докажем выполнение условия 4). Вначале покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} (J^\beta_{1,n}(t) + J^\beta_{2,n}(t)) = 0, \tag{56}$$

где

$$J^\beta_{1,n}(t) = \left| \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \left(\langle v, \nabla_x \psi(x, v)\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \right) (f^\beta_{\varkappa_n}(x, v, t) - f^\beta(x, v, t))\, dx\, dv \right|,$$

$$J^\beta_{2,n}(t) = \left| \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \frac{\beta e}{m_\beta} \langle \nabla_v \psi(x, v), E^\beta_{\varkappa_n}(x, t) f^\beta_{\varkappa_n}(x, v, t) - E^\beta(x, t) f^\beta(x, v, t)\rangle\, dx\, dv \right|, \tag{57}$$

$\psi \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, $E^\beta_{\varkappa_n}(x, t) = \int_Q e_n(x, y) \rho^\beta_{\varkappa_n}(y, t)\, dy$, $\rho^\beta_{\varkappa_n}(y, t) := \int_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(y, v, t)\, dv$.

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} J^\beta_{1,n} = 0. \tag{58}$$

Поскольку $\psi \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$, имеем

$$\langle v, \nabla_x \psi(x, v)\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta c}[v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \in L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3) \bigcap L_1(Q \times \mathbb{R}^3).$$

Отсюда и из утверждения a) леммы 6 следует равенство (58).

Докажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} J^\beta_{2,n} = 0. \tag{59}$$

Для любых $t \in I$ и п.в. $x \in Q$ имеем $\rho^\beta(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} f^\beta(x, v, t)\, dv$. В силу леммы 6 $\rho^\beta(\,\cdot\,, t) \in \in L_1(Q)$. Из доказательства леммы 4.1 в [34] и неравенств (45) следует, что потенциал

$$\varphi^\beta(x, t) := \int\limits_Q G(x, y) \rho^\beta(y, t)\, dy$$

непрерывно дифференцируем по x для $x \in Q$ и $t \in I$ и

$$E^\beta(x, t) = -\nabla_x \varphi^\beta(x, t) = -\int\limits_Q \nabla_x G(x, y) \rho^\beta(y, t)\, dy.$$

Обозначим

$$e(x, y) := -\nabla_x G(x, y), \quad e_n(x, y) := -\int\limits_Q \nabla_x G(x, \xi) \omega_{\varkappa_n}(y - \xi) d\xi. \tag{60}$$

Тогда

$$E^\beta(x,t)=\int\limits_Q e(x,y)\rho^\beta(y,t)\,dy.$$

Положим

$$E(x,t)=\sum_\beta \beta E^\beta(x,t),\quad E_{\varkappa_n}(x,t)=\sum_\beta \beta E^\beta_{\varkappa_n}(x,t).$$

Используя (60), мы можем записать (57) в виде

$$J^\beta_{2,n}(t)=\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t)\langle e_n(x,y)-e(x,y),\nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw+$$

$$+\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t)-f^\beta(y,w,t))\langle e(x,y),\nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw+$$

$$+\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta(y,w,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)-f^\beta(x,v,t))\langle e(x,y),\nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw. \tag{61}$$

Доказательство равенства (59) проводится аналогично доказательству леммы 4.8 из [24]. Для этого достаточно показать, что каждое из трёх слагаемых в формуле (61) стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I$. Докажем, например, справедливость этого утверждения для второго слагаемого. Для этого воспользуемся леммой 5 при $r=5/3$ и $r\leqslant q<15/4$. Выберем q' из условия $1/q+1/q'=1$. Поскольку $\operatorname{supp}_x\psi\subset Q$, в силу утверждения b) леммы 7 имеем

$$\frac{e}{m_\beta}\Bigg|\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t)-f^\beta(y,w,t))\langle e(x,y),\nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw\Bigg|=$$

$$=\frac{e}{m_\beta}\Bigg|\int\limits_{Q\times Q\times\mathbb{R}^6}\chi_{\operatorname{supp}_x\psi}(x) f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)(f^\beta_{\varkappa_n}(y,w,t)-f^\beta(y,w,t))\langle e(x,y),\nabla_v\psi(x,v)\rangle\,dx\,dv\,dy\,dw\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e}{m_\beta}\int\limits_Q\chi_{\operatorname{supp}_x\psi}(x)\Bigg|\int\limits_Q e(x,y)(\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t)-\rho^\beta(y,t))\,dy\Bigg|\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\nabla_v\psi(x,v)\,dv\Bigg|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e}{m_\beta}\Bigg\|\chi_{\operatorname{supp}_x\psi}(x)\int\limits_Q e(x,y)(\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t)-\rho^\beta(y,t))\,dy\Bigg\|_q\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\nabla_v\psi(x,v)\,dv\Bigg\|_{q'}. \tag{62}$$

В силу утверждения b) леммы 7

$$\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\nabla_v\psi(x,v)\,dv\Bigg\|_{q'}\leqslant C, \tag{63}$$

где $C>0$ не зависит от $t\in I$.

С другой стороны, из леммы 5 следует, что оператор $A_G:L_r(Q)\to L^3_q(Q)$ компактный, поэтому он переводит слабо сходящуюся последовательность $\{\rho^\beta_{\varkappa_n}\}$ в $L_r(Q)$ (см. утверждение a) леммы 7) в сильно сходящуюся в $L^3_q(Q)$. Следовательно,

$$\Bigg\|\chi_{\operatorname{supp}_x\psi}(x)\int\limits_Q e(x,y)(\rho^\beta_{\varkappa_n}(y,t)-\rho^\beta(y,t))\,dy\Bigg\|_q\to 0$$

равномерно по $t \in I$. Отсюда и из (62), (63) следует (59). Таким образом, справедливость (56) доказана. Это означает, что

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\psi)(x,v,t)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\psi)(x,v,t)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv \tag{64}$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I$.

С другой стороны, в силу утверждения a) леммы 6 имеем

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv \tag{65}$$

при $n\to\infty$ равномерно по $t\in I$, при этом из леммы 3 следует, что

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv \in C^1(I), \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\varphi)(x,v,t)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv. \tag{67}$$

Из (64)–(67) и единственности предела заключаем, что последовательность

$$\left\{\frac{d}{dt}\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\,dx\,dv\right\}$$

при $n\to\infty$ сходится к

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv\biggr) \in C^1(I)$$

равномерно по $t\in I$, при этом выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}\biggl(\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} \varphi(x,v)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv\biggr) = \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} (X^\beta\varphi)(x,v,t)f^\beta(x,v,t)\,dx\,dv$$

для $t\in I$.

Выполнение условия 5 следует из доказательства предложения 6 в [24, с. 102–106].

Итак, мы доказали существование глобального слабого решения $\{f^\beta\}$, $\beta=\pm1$, первой смешанной задачи для системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающей кинетику двухкомпонентной высокотемпературной плазмы в области с гладкой границей. Лемма доказана.

6. Система уравнений Власова–Пуассона в цилиндре. Далее предположим, что $Q = G\times(-d,d)$, где $G\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G\in C^\infty$, $d>0$.

Вначале мы докажем вспомогательный результат о существовании и единственности сильного решения уравнения Пуассона с условиями Дирихле в цилиндре Q в пространстве Соболева $W^2_p(Q)$, $p\geqslant 2$, который является обобщением соответствующего результата для ограниченной области с гладкой границей (см. теорему 9.15 из [34, гл. 9, § 9.6]).

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u(x) = F(x), \quad x\in Q, \tag{68}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \tag{69}$$

где $F \in L_p(Q)$, $2 \leqslant p < \infty$.

Определение 5. Функцию $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ назовём *слабым* (*обобщённым*) *решением задачи* (68), (69), если для любой функции $v \in \mathring{C}^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int\limits_Q F(x) v(x)\, dx.$$

Определение 6. Функцию $u \in \mathring{W}_p^1(Q) \bigcap W_{p,loc}^2(Q)$ назовём *сильным решением задачи* (68), (69), если она удовлетворяет п.в. в Q уравнению (68).

Очевидно, что сильное решение задачи (68), (69) является и слабым тем более.

Лемма 8. *Для любой функции $F \in L_p(Q)$ существует единственное сильное решение $u \in W_p^2(Q) \bigcap \mathring{W}_p^1(Q)$ задачи (68), (69), при этом*

$$\|u\|_{W_p^2(Q)} \leqslant c_1 \|F\|_{L_p(Q)}, \tag{70}$$

где $2 \leqslant p < \infty$, $c_1 = c_1(Q) > 0$ не зависит от F.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в теореме 9.15 из [34, гл. 9, § 9.6], в которой рассматривалась область с гладкой границей. Принципиальное отличие заключается в том, что в рассматриваемом случае граница ∂Q не является гладкой, так как она содержит два ребра $\partial G \times \{-d\}$ и $\partial G \times \{d\}$.

Все этапы доказательства указанной леммы состоят из вспомогательных утверждений, касающихся гладкости и априорных оценок слабых решений задачи (68), (69) во внутренних подобластях Q' $(\bar{Q}' \subset Q)$ или в подобластях Q' вблизи гладкой границы $Q' \subset Q$, $\partial Q' \bigcap \partial Q \neq \varnothing$. В рассматриваемом нами случае ключевым результатом является

Лемма 9. *Пусть $B_R^+ := \{x \in B_R : x_3 > 0\}$ и $B_R^{++} := \{x \in B_R : x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$. Пусть функция $u \in \mathring{W}_p^1(B_R^{++})$, $2 \leqslant p < \infty$, является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^{++} и равна нулю вблизи $\partial B_R^{++} \bigcap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$, где $F \in L_p(B_R^{++})$.*

Тогда $u \in W_p^2(B_R^{++})$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_p^2(B_R^{++})} \leqslant c_2 \|F\|_{L_p(B_R^{++})},$$

где $c_2 > 0$ и не зависит от F.

Доказательство. Продолжим функции $u(x)$ и $F(x)$ нечётным образом в $B_R^+ \setminus B_R^{++}$, полагая

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = -u(x_1, -x_2, x_3), \quad x \in B_R^+, \quad x_2 < 0,$$

$$\tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = -F(x_1, -x_2, x_3), \quad x \in B_R^+, \quad x_2 < 0.$$

По построению функция $\tilde{u}$, которая является нечётным продолжением функции u, обладает следующими свойствами: $\tilde{u} \in \mathring{W}_p^1(B_R^+)$ и $\tilde{u}(x) = 0$ вблизи $\partial B_R^+ \bigcap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$.

Покажем, что функция $\tilde{u}$ является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^+. Возьмём произвольную пробную функцию $v \in \mathring{C}^1(B_R^+)$. Введём чётную функцию $\xi_\varepsilon(x_2) \in C^1(\mathbb{R})$ так, что $\xi_\varepsilon(x_2) = 0$ при $|x_2| \leqslant \varepsilon$, $\xi_\varepsilon(x_2) = 1$ при $|x_2| \geqslant 2\varepsilon$ и $|\xi'_\varepsilon(x_2)| \leqslant 2/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Тогда, используя определения функций $\tilde{F}$ и $\tilde{u}$ и формулу Лейбница, получаем

$$\int\limits_{B_R^+} \tilde{F}(x) \xi_\varepsilon(x_2) v(x)\, dx = \int\limits_{B_R^+} \nabla \tilde{u}(x) \nabla(\xi_\varepsilon v)(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{B_R^+} \xi_\varepsilon(x_2) \nabla \tilde{u}(x) \nabla v(x)\, dx + \int\limits_{B_R^+} v(x) \xi'_\varepsilon(x_2) D_{x_2} \tilde{u}(x)\, dx. \tag{71}$$

С учётом чётности функции $\xi_\varepsilon(x_2)$ и нечётности по x_2 функции $\tilde{u}(x)$, оценки $|\xi'_\varepsilon(x_2)| \leqslant \leqslant 2/\varepsilon$ и формулы Лагранжа в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получим

$$\left|\int\limits_{B_R^+} v(x)\xi'_\varepsilon(x_2)D_{x_2}\tilde{u}(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{B_R^{++}\bigcap\{x_2<2\varepsilon\}} (v(x_1,x_2,x_3)-v(x_1,-x_2,x_3))\xi'_\varepsilon(x_2)D_{x_2}u(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon\frac{2}{\varepsilon}\max_{x\in\bar{B}_R^+}|D_{x_2}v(x)|\int\limits_{B_R^{++}\bigcap\{x_2<2\varepsilon\}}|D_{x_2}u(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \tag{72}$$

Устремив в тождестве (71) ε к нулю, в силу (72) будем иметь

$$\int\limits_{B_R^+}\tilde{F}(x)v(x)\,dx = \int\limits_{B_R^+}\nabla\tilde{u}(x)\nabla v(x)\,dx.$$

Таким образом, $\tilde{u}\in \mathring{W}_p^1(B_R^+)$ является слабым решением задачи (68), (69) в B_R^+ и $u(x)=0$ вблизи $\partial B_R^+\bigcap\{x_3>0\}$.

Следовательно, в силу леммы 9.12 из [34, гл. 9, § 9.5] $\tilde{u}\in W_p^2(B_R^+)$ и

$$\|\tilde{u}\|_{W_p^2(B_R^+)} \leqslant k_1\|\tilde{F}\|_{L_p(B_R^+)},$$

где $k_1>0$ не зависит от $\tilde{F}$. Отсюда вытекает утверждение леммы 9.

Комбинируя известные утверждения о гладкости и априорных оценках слабых решений внутри области, вблизи гладких частей границы, а также доказанную выше лемму 9 о гладкости и априорных оценках слабых решений задачи (68), (69) вблизи ребра, мы убеждаемся в справедливости леммы 8. Лемма доказана.

Замечание 3. Лемма 8 справедлива также в случае сильно эллиптического в $\bar{Q}$ дифференциального уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами и однородными условиями Дирихле на границе ∂Q. Однако нам понадобится лишь рассмотренная выше задача (68), (69).

В дальнейшем нам потребуется оценка нормы напряжённости самосогласованного электрического поля $E_\varkappa(x,t)$ для сглаженной системы Власова–Пуассона через нормы начальных функций распределения заряженных частиц $\mathring{f}^\beta(x,v)$.

Обозначим

$$Q_{2\delta} := \{x\in Q: \operatorname{dist}(x,\partial G\times(-d,d))>2\delta\}, \quad G_{2\delta} := \{x\in G: \operatorname{dist}(x',\partial G)>2\delta\},$$

где число $\delta>0$ таково, что $Q_{2\delta}\neq\varnothing$, $x=(x',x_3)$.

Предположим, что выполнено следующее

Условие 2. Пусть $\mathring{f}^\beta\in\mathring{C}^1(\mathbb{R}^6)$ и $\operatorname{supp}\mathring{f}^\beta\subset D_0 := (Q_{2\delta}\bigcap B_\lambda)\times B_\rho$, где $\delta,\rho>0$, $0\in Q_{2\delta}$, $2\delta<\lambda<d/2$.

Из (47), (48), (50) и (51) получим задачу

$$-\Delta\varphi_\varkappa(x,t) = 4\pi e\sigma_\varkappa(x,t), \quad x\in Q, \quad t\in[0,T), \tag{73}$$

$$\varphi_\varkappa(x,t)=0, \quad x\in\partial Q, \quad t\in[0,T), \tag{74}$$

где

$$\sigma_\varkappa(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6}\sum_{\beta=\pm1}\omega_\varkappa(x-y)\beta\tilde{f}_\varkappa^\beta(y,v,t)\,dy\,dv, \quad x\in Q, \quad t\in[0,T), \tag{75}$$

$\tilde{f}_\varkappa^\beta(y,v,t)$ $((y,v)\in\mathbb{R}^6,\ t\in[0,T))$ – продолжение по y нулём в $\mathbb{R}^3\setminus Q$ функции $f_\varkappa^\beta(y,v,t) = = \mathring{f}^\beta(\hat{S}_\varkappa^\beta(0,y,v,t))$ $(y\in Q,\ v\in\mathbb{R}^3,\ t\in[0,T))$, $\varkappa>0$ (см. доказательство теоремы 2).

Из условия 2 и теоремы 1 следует, что $\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\in C^\infty(\bar Q)$ для любого $t\in[0,T)$.

Обозначим

$$R(T):=\{1+\max_\beta\sup_{\varkappa>0}\sup_{v\in\mathbb{R}^3}|v|:\text{существуют } x\in Q \text{ и } t\in[0,T) \text{ такие, что } f^\beta_\varkappa(y,v,t)\neq 0\}.$$

Условие 3. $R(T)<\infty$.

Выполнение аналогичного условия в случае задачи Коши для системы Власова–Пуассона доказано в работах [22, 23]. Заметим, что константа $R(T)$ зависит также от начальных функций $\mathring f^\beta$ (см. [22, с. 1316]).

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2. Тогда справедлива оценка*

$$|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T}\leqslant\frac{c_3}{\varkappa^3}\max_\beta\|\mathring f^\beta\|,\quad \beta=\pm1,\tag{76}$$

где $c_3=c_3(Q,\rho)>0$ *– константа, не зависящая от* T, $\mathring f^\beta$ *и* $\varkappa$.

Если к тому же выполняется условие 3, то имеет место неравенство

$$|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T}\leqslant c_4\max_\beta\|\mathring f^\beta\|,\quad \beta=\pm1,\tag{77}$$

где $c_4=c_4(Q,\rho,T,\mathring f^\beta)>0$ *– константа, не зависящая от* $\varkappa$.

Доказательство. 1. В силу леммы 8 для $t\in[0,T)$ существует единственное сильное решение $\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)\in W^2_p(Q)\bigcap\mathring W^1_p(Q)$ задачи (73), (74), при этом

$$\|\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{W^2_p(Q)}\leqslant c_1 4\pi e\|\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{L_p(Q)},\tag{78}$$

где $c_1=c_1(Q)>0$ не зависит от $\sigma_\varkappa$ и от t, $p\geqslant 2$.

Из теоремы Соболева о непрерывности вложения пространства $W^2_p(Q)$ в $C^1(\bar Q)$ при $p\geqslant 4$ и соотношений (70) и (75) следует, что

$$|||\nabla\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)|||_{C^0(\bar Q)}\leqslant k_1\|\varphi_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{W^2_4(Q)}\leqslant c_1k_1 4\pi e\|\sigma_\varkappa(\,\cdot\,,t)\|_{L_4(D)}\leqslant c_1k_1 4\pi e\sum_{\beta=\pm1}I^\beta,\tag{79}$$

где

$$I^\beta=\bigg\{\int\limits_Q\bigg|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(x-y)f^\beta_\varkappa(y,v,t)\,dy\,dv\bigg|^4dx\bigg\}^{1/4}=$$

$$=\bigg\{\int\limits_Q\bigg|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3}\omega_\varkappa(x-y)\mathring f^\beta(\hat S^\beta_\varkappa(0,y,v,t))\,dy\,dv\bigg|^4dx\bigg\}^{1/4},$$

$k_1=k_1(Q)>0$.

В силу леммы 1 отображение $\hat S^\beta_\varphi(t,\cdot,\cdot,0):\Gamma_0\to\Gamma_t$ биективно и отображает измеримое множество $U_0=(D_0\times\{0\})\bigcap\Lambda\subset\Gamma_0$ на множество $U_t\subset\Gamma_t$, при этом $\mu_6(U_t)=\mu_6(U_0)<\infty$, где $\Gamma_t=\{(x,v,\tau)\in\Lambda_1:\tau=t\}$, множества Λ и Λ_1 определены перед теоремой 1.

Отсюда имеем

$$I^\beta=\bigg\{\int\limits_Q\bigg|\int\limits_{U_t}\omega_\varkappa(x-y)\mathring f^\beta(\hat S^\beta_\varkappa(0,y,v,t))\,dy\,dv\bigg|^4dx\bigg\}^{1/4}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{(y,v)\in U_t}\mathring f^\beta(\hat S^\beta_\varkappa(0,y,v,t))\bigg\{\int\limits_Q\bigg(\int\limits_{U_t}\omega_\varkappa(x-y)\,dy\,dv\bigg)^4dx\bigg\}^{1/4}.\tag{80}$$

2. Докажем справедливость оценки (76). Из (27), (28) для любых $x, y \in \mathbb{R}^3$ получим

$$\omega_\varkappa(x-y) \leqslant \frac{k_2}{\varkappa^3}, \tag{81}$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $x, y \in \mathbb{R}^3$ и $\varkappa > 0$. Из (80) и (81) вытекают неравенства

$$I^\beta \leqslant \max_{(z,w)\in\bar{D}_0} \mathring{f}^\beta(z,w)\frac{k_2}{\varkappa^3}\bigg\{\int\limits_Q \mu_6^4(U_t)\,dx\bigg\}^{1/4} \leqslant \frac{k_2}{\varkappa^3}\mu_3^{1/4+1}(Q)\mu_3(B_\rho)\|\mathring{f}^\beta\|. \tag{82}$$

Из (79), (82) следует оценка (76).

3. Остаётся доказать неравенство (77). Пусть выполнено условие 3. Тогда из (80) и условия 3 получим

$$I^\beta \leqslant \max_{(z,w)\in\bar{D}_0} \mathring{f}^\beta(z,w)\bigg\{\int\limits_Q\bigg(\int\limits_{|v|<R(T)} dv \int\limits_{|x-y|<\varkappa} \omega_\varkappa(x-y)\,dy\bigg)^4 dx\bigg\}^{1/4} \leqslant \mu_3^{1/4}(Q)\mu_3(B_{R(T)})\|\mathring{f}^\beta\|. \tag{83}$$

Из (80), (83) вытекает (77). Теорема доказана.

Рассмотрим порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0) := (\hat{X}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0), \hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0))$, $(x,v,0) \in \Lambda_3$, сглаженной системы уравнений (35), (36). Положим $(x_k^\beta, v_k^\beta) := \hat{S}_\varkappa^\beta(t_k^\beta - 0, x, v, 0)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 10. *Пусть выполнено условие 2. Тогда для всех* $(x,v,0) \in \Lambda_3$, $(x,v) \in D_0$, *справедлива оценка*

$$|\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)| \leqslant \rho + \frac{eT^\beta k_1}{m_\beta}\|\mathring{f}^\beta\|, \quad 0 \leqslant \tau < t_1^\beta, \tag{84}$$

$$|x_1^\beta - x| \leqslant \bigg(\rho + \frac{eT^\beta}{m_\beta}k_1\|\mathring{f}^\beta\|\bigg)T^\beta, \tag{85}$$

где $k_1 = c_3/\varkappa^3$ $(c_3 > 0)$ *– константа из неравенства (76);* $T^\beta := t_1^\beta < T$, *если существует момент отражения* $t_1^\beta < T$, $T^\beta = T$, *если* $\hat{X}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)\bigcap\partial Q = \varnothing$ *для всех* $0 \leqslant \tau < T$; $x_1^\beta := \hat{X}_\varkappa^\beta(T^\beta - 0, x, v, 0)$.

Если к тому же выполняется условие 3, то для всех $(x,v,0) \in \Lambda_3$, $(x,v) \in D_0$, *выполняются неравенства (84), (85) с константой* $k_1 = c_4$, *где* $c_4 > 0$ *– постоянная из неравенства (77).*

Доказательство. Умножим (36) скалярно на $\hat{V}_\varkappa^\beta$. Тогда для всех $\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0) \neq 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)|^2 = -\frac{\beta e}{m_\beta}\langle\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)), \hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)\rangle, \quad 0 \leqslant \tau < T^\beta.$$

Отсюда и из неравенства Коши–Буняковского получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)|^2 \leqslant \frac{e}{m_\beta}|\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0))||\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)|, \quad 0 \leqslant \tau < T^\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}|\hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)| \leqslant \frac{e}{m_\beta}|\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0))|, \quad 0 \leqslant \tau < T^\beta. \tag{86}$$

Проинтегрировав (86) по τ от 0 до t, в силу теоремы 4 и условия 2 имеем

$$|\hat{V}_\varkappa^\beta(t,x,v,0)| \leqslant |v| + \frac{e}{m_\beta}\int\limits_0^t |\nabla_x\varphi_\varkappa(\hat{X}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0))|\,d\tau \leqslant \rho + \frac{eT^\beta}{m_\beta}k_1\|\mathring{f}^\beta\|.$$

Неравенство (84) доказано. Проинтегрировав (84) от 0 до T^β по $t,$ получим (85). Лемма доказана.

Замечание 4. Положив в (85) $x_1^\beta \in (G\times\{-d\})\bigcup(G\times\{d\}),$ будем иметь

$$\frac{d}{2} < |x_1^\beta - x| \leqslant \left(\rho + \frac{eT}{m_{-1}}k_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|\right)T.$$

Условие 4. Имеет место неравенство

$$\frac{d}{2} > \left(\rho + \frac{eT}{m_{-1}}k_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|\right)T.$$

Если выполняется условие 4, то траектория частицы сглаженной системы Власова–Пуассона, находящейся в момент времени $\tau = 0$ в точке $(x,v),$ не может достичь оснований цилиндра в момент времени $\tau = t \leqslant T.$ Другими словами,

$$\hat{S}_\varkappa^\beta(t,x,v,0)\bigcap((G\times\{-d\}\times\mathbb{R}^3)\bigcup(G\times\{d\}\times\mathbb{R}^3)) = \varnothing.$$

Таким образом, если выполняется условие 4, то порождающие характеристики сглаженной системы уравнений Власова–Пуассона не пересекаются с основаниями цилиндра $Q = G\times \times(-d,d).$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется следующее

Условие 5. Пусть $B\in\hat{C}^1(\bar{Q})$ и пусть $B(x) = (0,0,b)$ для $x\in\bar{Q}_{\delta/2},$ где

$$\frac{4c}{e\delta}(\rho m_{+1} + eTk_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|) < b, \tag{87}$$

$k_1 > 0$ – константа из неравенства (84).

Введём матрицу

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Умножение на матрицу $R(\theta)$ соответствует вращению на угол θ на плоскости. Следующее утверждение позволяет применить свойства этого оператора к исследованию траекторий заряженных частиц при наличии ненулевого магнитного поля в (36). В работе [29] доказаны следующие свойства матрицы $R(\theta).$

Лемма 11.

a) $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1+\theta_2),\ \ \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R};$

b) $R(\theta)^m = R(m\theta),\ \ \theta\in\mathbb{R},\ \ m\in\mathbb{Z};$

c) $\dfrac{d}{d\theta}R(\theta) = R(\pi/2)R(\theta) = R(\theta+\pi/2),\ \ \theta\in\mathbb{R};$

d) $|R(\theta)x| = |x|,\ \ \theta\in\mathbb{R},\ \ x\in\mathbb{R}^2;$

e) $\exp(tR(\theta)) = \exp(t\cos\theta)R(t\sin\theta).$

Обозначим $x' = (x_1,x_2)$ и $X_\varkappa^{\beta\prime}(x,v,\tau) = (X_{\varkappa,1}^\beta(x,v,\tau), X_{\varkappa,2}^\beta(x,v,\tau)).$

Следующий результат является обобщением леммы 3.3 из [29] (см. также [30]).

Лемма 12. *Пусть выполняются условие 2 и условия 4, 5 с константой* $k_1 = c_3/\varkappa^3,$ *где* $c_3 > 0$ *– постоянная из неравенства (76).*

Тогда порождающие характеристики $\hat{S}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0),\ \ (x,v,0)\in\Lambda_3,\ \ 0\leqslant\tau<T,$ *сглаженной системы (35), (36) для каждого* $0<\varkappa<1$ *обладают следующими свойствами: если* $x'\in \in G_{\delta'},\ \ \delta'\geqslant\delta,\ \ v\in B_\rho,$ *то* $T^\beta = T$ *и* $|\hat{X}_\varkappa^{\beta\prime}(\tau,x,v,0) - x'| < \delta/2,\ \ \hat{V}_\varkappa^\beta(\tau,x,v,0)\in B_{\rho_1}$ *для всех* $0\leqslant\tau<T,$ *где*

$$\rho_1 = \rho + \frac{eT}{m_{-1}}k_1\max_\beta\|\mathring{f}^\beta\|.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, *где* $c_4 > 0$ – *постоянная из неравенства (77), не зависящая от* $\varkappa$, *то порождающие характеристики* $\hat{S}^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0)$, $(x, v, 0) \in \Lambda_3$, $0 \leqslant \tau < T$, *системы (35), (36) удовлетворяют тем же свойствам равномерно по всем* $0 < \varkappa < 1$.

Доказательство. 1. Докажем, что

$$T^{\beta} = T, \tag{88}$$

$$|\hat{X}^{\beta'}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2 \quad \text{для всех } \tau \in [0, T). \tag{89}$$

При этом если выполняются условия 2, 4, 5 с константой $k_1 = c_3/\varkappa^3$, то соотношения (88), (89) справедливы для каждого $0 < \varkappa < 1$, удовлетворяющего условиям 4 и 5.

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$ $(c_4 > 0$ не зависит от $\varkappa)$, то соотношения (88), (89) справедливы для всех $0 < \varkappa < 1$.

Предположим противное: либо $T^{\beta} = t^{\beta}_1 < T$, либо $|\hat{X}^{\beta'}_{\varkappa}(\tau_0, x, v, 0) - x'| \geqslant \delta/2$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T)$.

Заметим, что неравенство $t^{\beta}_1 := T^{\beta} < T$ влечёт за собой выполнение соотношения

$$\lim_{\tau \to T^{\beta} - 0} \operatorname{dist}(X^{\beta'}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0), \partial G) = 0.$$

Следовательно, $|X^{\beta'}_{\varkappa}(\tau_0, x, v, 0) - x'| \geqslant \delta/2$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T^{\beta})$.

Поскольку $\hat{X}^{\beta'}_{\varkappa}(0, x, v, 0) = x'$, то для некоторого τ_1, $0 < \tau_1 \leqslant \tau_0 < T^{\beta}$, имеем

$$|\hat{X}^{\beta'}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) - x'| = \delta/2, \tag{90}$$

$$|\hat{X}^{\beta'}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) - x'| < \delta/2, \quad \tau \in [0, \tau_1). \tag{91}$$

Из (90), (91) и условия 4 следует, что порождающие характеристики $\hat{S}^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0)$ не пересекаются с границей $\partial Q \times \mathbb{R}^3$ при $\tau \in [0, \tau_1]$, т.е. $\hat{S}^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0) = S^{\beta}_{\varkappa}(\tau, x, v, 0)$, $\tau \in [0, \tau_1]$. Поэтому в силу условия 5 мы можем записать уравнение характеристик (36) в виде

$$\frac{dV^{\beta}_{\varkappa}(\tau)}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \nabla_x \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau) + \frac{\beta e}{m_{\beta} c} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa}(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_1).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(\tau) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(\tau) \end{pmatrix} + \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(\tau) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(\tau) \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_1).$$

Умножив последнее уравнение на $\exp\left(\tau \dfrac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, получим равенство

$$\frac{d}{d\tau} \left[\exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(\tau) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(\tau) \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau), \quad \tau \in (0, \tau_1). \tag{92}$$

Проинтегрировав (92) от 0 до t, $t \in (0, \tau_1)$, будем иметь

$$\exp\left(t \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} V^{\beta}_{\varkappa,1}(t) \\ V^{\beta}_{\varkappa,2}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_{\beta}} \int\limits_0^t \exp\left(\tau \frac{\beta e b}{m_{\beta} c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \nabla_{(x_1, x_2)} \varphi_{\varkappa}(X^{\beta}_{\varkappa}, \tau)\, d\tau.$$

Из леммы 11 (см. п. e)) следует, что

$$\exp\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\exp\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}\cos\frac{\pi}{2}\right)R\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}\sin\frac{\pi}{2}\right)=R\left(\tau\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right).$$

Умножив предыдущее уравнение на $R(-t\beta eb/(m_\beta c))$, получим

$$\begin{pmatrix}V^\beta_{\varkappa,1}(t)\\ V^\beta_{\varkappa,2}(t)\end{pmatrix}=R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}-\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^t R\left((\tau-t)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X^\beta_\varkappa,\tau)\,d\tau.$$

Поэтому из (35) имеем

$$\begin{pmatrix}X^\beta_{\varkappa,1}(\tau_1)\\ X^\beta_{\varkappa,2}(\tau_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+I_1+I_2, \tag{93}$$

где

$$I_1=\int\limits_0^{\tau_1}R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}dt,\quad I_2=-\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{t}R\left((\tau-t)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X^\beta_\varkappa,\tau)\,d\tau dt.$$

Вычислим I_1 и I_2. В силу леммы 11 (см. п. c)) мы имеем

$$R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)=-\frac{m_\beta c}{\beta eb}\frac{d}{dt}\left(R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Отсюда

$$I_1=\frac{m_\beta c}{\beta eb}\left[-R\left(-t\frac{\beta eb}{m_\beta c}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\tau_1}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\frac{m_\beta c}{\beta eb}\left\{-R\left(-\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}-\frac{\pi}{2}\right)+R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{\beta eb}\left\{-R\left(-\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)+R(0)\right\}R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{\beta eb}\begin{pmatrix}1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) & -\sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\\ \sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) & 1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{\beta eb}\begin{pmatrix}\sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right) & 1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\\ -\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\right) & \sin\left(\tau_1\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{\beta eb}\begin{pmatrix}\beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_1+\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_2\\ -\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_1+\beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_2\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$|I_1|=\frac{m_\beta c}{eb}\left(\left(\beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_1+\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_2\right)^2+\right.$$

$$+\left(-\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)v_1+\beta\sin\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)v_2\right)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{eb}\left((v_1^2+v_2^2)\left(\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{m_\beta c}{eb}|v|\sqrt{2}\left(1-\cos\left(\tau_1\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^{1/2}\leqslant\frac{2c}{eb}m_{+1}|v|. \tag{94}$$

С другой стороны, используя лемму 11 (см. п. c)), видим, что

$$I_2=-\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1}\left\{\int\limits_\tau^{\tau_1}R\left((\tau-t)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)dt\right\}\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\left\{R\left((\tau-\tau_1)\frac{\beta eb}{m_\beta c}\right)-R(0)\right\}R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1 & -\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\\ \beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right) & \cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right) & \cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1\\ 1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right) & \beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}+\left(\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)-1\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\\ \left(1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}+\beta\sin\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\dfrac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau.$$

Тогда аналогично (94) имеем

$$|I_2|=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\left(\left(\left(1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)^{1/2}d\tau=$$

$$=\frac{c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}\left(\left(1-\cos\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left((\tau-\tau_1)\frac{eb}{m_\beta c}\right)\right)^{1/2}|\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2c}{b}\int\limits_0^{\tau_1}|\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi_\varkappa(X_\varkappa^\beta,\tau)|\,d\tau\leqslant\frac{2c}{b}T|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T}. \tag{95}$$

Из (90), (93)–(95) и теоремы 4 следует, что

$$\frac{\delta}{2}=|X_\varkappa^{\beta'}(\tau_1,x,v,0)-x'|\leqslant|I_1|+|I_2|\leqslant\frac{2c}{eb}(\rho m_{+1}+eT|||\nabla\varphi_\varkappa|||_{0,T})\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c}{eb}(\rho m_{+1} + ek_1 T \max_\beta \|\mathring{f}^\beta\|). \tag{96}$$

С другой стороны, (84) влечёт за собой неравенство

$$\frac{2c}{eb}(\rho m_{+1} + ek_1 T \max_\beta \|\mathring{f}^\beta\|) < \frac{\delta}{2}.$$

Это противоречит (96). Таким образом, доказано, что $T^\beta(x,v) = T$ и $|X'^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0) - x'| < \delta/2$ для всех $\tau \in [0,T)$.

2. В силу леммы 10 $|V^\beta_\varphi(x,v,t)| < \rho_1$ для всех $x' \in G_{\delta'}$, $v \in B_\rho$ и $t \in [0,T)$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 12 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 13. *Пусть выполняются условие 2 и условия 4, 5 с константой* $k_1 = c_3/\varkappa^3$, *где* $c_3 > 0$ *– постоянная из неравенства (76).*

Тогда порождающие характеристики $\hat{S}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,t)$, $(x,v,t) \in \Lambda_1$, $0 \leqslant \tau < t < T$, *сглаженной системы (35), (36) для каждого* $0 < \varkappa < 1$ *обладают следующими свойствами: если* $x' \in G_{\delta'}$, $\delta' \geqslant \delta$, $v \in B_{\rho_1}$, *то на полуинтервале* $[0,t)$ *не существует моментов отражения* t^β_{-1} *и* $|\hat{X}^{\beta\prime}_\varkappa(\tau,x,v,t) - x'| < \delta/2$, $\hat{V}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,t) \in B_{\rho_2}$ *для всех* $0 \leqslant \tau < T$, *где*

$$\rho_2 = \rho_1 + \frac{ek_1 T}{m_{-1}} \max_\beta \|\mathring{f}^\beta\|.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, *где* $c_4 > > 0$ *– постоянная из неравенства (77), не зависящая от* $\varkappa$, *то порождающие характеристики* $\hat{S}^\beta_\varkappa(\tau,x,v,t)$, $(x,v,t) \in \Lambda_1$, $0 \leqslant \tau < t < T$, *системы (35), (36) удовлетворяют тем же свойствам равномерно по всем* $0 < \varkappa < 1$.

Обозначим $D^1_0 = D^1_0(\varkappa) := (Q_{3\delta/2} \bigcup B_{\lambda_1}) \times B_{\rho_1}$, где $\lambda_1 = \lambda + T\rho_1$.

Лемма 14. *Пусть выполняются условия 2 и 4, 5 с константой* $k_1 = c_3/\varkappa^3$, *где* $c_3 > 0$ *– постоянная из неравенства (76).*

Тогда для каждого $0 < \varkappa < 1$ *имеем*

$$\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) \subset D^1_0(\varkappa), \quad 0 < t < T.$$

Если же выполняются условия 2, 3 и условия 4, 5 с константой $k_1 = c_4$, *где* $c_4 > 0$ *– постоянная из неравенства (77), не зависящая от* $\varkappa$, *то для всех* $0 < \varkappa < 1$

$$\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta(\hat{S}^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) \subset D^1_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где D^1_0 *не зависит от* $\varkappa$.

Доказательство. В силу леммы 12 и замечания 4 достаточно показать, что $S^\beta_\varkappa(t,x,v,0) = \hat{S}^\beta_\varkappa(t,x,v,0) \in D^1_0$ для всех $(x,v) \in \operatorname{supp} \mathring{f}^\beta$, $(x,v,0) \in \Lambda_3$. Согласно условию 2 $\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta \subset D_0$. Тогда из леммы 12 следует, что $S^\beta_\varkappa(t,x,v,0) \in Q_{3\delta/2} \times B_{\rho_1}$. По условию $x \in B_\lambda$, поэтому, так как $|V^\beta_\varkappa(t,x,v,0)| < \rho_1$, $0 < t < T$, из равенства $\lambda_1 = \lambda + T\rho_1$ получим соотношения

$$|X^\beta_\varkappa(t,x,v,0)| \leqslant |x| + \int\limits_0^t |V^\beta_\varkappa(\tau,x,v,0)|\, d\tau < \lambda_1.$$

Лемма доказана.

Определим функцию $f^\beta_\varkappa(x,v,t)$ по формуле

$$f^\beta_\varkappa(x,v,t) = \begin{cases} \mathring{f}^\beta(S^\beta_\varkappa(0,x,v,t)), & (x,v) \in D^1_0, \quad 0 \leqslant t < T, \\ 0, & (x,v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \setminus D^1_0, \quad 0 \leqslant t < T. \end{cases} \tag{97}$$

В силу леммы 13 $\operatorname{supp} \mathring{f}^\beta(S^\beta_\varkappa(0,x,v,t)) \subset D^1_0$. Следовательно, используя метод характеристик, непрерывную дифференцируемость отображения $S^\beta_\varkappa(0,x,v,t)$ по x, v, t и условие 2, мы видим, что существует единственное классическое решение задачи (26), (30)–(32) с условиями (33), (34) в $C^1(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3\times[0,T))$ с носителем по x, v в D^1_0. Это решение определяется формулой (97).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 2–5. Тогда существует слабое решение* $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, *системы (52)–(55), при этом* $\operatorname{supp}_{x,v} f^\beta(x,v,t) \subset \bar{D}^1_0$ *для всех* $t\in[0,T)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 существует слабое решение $\{f^\beta\}$, $\beta = \pm 1$, задачи (52)–(55). По лемме 6 найдётся подпоследовательность $f^\beta_{\varkappa_n} \rightharpoonup f^\beta$ в $(L_p(Q\times\mathbb{R}^3), \sigma(p,p'))$, где $p, p' \in [1,\infty]$, $1/p + 1/p' = 1$, равномерно по $t\in I$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что для любой функции $\psi \in \mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\varphi(x,v)\,dx\,dv \to \int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta(x,v,t)\varphi(x,v)\,dx\,dv$$

при $\varkappa_n \to 0$ равномерно по $t\in I$.

Пусть теперь $\varphi\in\mathring{C}^1(Q\times\mathbb{R}^3)$ – произвольная функция такая, что $\varphi(x,v)=0$ при $(x,v)\in D^1_0$. По доказанному $\operatorname{supp}_{x,v} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\subset\bar{D}^1_0$, $t\in I$. Следовательно,

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}^3} f^\beta_{\varkappa_n}(x,v,t)\varphi(x,v)\,dx\,dv = 0$$

для всех указанных φ. Таким образом,

$$\operatorname{supp}_{x,v} f^\beta(x,v,t)\subset\bar{D}^1_0, \quad t\in I.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00392).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Журн. эксп. и теор. физики. 1938. Т. 8. № 3. С. 291–318.
2. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М., 1950.
3. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // Журн. эксп. и теор. физики. 1946. Т. 16. С. 574–586.
4. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева. Вып. 11. М., 1982.
5. Курс теоретической физики / Под ред. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица. Т. 10. Физическая кинетика. М., 1979.
6. *Миямото К.* Основы физики плазмы и управляемого синтеза. М., 2007.
7. *Alexandre R.* Weak solutions of the Vlasov–Poisson initial boundary value problem // Math. Meth. Appl. Sci. 1993. V. 16. № 8. P. 587–607.
8. *Арсеньев А.А.* Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 136–147.
9. *Арсеньев А.А.* О существовании обобщённых и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1253–1266.
10. *Bardos C., Degond P.* Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéare. 1985. V. 2. № 2. P. 101–118.
11. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics // J. Differ. Equat. 1977. V. 25. № 3. P. 342–364.
12. *Ben Abdallah N.* Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov–Poisson system // Math. Meth. Appl. Sci. 1994. V. 17. № 6. P. 451–476.

13. *Di Perna R.J., Lions P.L.* Solutions globales d'équations du type Vlasov–Poisson // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1988. V. 307. № 12. P. 655–658.
14. *Добрушин Р.Л.* Уравнения Власова // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
15. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov equations in a half space // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. № 1. P. 255–320.
16. *Horst E., Hunze R.* Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1984. V. 6. № 1. P. 262–279.
17. *Hwang H.J., Velázquez J.J.L.* On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half space // J. Differ. Equat. 2009. V. 247. № 6. P. 1915–1948.
18. *Козлов В.В.* Обобщённое кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63. № 4. С. 93–130.
19. *Lions P.L., Perthame B.* Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov–Poisson system // Invent. Math. 1991. V. 105. № 1. P. 415–430.
20. *Маслов В.П.* Уравнения самосогласованного поля // Соврем. проблемы математики. М., 1978. Т. 11. С. 153–234.
21. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // Acta Math. 2011. V. 207. № 1. P. 29–201.
22. *Pfaffelmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data // J. of Differ. Equat. 1992. V. 95. № 2. P. 281–303.
23. *Schäffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions // Comm. Part. Differ. Equat. 1991. V. 16. № 8–9. P. 1313–1335.
24. *Weckler J.* Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems. Dissertation, Universität München, 1994.
25. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability // Ach. Rational Mech. Anal. 1995. V. 130. № 2. P. 145–161.
26. *Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Докл. АН СССР. 2012. Т. 443. № 4. С. 431–434.
27. *Скубачевский А.Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 204–232.
28. *Skubachevskii A.L.* Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 847–868.
29. *Скубачевский А.Л., Tsuzuki Y.* Классические решения уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 3. С. 536–552.
30. *Беляева Ю.О., Скубачевский А.Л.* Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 12–34.
31. *Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinetic and Related Models. 2021. V. 14. № 2. P. 257–282.
32. *Скубачевский А.Л.* Априорная оценка решений смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона с однородным внешним магнитным полем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1683–1687.
33. *Grüter M., Widmann K.-O.* The Green function for uniformly elliptic equations // Manuscripta Mathematica. 1982. V. 37. P. 303–342.
34. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.

Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 20.08.2023 г.
После доработки 29.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1500–1514

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ НА ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

© 2023 г. А. А. Давыдов, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Для специальной системы интегральных уравнений свёрточного типа с монотонной и выпуклой нелинейностью, естественно возникающей при поиске стационарных или предельных состояний в различных динамических моделях прикладного характера, например в моделях распространения эпидемий, доказаны теоремы существования либо отсутствия нетривиального ограниченного решения с пределами на $\pm\infty$ в зависимости от этих значений и структуры матричного ядра исследуемой системы. Также изучен вопрос единственности такого решения при его наличии. Приведены конкретные примеры систем, параметры которых удовлетворяют ограничениям сформулированных теорем.

DOI: 10.31857/S0374064123110055, EDN: PDZECG

Введение. В настоящей работе изучается существование нетривиального решения системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)G_j(f_j(t))\,dt, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

относительно искомой ограниченной на числовой прямой вектор-функции $f=(f_1,\ldots,f_n)^{\text{т}}$, имеющего конечные пределы на $\pm\infty$, где $^{\text{т}}$ – знак транспонирования. При этом предполагается, что матричное ядро $K:=K(x)=(K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ (здесь и далее, если не оговорено противное, индексы i и j изменяются от 1 до n) обладает следующими свойствами:

a) симметрично $K=K^{\text{т}}$ и чётно $K(-x)=K(x)$;

b) элементы ядра положительны, непрерывны, ограничены и интегрируемы на всей прямой, при этом спектральный радиус матрицы $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x)\,dx$, равен единице;

c) элементы ядра монотонно убывают при удалении от нуля, а $\int_{-\infty}^{\infty}|x|K_{ij}(x)\,dx<+\infty$.

В силу свойств a), b) и теоремы Перрона (см. [1, с. 260]) у матрицы A существует положительный собственный вектор с собственным числом единица – спектральным радиусом этой матрицы. Зафиксируем такой вектор и обозначим его через η.

Понятно, что разрешимость системы (1) может зависеть и от функций G_j и λ_j на прямой. Относительно первых будем предполагать, что каждая из них:

A) непрерывная и монотонно возрастающая на всей прямой;

B) строго выпуклая вверх на положительной полуоси, $G_i(\eta_i)=\eta_i$;

C) нечётная.

И пусть каждая из функций λ_i:

I) непрерывна, положительна, не превосходит единицы и отделена от нуля;

II) имеет единичные пределы на $\pm\infty$ и интегрируема на прямой разностью $1-\lambda_i$.

Положим $\epsilon_i=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\lambda_i(x)$. В силу I) имеем $\epsilon_i>0$.

При различных значениях параметров K, G_j и λ_j система (1) естественно возникает в различных разделах математической физики, в эконометрике, в математической биологии. Например, скалярные и векторные интегральные уравнения такого типа встречаются в кинетической теории газов (при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения

Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара–Гросса–Крука), в теории нелинейного переноса излучения (в неоднородных средах и в спектральных линиях), в динамической теории p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн (для скалярного поля тахионов), в математической теории распределения дохода (в рамках модифицированной нелинейной модели Саргана) и в математической теории распространения эпидемических заболеваний (в рамках модели Дикмана–Капера) (см. [2–12]). При единичных λ_i существование и единственность ограниченного монотонно возрастающего нечётного непрерывного решения системы (1) с граничными условиями $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_i(x)=\pm\eta_i$ обсуждались в работах [13] и [14], а при $\lambda_i(x)\geqslant 1$ аналогичные вопросы изучались в [15]. Отметим также, что скалярные аналоги системы (1) достаточно подробно исследованы в статьях [16–20] при различных ограничениях на параметры системы.

Как отмечено выше, мы ищем решение системы (1) с конечными пределами на бесконечности. Обозначим

$$\gamma_i := \lim_{x\to-\infty} f_i(x), \quad \beta_i := \lim_{x\to+\infty} f_i(x).$$

Сначала вопрос существования или отсутствия нетривиального решения этой системы будет исследован при единичных значениях λ_j в следующих случаях:

p_1) $\gamma_i\geqslant 0,\ \ \beta_i\geqslant 0$;

p_2) $\gamma_i\leqslant 0,\ \ \beta_i\leqslant 0$;

p_3) $\gamma_i< 0,\ \ \beta_i> 0$;

p_4) $\gamma_i> 0,\ \ \beta_i< 0$.

Покажем, что у системы (1) нет нетривиальных ограниченных решений в первых двух случаях (и при единичных λ_i), есть монотонное решение в последних двух (где применим результаты из [13] и [14])). Затем, при $\lambda_i(x)\not\equiv 1$, докажем существование и единственность непрерывного положительного решения системы (1) с предельными условиями

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x)=\eta_i$$

и интегрируемыми разностями η_i-f_i.

Далее будут приведены параметры системы (1), имеющие прикладной характер и удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

1. Обозначения и вспомогательные факты.

1.1. Существование решения при $\boldsymbol{\lambda_j\equiv 1}$. Наряду с системой (1), при единичных λ_j рассмотрим следующую систему интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на полупрямой $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$:

$$Q_i(\varphi_i(x))=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty (K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))\varphi_j(t)\,dt, \tag{2}$$

относительно неотрицательной ограниченной вектор-функции $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^{\mathrm{т}}$, где Q_i – обратная функция к G_i на $\mathbb{R}^+$. Согласно [13] система (2) имеет нетривиальное непрерывное неубывающее решение с нулевым значением в нуле, положительным вне нуля и предельным значением η на бесконечности и, кроме того, с интегрируемой разностью $\eta-\varphi$.

Прямые вычисления показывают, что функции

$$f_i(x)=\begin{cases} Q_i(\varphi_i(x)), & \text{если } x\geqslant 0,\\ -Q_i(\varphi_i(-x)), & \text{если } x<0,\end{cases}$$

являются решением исходной системы (1) при единичных λ_i. Это решение непрерывное, нечётное, неубывающее с предельными значениями $\pm\eta$ и интегрируемыми разностями $\pm\eta-f$ на $\pm\infty$ соответственно.

В силу нечётности функций G_j решением системы (1) является и вектор-функция $-f$, а также сдвиги $f^c(x)=f(x+c)$, $c\in\mathbb{R}$, найденного решения, в чем легко убедиться прямой проверкой (напомним, что рассматривается случай единичных параметров λ_j).

1.2. Априорная оценка ограниченного решения системы (1). Пусть f^* – ограниченное решение системы (1) на всей прямой. Положим

$$\alpha_i := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_i^*(x)|.$$

Имеет место

Лемма 1. *При условиях a), b), A)–C) и I) имеет место следующая оценка сверху:*

$$\alpha_i \leqslant \eta_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

Доказательство. В силу $K_{ij}>0$, нечётности и монотонности функций G_j из (1) имеем

$$|f_i^*(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)|G_j(f_j^*(t))|\,dt = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)G_j(|f_j^*(t)|)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} G_j(\alpha_j)\int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(y)\,dy = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j}\right)\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j,$$

откуда в силу определения супремума и равенства $A\eta=\eta$ получим

$$\alpha_i \leqslant M\eta_i \quad \text{с} \quad M=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j}\right). \tag{3}$$

Взяв в (3) вместо индекса i индекс j_0, при котором достигается максимум M, имеем

$$\alpha_{j_0} \leqslant G_{j_0}(\alpha_{j_0}).$$

Так как $\alpha_{j_0}\geqslant 0$, то в силу непрерывности и строгой выпуклости функции G_{j_0} вверх на $\mathbb{R}^+$ из соотношения $G_{j_0}(\eta_{j_0})=\eta_{j_0}$ получаем, что последнее неравенство возможно только при $\alpha_{j_0}\leqslant\eta_{j_0}$. Отсюда, с учётом монотонности функции G_{j_0} и (3), находим

$$\alpha_i \leqslant \eta_i\frac{G_{j_0}(\eta_{j_0})}{\eta_{j_0}} = \eta_i.$$

Лемма доказана.

1.3. Разрешимость вспомогательной системы уравнений. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j G_j(\xi_j) \tag{4}$$

относительно неизвестного вектора ξ с неотрицательными компонентами, где

$$\varepsilon_j := \inf_{x\in\mathbb{R}} \lambda_j(x) \in (0,1), \tag{5}$$

а матрица $A=(a_{ij})$ описана выше. Имеет место

Лемма 2. *Пусть матрица A симметрична, имеет положительные компоненты и единичный спектральный радиус. Тогда система уравнений (4) имеет не более одного неотрицательного ненулевого решения, если выполнены условия A), B) и (5).*

Доказательство. Допустим противное, т.е. что система (4) имеет два различных таких решения ξ и $\tilde{\xi}$, и пусть $\xi_{i^*} \neq \tilde{\xi}_{i^*}$. Отметим, что все компоненты этих решений положительны, поскольку все слагаемые в правой части системы неотрицательны в силу наложенных условий, при этом слагаемое для положительной компоненты решения положительно. В силу положительности чисел ε_j и a_{ij} из (4) имеем

$$|\xi_i - \tilde{\xi}_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)|. \tag{6}$$

Используя симметричность матрицы A, из (6) найдём

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i)|\xi_i - \tilde{\xi}_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \tilde{\xi}_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)|$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \big(G_i(\tilde{\xi}_i)|\xi_i - \tilde{\xi}_i| - \tilde{\xi}_i |G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|\big) \leqslant 0.$$

Обозначим $\Pi := \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \xi_i \neq \tilde{\xi}_i\}$. Очевидно, что $\Pi \neq \varnothing$, так как $i^* \in \Pi$. Для индексов, не лежащих в Π, слагаемые в последней сумме равны нулю, а для оставшихся слагаемых эту сумму можно записать в виде

$$\sum_{i \in \Pi} \varepsilon_i \tilde{\xi}_i |\xi_i - \tilde{\xi}_i| \left(\frac{G_i(\tilde{\xi}_i)}{\tilde{\xi}_i} - \frac{|G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|}{|\xi_i - \tilde{\xi}_i|} \right) \leqslant 0.$$

Но последнее неравенство невозможно, поскольку в силу строгой выпуклости функций G_i на положительной полуоси и равенстве нулю в нуле для всех $i \in \Pi$ имеем строгое неравенство (рис. 1 и 2)

$$\frac{G_i(\tilde{\xi}_i)}{\tilde{\xi}_i} > \frac{|G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|}{|\xi_i - \tilde{\xi}_i|}.$$

Следовательно, $\Pi = \varnothing$ и $\xi = \tilde{\xi}$. Лемма доказана.

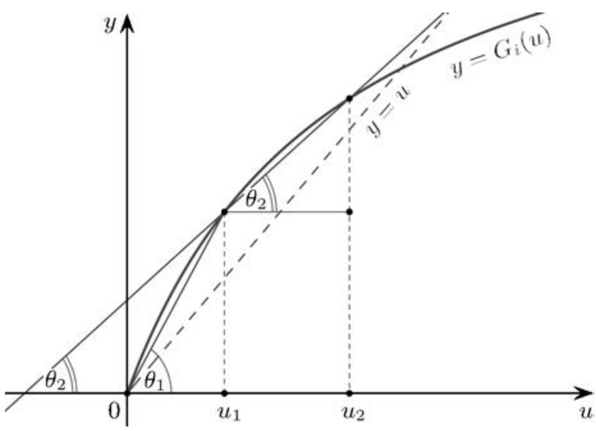

Рис. 1. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(u_1, G_i(u_1))$.

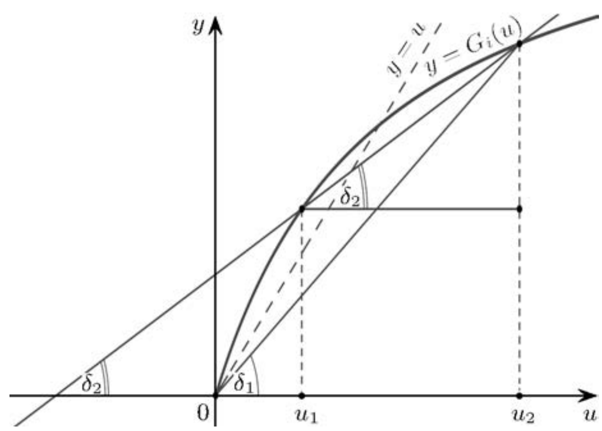

Рис. 2. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(u_2, G_i(u_2))$.

Теперь исследуем вопрос существования положительного решения системы (4). Справедлива

Лемма 3. *В условиях леммы 2 система уравнений (4) имеет положительное решение* ξ, *компоненты которого отделены от нуля и меньше соответствующих компонент* η, *если либо для некоторого* $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$

$$\frac{G_k(u)}{u} \to +\infty \quad \textit{при} \quad u \to +0, \tag{7}$$

либо для всех этих индексов последний предел конечен (и равен $G'_k(0)$*), а*

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{kj} \eta_j G'_j(0) > \eta_k, \tag{8}$$

Замечание 1. В частности, компоненты искомого решения удовлетворяют двойному неравенству

$$c^* \eta_i \leqslant \xi_i < \eta_i \tag{9}$$

с некоторой положительной константой c^*.

Доказательство. В качестве нулевого приближения к такому решению возьмём $\xi^{(0)} = \eta$, а за последующие приближения возьмём итерации по системе (4):

$$\xi_i^{(p+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_j G_j(\xi_j^{(p)}), \quad p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}. \tag{10}$$

Эти последовательные приближения монотонно убывают, что легко проверить индукцией по p, поэтому для доказательства существования предела этих приближений (и тем самым нужного решения) достаточно показать, что они ограничены снизу положительной константой.

С этой целью рассмотрим следующие функции χ_i на промежутке $(0, 1]$:

$$\chi_i(v) := \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} \eta_j \frac{G_j(v\eta_j)}{v\eta_j} - 1, \quad v \in (0, 1].$$

Они непрерывны на $(0, 1]$ в силу непрерывности функций G_i; монотонно убывают на $(0, 1]$, поскольку из-за строгой выпуклости вверх функций G_i на положительной полуоси отношение $G_j(u)/u$ монотонно убывает на луче $(0, +\infty)$; имеют отрицательные значения в единице:

$$\chi_i(1) = \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} \eta_j - 1 < \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j - 1 = 0,$$

поскольку $G_j(\eta_j) = \eta_j$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$, а $A\eta = \eta$.

Далее, предел $\lim\limits_{v \to 0+} \chi_i(v)$ существует. Он равен $+\infty$ при выполнении условия (7) и положителен при выполнении условия (8). В обоих случаях в силу монотонного убывания функции χ_i на $(0, 1]$ и отрицательности её значений в единице существует единственное значение $c_i \in \in (0, 1)$ такое, что $\chi_i(c_i) = 0$. Положим

$$c^* := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i$$

и покажем, что итерации $\xi_i^{(p)}$ из (10) удовлетворяют двойному неравенству (9). Для этого воспользуемся индукцией по номеру итерации. При $p = 0$ это верно в силу выбора первого приближения $\xi^{(0)} = \eta$. Пусть эта оценка верна для некоторого номера итерации p.

Отсюда, учитывая монотонность функций G_i и χ_i, имеем соотношения

$$\xi_i^{(p+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j G_j(\xi_j^{(p)}) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j G_j(c^*\eta_j) = (\chi_i(c^*)+1)c^*\eta_i \geqslant (\chi_i(c_i)+1)c^*\eta_i = c^*\eta_i.$$

Следовательно, оценка (9) справедлива для итераций (10). Учитывая монотонное убывание этих итераций, получаем, что они имеют предел при $p\to\infty$ и предельный вектор является положительным решением системы (4). Лемма доказана.

1.4. Возможные значения $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ в случаях p_1)–p_4). Покажем, что в случаях p_1)–p_4) величины γ_i и β_i могут принимать только значения 0 и $\pm\eta_i$. Точнее, справедлива следующая

Лемма 4. *При выполнении условий a), b), A)–C) и II) величины γ_i и β_i могут принимать только значения:*

1) или нулевые, или η_i в любом сочетании в случае p_1);

2) или нулевые, или $-\eta_i$ в любом сочетании в случае p_2);

3) $\gamma_i=-\eta_i$, $\beta_i=\eta_i$ в случае p_3);

4) $\gamma_i=\eta_i$, $\beta_i=-\eta_i$ в случае p_4).

Всюду $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Доказательство. Если функция $F\in L_\infty(\mathbb{R})$ и существуют конечные пределы на $\pm\infty$, то для функции $T\in L_1(\mathbb{R})$ верно равенство

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x-t)F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} T(y)\,dy \lim_{x\to\pm\infty} F(x)$$

(см. [21]). Отсюда, а также в силу условий $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\lambda_j(x)=1$ и A), получаем, что величины $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}G_j(\tau_j), \tag{11}$$

которая имеет единственное решение $\tau_i=\eta_i$ в классе неотрицательных ненулевых решений (см. лемму 2.1 в [14]).

Следовательно, справедливо утверждение 1) леммы 4. В силу нечётности функций G_i система (11) имеет и решение противоположного знака $\tau^*=-\eta$, и, аналогично, оно единственно в классе неположительных ненулевых решений. Отсюда получаем справедливость оставшихся утверждений леммы 4. Лемма доказана.

2. О знакопостоянных ограниченных решениях (1). Изучим существование нетривиальных ограниченных решений системы (1) при единичных λ_i. Возможные значения $\{\gamma_i\}$ и $\{\beta_i\}$, при которых могут существовать такие решения, указаны в лемме 4.

2.1. Отсутствие нетривиальных знакопостоянных решений. Имеет место

Теорема 1. *При единичных λ_i, выполнении условий a)–c), A)–C) и $G'_j(+0)<+\infty$ система (1) в классе знакопостоянных ограниченных функций имеет только нулевое решение, если $\gamma_i=\beta_i=0$, $i=\overline{1,n}$.*

Доказательство. Докажем для случая неотрицательных решений (для неположительных рассуждения аналогичны). Рассмотрим произвольное ограниченное неотрицательное непрерывное решение f системы (1) с нулевыми пределами на бесконечности. В силу его непрерывности и этих пределов существует число $\delta>0$ такое, что при $|x|\geqslant\delta$ справедливы неравенства

$$0\leqslant f_i(x)\leqslant \eta_i/2.$$

Покажем, что компоненты решения f интегрируемы. Это достаточно сделать на любом полуинтервале, примыкающем к бесконечности, возьмём $[\delta,+\infty)$ и произвольное R, $R>\delta$. В силу условий A)–C) для функции G_i справедливы оценки

$$G_i(u)\geqslant \frac{G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2}u \quad \text{при} \quad u\in[0,\eta_i/2], \quad d_i:=\frac{G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2}>1. \tag{12}$$

Используя их, оценку из леммы 1, условия a)–c), A)–C) и теорему Фубини (см. [22, с. 317]), из (1) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R(\eta_i-f_i(x))\,dx=\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\sum_{j=1}^n\int\limits_{-\infty}^\infty K_{ij}(x-t)(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_{-\infty}^0K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_0^\delta K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_R^\infty K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_\delta^R K_{ij}(x-t)(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^R\int\limits_x^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_0^\delta K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^R\int\limits_R^\infty K_{ij}(t-x)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\eta_ia_{ij}\int\limits_\delta^R(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_{x-\delta}^x K_{ij}(y)\,dy\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^R\int\limits_{R-x}^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\int\limits_\delta^R(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_\delta^R\int\limits_{x-\delta}^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^R\int\limits_t^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dt+\sum_{j=1}^n\eta_j\int\limits_\delta^R(\eta_j-d_jf_j(t))\,dt\leqslant$$

$$\leqslant3\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy+\sum_{j=1}^n\eta_j\int\limits_\delta^R(\eta_j-d_jf_j(x))\,dx,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n\eta_i(d_i-1)\int\limits_\delta^R f_i(x)\,dx\leqslant3\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy.$$

(Аналогично можно доказать, что $f_i\in L_1(-\infty,0)$.)

Отсюда при $R \to +\infty$ получаем интегрируемость компонент решения на луче $(\delta, +\infty)$, что и требовалось, а также неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (d_i - 1) \int\limits_{\delta}^{\infty} f_i(x)\, dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int\limits_{0}^{\infty} y K_{ij}(y)\, dy.$$

Тогда в силу непрерывности и интегрируемости ядер K_{ij} и ограниченности и интегрируемости f_i из (1) в силу условия A), а также непрерывности свёртки суммируемых и ограниченных функций (см. [23]) заключаем, что компоненты f_i непрерывны.

Далее в силу $G_j'(+0) < +\infty$, $A\eta = \eta$, условия a) и теоремы Фубини имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t))\, dt\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \eta_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t))\, dt = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t))\, dt.$$

Приравнивая крайние выражения в этой цепочке равенств, находим

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int\limits_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(x)) - f_i(x))\, dx = 0.$$

Подынтегральные выражения в последнем равенстве неотрицательны (поскольку $G_i(u) \geqslant u$ при $u \in [0, \eta_i]$ и $0 \leqslant f_i \leqslant \eta_i$) и непрерывны. Следовательно, это равенство возможно лишь при выполнении тождества

$$G_i(f_i(x)) \equiv f_i(x)$$

на всей прямой. Отсюда, учитывая $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_i(x) = 0$ и выполнение равенства $G_i(u) = u$ лишь при $u = 0, \pm\eta_i$, находим $f_i \equiv 0$. Теорема доказана.

Справедлива также

Теорема 2. *При единичных λ_i и выполнении условий a)–c), A)–C) система (1) в классе знакопостоянных ограниченных функций имеет только постоянное решение $f = \pm\eta$, если соответственно $\gamma_i = \beta_i = \pm\eta_i$, $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Для определённости рассмотрим случай неотрицательных решений. Пусть f – любое решение системы (1) с предельным значением η на $\pm\infty$. Существует число $\Delta > 0$ такое, что при $|x| \geqslant \Delta$ справедливы неравенства $f_i(x) \geqslant \eta_i/2$. Отсюда и из леммы 1 при $|x| \geqslant \Delta$ имеем соотношения

$$\eta_i/2 \leqslant f_i(x) \leqslant \eta_i.$$

Далее в силу выпуклости вверх функций G_i на $\mathbb{R}^+$, их нечётности и условия A) при $|x| \geqslant \Delta$ справедливы следующие неравенства (рис. 3):

$$\eta_i - G_i(f_i(x)) \leqslant q_i(\eta_i - f_i(x)), \quad q_i := \frac{\eta_i - G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2} \in (0,1), \tag{13}$$

что легко проверить. Используя эти неравенства и рассуждая по аналогии с доказательством предыдущей теоремы, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (1 - q_i) \int\limits_{\Delta}^{\infty} (\eta_i - f_i(x))\, dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int\limits_{0}^{\infty} y K_{ij}(y)\, dy.$$

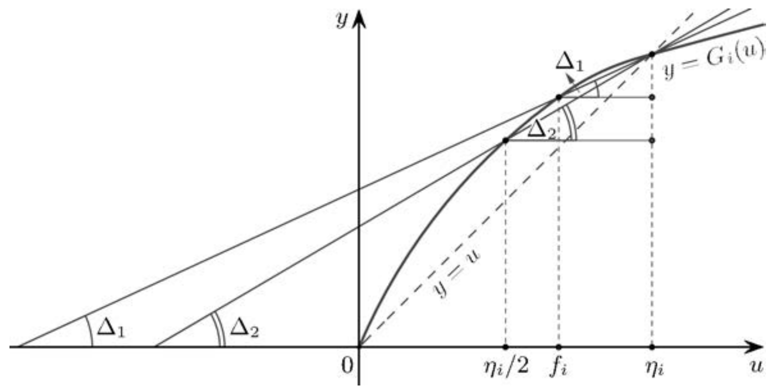

Рис. 3. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(\eta_i/2, G_i(\eta_i/2))$ и (η_i, η_i).

Аналогично верно

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (1 - q_i) \int_{-\infty}^{-\Delta} (\eta_i - f_i(x))\, dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\, dy.$$

Отсюда вытекает, что функции $\eta_i - f_i$ интегрируемы на прямой.

Далее в силу системы (1) и условия $A\eta = \eta$ имеем равенство

$$\eta_i - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j(t)))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Умножим обе его части на η_i, проинтегрируем результат по прямой и просуммируем по i. В результате, учитывая определение матрицы A, условие $A\eta = \eta$ и применяя теорему Фубини, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_i - f_i(x))\, dx = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_j - G_j(f_j(t)))\, dt$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(x)) - f_i(x))\, dx = 0.$$

Заключительные рассуждения те же, что и в доказательстве предыдущей теоремы, только теперь будем иметь $f_i(x) \equiv \eta_i$. Теорема доказана.

2.2. Об отсутствии знакопостоянных решений системы. Справедлива

Теорема 3. *При единичных λ_j и выполнении условий a)–c) и A)–C) система (1) не имеет знакопостоянных ограниченных решений, если $\gamma_i = 0$, $\beta_i = \eta_i$ (либо $\gamma_i = 0$, $\beta_i = -\eta_i$, либо $\gamma_i = \eta_i$, $\beta_i = 0$, либо $\gamma_i = -\eta_i$, $\beta_i = 0$), $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Доказательство проведём лишь для первого случая, поскольку для остальных рассуждения аналогичны. Допустим противное, что при $\gamma_i = 0$, $\beta_i = \eta_i$ в условиях последней теоремы существует знакопостоянное ограниченное решение f системы (1), тогда оно неотрицательно и по условию

$$\lim_{x\to-\infty} f_i(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f_i(x) = \eta_i.$$

Отсюда получаем, что существует положительное число r такое, что

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant \frac{\eta_i}{2} \quad \text{при} \quad x < -r, \quad \frac{\eta_i}{2} \leqslant f_i(x) \leqslant \eta_i \quad \text{при} \quad x > r. \tag{14}$$

Теперь проведём рассуждения аналогично как в доказательстве теоремы 2 и получим, что

$$\eta_i - f_i \in L_1(0,+\infty). \tag{15}$$

Докажем, что $f_i \in L_1(-\infty,0)$. Возьмём отрицательное число R. Учитывая $A\eta=\eta$, (12), (14), условия $a)$–$c)$ и $A)$–$C)$, из системы (1) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r} (\eta_i - f_i(x))\,dx \leqslant \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r}\int_{-\infty}^{R} K_{ij}(x-t)\,dt\,dx +$$

$$+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r}\int_R^{-r} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j(t)))\,dt\,dx +$$

$$+\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r}\int_{-r}^{0} K_{ij}(x-t)\,dt\,dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r}\int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{-r}\int_{-\infty}^{R} K_{ij}(t-x)\,dt\,dx + \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \eta_i a_{ij} \int_R^{-r} (\eta_j - G_j(f_j(t)))\,dt +$$

$$+\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{-r}\int_x^{x+r} K_{ij}(y)\,dy\,dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x} K_{ij}(y)\,dy\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{0}\int_{-\infty}^{R-x} K_{ij}(y)\,dy\,dx + \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \eta_i a_{ji} \int_R^{-r} (\eta_j - G_j(f_j(t)))\,dt +$$

$$+\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{-r_1}\int_{-\infty}^{x+r} K_{ij}(y)\,dy\,dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_R^{0}\int_{-\infty}^{z} K_{ij}(y)\,dydz + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_R^{-r} (\eta_j - d_j f_j(t))\,dt + 2\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \eta_j \int_R^{-r} (\eta_j - d_j f_j(t))\,dt + 3\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy,$$

откуда получим

$$\sum_{i=1}^n \eta_i (d_i - 1) \int_R^{-r} f_i(x)\,dx \leqslant 3\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy = 3\sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{\infty} K_{ij}(y) y\,dy. \tag{16}$$

Устремив в (16) число $R \to -\infty$, придём к включению $f_i \in L_1(-\infty,-r)$. Следовательно, в силу непрерывности f_i получаем нужное включение $f_i \in L_1(-\infty,0)$. Отсюда и из (15) следует, что

$$f_j(x)(\eta_j - f_j(x)) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Из последнего включения, учитывая, что $f_j(x) \leqslant \eta_j$ на прямой и, следовательно, $f_j(x) \leqslant G_j(f_j(x))$ на прямой, получаем, что

$$f_j(x)(\eta_j - G_j(f_j(x))) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Умножим теперь обе части (1) на $(\eta_i - G_i(f_i(x)))$, проинтегрируем по прямой и просуммируем по всем i. Применяя к результату теорему Фубини с учётом условий $A\eta = \eta$ и a)–c), A)–C), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta_i - G_i(f_i(x)))f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta_i - G_i(f_i(x)))\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)G_j(f_j(t))\,dt\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_j(f_j(t))\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)(\eta_i - G_i(f_i(x)))\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_j(f_j(t))\biggl(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\eta_i - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ji}(t-x)G_i(f_i(x))\,dx\biggr)dt = \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta_j - f_j(t))G_j(f_j(t))\,dt.$$

Оставив крайние выражения в последней цепочке равенств, найдём

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(\eta_i - G_i(f_i(x)))f_i(x) - (\eta_i - f_i(x))G_i(f_i(x))]\,dx = 0. \tag{17}$$

В силу непрерывности компоненты f_i и её пределов (0 и η_i на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно), существуют $x_i \in \mathbb{R}$ и $\delta_i > 0$ такие, что $0 < f_i(x_i) < \eta_i$ при $x \in I_i := (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$. Определим множества

$$\mathrm{W}_i := \{x \in \mathbb{R} : f_i(x) \neq 0, \quad f_i(x) \neq \eta_i\}.$$

Эти множества непусты, так как $I_i \subset \mathrm{W}_i$, и имеют положительную меру (возможно, бесконечную). В силу леммы 1 имеем $0 \leqslant f_i \leqslant \eta_i$, поэтому на этом множестве

$$0 < f_i(x) < \eta_i.$$

Нетрудно видеть, что (17) равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathrm{W}_i} f_i(x)(\eta_i - f_i(x))\biggl(\frac{\eta_i - G_i(f_i(x))}{\eta_i - f_i(x)} - \frac{G_i(f_i(x))}{f_i(x)}\biggr)dx = 0. \tag{18}$$

Из строгой выпуклости вверх функции G_i на $\mathbb{R}^+$ имеем

$$\frac{G_i(f_i(x))}{f_i(x)} > \frac{\eta_i - G_i(f_i(x))}{\eta_i - f_i(x)}, \quad x \in \mathrm{W}_i.$$

Отсюда получаем, что неотрицательное подынтегральное выражение в равенстве (18) положительно на I_i, поэтому левая часть этого равенства положительна. Получили противоречие. Следовательно, наше допущение неверно и теорема доказана.

Замечание 2. Как известно, в одномерном случае система (1) при положительном первом моменте ядра и достаточно сильных ограничениях на нелинейность и ядро может иметь монотонно возрастающее положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f с $f(-\infty) = 0$ и $f(+\infty) = \eta > 0$ (см., например, [11, 12]). Отсутствие такого решения для системы (1) обусловлено свойством чётности ядра K, при которой этот момент равен нулю.

Замечание 3. Вопрос существования или отсутствия знакопеременных и ограниченных на $\mathbb{R}$ решений для случаев: 1) $\gamma_i = 0,\ \ \beta_i = \eta_i$; 2) $\gamma_i = \eta_i,\ \ \beta_i = 0$; 3) $\gamma_i = 0,\ \ \beta_i = -\eta_i$; 4) $\gamma_i = -\eta_i,\ \ \beta_i = 0$ остаётся открытым.

Замечание 4. Как было отмечено выше, в случаях p_3) и p_4) система (1) при единичных λ_i имеет знакопеременное нечётное и ограниченное решение.

3. Разрешимость системы при $\boldsymbol{\lambda_j \not\equiv 1}$.

3.1. Построение знакопостоянного ограниченного решения.

Теорема 4. *При выполнении условий a)–c), A)–C), I), II) и* $\lambda_j(x) \not\equiv 1$ *система (1) имеет положительное непрерывное и ограниченное на* $\mathbb{R}$ *решение* f *с предельным значением* η *на* $\pm\infty$ *и интегрируемыми на прямой разностями* $\eta_i - f_i,\ \ i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Для поиска решения рассмотрим последовательность итераций по системе (1):
$$f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j^{(p)}(t))\, dt, \quad f_i^{(0)}(x) \equiv \eta_i, \tag{19}$$
где $p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Индукцией по p легко показать, что это убывающая последовательность, в частности, на прямой $f_i^{(p)}(x) \not\equiv \eta_i$ при $p \geqslant 1$. Покажем, что эта последовательность ограничена снизу, а именно всюду
$$f_i^{(p)}(x) \geqslant \xi_i \tag{20}$$
при всех p, где ξ – единственное неотрицательное ненулевое решение системы уравнений (4) (см. леммы 2 и 3). Для этого воспользуемся индукцией по номеру итерации.

При $p = 0$ неравенство (20) справедливо в силу (9). Предположим, что оно имеет место при некотором возможном p. Отсюда и из (19) в силу условий I), A), B), a), b) с учётом (4) имеем
$$f_i^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) G_j(\xi_j) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)\, dt \geqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} G_j(\xi_j) = \xi_i, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$
Следовательно, наша последовательность итераций ограничена снизу и, таким образом, имеет предел f_i при $p \to +\infty$. Этот предел положителен, поскольку ограничения ξ_i снизу положительны, и ввиду предельной теоремы Б. Леви [22, с. 303] удовлетворяет системе (1). И итерации, и этот предел являются непрерывными функциями на прямой, так как таковыми являются функции λ_i, K_{ij} и G_i, есть условие I) и непрерывность свёртки суммируемых и ограниченных на прямой функций.

Покажем интегрируемость разности $\eta_i - f_i$. Имеем оценку
$$0 \leqslant \eta_i - f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j - \lambda_j(x) G_j(f_j^{(p)}(t)))\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j(1-\lambda_j(x)) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j^{(p)}(t)))\, dt,$$
из которой и из условий a)–c), A)–C), I) и II) индукцией по p получаем
$$\eta_i - f_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}), \quad p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$
Из (4) в силу $\varepsilon_i \in (0,1)$ имеем
$$0 < \xi_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j(\xi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j(\eta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \eta_i,$$

поэтому по аналогии с доказательствами теорем 1 и 3 находим

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i(1-l_i)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta_i-f_i^{(p+1)}(x))\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda_j(x))\,dx+6\sum_{j=1}^{n}\eta_j\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{0}^{\infty}yK_{ij}(y)\,dy<+\infty,$$

где $l_i:=(\eta_i-G_i(\xi_i))/(\eta_i-\xi_i)\in(0,1)$.

Теперь, устремив $p\to\infty$ в последних неравенствах (в их левой части), получаем их с f_i на месте $f_i^{(p+1)}$. Следовательно, интегрируемость η_i-f_i на прямой имеет место.

Осталось показать, что η_i – предельное значение f_i на бесконечности. Для этого сначала систему (1) запишем в следующем виде:

$$\eta_i-f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_j(1-\lambda_j(x))+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt. \tag{21}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $x\to\pm\infty$, так как все λ_i имеют единичный предел на бесконечности в силу условия II). В интеграле оба сомножителя ограничены и интегрируемы на прямой: первый – по условию b), а второй – в силу неравенств

$$0\leqslant\eta_j-G_j(f_j(x))\leqslant\eta_j-f_j(x),$$

ограниченности и интегрируемости η_j-f_j. Следовательно, сам интеграл как свёртка этих функций стремится к нулю при $x\to\pm\infty$ (см. [24]). Отсюда, учитывая ограниченность λ_i, получаем, что правая часть в (21) стремится к нулю при $x\to\pm\infty$ и, следовательно, $f(x)\to\eta$ при $x\to\pm\infty$. Теорема доказана.

Замечание 5. Единственность решения системы (1) в классе неотрицательных ограниченных функций с отделёнными от нуля значениями вблизи бесконечности доказывается методами работы [14].

Замечание 6. В силу нечётности функций G_i система (1) имеет также отрицательное решение f^*, $f^*(x):=-f(x)$.

4. Примеры. Приведём примеры функций $\{G_j(u)\}_{i=1}^n$, $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ и $\{\lambda_j(x)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих соответствующим условиям доказанных теорем.

Примеры нелинейностей $\boldsymbol{G_j(u)}$:

g_1) $G_j(u)=\eta_j\sqrt[p_j]{u/\eta_j}$, $u\in\mathbb{R}$, где $p_j>1$ – нечётные числа, $\eta_j>0$, и удовлетворяют соотношениям $\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j=\eta_i$;

g_2) $G_j(u)=\begin{cases}\gamma_j(1-e^{-u}), & \text{если}\ \ u\geqslant 0,\\ \gamma_j(e^u-1), & \text{если}\ \ u<0,\end{cases}$ $u\in\mathbb{R}$, где $\gamma_j:=\eta_j/(1-e^{-\eta_j})>1$;

g_3) $G_j(u)=(u+\eta_j\sqrt[p_j]{u/\eta_j})/2$, $u\in\mathbb{R}$.

Подробно остановимся на примере g_2). Сначала заметим, что

$$G_j(0)=0,\quad G_j(\eta_j)=\eta_j. \tag{22}$$

Так как функция

$$G_j'(u)=\begin{cases}\gamma_je^{-u}, & \text{если}\ \ u\geqslant 0,\\ \gamma_je^{u}, & \text{если}\ \ u<0,\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой и $G_j'(u)>0$, $u\in\mathbb{R}$, то условие A) выполняется. Поскольку $G_j''(u)=-\gamma_je^{-u}<0$ при $u\in\mathbb{R}^+$, то в силу (22) заключаем, что условие B) также справедливо. Выполнение условия C) сразу следует из структуры примера g_2). Заметим также, что $G_j'(+0) = G_j'(-0) = \gamma_j > 1$.

Примеры ядра $K(x) = \{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$:

k_1) $K_{ij}(x) = a_{ij}e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$, где $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $r(A) = 1$;

k_2) $K_{ij}(x) = \int_a^b e^{-|x|s}\, d\sigma_{ij}(s)$, $x \in \mathbb{R}$, где $\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ji}(s)$ – монотонно возрастающие на $[a, b)$ функции, $0 < a < b \leqslant +\infty$, причём спектральный радиус матрицы

$$A = \left(2\int\limits_a^b \frac{1}{s}\, d\sigma_{ij}(s)\right)_{i,j=1}^n$$

равен единице.

Примеры функций $\lambda_j(x)$:

Λ_1) $\lambda_j(x) = 1 - (1 - \varepsilon_j)e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$;

Λ_2) $\lambda_j(x) = 1 - (1 - \varepsilon_j)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$.

Отметим, что примеры g_1)–g_3), k_1), k_2), Λ_1), Λ_2) удовлетворяют условиям теорем 3, 4, а примеры g_2), k_1), k_2), Λ_1), Λ_2) – теорем 1 и 2.

Следует также отметить, что примеры g_1), g_2), k_1), k_2) и Λ_2) встречаются в теории p-адических струн, в эпидемиологии и в кинетической теории газов (см. [2, 3, 6, 7, 11, 12]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1973.
2. *Cercignani C.* The Boltzmann equation and applications // Appl. Math. Sci. V. 67. New York, 1988.
3. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 189. № 2. С. 239–255.
4. *Соболев В.В.* Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 3. С. 558–561.
5. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
6. *Владимиров В.С., Волович Я.И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
7. *Arefeva I.Ya., Dragovic B.G., Volovich I. V.* Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields // Phys. Lett. B. 1988. V. 212. № 3. P. 283–291.
8. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p-адических открыто-замкнутых струн // Журн. теор. и мат. физики. 2019. Т. 200. № 1. С. 106–117.
9. *Sargan J.D.* The distribution of wealth // Econometrica. 1957. V. 25. № 4. P. 568–590.
10. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в задаче о распределении дохода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 10. С. 1793–1802.
11. *Diekmann O.* Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection // J. of Math. Biology. 1978. V. 6. P. 109–130.
12. *Diekmann O., Kaper H.G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlin. Anal. Theory Math. Appl. 1978. V. 2. № 6. P. 721–737.
13. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 2. С. 164–181.
14. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* Об одной системе интегральных уравнений на всей прямой с выпуклой и монотонной нелинейностью // Изв. НАН Армении. Математика. 2022. Т. 57. № 5. С. 25–40.
15. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* О разрешимости одной системы сингулярных интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 1. С. 31–51.

16. *Арабаджян Л.Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 21–28.
17. *Banas J.* Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. of Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 46. № 1. P. 61–68.
18. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на всей прямой // Соврем. математика. Фунд. направления. 2022. Т. 68. № 2. С. 376–391.
19. *Хачатрян Х.А.* Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свёртки с монотонной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 4. С. 198–207.
20. *Петросян А.С., Хачатрян Х.А.* О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 4. С. 529–543.
21. *Енгибарян Н.Б.* Уравнения восстановления на полуоси // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63. № 1. С. 61–76.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.
24. *Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свёртки // Мат. сб. 2007. Т. 198. № 7. С. 45–62.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 13.08.2023 г.
После доработки 13.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1515–1521

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

О СВЯЗИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. И. Гомоюнов

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, движение которой описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто, на минимум терминального показателя качества. Изучается связь между необходимым условием оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана с так называемыми дробными коинвариантными производными. Доказывается, что сопряжённая переменная из принципа максимума Понтрягина совпадает с точностью до знака с дробным коинвариантным градиентом функционала оптимального результата, вычисленным вдоль оптимального движения.

DOI: 10.31857/S0374064123110067, EDN: PEGKMT

1. Постановка задачи. Пусть $\alpha \in (0,1)$, $T > 0$ и $n, m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)) \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь $\tau \in [0,T]$ – время, $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ и $u(\tau) \in U \subset \mathbb{R}^m$ – состояние системы и управляющее воздействие в момент времени τ соответственно, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – начальное состояние системы, $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ – левосторонняя дробная производная Капуто порядка α от функции $x(\cdot)$ в точке τ, определяемая равенством (см., например, [1, раздел 2.4; 2, раздел 3])

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^\tau \frac{x(\xi) - x(0)}{(\tau - \xi)^\alpha} \, d\xi,$$

где Γ – гамма-функция. Целью управления является минимизация показателя качества

$$J = \sigma(x(T)), \tag{3}$$

где $x(T)$ – терминальное состояние системы.

Всюду в статье предполагаем выполненными следующие условия:

(a) множество U является компактным подмножеством пространства $\mathbb{R}^m$;

(b) функция $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по первым двум переменным $\partial_\tau f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\partial_x f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n \times n}$;

(c) для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ существует число $\lambda \geqslant 0$ такое, что

$$\|f(\tau, x, u) - f(\tau, x', u')\| \leqslant \lambda(\|x - x'\| + \|u - u'\|), \quad \tau \in [0,T], \quad (x,u), (x',u') \in K;$$

(d) существует число $c \geqslant 0$ такое, что

$$\|f(\tau, x, u)\| \leqslant c(1 + \|x\|), \quad \tau \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U;$$

(e) функция $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема.

Отметим, что пространство $\mathbb{R}^n$ (и аналогично $\mathbb{R}^m$) рассматривается со стандартным скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и евклидовой нормой $\|\cdot\|$, а пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$, состоящее из матриц размера $n\times n$, – с соответствующей подчинённой (операторной) нормой.

Через $AC^{\alpha}([0,T],\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $x\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$, каждая из которых для некоторой своей измеримой (относительно меры Лебега на $[0,T]$) и существенно ограниченной функции $g\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$ представима в виде (см., например, [3, определение 2.3])

$$x(\tau)=x(0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\tau}\frac{g(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi,\quad \tau\in[0,T].$$

Здесь второе слагаемое – левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α от функции $g(\cdot)$ в точке τ (см., например, [3, определение 2.1]).

Допустимым управлением считаем любую измеримую функцию $u\colon [0,T]\to U$. Множество всех таких управлений $u(\cdot)$ обозначим через $\mathcal{U}(0,T)$. Движение системы (1), (2), отвечающее управлению $u(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)$, определим как функцию $x(\cdot)\in AC^{\alpha}([0,T],\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию (2) и дифференциальному уравнению (1) при почти всех (п.в.) $\tau\in[0,T]$. Согласно, например, [4, теорема 2] (см. также [5, утверждение 2]) такое движение $x(\cdot)=x(\cdot\,;u(\cdot))$ существует и единственно. Задача оптимального управления (1)–(3) состоит в том, чтобы найти управление $u^0(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)$, для которого имеет место равенство

$$\sigma(x(T;u^0(\cdot)))=\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)}\sigma(x(T;u(\cdot))).$$

Такое управление $u^0(\cdot)$ и отвечающее ему движение $x^0(\cdot)=x(\cdot\,;u^0(\cdot))$ назовём оптимальными.

2. Принцип максимума Понтрягина. Сформулируем необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(3) в форме принципа максимума Понтрягина (подробнее см. в [6]).

Пусть $u^0(\cdot)\in\mathcal{U}(0,T)$ – оптимальное управление, а $x^0(\cdot)=x(\cdot\,;u^0(\cdot))$ – соответствующее оптимальное движение. Рассмотрим интегральное уравнение (сопряжённое уравнение)

$$p(\tau)=-\frac{\partial_x\sigma(x^0(T))}{\Gamma(\alpha)(T-\tau)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\tau}^{T}\frac{\partial_x f(\xi,x^0(\xi),u^0(\xi))^{\mathrm{т}}p(\xi)}{(\xi-\tau)^{1-\alpha}}\,d\xi,\quad \tau\in[0,T), \tag{4}$$

где $\partial_x\sigma(x^0(T))$ – вектор частных производных функции σ, вычисленных в точке $x^0(T)$, верхний индекс $^{\mathrm{т}}$ обозначает транспонирование. Пусть $C^{1-\alpha}([0,T),\mathbb{R}^n)$ – множество непрерывных функций $p\colon [0,T)\to\mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует своё число $R\geqslant 0$ такое, что

$$(T-\tau)^{1-\alpha}\|p(\tau)\|\leqslant R,\quad \tau\in[0,T).$$

Решение интегрального уравнения (4) определим как удовлетворяющую этому уравнению функцию $p(\cdot)\in C^{1-\alpha}([0,T),\mathbb{R}^n)$. Согласно, например, [4, теорема 1] и [7, теорема 5.3] (см. также [8, утверждение 1]) такое решение $p(\cdot)$ существует и единственно. Отметим, что в работе [6] вместо интегрального уравнения (4) рассматривается эквивалентная ему задача Коши для дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Римана–Лиувилля порядка α при подходящем краевом условии, заданном в терминальный момент времени T.

Теорема 1. *Пусть $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), $x^0(\cdot)$ – отвечающее ему оптимальное движение системы (1), (2). Тогда выполнено условие максимума*

$$\langle p(\tau),f(\tau,x^0(\tau),u^0(\tau))\rangle=\max_{u\in U}\langle p(\tau),f(\tau,x^0(\tau),u)\rangle\quad \text{при п.в.}\quad \tau\in[0,T],$$

где $p(\cdot)$ – решение сопряжённого уравнения (4).

3. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана. Начнём с определения функционала оптимального результата в задаче оптимального управления (1)–(3) (подробнее см. в [9]). Рассмотрим метрическое пространство (G, ρ_G), где множество G состоит из пар $(t, w(\cdot))$ таких, что $t \in [0,T]$ и $w(\cdot) \in AC^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)$, а метрика ρ_G задаётся равенством

$$\rho_G((t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot))) = |t-t'| + \max_{\tau\in[0,T]} \|w(\min\{\tau,t\}) - w'(\min\{\tau,t'\})\|, \quad (t,w(\cdot)),(t',w'(\cdot)) \in G.$$

Точки $(t,w(\cdot)) \in G$ считаем допустимыми позициями системы (1), при этом функцию $w(\cdot)$ трактуем как историю движения этой системы на промежутке $[0,t]$. Пусть зафиксирована позиция $(t,w(\cdot)) \in G$. Обозначим через $\mathcal{U}(t,T)$ множество допустимых управлений на промежутке $[t,T]$, состоящее из измеримых функций $u\colon [t,T] \to U$. Под движением системы (1), отвечающим позиции $(t,w(\cdot))$ и управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t,T)$, понимаем функцию $x(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую начальному условию

$$x(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in [0,t], \tag{5}$$

и дифференциальному уравнению (1) при п.в. $\tau \in [t,T]$. Согласно, например, [5, утверждение 2] такое движение $x(\cdot) = x(\cdot\,; t, w(\cdot), u(\cdot))$ существует и единственно. Тогда функционал оптимального результата $\varphi^0\colon G \to \mathbb{R}$ определим равенством

$$\varphi^0(t,w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t,T)} \sigma(x(T; t, w(\cdot), u(\cdot))), \quad (t,w(\cdot)) \in G. \tag{6}$$

Соответственно, управление $u^0(\cdot)$, на котором достигается нижняя грань в данном выражении, назовём оптимальным для позиции $(t,w(\cdot))$. Отметим, что приведённые построения согласуются с исходной постановкой задачи (1)–(3), при этом начальному условию (2) отвечает позиция $(t,w(\cdot)) \in G$, где $t=0$ и $w(0)=x_0$.

Далее положим $G_0 = \{(t,w(\cdot)) \in G\colon t < T\}$. Следуя [9], функционал $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ назовём коинвариантно (ci) дифференцируемым порядка α в точке $(t,w(\cdot)) \in G_0$, если существуют число $\boldsymbol{\partial}_t^\alpha \varphi(t,w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и вектор $\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi(t,w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что какова бы ни была функция $x(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию (5), справедливо соотношение

$$\lim_{\delta\to+0}\biggl(\frac{\varphi(t+\delta, x_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi(t,w(\cdot))}{\delta} - \boldsymbol{\partial}_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) - \biggl\langle \boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi(t,w(\cdot)), \frac{1}{\delta}\int\limits_t^{t+\delta} ({}^C D^\alpha x)(\xi)\,d\xi \biggr\rangle\biggr) = 0,$$

где функция $x_{t+\delta}(\cdot) \in AC^\alpha([0,t+\delta],\mathbb{R}^n)$ – сужение функции $x(\cdot)$ на промежуток $[0,t+\delta]$. Величины $\boldsymbol{\partial}_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot))$ и $\boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi(t,w(\cdot))$ назовём ci-производной порядка α по переменной t и ci-градиентом порядка α функционала φ в точке $(t,w(\cdot))$ соответственно.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\boldsymbol{\partial}_t^\alpha\varphi(t,w(\cdot)) + H(t, w(t), \boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi(t,w(\cdot))) = 0, \quad (t,w(\cdot)) \in G_0, \tag{7}$$

при краевом условии на правом конце

$$\varphi(T,w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Здесь искомым является функционал $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$, а гамильтониан H задаётся равенством

$$H(\tau,x,s) = \min_{u\in U}\langle s, f(\tau,x,u)\rangle, \quad \tau\in[0,T], \quad x,s\in\mathbb{R}^n.$$

Связь между задачей оптимального управления (1)–(3) и задачей Коши (7), (8) устанавливает, в частности, следующий критерий (см. [9, теоремы 10.1 и 11.1]).

Теорема 2. *Пусть функционал $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывен, ci-дифференцируем порядка α в каждой точке $(t,w(\cdot)) \in G_0$, и отображения $\boldsymbol{\partial}_t^\alpha\varphi\colon G_0 \to \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi\colon G_0 \to \mathbb{R}^n$ непрерывны.*

Тогда для того чтобы функционал φ *был функционалом оптимального результата в задаче (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана (7) и краевому условию (8).*

В общем (негладком) случае функционал оптимального результата $\varphi^0\colon G \to \mathbb{R}$ совпадает с единственным обобщённым решением задачи Коши (7), (8) (подробнее см. в статье [10]).

4. Основной результат. Напомним конструкцию обобщённых управлений в задаче (1)–(3) (см., например, [11, гл. IV; 12, раздел 6.1], а также [13]). Рассмотрим компактное метрическое пространство (M, ρ_M), где множество M состоит из (регулярных) вероятностных борелевских мер на U, а метрика ρ_M такова, что для любой последовательности мер $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ и меры $\mu \in M$ сходимость $\rho_M(\mu_i, \mu) \to 0$ при $i \to \infty$ эквивалентна тому, что для любой непрерывной функции $a\colon U \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_U a(u)\mu_i(du) = \int\limits_U a(u)\mu(du).$$

Пусть зафиксирована позиция $(t, w(\cdot)) \in G$. Обобщённым управлением на промежутке $[t, T]$ назовём любую измеримую функцию $\mu\colon [t, T] \to M$. Пусть $\mathcal{M}(t, T)$ – множество всех таких обобщённых управлений $\mu(\cdot)$. Движение системы (1), отвечающее позиции $(t, w(\cdot))$ и обобщённому управлению $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}(t, T)$, определим как функцию $x(\cdot) \in AC^\alpha([0, T], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию (5) и дифференциальному уравнению

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \int\limits_U f(\tau, x(\tau), u)\mu(\tau)(du) \quad \text{при п.в.} \quad \tau \in [t, T]. \tag{9}$$

По аналогии со случаем управлений $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t, T)$ такое движение $x(\cdot) = x(\cdot\,; t, w(\cdot), \mu(\cdot))$ существует и единственно. Отметим (см., например, [13, формула (37)]), что существует обобщённое управление $\mu^0(\cdot) \in \mathcal{M}(t, T)$, для которого

$$\sigma(x(T; t, w(\cdot), \mu^0(\cdot))) = \inf_{\mu(\cdot)\in\mathcal{M}(t,T)} \sigma(x(T; t, w(\cdot), \mu(\cdot))) = \varphi^0(t, w(\cdot)),$$

где φ^0 – функционал оптимального результата (6). Такое обобщённое управление $\mu^0(\cdot)$ назовём оптимальным для позиции $(t, w(\cdot))$.

Сделаем теперь дополнительное предположение: для позиции $(t{=}0, w(0){=}x_0) \in G$, отвечающей начальному условию (2), оптимальное обобщённое управление $\mu^0(\cdot) \in \mathcal{M}(0, T)$ единственно (с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега).

Пусть $u^0(\cdot) \in \mathcal{U}(0, T)$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), $x^0(\cdot) = x(\cdot\,; u^0(\cdot))$ – оптимальное движение системы (1), (2). В силу сделанного предположения при п.в. $\tau \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\mu^0(\tau) = \delta(u^0(\tau)),$$

где $\delta(u^0(\tau))$ – мера Дирака в точке $u^0(\tau)$. В частности (см. (9)), движение $x^0(\cdot)$ совпадает с движением $x(\cdot\,; 0, x_0, \mu^0(\cdot))$, отвечающим оптимальному обобщённому управлению $\mu^0(\cdot)$. Кроме того, из принципа динамического программирования в задаче (1)–(3) (см. [9, теорема 6.1]) и полугруппового свойства движений системы (1) (см. [5, раздел 3.2]) вытекает, что для каждого $t \in [0, T)$ сужение функции $\mu^0(\cdot)$ на промежуток $[t, T]$ будет единственным оптимальным обобщённым управлением для позиции $(t, x^0_t(\cdot)) \in G$, где $x^0_t(\cdot)$ – сужение функции $x^0(\cdot)$ на промежуток $[0, t]$.

Тогда, применяя [13, теорема 9.1], получаем, что для любых $t \in [0, T)$ и $\ell \in \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{\varphi^0(t + \delta, y^{(\ell)}_{t+\delta}(\cdot)) - \varphi^0(t, x^0_t(\cdot))}{\delta} = \langle \partial_x\sigma(x^0(T)), z(T)\rangle + \langle Z(T)^{\mathrm{т}} \partial_x\sigma(x^0(T)), \ell\rangle. \tag{10}$$

Здесь функция $y^{(\ell)}(\cdot) \in AC^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ задаётся равенствами $y^{(\ell)}(\tau) = x^0(\tau)$ при $\tau \in [0,t]$ и

$$y^{(\ell)}(\tau) = x^0(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha x^0)(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi + \frac{(\tau-t)^\alpha \ell}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \tau \in (t,T],$$

функция $y^{(\ell)}_{t+\delta}(\cdot)$ – сужение функции $y^{(\ell)}(\cdot)$ на промежуток $[0,t+\delta]$, функция $z(\cdot)$ является единственным в пространстве $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^n)$ решением интегрального уравнения

$$z(\tau) = -\frac{(1-\alpha)(T-\tau)}{\Gamma(\alpha)(T-t)} \int\limits_0^t \frac{({}^C D^\alpha x^0)(\xi)}{(\tau-\xi)^{2-\alpha}}\, d\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\tau \frac{\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) z(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)(T-t)} \int\limits_t^\tau \frac{(T-\xi)\partial_\tau f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) - \alpha f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in (t,T],$$

функция $Z(\cdot)$ – единственное в $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^{n\times n})$ решение интегрального уравнения

$$Z(\tau) = \frac{I_n}{\Gamma(\alpha)(\tau-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\tau \frac{\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) Z(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in (t,T], \tag{11}$$

где $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица. Через $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^n)$ обозначено множество непрерывных функций $z\colon (t,T] \to \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует число $R \geqslant 0$ такое, что

$$(\tau-t)^{1-\alpha}\|z(\tau)\| \leqslant R, \quad \tau \in (t,T].$$

Множество $C^{1-\alpha}((t,T],\mathbb{R}^{n\times n})$ определяется аналогично.

Поскольку соотношение (10) выполнено для любого $\ell \in \mathbb{R}^n$, а функционал оптимального результата φ^0 удовлетворяет специальному условию липшицевости [10, лемма 1], то, рассуждая по схеме доказательства [8, теорема 1] с опорой на [10, утверждение 3], можно показать, что функционал φ^0 является ci-дифференцируемым порядка α в точке $(t, x^0_t(\cdot))$ и

$$\boldsymbol{\partial}^\alpha_t \varphi^0(t, x^0_t(\cdot)) = \langle \partial_x \sigma(x^0(T)), z(T)\rangle, \quad \boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(t, x^0_t(\cdot)) = Z(T)^{\mathrm{T}} \partial_x \sigma(x^0(T)). \tag{12}$$

Положим

$$\Delta = \{(\tau,\eta) \in [0,T]\times[0,T]\colon \tau \geqslant \eta\}$$

и, следуя [4] (см. также [14]), рассмотрим непрерывную функцию $F\colon \Delta \to \mathbb{R}^{n\times n}$, которая при каждом фиксированном $\eta \in [0,T]$ является единственным непрерывным решением интегрального уравнения

$$F(\tau,\eta) = \frac{I_n}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\tau-\eta)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\eta^\tau \frac{\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi)) F(\xi,\eta)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}(\xi-\eta)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [\eta, T]. \tag{13}$$

Заметим, что в силу связи между уравнениями (11) и (13) для любого $\tau \in (t,T]$ справедливо равенство

$$Z(\tau) = \frac{F(\tau,t)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}.$$

Таким образом, с учётом (12) имеем

$$\boldsymbol{\nabla}^\alpha \varphi^0(t, x^0_t(\cdot)) = \frac{F(T,t)^{\mathrm{T}} \partial_x \sigma(x^0(T))}{(T-t)^{1-\alpha}}. \tag{14}$$

Пусть $p_*(\tau) = -\boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi^0(\tau, x^0_\tau(\cdot))$ для любого $\tau \in [0, T)$. Так как согласно [4, теорема 7] (см. также [14, утверждение 4.3]) для функции F выполняется соотношение

$$F(T,\tau) = \frac{I_n}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(T-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\tau^T \frac{F(T,\xi)\partial_x f(\xi, x^0(\xi), u^0(\xi))}{(T-\xi)^{1-\alpha}(\xi-\tau)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [0,T],$$

то непосредственной подстановкой с использованием формулы (14) проверяется, что функция $p_*(\cdot)$ удовлетворяет сопряжённому уравнению (4). Тогда, принимая во внимание включение $p_*(\cdot) \in C^{1-\alpha}([0,T), \mathbb{R}^n)$, приходим к выводу, что функция $p_*(\cdot)$ является единственным решением уравнения (4). Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть $u^0(\cdot)$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), $x^0(\cdot)$ – отвечающее ему оптимальное движение системы (1), (2), а функция $p(\cdot)$ – решение соответствующего сопряжённого уравнения (4). Тогда при дополнительном предположении о том, что оптимальное обобщённое управление в задаче (1)–(3) единственно, имеет место равенство*

$$p(\tau) = -\boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi^0(\tau, x^0_\tau(\cdot)), \quad \tau \in [0,T), \tag{15}$$

где $x^0_\tau(\cdot)$ – сужение функции $x^0(\cdot)$ на промежуток $[0,\tau]$, $\boldsymbol{\nabla}^\alpha\varphi^0(\tau, x^0_\tau(\cdot))$ – ci-градиент порядка α функционала оптимального результата φ^0 в точке $(\tau, x^0_\tau(\cdot))$.

Данная теорема выявляет связь между принципом максимума Понтрягина и уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана в задаче (1)–(3). При этом равенство (15) выступает аналогом соответствующего факта, известного в теории оптимального управления обыкновенными дифференциальными системами (см., например, [15, § 9], а также [16, теорема 8.1]). Отметим, что в наиболее простом случае доказательство этого факта проводится при дополнительном предположении о том, что функция оптимального результата является дважды непрерывно дифференцируемой, и опирается, в частности, на необходимое условие экстремума для функций, определённых на пространстве состояний системы $\mathbb{R}^n$, и теорему о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования. Однако следование этой стандартной схеме рассуждений для обоснования равенства (15) в рассматриваемой задаче (1)–(3) осложняется бесконечномерным характером системы (1) и спецификой *ci*-производных порядка α, входящих в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (7). Поэтому была выбрана другая схема рассуждений, близкая, например, к доказательству леммы II.7 в [17]. Наконец, подчеркнём, что в дополнение к результатам работ [8–10, 13] теорема 3 служит ещё одним подтверждением того, что аппарат *ci*-производных порядка α является адекватным инструментом для исследования задач управления системами дробного порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
2. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: an Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, 2010.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
4. *Bourdin L.* Cauchy–Lipschitz theory for fractional multi-order dynamics: state-transition matrices, Duhamel formulas and duality theorems // Differ. Integr. Equat. 2018. V. 31. № 7/8. P. 559–594.
5. *Gomoyunov M.I.* Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl. 2020. V. 10. № 2. P. 417–443.
6. *Bergounioux M., Bourdin L.* Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints // ESAIM Contr. Optim. Ca. 2020. V. 26. Art. 35.
7. *Bourdin L.* Weighted Hölder continuity of Riemann–Liouville fractional integrals – application to regularity of solutions to fractional Cauchy problems with Carathéodory dynamics // Fract. Cal. Appl. Anal. 2019. V. 22. № 3. P. 722–749.

8. *Gomoyunov M.I.* On differentiability of solutions of fractional differential equations with respect to initial data // Fract. Calc. Appl. Anal. 2022. V. 25. № 4. P. 1484–1506.
9. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. V. 58. № 6. P. 3185–3211.
10. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.* Дифференциальные игры в системах дробного порядка: неравенства для производных функционала цены по направлениям // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2021. Т. 315. С. 74–94.
11. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
12. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. New York, 1988.
13. *Gomoyunov M.I.* Sensitivity analysis of value functional of fractional optimal control problem with application to feedback construction of near optimal controls // Appl. Math. Optim. 2023. V. 88. № 2. Art. 41.
14. *Gomoyunov M.I.* On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal. 2020. V. 23. № 4. P. 1141–1160.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
16. *Fleming W.H., Rischel R.W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. New York, 1975.
17. *Субботина Н.Н.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Совр. математика и её приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 26.05.2023 г.
После доработки 26.05.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1522–1532

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 г. В. И. Максимов

Рассмотрена задача гарантированного управления нелинейным распределённым уравнением диффузионного типа, суть которой состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, обеспечивающего отслеживание решением заданного уравнения решение другого аналогичного уравнения, которое подвержено влиянию неизвестного возмущения. Изучен случай, когда допустимым возмущением может быть разрывная неограниченная функция. Задача решена в условиях неточного измерения в дискретные моменты времени решений каждого из уравнений, при этом указан устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения.

DOI: 10.31857/S0374064123110079, EDN: PEJGWV

1. Введение. Постановка задачи. В статье обсуждается задача управления по принципу обратной связи дифференциальным уравнением диффузионного типа с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\nu,t)-\Delta x(\nu,t)+e^{-\eta t}R(e^{\eta t}x(\nu,t))+\eta x(\nu,t)+L(K_\eta(t)x_{0,t}(\cdot))(\nu)=u(\nu,t)+f(\nu,t)\ \text{ в }\ Q_\vartheta,$$

$$\begin{gathered}\partial_\mu x(\nu,t)=0\ \text{ в }\ \Sigma_\vartheta,\\ x(\nu,0)=x_0(\nu)\ \text{ в }\ \Omega.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; $R(y)=k(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$, $L>0$, $k>0$, η и $y_1<y_2<y_3$ – действительные числа; $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество с липшицевой границей $\partial\Omega$, $n=1,2,3$; $\vartheta>0$ – конечный момент времени; $Q_\vartheta=\Omega\times T$, $T=[0,\vartheta]$; $\Sigma_\vartheta=\partial\Omega\times\times T$; $f(\cdot)\in L_\infty(T;H^1(\Omega))$ – фиксированная функция; $u(\cdot)$ – управление; μ и ∂_μ обозначают соответственно вектор единичной внешней нормали и производную по внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω; $K_\eta(t)$ – семейство зависящих от параметра η линейных операторов

$$(K_\eta(t)w_{0,t}(\cdot))(\nu)=\gamma\int\limits_0^t e^{-(\beta+\eta)(t-s)}w(\nu,s)\,ds\quad\text{при п.в.}\quad \nu\in\Omega,$$

где β и γ – положительные числа. Символ $x_{0,t}(\cdot)$ обозначает функцию $x(s)$, $s\in[0,t]$. В дальнейшем считаем $x_0\in H^1(\Omega)$.

Функцию $x(\cdot)=x(\cdot\,;0,x_0,u(\cdot))\in W\bigcap L_\infty(Q_\vartheta)$ назовём *решением* (*слабым*) *уравнения* (1), если выполняется равенство

$$\int\limits_0^\vartheta\langle\dot x(t),\varphi(t)\rangle\,dt+\int\limits_0^\vartheta\int\limits_\Omega\{\nabla x(\nu,t)\cdot\nabla\varphi(\nu,t)+[e^{-\eta t}R(e^{\eta t}x(\nu,t))+\eta x(\nu,t)]\varphi(\nu,t)\}\,d\nu\,dt+$$

$$+\int\limits_0^\vartheta\int\limits_\Omega L(K_\eta(t)x_{0,t}(\cdot))(\nu)\varphi(\nu,t)\,d\nu\,dt=\int\limits_0^\vartheta\int\limits_\Omega\{u(\nu,t)+f(\nu,t)\}\varphi(\nu,t)\,d\nu\,dt$$

(при всех $\varphi \in W$), причём $x(0) = x_0$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – двойственность между пространствами Соболева $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$; $\nabla x(\nu, t)$ – градиент функции $\nu \to x(\nu, t)$; производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений. Символ W означает пространство функций $z(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$, производные $\dot{z}(\cdot)$ которых являются элементами пространства $L_2(T; (H^1(\Omega))^*)$. Норма в пространстве W задаётся формулой

$$|z(\cdot)|_W = \left(\int_0^\vartheta (|z(t)|^2_{H^1(\Omega)} + |\dot{z}(t)|^2_{(H^1(\Omega))^*})\, dt \right)^{1/2}.$$

Как известно, после изменения на множестве нулевой лебеговской меры всякая функция из пространства W является непрерывной со значениями в пространстве H. Поэтому считаем пространство W вложенным в пространство $C(T; H)$, где $H = L_2(\Omega)$. В таком случае решение уравнения (1) определено в каждый момент $t \in T$.

Уравнение вида (1) введено в работе [1]. К нему сводятся известные: в физике – уравнение Schlögl, в нейрологии – уравнение FitzHugh–Nagumo. Задачи оптимального управления последними рассматривались, например, в работах [1–5], где имеется соответствующая библиография, причём в статье [4] рассматривалось стохастическое уравнение, а в [5] обсуждалась задача стабилизации такого уравнения. В настоящей статье будет исследована одна задача гарантированного управления, суть которой состоит в следующем. Наряду с (1), рассмотрим задачу с уравнением того же вида

$$\frac{\partial}{\partial t} y(\nu, t) - \Delta y(\nu, t) + e^{-\eta t} R(e^{\eta t} y(\nu, t)) + \eta y(\nu, t) + L(K_\eta(t) y_{0,t}(\cdot))(\nu) = v(\nu, t) + f(\nu, t) \ \text{ в } \ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu y(\nu, t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_\vartheta,$$

$$y(\nu, 0) = y_0(\nu) \ \text{ в } \ \Omega. \tag{2}$$

В правой части этого уравнения стоит неизвестное возмущение $v(\cdot)$, которое является элементом пространства $L_2(T; H^1(\Omega))$. Следовательно, наличие каких либо “мгновенных” ограничений на $v(\cdot)$ не предполагается. В дискретные моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $\tau_m = \vartheta$, измеряются фазовые состояния $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$ уравнений (1) и (2). Результаты измерений – функции ξ_i^h и $\psi_i^h \in L_p(\Omega)$, $i = \overline{0, m-1}$, $p > 5/2$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \tag{3}$$

где $h \in (0, 1)$ – величина ошибки измерения. Задача состоит в построении алгоритма формирования управления $u(\cdot)$ по результатам измерений состояний $x(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$, обеспечивающего отслеживание решением уравнения (1) решения уравнения (2). Таким образом, управление, стоящее в правой части уравнения (1), вычисляется по правилу

$$u(t) = u^h(\xi_i^h, \psi_i^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Полагаем, что начальные состояния $x_0 \in H^1(\Omega)$ и $y_0 \in H^1(\Omega)$ связаны соотношением

$$|x_0 - y_0|_{H^1(\Omega)} \leqslant h. \tag{4}$$

Одним из важных разделов математической теории управления является теория управления по принципу обратной связи, которая довольно активно развивается в последние годы и нацелена на решение задач управления динамическими системами в условиях неполной и меняющейся информации о их структурных характеристиках. Последние также могут быть подвержены влиянию неконтролируемых возмущений. В настоящее время разработано значительное число подходов, ориентированных на исследование задач подобного типа. Среди них можно выделить, например, теорию позиционных дифференциальных игр [6], H_2-теорию [7], теорию робастного управления [8], теорию матричных неравенств [9], метод, основанный на отслеживании возмущения [10], метод подавления возмущения [11] и т.д. Решение задач управления в условиях дефицита информации существенно усложняется, когда речь идёт о системах с распределёнными параметрами [11–13].

Один из подходов к решению задач управления по принципу обратной связи системами с распределёнными параметрами был развит в работах [14–19]. Он основан на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр, развиваемой екатеринбургской школой [6, 20, 21]. Задача слежения – классическая задача математической теории управления [22]. Одна из задач теории позиционных дифференциальных игр, как известно [6], решается путём отслеживания траектории так называемой стабильной дорожки путём экстремального сдвига на эту дорожку. В указанных выше работах рассматривались управляемые системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. При этом предполагалось, что управления игроков стеснены мгновенными ограничениями в виде компактных множеств. Настоящая статья продолжает указанные выше исследования. Следует отметить, что отсутствие ограничений на управления и (или) возмущения существенно усложняет математическое обоснование сконструированных тем или иным образом процедур построения разрешающих управлений. Не в последнюю очередь это вызвано некомпактностью пучков решений управляемых систем, порождённых множеством допустимых управлений и (или) возмущений в случае отсутствия мгновенных ограничений на них. Кроме того, при отсутствии таких ограничений экстремальный сдвиг вырождается, вследствие чего требуется его регуляризация (как правило по методу А.Н. Тихонова), которая была предложена в работах [23, 24] при решении задач устойчивого динамического обращения.

Задачи гарантированного управления уравнением вида (1) при наличии мгновенных ограничений (в виде ограниченных замкнутых множеств) как на управления, так и на возмущения с позиций отмеченного выше подхода исследовались в статье [19]. В настоящей работе рассмотрен случай отсутствия таких ограничений.

2. Алгоритм решения. Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи, приведём вспомогательные утверждения. Пусть выполнено

Условие. Параметр η в уравнении (1) удовлетворяет неравенству

$$\max\{3|c_R|, 3L\gamma\vartheta^{1/2}, 0.5-\beta\} \leqslant \eta,$$

где $c_R \leqslant dR/dy$ при всех $y \in \mathbb{R}$.

Символ $|\cdot|$ здесь и всюду ниже означает модуль числа, символ $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в пространстве H, а $|\cdot|_n$ – норму в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *При выполнении сформулированного условия если $u(\cdot) \in L_p(Q_\vartheta)$, $p > 5/2$ и $x_0 \in L_\infty(\Omega)$, то существует единственное решение уравнения (1) $x(\cdot) \in W \bigcap L_\infty(Q_\vartheta) \bigcap C(\tilde{\Omega} \times (0,\vartheta])$. Если к тому же $x_0 \in C(\tilde{\Omega})$, то $x(\cdot) \in C(\tilde{\Omega} \times [0,\vartheta])$.*

Здесь $\tilde{\Omega}$ означает замыкание множества Ω.

Нетрудно доказать, что если выполнены условия леммы 1 и, кроме того, $x_0 \in H^1(\Omega)$, то $\dot{x}(\cdot) \in L_2(T;H)$. Заметим, что при $n = 1,2,3$ и $p \leqslant 6$ пространство $H^1(\Omega)$ вложено плотно и непрерывно в пространства $L_p(\Omega)$. В свою очередь, $H^1(\Omega)$ вложено в $L_\infty(\Omega)$ только при $n = 1$.

Стандартным образом доказывается

Лемма 2. *Можно указать число $C > 0$ (не зависящее от x_0 и $u(\cdot)$) такое, что равномерно по всем $u(\cdot) \in L_p(Q_\vartheta)$ верно неравенство*

$$\sup_{t\in T}|x(t)|_H^2 + \int_0^\vartheta |\dot{x}(t)|_H^2\,dt \leqslant C\biggl(|x_0|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^\vartheta \{|u(t)|_H^2 + |f(t)|_H^2\}\,dt\biggr),$$

где $x(\cdot) = x(\cdot\,;0,x_0,u(\cdot))$ – решение уравнения (1).

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 3 [25] (дискретное неравенство Гронуолла). *Пусть* $0 \leqslant \phi_j$, $0 \leqslant f_j$ *при* $j = \overline{0,m}$ *и* $f_j \leqslant f_{j+1}$ *при* $j = \overline{0,m-1}$. *Тогда из неравенств*

$$\phi_{j+1} \leqslant c_0\delta \sum_{i=1}^{j} \phi_i + f_j, \quad j = \overline{1,m-1},$$

следуют неравенства

$$\phi_{j+1} \leqslant f_j \exp(c_0 j\delta), \quad j = \overline{0,m-1},$$

если $c_0 = \mathrm{const} > 0$, $\phi_1 \leqslant f_0$.

Пусть взято семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) \in (0,1), \quad h \in (0,1),$$

и функция $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$.

Перейдём к описанию алгоритма решения задачи. До начала его работы зафиксируем числа $h \in (0,1)$ и $\alpha = \alpha(h)$, а также разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$, отрезка T с шагом $\delta = \delta(h) = \tau_{i+1} - \tau_i$. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ однотипных шагов. На полуинтервале $[0,\tau_1)$ полагаем

$$u^h(t) = u_0^h = (\psi_0^h - \xi_0^h)\alpha^{-1}. \tag{5}$$

В результате действия этого управления реализуется решение $x^h(\cdot) = x(\cdot\,; 0, x_0, u^h_{0,\tau_1}(\cdot))$ уравнения (1). В свою очередь, в результате действия возмущения $v_{0,\tau_1}(\cdot)$ реализуется решение уравнения (2) $y(\cdot) = y(\cdot\,; 0, y_0, v_{0,\tau_1}(\cdot))$ на промежутке $[0,\tau_1]$. В момент $t = \tau_1$ вычислим u_1^h по формуле

$$u_1^h = (\psi_1^h - \xi_1^h)\alpha^{-1}, \tag{6}$$

где

$$|\xi_1^h - x^h(\tau_1)|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad |\psi_1^h - y(\tau_1)|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad \xi_1^h, \psi_1^h \in L_p(\Omega),$$

и положим

$$u^h(t) = u_1^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_1, \tau_2).$$

После этого реализуются $x^h(\cdot) = x(\cdot\,; \tau_1, x^h(\tau_1), u^h_{\tau_1,\tau_2}(\cdot))$ и $y(\cdot) = y(\cdot\,; \tau_1, y(\tau_1), v_{\tau_1,\tau_2}(\cdot))$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно на промежутке $[\tau_1, \tau_2]$.

Пусть решения $x^h(\cdot)$ (уравнения (1)) и $y(\cdot)$ (уравнения (2)) определены на отрезке $[0,\tau_i]$. В момент $t = \tau_i$ вычислим

$$u_i^h = (\psi_i^h - \xi_i^h)\alpha^{-1}, \tag{7}$$

где

$$|\xi_i^h - x^h(\tau_i)|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_{L_p(\Omega)} \leqslant h, \quad \xi_i^h, \psi_i^h \in L_p(\Omega),$$

и положим

$$u^h(t) = u_i^h \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

В результате действия этого управления и неизвестного возмущения $v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$ реализуются $x^h(\cdot) = x(\cdot\,; \tau_i, x^h(\tau_i), u^h_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot))$ и $y(\cdot) = y(\cdot\,; \tau_i, y(\tau_i), v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot))$ – решения уравнений (1) и (2) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Описанная выше процедура заканчивается в момент ϑ.

В дальнейшем c_0, c_1, ..., d_1, d_2, ... означают положительные постоянные, не зависящие от h, δ и α.

Лемма 4. *Пусть управление* $u = u^h(\cdot)$, *стоящее в правой части уравнения (1), находится по формулам (5)–(7). Тогда справедливо неравенство*

$$\max_{i=\overline{0,m}} \varepsilon(\tau_i) \leqslant d_1 F(h,\delta,\alpha). \tag{8}$$

Здесь

$$F(h,\delta,\alpha) = (\alpha + \delta + \delta h^2\alpha^{-2} + h^2\delta^{-1})\exp\{d_2(1+\delta\alpha^{-2})\},$$

$$\varepsilon(t) = |\mu^h(t)|_H^2 + 2\int\limits_0^t \bigg\{ \int\limits_\Omega |\nabla\mu^h(\nu,s)|_n^2 d\nu + \frac{2}{3}\eta|\mu^h(s)|_H^2 \bigg\} ds,$$

$\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$, $\mu^h(t) = x^h(t) - y(t)$, $x^h(\cdot)$ и $y(\cdot)$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Для доказательства леммы оценим изменение функции $\varepsilon(t)$ при $t \in T$. Обозначим $R_\eta(t,v) = e^{-\eta t}R(e^{\eta t}v) + (\eta/3)v$. Тогда задачи (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}x^h(\nu,t) - \Delta x^h(\nu,t) + R_\eta(t, x^h(\nu,t)) + \frac{2}{3}\eta x^h(\nu,t) + L(K_\eta(t)x^h_{0,t}(\cdot))(\nu) = u^h(\nu,t) + f(\nu,t) \ \text{ в } \ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu x^h(\nu,t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_\vartheta,$$

$$x^h(0) = x_0(\nu) \ \text{ в } \ \Omega \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}y(\nu,t) - \Delta y(\nu,t) + R_\eta(t, y(\nu,t)) + \frac{2}{3}\eta y(\nu,t) + L(K_\eta(t)y_{0,t}(\cdot))(\nu) = v(\nu,t) + f(\nu,t) \ \text{ в } \ Q_\vartheta,$$

$$\partial_\mu y(\nu,t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma_\vartheta,$$

$$y(\nu,0) = y_0(\nu) \ \text{ в } \ \Omega. \tag{10}$$

Вычтем (10) из (9) и умножим полученную разность скалярно (в H) на $\mu^h(t)$. Учитывая монотонность отображения $v \to R_\eta(t,v)$, будем иметь

$$\rho^h(t) + L(K_\eta(t)\{x^h_{0,t}(\cdot) - y_{0,t}(\cdot)\}, \mu^h(t)) \leqslant \langle \mu^h(t), u^h(t) - v(t)\rangle,$$

где

$$\rho^h(t) = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} + \int\limits_\Omega |\mu^h(\nu,t)|^2\,d\nu + \frac{2}{3}\eta\varepsilon_1(t), \quad \varepsilon_1(t) = |\mu^h(t)|_H^2.$$

Так как при $p > 5/2$ пространство $L_p(\Omega)$ вложено плотно и непрерывно в пространство H, то $|z|_H \leqslant c_0|z|_{L_p(\Omega)}$ для всех $z \in L_p(\Omega)$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|x^h(\tau_i) - \xi_i^h|_H \leqslant c_0 h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_H \leqslant c_0 h, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

В силу известного свойства троек Гельфанда если $u^h(t), v(t) \in H^1(\Omega)$, $\mu^h(t) \in H$, то двойственность на $(H^1(\Omega))^* \times H^1(\Omega)$ эквивалентна скалярному произведению в H:

$$\langle \mu^h(t), u^h(t) - v(t)\rangle = (\mu^h(t), u^h(t) - u(t)).$$

Поэтому при п.в. $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(\tau_i = \tau_{h,i},\ m = m_h)$ верно неравенство

$$\langle \mu^h(t), u^h(t) - v(t)\rangle \leqslant (u^h(t) - v(t), \xi_i^h - \psi_i^h) + \varrho_i(t,h).$$

Здесь

$$\varrho_i(t,h) = c_1(|u^h(t)|_H + |v(t)|_H)\bigg(h + \int\limits_{\tau_i}^t \{|\dot{x}^h(\tau)|_H + |\dot{y}(\tau)|_H\}\,d\tau\bigg).$$

В таком случае для п.в. $t \in \delta_i$ выполнено соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \leqslant (u^h(t) - v(t), \xi_i^h - \psi_i^h) + \phi_t + \varrho_i(t,h), \tag{11}$$

где

$$\phi_t = L|(K_\eta(t)\{x_{0,t}^h(\cdot) - y_{0,t}(\cdot)\}, \mu^h(t))|.$$

Пусть

$$\varepsilon^h(t) = \varepsilon(t) + \alpha\int\limits_0^t \{|u^h(\tau)|_H^2 - |v(\tau)|_H^2\}\,d\tau.$$

Из (11) вытекает неравенство

$$\frac{d\varepsilon^h(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \alpha\{|u^h(t)|_H^2 - |v(t)|_H^2\} \leqslant 2(u^h(t), \xi_i^h - \psi_i^h) + \alpha|u^h(t)|_H^2 - \tag{12}$$
$$- 2(v(t), \xi_i^h - \psi_i^h) - \alpha|v(t)|_H^2 + 2\varrho_i(t,h) + 2\phi_t \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Учитывая правило определения управления $u^h(\cdot)$ (см. (5)–(7)), из (12) получаем справедливую при всех $t \in \delta_i$ и $i = \overline{0, m-1}$ цепочку неравенств

$$\varepsilon^h(t) \leqslant \varepsilon^h(\tau_i) + 2c_1\int\limits_{\tau_i}^t \{|u^h(\tau)|_H + |v(\tau)|_H\}\,d\tau\biggl(h + \int\limits_{\tau_i}^t \{|\dot{x}^h(\tau)|_H + |\dot{y}(\tau)|_H\}\,d\tau\biggr) + 2\int\limits_{\tau_i}^t \phi_\tau\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^h(\tau_i) + c_2h^2 + c_3\delta\int\limits_{\tau_i}^t \{|u^h(\tau)|_H^2 + |v(\tau)|_H^2\}\,d\tau + c_4\delta\int\limits_{\tau_i}^t \{|\dot{x}^h(\tau)|_H^2 + |\dot{y}(\tau)|_H^2\}d\tau + 2\int\limits_{\tau_i}^t \phi_\tau\,d\tau. \tag{13}$$

Суммируя правую и левую части неравенств (13) по i, в силу леммы 2 при $t \in T$ будем иметь

$$\varepsilon^h(t) \leqslant \varepsilon^h(0) + c_5h^2\delta^{-1} + c_6\delta\biggl(1 + \int\limits_0^t \{|u^h(\tau)|_H^2 + |v(\tau)|_H^2\}\,d\tau\biggr) + 2\int\limits_0^t \phi_\tau\,d\tau. \tag{14}$$

Теперь воспользуемся включением $v(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$, а также соотношением

$$\int\limits_0^t |u^h(\tau)|_H^2\,d\tau = \sum_{j=0}^{i_h(t)-1}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |u^h(\tau)|_H^2\,d\tau + \int\limits_{\tau_{i_h}(t)}^t |u^h(\tau)|_H^2\,d\tau \leqslant \delta\sum_{j=0}^{i_h(t)} |u_j^h|_H^2.$$

Символ $i_h(t)$ означает целую часть числа $t\delta^{-1}(h)$. Из (14) выводим

$$\varepsilon^h(t) \leqslant \varepsilon^h(0) + c_5h^2\delta^{-1} + c_7\delta + c_8\gamma_{h,\delta}(t) + 2\int\limits_0^t \phi_\tau\,d\tau. \tag{15}$$

Здесь

$$\gamma_{h,\delta}(t) = \delta^2\sum_{j=0}^{i_h(t)} |u_j^h|_H^2.$$

Следовательно, при $t \in \delta_i$

$$\gamma_{h,\delta}(t) = \delta^2\sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2. \tag{16}$$

Заметим, что ввиду (4)
$$\varepsilon^h(0) \leqslant c_9 h^2. \tag{17}$$
Далее, при $t \in \delta_i$ справедливо соотношение
$$\varepsilon_1(t) = \left|\mu^h(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \{\dot x^h(s) - \dot y(s)\}\,ds\right|_H^2 \leqslant 2\varepsilon_1(\tau_i) + 2\delta \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot x^h(s) - \dot y(s)|_H^2\,ds, \tag{18}$$
поэтому при $t \in \delta_i$
$$\int\limits_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2\delta^2 \sum_{j=0}^{i-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |\dot x^h(s) - \dot y(s)|_H^2\,ds +$$
$$+ 2\delta^2 \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot x^h(s) - \dot y(s)|_H^2\,ds \leqslant 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2\delta^2 \int\limits_0^t |\dot x^h(s) - \dot y(s)|_H^2\,ds. \tag{19}$$
В силу леммы 2 при $t \in \delta_i$ выполняются неравенства
$$\int\limits_0^t |\dot x^h(s) - \dot y(s)|_H^2\,ds \leqslant c_{10}\biggl(1 + \int\limits_0^t \{|u^h(s)|_H^2 + |v(s)|_H^2\}\,ds\biggr) \leqslant c_{11}\biggl(1 + \delta \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2\biggr). \tag{20}$$
Из (19), учитывая (20), получаем
$$\int\limits_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2c_{11}\delta^2\biggl(1 + \delta \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2\biggr) =$$
$$= 2\delta \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2c_{11}\delta(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)), \quad t \in \delta_i. \tag{21}$$
Обозначим
$$\nu_i(t) = L \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1^{1/2}(s) |K_\eta(s)(x_{0,s}^h(\cdot) - y_{0,s}(\cdot))|_H\,ds.$$
Из результатов работы [1] следует $(0 \leqslant b_1 < b_2 \leqslant \vartheta)$, что
$$\int\limits_{b_1}^{b_2} |K_\eta(s) w_{0,s}(\cdot)|_H^2\,ds = \int\limits_{b_1}^{b_2} \biggl(\int\limits_\Omega (K_\eta(\tau) w_{0,\tau}(\cdot))(\varrho)\,d\varrho\biggr)^2 d\tau =$$
$$= \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_\Omega \left| \int\limits_0^\tau e^{-(\beta+\eta)(\tau-s)} w(\varrho,\tau)\,ds \right|^2 d\varrho\,d\tau \leqslant d_* \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^\tau w^2(\varrho,s)\,ds\,d\varrho\,d\tau =$$
$$= d_* \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_0^\tau |w(s)|_H^2\,ds\,d\tau, \quad w(\cdot) \in L_2([b_1,b_2]; H), \tag{22}$$

где $d_* = \gamma^2/\sqrt{2(\beta+\eta)}$. Кроме того, как нетрудно видеть, имеет место оценка

$$\nu_i(t) \leqslant \frac{2}{3}\eta \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1(s)\,ds + 3L^2/(8\eta)\pi_i(t). \tag{23}$$

Здесь

$$\pi_i(t) = \int\limits_{\tau_i}^{t} |K_\eta(s)(x^h_{0,s}(\cdot) - y_{0,s}(\cdot))|^2_H\,ds.$$

В силу (22) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ верно неравенство

$$\pi_i(t) \leqslant d_* \int\limits_{\tau_i}^{t}\int\limits_{0}^{\tau} |x^h(s) - y(s)|^2_H\,ds\,d\tau = d_* \int\limits_{0}^{\tau_i}\int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1(s)\,d\tau\,ds + d_* \int\limits_{\tau_i}^{t}\int\limits_{s}^{t} \varepsilon_1(s)\,d\tau\,ds =$$

$$= d_*(t-\tau_i) \int\limits_{0}^{\tau_i} \varepsilon_1(s)\,ds + d_* \int\limits_{\tau_i}^{t} (t-s)\varepsilon_1(s)\,ds, \tag{24}$$

поэтому, воспользовавшись (24), устанавливаем оценку

$$\pi_i(t) \leqslant d_*\delta \int\limits_{0}^{t} \varepsilon_1(s)\,ds, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Учитывая (21) и (23), получаем справедливое при всех $t \in \delta_i$ соотношение

$$\pi_i(t) \leqslant 2d_1\delta^2 \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + 2c_{11}d_1\delta^2(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)). \tag{25}$$

В силу (18) и (20) имеет место цепочка неравенств

$$\frac{2}{3}\eta \int\limits_{\tau_i}^{t} \varepsilon_1(s)\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + \frac{4}{3}\eta\delta^2 \int\limits_{\tau_i}^{t} |\dot{x}^h(s) - \dot{y}(s)|^2_H\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + \tag{26}$$

$$+ \frac{4}{3}c_{11}\eta\delta^2\left(1 + \delta\sum_{j=0}^{i} |u^h_j|^2_H\right) \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + \frac{4}{3}c_{11}\eta\delta(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)).$$

Нетрудно видеть, что при $t \in \delta_i$

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \phi_s\,ds \leqslant \nu_i(t).$$

Отсюда, с учётом (26), (25) и (23), выводим

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} \phi_s\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\varepsilon_1(\tau_i) + c_{12}\delta^2 \sum_{j=0}^{i} \varepsilon_1(\tau_j) + c_{13}\delta(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)), \quad t \in \delta_i. \tag{27}$$

При $t \in \delta_i$ из (27) после суммирования получаем

$$\int\limits_0^t \phi_s\,ds \leqslant \frac{4}{3}\eta\delta\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j) + c_{12}\delta^2\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\varepsilon_1(\tau_k) + c_{13}\delta\Big(\vartheta + \sum_{j=0}^{i}\gamma_{h,\delta}(\tau_j)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant c_{13}\vartheta\delta + c_{14}\delta\sum_{j=0}^{i}\varepsilon_1(\tau_j) + c_{13}\delta\sum_{j=0}^{i}\gamma_{h,\delta}(\tau_j). \qquad (28)$$

Далее из (3) и правила определения u_i^h (см. (5)–(7)) вытекает соотношение

$$|u_i^h|_H^2 \leqslant c_{14}(\varepsilon_1(\tau_i) + h^2)\alpha^{-2}. \qquad (29)$$

Кроме того,

$$\varepsilon_1(\tau_i) \leqslant \varepsilon(\tau_i). \qquad (30)$$

В силу (29), (30) и (16) при $t \in \delta_i$ верно неравенство

$$\gamma_{h,\delta}(t) \leqslant c_{14}\delta^2\sum_{j=0}^{i}(\varepsilon(\tau_j) + h^2)\alpha^{-2}, \qquad (31)$$

которое влечёт за собой

$$\sum_{j=0}^{i}\gamma_{h,\delta}(\tau_j) \leqslant c_{15}\delta\sum_{j=0}^{i}(\varepsilon(\tau_j) + h^2)\alpha^{-2}, \quad i = \overline{0,m}. \qquad (32)$$

В таком случае из (15), учитывая (17), (28), (30) и (32), имеем

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant c_{16}h^2\delta^{-1} + c_{17}\delta + c_{14}\delta\sum_{j=0}^{i}\varepsilon(\tau_j) + c_{18}\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i}\varepsilon(\tau_j) + c_{19}\delta h^2\alpha^{-2} + c_{20}\alpha.$$

Воспользовавшись дискретным неравенством Гронуолла (лемма 3), отсюда выводим

$$\varepsilon(\tau_i) \leqslant [c_{16}h^2\delta^{-1} + c_{17}\delta + c_{19}\delta h^2\alpha^{-2} + c_{20}\alpha]\exp\{(c_{14} + c_{18}\delta\alpha^{-2})\vartheta\}, \quad i = \overline{0,m}.$$

Неравенство (8) является следствием последнего неравенства. Лемма доказана.

Прямым следствием леммы 4 является

Теорема. *Пусть семейство разбиений Δ_h отрезка T и функция $\alpha(h)$ обладают следующими свойствами:*

$$h^2\delta^{-1}(h) \to 0, \quad \delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to +0.$$

Тогда равномерно по всем $h \in (0,1)$ верны неравенства

$$\max_{i=\overline{0,m_h}}\varepsilon(\tau_i) \leqslant d_2\Phi(h),$$

где $\Phi(h) = h^2\delta^{-1}(h) + \delta(h) + \alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Из теоремы вытекают два следствия.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы справедливо неравенство*

$$\max_{t\in T}\varepsilon_1(t) \leqslant d_3\Phi(h). \qquad (33)$$

Доказательство. Действительно, из (18) и (20) следует справедливое при всех $t \in \delta_i$ неравенство

$$\varepsilon_1(t) \leqslant 2\varepsilon_1(\tau_i) + 2\delta c_{11}\left(1 + \sum_{j=0}^{i} |u_j^h|_H^2\right) = 2\varepsilon_1(\tau_i) + 2c_{11}(\delta + \gamma_{h,\delta}(\tau_i)). \tag{34}$$

Если $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0$ при $h \to 0$, то можно считать

$$\delta(h)\alpha^{-2}(h) \leqslant c_{21} \quad \text{при} \quad h \in (0,1). \tag{35}$$

В таком случае, учитывая (8), (35) и (31), заключаем, что при всех $i = \overline{0,m}$ верны соотношения

$$\gamma_{h,\delta}(\tau_i) \leqslant c_{22}\delta \sum_{j=0}^{i} (\varepsilon(\tau_i) + h^2) \leqslant c_{23}\Phi(h). \tag{36}$$

Из (34), снова учитывая (8), а также (36), получаем (33). Следствие доказано.

Одна из стандартных норм в пространстве $H^1(\Omega)$ задаётся следующим образом:

$$|x|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla x(\nu)|_n^2 \, d\nu + |x|_H^2\right)^{1/2}.$$

В таком случае имеет место

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы равномерно по всем $h \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\max_{t \in T} \left\{ |x^h(t) - y(t)|_H^2 + \int\limits_0^t |x^h(s) - y(s)|_{H^1(\Omega)}^2 \, ds \right\} \leqslant d_4\Phi(h).$$

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре, при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2023-913.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casas E., Ryll C., Tröltzsch F.* Sparse optimal control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems // Comput. Methods in Appl. Math. 2014. V. 13. № 1. P. 415–442.
2. *Buchholz R., Engel H., Kanimann E., Tröltzsch F.* On the optimal control of the Schlögl-model // Comput. Optimization and Appl. 2013. V. 56. № 1. P. 153–185.
3. *Rull K., Lober J., Martems S., Engel H., Tröltzsch F.* Analytical, optimal, and Sparse optimal control of traveling wave solutions to reaction-diffusion systems. Control and self-organizing nonlinear systems / Eds. F. Scholl, S.H.L. Klapp, P. Hovel. Cham, 2016. P. 189–210.
4. *Cordoni F., Persio L.D.* Optimal control for the stochastic Fitzhugh–Nagumo model with recovery variable // Evolution Equat. and Control Theory. 2018. V. 7. № 4. P. 571–585.
5. *Bretten T., Kunisch K.* Riccati-based feedback control of the monodomian equations with the FitzHugh–Nagumo model // SIAM J. Control and Optimization. 2014. V. 52. № 6. P. 4057–4081.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
7. *Kwakernaak H.* H_2-optimization theory and applications control design // Ann. Rev. in Control. 2002. V. 26. № 1. P. 45–56.
8. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М., 2002.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе матричных неравенств. М., 2007.
10. *Chen W.H., Yang J., Guo L., Li H.* Disturbance-observer-based-control and related methods: an overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2015. V. 63. № 2. P. 1083–1095.

11. *Guo B.Z., Liu J.J., Al-Fhaid A.S., Younas A.M., Asiri A.* The active disturbance rejection approach to stabilization of coupled heat and ODE system subject to boundary control matvhed disturbance // Int. J. of Control. 2015. V. 88. № 8. P. 1554–1564.
12. *Ke Z., Logemann H., Rebarber R.* Approximate tracking and disturbance rejection for stable infinite-dimensional systems using sampled-data low-gain control // SIAM J. of Control and Optimization. 2009. V. 48. № 1. P. 641–671.
13. *Pisano A., Orlov Y.V., Usai L.* Tracking control of the uncertain heat and wave equation via power-fractional and sliding-mode techniques // SIAM J. Control and Optimization. 2011. V. 49. № 1. P. 363–382.
14. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры в системах с последействием // Докл. АН СССР. 1975. Т. 196. № 4. С. 761–768.
15. *Осипов Ю.С.* Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 42. № 2. С. 341–346.
16. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М., 2009.
17. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 18–30.
18. *Осипов Ю.С., Максимов В.И.* Отслеживание решения нелинейного распределённого дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычислит. математики. 2018. Т. 21. № 2. С. 201–213.
19. *Maksimov V.* Some problems of guaranteed control of the Schlögl and FitzHugh–Nagumo systems // Evolution Equat. and Control Theory. 2017. V. 6. № 4. P. 559–586.
20. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985.
21. *Ушаков В.Н.* К построению стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
22. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М., 2004.
23. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London, 1995.
24. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М., 1999.
25. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.
После доработки 21.06.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1533–1540

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ

© 2023 г. А. А. Мельникова, П. А. Точилин

Рассматривается линейно-выпуклая управляемая система, задаваемая совокупностью дифференциальных уравнений, с непрерывными матричными коэффициентами. В системе могут быть управляющие параметры, а также неопределённости (помехи), на возможные значения которых наложены жёсткие поточечные ограничения. Для данной системы на конечном отрезке времени с учётом ограничений исследуется задача гарантированного попадания на целевое множество из заданной начальной позиции, несмотря на действие помехи. Основным этапом решения задачи является построение альтернированного интеграла и множества разрешимости. Для построения последнего наибольшую вычислительную сложность представляет вычисление геометрической разности целевого множества и множества, определяемого помехой. Рассматривается двумерный пример указанной задачи, для которого предлагается способ нахождения множества разрешимости без необходимости овыпукления разности опорных функций множеств.

DOI: 10.31857/S0374064123110080, EDN: PEOZOC

Введение. В настоящей работе обсуждается задача гарантированного попадания на целевое множество в момент времени t_1, несмотря на действие помехи, для линейной управляемой системы
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$
с непрерывными матричными коэффициентами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$; управление $u(t) \in \mathsf{P}(t)$, помеха $v(t) \in \mathsf{Q}(t)$, где $\mathsf{P}(t)$, $\mathsf{Q}(t)$ – непрерывные многозначные отображения, принимающие значения во множестве выпуклых компактов (непрерывность понимается в смысле метрики Хаусдорфа). Задачи такого типа исследовались в работах [1, 2] и остаются актуальными [3, 4]. Часто используемый метод решения задачи целевого управления состоит в построении вспомогательных множеств разрешимости и далее в синтезе управлений за счёт "прицеливания" на такие множества [5]. Для нахождения множества разрешимости могут быть использованы разные подходы, одним из которых является альтернированный интеграл Понтрягина [6]. В этом случае задача сводится к интегрированию многозначных отображений. Альтернативным подходом является применение методов динамического программирования с помощью функции цены. Множество разрешимости является нулевым множеством уровня функции цены, а эта функция может быть найдена как решение (вообще говоря, обобщённое) уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса [7, с. 42]. Известно, что в случае без неопределённости значение функции цены в любой точке совпадает с расстоянием от точки до множества разрешимости [8, с. 20–34], однако в случае с помехой этот вопрос изучен недостаточно.

В данной работе для заданных на $\mathbb{R}^2$ целевого множества M и множества допустимых значений помехи Q, где M, Q – непустые выпуклые компактные множества, рассмотрен пример решения задачи в случае, когда на положение системы может влиять только помеха. Предложена гипотеза, позволяющая выполнить замену наиболее вычислительно трудной части многозначного интеграла выражением без овыпукления геометрической разности, а также представлено выражение для получающейся в результате функции цены. Вычисления выполнены с привлечением аппарата многозначного анализа [2, 9, 10].

1. Постановка задачи. Сведём систему (1) к линейно-выпуклой управляемой системе
$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

с жёсткими ограничениями (новыми) на помеху и управление

$$u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{Q}(t). \tag{3}$$

Вектор $x(t) \in \mathbb{R}^2$ задаёт положение системы, $u(t)$, $v(t)$ – управление и помеха соответственно, $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$ – непрерывные многозначные отображения, принимающие значения во множестве выпуклых компактов $\mathbb{R}^2$ (далее обозначено $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$). Непрерывность понимается в смысле метрики Помпейю–Хаусдорфа [10] (расстояния Хаусдорфа) $h(A,B)$ между замкнутыми ограниченными множествами A, B пространства $\mathbb{R}^2$:

$$h(A,B) = \inf_{r>0}\{A \subseteq B + \mathcal{B}_r(0,0), B \subseteq A + \mathcal{B}_r(0,0)\},$$

где $\mathcal{B}_r(0,0)$ – шар радиуса r с центром в начале координат.

Для системы (2) с учётом ограничений (3) рассмотрим задачу гарантированного попадания на целевое множество $M \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ в момент времени t_1, несмотря на действие помехи.

Определение 1. *Множество разрешимости в момент времени* τ $\mathbf{W}[\tau] = \mathbf{W}(\tau, t_1, M)$ системы (2) с ограничением (3) содержит все точки (τ, x_τ) такие, что решения системы $\dot{x}(t) \in \in \mathcal{P}(t) + v(t)$, выпущенные из точки (τ, x_τ), $t_0 \leqslant \tau < t_1$, достигают множества M в момент времени t_1, а именно, найдётся допустимая многозначная стратегия $u(t,x) \subset \mathcal{P}(t)$ такая, что для любого возмущения $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ будет выполнено $x(t_1) \in M$.

Под *допустимым управлением* понимается такое многозначное отображение $u(t,x)$, что после его подстановки в систему дифференциальных уравнений будет получено многозначное включение, имеющее решения при любом начальном условии.

На промежутке $t \leqslant \tau \leqslant t_1$ рассмотрим совокупность длин отрезков разбиения

$$\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}, \quad t = \vartheta_k, \ldots, \vartheta_1, \quad \vartheta_0 = t_1, \quad \sigma_i > 0, \tag{4}$$

$$\vartheta_j = t_1 - \sum_{i=1}^{j} \sigma_i. \tag{5}$$

Для k-го шага множество разрешимости может быть найдено по формуле

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = \left(W[\vartheta_{k-1}] + \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(\left(\left(\left(\left(\left(M + \int\limits_{\vartheta_1}^{t_1} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) + \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) + \ldots\right) +$$

$$+ \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = \mathcal{I}(t, t_1, M, \Sigma_k),$$

где знак “ $\dot{-}$ ” означает геометрическую разность множеств (см. определение 3). Предполагается, что множества разрешимости $W(\cdot)$ не пусты на каждом шаге. Предел множеств $W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}])$ при стремлении диаметра разбиения отрезка $[t, t_1]$ к нулю совпадает с множеством $\mathbf{W}[t]$.

Определение 2. *Альтернированный интеграл Понтрягина* $\mathcal{I}(t, t_1, M)$ есть интеграл $\mathcal{I}(t, t_1, M, \Sigma_k)$ при $\max\limits_{i=\overline{1,k}}\{\sigma_i\} \to 0$, $k \to \infty$.

Тогда $\mathbf{W}[t] = \mathbf{W}(t, t_1, M) = \mathcal{I}(t, t_1, M)$.

В статье будет рассмотрен пример задачи построения множества разрешимости в пространстве $\mathbb{R}^2$, когда M – единичный шар, $\mathcal{P}(t) = 0$, помеха $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}$ – вертикальный единичный отрезок, не зависящий от времени. Также получено уравнение, которому удовлетворяет расстояние до множества разрешимости. Для упрощения промежуточных соотношений выберем $t_1 = 0$.

Рассматриваемая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{6}$$

$$v(t) \in \mathcal{Q} = 0 \times [-1, 1], \tag{7}$$

целевое множество $M = \mathcal{B}_1(0,0)$.

Дадим далее необходимые определения.

Определение 3. *Геометрическая разность* множеств A, B пространства $\mathbb{R}^2$ есть множество

$$A \dot{-} B = \{c : c + B \subseteq A\}.$$

Определение 4. *Опорная функция* $\rho(l|X)$ множества X из пространства $\mathbb{R}^2$ определяется по формуле

$$\rho(l|X) = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle.$$

Опорные функции единичного шара и вертикального единичного отрезка соответственно равны $\rho(l|M) = \|l\|$ и $\rho(l|Q) = |l_2|$. При $t_1 = 0$ множество разрешимости в момент времени $t \leqslant 0$ имеет вид

$$W[t] = M \dot{-} (-t)\mathcal{Q} = \\ = \mathcal{B}_1(0, -t) \bigcap \mathcal{B}_1(0, t). \tag{8}$$

При $t < 0$ оно представляет собой горизонтальную лунку (рис. 1).

Лунка и прямые

$$x_2 = \pm t \pm \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} x_1$$

делят плоскость на области G_0, $G_1^{\pm}$, $G_2^{\pm}$ (рис. 2).

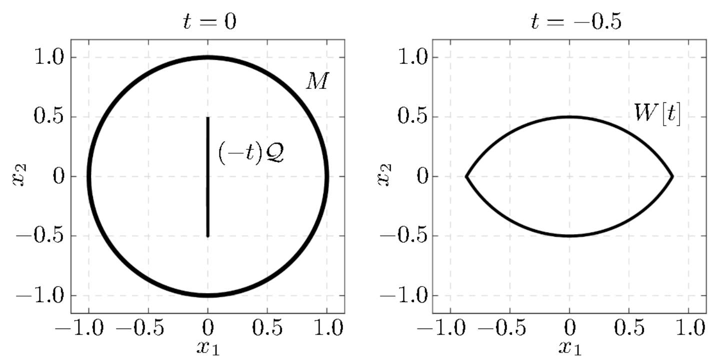

Рис. 1. Целевое множество и помеха. Множество разрешимости в момент времени t.

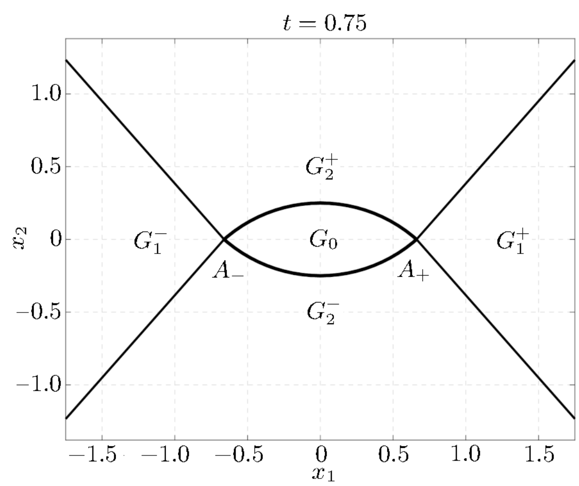

Рис. 2. Множество разрешимости и границы областей.

2. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции расстояния до множества разрешимости. Рассмотрим функцию цены

$$\mathcal{V}(t,x)=\max_{x(\cdot)}\{d(x(t_1),M): x(\cdot)\in\mathcal{X}(\cdot)\},$$

где $\mathcal{X}(\cdot)$ – множество всех траекторий – решений задачи $\dot{x}\in\mathcal{Q}(\tau)$, $x(t_0)=x$. Известно, что в точках дифференцируемости функция цены $\mathcal{V}(t,x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t}+\max_{v\in Q}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},v\right)=0, \tag{9}$$

где

$$\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},v\right)=\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2}v_2.$$

Выберем функцию $V(t,x)=d(x,W[t])$, равную расстоянию до множества разрешимости, и подставим её в уравнение (9).

В области G_0

$$V(t,x)=0,\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{\partial V}{\partial x_2}=0,$$

функция цены удовлетворяет уравнению (9).

В области G_1^+ $V(t,x)=\|x-A_+(t)\|$, $A_+=(\sqrt{1-t^2},0)$. Обозначив $\vartheta(t)=\sqrt{1-t^2}$, получим соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{(x_1-\vartheta)t}{V\vartheta},\quad \frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{x_1-\vartheta}{V},\quad \frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{x_2}{V},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|=\frac{t(x_1-\vartheta)}{\vartheta V}+\frac{|x_2|}{V}=\frac{x_1t+\vartheta(|x_2|-t)}{\vartheta V}\neq 0.$$

Видно, что равенство (9) не верно.

В области G_2^+ $V(t,x)=0\vee\|x-B_+(t)\|+1$, $B_+(t)=(0,t)$, $V(t,x)=\sqrt{x_1^2+(x_2-t)^2}+1$ и

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{t-x_2}{\sqrt{x_1^2+(x_2-t)^2}},\quad \frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{x_1}{V},\quad \frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{x_2-t}{V}.$$

Подставив частные производные в уравнение (9), будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|=\frac{t-x_2}{\sqrt{x_1^2+(x_2-t)^2}}+\frac{|x_2-t|}{V}=0.$$

Для области G_1^- при помощи аналогичных рассуждений можно показать, что уравнение (9) не выполнено. В области G_2^- равенство будет верно.

Замечание 1. Проверка выполнения уравнения (9) имеет смысл лишь для точек, в которых функция $V(t,x)$ дифференцируема. Функция $V(t,x)$ не является дифференцируемой на границе между областями G_0 и G_2^+, включая точки $A_\pm$ (аналогично между областями G_0 и G_2^-), а также на границе между областями $G_1^\pm$, $G_2^\pm$.

3. Переход к модифицированной задаче.

Определение 5. Пусть $M\subseteq\mathbb{R}^2$ – выпуклое замкнутое множество, $\mathcal{Q}$ – такое множество, что $M\dot{-}\mathcal{Q}\neq\varnothing$. Множество $\operatorname{str}\operatorname{co}_M\mathcal{Q}=M\dot{-}(M\dot{-}\mathcal{Q})$ называется *M-сильно выпуклой оболочкой множества $\mathcal{Q}$*.

Обобщим понятие сильно выпуклой оболочки. В предположении существования числа $\sigma_0>0$ такого, что $M\dot{-}\sigma_0\mathcal{Q}\neq\varnothing$, дадим следующее

Определение 6. Пусть $M \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}$ – произвольное множество. Выпуклый компакт $\hat{\mathcal{Q}}$ называется *предельной M-сильно выпуклой оболочкой множества* $\mathcal{Q}$, если

$$\lim_{\sigma \to 0+} h(\hat{\mathcal{Q}}, \sigma^{-1} \operatorname{str} \operatorname{co}_M \sigma \mathcal{Q}) = 0.$$

Предельная M-сильно выпуклая оболочка множества $\mathcal{Q}$ далее обозначается $\lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M \mathcal{Q}$.

3.1. Множество разрешимости. На интервале $t \leqslant \tau \leqslant t_1$ снова рассмотрим совокупность длин отрезков разбиения $\Sigma_k = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ (см. (4), (5)). Множество разрешимости для k-го шага определяется по формуле

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) =$$

$$= \left(\left(\left(M \dot{-} \int\limits_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau\right) \dot{-} \ldots\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau,$$

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = (((M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}) \dot{-} \sigma_2 \mathcal{Q}) \dot{-} \ldots) \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q}. \quad (10)$$

При вычислении множества разрешимости с $\mathcal{P} = \{0\}$ и постоянной помехой на каждом шаге возникают выражения вида $M \dot{-} \sigma \mathcal{Q}$, где σ – длина временно́го отрезка. Пользуясь свойствами геометрической разности (см., например, [9, с. 22–23]), можно показать, что $\sigma \mathcal{Q} \subseteq$ $\subseteq M \dot{-} (M \dot{-} \sigma \mathcal{Q})$. С применением этого свойства получим

$$M \dot{-} (M \dot{-} (M \dot{-} \sigma \mathcal{Q})) = M \dot{-} \sigma \mathcal{Q}.$$

С учётом этого запишем выражение для множества разрешимости (10):

$$W[\vartheta_k] = W(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, W[\vartheta_{k-1}]) = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q} = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \operatorname{str} \operatorname{co}_{W[\vartheta_{k-1}]} \sigma_k \mathcal{Q}. \quad (11)$$

Множества $\operatorname{str} \operatorname{co}_{W[\vartheta_j]} \sigma \mathcal{Q}$, $j = \overline{0, k}$, представляют собой вертикальные лунки.

Множество $\operatorname{str} \operatorname{co}_M \sigma_1 \mathcal{Q} = M \dot{-} (M \dot{-} \int_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}\, d\tau) = M \dot{-} (M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q})$ – вертикальная лунка, составленная из двух частей круга M; по оси x_1 ограничено значениями $\pm(1 - \sqrt{1 - \sigma_1^2})$, по x_2 – значениями $\pm \sigma_1$. По построению $M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}$ полностью выметает множество M, т.е. $(M \dot{-} (M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q})) + (M \dot{-} \sigma_1 \mathcal{Q}) = M$.

Для k-го шага множество

$$\operatorname{str} \operatorname{co}_{W[\vartheta_{k-1}]} \sigma_k \mathcal{Q} = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \left(W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}\, d\tau\right) = W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} (W[\vartheta_{k-1}] \dot{-} \sigma_k \mathcal{Q})$$

является вертикальной лункой, ограниченной по оси x_1 значениями

$$\pm \phi_k = \pm\left(\sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i\right)^2}\right),$$

по оси x_2 – значениями $\pm \sigma_k$ (рис. 3). Множество разрешимости на k-м шаге $W[\vartheta_k]$ – это горизонтальная лунка, ограниченная по оси x_1 значениями $\pm \sqrt{1 - (\sum_{i=1}^{k} \sigma_i)^2}$, а по оси x_2 – значениями $\pm(1 - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i)$.

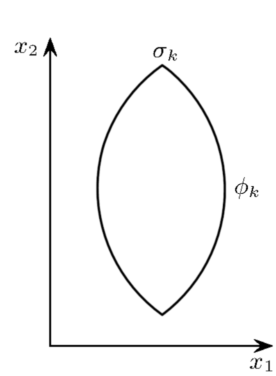

Рис. 3. Множество $\operatorname{str} \operatorname{co}_{W[\vartheta_{k-1}]} \sigma_k \mathcal{Q}$.

Рассмотрим произвольное разбиение Σ_k, $\max\limits_{i=\overline{1,k}} \{\sigma_i\} \to 0$, $k \to \infty$.

Множество разрешимости при $t_1 = 0$ есть

$$W[t] = M \dot{-} \int\limits_{t}^{0} \mathcal{Q}\, d\tau = M \dot{-} \operatorname{str} \operatorname{co}_M (-t) \mathcal{Q},$$

последнее равенство получено с применением формулы (11). Это вертикальная лунка, ограниченная по оси x_1 значениями $1 \pm \sqrt{1-t^2}$, по оси x_2 – значениями $\pm t$.

Покажем, что интеграл по тому же временно́му отрезку множества $\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M \mathcal{Q}$ при подстановке вместо $\mathcal{Q}$ даёт для рассматриваемой задачи то же множество разрешимости.

Лемма 1. *Множество $\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_M \mathcal{Q}$ для задачи (6) с ограничением (7) имеет форму ромба с диагоналями, параллельными осям координат.*

Доказательство. По определению предельной сильно выпуклой оболочки

$$\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \tau\mathcal{Q}} \mathcal{Q} = \lim_{\sigma\to 0+} \frac{1}{\sigma}[(M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} ((M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} \sigma\mathcal{Q})],$$

где τ – длина временно́го отрезка. Предполагаем, что τ такое, что $\lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \tau\mathcal{Q}} \mathcal{Q} \neq \varnothing$. Множество $(M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} ((M \dot{-} \tau\mathcal{Q}) \dot{-} \sigma\mathcal{Q})$ – вертикальная лунка, полученная сдвигом единичного круга вдоль оси x_1, ограниченная по оси x_1 значениями $\pm(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-(\tau+\sigma)^2})$, по x_2 – значениями $\pm\sigma$. Для предельного множества по оси x_1

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma}(\sqrt{1-\tau^2} - \sqrt{1-(\tau+\sigma)^2}) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

По оси x_2

$$\lim_{\sigma\to 0+} \frac{1}{\sigma}\sigma = 1.$$

Эти точки соединены прямой. Получаем, что $\hat{\mathcal{Q}}$ – ромб, задаваемый прямыми

$$x_2 = \pm\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x_1 \pm 1,$$

с опорной функцией

$$\rho(l|\hat{\mathcal{Q}}) = \max\left\{\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}l_1\right|, |l_2|\right\}. \tag{12}$$

Лемма доказана.

Найдём значение интеграла по временно́му отрезку от множества $\hat{\mathcal{Q}}$.

Лемма 2. *Интеграл*

$$\int_t^0 \max\left\{|l_1|\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, |l_2|\right\} d\tau \tag{13}$$

совпадает с вертикальной лункой, опорная функция в направлении (l_1, l_2) $l_1^2+l_2^2=1$, которой равна

$$\begin{cases} 1-\sqrt{1-t^2}\,l_1, & l_1 \geqslant 0,\\ 1+\sqrt{1-t^2}\,l_1, & l_1 < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимо рассмотреть выражение под интегралом в зависимости от знаков величин l_1, l_2. Прямым подсчётом получаем при $l_1 \geqslant 0$ и $l_2 \geqslant 0$

$$\int_t^0 \max\left\{l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, l_2\right\} d\tau = \int_t^{l_2+t} l_2\,d\tau + \int_{l_2+t}^0 l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}\,d\tau =$$

$$= l_2^2 + l_1(-\sqrt{1-(\tau-t)^2}|_{l_2+t)}^0) = l_2^2 + l_1^2 - \sqrt{1-t^2}\,l_1 = 1 - \sqrt{1-t^2}\,l_1.$$

Аналогичный результат имеет место и для $l_1 \geqslant 0$, $l_2 < 0$.

При $l_1 < 0,\ \ l_2 > 0$

$$\int\limits_t^0 \max\left\{ -l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}, l_2\right\} d\tau = \int\limits_0^{l_2} l_2\, d\tau + \int\limits_{l_2}^t -l_1\frac{\tau-t}{\sqrt{1-(\tau-t)^2}}\, d\tau = 1+\sqrt{1-t^2}\, l_1.$$

Для $l_1 < 0$ и $l_2 < 0$ интеграл (13) также равен $1+\sqrt{1-t^2}\, l_1$.

Значение интеграла от опорной функции ромба (12) совпадает со значением опорной функции к вертикальной лунке, полученной пересечением множеств (единичных кругов) – сдвигов единичного круга вдоль оси x_1 на $\sqrt{1-t^2}$ и $-\sqrt{1-t^2}$.

Таким образом, значение интеграла (13) совпадает с $\operatorname{str}\operatorname{co}_M(-t)\mathcal{Q}$. Лемма доказана.

С учётом доказанной леммы можно перейти к задаче с заменой множества $\mathcal{Q}$ на $\hat{\mathcal{Q}} = \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M\mathcal{Q}$.

Теорема 1. *Множество разрешимости $W[t]$ (8) задачи (6) с ограничением (7) совпадает со множеством разрешимости, полученным из $M \dot{-} \int_t^0 \rho(l|\hat{\mathcal{Q}})$, где опорная функция $\rho(l|\hat{\mathcal{Q}})$ может быть найдена из (12).*

3.2. Уравнение для функции цены.

Теорема 2. *Функция $V(t,x) = d(x, W[t])$ удовлетворяет уравнению (9), в котором помеха берётся из $\lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M\mathcal{Q}$.*

Доказательство. Проверим это для каждой из областей G_0, G_1^+, G_2^+. В области G_0 уравнение выполняется в силу равенства частных производных нулю. В области G_1^+ для опорной функции множества $\hat{\mathcal{Q}}$ справедливо выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}\right|, \left|\frac{x_2}{V(t,x)}\right|\right\}.$$

При $x_2 \geqslant 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}, \frac{x_2}{V(t,x)}\right\} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}.$$

Для $x_2 < 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}, \frac{-x_2}{V(t,x)}\right\} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V(t,x)}.$$

Значит,

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \left|\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right| = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1-\vartheta}{V},$$

и, подставив в уравнение, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \frac{(x_1-\vartheta)t}{\vartheta V} + \frac{x_1-\vartheta}{V}\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

В области G_2^+ для опорной функции множества $\hat{\mathcal{Q}}$ справедливо выражение

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1}{V(t,x)}\right|, \left|\frac{x_2-t}{V(t,x)}\right|\right\}.$$

Для $x_1 \geqslant 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1}{V(t,x)}, \frac{x_2-t}{V(t,x)}\right\} = \frac{x_2-t}{V(t,x)}.$$

Для $x_1 < 0$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\middle|\hat{\mathcal{Q}}\right) = \max\left\{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{x_1}{V(t,x)}, \frac{x_2-t}{V(t,x)}\right\} = \frac{x_2-t}{V(t,x)}.$$

Таким образом,

$$\rho\biggl(\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|\hat{\mathcal{Q}}\biggr) = \left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right| = \frac{|x_2-t|}{\partial V} = \frac{x_2-t}{\partial V}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \rho\biggl(\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|\hat{\mathcal{Q}}\biggr) = \frac{t-x_2}{\partial V} + \frac{x_2-t}{\partial V} = 0.$$

Для областей G_1^- и G_2^- рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Замечание 2. Функция $V(t,x)$ не является дифференцируемой на границе между областями G_0 и G_2^+, G_0 и G_2^-, включая точки $A_\pm$, а также на границе между областями $G_1^\pm$, $G_2^\pm$ (см. замечание 1).

Заключение. В работе для конкретного примера получено представление множества $\hat{\mathcal{Q}}$ для помехи, дающее множество разрешимости, совпадающее с $W[t]$, построенное при условии принадлежности помехи множеству $\mathcal{Q}$. В модифицированной задаче не требуется овыпукления геометрической разности опорных функций множеств, возникающей в альтернированном интеграле. Получено уравнение, которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 910–912.
2. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
3. *Ухоботов В.И.* Об одной задаче управления при наличии помехи и возможной поломке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 265–278.
4. *Каплунова Е.П., Точилин П.А.* Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 21–36.
5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
6. *Куржанский А.Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.
7. *Fleming W.H., Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York, 1993.
8. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston, 1997.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2007.
10. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М., 2014.

ООО “Яндекс.Технологии”, г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне,
Китай

Поступила в редакцию 26.04.2023 г.
После доработки 26.04.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1541–1549

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ ГРАФА ДИСКРЕТНЫХ СОСТОЯНИЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. А. С. Фурсов, П. А. Крылов

Рассмотрена задача построения графа состояний переключаемой аффинной системы, замкнутой статической обратной связью по состоянию. Для решения этой задачи предложен конструктивный алгоритм, основанный на исследовании совместности систем линейных алгебраических неравенств.

DOI: 10.31857/S0374064123110092, EDN: PDPMJG

Введение. В работе [1] была исследована задача об устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^{\text{т}} x, \quad \sigma \in S(F), \tag{1}$$

замкнутой линейной статической обратной связью $u = -\theta^{\text{т}} x$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, и порождаемой множеством F всевозможных пар (N, D), задающих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$ на m выпуклых замкнутых многогранников $\overline{M}_i$. Здесь $N = [n_{ijk}]$ – трёхмерная матрица размерности $m \times m \times n$, для которой коэффициент n_{ijk} обозначает k-ю компоненту вектора нормали n_{ij} к плоскости $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_{ij}, x\rangle = d_{ij}\}$, содержащей общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$, направленного в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $d_{ij} \in \mathbb{R}$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$ – матрица из $\mathbb{R}^{m\times m}$. При этом, очевидно, $n_{ji} = -n_{ij}$, $d_{ji} = -d_{ij}$, если $n_{ij} = 0$ (в случае когда многогранники $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$ не имеют общей грани). Считаем, что $d_{ij} = d_{ji} = 1$ и для удобства полагаем $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$. Далее $S(F)$ – множество переключающих сигналов σ, где $\sigma(x; N, D) : \mathbb{R}^n \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой $(N, D) \in F$ и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \to \{A_1, \ldots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b \circ \sigma$ и $v_\sigma = v \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1, \ldots, b_m\}$, $v : I \to \{v_1, \ldots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$. Через $\Gamma(N; D)$ будем обозначать множество граничных точек разбиения, задаваемого парой $(N, D) \in F$.

С учётом введённых обозначений очевидно, что для любого $i \in I = \{1, \ldots, m\}$

$$x \in \overline{M}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{i1}, x\rangle \leqslant d_{i1}, \\ \ldots \\ \langle n_{im}, x\rangle \leqslant d_{im}, \end{cases} \qquad x \in M_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{i1}, x\rangle < d_{i1}, \\ \ldots \\ \langle n_{im}, x\rangle < d_{im}. \end{cases} \tag{2}$$

В соответствии с работой [1] для каждого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\}$, $2 \leqslant p \leqslant m$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, введём множества граничных точек $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{k\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k$. Тогда

$$\Gamma(N; D) = \bigcup_{\substack{(\alpha_1\ldots\alpha_p) \\ \alpha_1<\ldots<\alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что множества граничных точек $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ произвольного разбиения (N,D) могут быть описаны на языке линейных неравенств [2, с. 9] следующим образом:

$$x \in \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} & \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \text{ и } h \in I\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} & \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}. \end{cases} \tag{4}$$

Значение функции $\sigma(x;N,D)$ в каждой точке $x \notin \Gamma(N;D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования переключаемой системы (1), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = A_i x + v_i - b_i\theta^{\text{т}} x, \quad i \in I. \tag{5}$$

Доопределение значения переключающего сигнала на множестве $\Gamma(N;D)$ зависит от выбора обратной связи $u = -\theta^{\text{т}} x,$ которая в статье [1] определена как допустимая, если выполнено следующее

Условие А. Для любой пары $(N,D) \in F$ и любого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ $(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \neq \varnothing)$ верно, что для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\},$ для которого $n_{\alpha_i\alpha_k} \neq 0,$ выполняется неравенство

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle < 0.$$

Здесь $\overline{A}_{\alpha_i} = A_{\alpha_i} - b_{\alpha_i}\theta^{\text{т}}.$

Как показано в работе [1], при выполнении условия А в каждой точке границы многогранников можно так доопределить значения переключающего сигнала на границе, что для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ соответствующее решение системы (1) существует и единственно [3, с. 59].

Нулевое решение замкнутой переключаемой системы (1) считаем (см. [1]) глобально равномерно устойчивым, если для любого фиксированного $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

В [1] сформулирована и доказана теорема о достаточном условии глобальной равномерной устойчивости нулевого решения замкнутой системы (1) при заданной допустимой обратной связи $u = -\theta^{\text{т}} x.$ При этом одним из условий проверки выполнения условий указанной теоремы является возможность построения графа дискретных состояний для рассматриваемой замкнутой переключаемой аффинной системы при любом переключающем сигнале $\sigma \in S(F).$ Напомним, что в [1] каждому переключающему сигналу $\sigma \in S(F)$ системы (1), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\text{т}} x,$ был сопоставлен ориентированный граф дискретных состояний $G(\sigma),$ вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \to j$ означает существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом $j.$ Настоящая статья посвящена разработке конструктивного метода построения таких графов дискретных состояний и фактически её можно считать продолжением работы [1].

1. О построении графа дискретных состояний. Рассмотрим теперь вопрос о возможной численной реализации алгоритма построения графа дискретных состояний замкнутой системы (1) для любого фиксированного $\sigma \in S(F).$ Основные шаги данного алгоритма опираются на следующие результаты.

Лемма. *Пусть степенной ряд*

$$\sum_{l=1}^{+\infty} a_l t^l \tag{6}$$

сходится на некотором отрезке $[-\delta, 0].$ *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

1) существует значение $\varepsilon \in (0,\delta)$ *такое, что для любого* $t \in [-\varepsilon, 0)$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{l=1}^{+\infty} a_l t^l < 0; \tag{7}$$

2) существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(-1)^q a_q < 0 \quad \text{и} \quad a_l = 0 \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant l < q.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие 1), тогда ряд (6) не равен тождественно нулю. Обозначим через q индекс первого ненулевого коэффициента. Тогда при всех $t \in [-\delta, 0)$ справедливо представление

$$\sum_{l=1}^{+\infty} a_l t^l = a_q t^q + \overline{o}(t^q). \tag{8}$$

Отсюда имеем $a_q t^q + \overline{o}(t^q) < 0$ при всех $t \in [-\varepsilon, 0)$. Но для достаточно малых по модулю t выполняется неравенство $|\overline{o}(t^q)| < |a_q t^q|$, а следовательно, знак ряда для этих t определяется знаком слагаемого $a_q t^q$, и так как $t < 0$, получаем $(-1)^q a_q < 0$. Таким образом, условие 2) выполнено.

Пусть теперь выполнено условие 2). Так как $a_l = 0$ для любого $l < q$, то для ряда (6) при всех $t \in [-\delta, 0)$ справедливо представление (8). При этом $a_q t^q < 0$ при $t < 0$, так как $(-1)^q a_q < 0$. Остаётся заметить, что всегда найдётся достаточно малое $\varepsilon \in [-\delta, 0)$ такое, что на промежутке $[-\varepsilon, 0)$ будет выполнено неравенство $|\overline{o}(t^q)| < |a_q t^q|$, а следовательно, на этом же промежутке будет выполнено и неравенство (7). Таким образом, условие 1) выполнено. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть система (1) замкнута допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$. Тогда для переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$, задаваемого разбиением $(N, D) \in F$, существует траектория, при движении вдоль которой режим γ сменяется режимом δ тогда и только тогда, когда найдётся набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\})$ такой, что:*

1) существуют $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $\alpha_i = \gamma$, $\alpha_j = \delta$;

2) $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \neq \varnothing$;

3) $\sigma(\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}; N, D) = \alpha_j = \delta$;

4) существуют $q_{k_1}, \ldots, q_{k_r} \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что совместна система (т.е. существует хотя бы одно решение $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases}
\langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h} \ \text{при всех}\ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \text{и}\ h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\
\langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \ \ \text{при всех}\ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \text{и}\ g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\
\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\
\vdots \\
\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}-1} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\
(-1)^{q_{k_1}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_1}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\
\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\
\vdots \\
\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}-1} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\
(-1)^{q_{k_2}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_2}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\
\vdots \\
\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\
\vdots \\
\langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}-1} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}-2} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\
(-1)^{q_{k_r}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}} x + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_r}-1} v_{\alpha_i} \rangle < 0,
\end{cases} \tag{9}$$

где $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_r}\} = L^{\alpha_i}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1 \ldots \alpha_p\} : l \neq i,\ \ n_{\alpha_i \alpha_l} \neq 0\}$.

Доказательство. Действительно, пусть для разбиения $(N, D) \in F$ системы (1), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$, существует траектория $x(t)$, вдоль которой режим

γ сменяется режимом δ. Тогда эта траектория должна содержать некоторую точку $x_* = x(t_*) \in (\overline{M}_\gamma \bigcap \overline{M}_\delta) \subset \Gamma(N;D)$ такую, что $x(t) \in M_\gamma$ при $t \in [t_* - \varepsilon, t_*)$ и $x(t) \in M_\delta$ при $t \in (t_*, t_* + \varepsilon]$ для некоторого достаточно малого ε. В силу (3) точка x_* принадлежит некоторому множеству $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, где набор $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ содержит γ и δ (следует из определения $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$). При этом $\sigma(x_*;N,D) = \delta$, а тогда $\sigma(\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p};N,D) = \delta$ (см. [1]). Теперь рассмотрим решение $x(t)$ при $t \in [t_* - \varepsilon, t_*)$. На этом промежутке переключающий сигнал принимает значение γ, следовательно, на нём для каждого $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ выполняется неравенство $\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x(t)\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}$.

Рассмотрим функцию

$$g(t) = e^{\overline{A}_\gamma(t-t_*)}x_* + \int\limits_{t_*}^{t} e^{\overline{A}_\gamma(t-\tau)}v_\gamma\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

которую разложим в ряд Тейлора в окрестности $t = t_*$:

$$g(t) = x_* + \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(t-t_*)^l}{l!}\frac{d^lg}{dt^l}\bigg|_{t=t_*}, \tag{11}$$

где

$$\frac{d^lg}{dt^l}\bigg|_{t=t_*} = \bigg[\overline{A}^l_\gamma e^{\overline{A}_\gamma(t-t_*)}x_* + \overline{A}^{l-1}_\gamma v_\gamma + \overline{A}^l_\gamma\int\limits_{t_*}^{t} e^{\overline{A}_\gamma(t-\tau)}v_\gamma\,d\tau\bigg]\bigg|_{t=t_*} = \overline{A}^l_\gamma x_* + \overline{A}^{l-1}_\gamma v_\gamma.$$

Учитывая, что $g(t_*) = x_*$ и

$$\frac{dg}{dt} = \overline{A}_\gamma e^{\overline{A}_\gamma(t-t_*)} + \overline{A}_\gamma\int\limits_{t_*}^{t} e^{\overline{A}_\gamma(t-\tau)}v_\gamma\,d\tau + v_\gamma = \overline{A}_\gamma g(t) + v_\gamma,$$

получаем, что $x(t) \equiv g(t)$ на промежутке $[t_* - \varepsilon, t_*)$. Отсюда, ввиду $\alpha_i = \gamma$, следует, что на рассматриваемом промежутке выполняется неравенство $\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, g(t)\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}$, которое, в силу разложения (11), можно записать в виде

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x_*\rangle + \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(t-t_*)^l}{l!}\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i}\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}.$$

Поскольку $\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x_*\rangle = d_{\alpha_i\alpha_k}$, получаем

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(t-t_*)^l}{l!}\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i}\rangle < 0. \tag{12}$$

Согласно сформулированной лемме последнее неравенство выполнено на всём промежутке $[t_* - \varepsilon, t_*)$ тогда и только тогда, когда найдётся некоторое натуральное число q_k такое, что

$$(-1)^{q_k}\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^{q_k}_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{q_k-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i}\rangle < 0 \quad \text{и} \quad \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}x_* + \overline{A}^{l-1}_{\alpha_i}v_{\alpha_i}\rangle = 0$$

для всех $1 \leqslant l < q_k$. Заметим, что q_k не превосходит n. Действительно, пусть

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^l_{\alpha_i}(\overline{A}_{\alpha_i}x_* + v_{\alpha_i})\rangle = 0, \quad l \in \{0,\ldots,n-1\},$$

и $\chi_{A_{\alpha_i}}(s) = s^n + \lambda_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \lambda_1 s + \lambda_0$ – характеристический многочлен матрицы A_{α_i}. Тогда, в силу теоремы Гамильтона–Кели, имеем соотношения

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}^n_{\alpha_i}(\overline{A}_{\alpha_i}x_* + v_{\alpha_i})\rangle = -\bigg\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l\overline{A}^l_{\alpha_i}(\overline{A}_{\alpha_i}x_* + v_{\alpha_i})\bigg\rangle =$$

$$= -\sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i}^l (\overline{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i})\rangle = 0.$$

Аналогично можно показать, что при всех $l > n$ будут верны равенства

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i}^l (\overline{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i})\rangle = 0.$$

Но в этом случае получим, что левая часть неравенства (12) обращается в нуль. Противоречие. Следовательно, $q_k \in \{1, \ldots, n\}$ и точка x^* является решением системы (9). Необходимость условия теоремы доказана.

Пусть теперь x_* – решение системы неравенств (9). Зафиксируем произвольное $t_* > 0$. Тогда для любого $\alpha_k \in L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}^{\alpha_i}$ в силу леммы найдётся некоторое малое число $\varepsilon > 0$ такое, что $t_* - \varepsilon > 0$ и для любого $t \in [t_* - \varepsilon, t_*]$ верно неравенство

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t - t_*)^l}{l!} \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i}^l x_* + \overline{A}_{\alpha_i}^{l-1} v_{\alpha_i}\rangle < 0.$$

Так как x_* – решение системы (9), то $x_* \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, а значит, $\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x_*\rangle = d_{\alpha_i\alpha_k}$. Поэтому

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, x_*\rangle + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t - t_*)^l}{l!} \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i}^l x_* + \overline{A}_{\alpha_i}^{l-1} v_{\alpha_i}\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}.$$

При этом бесконечная сумма

$$x_* + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(t - t_*)^l}{l!} (\overline{A}_{\alpha_i}^l x_* + \overline{A}_{\alpha_i}^{l-1} v_{\alpha_i})$$

является рядом Тейлора для функции $g(t)$, определённой формулой (10), в окрестности точки t_*, поэтому для любого $\alpha_k \in L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}^{\alpha_i}$ получаем

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, g(t)\rangle < d_{\alpha_i\alpha_k}. \tag{13}$$

Покажем, что найдётся достаточно малое $\xi \in (0, \varepsilon)$ такое, что $g(t) \in M_{\alpha_i}$ для любого $t \in [t_* - \xi, t_*)$. Действительно, согласно (2)

$$x \in M_{\alpha_i} \Leftrightarrow \langle n_{\alpha_i\alpha_w}, x\rangle < d_{\alpha_i\alpha_w}, \quad w = \overline{1, m}.$$

Заметим, что в силу (4) для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ выполняются неравенства $\langle n_{\alpha_i\alpha_w}, x\rangle < d_{\alpha_i\alpha_w}$ при $w \notin L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}^{\alpha_i}$, а следовательно, они выполняются и для x_*. Поэтому в силу непрерывности функции $g(t)$ найдётся достаточно малое $\xi \in (0, \varepsilon)$ такое, что неравенства $\langle n_{\alpha_i\alpha_w}, g(t)\rangle <$ $< d_{\alpha_i\alpha_w}$ будут выполнены при всех $t \in [t_* - \xi, t_*)$ для $w \notin L_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}^{\alpha_i}$, а неравенства для $w \in \{k_1, \ldots, k_r\}$ выполнены по доказанному выше (см. (13)), так как $\xi < \varepsilon$. Таким образом, $g(t) \in M_{\alpha_i}$ при $t \in [t_* - \xi, t_*)$.

Так как $g(t)$ является решением системы (5) для режима γ, то $g(t)$ на промежутке $[t_* - \xi, t_*)$ совпадает с решением $x(t)$ задачи Коши для системы (1) при $x(t_* - \xi) = g(t_* - \xi)$, т.е. данное решение $x(t)$ лежит в области M_{α_i}, а затем при $t = t_*$ проходит через $x(t_*) = x_*$, где $\sigma(x_*, N, D) = \delta$ и далее, согласно условию 1), продолжится в область M_δ (т.е. в точке x_* произойдёт смена режима γ на режим δ). Достаточность условия теоремы доказана. Теорема доказана.

Следующее замечание позволяет упростить проверку совместности системы (9).

Замечание. Для совместности системы (9) (т.е. существования хотя бы одного решения $x \in \mathbb{R}^n$) с некоторыми q_k необходима совместность (также относительно $x \in \mathbb{R}^n$) системы

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0. \end{cases}$$

Основываясь на доказанной теореме 1, можно сформулировать основные шаги алгоритма построения графа дискретных состояний. Итак, зафиксируем некоторый переключающий сигнал $\sigma \in S(F)$ системы (1), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$. Как уже было указано выше, в соответствии с [1] множеством дискретных состояний рассматриваемой системы (1) – вершинами графа $G(\sigma)$ – считаем множество $I = \{1, \ldots, m\}$. Тогда проверку наличия ориентированного ребра (ij) можно разбить на следующие шаги:

1) формирование множества G_{ij} наборов $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ таких, что

– $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ и $\{i, j\} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$,

– $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \neq \varnothing$;

2) поиск набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \in G_{ij}$ (с помощью полного перебора), удовлетворяющего условиям теоремы 1; существование хотя бы одного такого набора означает наличие ориентированного ребра (ij) в графе дискретных состояний $G(\sigma)$.

Заметим, что реализация указанных шагов 1) и 2) сводится к проверке совместности некоторого конечного числа систем линейных неравенств. При этом отыскание всевозможных непустых множеств $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, фактически, осуществляется на этапе проверки допустимости управления $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$ (см. [1]), что облегчает формирование множества G_{ij}. Что касается второго шага алгоритма, то перебор наборов $(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \in G_{ij}$ может быть существенно сокращён, если воспользоваться сформулированным замечанием.

2. Об инвариантности графа дискретных состояний для параметризованного семейства переключающих сигналов. Приведённый выше алгоритм позволяет построить граф дискретных состояний для конкретного переключающего сигнала, заданного разбиением (N, D). Оказывается, что с небольшими модификациями полученный результат можно обобщить на случай линейно параметризованного множества переключающих сигналов. Далее описаны параметрические семейства разбиений пространства $\mathbb{R}^n$, для каждого из которых соответствующая переключаемая система (1) имеет единый граф дискретных состояний для всех переключающих сигналов.

Итак, рассмотрим параметрическое семейство разбиений

$$F = \{(N, D(\kappa))\}, \tag{14}$$

где N – фиксированная трёхмерная матрица, а $D(\kappa)$ – матрица, элементы которой линейно зависят от параметров $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$, а именно

$$d_{ij}(\kappa) = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1 \ldots \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$\Phi\kappa \leqslant \varphi, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^l,$$

для некоторого натурального l, и при этом множество $K = \{\kappa : \Phi\kappa \leqslant \varphi\}$ является компактом. В силу того, что множество K выпуклое, оно может быть представлено как выпуклая оболочка некоторого конечного числа угловых точек κ^w, $w = \overline{1, \gamma}$:

$$K = \operatorname{Conv}\{\kappa^1, \ldots, \kappa^\gamma\}.$$

Аналогично (3) для каждого $\kappa \in K$ определим множество

$$\Gamma(N; D(\kappa)) = \bigcup_{\substack{(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \\ \alpha_1 < \ldots < \alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa),$$

где каждое множество $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa)$ (при фиксированном векторе $\kappa = (\kappa_1 \ldots \kappa_r)$) состоит из точек $x \in \mathbb{R}^n$, являющихся решениями следующей системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d^0_{\alpha_s h} + d^1_{\alpha_s h}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s h}\kappa_r \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d^0_{\alpha_s g} + d^1_{\alpha_s g}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s g}\kappa_r \ \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}. \end{cases}$$

Семейство разбиений (14) будем называть Γ-*инвариантным*, если выполнено следующее

Условие Б. Если для некоторого набора $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\})$ и некоторого $\kappa^* \in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa^*)$ не пусто, то для всех $\kappa \in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa)$ не пусты. И обратно, если для некоторого набора $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \in \{1, \ldots, m\})$ и некоторого $\kappa^* \in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa^*)$ пусто, то для всех $\kappa \in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\kappa)$ пусты.

Следующая теорема даёт конструктивные условия проверки Γ-инвариантности заданного семейства разбиений (14).

Теорема 2. *Параметрическое семейство (14) удовлетворяет условию Б тогда и только тогда, когда для каждого набора* $(\alpha_1 \ldots, \alpha_p)$ *такого, что* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\}$ *и* $\alpha_1 < < \ldots < \alpha_p$, *выполнено одно из следующих условий:*

1) система линейных неравенств

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d^0_{\alpha_s h} + d^1_{\alpha_s h}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s h}\kappa_r \ \textit{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \textit{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d^0_{\alpha_s g} + d^1_{\alpha_s g}\kappa_1 + \ldots + d^r_{\alpha_s g}\kappa_r \ \textit{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \textit{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \Phi\kappa \leqslant \varphi \end{cases} \tag{15}$$

не имеет решений (относительно $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $\kappa \in \mathbb{R}^r$*);*

2) для каждой угловой точки κ^w *компакта* K *совместна (относительно* $x \in \mathbb{R}^n$*) система*

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h}(\kappa^w) \ \textit{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \textit{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g}(\kappa^w) \ \textit{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \textit{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\}$, – некоторый фиксированный набор. Тогда если для него система (15) не имеет решений, то в силу (4) при всех $\kappa \in K$ соответствующие множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(k)$ пустые.

С другой стороны, пусть для всех угловых точек κ^w совместна система (16). Тогда, в силу (4), множества $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(k^w)$ не пусты. Выберем произвольное $\kappa^* \in K$. Покажем, что множество $\Gamma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(k^*)$ не пусто. Действительно, в силу выпуклости компакта K точка κ^* может быть представлена как выпуклая комбинация его угловых точек

$$\kappa^* = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \kappa^w, \quad \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w = 1, \quad \eta_w \geqslant 0.$$

Пусть x^w – решения системы (16) для соответствующих угловых точек κ^w. Покажем, что в таком случае для выбранной точки $\kappa = \sum_w \eta_w \kappa^w$ решением системы (4) при $D = D(\kappa^*)$ будет $x^* = \sum_w \eta_w x^w$. Заметим, что выполнены следующие соотношения:

$$\langle n_{\alpha_s h}, x^*\rangle = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \langle n_{\alpha_s h}, x^w\rangle < \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w d_{\alpha_s h}(\kappa^w) = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \left(d^0_{\alpha_s h} + \sum_{k=1}^{r} d^k_{\alpha_s h}\kappa^w_k \right) = d_{\alpha_s h}(\kappa^*) \tag{17}$$

при всех $\alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, $h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ и

$$\langle n_{\alpha_s g}, x^* \rangle = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \langle n_{\alpha_s g}, x^w \rangle \leqslant \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w d_{\alpha_s g}(\kappa^w) = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \left(d^0_{\alpha_s g} + \sum_{k=1}^{r} d^k_{\alpha_s g} \kappa^w_k \right) = d_{\alpha_s g}(\kappa^*) \quad (18)$$

при всех $\alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ и $g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. Отсюда получаем, что $x^* \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(k^*)$, а следовательно, множество $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(k^*)$ не пусто. Достаточность условия теоремы доказана.

Необходимость условия следует напрямую из способа задания множеств $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ через систему линейных неравенств (см. (4)). Теорема доказана.

Теперь сформулируем и докажем основной результат, позволяющий строить граф дискретных состояний для семейства разбиений (14). А именно, справедливо следующее следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть для системы (1) с* Γ*-инвариантным множеством разбиений (14), замкнутой допустимым управлением* $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$, *найдётся набор* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, m\})$ *такой, что:*

1) существуют $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, *что* $\alpha_i = \gamma$, $\alpha_j = \delta$;

2) $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(\kappa) \neq \varnothing$ *для всех* $\kappa \in K$;

3) $\sigma(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}; N, D(\kappa)) = \alpha_j = \delta$ *для всех* $\kappa \in K$;

4) существуют $q_{k_1}, \ldots, q_{k_r} \in \{1, \ldots, n\}$ *такие, что для каждой угловой точки* κ^w *компакта* K *совместна (относительно* $x \in \mathbb{R}^n$*) система*

$$\begin{cases} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h}(\kappa^w) \ \ \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leqslant d_{\alpha_s g}(\kappa^w) \ \ \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}^{q_{k_1}-1}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_1}-2}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_1}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_1}}, \overline{A}^{q_{k_1}}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_1}-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}^{q_{k_2}-1}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_2}-2}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_2}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_2}}, \overline{A}^{q_{k_2}}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_2}-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ \vdots \\ \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}^{q_{k_r}-1}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_r}-2}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle = 0, \\ (-1)^{q_{k_r}} \langle n_{\alpha_i \alpha_{k_r}}, \overline{A}^{q_{k_r}}_{\alpha_i} x + \overline{A}^{q_{k_r}-1}_{\alpha_i} v_{\alpha_i} \rangle < 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_r}\} = L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1 \ldots \alpha_p\} : l \neq i, \ \ n_{\alpha_i \alpha_l} \neq 0\}$.

Тогда для любого разбиения $(N, D(\kappa)) \in F$ *при соответствующем переключающем сигнале* $\sigma(x; N, D(\kappa))$ *для системы (1) существует траектория, при движении вдоль которой режим* γ *сменяется режимом* δ.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\kappa \in K$. В силу выпуклости компакта K точка κ может быть представлена как выпуклая комбинация его угловых точек:

$$\kappa = \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w \kappa^w, \quad \sum_{w=1}^{\gamma} \eta_w = 1, \quad \eta_w \geqslant 0.$$

Пусть x^w – решения системы (19) для соответствующих угловых точек κ^w. Покажем, что в таком случае для выбранной точки $\kappa = \sum_w \eta_w \kappa^w$ решением системы (9) при $D = D(\kappa)$ будет

$x^* = \sum_w \eta_w x^w$. Действительно, в силу того, что выполнены неравенства (17) и (18), а также соотношения

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1}x^* + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-2}v_{\alpha_i}\rangle = \sum_{w=1}^{\gamma}\eta_w\langle n_{\alpha_i\alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1}x^w + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-2}v_{\alpha_i}\rangle = 0,$$

$$(-1)^{q_{k_l}}\langle n_{\alpha_i\alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}}x^* + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1}v_{\alpha_i}\rangle = (-1)^{q_{k_l}}\sum_{w=1}^{\gamma}\eta_w\langle n_{\alpha_i\alpha_{k_l}}, \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}}x^w + \overline{A}_{\alpha_i}^{q_{k_l}-1}v_{\alpha_i}\rangle < 0,$$

получаем, что для рассматриваемого разбиения $(N, D(\kappa))$ совместна соответствующая система (9), т.е. выполнено условие 4) теоремы 1. В силу условия Б и условий 1)–3) доказываемого утверждения для данного разбиения выполнены также условия 1)–3) теоремы 1. Таким образом, выполнены достаточные условия теоремы 1, следовательно, для рассматриваемого разбиения найдётся траектория, при движении вдоль которой режим γ сменяется режимом δ. Из произвольности выбранной точки κ следует утверждение следствия.

Основываясь на следствии, проверку наличия ориентированного ребра (ij) графа дискретных состояний $G(F)$ для некоторого семейства разбиений (14) можно разбить на следующие шаги:

1) проверка выполнения условия Б для рассматриваемого разбиения;

2) формирование множества G_{ij} наборов $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ таких, что

– $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$ и $\{i, j\} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$,

– $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa) \neq \varnothing$ для всех $\kappa \in K$;

3) поиск набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p) \in G_{ij}$ (с помощью простого перебора), удовлетворяющего условиям следствия; существование хотя бы одного такого набора означает наличие ориентированного ребра (ij) в графе дискретных состояний $G(F)$.

Заметим, что в силу доказанных утверждений реализация указанных шагов 1)–3) сводится к проверке совместности некоторого конечного числа систем линейных неравенств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Крылов П.А.* Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 4. С. 554–562.
2. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М., 1968.
3. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.
После доработки 08.06.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1550–1560

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ЛЕММА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

© 2023 г. А. В. Юрченков, И. Р. Белов

Рассмотрена дискретная стационарная система с мультипликативными шумами с реализацией в пространстве состояний. Внешнее возмущение выбрано из класса стационарных эргодических последовательностей ненулевой цветности. Уровень средней анизотропии внешнего возмущения считаем ограниченным известным значением. Получены условия ограниченности анизотропийной нормы заданным числом в терминах решения матричной системы неравенств с выпуклым ограничением специального вида. Продемонстрировано, как на основе полученных условий построить статическое управление по состоянию, обеспечивающее минимальное значение анизотропийной нормы замкнутой этим управлением системы.

DOI: 10.31857/S0374064123110109, EDN: PETMIU

Введение. Анизотропийная теория, разработанная И.Г. Владимировым, сформировалась немногим меньше тридцати лет назад [1, 2], когда появилась идея использовать стохастический подход, основанный на понятиях теории информации, для задач, связанных с $\mathcal{H}_\infty$-оптимизацией. Методы подавления влияния внешних возмущений, используемые в $\mathcal{H}_\infty$-теории, обладают большой консервативностью, поскольку рассчитаны на так называемый "наихудший" случай входного возмущения, который на практике зачастую не может быть реализован, вследствие чего может наблюдаться существенный перерасход ресурсов при отработке такого управления. С другой стороны, $\mathcal{H}_2$-оптимальные законы управления являются чувствительными к малым изменениям стохастических параметров внешнего возмущения, которое предполагается стационарным из класса гауссовских. Используемый в анизотропийной теории критерий качества – *анизотропийная норма* – величина, которая для несферичных систем всегда находится между масштабированной $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-нормой (в зависимости от свойств внешнего возмущения), т.е. анизотропийная теория может обобщить результаты как $\mathcal{H}_2$-, так и $\mathcal{H}_\infty$-подходов.

В анизотропийной теории рассматриваются как стационарные (на бесконечном временнóм горизонте), так и нестационарные (на конечном временнóм горизонте) дискретные системы [3, 4], для которых уже решены многие задачи анализа и синтеза, в том числе и с некоторыми видами неопределённости [5]. Однако сравнительно недавно в качестве объекта изучения были приняты системы с мультипликативными шумами [6]. Такой тип описания может позволить учитывать стохастическую неопределённость в модели, что потребовало разработки новых подходов к вопросам анализа таких систем [7]. Определённую трудность, связанную с численным решением систем нелинейных матричных уравнений для оптимальных постановок задач в рамках анизотропийной теории, удалось преодолеть, перейдя к субоптимальным постановкам и соответствующим численным методам на основе полуопределённого программирования [8], вследствие чего специфические для анизотропийной теории системы матричных уравнений (изначально нелинейных) могут быть сведены к задаче оптимизации с выпуклым ограничением.

Для нестационарных систем с мультипликативными шумами на основе решённой задачи анализа [9] были решены задачи оценивания [10, 11], а также предложен способ настройки схемы обмена информацией между датчиками для получения наиболее точной оценки параметров выходной последовательности [12]. Однако для стационарных систем была рассмотрена только задача анализа на основе мажоранты анизотропийной нормы [13]. В данной статье будет развита идея анализа стационарной системы с мультипликативными шумами из работы [14], после чего будет решена задача управления по состоянию в субоптимальной постановке. Задача поиска управления будет сведена к проблеме разрешимости системы матричных неравенств с минимизацией верхней границы анизотропийной нормы, замкнутой этим управлением системы.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим стационарную эргодическую последовательность $W = \{w(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ с элементами из пространства $\mathbb{R}^m$. Из элементов последовательности можно получить расширенный вектор произвольной длины (кратной m) следующим образом:

$$W_{r:s} = (w(r)^{\mathrm{T}}, w(r+1)^{\mathrm{T}}, \ldots, w(s)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad W_{r:s} \in \mathbb{R}^{m(r-s+1)}.$$

Теперь на основе такого объекта введём следующее понятие.

Определение 1 [15]. Под *средней анизотропией* стационарной эргодической последовательности случайных векторов $\{w_k\}$ понимают предельное значение усреднённой анизотропии неограниченно растущей последовательности векторов

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где

$$\mathbf{A}(W) = \inf_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2}\ln\biggl(\frac{2\pi\mathrm{e}}{m}\mathbf{E}[|W|^2]\biggr) - h(W)$$

– анизотропия случайного вектора W, f – плотность распределения вероятностей вектора W относительно лебеговой меры в $\mathbb{R}^m$, $h(W) = -\mathbf{E}[\ln f(W)] = -\int_{\mathbb{R}^m} f(w)\ln f(w)\,dw$ – дифференциальная энтропия, λ – положительный параметр, определяющий плотность

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2}\exp\biggl(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\biggr), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

изотропного гауссовского распределения в $\mathbb{R}^m$ с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m, где I_m – единичная матрица порядка m.

Последовательности, имеющие отличный от нуля уровень средней анизотропии, будем называть “*окрашенными*”. Такие последовательности можно генерировать с помощью линейной стационарной системы из белошумной последовательности $V = \{v(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ [3]:

$$w(j) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)v(j-k), \quad j \geqslant 0,$$

где $g(k) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – импульсные характеристики системы G с комплекснозначной передаточной функцией

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k g(k),$$

принадлежащей соответствующему пространству Харди $\mathcal{H}_2^{m\times m}$, в которое входят аналитичные внутри открытого единичного диска функции на комплексной плоскости. Спектральная плотность для G определяется как

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega), \quad \omega \in [-\pi,\pi), \tag{1}$$

где $\widehat{G}(\omega) = \lim\limits_{r\to1-0} G(re^{i\omega})$ – значение передаточной функции на границе единичного круга, $\widehat{G}^*(\omega)$ – комплексное сопряжение, i – мнимая единица.

С помощью (1) определение средней анизотропии последовательности, генерируемой фильтром G из стационарной гауссовской последовательности с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, может быть дано как

$$\overline{\mathbf{A}}(G) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\,\det\left(\frac{m\widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega)}{\|G\|_2^2}\right), \tag{2}$$

где $\|G\|_2$ – $\mathcal{H}_2$-норма передаточной функции:

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\left(S(\omega)\right) d\omega\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{tr}\left(g^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}(k)g(k)\right)\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему F следующего вида:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad z(k) = Cx(k) + Dw(k), \tag{3}$$

где $x(k)\in\mathbb{R}^n$ – состояние, $w(k)\in\mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, $z(k)\in\mathbb{R}^p$ – выход системы. Матрицы A, B, C, D имеют соответствующие размерности, причём матрица A устойчива по Шуру $(\rho(A) < 1)$. Внешнее возмущение принадлежит классу последовательностей с известным ограничением на среднюю анизотропию:

$$\mathcal{W}_a = \{W = \{w(k)\}_{k=0}^{+\infty} : \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a\}. \tag{4}$$

Определение 2 [3]. *Анизотропийной нормой* системы F (3) называют величину, равную

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_{G\in\mathcal{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где G – передаточная функция формирующего фильтра из множества фильтров $\mathcal{G}_a$, генерирующих возмущения из семейства (4).

Приведённое выше определение анизотропийной нормы сформулировано на языке передаточных функций (фактически формирующего фильтра и самой системы F), хотя может быть дано и как супремум отношения мощностных полунорм выхода системы Z ко входу W при условии, что $W\in\mathcal{W}_a$ [16].

Рассмотрим стационарную систему с реализацией вида (3). Приведём утверждение, позволяющее вычислять анизотропийную норму для асимптотически устойчивой системы при фиксированном уровне средней анизотропии a.

Теорема 1 [3]. *Для асимптотически устойчивой линейной стационарной системы F (3), удовлетворяющей условию*

$$\|F\|_2 < \sqrt{m}\|F\|_\infty,$$

существует единственная пара (q,R), $q\in(0,\|F\|_\infty^{-2})$, $R\succ 0$, являющаяся решением уравнения Риккати

$$R = A^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}RA + qC^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}C + L^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}\Sigma L,$$

где

$$\Sigma \equiv (I_m - qD^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}D - B^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}RB)^{-1}, \quad L \equiv \Sigma(B^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}RA + qD^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}}C),$$

такая, что анизотропийная норма выражается следующим образом:

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \left(\frac{1}{q}\left(1 - \frac{m}{\operatorname{tr}\left(LPL^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} + \Sigma\right)}\right)\right)^{1/2},$$

где P – грамиан управляемости системы (3):

$$P = (A+BL)P(A+BL)^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}} + B\Sigma B^{\scriptscriptstyle\mathrm{T}},$$

связанный с заданным уровнем средней анизотропии a *выражением*

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m\Sigma}{\mathrm{tr}\,(LPL^{\mathrm{T}}+\Sigma)}\right)=a.$$

Здесь и далее выражения вида $R \succ 0$ следует понимать в смысле положительной определённости матрицы R.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую линейную по состоянию дискретную стационарную систему:

$$F\sim\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+Bw(k),\\ z(k)=Cx(k)+Dw(k),\end{cases}\tag{5}$$

где $x(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $w(k)\in\mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение, $z(k)\in\mathbb{R}^{p_z}$ – выход системы, $B\in\mathbb{R}^{n_x\times m_w}$, $C\in\mathbb{R}^{p_z\times n_x}$, $D\in\mathbb{R}^{p_z\times m_w}$, матрица $A\in\mathbb{L}_2^{n_x\times n_x}$ представима как

$$A=A_0+\sum_{i=1}^{M}\xi_i^A(k)A_i,\tag{6}$$

причём действительные матрицы A_i, $i=\overline{1,M}$, известны. Случайные центрированные величины $\xi_i^A(k)\in\mathbb{L}_2$ независимы по всему набору переменных i, k. Также считается, что вторые моменты случайных величин $\xi_i^A(k)$ известны и конечны (с учётом представления матриц системы (6), не пренебрегая общностью, можно полагать, что $\mathbf{E}[(\xi_i^A(k))^2]=1$). Внешнее возмущение представляет собой элемент из множества последовательностей $W=\{w(k)\}_{k=0}^{+\infty}\in\mathcal{W}_a$, описанного в (4). Внешнее возмущение $w(k)$ статистически независимо с мультипликативными шумам $\xi_i^A(k)$ для любых k. Дополнительное условие для матрицы A системы имеет вид

$$\lim_{k\to+\infty}\rho(\mathbf{E}[A^k])^{1/k}<1\tag{7}$$

и является стохастическим аналогом ограниченности спектрального радиуса. Кроме того, также потребуем, чтобы $\rho(A_0)<1$.

Задача состоит в поиске таких условий на матрицы системы (5), при которых анизотропийная норма

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a=\sup_{W\in\mathcal{W}_a}\frac{\|FW\|_2}{\|W\|_2}\tag{8}$$

была бы ограничена.

3. Основной результат. Из-за того что рассматривая система (5) не является детерминированной, вид формирующего фильтра будет выбран следующим образом:

$$G\sim\begin{cases}x_g(k+1)=\mathbf{E}[A]x_g(k)+Bv(k),\\ w(k)=Lx_g(k)+\Sigma^{1/2}v(k),\end{cases}\tag{9}$$

где матрицы A, B совпадают с аналогичными матрицами в (5), а матрицы $L\in\mathbb{R}^{m_w\times n_x}$, $\Sigma\in\mathbb{R}^{m_w\times m_w}$ подлежат определению, $V=\{v(k)\}$ – последовательность случайных векторов со стандартным распределением, характеризующимся нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей. При указанном виде формирующего фильтра отношение в правой части (8) должно достигать супремума и быть равным анизотропийной норме.

Спектральная плотность линейного объекта (9) имеет вид

$$S(\omega)=\widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega),\quad \omega\in[-\pi,\pi),$$

где $G(z) \in \mathcal{H}_2^{m_w \times m_w}$ – передаточная функция в соответствующем пространстве Харди аналитичных внутри единичного диска на комплексной плоскости с конечной $\mathcal{H}_2$-нормой

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} S(\omega)\, d\omega\right)^{1/2}.$$

При этом средняя анизотропия связана со спектральной плотностью $S(\omega)$ известным соотношением (2).

Сформулируем аналог леммы о вещественной ограниченности [17] для анизотропийной нормы стационарной дискретной системы с мультипликативными шумами.

Теорема 2. *Рассмотрим дискретную систему (5) с внешним возмущением в виде стационарной эргодической последовательности со средней анизотропией, не превосходящей заданное значение a. Анизотропийная норма этой системы будет ограничена значением γ:*

$$|\!|\!| F |\!|\!|_a \leqslant \gamma,$$

если существует решение следующей системы:

$$R_1 = \sum_{i=0}^{M} A_i^{\text{т}} R_1 A_i + qC^{\text{т}}C, \tag{10}$$

$$R_2 = A_0^{\text{т}} R_2 A_0 + L^{\text{т}} \Sigma^{-1} L, \tag{11}$$

$$\Sigma = (I_{m_w} - qD^{\text{т}}D - B^{\text{т}}R_1B - B^{\text{т}}R_2B), \tag{12}$$

$$L = \Sigma(qD^{\text{т}}C + B^{\text{т}}R_1A_0 + B^{\text{т}}R_2A_0), \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\,\det\left((1 - q\gamma^2)\Sigma\right) \geqslant a, \tag{14}$$

где $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$, $S = S^{\text{т}} \succ 0$, $R_i = R_i^{\text{т}} \succ 0$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Рассмотрим два функционала

$$\alpha(\Pi) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\,\det \Pi(\omega)\, d\omega, \tag{15}$$

$$\nu(\Pi) = \left(\frac{1}{2\pi m_w}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\left(\Lambda(\omega)\Pi(\omega)\right) d\omega\right)^{1/2}, \tag{16}$$

где нормированная спектральная плотность для фильтра G (9) из множества нормированных спектральных плотностей $\mathbf{\Pi}$

$$\Pi(\omega) = 2\pi m_w S(\omega)\left(\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} S(v)\, dv\right)^{-1},$$

а $\Lambda(\omega) = \mathbf{E}[\widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)]$. Заметим, что функционал (15) сильно выпуклый [17].

Минимальное значение функционала $\alpha(\Pi)$, при котором будет достигнута пороговая величина γ для функционала $\nu(\Pi)$, как раз соответствует уровню средней анизотропии входного возмущения, поскольку

$$\alpha(\Pi) = \overline{\mathbf{A}}(G), \quad \nu(\Pi) = \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}.$$

Поиск такого формирующего фильтра G может быть сведён к задаче линейного программирования с выпуклым ограничением, поскольку $\alpha(\Pi)$ является выпуклым по своему аргументу, а функционал $\nu^2(\Pi)$ – линейным. Решение задачи может быть получено методом множителей Лагранжа.

Поскольку минимум функционала $\min\limits_{\Pi\in\mathbf{\Pi}:\nu(\Pi)\geqslant\gamma}\alpha(\Pi)$ достигается на спектральной плотности вида

$$S_q(\omega) = (I_{m_w} - q\Lambda)^{-1}, \quad q \in [0, \|F\|_\infty^{-2}), \tag{17}$$

то нормализованная спектральная плотность имеет представление

$$\Pi_q(\omega) = 2\pi m_w S_q(\omega)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} S_q(v)\,dv\right)^{-1}.$$

Определяя функции

$$\mathcal{A}(q) = \alpha(\Pi_q), \quad \mathcal{N}(q) = \nu(\Pi_q), \tag{18}$$

которые являются строго монотонно возрастающими по аргументу q, в работе [17] показано, что неравенство $\|F\|_a \leqslant \gamma$ может быть заменено на эквивалентное $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geqslant a$. Из (17) следует, что

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{q}(I_{m_w} - S_q(\omega))^{-1},$$

вследствие чего

$$\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}(\Lambda(\omega)S_q(\omega))\,d\omega = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}(S_q(\omega))\,d\omega - 1\right).$$

Пользуясь определением функций (16), (18), можно сделать вывод, что

$$\frac{1}{2\pi m_w}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}(S_q(\omega))\,d\omega = \frac{1}{1 - q(\mathcal{N}(q))^2}. \tag{19}$$

Подставив (19) в (15), получим

$$\mathcal{A}(q) = \mathfrak{A}(q, \mathcal{N}(q)), \tag{20}$$

т.е. при достижении значения γ для функции $\mathcal{N}(q)$ будет справедливо следующее:

$$\mathfrak{A}(q,\gamma) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\det S_q(\omega)\,d\omega - \frac{m_w}{2}\ln(1 - q\gamma^2).$$

Функция $\mathfrak{A}(q,\gamma)$ является монотонно возрастающей по параметру $\gamma \in [0, \sqrt{q})$ и достигает максимума по параметру q в точке $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$, где совпадает с функцией $\mathcal{A}(q)$. В работе [17] показано, что для некоторого q условие $\|F\|_a \leqslant \gamma$ эквивалентно $\mathfrak{A}(q,\gamma) \geqslant a$.

Установим связь между матрицами системы в пространстве состояний (5) и условием $\mathfrak{A}(q,\gamma) \geqslant a$. Спектральная плотность фильтра $G_\star$, реализующего "наихудшее" возмущение, имеет вид (17). Соотношение $S_q(\omega) = (I_{m_w} - q\Lambda)^{-1}$ можно представить в виде

$$\widehat{\Theta}^*(\omega)\widehat{\Theta}(\omega) = I_{m_w}, \quad \omega \in [-\pi, \pi), \tag{21}$$

где $\widehat{\Theta}(\omega)$ – значение передаточной функции системы

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{q}F \\ G_\star^{-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

на границе единичного круга на комплексной плоскости.

Условие (21) означает, что система (22) обладает свойством изометричности (т.е. сохраняет норму входа на выходе). “Наихудшее” возмущение $W_\star = G_\star V$ со спектральной плотностью $(I_{m_w} - q\Lambda)^{-1}$ может быть получено следующим образом:

$$w_\star(k) = Lx_g(k) + \Sigma^{1/2}v(k), \tag{23}$$

где матрица L должна удовлетворять условию $\rho(\mathbf{E}[A] + BL) < 1$, $\Sigma = \Sigma^{\text{т}} \in \mathbb{R}^{m_w \times m_w} \succ 0$.

После замыкания “наихудшим” возмущением (23) фильтра (9) получены следующие уравнения динамики:

$$G \sim \begin{cases} x_g(k+1) = (\mathbf{E}[A] + BL)x_g(k) + B\Sigma^{1/2}v(k), \\ w(k) = Lx_g(k) + \Sigma^{1/2}v(k). \end{cases}$$

Данная система будет обратима вследствие условия $\Sigma \succ 0$. Это позволяет получить реализацию в пространстве состояний системы (22) в виде

$$\Theta \sim \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \overline{A}\bar{x}(k) + \overline{B}w(k), \\ \bar{z}(k) = \overline{C}\bar{x}(k) + \overline{D}w(k), \end{cases} \tag{24}$$

где $\bar{x}^{\text{т}}(k) = (x^{\text{т}}(k), \xi^{\text{т}}(k))^{\text{т}}$ – расширенное состояние, объединяющее состояние системы (5) и состояние обращенного фильтра $G_\star{}^{-1}$, $\bar{z}^{\text{т}} = (z^{\text{т}}(k), v^{\text{т}}(k))$, матрицы связаны с матрицами систем (5) и (9) следующим образом:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{E}[A] \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{q}C & 0 \\ 0 & -\Sigma^{-1/2}L \end{bmatrix}, \quad \overline{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{q}D \\ \Sigma^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Будем искать грамиан наблюдаемости системы (24) в виде

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

где $R_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, 2$. При этом положительно определённая матрица R должна удовлетворять уравнению Ляпунова

$$R = \mathbf{E}[\overline{A}^{\text{т}} R \overline{A}] + \overline{C}^{\text{т}}\overline{C},$$

что соответствует уравнениям (10), (11).

Используя критерий изометричности в пространстве состояний [18], получаем достаточные условия изометричности системы Θ:

$$(\mathbf{E}[\overline{B}^{\text{т}} R \overline{A}] + \overline{D}^{\text{т}}\overline{C})\overline{P} = 0, \tag{25}$$

$$\mathbf{E}[\overline{B}^{\text{т}} R \overline{B}] + \overline{D}^{\text{т}}\overline{D} = I_{2m_w} \tag{26}$$

при условии управляемости пары $(\overline{A}, \overline{B})$. Здесь стоит уточнить, что подразумевается управляемость пары $(\overline{A}, \overline{B})$ почти всюду, что эквивалентно условию управляемости пары $(\mathbf{E}[A], B)$. Матрица $\overline{P} = (P^{\text{т}}, P^{\text{т}})^{\text{т}}$ связана с решением уравнения Ляпунова

$$P = A_0 P A_0^{\text{т}} + BB^{\text{т}}.$$

Таким образом, из условий (25), (26) получены условия для матриц L, Σ в (12), (13).

С помощью формулы Колмогорова–Сегё [19] можно установить следующую связь:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln \det S_q(\omega)\, d\omega = \ln \det \Sigma,$$

что позволяет получить зависимость (20) от матрицы Σ:

$$\mathfrak{A}(q,\gamma) = -\frac{1}{2}\ln\det\left((1-q\gamma^2)\Sigma\right).$$

Из последнего следует, что выполнение условия $\mathfrak{A}(q,\gamma)\geqslant a$ зависит от матрицы Σ, связанной через параметр q с Риккати-подобным семейством уравнений (10)–(14). Теорема доказана.

4. Управление на основе статической обратной связи по состоянию. На основе системы (5) будем рассматривать систему с управлением следующего вида:

$$F \sim \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + Bw(k), \\ z(k) = Cx(k) + Dw(k), \end{cases} \tag{27}$$

где матрицы A, B, C, D совпадают с аналогичными в (5), $B_u\in\mathbb{R}^{n_x\times m_u}$, $u(k)\in\mathbb{R}^{m_u}$ – управление, пара $(\mathbf{E}[A], B_u)$ является управляемой.

Выберем управление в виде обратной связи по состоянию $u(k) = Kx(k)$, $K\in\mathbb{R}^{m_u\times n_x}$. Задачу управления можно сформулировать следующим образом: найти такое значение коэффициента усиления K, при котором значение анизотропийной нормы замкнутой системы $F_{\rm cl}$ будет ограничено сверху числом γ.

Результат, сформулированный в теореме 2, может быть легко адаптирован, как показано в работе [20], для применения методов выпуклой оптимизации.

Теорема 3 [18]. *Для системы с мультипликативными шумами (5) при условии (7), на которую действует возмущение со средней анизотропией, не превосходящей заданного значения a, анизотропийная норма не будет превышать заданного значения $|\!|\!|F|\!|\!|_a\leqslant\gamma$, если имеют решения следующие неравенства:*

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{M} A_i^{\rm T} R A_i - R + C^{\rm T}C & * \\ B^{\rm T}RA_0 + D^{\rm T}C & -\eta I_m + D^{\rm T}D + B^{\rm T}RB \end{bmatrix} \prec 0, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi - D^{\rm T}D & * \\ RB & R \end{bmatrix} \succ 0, \tag{29}$$

$$\ln\det\Psi \geqslant 2a + m_w\ln(\eta-\gamma^2), \tag{30}$$

где $R = R^{\rm T}\succ 0$, $\Psi = \Psi^{\rm T}\succ 0$, $\eta > 0$.

После замыкания управлением системы (5) и применения теоремы 2 неравенство (28) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{M} A_i^{\rm T} R A_i + (A_0+B_uK)^{\rm T}R(A_0+B_uK) - R + C^{\rm T}C & * \\ B^{\rm T}R(A_0+B_uK) + D^{\rm T}C & -\eta I_m + D^{\rm T}D + B^{\rm T}RB \end{bmatrix} \prec 0. \tag{31}$$

Это неравенство будет нелинейным относительно неизвестных матриц R и K. Такой тип нелинейности можно легко обойти. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть уровень средней анизотропии внешнего возмущения системы (27) ограничен заданным значением $a\geqslant 0$, управление выбрано в виде $u(k) = Kx(k)$. Анизотропийная норма замкнутой системы будет ограничена пороговым значением γ, если система неравенств*

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \cdots & * & * \\ A_0\Phi + B_u\Lambda & B & -\Phi & * & \cdots & * & * \\ A_1\Phi & 0 & 0 & -\Phi & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_M\Phi & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\Phi & * \\ C\Phi & D & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0, \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi - D^{\mathrm{T}}D & * \\ B & \Phi \end{bmatrix} \succ 0 \tag{33}$$

совместно с (30) имеет решение относительно $\Phi \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m_w\times m_w}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{m_u\times n_x}$ *и скалярного параметра* η, *причём* $\Phi = \Phi^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\Psi = \Psi^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\eta > 0$, *а матричный коэффициент* $K \in \mathbb{R}^{m_u\times n_x}$ *вычисляется по формуле* $K = \Lambda\Phi^{-1}$.

Доказательство. Применив к неравенству (31) лемму Шура [21], получим неравенство

$$\begin{bmatrix} -R & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \cdots & * & * \\ R(A_0+B_uK) & RB & -R & * & \cdots & * & * \\ RA_1 & 0 & 0 & -R & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ RA_M & 0 & 0 & 0 & \cdots & -R & * \\ C & D & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Умножив последнее неравенство справа и слева на блочно-диагональную матрицу

$$\mathrm{blckdiag}\,(R^{-1}, I, R^{-1}, \ldots, R^{-1}, I)$$

и введя новые переменные $\Phi = R^{-1}$, $K\Phi = \Lambda$, получим неравенство (32). Аналогично изменяется ненравенство (29) при конгруэнтном преобразовании $\mathrm{blckdiag}\,(I, R^{-1})$, неравенство (30) при этом не меняется. Теорема доказана.

Неравенства (32), (33) являются линейными по совокупности своих переменных, а неравенство (30) – выпуклое относительно γ^2. Следовательно, можно поставить следующую задачу выпуклой оптимизации:

$$\gamma^2 \xrightarrow{(30),(32),(33)} \min \quad \text{w.r.t.} \quad \Lambda, \quad \Phi = \Phi^{\mathrm{T}} \succ 0, \quad \Psi = \Psi^{\mathrm{T}} \succ 0, \quad \eta > 0, \quad \gamma^2. \tag{34}$$

После численного решения задачи (34) стандартными средствами [22] коэффициент при управлении можно вычислить по формуле $K = \Lambda\Phi^{-1}$.

5. Моделирование. Сравним результаты для управления, сформированного на основе анизотропийного и $\mathcal{H}_2$-регулятора, с точки зрения нормы выхода, а также приведём оценки верхней границы анизотропийной нормы для разного уровня средней анизотропии возмущения.

В качестве объекта управления выбрана модель сервопривода для подводного аппарата [23]. Внешнее возмущение выбиралось из класса двумерных, окрашенных с известным уровнем средней анизотропии a, для указанной модели внешнее возмущение представляет собой возможное влияние на подводный аппарат случайных течений. После дискретизации в модель были добавлены два мультипликативных шума, матричный коэффициент A_1 при первом был выбран на основе матрицы A, где вторая строка была умножена на 0.1, остальные строки – нулевые; матрица A_2 имела единственный ненулевой столбец под номером три, который был пропорционален третьему столбцу матрицы A с коэффициентом 0.05. Рассматриваемая модель имела восемь пространственных переменных, в качестве регулируемой переменной выбрано положение руля, на который действует сила, генерируемая сервоприводом. В качестве двух управлений рассматриваются обратные связи по давлению и по положению нагрузки.

Граница γ анизотропийной нормы замкнутой управлением системы была посчитана для различных уровней a, в таблице приводится значение евклидовой нормы регулируемой переменной, а для сравнения даны значения аналогичной нормы регулируемой переменной при использовании $\mathcal{H}_2$-регулятора при том же уровне окрашенности внешнего возмущения. Как видно из приведённых значений, с увеличением окрашенности внешнего возмущения (т.е. его отличия от равномерного распределения) анизотропийный регулятор имеет более выраженную тенденцию к уменьшению нормы регулируемой переменной, т.е. демонстрирует более высокое качество.

Таблица. Результаты моделирования

a	γ	$\|z\|_2$-норма	
		Анизотропийный регулятор	$\mathcal{H}_2$-регулятор
0.01	0.7370	11.7841	12.0900
0.05	0.7960	16.0702	17.3483
1.00	1.0057	20.1657	23.6001
5.00	1.1372	213.1535	237.4295

Заключение. В работе получено условие ограниченности анизотропийной нормы для стационарной дискретной системы с мультипликативными шумами в терминах существования решения выпуклой задачи оптимизации. На основе полученного критерия ограниченности решена задача синтеза статического управления по состоянию. В качестве перспективного направления можно указать проблемы синтеза регулятора на основе наблюдений и динамического регулятора. Также можно рассматривать наличие мультипликативных шумов при возмущении в пространственном описании объекта управления.

Работа выполнена при частичной поддержке программы “Приоритет 2030” МГТУ имени Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
2. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 583–585.
3. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 179–184.
4. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // Автоматика и телемеханика. 2006. № 8. С. 92–111.
5. *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Робастная устойчивость линейных дискретных систем с неопределённостью, ограниченной по анизотропийной норме // Докл. РАН. 2005. Т. 400. № 2. С. 178–180.
6. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.-M.* Matematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2010.
7. *Kustov A.Yu.* State-space formulas for anisotropic norm of linear discrete time varying stochastic systems // Proc. 15th Int. Conf. on Electrical Eng., Comp. Science and Aut. Control (CCE). 2018. P. 6.
8. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // Докл. РАН. 2011. Т. 441. № 3. С. 318–321.
9. *Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Anisotropy-based bounded real lemma for multiplicative noise systems: the finite horizon case // Proc. of the 27th Mediterranean Conf. on Control and Automation. 2019. P. 148–152.
10. *Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V.* Finite-horizon anisotropy-based estimation with packet dropouts // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. № 2. P. 4516–4520.
11. *Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V.* Finite-horizon anisotropic estimator design in sensor networks // Proc. of the 59th IEEE Conf. on Decision and Control. 2020. P. 4330–4335.
12. *Юрченков А.В.* Пример настройки матрицы смежности для сети датчиков с анизотропийным критерием // Управление большими системами. 2022. Вып. 99. С. 38–56.
13. *Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами // Докл. РАН. 2016. Т. 467. № 4. С. 396–399.
14. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н., Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропийной нормы стационарной системы с мультипликативными шумами // Тр. 13-й мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2020). 2020. С. 340–342.
15. *Diamond P.M., Kloeden P.D., Vladimirov I.G.* Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norms of linear translation-invariant operators on multidimensional integer lattices // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 2003. V. 16. № 3. P. 209–231.

16. *Kurdyukov A.P., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Robust stability in anisotropy-based theory with non-zero mean of input sequence // Proc. of the 21st Intern. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems. 2014. P. 208–214.
17. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Anisotropy-based bounded real lemma // Proc. of 19th Intern. Symp. om Mathematical Theory of Networks and Systems. 2010. P. 291–297.
18. *Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D., Postlethwaite I.* State-space formulae for discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ optimization // Int. J. of Control. 1989. V. 49. P. 1683–1723.
19. *Grenader U., Szegö G.* Toeplitz Forms and Their Applications. Cambridge, 1958.
20. *Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропийной нормы для стационарных систем с мультипликативными шумами // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 16–24.
21. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. New York, 2004.
22. *Löfberg J.* YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // Proc. of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. P. 284–289.
23. *Davison E.J.* Benchmark problems for control system design // Report of the IFAC Theory Comittee, 1990. P. 41–42.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 01.05.2023 г.
После доработки 14.09.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1561–1565

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА В ТОНКОМ СЛОЕ

 Е. С. Болдырева

Исследуется существование и устойчивость периодических решений модельного уравнения Навье–Стокса в тонком трёхмерном слое в зависимости от существования и устойчивости периодических решений одного специального предельного двумерного уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123110110, EDN: PDGIXG

Введение. Уравнение Навье–Стокса является классической моделью исследований течения ньютоновской жидкости. Наиболее подробно уравнения Навье–Стокса исследованы в фундаментальных работах [1–3] и др.

Цель данной статьи – исследовать периодические по времени решения модельного уравнения Навье–Стокса несжимаемой жидкости в тонкой трёхмерной области $Q = \Omega \times (0, \varepsilon)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – прямоугольник, ε – малый параметр. Для этого рассматривается трёхмерное уравнение Навье–Стокса, дополненное периодическими по пространственным переменным граничными условиями и уравнением несжимаемости.

Данная задача рассматривалась многими авторами (см., например, [4–8]). Постановка задачи в тонком слое впервые была предложена в работе [4]. Модельная задача Навье–Стокса в параллелепипеде рассматривается в [5], там же вводится понятие "приведённой" системы уравнений, которая является в некотором смысле предельной: это трёхмерная система функций, зависящая от времени t и двух пространственных переменных, лежащих в области Ω. Два уравнения этой системы являются двумерным уравнением Навье–Стокса в прямоугольнике, а третье – линейное параболическое уравнение.

Отметим, что после замены переменных толщина ε сингулярно входит в систему уравнений. В настоящей работе осуществляются предельные переходы, которые идейно близки к принципу усреднения (см. [9, 10]).

Дополнительным требованием является нулевое среднее по пространственным переменным исследуемых решений. На важность такого класса решений указано в работе [7]. При выполнении этого требования в настоящей статье найдены условия, при которых наличие периодического решения у двумерного уравнения из "приведённой" системы влечёт за собой существование при малых ε периодических по t решений у трёхмерного уравнения. Более того, установлено, что устойчивость по первому приближению периодического решения двумерного уравнения Навье–Стокса в приведённой системе влечёт за собой при малых ε устойчивость этих решений у трёхмерного уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трёхмерное уравнение Навье–Стокса в тонком слое

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \triangle U + (U \cdot \triangledown)U + \triangledown P = F(t, x_1, x_2, x_3), \quad \triangledown \cdot U = 0, \tag{1}$$

где $t > 0$ и $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_\varepsilon$ $(\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – прямоугольник $[0, l_1] \times [0, l_2]$ и $\varepsilon > 0$ – малая величина); функция $U = (U_1, U_2, U_3)$ – трёхмерная вектор-функция от переменных (t, x_1, x_2, x_3), которая является скоростью течения элемента в момент времени t в точке (x_1, x_2, x_3); коэффициент ν – кинематическая вязкость, ниже будем считать, что $\nu = 1$; скалярная величина $P = P(t, x_1, x_2, x_3)$ – давление; $F = F(t, x_1, x_2, x_3)$ – внешняя сила, предполагается T-периодической по переменной t.

Будем рассматривать уравнение (1) как эволюционное уравнение относительно скорости $U = (U_1(t, x_1, x_2, x_3), U_2(t, x_1, x_2, x_3), U_3(t, x_1, x_2, x_3))$ и давления $P = P(t, x_1, x_2, x_3)$. Задача для уравнения (1) будет изучаться при наличии периодических по пространственным переменным граничных условий

$$U(t,0,x_2,x_3)=U(t,l_1,x_2,x_3),\quad U_{x_1}(t,0,x_2,x_3)=U_{x_1}(t,l_1,x_2,x_3),$$
$$U(t,x_1,0,x_3)=U(t,x_1,l_2,x_3),\quad U_{x_2}(t,x_1,0,x_3)=U_{x_2}(t,x_1,l_2,x_3),$$
$$U(t,x_1,x_2,0)=U(t,x_1,x_2,\varepsilon),\quad U_{x_3}(t,x_1,x_2,0)=U_{x_3}(t,x_1,x_2,\varepsilon), \tag{2}$$

где $U_{x_1},\ U_{x_2},\ U_{x_3}$ – производные от функции U по $x_1,\ x_2,\ x_3$ соответственно. Уравнение (1) с краевыми условиями (2) можно интерпретировать как течение на трёхмерном тонком в одном направлении торе.

Кроме того, при выполнении условия

$$\int\limits_Q F dx=0, \tag{3}$$

как показано в [7], если в начальный момент времени

$$\int\limits_Q U dx=0, \tag{4}$$

то все решения U будут обладать таким же свойством в любой момент времени.

Произведём в задаче (1), (2) следующую замену переменных:

$$x_1=x_1,\quad x_2=x_2,\quad x_3=\varepsilon y,$$
$$\widetilde{u}(t,x_1,x_2,y)=U(t,x_1,x_2,\varepsilon y),\quad p(t,x_1,x_2,y)=P(t,x_1,x_2,\varepsilon y).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{d\widetilde{u}_\varepsilon}{dt}-\triangle_\varepsilon\widetilde{u}_\varepsilon+(\widetilde{u}_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)\widetilde{u}_\varepsilon=F_\varepsilon(t,x_1,x_2,\varepsilon y), \tag{5}$$

где $\nabla_\varepsilon=(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\varepsilon^{-1}\partial/\partial y)$ и $\triangle_\varepsilon=(\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\varepsilon^{-2}\partial^2/\partial y^2)$ – сингулярные по ε дифференциальные выражения, граничные условия (2) запишутся как

$$\widetilde{u}(t,0,x_2,y)=\widetilde{u}(t,l_1,x_2,y),\quad \widetilde{u}_{x_1}(t,0,x_2,y)=\widetilde{u}_{x_1}(t,l_1,x_2,y),$$
$$\widetilde{u}(t,x_1,0,y)=\widetilde{u}(t,x_1,l_2,y),\quad \widetilde{u}_{x_2}(t,x_1,0,y)=\widetilde{u}_{x_2}(t,x_1,l_2,y),$$
$$\widetilde{u}(t,x_1,x_2,0)=\widetilde{u}(t,x_1,x_2,1),\quad \widetilde{u}_{x_3}(t,x_1,x_2,0)=\widetilde{u}_{x_3}(t,x_1,x_2,1), \tag{6}$$

а условия (3) и (4) перейдут в условия $\int_Q\widetilde{u}_\varepsilon\,dx=0$ и $\int_Q F_\varepsilon\,dx=0$ соответственно, где $Q=$ $=(0,l_1)\times(0,l_2)\times(0,1)$.

Обозначим через A_ε оператор, порождённый эллиптическим дифференциальным выражением $\triangle_\varepsilon$ и граничными условиями (6), т.е. $A_\varepsilon\widetilde{u}=-\triangle_\varepsilon\widetilde{u}_\varepsilon$, а через B_ε – оператор, определяемый равенством $B_\varepsilon\widetilde{u}=(\widetilde{u}_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)\widetilde{u}_\varepsilon$. Тогда, как показано в [11], для любого фиксированного $\varepsilon>0$ оператор A_ε – сильно-позитивный в пространстве $L_2(Q)$, поэтому для него определены $e^{-A_\varepsilon t}$ и дробные степени $A_\varepsilon^{-\alpha}$, где $-1<-\alpha<0$.

Используя стандартные замены с дробными степенями $\widetilde{u}=A_\varepsilon^{-\alpha}\hat{u}$ (см. [11, 12]), уравнение (5) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{d\hat{u}}{dt}+A_\varepsilon\hat{u}=A^\alpha F_\varepsilon-B_\varepsilon\hat{u}. \tag{7}$$

Задача о T-периодических по t решениях уравнения (7) сводится к задаче о нахождении неподвижных точек интегрального оператора (см. [11])

$$\Phi_\varepsilon(\hat{u}) = e^{-A_\varepsilon t}(I - e^{-A_\varepsilon T})^{-1}\int_0^T A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(T-s)}(F_\varepsilon - B_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha}\hat{u}(s))\,ds + \int_0^t A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(t-s)}(F_\varepsilon - B_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha}\hat{u}(s))\,ds$$

в пространстве $C_T(L_2(Q)$ – T-периодических по t функций со значениями в пространстве $L_2(Q)$.

Будем предполагать, что неподвижные точки являются гладкими функциями, тогда от интегрального уравнения $\hat{u} = \Phi_\varepsilon(\hat{u})$ можно перейти к дифференциальному уравнению (7) (см. [11]), т.е. если $\hat{u}$ – неподвижная точка оператора Φ_ε, то $A_\varepsilon^\alpha \widetilde{u}$ – решение уравнения (7).

Первым результатом данной работы является доказательство существования при малых ε периодических по t решений r_ε. Затем с помощью линеаризации по В.И. Юдовичу [3] исследуется устойчивость решений r_ε. Линеаризованное уравнение (см. [3]) имеет вид

$$\bar{u}_\varepsilon' - \triangle_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon + (r_\varepsilon(t)\cdot\nabla_\varepsilon)\bar{u}_\varepsilon + (\bar{u}_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)r_\varepsilon(t) = 0.$$

Исследуем устойчивость периодических по t решений уравнения (7) с помощью спектральной задачи

$$u_\varepsilon{}' + A_\varepsilon u_\varepsilon + B_\varepsilon(t)u_\varepsilon + \sigma_\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0, \tag{8}$$

где $u_\varepsilon(t)$ – T-периодическая по t функция, $B_\varepsilon(t)u_\varepsilon = (r_\varepsilon(t)\cdot\nabla_\varepsilon)u_\varepsilon + (u_\varepsilon\cdot\nabla_\varepsilon)r_\varepsilon(t)$, а σ_ε – спектральный параметр. Для этого используем результат В.И. Юдовича об устойчивости, который в наших обозначениях сформулируем как

Теорема 1. *Для того чтобы периодическое решение r_ε уравнения (5) при малом ε было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы уравнение (8) не имело нетривиальных периодических решений при* $\operatorname{Re}\sigma_\varepsilon \leqslant -\sigma_0 < 0$.

2. Приведённое уравнение Навье–Стокса. Предельный переход в операторе Φ_ε при $\varepsilon \to 0$ описывается при помощи “приведённой” системы (см. [4, 6]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)v + (v\cdot\bigtriangledown_2)v = \begin{pmatrix}F_{01}\\ F_{02}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_3 + \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_3 = F_{03}, \tag{9}$$

где $u = (v_1(t,x_1,x_2), v_2(t,x_1,x_2), u_3(t,x_1,x_2))$, $v = (v_1(t,x_1,x_2), v_2(t,x_1,x_2))$, $u_3 = u_3(t,x_1,x_2)$. В (9) учтено, что функция $F_0(t,x_1,x_2) = F(t,x_1,x_2,0)$ и является трёхмерной:

$$F_0(t,x_1,x_2) = (F_{01}(t,x_1,x_2), F_{02}(t,x_1,x_2), F_{03}(t,x_1,x_2)).$$

Рассмотрим систему уравнений (9) со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} &u(t,0,x_2) = u(t,l_1,x_2), \quad u_{x_1}(t,0,x_2) = u_{x_1}(t,l_1,x_2),\\ &u(t,x_1,0) = u(t,x_1,l_2), \quad u_{x_2}(t,x_1,0) = u_{x_2}(t,x_1,l_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Кроме того, будем предполагать, что выполнены равенства $\bigtriangledown_2\cdot v = 0$. Заметим, что если $\int_\Omega F_0\,dx = 0$, то для периодических по t решений u выполнено тождество

$$\int_\Omega u(t,x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \equiv 0.$$

Обозначим через A_0 оператор, порождённый эллиптическим дифференциальным выражением $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ и граничными условиями (10).

Для "приведённой" системы (9) задача об исследовании устойчивости (см. теорему 1) решений данной системы сводится к отсутствию периодических решений при $\sigma \geqslant \sigma_0$ с $\operatorname{Re}\sigma > 0$ следующей спектральной задачи:

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} + \widehat{A_0}\widehat{w} + \widehat{A_0^\alpha}\widehat{B_0}\widehat{A_0^{-\alpha}}\widehat{w} + \sigma\widehat{w} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \widehat{A_0}w_3 + \widehat{A_0^\alpha}\widehat{B_{03}}\widehat{A_0^{-\alpha}}w_3 + \sigma w_3 = 0. \tag{12}$$

Системе (11), (12) соответствует действующий в пространстве $C_T(L_2(\Omega))$ оператор Φ_{0_2}, задаваемый формулой

$$\Phi_{0_2}(w) = e^{-A_0 t}(I - e^{-A_0 T})^{-1}\int\limits_0^T A_0^\alpha e^{-A_0(T-s)}(B_0(s)-\sigma)A_0^{-\alpha}w(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t A_0^\alpha e^{-A_0(t-s)}(B_0(s)-\sigma)A_0^{-\alpha}w(s)\,ds.$$

Пусть M – проекция, полученная интегрированием по переменной y:

$$(Mu)(x_1,x_2,x_3) = \int\limits_0^1 u(x_1,x_2,y)\,dy,$$

таким образом, Mu фактически не зависит от третьей переменной. Очевидно, $M : L_2(Q) \to \to L_2(Q)$. В силу лемм 1, 2 из статьи [6] при $\varepsilon \to 0$ оператор $\Phi_\varepsilon(u) \to \Phi_0(Mu)$, где $\Phi_0(Mu)$ определяется формулой

$$\Phi_0(M\hat{u}) = e^{-A_0 t}(I - e^{-A_0 T})^{-1}\int\limits_0^T A_0^\alpha e^{-A_0(T-s)}(F_0 - B_0 A_0^{-\alpha}M\hat{u})\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t A_0^\alpha e^{-A_0(t-s)}(F_0 - B_0 A_0^{\alpha}M\hat{u})\,ds.$$

При таком доопределении оператора $\Phi_\varepsilon(u)$ при $\varepsilon = 0$ получившийся оператор $\Phi_\varepsilon(u)$ будет вполне непрерывным по совокупности переменных (ε, u).

Заметим, что неподвижные точки оператора $\Phi_0(M\hat{u})$ являются функциями двух пространственных переменных и поэтому совпадают с неподвижными точками $\Phi_{0_2}(u)$ в пространстве $C_T(L_2(\Omega))$.

3. Теоремы о существовании и устойчивости. Главным результатом данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть "приведённое" трёхмерное уравнение Навье–Стокса (9) имеет T-периодическое по t решение u^0 такое, что спектральная задача, построенная по линеаризованному на первых двух компонентах решения u^0 двумерного уравнения Навье–Стокса*

$$\frac{\partial q^0}{\partial t} - \triangle_2 q^0 + (q^0\bigtriangledown_2)v_i^0(t) + (v_i^0(t)\bigtriangledown_2)q^0 = 0, \quad i = 1,2,$$

в классе T-периодических по t решений, удовлетворяющих условиям (3), (4), не вырождена. Тогда при малых ε трёхмерное уравнение Навье–Стокса (5) имеет периодические по t решения r_ε и справедливо соотношение

$$\sup_t\biggl(\int\limits_Q |r_\varepsilon(t,x_1,x_2,y) - u^0(t,x_1,x_2)|^2\,dx_1\,dx_2\,dy\biggr) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

В доказательстве теоремы главную роль играет следующая вспомогательная лемма, имеющая и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть спектральная задача (12), построенная по линеаризованному на первых двух компонентах решения* u^0 *двумерного уравнения Навье–Стокса, в классе* T*-периодических по* t *решений не вырождена при всех* σ *с* $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$. *Тогда при том же* σ *спектральная задача (11), (12), построенная по приведённой линеаризованной на решении* u^0 *системе, тоже не вырождена.*

Теорема 3. *Пусть спектральная задача (12), построенная по двумерному линеаризованному на первых двух компонентах решения* u^0 *уравнения Навье–Стокса, в классе* T*-периодических по* t *решений не вырождена при* $\operatorname{Re}\sigma \leqslant -\sigma_0 \neq 0$, *т.е.* $v_i^0(t)$, $i = 1, 2$, *является асимптотически устойчивым решением двумерного уравнения Навье–Стокса (10). Тогда при достаточно малом* ε *спектральная задача, построенная по трёхмерному линеаризованному на решении* r_ε *уравнению (8), тоже не вырождена при* $\operatorname{Re}\sigma_\varepsilon \leqslant -\sigma_0 < 0$, *т.е. решение* r_ε *будет асимптотически устойчивым решением уравнения (5).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leray J.* Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. V. 12. P. 1–82.
2. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
3. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов, 1984.
4. *Raugel G., Sell G.* Navier–Stokes equations on thin 3FD domains. I: Global attractors and global regularity of solutions // J. Amer. Math. Soc. 1993. V. 6. P. 503–568.
5. *Raugel G., Sell G.* Equations de Navier–Stokes dans des domaines minces endimension trois: regularite globale // C. R. Acad. Sci. Paris. 1989. V. 309. P. 299–303.
6. *Johnson R., Kamenskii M., Nistri P.* On the existence of periodic solutions of the Navier–Stokes equations in thin domain using the topological degree // J. of Dynamics and Differ. Equat. 2000. V. 12. № 4. P. 681–712.
7. *Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R.* Navier–Stokes Equations and Turbulence. Cambridge, 2009.
8. *Звягин В.Г.* Введение в топологические методы нелинейного анализа. Воронеж, 2014.
9. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье–Стокса в главной части // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 1. С. 94–127.
10. *Гурова И.Н.* Одно утверждение типа принципа родственности и вторая теорема Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения параболических уравнений // Качественные и приближённые методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1982. С. 47–58.
11. *Красносельский М.А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
12. *Соболевский П.Е.* О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 1. С. 45–48.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.
После доработки 02.09.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1566–1570

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.51

БИФУРКАЦИЯ ХОПФА В СИСТЕМЕ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ИНФЕКЦИЕЙ

© 2023 г. А. П. Крищенко, О. А. Поддерегин

Исследуется модель системы хищник–жертва с возможной инфекцией жертв в виде трёхмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью метода локализации инвариантных компактов доказывается существование аттрактора и находится компактное положительно инвариантное множество, оценивающее его положение. Находятся условия вымирания популяций и существования положений равновесия. Предлагается численный метод нахождения бифуркации Хопфа пространственного положения равновесия и приводится пример возникающего устойчивого предельного цикла.

DOI: 10.31857/S0374064123110122, EDN: PEXCDU

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую динамику взаимодействия популяций хищников и жертв, при которой жертвы подвержены заболеванию [1]:

$$\dot{x_1} = b_1(x_1+x_2)(1-x_1) - \frac{x_1x_3}{b_2+x_1+x_2} - b_4x_1x_2,$$

$$\dot{x_2} = b_4x_1x_2 - \frac{x_2x_3}{b_2+x_1+x_2} - b_5x_2 - b_1(x_1+x_2)x_2,$$

$$\dot{x_3} = \frac{(x_1+x_2)x_3}{b_2+x_1+x_2} - b_3x_3, \tag{1}$$

где $\dot{\{\cdot\}} = d\{\cdot\}/dt$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_{+,0}=\{x\geqslant 0\}$, x_1 (x_2) – плотность популяции восприимчивых (инфицированных) жертв, а x_3 – плотность популяции хищников. Параметры b_i, $i=\overline{1,5}$, этой системы предполагаются положительными.

Для системы (1) докажем, что множество $\mathbb{R}^3_{+,0}$ положительно инвариантно, существует положительно инвариантный компакт, содержащий все инвариантные компакты, все решения (траектории) продолжаются на неограниченный вправо интервал времени и система имеет аттрактор. Кроме того, найдём условия вымирания популяций инфицированных жертв, хищников и предложим метод нахождения бифуркации Хопфа внутреннего положения равновесия, в результате которой в системе возникает устойчивый предельный цикл внутри множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$. Отметим, что система (1) в инвариантной плоскости $\{x_2=0\}$ описывает взаимодействие хищников и жертв при отсутствии инфекции и известно, что в этой двумерной системе может происходить другая бифуркация Хопфа, в результате которой появляется предельный цикл в множестве $\{x_2=0\}$.

2. Необходимые сведения. Все компактные инвариантные множества системы $\dot{x} = F(x)$, $F\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, содержащиеся в подмножестве $Q\subset\mathbb{R}^n$, содержатся в *локализирующем множестве* $\Omega(\phi,Q)$, соответствующем функции $\phi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ (*локализирующей функции*) и множеству $Q\subset\mathbb{R}^n$ [2],

$$\Omega(\phi,Q)=\{x\in Q:\phi_{\inf}(Q)\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\sup}(Q)\},$$

где

$$\phi_{\inf}(Q)=\inf\{\phi(x):x\in S(\phi)\bigcap Q\},\quad \phi_{\sup}(Q)=\sup\{\phi(x):x\in S(\phi)\bigcap Q\},$$

$S(\phi)=\{x\in\mathbb{R}^n : \dot\phi(x)=0\}$ – *универсальное сечение функции* ϕ, а $\dot\phi$ – производная функции ϕ в силу системы $\dot x = F(x)$. Пусть

$$\Omega(\phi,Q,\epsilon_-,\epsilon_+)=\{x\in Q:\phi_{\inf}(Q)-\epsilon_-\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\sup}(Q)+\epsilon_+\},\quad \epsilon_-,\epsilon_+>0.$$

Утверждение 1. *Пусть множество Q положительно инвариантно; начинающиеся в Q траектории системы определены на неограниченном вправо интервале времени; для любого $\epsilon>0$ существует $\delta>0$, что $\dot\phi(x)<-\delta<0$ при $x\in Q\bigcap\{\phi_{\sup}(Q)+\epsilon_+\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\sup}(Q)+\epsilon_++\epsilon\}$, и для любого $\epsilon>0$ существует $\delta>0$, что $\dot\phi(x)>\delta>0$ при $x\in Q\bigcap\{\phi_{\inf}(Q)-\epsilon_--\epsilon\leqslant\phi(x)\leqslant\phi_{\inf}(Q)-\epsilon_-\}$. Тогда любая траектория системы, начинающаяся в $Q\setminus\Omega(\phi,Q,\epsilon_-,\epsilon_+)$, попадает в положительно инвариантное множество $\Omega(\phi,Q,\epsilon_-,\epsilon_+)$ за конечное время.*

3. Локализация инвариантных компактов и её следствия. Множество $\mathbb{R}^3_{+,0}$ положительно инвариантно, так как траектории системы (1) не могут выйти из $\mathbb{R}^3_{+,0}$ через его границу. Действительно, граница множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$ состоит из точек, у которых одна или более координат равны нулю, а остальные координаты положительны. Пусть $x_0=(x_1(0),x_2(0),x_3(0))$ – одна из таких точек и она является начальной для траектории $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$, $t\in[0,T)$. Тогда $x(t)\in\mathbb{R}^3_{+,0}$ при $t\in[0,\epsilon)$, $0<\epsilon\ll1$, т.е. $x_i(t)\geqslant0$, $i=1,2,3$. Действительно, это верно для $x_i(t)$, если $x_i(0)>0$. Если $x_1(0)=0$, то $\dot x_1(0)=b_1x_2(0)$ и $x_1(t)>0$ при $x_2(0)>0$, а при $x_2(0)=0$ выполнено равенство $\dot x_2(0)=0$, и поэтому $x_2(t)=0$, $x_1(t)=0$. Если $x_2(0)=0$, то $\dot x_2(t)=0$, и аналогично для x_3: если $x_3(0)=0$, то $\dot x_3(0)=0$ и $x_3(t)=0$.

Утверждение 2. *Все компактные инвариантные множества системы (1) содержатся в положительно инвариантных множествах*

$$\Omega_1=\{x_1+x_2\leqslant1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0},\quad \Omega_2=\{x_1+x_2\leqslant1,x_1+x_2+x_3\leqslant1+b_1/(4b_3)\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$$

и множество Ω_2 компактно.

Доказательство. Пусть $\phi_1(x)=x_1+x_2$. Тогда в $\mathbb{R}^3_{+,0}$

$$\dot\phi_1(x)=b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2)-\frac{(x_1+x_2)x_3}{b_2+x_1+x_2}-b_5x_2$$

и $\dot\phi_1(x)<0$ при $\phi_1(x)=x_1+x_2>1$. Поэтому множество $S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}=\{\dot\phi_1=0\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$ содержится в множестве $\{0\leqslant\phi_1(x)\leqslant1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$. Поскольку $\phi_1(x_0)=1$ в точке $x_0=(1,0,0)\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$, а $\phi_1(x_*)=0$ в точке $x_*=(0,0,0)\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$, то

$$\sup\{\phi_1(x):x\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}\}=1,\quad \inf\{\phi_1(x):x\in S(\phi_1)\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}\}=0,$$

и локализирующее множество $\Omega(\phi_1,\mathbb{R}^3_{+,0})=\{0\leqslant\phi_1(x)\leqslant1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}=\Omega_1$. Множество Ω_1 положительно инвариантно, поскольку $\dot\phi_1(x)<0$ в $\mathbb{R}^3_{+,0}\setminus\Omega_1$.

Пусть теперь $\phi_2(x)=x_1+x_2+x_3$. Тогда

$$\dot\phi_2(x)=\dot{x_1}+\dot{x_2}+\dot{x_3}=b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2)-b_5x_2-b_3x_3\leqslant\frac{b_1}{4}-b_3x_3$$

и в $S(\phi_2)\bigcap\Omega_1$ выполнено неравенство $\phi_2(x)\leqslant1+b_1/(4b_3)$. Следовательно,

$$\sup\{\phi_2(x):x\in S(\phi_2)\bigcap\Omega_1\}\leqslant1+b_1/(4b_3),\quad \inf\{\phi_2(x):x\in S(\phi_2)\bigcap\Omega_1\}=0$$

и $\Omega(\phi_2,\Omega_1)\subset\{0\leqslant\phi_2(x)\leqslant1+b_1/(4b_3)\}\bigcap\Omega_1=\Omega_2$. Множество Ω_2 положительно инвариантно, поскольку $\dot\phi_2(x)<0$ в $\Omega_1\setminus\Omega_2$, и компактно.

Следствие 1. *Если $a_1,a_2\geqslant0$, то множества $\Omega_{1,a_1}=\{x_1+x_2\leqslant1+a_1\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$, $\Omega_{2,a_1,a_2}=\{x_1+x_2\leqslant1+a_1,x_1+x_2+x_3\leqslant1+a_1+b_1/(4b_3)+a_2\}\bigcap\mathbb{R}^3_{+,0}$ положительно инвариантны, и множество Ω_{2,a_1,a_2} компактно.*

Следствие 2. *Все решения (траектории) системы (1) продолжаются на неограниченный вправо интервал времени.*

Доказательство. Известно, что решение автономной C^1-системы обыкновенных дифференциальных уравнений в любом компакте продолжается вправо или до границы компакта, или на неограниченный вправо интервал времени [3, с. 107]. Для любой траектории системы (1) существуют положительные a_1, a_2, при которых её начальная точка принадлежит компакту Ω_{2,a_1,a_2}. Этот компакт положительно инвариантен, и траектория не может выйти на его границу за конечное время. Следовательно, траектория продолжается на неограниченный вправо интервал времени.

4. Асимптотическое поведение траекторий. Справедливо следующее

Утверждение 3. *Любая траектория системы (1), проходящая через лежащую вне множеств* Ω_{1,ε_1}, $\Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, *где* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, *точку, попадает в эти множества за конечное время и не выходит из них.*

Доказательство. В множестве $\mathbb{R}^3_{+,0}\backslash\Omega_{1,\varepsilon_1} = \{\phi_1(x) = x_1+x_2 > 1+\varepsilon_1\}$ для $\dot{\phi}_1$ справедливо неравенство $\dot{\phi}_1 \leqslant b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2) \leqslant -\delta < 0$, $\delta = b_1(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1 > 0$. Таким образом, согласно утверждению 2, все траектории попадают в множество Ω_{1,ε_1} за конечное время и не выходят из него.

В множестве $\Omega_{1,\varepsilon_1} \setminus \Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{\phi_1(x) = x_1+x_2 \leqslant 1+\varepsilon_1, x_1+x_2+x_3 > 1+\varepsilon_1+b_1/(4b_3)+\varepsilon_2\}$ выполнено равенство $x_3 = 1+\varepsilon_1+b_1/(4b_3)+\varepsilon_2-(x_1+x_2)+d$, $d > 0$, и поэтому в этом множестве

$$\dot{\phi}_2(x) \leqslant b_1(x_1+x_2)(1-x_1-x_2) - b_3\left(1+\varepsilon_1+\frac{b_1}{4b_3}+\varepsilon_2-(x_1+x_2)+d\right) \leqslant -b_3(\varepsilon_2+d) < 0.$$

Следовательно, согласно утверждению 2, все траектории попадают в множество $\Omega_{1,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ за конечное время и не выходят из него.

Следствие 3. *Предельные множества всех траекторий системы (1) содержатся в компактном положительно инвариантном множестве* Ω_2, *и это множество содержит аттрактор системы.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что множества $\Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ компактны, положительно инвариантны и содержат предельные множества всех траекторий, а $\Omega_2 = \bigcap_{\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0}\Omega_{2,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$.

5. Вымирание популяций. Теорема Ла-Салля позволяет определить следующие условия вымирания популяций.

Утверждение 4. *При выполнении неравенства*

$$b_3 > \frac{1}{b_2+1} \tag{2}$$

все траектории системы стремятся к множеству $\{x_3 = 0\}\bigcap\Omega_2$, *а при выполнении неравенства*

$$b_4 < b_1 + b_5 \tag{3}$$

– к множеству $\{x_2 = 0\}\bigcap\Omega_2$.

Доказательство. Достаточно проверить, что при выполнении неравенства (2) ((3)) предельные множества всех траекторий содержатся в множестве $\{x_3 = 0\}\bigcap\Omega_2$ $(\{x_2 = 0\}\bigcap\Omega_2)$. Для этого сначала рассмотрим функцию $V(x) = x_3$. Её производная в силу системы равна $\dot{x}_3$, и в Ω_2 выполнено неравенство

$$\dot{V} = x_3\left(\frac{x_1+x_2}{b_2+x_1+x_2} - b_3\right) \leqslant x_3\left(\frac{1}{b_2+1} - b_3\right) \leqslant 0,$$

причём $\dot{V} = 0$ в Ω_2 при (2) лишь в случае $x_3 = 0$. Следовательно, предельные множества всех траекторий содержатся в множестве $\Omega_2\bigcap\{x_3 = 0\}$.

Теперь рассмотрим функцию $W(x)=x_2$. Её производная в силу системы равна $\dot{x}_2$, и в Ω_2 выполнено неравенство

$$\dot{W} \leqslant x_2(b_4x_1-b_5-b_1(x_1+x_2)) \leqslant x_2((b_4-b_1)(x_1+x_2)-b_5) \leqslant x_2((b_4-b_1)-b_5) \leqslant 0,$$

причём $\dot{W}=0$ в Ω_2 при (3) лишь в случае $x_2=0$. Следовательно, предельные множества всех траекторий содержатся в множестве $\Omega_2 \bigcap \{x_2=0\}$.

6. Положения равновесия на границе множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$. Несложно проверить следующие необходимые и достаточные условия существования этих положений равновесия.

Утверждение 5. *У системы (1) при любых значениях параметров существуют положения равновесия* $E_1(0,0,0)$, $E_2(1,0,0)$. *При выполнении неравенства* $b_3<1/(1+b_2)$ *существует положение равновесия* $E_3(x_1^{(3)},0,x_3^{(3)})$, $x_1^{(3)}>0$, $x_3^{(3)}>0$, *а при выполнении неравенства* $b_4>b_1+b_5$, *– положение равновесия* $E_4(x_1^{(4)},x_2^{(4)},0)$, $x_1^{(4)}>0$, $x_2^{(4)}>0$.

7. Внутреннее положение равновесия. Из третьего уравнения системы (1) следует, что для существования положения равновесия $E_5(x_1^{(5)},x_2^{(5)},x_3^{(5)})$ внутри $\mathbb{R}^3_{+,0}$ необходимо выполнение неравенства $b_3<1$.

Введём три новых положительных параметра: $\alpha=b_1/b_4$, $\beta=b_5/b_4$, $\gamma=b_2b_3/(1-b_3)$.

Утверждение 6. *У системы (1) при выполнении неравенств*

$$\alpha+\beta<\gamma<\gamma^*(\alpha,\beta), \tag{4}$$

где $\alpha+\beta<1$, $\gamma^*(\alpha,\beta)\in(0,1)$ *– положительный корень многочлена*

$$g_{\alpha,\beta}(\gamma)=\alpha\gamma^2+((1-\alpha)\beta-\alpha)\gamma-\beta^2,$$

существует внутреннее положение равновесия $E_5(x_1^{(5)},x_2^{(5)},x_3^{(5)})$, *где*

$$x_1^{(5)}=\frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta},\quad x_2^{(5)}=\gamma-\frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta},\quad x_3^{(5)}=b_4(b_2+\gamma)\left(\frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta}-\alpha\gamma-\beta\right).$$

Доказательство. Отметим, что $\alpha+\beta\leqslant 1$, так как иначе популяция x_2 вымирает и внутреннего положения равновесия нет.

Координаты для точки E_5 находятся после несложных алгебраических преобразований. Первые две координаты положительны тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta<\gamma$, а неравенство $x_3^{(5)}>0$ равносильно условию $\alpha\gamma/(\gamma-\beta)-\alpha\gamma-\beta>0$, т.е. $g_{\alpha,\beta}(\gamma)<0$. В результате получаем условие положительности координат в виде неравенств $\alpha+\beta<\gamma<\gamma^*(\alpha,\beta)$, которые совместны при $\alpha+\beta<1$, так как в этом случае $g_{\alpha,\beta}(\alpha+\beta)=\alpha^2(\alpha+\beta-1)<0$ и $\gamma^*(\alpha,\beta)>$ $>\alpha+\beta$. Если $\alpha+\beta=1$, то $g_{\alpha,\beta}(\alpha+\beta)=0$, $\gamma^*(\alpha,\beta)=1=\alpha+\beta$, и условие положительности координат не выполняется ни при каком γ.

Замечание. *Неравенство* $\gamma^*(\alpha,\beta)\geqslant\alpha+\beta$ *означает, что в пространстве параметров поверхность, задаваемая квадратным трёхчленом в области* $\gamma>0$, *расположена по одну сторону от плоскости* $\gamma=\alpha+\beta$ *при* $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<1$.

8. Бифуркация Хопфа. Исследуем поведение собственных чисел внутреннего положения равновесия с помощью численных расчётов. Для этого построим сетку точек в области параметров системы, в которой система имеет внутреннее положение равновесия. В каждом узле сетки вычислим спектр внутреннего положения равновесия. Найдём два узла, в каждом из которых действительные собственные числа отрицательны, а два других комплексные, причём действительные части этих пар комплексных собственных чисел имеют противоположные знаки. Соединим эти два узла кривой, которая лежит в области существования внутренних положений равновесия, и в каждой точке которой действительное собственное значение отрицательно. Если существует точка на кривой, в окрестности которой действительная часть комплексных собственных значений меняет знак с отрицательного на положительный, то она соответствует бифуркации Хопфа, что подтвердим наличием соответствующей периодической траектории.

Сначала задаём сетку точек в области (4) первого октанта в пространстве (α, β, γ) и в множестве $(b_3, b_4) = (0,1) \times (0, B_4)$, $B_4 > 0$, первой четверти плоскости параметров (b_3, b_4). В каждом узле $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, b_{3,l}, b_{4,m})$ произведения этих сеток перейдём к исходным параметрам по формулам $b_1 = \alpha_i b_{4,m}$, $b_2 = ((1 - b_{3,l})/b_{3,l})\gamma_k$, $b_3 = b_{3,l}$, $b_4 = b_{4,m}$, $b_5 = \beta_j b_{4,m}$. Для этих параметров вычисляем спектр внутреннего положения равновесия и выбираем два нужных узла. Так найден набор значений исходных параметров $b^{(1)} = (0.06, 0.2768, 0.5792, 0.6, 0.01)$, при котором $\lambda_1 = -0.1563$, $\lambda_{2,3} = -0.0039 \pm 0.0859i$, и набор значений параметров $b^{(2)} = (0.06, 0.1912, 0.5916, 0.6, 0.01)$, при котором собственные числа равны $\lambda_1 = -0.0942$, $\lambda_{2,3} = 0.0017 \pm 0.0958i$.

В точках отрезка $b(\kappa) = b^{(1)} + (b^{(2)} - b^{(1)})\kappa$, $\kappa \in [0,1]$, спектр имеет нужную структуру, а именно: одно собственное число отрицательно, а два других собственных числа комплексно сопряжённые, и существует значение $\kappa = \kappa^*$, $b(\kappa^*) = (0.06, 0.2149, 0.5882, 0.6, 0.01)$, в окрестности которого действительная часть комплексных собственных чисел меняет знак с ростом κ с отрицательного на положительный. Это означает, что в системе происходит бифуркация Хопфа, в результате которой появляется устойчивый цикл. Например, система с параметрами $b^{(2)}$ имеет такой цикл с начальными данными $(0.1526, 0.2366, 0.0009)$ в окрестности внутреннего положения равновесия $E_5(0.1064, 0.1706, 0.0174)$ (рисунок).

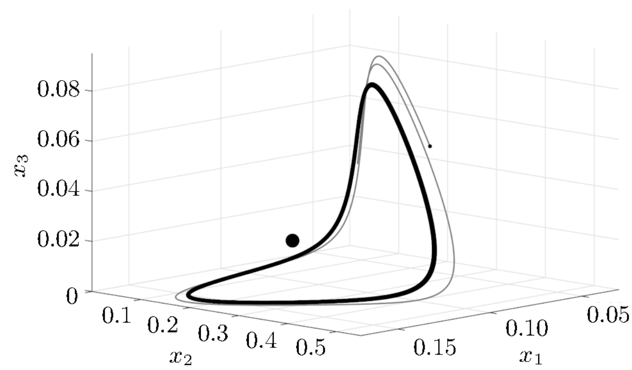

Рисунок. Устойчивый цикл и внутреннее положение равновесия системы с параметрами $b^{(2)}$.

Заключение. С помощью метода локализации инвариантных компактов найдены условия вымирания популяций хищников и инфицированных жертв. Они являются необходимыми и достаточными, что следует из условий существования положений равновесия E_2 и E_3. При этих положениях равновесия могут существовать внутреннее положение равновесия, пространственная устойчивая периодическая траектория и более сложные аттракторы.

Работа выполнена при поддержке программы “Приоритет 2030” МГТУ имени Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bate A.M., Hilkerr F.M.* Complex dynamics in an eco-epidemiological model // Bull. Math. Biol. 2013. V. 75. P. 2059–2078.
2. *Крищенко А.П.* Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 12. С. 1597–1604.
3. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 2012.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 28.04.2023 г.
После доработки 28.04.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977.1

О ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОСТИ В АЛГОРИТМЕ "SUPER-TWISTING"

© 2023 г. В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий

Исследована устойчивость модифицированного (при вариации параметра нелинейности) алгоритма "super-twisting". Анализ основан на мажорировании траекторий системы с произвольным параметром нелинейности траекториями систем классического алгоритма "super-twisting". Получены условия устойчивости для модифицированных систем, а также оценки на размеры области устойчивости в зависимости от параметров системы.

DOI: 10.31857/S0374064123110134, EDN: PFBOCN

Введение. Задача стабилизации является одной из центральных в теории управления, в том числе и для систем с неопределённостью (с неизвестными неизмеряемыми входными воздействиями). Одним из наиболее популярных алгоритмов управления, используемых для достижения робастной по отношению к внешним возмущениям устойчивости динамических систем, является алгоритм "super-twisting" [1, 2]. Для системы уравнений данного алгоритма было доказано существование набора параметров, обеспечивающих устойчивость [2]. Впоследствии с помощью метода функций Ляпунова были получены алгебраические достаточные условия устойчивости [3, 4]. Наконец, в работах [5, 6] с помощью анализа системы при "наихудшем возмущении" были найдены необходимые и достаточные условия её устойчивости.

Традиционно при изучении данного алгоритма варьируются только множители перед нелинейным и разрывным слагаемыми в первом и втором уравнениях системы соответственно при одинаковом значении степени, равном $1/2$. Целью данной работы является изучение свойства устойчивости обобщённого (при различных значениях степени) алгоритма "super-twisting".

Далее используется следующее обозначение: для $x \in \mathbb{R}$

$$\lceil x \rfloor^{\alpha} = \operatorname{sign}(x)|x|^{\alpha}.$$

1. Постановка задачи. Наихудшее возмущение. Рассматривается система

$$\dot{x}_1 = x_2 - k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha}, \quad \dot{x}_2 = \xi - \mu\lceil x_1 \rfloor^{0}, \tag{1}$$

где $\xi = \xi(t)$ – неизвестное ограниченное $(|\xi(t)| \leqslant \xi_0)$ измеримое входное воздействие, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$.

Требуется исследовать данную систему на устойчивость в зависимости от значений параметров k, μ и α.

При $\alpha = 1/2$ данная система представляет собой классический [2] алгоритм "super-twisting". Для неё с помощью анализа фазового пространства было показано [6], что траектории системы с любым возмущением из рассматриваемого класса будут ограничены траекторией системы с "наихудшим" возмущением:

$$\xi^* = \xi_0 \operatorname{sign}(\dot{x}_1) = \xi_0 \operatorname{sign}(x_2 - k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha}). \tag{2}$$

Из ограниченности траекторий следует, что для исследования устойчивости таких систем достаточно рассматривать системы с возмущением (2).

Рассуждения о наихудшей помехе из работы [6] могут быть без изменений применены к системе (1) с произвольным параметром α. Всюду далее в данной статье будет рассматриваться система (1) с возмущением (2):

$$\dot{x}_1 = x_2 - k\lceil x_1 \rfloor^{\alpha}, \quad \dot{x}_2 = \xi^* - \mu\lceil x_1 \rfloor^{0}. \tag{3}$$

2. Анализ устойчивости. Для случая $\alpha = 1/2$ известны [6] необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1) с возмущением (2). Показано, что устойчивость системы если достигается, то является глобальной. Кроме того, для любых $\xi_0 > 0$, $\mu > \xi_0$ существует $k_0 = k_0(\mu, \xi_0)$ такое, что при любом $k > k_0$ система (3) с параметрами $k, \mu, \alpha = 1/2$ будет устойчива, при $k = k_0$ система устойчива, но не асимптотически, а при $k < k_0$ она неустойчива.

Не нарушая общности рассуждений, положим начальные условия для системы (3) равными $(0, x_2^0), x_2^0 > 0$. Рассматривать систему, в силу симметричности относительно начала координат, достаточно только в правой полуплоскости координатной плоскости, т.е. при $x_1 \geqslant 0$.

2.1. Случай $\alpha < 1/2$. Проанализируем устойчивость системы (3) при $0 < \alpha < 1/2$. Будем сравнивать траекторию системы (3) с произвольными параметрами $k, \mu, \alpha < 1/2$ с траекторией системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - k^* \lceil x_1 \rfloor^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi^* - \mu \lceil x_1 \rfloor^0, \tag{4}$$

где $k^* = k_0(\mu, \xi_0) + \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – сколь угодно малое положительное число. В силу приведённых выше рассуждений система (4) будет глобально асимптотически устойчивой.

Покажем, что существует окрестность начала координат, в которой траектория системы (4) будет ограничивать траекторию системы (3) с рассматриваемым набором параметров.

Заметим, что в области координатной плоскости, где

$$k\lceil x_1 \rfloor^\alpha \geqslant k^* \lceil x_1 \rfloor^{1/2}, \tag{5}$$

траектория системы (4) будет ограничивать траекторию системы (3). Действительно, в области, где знаки первой компоненты векторов скорости систем совпадают (области (a) и (c) на рисунке), значения второй компоненты векторов скоростей систем совпадают. Значит, поскольку величина $\dot{x}_1$ больше в системе (4), траектория системы (3) не может пересечь траекторию системы (4). Случай когда знаки первых компонент вектора скорости двух систем отличаются возможен только если $\dot{x}_1 < 0$ для системы (3) (область (b) на рисунке). Следовательно, тогда пересечение траекторий невозможно, и траектория системы (4) будет ограничивать траекторию системы (3).

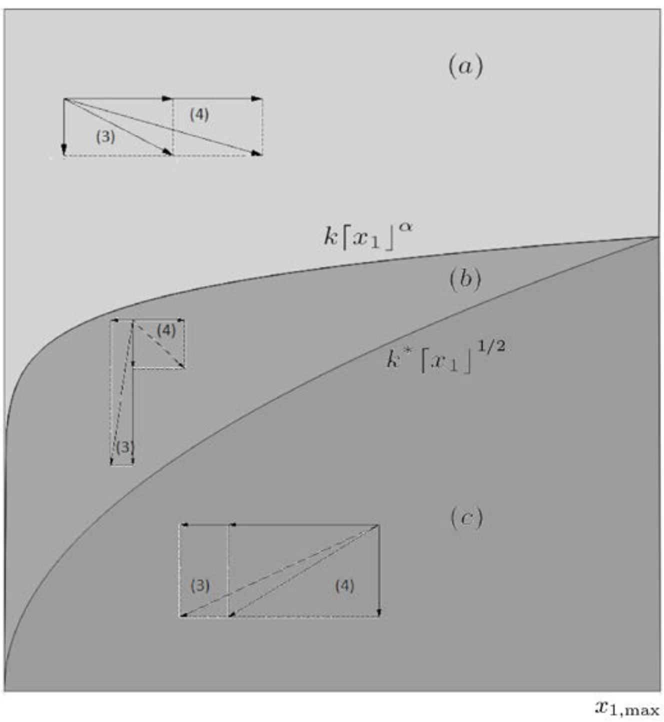

Рисунок. Сравнение векторов скоростей систем (3) и (4).

Получим оценку на величину начального условия x_2^0, гарантирующую выполнение неравенства (5). Очевидно, что поскольку траектории системы (4) ограничивают сверху траектории системы (3) достаточно выбрать такое начальное условие, чтобы это неравенство выполнялось для системы (4). Неравенство (5) примет вид

$$|x_1| \leqslant (k/k^*)^{2/(1-2\alpha)} = x_{1,\max}. \tag{6}$$

Решение системы (4) было найдено в работе [6]. В частности, была получена зависимость максимального значения координаты x_1 (обозначим его x_1^*) от начального условия x_2^0:

$$x_1^* = \begin{cases} \dfrac{(x_2^0)^2}{2b}\exp\left\{\dfrac{-2k^*}{\sqrt{8b-(k^*)^2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{k^*}{\sqrt{8b-(k^*)^2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{4b-(k^*)^2}{k^*\sqrt{8b-(k^*)^2}}\right)\right\}, & (k^*)^2 < 8b,\\ \left(\dfrac{x_2^0 u_1}{b+k^*u_1}\right)^2\left(\dfrac{u_2(b+k^*u_1)}{u_1(b+k^*u_2)}\right)^{2B}, & (k^*)^2 \geqslant 8b, \end{cases}$$

где $b=\mu-\xi_0$, $u_{1,2}=(-k\pm\sqrt{k^2-8b})/4$, $B=-u_2/(u_1-u_2)$.

Для системы (4) неравенство (6) равносильно неравенству $x_1^* \leqslant x_{1,\max}$. Последнее можно записать как соотношение для начального условия x_2^0:

$$x_2^0 < \begin{cases} \sqrt{2b}\exp\left\{\dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{4b-k_0^2}{k_0\sqrt{8b-k_0^2}}\right)\right\}\sqrt{x_{1,\max}}, & k_0^2 < 8b,\\ \dfrac{b+k_0u_1}{u_1}\left(\dfrac{u_1(b+k_0u_2)}{u_2(b+k_0u_1)}\right)^B\sqrt{x_{1,\max}}, & k_0^2 \geqslant 8b. \end{cases} \tag{7}$$

Если для начальных условий системы (3) выполнено условие (7), то поскольку её траектория ограничена траекторией системы (4) для неё также будет выполнено и условие (6). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Система (1) с* $0<\alpha<1/2$, $\mu>\xi_0$ *и* $k>0$ *является локально асимптотически устойчивой. Выполнение условия (7) гарантирует сходимость системы.*

Следствие. *Если набор параметров* k, μ *обеспечивает устойчивости системы (3) при* $\alpha=1/2$ *(т.е. если* $k>k_0(\mu,\xi_0)$*), то при* $\alpha\to 1/2-0$ *область устойчивости системы (3) растёт, заполняя всю координатную плоскость.*

2.2. Случай $\alpha > 1/2$. Перейдём к рассмотрению случая $\alpha>1/2$. Аналогично случаю $\alpha<1/2$ будем сравнивать траекторию системы (3) с траекторией неустойчивой системы

$$\dot x_1 = x_2 - k_*\lceil x_1\rfloor^{1/2}, \quad \dot x_2 = \xi^* - \mu\lceil x_1\rfloor^0, \tag{8}$$

где $k_*=k_0(\mu,\xi_0)-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число.

Покажем, что существует окрестность начала координат, внутри которой траектории системы (8) ограничивают снизу траектории системы (3). Аналогичными случаю $\alpha<1/2$ рассуждениями легко показать, что такая ограниченность траекторий будет достигаться всюду в области, где $k\lceil x_1\rfloor^\alpha \leqslant k_*\lceil x_1\rfloor^{1/2}$, т.е. при

$$|x_1| \leqslant (k_*/k)^{2/(2\alpha-1)} = x_{1,\min}. \tag{9}$$

Для системы (8) эквивалентное условию (9) неравенство для начального условия x_2^0 запишется в виде

$$\begin{cases} x_2^0 < \sqrt{2b}\exp\left\{\dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{k_0}{\sqrt{8b-k_0^2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{4b-k_0^2}{k_0\sqrt{8b-k_0^2}}\right)\right\}\sqrt{x_{1,\min}}, & k_0^2 < 8b,\\ x_2^0 < \dfrac{b+k_0u_1}{u_1}\left(\dfrac{u_1(b+k_0u_2)}{u_2(b+k_0u_1)}\right)^B\sqrt{x_{1,\min}}, & k_0^2 \geqslant 8b. \end{cases} \tag{10}$$

В силу ограниченности траектории системы (8) траекторией системы (3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система (1) с* $1/2<\alpha<1$ *не является устойчивой ни для каких* $\mu>\xi_0$ *и* $k>0$. *При этом если траектории системы сходятся в некую ограниченную область, то она гарантированно будет содержать область, ограниченную траекториями системы (8) с начальными условиями, удовлетворяющими условию (10).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
2. *Levant A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
3. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Autom. Contr. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
4. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
5. *Seeber R., Horn M.* Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2018. P. 120–125.
6. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма “супер-скручивания”// Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 2. С. 252–256.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.09.2023 г.
После доработки 08.09.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1575–1588

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2023. Т. 59. № 6).

DOI: 10.31857/S0374064123110146, EDN: ORPMVN

А. Х. Сташ (Майкоп) “Об управлении суслинскими спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней линейных однородных дифференциальных уравнений” (15 сентября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110158, EDN: PFDCPP

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых наборами $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ непрерывных функций, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$. Далее звёздочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим $\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a\in\tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a)$.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2 [1–3]. Для момента $t > 0$ и функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ введём обозначения:

$\nu^-(y, t)$ – число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ – число её *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ – число её *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$.

Далее для вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $\psi y \equiv (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ введём обозначение $\nu^\gamma(y, m, t) \equiv \nu^\gamma(\langle\psi y, m\rangle, t)$, где $\gamma \in \{-, 0, +\}$ и $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ – скалярное произведение.

Определение 3 [1]. *Верхние* (*нижние*) *частоты Сергеева знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, t)\right).$$

Определение 4 [2, 3]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей* и *корней* функции $y \in \mathcal{S}_*^n$ зададим при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно равенствами

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\bullet^\gamma(y) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t)\right),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\gamma(y) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\circ^\gamma(y) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t}\nu^\gamma(y, m, t)\right).$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Определение 5. Множество всех значений показателя $\varkappa\colon \mathcal{S}_*(a) \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ на нетривиальных решениях уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ назовём *спектром* $\varkappa(\mathcal{S}_*(a))$ этого показателя уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$.

Определение 6 [4, с. 489]. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *суслинским множеством прямой* $\mathbb{R}$, если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ – *суслинское множество расширенной числовой прямой*, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой $\mathbb{R}$ и некоторого (возможно, пустого) подмножества множества $\mathbb{R}$.

Все показатели колеблемости решений линейных однородных уравнений первого порядка равны нулю, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и нижние) показатели равны между собой, и их спектры состоят из одного значения [3].

В работе [5] доказано существование уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат конечные подмножества, состоящие из сколь угодно большого наперёд заданного числа метрически и топологически существенных значений, кроме того, построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат одно и то же счётное множество метрически и топологически существенных значений. В статье [6] приводится линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой.

В работах [7, 8] доказано, что спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. В предположении, что спектры содержат точку нуль, верно и обратное утверждение [9], которое распространяется и на верхние сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней, как показывает

Теорема. *Для любого* $n > 2$ *и произвольного содержащего нуль суслинского множества* $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *существует дифференциальное уравнение* $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, *удовлетворяющее равенствам*

$$\hat{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^0_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^+_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^-(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^0(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^+(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577. 3. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 4. Куратовский К. Топология. Т. 1. М., 1966. 5. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–22. 6. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17. 7. Быков В.В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. 8. Барабанов Е.А., Войделевич А.С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609. 9. Войделевич А.С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32.

А. Н. Ветохин (Москва) “К задаче Миллионщикова о классе Бэра минорант показателей Ляпунова спустя 30 лет” (22 сентября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S037406412311016X, EDN: PFDWLW

Напомним, что для заданных чисел $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$ для систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го из показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ определяется формулой

$$\underline{\lambda}_k(A) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}\|B(t)\|<\varepsilon} \lambda_k(A+B).$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A : \mathcal{M}\times\mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n \qquad (1)$$

построим функцию

$$\mu \mapsto \underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot\,)). \qquad (2)$$

В работе [1] был поставлен вопрос о точном бэровском классе функции (2). В.М. Миллионщиков установил, что при любом $n\in\mathbb{N}$ и $k=1$ миноранта младшего показателя Ляпунова совпадает с нижним центральным показателем Винограда [2], и потому функция (2) принадлежит третьему бэровскому классу. Оказалось, что при $n=3$ и $k=2,3$ функции $\underline{\lambda}_k(\cdot)$ принадлежат третьему бэровскому классу [3], аналогичный результат справедлив для произвольных $n\geqslant 3$ и $k=\overline{2,n}$ [4].

В статье [5] в случае когда $\mathcal{M}$ есть множество $\mathcal{B}$ иррациональных чисел с естественной метрикой числовой прямой установлено существование отображения (1), для которого функция (2) не принадлежит второму бэровскому классу. Этот результат обобщает

Теорема 1. *Если пространство $\mathcal{M}$ содержит множество типа $F_{\sigma\delta}$, не являющееся множеством типа $G_{\delta\sigma}$, то найдётся такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

Р. Бэр установил [6], что множество иррациональных чисел, у которых неполные частные при разложении в цепную дробь стремятся к бесконечности, является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\mathcal{B}$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Если $\mathcal{M}=[0,1]$, $n\geqslant 2$ и $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, то найдётся такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

Литература. 1. Миллионщиков В.М. Задачи о минорантах показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 11. С. 2014–2015. 2. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104. 3. Сергеев И.Н. К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1600–1601. 4. Быков В.В., Салов Е.Е. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 1. С. 33–40. 5. Ветохин А.Н. Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 34. № 10. С. 1313–1317. 6. Baire R. Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1906. V. 30. P. 1–48.

И. Н. Сергеев (Москва) “Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (29 сентября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110171, EDN: PFGGTM

При $n\in\mathbb{N}$ для заданной области $G\subset\mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}=f(t,x),\quad f(t,0)\equiv 0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad x\in G,\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G). \qquad (1)$$

Положим $B_\delta\equiv\{x_0\in\mathbb{R}^n : 0<|x_0|<\delta\}$ и $\Delta\equiv\sup\{\delta : B_\delta\subset G\}$, а через $x(\,\cdot\,,x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0,x_0)=x_0$.

Определение 1. Для системы (1) при $\varkappa=\lambda,\pi,\sigma$ соответственно назовём *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*:

а) *мерой устойчивости* [1, 2] такое число $\mu_\varkappa(f)\in[0,1]$, что при каждом $\mu<\mu_\varkappa(f)$ имеет место *μ-устойчивость*, а именно: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_\varepsilon\in(0,\Delta)$, что при каждом $\delta\in(0,\delta_\varepsilon)$ *относительная* мера в шаре B_δ (т.е. доля от его меры Лебега $\operatorname{mes}B_\delta$)

подмножества $M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$ всех значений $x_0\in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t,x_0)|<\varepsilon,\qquad \varliminf_{t\to+\infty}|x(t,x_0)|<\varepsilon,\qquad \varlimsup_{t\to+\infty}|x(t,x_0)|<\varepsilon, \tag{2}$$

не меньше μ, и наоборот, при каждом $\mu>\mu_\varkappa(f)$ такая μ-устойчивость не имеет места;

б) *мерой неустойчивости* [1, 2] такое число $\nu_\varkappa(f)\in[0,1]$, что при каждом $\nu<\nu_\varkappa(f)$ имеет место *ν-неустойчивость*, а именно: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_\varepsilon\in(0,\Delta)$, что при каждом $\delta\in(0,\delta_\varepsilon)$ *относительная* мера в шаре B_δ подмножества $N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$ всех значений $x_0\in B_\delta$, не удовлетворяющих соответствующему требованию (2), не меньше ν, и наоборот, при каждом $\nu>\nu_\varkappa(f)$ такая ν-неустойчивость не имеет места.

Введённые в определении 1 меры устойчивости и неустойчивости позволяют оценивать снизу возможность (в некотором смысле стохастическую) выбора начального значения возмущённого решения, удовлетворяющего требованию (2) и соответственно его отрицанию.

Определение 2. Система (1) при $\varkappa=\lambda,\pi,\sigma$ обладает *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*:

в) *устойчивостью* [3, 4] (или *почти устойчивостью* [5]), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta\in(0,\Delta)$, что $M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)=B_\delta$ (или соответственно $\operatorname{mes}M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)=\operatorname{mes}B_\delta$);

д) *полной* [3, 4] (или *почти полной* [5]) *неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon>0$ и $\delta\in(0,\Delta)$, что $N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)=B_\delta$ (или соответственно $\operatorname{mes}N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)=\operatorname{mes}B_\delta$).

Согласно [1, 2] для каждой системы (1) её ляпуновские, перроновские и верхнепредельные меры устойчивости и неустойчивости задаются формулами

$$\mu_\varkappa(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes}B_\delta},\quad \nu_\varkappa(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes}B_\delta},\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma, \tag{3}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$0\leqslant\mu_\lambda(f)\leqslant\mu_\sigma(f)\leqslant\mu_\pi(f)\leqslant1,\quad 0\leqslant\nu_\pi(f)\leqslant\nu_\sigma(f)\leqslant\nu_\lambda(f)\leqslant1, \tag{4}$$

$$0\leqslant\mu_\varkappa(f)+\nu_\varkappa(f)\leqslant1,\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma. \tag{5}$$

Все следующие утверждения опубликованы в работе [1]. Прежде всего, из равенств

$$\operatorname{mes}M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)+\operatorname{mes}N_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)=\operatorname{mes}B_\delta,\quad \varepsilon>0,\quad 0<\delta<\Delta,\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma, \tag{6}$$

вытекает

Теорема 1. *Если в формулах (3) при некотором $\varkappa\in\{\lambda,\pi,\sigma\}$ только у первой или только у второй меры нижний предел при $\delta\to+0$ заменить верхним, то она в сумме с другой мерой будет давать уже ровно 1, но будет оценивать аналогичную описанной в определении 1 возможность выбора начального значения возмущённого решения с требованием (2) или соответственно его отрицанием уже не снизу, а сверху.*

Далее в линейном случае оба слагаемых в формуле (6) совсем не зависят от δ, а ляпуновские и верхнепредельные меры могут принимать лишь свои крайние значения, заведомо реализуемые также и на перроновских мерах. Это и устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 2. *Для любой линейной системы вида (1) в формулах (3) для всех упоминаемых в них мер устойчивости и неустойчивости пределы при $\delta\to+0$ являются точными, причём возможны только следующие две ситуации:*

1) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f)=\mu_\sigma(f)=\mu_\pi(f)=1>0=\nu_\pi(f)=\nu_\sigma(f)=\nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает устойчивостью всех трёх типов;

2) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f)=\mu_\sigma(f)=0<1=\nu_\sigma(f)=\nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает ляпуновской и верхнепредельной почти полной (возможно, даже полной) неустойчивостью.

Теорема 3. *При любом $n \in \mathbb{N}$ каждая из двух перечисленных в теореме 2 ситуаций реализуется на некоторой ограниченной линейной автономной системе вида (1), причём вторая ситуация реализуется по меньшей мере на двух системах: одна из них обладает перроновской полной неустойчивостью, а другая, неавтономная, – перроновской устойчивостью.*

В одномерном случае множество всевозможных реализуемых наборов различных мер устойчивости и неустойчивости оказывается конечным, что и утверждают следующие две теоремы.

Теорема 4. *При $n = 1$ меры устойчивости и неустойчивости любой системы (1) удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f), \quad \nu_\lambda(f) = \nu_\sigma(f) \geqslant \nu_\pi(f), \tag{7}$$

$$\mu_\varkappa(f), \nu_\varkappa(f) \in \{0, 1/2, 1\}, \quad \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma. \tag{8}$$

Теорема 5. *При $n = 1$ оба неравенства в соотношениях (7) для некоторой ограниченной линейной системы (1) являются строгими, а случаи всех равенств в (7) для каждой пары мер устойчивости и неустойчивости, задаваемой условиями (8), реализуются на некоторых автономных системах (1).*

В теореме 3 также подтверждена реализуемость для автономных линейных систем как нулевых, так и единичных значений сразу всеми мерами устойчивости или неустойчивости. Для автономных нелинейных двумерных систем множество реализуемых наборов всех мер оказывается уже довольно богатым, что показывают

Теорема 6. *При $n = 2$ для каждого отдельного нестрогого неравенства в (4) существуют две автономные системы вида (1): для одной из них оно обращается в равенство, а для другой – в строгое неравенство.*

Теорема 7. *При $n = 2$ для любого $r > 0$ существует автономная система (1), у которой меры устойчивости всех трёх типов принимают одно и то же положительное значение, равно как и все меры неустойчивости, причём отношение этих двух значений равно r, а правое неравенство в (5) обращается в равенство.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904. 2. Сергеев И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 851–852. 3. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 4. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 5. Сергеев И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

Н. В. Денисов, В. Д. Васильев (Москва) “Определение и свойства примитивной меры устойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (6 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110183, EDN: PFOBHO

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (t,x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n}, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(G). \tag{1}$$

Примитивной мерой устойчивости нулевого решения системы (1) назовём величину

$$\mu_f \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{mes}\{x_0 \in U_\varepsilon(0) : |x(\,\cdot\,,x_0)| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}_+\}}{\operatorname{mes} U_\varepsilon(0)}, \tag{2}$$

где $U_\varepsilon(0)$ – ε-окрестность точки нуль фазового пространства (с мерой Лебега mes), а $x(\,\cdot\,,x_0)$ – решение системы с начальным значением $x(0,x_0) = x_0$. Через M_f обозначим множество всех частичных пределов при $\varepsilon \to +0$ дроби в правой части формулы (2): если это множество не одноточечно, то меру μ_f считаем *не определённой.*

Следующие утверждения показывают, в частности, отсутствие какой-либо логической связи между значениями примитивной меры устойчивости (в отличие от аналогичных мер из работ [1–3]) системы (1) и устойчивостью или неустойчивостью по Ляпунову этой системы (точнее, её нулевого решения).

Теорема 1. *Для любого* $\alpha \in [0,1]$ *существует устойчивая система (1), примитивная мера устойчивости которой равна* $\mu_f = \alpha$.

Теорема 2. *Для любого* $\alpha \in [0,1]$ *существует неустойчивая система (1), примитивная мера устойчивости которой равна* $\mu_f = \alpha$.

Теорема 3. *Существует устойчивая система, примитивная мера устойчивости* μ_f *которой не определена.*

Теорема 4. *Существует неустойчивая система, примитивная мера устойчивости* μ_f *которой не определена.*

Теорема 5. *Для любого отрезка* $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ *существует система (1), удовлетворяющая равенству* $M_f = [\alpha,\beta]$.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904. 2. Сергеев И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 851–852. 3. Сергеев И.Н. Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 11. С. 1581–1583.

А. К. Деменчук, А. В. Конюх (Минск) “О теореме Массеры о существовании периодических решений линейных периодических систем и её обобщении” (13 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110195, EDN: PJDKMQ

Проблеме существования периодических решений обыкновенных дифференциальных периодических систем, в том числе линейных, посвящено огромное число работ (см., например, монографии [1–3] и приведённую в них библиографию). При этом достаточно длительное время априори предполагалась соизмеримость периодов самой системы и её периодического решения. Х.Л. Массера был, по-видимому, первым, кто показал ошибочность такого предположения. В 1950 г. он получил достаточные условия существования решений, период которых несоизмерим с периодом самой системы [4]. Впоследствии такого рода решения были названы *сильно нерегулярными* [5, с. 17], а описываемые ими колебания – *асинхронными.* Необходимое и достаточное условие наличия у линейной дифференциальной периодической неоднородной системы сильно нерегулярных решений получено в статье [6].

В работе [7] Х.Л. Массера доказал, что линейная неоднородная система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с непрерывными ω-периодическими функциями A, f имеет ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда она имеет ограниченное решение. Этот факт существенно упростил проблему, сведя вопрос о наличии у линейной ω-периодической системы решений из класса $\mathcal{P}_\omega$ непрерывно дифференцируемых ω-периодических вектор-функций к вопросу о наличии у неё решений из более широкого класса $\mathcal{B}$ ограниченных непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Это определило интерес к данному результату и обусловило его многочисленные обобщения на другие типы систем и их решений (см., например, работы [8–10]).

Возникает естественный вопрос, нельзя ли усилить указанную теорему Массеры так, чтобы из того, что ω-периодическая система (1) имеет решение в более широком, чем $\mathcal{B}$, классе, также следовало бы, что она имеет и ω-периодическое решение. Одному из решений этой задачи и посвящён настоящий доклад. Дадим следующее

Определение. Введём класс $\mathcal{L}$ непрерывно дифференцируемых функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *растущих медленнее линейной функции*, т.е. удовлетворяющих хотя бы одному из двух условий:

$$x(t) = o(t), \quad t \to -\infty \quad \text{или} \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

Множество $\mathcal{B}$ содержится в $\mathcal{L}$, не совпадая с ним: так, функция $x(t) = (\ln(t^2+1), 1, \ldots, 1)^{\text{т}}$ удовлетворяет обоим условиям (2), но не является ограниченной. Поэтому теорему Массеры усиливает следующая

Теорема 1. *Если ω-периодическая система (1) имеет решение, растущее медленнее линейной функции, то она имеет и ω-периодическое решение.*

Для того чтобы понять, насколько существенно теорема 1 усиливает теорему Массеры, а заодно и насколько существенно сама теорема Массеры упрощает вопрос о наличии ω-периодических решений, наделим множества $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ метрикой равномерной сходимости на компактах. Тогда ответы на эти два вопроса в определённой степени даёт

Теорема 2. *Множество $\mathcal{B}$ в метрическом пространстве $\mathcal{L}$ имеет первую категорию Бэра, равно как и множество $\mathcal{P}_\omega$ в метрическом пространстве $\mathcal{B}$.*

Литература. 1. Еругин Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963. 2. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных систем. М., 1964. 3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972. 4. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45. 5. Деменчук А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление. Саарбруккен, 2012. 6. Грудо Э.И., Деменчук А.К. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С. 409–416. 7. Massera J.L. The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 4. P. 457–475. 8. Makay G. On some possible extensions of Massera's theorem // Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equat. Electron J. Qual. Theory Differ. Equat. Szeged, 2000. № 16. 9. Murakami S., Naito T., Minh N. Massera's theorem for almost periodic solutions of functional differential equations // J. Math. Soc. Japan. 2004. V. 56. № 1. P. 247–268. 10. Okada Y. Massera type theorems in hyperfunctions with refleexive Banach values // RIMS Kuokyuroku Bessatsu. 2013. B40. P. 001–014.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) "Поведение размерностей линеалов решений правильной системы при бесконечно малых параметрических возмущениях её матрицы коэффициентов" (20 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110201, EDN: PESHBC

Пусть M – метрическое пространство. Для каждого $\mu \in M$ обозначим через $S(\mu, A)$ пространство решений системы

$$\dot{x} = A(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$L_\alpha(\mu, A) \equiv \{x \in S(\mu, A) : \lambda[x] < \alpha\}, \quad N_\alpha(\mu, A) \equiv \{x \in S(\mu, A) : \lambda[x] \leqslant \alpha\},$$

где $\lambda[x]$ – характеристический показатель функции x [1, с. 41] (для нулевого решения считаем его равным $-\infty$). Как известно, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ множества $L_\alpha(\mu, A)$ и $N_\alpha(\mu, A)$ являются линейными подпространствами пространства $S(\mu, A)$. Обозначим их размерности через $d_\alpha(\mu, A)$ и $D_\alpha(\mu, A)$ соответственно. В частности, величина $d_0(\mu, A)$ называется *индексом экспоненциальной устойчивости.*

Обозначим через $\mathcal{R}^n(M)$ класс семейств систем (1) с матрицами $A(t,\mu) = B(t) + Q(t,\mu)$, где функция $B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена, система $\dot{x} = B(t)x$ правильна [1, с. 80], а $Q : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и удовлетворяет условию $\sup\limits_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Зафиксировав $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, положим

$$R^n_{\alpha,\beta}(M) \equiv \{(d_\alpha(\,\cdot\,, A), D_\beta(\,\cdot\,, A)) : A \in \mathcal{R}^n(M)\}.$$

Следуя [2, с. 221], для каждых числа $r \in \mathbb{R}$ и функции $f : M \to \mathbb{R}$ условимся обозначать через $[f \geqslant r]$ *лебеговское множество* $\{\mu \in M : f(\mu) \geqslant r\}$ функции f. Кроме того, через $\mathcal{Z}_n$ будем обозначать множество $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Обобщение примера Р.Э. Винограда [3] неустойчивости показателей Ляпунова правильной системы при убывающих к нулю на бесконечности возмущениях её коэффициентов представляет

Теорема. *Для произвольных метрического пространства M, чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и натурального $n \geqslant 2$ вектор-функция $(g, h)\colon M \to \mathcal{Z}_n \times \mathcal{Z}_n$ принадлежит классу $R^n_{\alpha,\beta}(M)$ тогда и только тогда, когда для каждого $r \in \mathbb{R}$ множество $[g \geqslant r]$ имеет тип F_σ, а множество $[h \geqslant r]$ – тип $F_{\sigma\delta}$, причём для всех $\mu \in M$ выполняется неравенство $h(\mu) \geqslant g(\mu)$, если $\beta \geqslant \alpha$, и неравенство $h(\mu) \leqslant g(\mu)$, если $\beta < \alpha$.*

Замечание. Полное описание аналогичного класса вектор-функций для семейств (1) с матрицами $B(t) + Q(t, \mu)$, где $B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена, а $Q : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и экспоненциально убывает (равномерно по μ) при $t \to +\infty$, получено в работе [4] и совпадает с приведённым.

Литература. 1. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб., 1992. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Виноград Р.Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91. № 5. С. 1001–1002. 4. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Потеря устойчивости в линейной системе с экспоненциально убывающим параметрическим возмущением // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1563–1564.

М. И. Зайдель (Москва) “Полное описание пар индексов устойчивости и экспоненциальной устойчивости линейной системы при экспоненциально убывающих параметрических возмущениях” (27 октября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110213, EDN: PCIFYG

Для заданного натурального $n \geqslant 2$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_n$ линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Для краткости мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и пишем $A \in \mathcal{M}_n$.

Через $\mathrm{s}\,(A)$ обозначим *индекс устойчивости* системы $A \in \mathcal{M}_n$, т.е. размерность линейного подпространства её ограниченных решений, а через $\mathrm{es}\,(A)$ – её *индекс экспоненциальной устойчивости*, т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова [1, с. 12].

Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных (по совокупности переменных) матричнозначных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих для некоторых положительных постоянных C_Q и σ_Q (своих для каждой матрицы Q) оценке

$$\|Q(t, \mu)\| \leqslant C_Q \exp(-\sigma_Q t), \quad (t, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times M,$$

а также неравенствам

$$\mathrm{s}\,(A + Q(\,\cdot\,, \mu)) \leqslant \mathrm{s}\,(A), \quad \mathrm{es}\,(A + Q(\,\cdot\,, \mu)) \leqslant \mathrm{es}(A), \quad \mu \in M.$$

Для каждых M и $n \geqslant 2$ ставится задача полного дескриптивно-функционального описания класса пар

$$\Sigma\mathcal{E}_n(M) \equiv \{((\mathrm{s}\,(A), \mathrm{es}\,(A)), (\mathrm{s}\,(A + Q), \mathrm{es}\,(A + Q))) : A \in \mathcal{M}_n, \ \ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\},$$

составленных из пар индексов системы A и пар индексов (зависящих от параметра $\mu \in M$) семейства $A + Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а Q (при каждом фиксированном A) – класс $\mathcal{E}_n[A](M)$. Напомним, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [2, с. 224] функцией *класса* $(F_\sigma, ^*)$ (а значит, второго класса Бэра [2, с. 249]), если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}((r, +\infty))$ является F_σ-множеством пространства M, т.е. представляется в виде счётного объединения его замкнутых подмножеств. Кроме того, будем обозначать через $\mathcal{Z}_n$ множество $\{0, 1, \ldots, n\}$. Решение поставленной задачи даёт

Теорема. *Для любых метрического пространства M и натурального числа $n \geqslant 2$ пара $((\alpha_0, \beta_0), (\alpha(\cdot), \beta(\cdot)))$, где $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{Z}_n$ и $\alpha, \beta\colon M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежит классу $\Sigma\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $\alpha_0 \geqslant \beta_0$;

2) $\alpha(\mu) \geqslant \beta(\mu)$ для всех $\mu \in M$;

3) $\alpha(\mu) \leqslant \alpha_0$, $\beta(\mu) \leqslant \beta_0$ для всех $\mu \in M$;

4) функции α, β принадлежат классу $(F_\sigma,{}^*)$.

Далее рассмотрим такое параметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M,$$

что при каждом $\mu \in M$ функция $\mathcal{A}(\,\cdot\,, \mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$. Класс таких семейств $\mathcal{A}(\,\cdot\,,\cdot\,)$, непрерывных по $\mu \in M$ в компактно-открытой топологии на пространстве $\mathcal{M}_n$, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а в равномерной топологии – через $\mathcal{U}^n(M)$. Имеет место цепочка включений

$$\bigcup_{A\in\mathcal{M}_n} \mathcal{E}_n[A](M) \subset \mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M),$$

а из теоремы вытекает

Следствие. *Для каждых метрического пространства M и натурального числа $n \geqslant 2$ классы*

$$\Sigma\mathcal{C}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}\,(\mathcal{A}), \mathrm{es}\,(\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{C}^n(M)\}, \quad \Sigma\mathcal{U}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}\,(\mathcal{A}), \mathrm{es}\,(\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\} \qquad (2)$$

совпадают между собой и состоят из пар $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))$ функций $\alpha, \beta : M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежащих классу $(F_\sigma,{}^*)$ и удовлетворяющих неравенству $\alpha(\mu) \geqslant \beta(\mu)$ для всех $\mu \in M$.

Замечание. Описание классов, составленных лишь из вторых элементов пар классов (2), получено в работе [3]: эти классы совпадают между собой и состоят из функций класса $(F_\sigma,{}^*)$.

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 3. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: Письмо в редакцию // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

Э. Е. Тусупбекова (Москва) “Исследование и анализ системы, описывающей модель “лес–биомасса” (10 ноября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110225, EDN: PBMWWV

В работе [1] предложена математическая модель системы “лес–биомасса” (в её основу положена модель “хищник–жертва” [2]), в которой учитывается возрастная структура лесной биомассы через выделение в её популяции P молодых и M зрелых деревьев, а переменная I обозначает объём полученной продукции после их индустриальной переработки. Для описания взаимодействия между величинами P, M и I рассматривается динамическая система

$$\dot{P} = rP\biggl(1 - \frac{P}{k}\biggr) - \beta P + \gamma P, \quad \dot{M} = \beta P - qd_0M - d_1M,$$

$$\dot{I} = \biggl(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\biggr)I - d_2I, \quad P(0), M(0), I(0) \geqslant 0, \qquad (1)$$

в которой параметры r, k, γ, β, α_1, α_2, α_3, q, d_0, d_1, d_2 характеризуют соответственно скорость роста молодых деревьев, ёмкость среды лесной биомассы, размер новых плантаций, скорость перехода дерева от молодого до зрелого состояния, максимальный темп индустриализации, максимальное снижение темпов индустриализации, среднюю ставку правительства по предоставлению защиты лесной биомассы, скорость исчерпания зрелых деревьев промышленными предприятиями, необходимые затраты на вырубку леса, скорость исчерпания зрелых деревьев под влиянием природных факторов и снижение производительности предприятий из-за отсутствия предпочитаемых зрелых деревьев.

В статье [1] с использованием методов работы [3] доказаны положительность и ограниченность решений системы (1) и существование их предельных значений (на бесконечности). Ниже асимптотические свойства решений исследуются с помощью методов работы [4]. Система (1), исходя из физического смысла её параметров и в соответствии с классификацией особых точек в трёхмерном пространстве, может иметь положения равновесия только типа *узел* или *седлоузел* (с ненулевыми действительными собственными значениями одного знака или, соответственно, разных знаков – при этом узловую часть называем *устойчивой*, если отрицательных собственных значений больше, и *неустойчивой*, если их меньше). Обозначим

$$A \equiv r - \beta + \gamma, \quad B \equiv qd_0 + d_1, \quad D \equiv \alpha_1 - d_2.$$

Теорема 1. *Система (1) имеет четыре положения равновесия*

$$E_0 \equiv (0,0,0), \quad E_1 \equiv (p_0, m_0, 0), \quad E_2 \equiv (0,0,i_2), \quad E_3 \equiv (p_0, m_0, i_3),$$

где

$$p_0 \equiv \frac{Ak}{r}, \quad m_0 \equiv \frac{A\beta k}{Br}, \quad i_2 \equiv \frac{D\alpha_3}{\alpha_2}, \quad i_3 \equiv \frac{D(\alpha_3 + m_0)}{\alpha_2},$$

а при условии $A, B, D \neq 0$ *для них реализуются в точности следующие восемь случаев:*

1) если $A, D < 0 < B$, *то* E_0 *– устойчивый узел, а* E_3 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

2) если $A, D > 0 > B$, *то* E_0 *– неустойчивый узел, а* E_3 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно;*

3) если $A, B > 0 > D$, *то* E_1 *– устойчивый узел, а* E_2 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

4) если $A, B < 0 < D$, *то* E_1 *– неустойчивый узел, а* E_2 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно;*

5) если $B, D > 0 > A$, *то* E_2 *– устойчивый узел, а* E_1 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

6) если $B, D < 0 < A$, *то* E_2 *– неустойчивый узел, а* E_1 *и* E_0, E_3 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно;*

7) если $A, B, D > 0$, *то* E_3 *– устойчивый узел, а* E_0 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с неустойчивой и устойчивыми узловыми частями соответственно;*

8) если $A, B, D < 0$, *то* E_3 *– неустойчивый узел, а* E_0 *и* E_1, E_2 *– седлоузлы с устойчивой и неустойчивыми узловыми частями соответственно.*

Интерес для приложений представляют случаи 4) и 7) теоремы 1, в которых поставленная задача имеет практический смысл.

Теорема 2. *Если* $A \neq 0$, *то решения системы (1) имеют вид*

$$P(t) = A\biggl(\biggl(\frac{A}{P(0)} - \frac{r}{k}\biggr)e^{-At} + \frac{r}{k}\biggr)^{-1}, \quad M(t) = \frac{A\beta}{e^{Bt}}\int\limits_{t_1}^{t} e^{B\tau}\biggl(\biggl(\frac{A}{P(0)} - \frac{r}{k}\biggr)e^{-A\tau} + \frac{r}{k}\biggr)^{-1} d\tau + C_1,$$

$$I(t) = \frac{e^{Dt}}{\alpha_2}\biggl(\int\limits_{t_2}^{t} e^{Ds}\biggl(\frac{A\beta}{e^{Bs}}\int\limits_{t_1}^{s} e^{B\tau}\biggl(\biggl(\frac{A}{P(0)} - \frac{r}{k}\biggr)e^{-A\tau} + \frac{r}{k}\biggr)^{-1} d\tau + C_1\biggr)^{-1} ds + C_2\biggr)^{-1},$$

а если $A = 0$, *то*

$$P(t) = \biggl(\frac{r}{k}t + \frac{1}{P(0)}\biggr)^{-1}, \quad M(t) = \frac{\beta}{e^{Bt}}\int\limits_{t_1}^{t} e^{B\tau}\biggl(\frac{r}{k}\tau + \frac{1}{P(0)}\biggr)^{-1} d\tau + C_1,$$

$$I(t) = \frac{e^{Dt}}{\alpha_2}\left(\int\limits_{t_2}^{t} e^{Ds}\left(\frac{\beta}{e^{Bs}}\int\limits_{t_1}^{s} e^{B\tau}\left(\frac{r}{k}\tau + \frac{1}{P(0)}\right)^{-1} d\tau + C_1\right)^{-1} ds + C_2\right)^{-1}, \quad t_1, t_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приведённые результаты позволяют исследовать динамику изучаемого процесса и понять, при каком наборе параметров система имеет устойчивый режим существования.

Литература. 1. Chaudhary M., Dhar J., Misra O. A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction // Modeling Earth Systems and Environment. 2015. V. 1 (43). P. 1–10. 2. Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics // Biometrika. 1948. P. 213–245. 3. Chen F. On a nonlinear nonautonomous predator-prey model with diffusion and distributed delay // Comput. Appl. Math. 2014. V. 180. № 1. P. 33–49. 4. Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Соврем. математика и её приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33.

И. В. Асташова (Москва) “Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений при возмущении степенной малости ” (17 ноября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110237, EDN: PQNSOX

Рассматривается задача асимптотической эквивалентности следующих двух уравнений:

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)} + p(x) \operatorname{sgn} y\, |y|^k = f(x), \tag{1}$$

$$z^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) z^{(j)} + p(x) \operatorname{sgn} z\, |z|^k = 0. \tag{2}$$

В работах [1, 2] приводятся результаты об асимптотической близости решений уравнений (1) и (2) при экспоненциально малой правой части f; в статье [3] доказываются результаты об их асимптотической эквивалентности при $a_j = 0$ в случае экспоненциально или степенно малых возмущений f; в [4] при $f = 0$ изучается вопрос о различных типах асимптотической близости решений уравнения (2) и его частных случаев к решениям соответствующих линейных уравнений; в работах [5, 6] содержатся, в частности, результаты об асимптотическом поведении решений невозмущённых уравнений. Ниже, в предположении $k > 1$ и $n \geqslant 2$, обозначим $\alpha \equiv n/(k-1)$.

Теорема. *Если функции $a_0, \ldots, a_{n-1}$, p, f непрерывны, причём p ограничена и*

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)|\, dx < +\infty, \quad j = \overline{0, n-1},$$

то для любого $C > 0$ найдётся такое $\sigma > \alpha$, что если $f(x) = o(x^{-\sigma-n})$, $x \to +\infty$, то для каждого решения y уравнения (2), удовлетворяющего условию $|y(x)| \leqslant Cx^{-\alpha}$, существует единственное решение z уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$|y(x) - z(x)| = O(x^{-\sigma}), \quad x \to +\infty, \tag{3}$$

а для каждого решения z уравнения (1), удовлетворяющего условию $|z(x)| \leqslant Cx^{-\alpha}$, существует единственное решение y уравнения (2), удовлетворяющее условию (3).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272-п).

Литература. 1. Astashova I. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. 2022. V. 87. P. 17–24. 2. Асташова И.В. Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1572–1573. 3. Astashova I.V. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Tatra

Mountains Math. Publ. 2015. V. 63. P. 31–38. 4. Astashova I., Bartusek M., Dosla Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations // Adv. in Nonlin. Anal. 2022. V. 11 (1). P. 1598–1613. 5. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990. 6. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / Под ред. И.В. Асташовой. М., 2012. P. 22–290.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение полных свойств колеблемости и вращаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению” (24 ноября 2023 г.).

DOI: 10.31857/S0374064123110249, EDN: PPKMFX

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

с которой свяжем линейную однородную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_\prime(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

причём на нелинейную добавку $h(t,x) \equiv f(t,x) - A(t)x = o(x)$ $(x \to 0)$ обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ здесь не накладываем. Через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ обозначим непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0) = x_0$, а через $S_\delta(f)$ – множество решений с начальными значениями x_0, удовлетворяющими условию $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1 [1]. Для описания характеристик колеблемости и ориентированной вращаемости (аналогичных характеристикам блуждаемости [2]) выполним следующее:

1) каждому числу $t \in \mathbb{R}_+$ и непрерывно-дифференцируемой функции $u : [0,t] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ поставим в соответствие значения *функционалов* $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta$ *колеблемости* и *вращаемости* соответственно (неопределённые, если функция u определена не на всём отрезке $[0,t]$):

а) $\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{N}(t,u)$ – *нормированное* (умноженное на π) число нулей на промежутке $(0,t]$ функции P_1u, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$, причём в *критической* ситуации, когда хотя бы один из нулей $\tau \in [0,t]$ *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1u)^\cdot$), считаем выражение $\mathrm{N}(t,u)$ *неопределённым*;

б) $\mathrm{K}(t,u) = \Theta(t,u) \equiv |\varphi(t,P_2u)|$ – модуль *ориентированного угла* $\varphi(t,P_2u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0,P_2u) = 0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость в $\mathbb{R}^n$, причём в *критической* ситуации, когда $P_2u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0,t]$, считаем выражение $\Theta(t,u)$ *неопределённым*;

2) далее, системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$ и невырожденному преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значения *нижнего* и *верхнего* (*шаровых*) *функционалов колеблемости* и *вращаемости* при $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta$ соответственно, определяемых равенствами

$$\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varliminf_{x_0 \to 0} \mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t), \quad \hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varlimsup_{x_0 \to 0} \mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t);$$

3) наконец, *нижний* (*слабый шаровой*) $\check{\varkappa}^\circ_b(f)$ и *верхний* (*сильный шаровой*) $\hat{\varkappa}^\bullet_b(f)$ *показатели колеблемости* и *вращаемости* системы (1) зададим при $\varkappa = \nu, \theta$ соответственно формулами

$$\check{\varkappa}^\circ_b(f) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L), \quad \hat{\varkappa}^\bullet_b(f) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} t^{-1}\hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \tag{3}$$

(а *верхний слабый* $\hat{\varkappa}^\circ_b(f)$ и *нижний сильный* $\check{\varkappa}^\bullet_b(f)$ – теми же формулами (3), но с переставленными в них местами пределом при $t \to +\infty$ и точной нижней гранью по $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$).

Показатели (3) оказываются для системы (1) соответственно наименьшим и наибольшим в каждой четвёрке показателей колеблемости или вращаемости из определения 1.

Известны и другие функционалы, отвечающие за аналогичные свойства решений, не связанные с их нормой (см., например, [3–5]): *неориентированную, частотную* и *плоскую вращаемость*, *блуждаемость*, а также *поворачиваемость* заданного *ранга.* Помимо шаровых показателей можно рассматривать (см. [6–8]) ещё *сферические* и *радиальные показатели.*

Определяемые ниже свойства дифференциальной системы отдалённо напоминают устойчивость по Ляпунову (нулевого решения). В отличие от неё здесь на все решения, начинающиеся достаточно близко к нулю, накладываются ограничения не по норме, а по среднему количеству нулей их проекций на прямые или по среднему угловому отклонению (от начального положения) их проекций на плоскости, причём лишь на конечных (пусть и растущих) промежутках времени, поскольку в нелинейном случае решения могут быть определены не на всей полуоси.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) обладает:

1) *полной колеблемостью* или *полной вращаемостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $T \in \mathbb{R}_+$, что для каждого $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ справедливы, соответственно, оценки

$$\check{\mathrm{N}}_b(f,t,L) > \varepsilon t \quad \text{или} \quad \check{\Theta}_b(f,t,L) > \varepsilon t, \quad t > T;$$

2) *полной неколеблемостью* или *полной невращаемостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $T \in \mathbb{R}_+$ и $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$, что справедливы, соответственно, оценки

$$\hat{\mathrm{N}}_b(f,t,L) < \varepsilon t \quad \text{или} \quad \hat{\Theta}_b(f,t,L) < \varepsilon t, \quad t > T.$$

Наличие у системы полных свойств колеблемости и вращаемости, как и блуждаемости [2], однозначно определяется знаками её соответствующих шаровых показателей, как показывает

Теорема 1. *Полная колеблемость и полная вращаемость системы (1) равносильны положительности её нижнего показателя колеблемости и соответственно вращаемости:*

$$\check{\nu}_b^{\circ}(f) > 0, \quad \check{\theta}_b^{\circ}(f) > 0,$$

а её полная неколеблемость и полная невращаемость равносильны равенству нулю её верхнего показателя колеблемости и соответственно вращаемости:

$$\hat{\nu}_b^{\bullet}(f) = 0, \quad \hat{\theta}_b^{\bullet}(f) = 0.$$

В двумерном случае все шаровые показатели вращаемости исходной системы совпадают с аналогичными показателями системы её первого приближения, по которой, таким образом, однозначно устанавливается наличие у исходной системы полной вращаемости или полной невращаемости, что и подтверждает

Теорема 2. *При $n = 2$ полные вращаемость и невращаемость системы (1) равносильны положительности нижнего и соответственно равенству нулю верхнего показателя вращаемости линейной системы (2) её первого приближения:*

$$\check{\theta}_b^{\circ}(f_\prime) > 0, \quad \hat{\theta}_b^{\bullet}(f_\prime) = 0,$$

и более того, имеют место равенства

$$\tilde{\theta}_b^{*}(f) = \tilde{\theta}_b^{*}(f_\prime), \quad \tilde{} = \check{}, \hat{}, \quad * = \circ, \bullet.$$

Как известно [9], нижние показатели колеблемости и вращаемости исходной системы оцениваются сверху соответствующими показателями системы её первого приближения, что позволяет переносить отдельные свойства последней на исходную систему, о чём и говорит

Теорема 3. *Если линейная система (2), являющаяся системой первого приближения для системы (1), не обладает полной колеблемостью или полной вращаемостью, то ею не обладает также и система (1), и более того, имеют место неравенства*

$$\check{\nu}_b^{*}(f) \leqslant \check{\nu}_b^{*}(f_\prime), \quad \check{\theta}_b^{*}(f) \leqslant \check{\theta}_b^{*}(f_\prime), \quad * = \circ, \bullet.$$

Однако многие свойства вращаемости системы первого приближения не переносятся на исходную систему уже в трёхмерном случае, а свойства колеблемости – даже в двумерном, что и демонстрируют

Теорема 4. *При $n = 2$ существует линейная система (2), являющаяся системой первого приближения для системы (1) и обладающая полной колеблемостью, которой не обладает система (1), и более того, имеют место соотношения*

$$\check{\nu}_b^*(f) = 0 < 1 = \hat{\nu}_b^*(f) = \check{\nu}_b^*(f_\prime), \quad * = \circ, \bullet.$$

Теорема 5. *При $n = 3$ существует линейная система (2), являющаяся системой первого приближения для системы (1) и обладающая полной неколеблемостью и полной невращаемостью, которыми не обладает система (2), и более того, имеют место соотношения*

$$\hat{\kappa}_b^*(f_\prime) = \check{\kappa}_b^*(f) = 0 < 1 = \hat{\kappa}_b^*(f), \quad * = \circ, \bullet, \quad \kappa = \nu, \theta.$$

Замечание. Возможности исследования по первому приближению полных свойств колеблемости и вращаемости, в отличие от блуждаемости [2], пока ещё не вполне изучены.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 2. Сергеев И.Н. Определение полных блуждаемости и неблуждаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1577–1578. 3. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 4. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 5. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 6. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 7. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 8. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46. 9. Сергеев И.Н. Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 726–734.