

ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 12

Декабрь 2023



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 12, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Анализ многоточечной краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения
А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский 1591
- Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости
Н. А. Изобов, А. В. Ильин 1599
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости
Е. А. Бадерко, К. Д. Федоров 1606
- О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями
А. А. Косов, Э. И. Семенов 1619
- Начально-краевые задачи для однородных параболических систем в полуограниченной плоской области и условие дополненности
С. И. Сахаров 1641
- О разрешимости линейных дифференциальных операторов на векторных расслоениях над многообразием
М. С. Смирнов 1654
- Задача Коши для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций
А. Б. Хасанов, Т. Г. Хасанов 1668
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Об асимптотике спектра интегрального оператора с логарифмическим ядром специального вида
А. А. Полосин 1680
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Поиск параметров модели с наилучшей локальной управляемостью
М. А. Велищанский, В. Н. Четвериков 1692
- Существование сублоренцевых длиннейших
Ю. Л. Сачков 1702
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта <i>А. В. Звягин, Е. И. Костенко</i>	1710
Решение задачи Коши для одного вырождающегося уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна <i>Б. Ю. Иргашев</i>	1715
Авторский указатель тома 59, 2023	1718

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.6+517.927.4

АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский

Для нелинейного дифференциального матричного уравнения с помощью конструктивного метода регуляризации по линейной части уравнения с использованием соответствующих фундаментальных матриц исследована многоточечная краевая задача. По исходным данным задачи получены достаточные условия её однозначной разрешимости. Предложены итерационные алгоритмы построения решения, содержащие сравнительно простые вычислительные процедуры. Даны эффективные оценки, характеризующие скорость сходимости итерационной последовательности к решению, а также оценки области локализации решения.

DOI: 10.31857/S0374064123120014, EDN: NUPTOT

Рассмотрим многоточечную краевую задачу для дифференциального матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \in I, \quad (1)$$

с условием

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (2)$$

где $A, B \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $I = [0, \omega]$; $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$, M_i – вещественные постоянные $n \times n$ -матрицы. Предполагаем, что нелинейная функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde{\rho}}$ условию Липшица относительно X (локально) и что $F(t, 0) \neq 0$.

Задача (1), (2) изучается на основе применения метода регуляризации [1, с. 70] в смысле [2, с. 156], при этом используются регуляризаторы различных типов (односторонний и двусторонний), конструируемые по линейной части уравнения. В рассмотренных случаях получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи и алгоритмы построения решения, основанные на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений [3, с. 605]. Качественными методами эта задача исследовалась в статье [4]. С периодическими краевыми условиями на основе метода регуляризации она рассматривалась в [5]. Настоящая статья является обобщением и развитием работ [6, 7].

Задачу (1), (2) будем исследовать в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций $I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t)\|$. Сначала применим левостороннюю регуляризацию [1, гл. 1]. При этом для получения соответствующего эквивалентного интегрального уравнения воспользуемся расщеплением (декомпозицией) матрицы $A(t)$ в виде

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t), \quad (3)$$

где матрица $A_1(t)$ выбирается специальным образом, например, согласно [1, гл. 1]. Достаточно эффективным является представление матрицы $A(t) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, в котором в качестве матрицы $A_1(t)$ используется диагональная часть матрицы $A(t)$, т.е.

$$A_1(t) = \text{diag} [a_{11}(t), a_{22}(t), \dots, a_{nn}(t)].$$

Возможны и другие способы расщепления матрицы $A(t)$ [1, гл. 1, 5], в том числе и тривиальные: $A_1(t) \equiv 0$ и $A_1(t) \equiv A(t)$ (тогда соответственно $A_2(t) \equiv A(t)$ и $A_2(t) \equiv 0$). При выборе декомпозиции матриц целесообразно руководствоваться скоростью сходимости соответствующих алгоритмов.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dU}{dt} = A_1(t)U, \quad t \in I, \quad (4)$$

и примем следующие обозначения: $U(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы (4),

$$U_i = U(t_i), \quad i = \overline{1, k}, \quad D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \quad \|X\| \leq \rho\}, \quad H = \sum_{i=1}^k M_i U_i, \quad \gamma = \|H^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|,$$

$$u_i = \|U_i\|, \quad \lambda_1 = \max_{t \in I} \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_{t \in I} \|U^{-1}(t)\|, \quad \alpha_2 = \max_{t \in I} \|A_2(t)\|, \quad \beta = \max_{t \in I} \|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t \in I} \|F(t, 0)\|, \quad q = q(\rho) = \gamma \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_2 + \beta + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i, \quad N = \gamma \lambda_1 \lambda_2 h \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i,$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $\|\cdot\|$ – некоторая фиксированная норма в $\mathfrak{B}(n)$, например, любая из норм, приведённых в книге [8, с. 21], $L = L(\rho)$ – постоянная Липшица относительно X функции $F(t, X)$ для области D_ρ .

Теорема 1. Если выполнены условия

$$\det H \neq 0, \quad (5)$$

$$q < 1 \quad \text{и} \quad N \leq \rho(1 - q), \quad (6)$$

то задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . Её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty$ матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_p(t) = U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau)X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau))] d\tau, \quad (7)$$

где $p \in \mathbb{N}$, а в качестве $X_0(t)$ может быть выбрана любая непрерывная функция; при этом для решения справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{N}{1 - q}. \quad (8)$$

Кроме того, каждая из функций $X_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, определяемая соотношением (7), удовлетворяет краевому условию (2), т.е. условию

$$\sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) = 0, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Доказательство. С помощью регуляризатора типа [1, с. 70] на основании (3), (4) покажем сначала, что задача (1), (2) при выполнении условия (5) равносильна интегральному уравнению

$$X(t) = U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (10)$$

Для упрощения записи в дальнейшем функцию $A_2(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))$, стоящую в квадратных скобках в правой части уравнения (10), обозначим через $G(\tau, X(\tau))$. Рассматривая уравнение (1) как уравнение (4) с возмущением $G(t, X)$, в силу формулы Лагранжа вариации произвольных постоянных получим представление

$$X(t) = U(t) \left[U^{-1}(t_1)X(t_1) + \int_{t_1}^t U^{-1}(s)G(s, X(s)) ds \right], \quad t \in I. \quad (11)$$

Подставим в это тождество t_i вместо t и умножим затем его слева на матрицу M_i . Тогда, просуммировав полученные равенства по i от 1 до k , будем иметь

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = \sum_{i=1}^k M_i U_i U^{-1}(t_1) X(t_1) + \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^{t_i} U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds.$$

В силу краевого условия (2) левая часть этого равенства равна нулю, поэтому, умножив его слева на H^{-1} , получим

$$U^{-1}(t_1)X(t_1) = -H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^{t_i} U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds. \quad (12)$$

Заменив в равенстве (11) первое слагаемое в квадратных скобках согласно (12) и учитывая определение матрицы H , приходим к тождеству

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t) \left[-H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^{t_i} U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds + H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_1}^t U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds \right] = \\ &= U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(s) G(s, X(s)) ds. \end{aligned}$$

Итак, если дифференцируемая функция $X(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию (2), то она удовлетворяет и интегральному уравнению (10).

Установим обратное: всякое дифференцируемое решение интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Для этого сначала, продифференцировав обе части уравнения (10), получим равенство

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_1(t)X(t) + U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i U^{-1}(t)G(t, X(t)) = A_1(t)X(t) + G(t, X(t)),$$

которое, поменяв переменную t на τ , запишем в виде

$$G(\tau, X(\tau)) = \frac{dX(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau)X(\tau). \quad (13)$$

Заменив теперь в уравнении (10) выражение в квадратных скобках равной ему правой частью равенства (13), будем иметь

$$X(t) = U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [dX(\tau) - A_1(\tau)X(\tau) d\tau],$$

т.е.

$$X(t) = U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) dX(\tau) - U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Выполнив в первой сумме в (14) интегрирование по частям, получим последовательно

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \left[U^{-1}(\tau) X(\tau) \Big|_{t_i}^t + \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau \right] - \\ &\quad - U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau = \\ &= U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \left[U^{-1}(\tau) X(t) - U^{-1}(t_i) X(t_i) + \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau \right] - \\ &\quad - U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) A_1(\tau) X(\tau) d\tau = \\ &= U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i [U^{-1}(t) X(t) - U^{-1}(t_i) X(t_i)] = X(t) + U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X(t_i). \end{aligned}$$

Отсюда имеем соотношение

$$U(t)H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = 0,$$

а значит, и краевое условие (9).

Запишем уравнение (10) в операторном виде

$$X = \mathfrak{L}(X), \quad (15)$$

где $\mathfrak{L}$ – оператор, определяемый правой частью (10). Этот оператор действует из $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ в $C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Рассмотрим его на шаре $\tilde{D}_\rho = \{X(t) : \|X\|_C \leq \rho\}$ и установим, что из условий (6) следует выполнение принципа сжимающих отображений Каччопполи–Банаха (см., например, [3, с. 605]).

Сначала установим, что $\mathfrak{L}(X) \in \tilde{D}_\rho$, если $X \in \tilde{D}_\rho$. Выполнив соответствующие оценки, получим

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{L}(X)\| &\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|U_i\| \left\| \int_{t_i}^t \|U^{-1}(\tau)\| [\|A_2(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|B(\tau)\| + \right. \\ &\quad \left. + \|F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, 0)\| + \|F(\tau, 0)\|] d\tau \right\| \leq \gamma \lambda_1 \lambda_2 [(\alpha_2 + \beta + L)\rho + h] \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i = q\rho + N. \end{aligned}$$

На основании условий (6) справедлива оценка

$$\|\mathfrak{L}(X)\|_C \leq \rho. \quad (16)$$

Далее из (15) для любых $\tilde{X} \in \tilde{D}_\rho$ и $\tilde{\tilde{X}} \in \tilde{D}_\rho$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{L}(\tilde{X}) - \mathfrak{L}(\tilde{\tilde{X}})\| &\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|U_i\| \int_0^\omega \|U^{-1}(\tau)\| [\|A_2(\tau)\| + \|B(\tau)\|] \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{\tilde{X}}(\tau)\| + \\ &+ \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau))\| d\tau \leq \gamma \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_2 + \beta + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i \|\tilde{X} - \tilde{\tilde{X}}\|_C = q \|\tilde{X} - \tilde{\tilde{X}}\|_C, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\mathfrak{L}(\tilde{X}) - \mathfrak{L}(\tilde{\tilde{X}})\|_C \leq q \|\tilde{X} - \tilde{\tilde{X}}\|_C. \quad (17)$$

Таким образом, на шаре $\tilde{D}_\rho$ при выполнении условий (6) справедливы неравенства (16) и (17), означающие, что к уравнению (15) применим принцип сжимающих отображений. На основании этого заключаем, что решение $X = X(t)$ данного уравнения на шаре $\tilde{D}_\rho$ существует и единственно. Другими словами, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ ; при этом на основании (5), (6) справедлива оценка (8).

Решение уравнения (10) будем строить с помощью классического метода последовательных приближений [3, с. 605] в виде (7). В качестве начального приближения принимаем произвольную функцию $X_0(t) \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Очевидно, алгоритм (7) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty \subset C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, при этом $\{X_p(t)\}_{p=1}^\infty \subset C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Доказательство того, что функции $X_1(t), X_2(t), \dots$ удовлетворяют краевому условию (9) аналогично доказательству эквивалентности интегрального уравнения (10) задаче (1), (2).

Изучим вопрос сходимости этой последовательности. Следуя известному приёму, этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + \dots + (X_p(t) - X_{p-1}(t)) + \dots \quad (18)$$

Докажем равномерную по $t \in I$ сходимость ряда (18). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на отрезке I матричный функциональный ряд (18).

Из (7) имеем

$$X_{p+1}(t) - X_p(t) = \mathfrak{L}(X_p) - \mathfrak{L}(X_{p-1}), \quad p \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где, согласно определению оператора $\mathfrak{L}$,

$$\mathfrak{L}(Y) = U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau) Y(\tau) + Y(\tau) B(\tau) + F(\tau, Y(\tau))] d\tau.$$

Выполнив оценки по норме в (19) и используя соотношение (17), получим

$$\|X_{p+1} - X_p\|_C \leq q \|X_p - X_{p-1}\|_C, \quad p \in \mathbb{N},$$

откуда следует окончательная оценка

$$\|X_p - X_{p-1}\|_C \leq q^p \|X_1 - X_0\|_C, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя (20), несложно доказать, что последовательность $\{X_r\}_{r=0}^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению уравнения (10), при этом справедливо неравенство

$$\|X - X_r\|_C \leq \frac{q^r}{1 - q} \|X_1 - X_0\|_C, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (21)$$

Вследствие (20), (21) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (7):

$$\|X\|_C \leq \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1 - q}. \quad (22)$$

Покажем, что из (22) при $X_0(t) \equiv 0$ следует оценка (8), при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C$. Так как

$$\|\mathfrak{L}(0)\| \leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|U_i\| \int_0^\omega \|U^{-1}(\tau)F(\tau, 0)\| d\tau \leq \gamma \lambda_1 \lambda_2 \omega h \sum_{i=1}^k m_i u_i = N,$$

то неравенство (22) влечёт за собой оценку (8). Теорема доказана.

Далее проведём аналогичный анализ на основе правосторонней регуляризации задачи (1), (2), используя расщепление матрицы $B(t)$ в виде

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t),$$

где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются указанными выше способами.

Наряду с принятыми выше обозначениями, будем использовать также следующие: $V(t)$ – фундаментальная матрица линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dV}{dt} = VB_1(t), \quad t \in I,$$

$$V_i = V(t_i), \quad v_i = \|V_i\|, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_{t \in I} \|B_2(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_{t \in I} \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_{t \in I} \|V^{-1}(t)\|,$$

Φ – линейный оператор, задаваемый равенством $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^k M_i Y V_i$ (см. [4]) и

$$\tilde{\gamma} = \|\Phi^{-1}\|, \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\rho) = \tilde{\gamma} \mu_1 \mu_2 (\alpha + \beta_2 + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i, \quad \tilde{N} = \tilde{\gamma} \mu_1 \mu_2 h \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i.$$

Теорема 2. Если оператор Φ однозначно обратим и выполнены условия $\tilde{q} < 1$, $\tilde{N} \leq \rho(1 - \tilde{q})$, то задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . Её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty$ матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau)B_2(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad (23)$$

где $p \in \mathbb{N}$, а в качестве $X_0(t)$ может быть выбрана любая непрерывная функция; при этом для решения справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{\tilde{N}}{1 - \tilde{q}}.$$

Кроме того, каждая из функций $X_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, определяемая соотношением (23), удовлетворяет краевому условию (9).

Для доказательства теоремы 2 достаточно воспользоваться регуляризатором типа [1, с. 70] при получении эквивалентной интегральной задачи

$$X(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau, X(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad (24)$$

а затем выполнить соответствующие выкладки в рамках применения принципа сжимающих отображений. Выкладки, связанные с обоснованием сходимости и скорости сходимости алгоритма (23), проводятся аналогично.

В работе [4] задача (1), (2) рассмотрена качественными методами с использованием фундаментальных матриц, определяемых слагаемыми линейной части уравнения (1).

Метод регуляризации [1, с. 70] позволяет выполнить более эффективный анализ задачи (1), (2) на основе двойного расщепления коэффициентов уравнения (1), а именно:

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t), \quad B(t) = B_1(t) + B_2(t),$$

где матрицы $A_i(t)$ и $B_i(t)$ ($i = 1, 2$) выбираются описанными выше способами.

Наряду с обозначениями, принятыми для теорем 1 и 2, будем использовать следующие: Ψ – линейный оператор, задаваемый равенством $\Psi Y \equiv \sum_{i=1}^k M_i U_i Y V_i$ [4] и

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \|\Psi^{-1}\|, \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\rho) = \tilde{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 (\alpha_2 + \beta_2 + L) \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i v_i, \\ q_0 &= \tilde{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 L \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i v_i, \quad \tilde{N} = \tilde{\gamma} \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 h \omega \sum_{i=1}^k m_i u_i v_i. \end{aligned}$$

Теорема 3. Если оператор Ψ однозначно обратим и выполнены условия $\tilde{q} < 1$, $\tilde{N} \leq \rho(1 - \tilde{q})$, то задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . Её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке I последовательности $\{X_p(t)\}_{p=0}^\infty$ матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$\begin{aligned} X_p(t) &= U(t) \Psi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau) X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau) B_2(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + F(\tau, X_{p-1}(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} V(t), \end{aligned} \quad (25)$$

где $p \in \mathbb{N}$, а в качестве $X_0(t)$ может быть выбрана любая непрерывная функция; при этом для решения справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{\tilde{N}}{1 - \tilde{q}}.$$

Кроме того, каждая из функций $X_p(t)$, $p \in \mathbb{N}$, определяемая соотношением (25), удовлетворяет краевому условию (9).

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1 и 2. При этом вместо интегральных уравнений (10) и (24) получается следующее эквивалентное задаче (1), (2) интегральное уравнение:

$$X(t) = U(t) \Psi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau) [A_2(\tau) X(\tau) + X(\tau) B_2(\tau) + F(\tau, X(\tau))] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} V(t). \quad (26)$$

Соответствующие оценки для алгоритма (25) выполняются так же, как и в случае теорем 1 и 2.

Следствие (ср. [4]). Пусть оператор Ψ однозначно обратим и выполнены условия $q_0 < 1$, $\tilde{N} \leq \rho(1 - q_0)$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; её решение $X(t)$ представимо в виде предела равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением вида (25) и удовлетворяющих условию (9); при этом справедлива оценка

$$\|X\|_C \leq \frac{\tilde{N}}{1 - q_0}.$$

В силу произвольности расщепления матриц $A(t)$, $B(t)$ полагаем $A_2(t) \equiv 0$, $B_2(t) \equiv 0$. Тогда $U(t)$ и $V(t)$ – фундаментальные матрицы уравнений $dU/dt = A(t)U(t)$ и $dV/dt = V(t)B(t)$ соответственно. При таком расщеплении из интегрального уравнения (26) следует уравнение (ср. [4])

$$X(t) = U(t)\Psi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^k M_i U_i \int_{t_i}^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau))V^{-1}(\tau) d\tau V_i\right\}V(t). \quad (27)$$

Разумеется, в конструкции оператора Ψ в (27) участвуют соответствующие матрицы $U(t)$ и $V(t)$.

Замечание. В работе [4] данная задача рассмотрена в области $I \times \mathbb{R}^{n \times n}$. Исследование в этой области её однозначной разрешимости существенно не отличается от линейного случая, рассмотренного в [6, 7]: в основном всё сводится к оценкам коэффициентов сжатия соответствующих интегральных операторов, полученных различными методами, при этом в [4] громоздкими и сложными. Методика, используемая в [6, 7] и в предлагаемой работе, вполне конструктивная, поскольку позволяет получить сравнительно простые условия однозначной разрешимости и несложные алгоритмы построения решения задачи (1), (2) для области более общей конфигурации. Если в настоящей статье условия разрешимости содержат оценки нормы фундаментальных матриц линейных слагаемых в (1), то в [6, 7] соответствующие условия представлены явно в терминах задачи в рассматриваемых случаях вырождения краевых условий, характеризующих связь между матрицами M_i .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптинский В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск, 1998.
2. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковецик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. М., 1968.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.
4. Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness // J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.
5. Лаптинский В.Н. О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.
6. Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н. Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.
7. Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н. Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

Белорусско-Российский университет,
г. Могилёв

Поступила в редакцию 27.06.2023 г.
После доработки 27.06.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ АНТИПЕРРОНОВСКОГО ЭФФЕКТА
СМЕНЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ
ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

© 2023 г. Н. А. Изобов, А. В. Ильин

Доказано существование двумерной линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \geq t_0$, с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и всеми положительными характеристическими показателями, а также бесконечно дифференцируемого m -возмущения $f(t, y)$, имеющего порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и не превосходящего m порядок роста вне её, таких, что возмущённая система $\dot{y} = A(t)y + f(t, y)$, $y \in \mathbb{R}^2$, $t \geq t_0$, имеет решение $y(t)$ с отрицательным показателем Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0374064123120026, EDN: NUWDWF

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$. Вместе с ними рассматриваем и нелинейные системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

с m -возмущениями $f(t, y)$, также бесконечно дифференцируемыми порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её:

$$\|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \text{const}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0. \quad (3)$$

Эффект Перрона [1; 2, с. 50–51] в двумерном случае устанавливает существование системы (1) с отрицательными показателями и 2-возмущение (3) таких, что все нетривиальные решения двумерной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и часть из них имеет совпадающие положительные показатели, а в оставшейся непустой части – отрицательный показатель. Этот эффект смены отрицательных показателей системы (1) на положительные для решений системы (2) исследован нами (в том числе и совместно с С.К. Коровиным) в серии работ, завершившейся полным описанием [3, 4] совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2).

Большой интерес своими возможными приложениями представляет антиперроновский [5, 6] эффект смены всех положительных показателей системы линейного приближения (1) на отрицательные для решений систем с малыми возмущениями (линейными экспоненциально убывающими, линейными стремящимися к нулю на бесконечности, нелинейными высшего порядка малости). При этом в статье [5] реализована смена показателей

$$\lambda_1(A) > 0 \mapsto \lambda_{n-1}(A + Q) < 0 < \lambda_n(A + Q)$$

экспоненциально убывающими линейными возмущениями $f(t, y) = Q(t)y$ (остался открытым случай $\lambda_n(A + Q) < 0$), а в [6] – полная смена показателей $\lambda_1(A) > 0 \mapsto \lambda_n(A + Q) < 0$ возмущениями $Q(t) \rightarrow 0$ для $t \rightarrow +\infty$.

В настоящей работе реализован следующий вариант антиперроновского эффекта: смена положительных показателей двумерного линейного приближения (1) на отрицательный для нетривиального решения нелинейной системы (2) с m -возмущением (3).

Справедлива следующая

Теорема. Для любых параметров $m > 1$, $\theta > 1$, $\lambda > 0$ существуют:

- 1) двумерная линейная система (1) с ограниченной бесконечно дифференцируемой матрицей коэффициентов $A(t)$ и характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$,
- 2) также бесконечно дифференцируемое по своим аргументам m -возмущение

$$f(t, y) : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

такие, что возмущённая нелинейная система (2) имеет решение $y(t)$ с показателем Ляпунова

$$\lambda[y] = -\lambda \frac{\theta + 1}{m\theta - 1} < 0. \quad (4)$$

Доказательство. 1°. Построение системы линейного приближения. По числу $\alpha = \lambda(\theta + 1)/(\theta - 1)$, точкам $t_k = \theta^k$, $k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, функциям $\varepsilon(t) = \exp(-t^2)$, $t \geq 1$, и Гелбаума–Олмстеда [7, с. 54]

$$e_{\beta\gamma}(\tau, \tau_1, \tau_2) = \beta + (\gamma - \beta) \exp\{-(\tau - \tau_1)^{-2} \exp[-(\tau - \tau_2)^{-2}]\}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2),$$

принимавшей на концах интервала значения β и γ и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка, определим ограниченные бесконечно дифференцируемые коэффициенты необходимой диагональной системы

$$\dot{x} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]x = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0 = 1. \quad (5)$$

Для этого на промежутке $[t_{2k}, t_{2k+2})$ с произвольным фиксированным $k \in \mathbb{N}_0$ положим

$$a_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ e_{-\alpha, \alpha}(t, t'_{2k+1}, t_{2k+1}), & t \in (t'_{2k+1}, t_{2k+1}), \end{cases} \quad t'_k \equiv t_k - \varepsilon(t_k),$$

$$a_2(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}], \\ e_{\alpha, -\alpha}(t, t'_{2k+2}, t_{2k+2}), & t \in (t'_{2k+2}, t_{2k+2}), \end{cases}$$

$$a_1(t) = -a_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Для вычисления характеристических показателей системы (5) рассмотрим другую диагональную систему

$$\dot{x} = \text{diag}[a'_1(t), a'_2(t)]x = A'(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (5')$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$a'_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t_{2k+1}), \\ \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t_{2k+2}), \end{cases} \quad a'_1(t) = -a'_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}).$$

Из очевидных равенств

$$(t_{2k+2} - t_{2k})^{-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} a'_2(\tau) d\tau = (t_{2k+3} - t_{2k+1})^{-1} \int_{t_{2k+1}}^{t_{2k+3}} a'_1(\tau) d\tau = \alpha \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \lambda,$$

справедливых при всех $k \in \mathbb{N}_0$, для характеристических показателей системы (5') следуют необходимые представления $\lambda_1(A') = \lambda_2(A') = \lambda$.

Матрицы $A(t)$ и $A'(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ отличаются друг от друга на величину, не превосходящую 2α , причём это происходит на промежутке длины $\varepsilon(t_{k+1})$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|A(\tau) - A'(\tau)\| e^{M\tau} d\tau < +\infty$$

при любом конечном $M > 0$.

Поэтому, согласно [8], системы (5) и (5') являются асимптотически эквивалентными (приводимыми друг к другу линейным преобразованием Ляпунова). Тем самым справедливы и необходимые равенства

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \alpha \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \lambda.$$

2°. Построение возмущённой системы и её решения с отрицательным показателем. Сначала изложим алгоритм такого построения на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ с произвольно фиксированным $k > 1$.

Определим величины

$$\beta_1 = \theta\beta_2 - (\theta - 1)\alpha, \quad \beta_2 = -\alpha \frac{\theta - 1}{m\theta - 1} \quad (6)$$

и будем строить на этом отрезке возмущённую систему с m -возмущением

$$f(t, y) = (f_1(t, y_2), f_2(t, y_1))^T, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad y \in \mathbb{R}_+^2 \equiv \{(y_1, y_2)^T : y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\},$$

и её решение $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ с начальными значениями

$$y_1(t_{2k}) = e^{\beta_1 t_{2k}}, \quad y_2(t_{2k}) = c_{2k} e^{\beta_2 t_{2k}}. \quad (7)$$

Здесь и ниже

$$c_{2k}(t) \equiv \exp\left(\int_{t'_{2k}}^t [-\alpha + e_{\alpha, -\alpha}(\tau, t'_{2k}, t_{2k})] d\tau\right), \quad t \in [t'_{2k}, t_{2k}], \quad (8)$$

$$c_{2k+1}(t) \equiv \exp\left(\int_{t'_{2k+1}}^t [\alpha + e_{-\alpha, \alpha}(\tau, t'_{2k+1}, t_{2k+1})] d\tau\right), \quad t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}];$$

будем также использовать обозначение $c_k(t_k) = c_k$.

Для последних функций справедливы оценки

$$e^{-2\alpha\varepsilon(t_{2k})} \leq c_{2k}(t) \leq 1, \quad t \in [t'_{2k}, t_{2k}].$$

Положив

$$1 \leq c_{2k+1}(t) \leq e^{2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})}, \quad t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}],$$

$$f_1(t, y_2) \equiv 0, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \quad (9)$$

для первой компоненты $y_1(t)$ строящегося решения получим представление

$$y_1(t) = e^{\beta_1 t_{2k} + \alpha(t - t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ c_{2k+1}^{-1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \quad (10)$$

При определении необходимого бесконечно дифференцируемого m -возмущения $f_2(t, y_1)$ и построении второй компоненты $y_2(t)$ этого решения на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ следует иметь в

виду, что сама функция y_1^m , $y_1 \geq 0$, для $m > 1$, отличных от натуральных значений, не является бесконечно дифференцируемой в точке $y_1 = 0$. Поэтому воспользуемся следующими двумя бесконечно дифференцируемыми (с нулевыми значениями односторонних производных любого порядка на концах соответствующих промежутков) функциями:

$$E(\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \begin{cases} e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2), & \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ 1, & \tau \in (\tau_2, \tau_3], \\ e_{10}(\tau, \tau_3, \tau_4), & \tau \in [\tau_3, \tau_4], \end{cases} \quad (11)$$

$$F_k(y_i) = \begin{cases} y_i^m e_{01}(y_i, 0, \varepsilon(t_k)), & y_i \in [0, \varepsilon(t_k)], \\ y_i^m, & y_i > \varepsilon(t_k), \end{cases} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (12)$$

Следует отметить, что необходимое уменьшение величин положительных компонент $y_i(t)$ строящегося решения $y(t)$ (и тем самым в итоге необходимую реализацию отрицательности показателя решения $y(t)$, построенного на всей полуоси $[t_0, +\infty)$) будем осуществлять ненулевыми и только отрицательными значениями компонент m -возмущения.

В соответствии с этим компонента $f_2(t, y_1)$ m -возмущения $f(t, y)$ на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ имеет представление

$$f_2(t, y_1) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}], \\ -d_{2k+1} F_{2k+1}(y_1) E(t, \eta_{2k+1}, \eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}, t_{2k+1}), & t \in (\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \quad (13)$$

в котором $\eta_{2k+1} \equiv t_{2k+1} - 1$, $\eta'_{2k+1} = \eta_{2k+1} + \varepsilon(t_{2k+1})$, $y_1 \geq 0$, а постоянная $d_{2k+1} > 0$ подлежит последующему определению.

Бесконечная дифференцируемость функции $f_2(t, y_1)$ обеспечивается аналогичным свойством функций Гелбаума–Олмстеда и нулевыми значениями их односторонних производных любого порядка в концевых точках промежутков определения, а также значениями самих этих функций в указанных точках.

По определению постоянной $\beta_1 < 0$ для первой компоненты $y_1(t)$ наряду с представлениями (8) и (10) справедливы равенства

$$y_1(t) = e^{\beta_2 t_{2k+1}} + \alpha(t - t_{2k+1}) \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ c_{2k+1}^{-1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \quad (14)$$

Для этой компоненты на отрезке $[t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}]$, во всех внутренних точках которого возмущение $f_2(t, y_1)$ при $y_1 > 0$ отрицательно, в соответствии с его определением (11)–(13) установим неравенство

$$y_1(t) > \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}]. \quad (15)$$

Так как $\beta_2 > -\alpha$, то неравенство (15) на отрезке $[t_{2k+1} - 1, t'_{2k+1}]$ получается из представления (14) следующим образом:

$$\ln y_1(t) > -\alpha(1 + t_{2k+1}) > -2\alpha t_{2k+1} > -t_{2k+1}^2 \equiv \ln \varepsilon(t_{2k+1}),$$

что обеспечивается выбором

$$k > k_0: \quad t_k > t_{k_0} = \theta^{k_0} > 4(1 + \alpha).$$

Таким образом, неравенство (15) полностью доказано. Оно позволяет представить возмущение $f_2[t, y_1(t)]$ в виде

$$f_2[t, y_1(t)] = -d_{2k+1} E(t, \dots) y_1^m(t), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}]. \quad (16)$$

Вторая компонента $y_2(t)$ с начальным значением $y_2(t_{2k}) = c_{2k} \exp(\beta_2 t_{2k})$ является на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{y}_2 = a_2(t) + f_2(t, y_1(t)), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}].$$

Это решение в силу равенств (11)–(14) и (16) имеет представление

$$\begin{aligned} y_2(t) &= z_1(t) + z_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \\ z_1(t) &= y_2(t_{2k}) e^{-\alpha(t-t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}), \\ c_{2k+1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \\ z_2(t) &= 0, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} z_2(t) &= -d_{2k+1} e^{m\beta_2 t_{2k+1}} \int_{\eta_{2k+1}}^t c_{2k+1}^{1-m}(\tau) E(\tau, \dots) e^{\alpha(\tau-t) + m\alpha(\tau-t_{2k+1})} d\tau \equiv \\ &\equiv -d_{2k+1} e^{m\beta_2 t_{2k+1}} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t), \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом, согласно оценкам (9) для функций $c_k(t)$, отличных от единицы лишь на интервалах (t'_k, t_k) , справедливы неравенства

$$\begin{aligned} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t) &\leq e^{2m\alpha}, \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \\ e^{-2m\alpha} &\leq J_{2k+1}(\eta'_{2k+1}, t'_{2k+1}) < J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1}). \end{aligned} \quad (19)$$

По определению (6) величины β_2 справедливо равенство

$$\beta_2 - (\theta - 1)\alpha = m\theta\beta_2.$$

Поэтому функция $z_1(t)$, найденная по формуле (17), принимает значение

$$z_1(t_{2k+1}) = c_{2k} \exp(m\beta_2 t_{2k+1}). \quad (20)$$

Постоянную d_{2k+1} определим из условия

$$y_2(t_{2k+1}) = z_1(t_{2k+1}) + z_2(t_{2k+1}) = \exp(\beta_1 t_{2k+1}).$$

Сравнивая значения (18) и (20), для постоянной d_{2k+1} получаем представление

$$d_{2k+1} = \frac{c_{2k} - \exp(\beta_2 t_{2k+1})}{J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t_{2k+1})},$$

в котором величина $\beta = \beta_1 - m\beta_2$ является в соответствии с определением (6) отрицательной:

$$\beta = (\theta - m)\beta_2 - (\theta - 1)\alpha = -\alpha(1 + m) \frac{\theta - 1}{m\theta - 1} < 0.$$

Поэтому для $k \geq k_0$: $\theta^{k_0} > m\theta/(\theta - 1)^2$ постоянная d_{2k+1} будет положительной и ограниченной сверху величиной $e^{2m\alpha}$.

С учётом оценок (9) и соотношений (17)–(19) для второй компоненты $y_2(t)$ справедливы неравенства

$$|y_2(t)| = e^{2\alpha + \beta_2 t_{2k} - \alpha(t-t_{2k})} \leq e^{2\alpha + \beta_2 t}, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+1}),$$

поскольку $\beta_2 t > -\alpha$ в силу (6);

$$|y_2(t)| \leq z_1(t) + |z_2(t)| \leq e^{2\alpha + \beta_2 t_{2k} - \alpha(t-t_{2k})} + d_{2k+1} e^{m\beta_2 t_{2k+1}} J_{2k+1}(\eta_{2k+1}, t) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{4m\alpha(+\beta_2 t_{2k}-\alpha(t_{2k+1}-t_{2k}))} + e^{4m\alpha+m\beta_2 t_{2k+1}} = \\ &= 2e^{4m\alpha+m\beta_2 t_{2k+1}} \leq e^{4m\alpha+\beta_2 t}, \quad t \in [\eta_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{aligned}$$

так как $\beta_2 < 0$, и поэтому

$$m\beta_2 t_{2k+1} < \beta_2 t_{2k+1} \leq \beta_2 t.$$

Для первой же компоненты $y_1(t)$ в силу оценок (9), представления (10) и определения β_1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 < y_1(t) &\leq \exp[\alpha + \beta_1 t_{2k} + \alpha(t - t_{2k})] = \exp[\alpha + \beta_2 t_{2k+1} - \alpha(t_{2k+1} - t)] \leq \\ &\leq \exp(\alpha + \beta_2 t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]. \end{aligned}$$

Полученные на завершающем этапе построения на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ возмущённой системы и её решения равенства

$$y_1(t_{2k+1}) = c_{2k+1}^{-1} \exp(\beta_2 t_{2k+1}), \quad y_2(t_{2k+1}) = \exp(\beta_1 t_{2k+1})$$

являются начальными значениями компонент решения $y(t)$ для их построения на следующем отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$. Они идентичны предыдущим начальным значениям (7) с заменой y_1 на y_2 и наоборот. Поэтому необходимые построения на отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ повторяют с указанной заменой построения на предыдущем отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$.

В итоге на всем отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ построены двумерная нелинейная система с необходимым m -возмущением и её нетривиальное решение $y(t)$ с компонентами $y_1(t)$ и $y_2(t)$, принимающими значения

$$\begin{aligned} y_1(t_{2k}) &= e^{\beta_1 t_{2k}}, \quad y_1(t_{2k+1}) = c_{2k+1}^{-1} e^{\beta_2 t_{2k+1}}, \\ y_2(t_{2k}) &= c_{2k} e^{\beta_2 t_{2k}}, \quad y_2(t_{2k+1}) = e^{\beta_1 t_{2k+1}}, \quad k \geq k_0, \end{aligned} \quad (21)$$

и удовлетворяющими оценкам

$$|y_i(t)| \leq 2 \exp(4m\alpha + \beta_2 t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad (22)$$

с числом $k_0 \in \mathbb{N}$, наибольшим из определённых выше.

Методом математической индукции распространим приведённое на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ построение нелинейной системы с m -возмущением и её решения $y(t)$ на всю полуось $t \geq T_0 = \theta^{2k_0}$. При этом для всех $k \geq k_0$ сохраняются значения (21) и оценки (22) для компонент решения $y(t)$. Тем самым очевидны представления $\lambda[y] = \beta_2$ и (4) для показателя этого решения.

На отрезке $[t_0, T_0 + 2]$, $t_0 = 1$, положим $f(t, y) \equiv 0$, $y \geq 0$, и построенное решение $y(t)$ продолжим по непрерывности на этот отрезок решением системы линейного приближения. Положим также $f(t, y) \equiv 0$ для всех $y \notin \mathbb{R}_+^2$ и $t \geq t_0$. Теорема доказана.

В заключение отметим очевидную бесконечную продолжимость вправо всех решений построенной возмущённой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728.
2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
3. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.
4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.

5. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.
6. *Изобов Н.А., Ильин А.В.* Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1443–1453.
7. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
8. *Изобов Н.А., Мазаник С.А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 168–173.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.06.2023 г.
После доработки 25.06.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ГЛАДКОСТИ ПОТЕНЦИАЛА ПУАССОНА
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, К. Д. Федоров

Рассматривается решение задачи Коши в полосе на плоскости для однородной параболической системы второго порядка. Коэффициенты системы удовлетворяют двойному условию Дини. Начальная функция непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными. С помощью потенциала Пуассона исследуется характер гладкости этого решения и доказываются соответствующие оценки.

DOI: 10.31857/S0374064123120038, EDN: NUZLJI

Введение. В настоящей работе предметом исследования является характер гладкости решения задачи Коши в полосе D на плоскости для однородной параболической системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини. В силу теорем о единственности решения задачи Коши (см. [1, с. 29] и [2]) этот вопрос сводится к изучению характера гладкости потенциала Пуассона.

Если коэффициенты параболической системы удовлетворяют условию Гёльдера, то, как следует из работы [3] (см. также [1, с. 361]), для любой начальной функции из класса $H^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, где $0 < \alpha < 1$, решение задачи Коши принадлежит классу $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$.

В случае одного параболического уравнения в статье [4] установлена принадлежность потенциала Пуассона пространству $H^{2+\omega_1, 1+\omega_2}(\overline{D})$, где ω_1, ω_2 – некоторые модули непрерывности. При этом предполагается, что модуль непрерывности коэффициентов уравнения удовлетворяет тройному условию Дини, начальная функция непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными, причём её вторая производная Дини-непрерывна.

Если коэффициенты параболической системы в полосе D удовлетворяют двойному условию Дини, то в [5] установлены оценки для потенциала Пуассона и его первой пространственной производной в предположении, что начальная функция непрерывна и ограничена вместе со своей первой производной.

В настоящей статье для параболической системы с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, рассматривается случай, когда начальная функция является непрерывной и ограниченной вместе со своими первой и второй производными, и доказывается теорема о принадлежности потенциала Пуассона пространству $\hat{C}^{2,1}(\overline{D})$ (см. ниже (1)).

Заметим, что достаточно слабые условия на коэффициенты системы и на плотность потенциала Пуассона не позволяют воспользоваться известными методами исследования характера регулярности решения задачи Коши (см. [1, с. 441; 3; 4; 6]). Поэтому предлагаемый нами метод отличается от известных до сих пор и существенно опирается на свойства фундаментальных матриц решений параболических систем.

Работа состоит из трёх пунктов: в п. 1 приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения и формулируется основная теорема, в п. 2 доказываются вспомогательные утверждения, касающиеся характера гладкости фундаментальных матриц решений, п. 3 посвящён доказательству основной теоремы.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Через $C^2(\mathbb{R})$ обозначим пространство (вектор-) функций $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, непрерывных и ограниченных вместе со своими первой и второй производными, с нормой

$$\|h; \mathbb{R}\|^2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h''(x)|.$$

Пусть $T > 0$ фиксировано. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассматриваем полосу

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq T\}.$$

Следуя [1, с. 16], через $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных вместе со своими первыми по x , t и второй по x производными в $\overline{D}$, для которых конечно выражение

$$\begin{aligned} \|u\|_D^{(2+\alpha)} = & \sum_{2r+s \leq 2} \sup_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \sum_{2r+s=2} \left(\sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t) \in D \\ |\Delta x| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta x|^\alpha} \left| \Delta_x \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \right. \\ & \left. + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in D \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{\alpha/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| \right) + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in D \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_x f(x, t) = f(x + \Delta x, t) - f(x, t), \quad \Delta_t f(x, t) = f(x, t + \Delta t) - f(x, t)$$

для любой функции f .

Через $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по x , t и второй по x производными в $\overline{D}$, для которых конечно выражение

$$\|u; D\|^{(2)} = \sum_{2r+s \leq 2} \sup_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right| + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in D \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{1/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (1)$$

Заметим, что пространство $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$.

Под значениями (вектор-) функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения “изнутри” области.

Для любой матрицы B (или вектора b) под $|B|$ (соответственно $|b|$) понимаем максимум из модулей элементов B (компонент b).

Модулем непрерывности, согласно [7, с. 150–151], называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $\omega(0) = 0$.

Пусть ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини:

$$\widetilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < \infty, \quad z > 0,$$

и такой, что для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функция $\nu(z) = \omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [8]) оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=0}^2 A_k(x, t) \frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ и $A_k = \|a_{ijk}\|_{i,j=1}^m$, $k = 0, 1, 2$, – $m \times m$ -матрицы, элементы которых суть вещественнозначные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

(а) для собственных чисел μ_r матрицы A_2 выполнено $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$, $r = \overline{1, m}$;

(б) функции a_{ijk} ограничены в $\overline{D}$ и справедливы оценки

$$|a_{ijk}(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_{ijk}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}),$$

$$(x, t), (x + \Delta x, t + \Delta t) \in \overline{D}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Пусть

$$Z(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \exp(-A_2(\xi, \tau)\sigma^2 t) d\sigma, \quad t > 0, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad x, \xi \in \mathbb{R}.$$

Справедливы неравенства (см. [9, с. 296–297]):

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \exp(-cx^2/t), \quad (2)$$

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi + \Delta\xi, \tau) - \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \omega_0(|\Delta\xi|) \exp(-cx^2/t), \quad (3)$$

где $t > 0$, $0 \leq \tau \leq T$, $x, \xi, \xi + \Delta\xi \in \mathbb{R}$, $k, l \geq 0$.

Положим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D} : t > \tau\}$. Матрицу $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$, называем *фундаментальной матрицей решений* (далее – ф.м.р.) системы $Lu = 0$, если:

- 1) функции Γ , $\partial\Gamma/\partial t$, $\partial\Gamma/\partial x$, $\partial^2\Gamma/\partial x^2$ непрерывны в D^* ;
- 2) для любой фиксированной пары $(\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ столбцы матрицы $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ являются решениями системы $Lu = 0$ по переменным $(x, t) \in \mathbb{R} \times (\tau, T]$;
- 3) для любой финитной и непрерывной (вектор-) функции $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$, и любого фиксированного $\tau \in [0, T]$ потенциал Пуассона

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) h(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [\tau, T],$$

является классическим ограниченным решением задачи Коши

$$Lu = 0 \quad \text{в } \mathbb{R} \times (\tau, T], \quad u(x, \tau) = h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и в случае $m \geq 2$ удовлетворяет условию: для любого $t_1 \in (\tau, T)$ существует постоянная $C_1 = C_1(t_1)$ такая, что

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C_1, \quad k = 1, 2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_1, T].$$

Из теорем единственности для решения задачи Коши (см. [1, с. 29], если $m = 1$, и [2], если $m \geq 2$) следует единственность ф.м.р. для системы $Lu = 0$.

Известно (см. [10], если $m = 1$, и [11, 12], если $m \geq 2$), что при условиях (а), (б) существует ф.м.р. $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ системы $Lu = 0$, для неё выполнены оценки

$$\left| \frac{\partial^{l+k} \Gamma}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 0 \leq 2l + k \leq 2, \quad (4)$$

и, кроме того, для функции

$$W(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) - Z(x - \xi, t - \tau; \xi, \tau)$$

справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{l+k} W}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 0 \leq 2l + k \leq 2, \quad (5)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{|\Delta t|^{1/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad (6)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*, \quad 0 < \Delta t \leq t - \tau.$

Здесь и далее через C и c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, δ, m и коэффициентов оператора L , конкретный вид которых для нас не важен.

Рассмотрим задачу Коши:

$$Lu = 0 \quad \text{в } D, \quad u(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Из свойств ф.м.р. следует, что для любой непрерывной и ограниченной (вектор-) функции h классическим решением задачи (7) является потенциал Пуассона

$$Ph(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T, \quad (8)$$

и имеет место оценка

$$|Ph(x, t)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|, \quad (x, t) \in \overline{D}.$$

Если $m = 1$, то (8) является единственным классическим решением задачи (7) в классе непрерывных и ограниченных функций (см. [1, с. 29]). Если $m \geq 2$, то (8) является единственным классическим решением задачи (7) в пространстве непрерывных и ограниченных функций, пространственные производные первого и второго порядков которых непрерывны и ограничены в каждом слое $\mathbb{R} \times [t_1, T]$, $t_1 \in (0, T]$ (см. [2]). Поэтому исследование решения задачи Коши (7) сводится к изучению свойств потенциала Пуассона (8).

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (a), (b). Тогда для любой функции $h \in C^2(\mathbb{R})$ потенциал Пуассона (8) принадлежит пространству $\hat{C}^{2,1}(\overline{D})$ и справедлива оценка

$$\|Ph; D\|^{(2)} \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2,$$

при этом

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,t) \in D}} \frac{\partial^k Ph}{\partial x^k}(x, t) = h^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \quad (9)$$

причём стремление к пределу равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}$, если $k = 0, 1$, и стремление к пределу равномерно по $x_0 \in [-d, d]$ для любого $d > 0$, если $k = 2$.

2. Фундаментальные матрицы решений. Для операторов

$$L_0 u = \frac{\partial u}{\partial t} - A_2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad L_1 u = \frac{\partial u}{\partial t} - A_2(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}$$

соответствующие ф.м.р. $\Gamma_i(x, t; \xi, \tau)$, $i = 0, 1$, имеют вид

$$\Gamma_i(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi, t - \tau; \xi, \tau) + W_i(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*. \quad (10)$$

Слагаемые W_i в (10) удовлетворяют оценкам (5), (6).

Из единственности решения задачи Коши для параболических систем (см. [2]) следует, что справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - z) \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) d\xi = (x - z) E, \quad x, z \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad (11)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) d\xi = E, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad (12)$$

где E – единичная матрица.

Ф.м.р. $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ и $\Gamma_1(x, t; \xi, \tau)$ систем $Lu = 0$ и $L_1u = 0$, соответственно, могут быть представлены в виде

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_1(x, t; \xi, \tau) + W_2(x, t; \xi, \tau), \quad (13)$$

$$\Gamma_1(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_0(x, t; \xi, \tau) + W_3(x, t; \xi, \tau), \quad (14)$$

где

$$W_2(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (15)$$

$$W_3(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy, \quad (16)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$.

Установим свойства функций W_2 , W_3 , которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (a), (b). Тогда имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^k W_2}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{(1-k)/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad k = 0, 1, \quad (17)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t - \tau)^{1/2}} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad (18)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*$, $0 < \Delta t \leq t - \tau$;

$$\left| \frac{\partial^k W_3}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-k/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad k = 0, 1, \quad (19)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{t - \tau} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad (20)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*$, $0 < 2\Delta t \leq t - \tau$.

Доказательство. Из определения (15) сразу получаем оценку (17):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k W_2}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| &\leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right) \int_{\tau}^t (t - \eta)^{-k/2} d\eta \leq \\ &\leq C(t - \tau)^{(1-k)/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right), \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Докажем неравенство (18). Пусть $0 < \Delta t \leq t - \tau$. Положим

$$\Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t + \Delta t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-\Delta t}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv \\
& \equiv I_1(x, t, \Delta t, \tau) - I_2(x, t, \Delta t, \tau) + I_3(x, t, \Delta t, \tau).
\end{aligned}$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются аналогичным образом. Оценим, например, I_2 :

$$\begin{aligned}
|I_2(x, t, \Delta t, \tau)| & \leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \int_{t-\Delta t}^t \frac{d\eta}{(t - \eta)^{1/2}} \leq \\
& \leq C(\Delta t)^{1/2} (t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right).
\end{aligned}$$

Оценим I_3 . Из представления

$$\begin{aligned}
I_3(x, t, \Delta t, \tau) & = \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - y, t - \eta; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy
\end{aligned}$$

и оценок (2), (6) следует неравенство

$$\begin{aligned}
|I_3(x, t, \Delta t, \tau)| & \leq C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t - \tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \int_{\tau}^{t-\Delta t} \left(\frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t - \eta)^{3/2}} + \frac{\tilde{\omega}_0((t - \eta)^{1/2})}{t - \eta} \right) d\eta \leq \\
& \leq C \left(1 + \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2}) \right) (\Delta t)^{1/2} (t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right).
\end{aligned}$$

Оценку (19) сразу получаем из определения (16):

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^k W_3}{\partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| & \leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right) \int_{\tau}^t (t - \eta)^{-k/2} (\eta - \tau)^{-1/2} d\eta \leq \\
& \leq C(t - \tau)^{-k/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad k = 0, 1.
\end{aligned}$$

Наконец, докажем неравенство (20). Пусть $0 < 2\Delta t \leq t - \tau$. Положим

$$\begin{aligned}
\Delta_t \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) & = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t + \Delta t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy - \\
& - \int_{t-\Delta t}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv \\
& \equiv J_1(x, t, \Delta t, \tau) - J_2(x, t, \Delta t, \tau) + J_3(x, t, \Delta t, \tau).
\end{aligned}$$

Оценим интеграл J_2 (интеграл J_1 оценивается аналогично):

$$|J_2(x, t, \Delta t, \tau)| \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{t-\Delta t}^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{1/2}} \leq \frac{C(\Delta t)^{1/2}}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).$$

Из представления

$$\begin{aligned}
J_3(x, t, \Delta t, \tau) = & \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-y, t-\eta; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^{t-\Delta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W_1}{\partial x}(x, t; y, \eta) A_1(y, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy
\end{aligned}$$

и оценок (2), (6) следует неравенство для интеграла J_3 :

$$\begin{aligned}
|J_3(x, t, \Delta t, \tau)| \leq & C \frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \left(\int_{(t+\tau)/2}^t + \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} \right) \left(\frac{(\Delta t)^{1/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}} + \right. \\
& \left. + \frac{\tilde{\omega}_0((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)(\eta-\tau)^{1/2}} \right) d\eta \leq C \left(1 + \tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2}) \right) \frac{(\Delta t)^{1/2}}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (a), (b). Тогда имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq \frac{C}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (21)$$

$$\left| \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \quad (22)$$

$(x, t; \xi, \tau) \in D^*$, и предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) d\xi = 0, \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) d\xi = 0, \quad (24)$$

$x \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, T)$, причём сходимость равномерна по $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, T)$.

Доказательство. Докажем оценку (21). Имеет место представление

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x-y, t-\eta; x, \eta) [A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) -$$

$$\begin{aligned}
& - A_0(x, \eta) \Gamma_1(x, \eta; \xi, \tau)] dy + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x - y, t - \eta; y, \eta) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x - y, t - \eta; x, \eta) \right] A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
& + \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_0(y, \eta) \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv I_1(x, t; \xi, \tau) + I_2(x, t; \xi, \tau) + I_3(x, t; \xi, \tau).
\end{aligned}$$

Рассмотрим I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1(x, t; \xi, \tau) &= \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x - y, t - \eta; x, \eta) [A_0(y, \eta) - A_0(x, \eta)] \Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\
&+ \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x - y, t - \eta; x, \eta) A_0(x, \eta) [\Gamma_1(y, \eta; \xi, \tau) - \Gamma_1(x, \eta; \xi, \tau)] dy \equiv \\
&\equiv I_{11}(x, t; \xi, \tau) + I_{12}(x, t; \xi, \tau).
\end{aligned}$$

Оценим I_{11} . Из условия (b) получаем

$$\begin{aligned}
|I_{11}(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((t - \eta)^{1/2})}{t - \eta} d\eta \leq \\
&\leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{1/2}} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Оценим I_{12} . Из представления

$$I_{12}(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Z}{\partial y}(x - y, t - \eta; x, \eta) A_0(x, \eta) \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy \tag{26}$$

следует неравенство

$$|I_{12}(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right).$$

Рассмотрим I_2 . Из оценки (3) имеем

$$\begin{aligned}
|I_2(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((t - \eta)^{1/2})}{t - \eta} d\eta \leq \\
&\leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{1/2}} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right).
\end{aligned} \tag{27}$$

Из оценки (5) следует неравенство для интеграла I_3 :

$$|I_3(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-1/2} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau} \right) \int_{\tau}^t \frac{\tilde{\omega}_0((t - \eta)^{1/2})}{t - \eta} d\eta \leq$$

$$\leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right). \quad (28)$$

Из оценок для интегралов I_1 , I_2 , I_3 получаем неравенство (21).

Докажем предельное соотношение (23). Рассмотрим I_{12} . Из представления (26), теоремы Фубини (см., например, [13, с. 453–455; 14, с. 160–161]) и равенства (12) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{12}(x, t; \xi, \tau) d\xi = - \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Z}{\partial y}(x-y, t-\eta; x, \eta) A_0(x, \eta) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) d\xi = 0,$$

$x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t \leq T$. Отсюда и из оценок (25), (27), (28) следует соотношение (23).

Далее докажем оценку (22). В силу равенства (12) имеет место представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, \tau) &= \int_{(t+\tau)/2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \right) A_1(x, \eta) \left[\frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x}(x, \eta; \xi, \tau) \right] dy + \\ &+ \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \right) A_1(x, \eta) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy + \\ &+ \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) \right) [A_1(y, \eta) - A_1(x, \eta)] \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) dy \equiv \\ &\equiv J_1(x, t; \xi, \tau) + J_2(x, t; \xi, \tau) + J_3(x, t; \xi, \tau). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |J_1(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{1/2}} \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \\ |J_2(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t-\tau)^{-3/2} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{d\eta}{(\eta-\tau)^{1/2}} \leq \frac{C}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \\ |J_3(x, t; \xi, \tau)| &\leq \frac{C}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int_{\tau}^t \frac{\omega_0((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)(\eta-\tau)^{1/2}} d\eta \leq \\ &\leq C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из оценок для интегралов J_1 , J_2 , J_3 получаем неравенство (22).

Наконец, докажем предельное соотношение (24). Из теоремы Фубини и равенств (11), (12) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) J_1(x, t; \xi, \tau) d\xi = \\ &= \int_{(t+\tau)/2}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_1(x, \eta) dy \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left[\frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x}(x, \eta; \xi, \tau) \right] d\xi = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) J_2(x, t; \xi, \tau) d\xi &= \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_1(x, \eta) dy \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \frac{\partial \Gamma_0}{\partial y}(y, \eta; \xi, \tau) d\xi = \\ &= \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x, t; y, \eta) A_1(x, \eta) dy = 0, \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau < t \leq T$. Отсюда и из оценки (29) следует соотношение (24). Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Достаточно установить следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial^k Ph}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \quad (30)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) \right| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 |\Delta t|^{1/2}, \quad (31)$$

где $(x, t), (x, t + \Delta t) \in D$, и, в силу непрерывности h, h', h'' , предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial^k Ph}{\partial x^k}(x, t) = h^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \quad (32)$$

в которых сходимость равномерна по $x \in \mathbb{R}$, если $k = 0, 1$, и равномерна по $x \in [-d, d]$ для любого $d > 0$, если $k = 2$.

Из представления (см. (12), (13))

$$Ph(x, t) = h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x, t; \xi, 0) (h(\xi) - h(x)) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi$$

и оценок (4), (17) сразу следуют неравенство (30) и предельное соотношение (32) при $k = 0$.

Из представления (см. (11)–(14))

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)) d\xi + \\ &+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) h(x) + h'(x) + \\ &+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left(\frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) + \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) h'(x), \end{aligned} \quad (33)$$

неравенства

$$|h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 |\xi - x|^2$$

и оценок (4), (17), (19) следуют неравенство (30) и предельное соотношение (32) при $k = 1$.

Далее докажем (30) и (32) для $k = 2$. Имеет место представление (см. (11)–(14))

$$\frac{\partial^2 Ph}{\partial x^2}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x)) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) h(x) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W_3}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) h'(x) \equiv I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t), \quad (x, t) \in D.
\end{aligned}$$

Из неравенства

$$|I_1(x, t)| \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi - x|^2}{t^{3/2}} \exp \left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t} \right) d\xi \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2$$

и оценок (21), (22) следует (30) при $k = 2$.

Докажем (32) для $k = 2$. Из оценки (21) и предельных соотношений (23), (24) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} I_k(x, t) = 0, \quad k = 2, 3, \quad (34)$$

причём стремление к пределу равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим I_1 . Пользуясь равенством

$$\begin{aligned}
h(\xi) - h(x) - h'(x)(\xi - x) &= \frac{h''(x + \Theta(\xi - x))}{2} (\xi - x)^2, \\
\Theta &= \Theta(x, \xi) \in (0, 1),
\end{aligned} \quad (35)$$

перепишем I_1 в виде

$$\begin{aligned}
I_1(x, t) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) \frac{h''(x)}{2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) (h''(x + \Theta(\xi - x)) - h''(x)) d\xi \equiv I_{11}(x, t) + I_{12}(x, t).
\end{aligned}$$

Рассмотрим I_{11} :

$$\begin{aligned}
I_{11}(x, t) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}(x - \xi, t; A_2(x, 0)) d\xi \right) \frac{h''(x)}{2} + \\
&+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x - \xi, t; A_2(\xi, 0)) - \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}(x - \xi, t; A_2(x, 0)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) \frac{h''(x)}{2} = h''(x) + \hat{I}_{11}(x, t).
\end{aligned}$$

Из оценок (3), (5) следует неравенство $|\hat{I}_{11}(x, t)| \leq C \tilde{\omega}_0(t^{1/2})$, из которого имеем

$$\lim_{t \rightarrow +0} \hat{I}_{11}(x, t) = 0,$$

причём стремление к пределу равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим I_{12} . Зафиксируем произвольно $d > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Обозначим модуль непрерывности функции h'' на отрезке $[-2d, 2d]$ через $\omega_{h'', 2d}$, а именно, полагаем

$$\omega_{h'', 2d}(z) = \sup_{\substack{|\Delta x| \leq z \\ x, x+\Delta x \in [-2d, 2d]}} |h''(x + \Delta x) - h''(x)|.$$

Тогда выполняется неравенство (см. (35))

$$|h''(x + \Theta(\xi - x)) - h''(x)| \leq \omega_{h'', 2d}(\delta), \quad \text{если } x \in [-d, d], \quad |\xi - x| \leq \delta < d.$$

Отсюда, из представления

$$I_{12}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\int_{|\xi-x| \leq \delta} + \int_{|\xi-x| > \delta} \right) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t; \xi, 0) (h''(x + \Theta(\xi - x)) - h''(x)) (\xi - x)^2 d\xi$$

и оценки (4) следует неравенство

$$|I_{12}(x, t)| \leq C(\omega_{h'', 2d}(\delta) + \exp(-c\delta^2/t)),$$

из которого, выбирая последовательно достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon, d) > 0$ и затем достаточно малое $t = t(\delta) > 0$, получаем

$$|I_{12}(x, t)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim_{t \rightarrow +0} I_{12}(x, t) = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +0} I_1(x, t) = h''(x),$$

причём сходимость равномерна на $[-d, d]$. Отсюда и из (34) следует равенство (32) при $k = 2$.

Наконец, докажем оценку (31). Не ограничивая общности, считаем $\Delta t > 0$. В случае $2\Delta t \geq t > 0$ неравенство (31) следует из представления (33) и оценок (4), (17), (19):

$$\begin{aligned} \left| \Delta_t \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) \right| &\leq \left| \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t + \Delta t) - h'(x) \right| + \left| \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) - h'(x) \right| \leq \\ &\leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 (|t + \Delta t|^{1/2} + |t|^{1/2}) \leq C \|h; \mathbb{R}\|^2 |\Delta t|^{1/2}. \end{aligned}$$

В случае $0 < 2\Delta t \leq t$ неравенство (31) следует из представления (см. (33))

$$\begin{aligned} \Delta_t \frac{\partial Ph}{\partial x}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x - \xi, t; A_2(\xi, 0)) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(\xi)(\xi - x)) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \left(\frac{\partial W}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) (h(\xi) - h(x) - h'(\xi)(\xi - x)) d\xi + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) d\xi \right) h(x) + \\ &+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x) \left(\Delta_t \frac{\partial W_2}{\partial x}(x, t; \xi, 0) + \Delta_t \frac{\partial W_3}{\partial x}(x, t; \xi, 0) \right) d\xi \right) h'(x) \end{aligned}$$

и оценок (2), (6), (18), (20). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что если функция h'' ограничена и равномерно непрерывна, то сходимость в предельном соотношении (9) равномерна по $x_0 \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
3. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
4. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
5. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
6. *Arnese G.* Su alcune proprietà dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine $2m$ a coefficienti non costanti // Ann. di Mat. Pura ed Appl. 1971. V. 91. № 1. P. 1–16.
7. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
8. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секция А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
10. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$ -параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
11. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294-B92.
12. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
13. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М., 2008.
14. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.; Ижевск, 2020.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 16.09.2023 г.
После доработки 16.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2023 г. А. А. Косов, Э. И. Семенов

Рассматриваются уравнения и системы эллиптического типа со степенными нелинейностями. Такие уравнения встречаются при моделировании распределённых формаций роботов, в химической кинетике, в биологии, астрофизике и многих других областях. Изучается задача построения многомерных точных решений. Предлагается использовать специального вида анзацы, сводящие задачу к решению систем алгебраических уравнений. Получен ряд многопараметрических семейств новых точных многомерных решений (как радиально симметричных, так и анизотропных), представимых явными формулами. Приводятся примеры, иллюстрирующие найденные точные решения.

DOI: 10.31857/S037406412312004X, EDN: NVACCC

Введение. В последнее десятилетие наметился существенный прогресс в направлении развития техники, связанном с использованием организованных управляемых групп роботов, называемых формациями, широко применяемым во многих областях. К числу характерных представителей таких формаций относятся группы автономных мобильных роботов, стаи и рои беспилотных летательных аппаратов и т.п. В недавнем подробном (181 источник в списке литературы) обзоре [1] отмечается, что теоретические научные исследования роевой робототехники нацелены в основном на математическое моделирование поведения роя. Дифференциальные уравнения в частных производных начали использоваться при моделировании движения формаций подвижных объектов с распределёнными характеристиками. В работе [2] приводится одномерное уравнение в частных производных Фоккера–Планка, описывающее диффузию плотности агентов, а для описания изменения плотности роя используется линейное одномерное уравнение реакции–диффузии. В статье [3] для моделирования формации с управлением по принципу отклонения от движения лидера применялось одномерное уравнение параболического типа.

В обзоре [4] отмечается, что в последние годы при моделировании роевой робототехники стали использоваться уравнения в частных производных, однако одна из основных проблем при этом заключается в том, что находить точные решения удаётся только в небольшом числе специальных случаев. Ранее нами [5] была предложена математическая модель процесса распространения двух взаимодействующих распределённых формаций роботов с некоторой базы в окружающее пространство, описываемая системой двух уравнений параболического типа. Были построены параметрические семейства точных решений, которые можно использовать для отыскания законов управления граничными условиями, обеспечивающих распространение формаций на область заданных размеров за заданное время. Если же плотности на границе будут поддерживаться постоянными, то с течением времени плотности формаций, удовлетворяющие параболической системе, могут стабилизироваться на стационарных решениях, которые удовлетворяют эллиптической системе. Поэтому точные решения эллиптической системы, соответствующей стационарному случаю предложенной в [5] модели взаимодействующих формаций с распределёнными параметрами, описываемых параболической системой, представляют несомненный интерес для роевой робототехники. Кроме того, эллиптические системы и отдельные уравнения такого степенного вида встречаются во многих других моделях и прикладных задачах. Построение многомерных точных решений таких эллиптических систем и отдельных уравнений со степенными нелинейностями и рассматривается в данной статье.

1. Изучаемые уравнения и постановка задачи. Будем рассматривать задачу построения точных многомерных решений нелинейной системы двух эллиптических уравнений вида

$$\Delta U = \alpha U^p + \gamma U^{a_1} V^{b_1}, \quad \Delta V = \beta V^q + \delta U^{a_2} V^{b_2}, \quad (1)$$

где $U = U(\mathbf{x})$, $V = V(\mathbf{x})$ – искомые функции, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$; p, q, a_1, a_2, b_1, b_2 – параметры нелинейности; $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, \delta \neq 0$ – произвольные коэффициенты. Система (1) является стационарным аналогом нелинейной эволюционной модели реакции–диффузии, в которой члены $\gamma U^{a_1} V^{b_1}$ и $\delta U^{a_2} V^{b_2}$ отвечают за взаимодействие (реакцию). В статье будут также представлены результаты по построению точных решений отдельных эллиптических уравнений со степенной нелинейностью следующих видов:

$$\Delta U = \alpha U^\lambda, \quad (2)$$

$$\Delta U = \alpha U^\lambda + \gamma U^{2\lambda-1}, \quad (3)$$

которые получаются из системы (1) при некоторых значениях коэффициентов. В уравнениях (2), (3) предполагается, что $\lambda \neq 1$, в противном случае они становятся линейными и в рамках данного исследования интереса не представляют.

Актуальность построения точных многомерных решений нелинейной системы (1) и уравнений (2), (3), помимо ценности и значимости самих точных решений, обусловлена также широким спектром применения указанных уравнений и систем в различных областях физики и механики. Например, (2) является стационарным аналогом параболического уравнения Фуджиты [6] и встречается в теории горения и теории массопереноса с объёмной реакцией λ -го порядка в плоском случае [7, с. 5, 57]. Уравнение (2) с $\lambda = \lambda^*$, где

$$\lambda^* = \frac{n+2}{n-2}, \quad (4)$$

встречается в огромном количестве публикаций, так как λ^* является критическим показателем Соболева [8] с точки зрения вложения $H_0^1(\Omega) \subset L^{\lambda^*}(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в которой задано уравнение (2) с $\alpha = -1$. Отметим, что в этой статье мы построим точное многомерное радиально-симметричное решение уравнения (2) с $\lambda = \lambda^*$ для любого $n > 2$ и анизотропное по пространственным переменным точное решение для показателя $\lambda = (m+2)/(m-2)$, $m \leq n$, $m \neq 2$. В случае $\lambda = 2$ и $n = 2$ уравнение (2) описывает пространственные околосвуковые течения идеального политропного газа [9, 10]. В статье [10] отмечается, что уравнение (2) с параметром $\lambda = 2$ представляет определённый интерес и с точки зрения теории нелинейных уравнений как уравнение с ведущим чётным нелинейным оператором. Уравнение (2) в литературе иногда называют уравнением Эмдена–Фаулера (Лейна–Эмдена), при отрицательных λ – сингулярным уравнением Эмдена–Фаулера, точные радиальные решения которого для некоторых значений λ представляют интерес в астрофизике [11, 12]. В случае $\lambda = -1$ получим уравнение, которое возникает при исследовании одной нелинейной системы двух параболических уравнений четвёртого порядка [13] (см. пример 4). Уравнение (2) с показателем $\lambda = 5$ исследовалось в работе [14]. При $\lambda = 2$ старшая степень в правой части уравнения (3) будет третьей, такого рода нелинейности встречаются в популяционной динамике, когда рассматриваются кубические функции роста [15, 16]. В статье [17] рассматривалось уравнение

$$-\Delta U = U^s + \varepsilon U^r, \quad s = \lambda^*, \quad 1 < r < s, \quad n \geq 3,$$

которое получается из уравнения (3) в случае $\lambda = r = n/(n-2)$, $\alpha = -1$, $\beta = -\varepsilon$. Отдельное внимание в [17] уделено случаю $s = 5$ и $r = 3$, возникающему при рассмотрении задачи в трёхмерном координатном пространстве ($n = 3$).

Так же как и отдельные уравнения (2), (3), нелинейная эллиптическая система (1) встречается во многих задачах физики и биологии. Теория реакции–диффузии для формирования

биологических паттернов была применена А. Тьюрингом в его основополагающей работе о химических основах морфогенеза [18]. Эта теория получила большое развитие и теперь для задач математического моделирования паттернов используются различные вариации безразмерной двухвидовой модели Тьюринга [19]

$$U_t = \Delta U + f(U, V), \quad V_t = \Delta V + g(U, V). \quad (5)$$

Система (1) является стационарным аналогом модели Тьюринга (5), в случае когда кинетические члены реакции f, g задаются степенными функциями. Во многих публикациях встречается нелинейная система вида

$$\Delta U = \gamma V^a, \quad \Delta V = \delta U^b, \quad (6)$$

которую называют расширением (обобщением) уравнения Эмдена–Фаулера [20, 21]. Если в (1) положить $\alpha = \beta = 0$, $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1/2$, то получим частный случай системы (6) вида $\Delta U = \gamma V^{1/2}$, $\Delta V = \delta U^{1/2}$. Важным источником систем эллиптических уравнений типа (1) являются нелинейные системы параболических уравнений со степенными нелинейностями. Так, при условии $\lambda \neq -1$, $\mu \neq -1$, полагая в формулах (1)

$$p = \frac{1}{1+\lambda}, \quad a_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad b_1 = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad q = \frac{1}{1+\mu}, \quad a_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad b_2 = \frac{1-\mu}{1+\mu},$$

получаем систему вида

$$\Delta U = U^{(1-\lambda)/(1+\lambda)} (\alpha U^{\lambda/(1+\lambda)} + \gamma V^{\mu/(1+\mu)}), \quad \Delta V = V^{(1-\mu)/(1+\mu)} (\delta U^{\lambda/(1+\lambda)} + \beta V^{\mu/(1+\mu)}), \quad (7)$$

возникающую при исследовании стационарных решений параболической системы двух нелинейных уравнений

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u) + au^{1-\lambda}v^\mu - cu, \quad v_t = \nabla \cdot (v^\mu \nabla v) + bu^\lambda v^{1-\mu} - dv. \quad (8)$$

Систему (8) можно использовать [5] в качестве математической модели распространения взаимодействующих распределённых формаций автономных роботов с некоторой базы в окружающее пространство (при $n = 3$) или на прилегающую территорию (при $n = 2$). При этом $u(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t)$ трактуются как плотности формаций. Параболические системы вида (8) описывают также процессы нелинейной диффузии в реагирующих двухкомпонентных сплошных средах [22–26], где $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ – функции, которые можно трактовать как концентрации взаимодействующих друг с другом компонентов некоторой смеси веществ; ∇ – градиент; a, b, c, d – некоторые параметры, знаки которых характеризуют либо расхождение, либо синтез компоненты смеси в ходе реакции. Стационарные решения $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$0 = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u) + au^{1-\lambda}v^\mu - cu, \quad 0 = \nabla \cdot (v^\mu \nabla v) + bu^\lambda v^{1-\mu} - dv. \quad (9)$$

Нелинейная эллиптическая система (7) получается из (9) преобразованием $u^{1+\lambda} = U$, $v^{1+\mu} = V$ при условии $\lambda \neq -1$, $\mu \neq -1$. Отметим, что в статье [27] исследовался частный случай системы (8) при $c = d = 0$, для которой строились точные многомерные решения с использованием конструкции

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Как будет показано ниже, конструкцию вида (10) можно использовать для построения точных многомерных решений уравнений (2), (3) и нелинейных эллиптических систем (7). Ранее [28–30] функция $W(\mathbf{x})$ уже использовалась нами при построении точных многомерных решений уравнения нелинейной теплопроводности, систем реакции–диффузии и системы нелинейных уравнений в частных производных первого порядка методом обобщённого разделения переменных. Отметим также, что при равенствах $\lambda = -1$ и $\mu = -1$ система уравнений (9) сводится

к системе с экспоненциальными нелинейностями, точные решения которой построены в работе [31].

Пусть $p \neq 1$, $q \neq 1$, тогда для построения точных решений системы (1) и отдельно каждому из уравнений (2), (3) будем использовать метод редукции и степенные анзацы

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^l, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^k \quad (11)$$

с квадратичными функциями

$$W_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A_i \mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}_i, \mathbf{x}) + C_i, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

При этом ненулевые числовые симметрические матрицы A_i размера $n \times n$, постоянные векторы $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n$ и константы $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, подлежат определению. Очевидно, что анзацы (11) будут удовлетворять системе (1) не для всех значений параметров p , q , a_i , b_i , l , k . Чтобы осуществить редукцию к алгебраическим уравнениям, для нахождения коэффициентов функций (12) должны выполняться следующие равенства:

$$pl + 2 - l = 1 \quad \text{или} \quad pl + 2 - l = 0, \quad (13)$$

$$qk + 2 - k = 1 \quad \text{или} \quad qk + 2 - k = 0, \quad (14)$$

$$a_1 = \frac{l-2}{l}, \quad b_1 = \frac{1}{k}, \quad a_2 = \frac{1}{l}, \quad b_2 = \frac{k-2}{k}. \quad (15)$$

С учётом формул (13)–(15) получим четыре вида различных систем, для которых можно осуществить необходимую редукцию с использованием анзацев (11). Так, для первых равенств соотношений (13), (14) с учётом формул (15) система (1) запишется как

$$\text{I.} \quad \Delta U = \alpha U^p + \gamma U^{2p-1} V^{1-q}, \quad \Delta V = \beta V^q + \delta U^{1-p} V^{2q-1}, \quad (16)$$

при этом степенные анзацы для этой системы имеют вид

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{1/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{1/(1-q)}. \quad (17)$$

Для трёх оставшихся возможных случаев система (1) получит следующие варианты правых частей и соответствующие им анзацы:

$$\text{II.} \quad \Delta U = \alpha U^p + \gamma U^{2p-1} V^{(1-q)/2}, \quad \Delta V = V^q (\beta + \delta U^{1-p}), \quad (18)$$

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{1/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{2/(1-q)};$$

$$\text{III.} \quad \Delta U = U^p (\alpha + \gamma V^{1-q}), \quad \Delta V = \beta V^q + \delta U^{(1-p)/2} V^{2q-1}, \quad (19)$$

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{2/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{1/(1-q)};$$

$$\text{IV.} \quad \Delta U = U^p (\alpha + \gamma V^{(1-q)/2}), \quad \Delta V = V^q (\beta + \delta U^{(1-p)/2}), \quad (20)$$

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{2/(1-p)}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{2/(1-q)}.$$

Напомним, что в формулах (16)–(20) мы полагаем $p \neq 1$, $q \neq 1$. Значения $p = 1$, $q = 1$ также представляют интерес, при этом функции F и G будут следующими: $F(U, V) = \gamma U \ln V$, $G(U, V) = \delta V \ln U$. В этом случае для построения точных решений системы

$$\Delta U = \alpha U + \gamma U \ln V, \quad \Delta V = \beta V + \delta V \ln U \quad (21)$$

мы должны применять экспоненциальные анзацы

$$U(\mathbf{x}) = \exp(W_1(\mathbf{x})), \quad V(\mathbf{x}) = \exp(W_2(\mathbf{x})),$$

где функции $W_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, задаются формулой (12). Положим $p = 1/(1 + \lambda)$, $\lambda \neq \{-1; 0\}$, $q = 1/(1 + \mu)$, $\mu \neq \{-1; 0\}$, тогда система (16) примет вид (7). Как уже было отмечено, система вида (7) возникает при исследовании стационарных решений параболической системы (8) со степенными нелинейностями. Из-за ограничения объёма статьи построение точных решений проведём только для нелинейной системы вида (7) и отдельно для уравнений (2), (3), которые получаются из (16) при определённых значениях параметров и коэффициентов.

Изложение результатов проведём последовательно: сначала будем искать точные многомерные решения нелинейных эллиптических уравнений (2), (3), затем перейдём к построению точных многомерных решений нелинейной эллиптической системы (7).

2. Многомерные точные решения эллиптических уравнений со степенной нелинейностью. Используя конструкцию вида (10), построим точные многомерные решения эллиптических уравнений (2), (3) со степенной нелинейностью для параметра $\lambda \neq 1$.

Утверждение 1. *Нелинейное эллиптическое уравнение (2) с параметром $\lambda \neq 1$ имеет частное точное многомерное решение*

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C \right]^{1/(1-\lambda)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

где ненулевая числовая симметрическая матрица A , постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ удовлетворяют алгебраической системе

$$\Theta A + \frac{2\lambda}{1-\lambda} A^2 = 0, \quad \Theta \mathbf{B} + \frac{2\lambda}{1-\lambda} A\mathbf{B} = 0, \quad \Theta C + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\mathbf{B}\|^2 = 0, \quad (23)$$

где $\Theta = \text{tr } A - \alpha(1 - \lambda)$, $\text{tr } A$ – след матрицы A , $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Подставив функцию

$$U(\mathbf{x}) = [W(\mathbf{x})]^{1/(1-\lambda)} \quad (24)$$

в уравнение (2), после элементарных преобразований придём к равенству

$$W\Delta W + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\nabla W\|^2 - \alpha(1-\lambda)W = 0. \quad (25)$$

Пусть функция $W(\mathbf{x})$ задаётся формулой (10), в которой матрица A является симметрической. В силу симметричности матрицы A из (10) прямым вычислением находим

$$\|\nabla W(\mathbf{x})\|^2 = (A^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B}, \mathbf{x}) + \|\mathbf{B}\|^2, \quad \Delta W(\mathbf{x}) = \text{tr } A. \quad (26)$$

С учётом соотношений (26), приравнявая выражения при одинаковых степенях $\mathbf{x}$, равенство (25) сводится к системе алгебраических уравнений (23). Утверждение доказано.

Рассмотрим разрешимость матричного уравнения (23) в классе вещественных матриц. Отметим, что оно всегда имеет тривиальное решение $A = 0$, поэтому далее будем рассматривать только нетривиальные решения этого уравнения в предположении $\text{tr } A \neq 0$.

Утверждение 2. *Пусть E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей. Тогда при выполнении условия*

$$(1 - \lambda)m + 2\lambda \neq 0 \quad (27)$$

матрица

$$A = \nu S E_m S^m, \quad \nu = \frac{\alpha(1 - \lambda)^2}{(1 - \lambda)m + 2\lambda}, \quad (28)$$

где S – произвольная ортогональная матрица, является решением матричного уравнения (23).

Доказательство. Пусть выполнено условие (27), тогда след матрицы A , определяемой по формуле (28), имеет вид

$$\operatorname{tr} A = m\nu \equiv \alpha m(1 - \lambda)^2 / ((1 - \lambda)m + 2\lambda).$$

С учётом этого соотношения матричное уравнение (23) запишется как $\nu A = A^2$. Легко проверить, что решением этого матричного уравнения является $A = \nu P$, где P – произвольная идемпотентная матрица, т.е. матрица, удовлетворяющая равенству $P^2 = P$. Известно [32, с. 196], что любую идемпотентную матрицу P можно записать как $P = ME_mM^{-1}$, где M – произвольная невырожденная матрица порядка n , E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей; E_m также является идемпотентной: $E_m^2 = E_m$. Поскольку нас интересуют только симметрические матрицы A , то идемпотентные матрицы P мы должны взять также симметрическими, т.е. $P = SE_mS^T$, где S – произвольная ортогональная матрица. Отсюда получим окончательный вид матрицы A , определяемой формулой (28). Утверждение доказано.

Векторные уравнения (23) представляют собой системы n линейных однородных алгебраических уравнений относительно компонент $b_1, \dots, b_n$ искомого вектора $\mathbf{B}$. Для любой фиксированной матрицы (28) с $\operatorname{rang} A = m < n$ всегда существует нетривиальное решение линейной однородной системы, причём компоненты $b_1, \dots, b_m$ вектора $\mathbf{B}$ могут быть выбраны произвольно из m -мерного линейного многообразия. В случае когда $\operatorname{rang} A = m \equiv n$, т.е. при $E_m \equiv E$, линейная однородная система уравнений имеет решение – произвольный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$. После того как последовательно найдены решения матричного и векторного уравнений, постоянные C определяются из скалярных уравнений (23) единственным образом.

Замечание. Если $m = 1$, то условие (27) равносильно условию $\lambda \neq -1$. Следовательно, если в уравнении (2) $\lambda \neq -1$, то в формуле точного решения (22) мы должны использовать матрицу A с условием $\operatorname{rang} A > 1$. Если $m = 2$, то условие (27) выполнено для всех λ . Если $m > 2$, то условие (27) равносильно условию $\lambda \neq m/(m-2)$. Следовательно, если в уравнении (2) $\lambda = m/(m-2)$, $m > 2$, то в формуле точного решения (22) мы должны использовать матрицу A , ранг которой не равен m . Если $\lambda = n/(n-2)$, $n > 2$, то в формуле точного решения (22) мы должны использовать матрицу A , ранг которой меньше n и не равен m .

Следствие 1. Нелинейное эллиптическое уравнение (2) с параметром $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq n/(n-2)$, $n > 2$, имеет частное точное радиально-симметричное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(1-\lambda)n+4\lambda} \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{(1-\lambda)n+2\lambda}{2\alpha(1-\lambda)^2} \|\mathbf{b}\|^2 \right]^{1/(1-\lambda)}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ – произвольный постоянный вектор.

Покажем, что при некоторых значениях параметра λ уравнение (2) помимо решения (22) обладает и другими точными решениями. Перед тем как сформулировать соответствующий результат, введём для удобства матрицу $E_{n-m} = E - E_m$, где E – единичная матрица.

Утверждение 3. Нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta U = \alpha U^{(m+2)/(m-2)}, \quad (29)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 2$, $m \leq n$, имеет частное точное многомерное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{\nu}{2} (SE_mS^m\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{B}\|^2 - \frac{2\alpha}{\nu m(m-2)} \right]^{1-m/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (30)$$

Здесь E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 3, 4, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей; S – произвольная ортогональная матрица; $\mathbf{B}$ – постоянный вектор, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений $SE_{n-m}S^T\mathbf{B} = \mathbf{0}$; $\nu \neq 0$ – произвольный параметр.

Доказательство. Подстановкой $U(\mathbf{x}) = [\Omega(\mathbf{x})]^{1-m/2}$, $m \neq 2$, уравнение (29) после элементарных преобразований сводится к равенству

$$\Omega \Delta \Omega - \frac{m}{2} \|\nabla \Omega\|^2 + \frac{2\alpha}{m-2} = 0. \quad (31)$$

Так как

$$\Omega(\mathbf{x}) = \frac{\nu}{2} (SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{B}\|^2 - \frac{2\alpha}{\nu m(m-2)},$$

то прямым вычислением находим

$$\|\nabla \Omega\|^2 = \nu^2 (SE_m S^T \mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\nu (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) + \|\mathbf{B}\|^2, \quad \Delta \Omega = m\nu.$$

С учётом этих соотношений равенство (31) упростится и примет вид

$$(\mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = 0.$$

Для этого соотношения справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) &= (E\mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = (SE S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) - (SE_m S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = \\ &= (S(E - E_m)S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = (SE_{n-m} S^T \mathbf{B}, \mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

Осталось показать, что система линейных уравнений $SE_{n-m} S^T \mathbf{B} = \mathbf{0}$ является разрешимой. Если $m = n$, то матрица коэффициентов этой системы является нулевой, следовательно, её решением является произвольный вектор $\mathbf{B}$. Если $m < n$, то $\text{rank } SE_{n-m} S^T = n - m < n$ и для указанной системы алгебраических уравнений всегда существует нетривиальное решение, причём компоненты $b_1, \dots, b_{n-m}$ вектора $\mathbf{B}$ могут быть выбраны произвольно из $(n - m)$ -мерного линейного многообразия. Утверждение доказано.

Следствие 2. Пусть $m = n$, тогда из утверждения 3 следует, что нелинейное эллиптическое уравнение

$$\Delta U = \alpha U^{(n+2)/(n-2)} \quad (32)$$

имеет частное точное радиально-симметричное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{q}{2} \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2q} \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{2\alpha}{qn(n-2)} \right]^{1-n/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n > 2, \quad (33)$$

где $\mathbf{b}$ – произвольный постоянный вектор, $q \neq 0$ – произвольная постоянная.

Как было отмечено в п. 1, уравнение (32) встречается в огромном количестве публикаций, так как показатель степени λ^* является критическим с точки зрения вложения Соболева. Ещё одна интересная особенность показателя (4) состоит в том, что при построении радиальных решений уравнения (2) соответствующее ему редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) допускает разделение переменных только при значении $\lambda = \lambda^*$. Будем отыскивать радиально-симметричные решения уравнения (2) в виде

$$U(\mathbf{x}) = U(\xi), \quad \xi = \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}. \quad (34)$$

После подстановки функции (34) в (2) и несложных преобразований придём к одной из форм уравнения Эмдена–Фаулера

$$\frac{d^2 U(\xi)}{d\xi^2} + \frac{n-1}{\xi} \frac{dU(\xi)}{d\xi} = \alpha U(\xi)^\lambda. \quad (35)$$

Отметим, что уравнение Эмдена–Фаулера в виде (35) приведено в справочнике [33, с. 497] и статье [12], где оно записано для случая $n = 3$ и $\alpha = \pm 1$. В [33, с. 497, 498] указаны два

частных точных решения уравнения (35) для $\lambda = 2$ и $\lambda = 5$. Кроме того, при $n = 3$ заменой $U(\xi) = \xi^{-1}V(\xi)$ ОДУ (35) запишется как

$$\frac{d^2V(\xi)}{d\xi^2} = \alpha\xi^{1-\lambda}V(\xi)^\lambda. \quad (36)$$

Уравнение Эмдена–Фаулера вида (36) встречается в монографии [34, с. 171] и справочнике [35, с. 236]. ОДУ (35) является обобщённо-однородным и подстановкой $U(\xi) = \xi^k U(\eta)$, где $\eta = \ln \xi$, $k = -2/(\lambda - 1)$, приводится к автономному виду

$$\frac{d^2U(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\lambda(n-2) - (n+2)}{\lambda-1} \frac{dU(\eta)}{d\eta} = \frac{2(\lambda(n-2) - n)}{(\lambda-1)^2} U(\eta) + \alpha U(\eta)^\lambda,$$

а заменой $dU(\eta)/d\eta = Y(U)$ сводится к ОДУ первого порядка

$$Y(U) \frac{dY(U)}{dU} + \frac{\lambda(n-2) - (n+2)}{\lambda-1} Y(U) = \frac{2(\lambda(n-2) - n)}{(\lambda-1)^2} U + \alpha U^\lambda.$$

Видно, что это ОДУ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными в случае $\lambda(n-2) - (n+2) = 0$, т.е. когда параметр λ задаётся соотношением (4). Положив $\lambda = \lambda^*$, придём к следующей квадратуре:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{aU^2 + bU^k + C_1}} = \eta + C_2, \quad a = \frac{1}{4}(n-2)^2, \quad b = \frac{\alpha(n-2)}{n}, \quad k = \frac{2n}{n-1}, \quad (37)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования. При $C_1 = 0$ интеграл в формуле (37) легко вычисляется:

$$\int \frac{dU}{|U|\sqrt{a + bU^{k-2}}} = \begin{cases} \frac{2}{(k-2)\sqrt{a}} \operatorname{Arth}\left(\frac{\sqrt{a + bU^{k-2}}}{\sqrt{a}}\right), & \text{если } U < 0, \\ -\frac{2}{(k-2)\sqrt{a}} \operatorname{Arth}\left(\frac{\sqrt{a + bU^{k-2}}}{\sqrt{a}}\right), & \text{если } U > 0. \end{cases}$$

В итоге мы получим частное точное решение уравнения (32), которое является частным случаем решения (33) при нулевом векторе $\mathbf{b}$.

Теперь перейдём к построению точных многомерных решений нелинейного эллиптического уравнения (3), для которого справедливо

Утверждение 4. *Нелинейное эллиптическое уравнение (3) с параметрами $\lambda \neq 1$, $\alpha\gamma \neq 0$ имеет частное точное многомерное решение (22), где ненулевая числовая симметрическая матрица A , постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют первым двум уравнениям алгебраической системы (23), а константа $C \in \mathbb{R}$ находится из скалярного уравнения*

$$\Theta C + \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\mathbf{B}\|^2 - \gamma(1-\lambda) = 0,$$

где $\Theta = \operatorname{tr} A - \alpha(1-\lambda)$, $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 1. Как видно, результаты утверждений 1, 4 совпадают в случае $\gamma = 0$.

Следствие 3. *Нелинейное эллиптическое уравнение (3) с параметрами $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq n/(n-2)$, $n > 2$, $\alpha\gamma \neq 0$ имеет частное точное радиально-симметричное решение*

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)n + 2\lambda} \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{(1-\lambda)n + 2\lambda}{2\alpha(1-\lambda)^2} \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{\gamma((1-\lambda)n + 2\lambda)}{2\alpha\lambda} \right]^{1/(1-\lambda)},$$

где $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ – произвольный постоянный вектор.

В заключение этого пункта покажем, что степенной анзац вида (24) является не единственным, с помощью которого можно строить точные многомерные решения уравнения (2). Пусть $U = f(W)$ и аргумент W задаётся формулой (10), причём числовая симметрическая матрица A , постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ удовлетворяют алгебраической системе

$$\sigma A - 2A^2 = 0, \quad \sigma \mathbf{B} - 2A\mathbf{B} = 0, \quad \sigma C - |\mathbf{B}|^2 = 0, \quad (38)$$

где $\sigma \neq 0$ – произвольная постоянная. Тогда после подстановки функции $U = f(W)$ в уравнение (2) придём к равенству

$$\sigma W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} + \tau \frac{df(W)}{dW} = \alpha [f(W)]^\lambda. \quad (39)$$

Здесь $\tau \equiv \text{tr } A = \text{const}$. Соотношение (39) можно рассматривать как ОДУ для определения функции $f(W)$, которое является обобщённо-однородным. ОДУ (39) подстановкой $f(W) = W^{1/(1-\lambda)} g(\xi)$, $\xi = \ln W$, $\lambda \neq 1$, приводится к автономному уравнению для функции $g(\xi)$:

$$\sigma g''(\xi) + \left(\frac{\sigma(1+\lambda)}{1-\lambda} + \tau \right) g'(\xi) = \alpha g^\lambda(\xi) - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\sigma\lambda}{1-\lambda} + \tau \right) g(\xi). \quad (40)$$

Легко видеть, что ненулевая константа g_0 , которая удовлетворяет равенству

$$\alpha g_0^\lambda - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\sigma\lambda}{1-\lambda} + \tau \right) g_0 = 0,$$

является частным решением ОДУ (40). Определяя из этого равенства значение константы g_0 , получаем по формуле $f(W) = g_0 W^{1/(1-\lambda)}$, $\lambda \neq 1$, частное точное решение ОДУ (39) вида

$$f(W) = \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{\sigma\lambda + (1-\lambda)\tau} W \right]^{1/(1-\lambda)}. \quad (41)$$

Отметим, что решению (41) отвечает степенной анзац вида (24). Перейдём к поиску нетривиальных решений ОДУ (40), которое заменой $g'(\xi) = Z(g)$ сводится к уравнению Абеля второго рода

$$\sigma Z(g)Z'(g) + \varepsilon Z(g) = \alpha g^\lambda - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\sigma\lambda}{1-\lambda} + \tau \right) g, \quad (42)$$

где $\varepsilon = \sigma(1+\lambda)/(1-\lambda) + \tau$. Решения уравнения (42) в параметрическом виде для $\varepsilon \neq 0$ и некоторых показателей λ приведены в справочнике [35, с. 70, 83]. Видно, что ОДУ (42) при $\varepsilon = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными. Равенство $\varepsilon = 0$ возможно в двух случаях: 1) $\lambda = -1$ и $\tau = 0$; 2) $\sigma = \tau(\lambda - 1)/(\lambda + 1)$, при этом $\lambda \neq -1$ и $\tau \neq 0$. В случае 1) всё сводится к следующей квадратуре:

$$\Phi_1(g) \equiv \int \left(\frac{2\alpha}{\sigma} \ln g + \frac{1}{4} g^2 + C_1 \right)^{-1/2} dg = \xi + C_2.$$

Очевидно, что ни при каких значениях параметров $\alpha \neq 0$, $\sigma \neq 0$ и постоянных C_1 , C_2 из уравнения $\Phi_1(g) = \xi + C_2$ функцию $g(\xi)$ выразить не удастся и, следовательно, этот случай интереса не представляет. Пусть имеет место случай 2), тогда уравнение (42) легко интегрируется и мы придём к квадратуре

$$\Phi_2(g) \equiv \int \frac{dg}{\sqrt{Ag^{\lambda+1} + Bg^2 + C_1}} = \xi + C_2, \quad A = \frac{2\alpha}{\tau(\lambda - 1)}, \quad B = \frac{1}{(\lambda - 1)^2}, \quad (43)$$

где C_1 , C_2 – константы интегрирования. Очевидно, что интеграл в равенстве (43) вычисляется только при некоторых значениях параметра $\lambda \neq 1$. При этом важно не только вычислить

интеграл (43), но и из уравнения $\Phi_2(g) = \xi + C_2$ выразить функцию $g(\xi)$ в явном виде, а для этого могут потребоваться дополнительные условия на постоянные τ , α , C_1 . Пусть $C_1 = 0$, тогда из соотношения (43) находим

$$g_{1,2}(\xi) = \left[\frac{\tau}{2\alpha(\lambda-1)} \left(\Phi\left(\frac{\xi}{2} + C_2\right) - 1 \right) \right]^{1/(\lambda-1)},$$

где $\Phi(\cdot) = \{\text{th}^2(\cdot), \text{cth}^2(\cdot)\}$. С учётом формулы $f(W) = g(\xi)W^{1/(1-\lambda)}$ имеем

$$f_{1,2}(W) = \left[\frac{\tau}{2\alpha(\lambda-1)W} \left(\Phi\left(\frac{1}{2} \ln W + C_2\right) - 1 \right) \right]^{1/(\lambda-1)}.$$

Так как $U = f(W)$, то в этом частном случае уравнение (2) с параметрами $\lambda \neq \pm 1$ обладает частными точными многомерными решениями

$$U_1(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\chi}{(C_3 W(\mathbf{x}) + 1)^2} \right]^{1/(\lambda-1)}, \quad U_2(\mathbf{x}) = \left[\frac{\chi}{(C_3 W(\mathbf{x}) - 1)^2} \right]^{1/(\lambda-1)}, \quad (44)$$

где $\chi = 2(\lambda+1)\sigma C_3/(\alpha(\lambda-1)^2)$, $C_3 = \exp(C_2)$, C_2 – произвольная постоянная, функция $W(\mathbf{x})$ задаётся формулой (10), а ненулевая числовая симметрическая матрица A , постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ определяются из алгебраической системы (38) с постоянной $\sigma \neq 0$. Заметим, что матричное уравнение системы (38) подобно матричному уравнению (23). Используя утверждение 2, получаем, что решение матричного уравнения системы (38) задаётся формулой

$$A^* = \frac{\sigma}{2} S E_m S^T,$$

где $\tau = m\sigma/2$ – след матрицы A^* . С другой стороны, в рассматриваемом случае должно выполняться равенство $\tau = (\lambda+1)\sigma/(\lambda-1)$. Сравнив два равенства для параметра τ , получим, что показатель степени λ в этом случае задаётся соотношением $\lambda = (m+2)/(m-2)$, $m \neq 2$. Нетрудно показать, что переобозначением постоянных и несложными преобразованиями решения (44) можно свести к решению (30) из утверждения 3. Точные решения уравнения (2) вида (44) имеют место для любого $\lambda \neq \pm 1$. При этом для некоторых конкретных значений λ из формулы (43) можно найти точные решения с другой функциональной зависимостью. Пусть, например, $\lambda = 2$, тогда трёхчлен в формуле (43) будет кубическим и дискриминант кубического уравнения $2\alpha g^3/\tau + g^2 + C_1 = 0$ имеет вид $\mathcal{D} = -4C_1(27\alpha^2 C_1 + \tau^2)/\tau$. В случае $\mathcal{D} = 0$ интеграл в формуле (43) легко вычисляется в элементарных функциях. Случай $C_1 = 0$ был рассмотрен выше. Полагая $C_1 = -\tau^2/(27\alpha^2)$, находим

$$g_3(\xi) = \frac{\tau}{6\alpha} \left[3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\xi + C_2\right) + 1 \right].$$

При этом непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решением уравнения (40) будет также функция $g_3(\xi)$, в которой тангенс нужно заменить на котангенс. Здесь и далее решение с котангенсом приводить не будем. Для функции $g_3(\xi)$ получим следующее частное точное решение ОДУ (39):

$$f_3(W) = \frac{\tau}{6\alpha W} \left[3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2} \ln W + C_2\right) + 1 \right].$$

Так как $\lambda = 2$, то из равенства $\sigma = \tau(\lambda-1)/(\lambda+1)$ получим $\tau = 3\sigma$. Помимо приведённого решения в элементарных функциях, можно также записать решение уравнения (39) с использованием эллиптического синуса Якоби. Легко проверить, что функция

$$f_4(W) = \frac{6\sigma}{\alpha W} \left[b^2 k^2 \operatorname{sn}^2(b \ln W + C_2, k) - \frac{4b^2(k^2 + 1) + 1}{12} \right]$$

является точным решением уравнения (39), где $\operatorname{sn}(\cdot, k)$ – эллиптический синус Якоби, а вещественный модуль $k \neq 0$ и произвольная вещественная постоянная $b \neq 0$ удовлетворяют равенству

$$16b^4(k^4 - k^2 + 1) - 1 = 0. \quad (45)$$

Теперь мы должны предъявить нетривиальное решение алгебраической системы (38) с дополнительным условием $\sigma = \tau/3$, с учётом которого из равенства $\tau = m\sigma/2$ имеем $m = 6$. Таким образом, в этом случае мы можем записать явные точные решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = \alpha U^2, \quad U = U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 6, \quad (46)$$

причём при $n = 6$ получим радиально-симметричные точные решения, а в случае $n > 6$ – анизотропные решения уравнения (46). Пусть $n = 7$ и матрица A^* имеет вид

$$A^* = \sigma \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 221/450 & -14/225 & 1/45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14/225 & 29/450 & 7/45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/45 & 7/45 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (10) запишем функцию $W(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$:

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \frac{\sigma}{900} \left[225(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \right. \\ \left. + 221x_5^2 + 29x_6^2 + 200x_7^2 - 56x_5x_6 + 20x_5x_7 + 140x_6x_7 \right]. \quad (47)$$

Здесь, для краткости, компоненты вектора $\mathbf{B}$ и константу C положили равными нулю. Окончательно получим, что нелинейное эллиптическое уравнение (46) в случае $n = 7$ имеет следующие точные анизотропные решения:

$$U_3(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2\alpha} \frac{3 \operatorname{tg}^2(0.5 \ln W(\mathbf{x}) + C_2) + 1}{W(\mathbf{x})},$$

$$U_4(\mathbf{x}) = \frac{6\sigma}{\alpha W(\mathbf{x})} \left[b^2 k^2 \operatorname{sn}^2(b \ln W(\mathbf{x}) + C_2, k) - \frac{4b^2(k^2 + 1) + 1}{12} \right],$$

где $\sigma \neq 0$, $C_2, C_3 \neq 0$ – произвольные постоянные, а ненулевые константы b и k удовлетворяют равенству (45).

Помимо этих решений можно также записать точное решение уравнения (46) с использованием функции (41):

$$U_5(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha}{\sigma W(\mathbf{x})}.$$

В формулах точных решений $U_1(\mathbf{x}) - U_4(\mathbf{x})$ функция $W(\mathbf{x})$ определяется соотношением (47). Пусть $m = n = 6$, тогда имеем

$$W_0(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2).$$

С функцией $W_0(\mathbf{x})$ решения $U_3(\mathbf{x}) - U_5(\mathbf{x})$ уравнения (46) являются радиально-симметричными в 6-мерном координатном пространстве.

Таким образом, мы показали, что для построения точных решений уравнения (2) можно использовать не только степенной анзац $U = [W]^{1/(1-\lambda)}$, но и анзац вида $U = f(W)$, где функция $f(W)$ удовлетворяет ОДУ (39). Отметим также, что анзац вида $U = f(W)$ можно применять и для уравнения (3). В этом случае если коэффициенты функции (10) удовлетворяют алгебраической системе (38), то для определения функции $f(W)$ мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\sigma W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} + \tau \frac{df(W)}{dW} = \alpha [f(W)]^\lambda + \gamma [f(W)]^{2\lambda-1}. \quad (48)$$

Заметим, что ОДУ (48) уже не является обобщённо-однородным ни при каких $\lambda \neq 1$. Более того, для нелинейной системы (16) помимо степенных анзацев (17) можно также использовать анзацы $U = f(W)$, $V = g(W)$, где аргумент W задаётся формулой (10), причём коэффициенты функции W удовлетворяют алгебраической системе (38), а неизвестные f , g удовлетворяют системе ОДУ

$$\begin{aligned} \sigma W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} + \tau \frac{df(W)}{dW} &= \alpha [f(W)]^p + \gamma [f(W)]^{2p-1} [g(W)]^{1-q}, \\ \sigma W \frac{d^2 g(W)}{dW^2} + \tau \frac{dg(W)}{dW} &= \beta [g(W)]^q + \delta [f(W)]^{1-p} [g(W)]^{2q-1}, \end{aligned} \quad (49)$$

но это предмет отдельного исследования. В конце статьи мы только приведём пример точного решения системы (16), которое будет построено с использованием анзацев $U = f(W)$, $V = g(W)$ и соответственно системы ОДУ (49).

3. Многомерные точные решения нелинейных эллиптических систем. Далее, используя конструкцию вида (10), построим точные многомерные решения нелинейной эллиптической системы (7).

Утверждение 5. *Нелинейная эллиптическая система вида (7) с параметрами $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq -1$, $\mu \neq 0$ обладает точным многомерным решением*

$$U(\mathbf{x}) = [W_1(\mathbf{x})]^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(\mathbf{x}) = [W_2(\mathbf{x})]^{(1+\mu)/\mu}, \quad (50)$$

где функции $W_i(\mathbf{x})$ задаются формулой (12), причём числовые симметрические матрицы A_i , постоянные векторы $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n$ и константы $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1 \Theta_1 + \frac{2}{\lambda} A_1^2 - \frac{\gamma \lambda}{1+\lambda} A_2 &= 0, & A_2 \Theta_2 + \frac{2}{\mu} A_2^2 - \frac{\delta \mu}{1+\mu} A_1 &= 0, \\ \mathbf{B}_1 \Theta_1 + \frac{2}{\lambda} A_1 \mathbf{B}_1 - \frac{\gamma \lambda}{1+\lambda} \mathbf{B}_2 &= 0, & \mathbf{B}_2 \Theta_2 + \frac{2}{\mu} A_2 \mathbf{B}_2 - \frac{\delta \mu}{1+\mu} \mathbf{B}_1 &= 0, \\ C_1 \Theta_1 + \frac{1}{\lambda} |\mathbf{B}_1|^2 - \frac{\gamma \lambda}{1+\lambda} C_2 &= 0, & C_2 \Theta_2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_2|^2 - \frac{\delta \mu}{1+\mu} C_1 &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где введены обозначения

$$\Theta_1 = \operatorname{tr} A_1 - \frac{\alpha \lambda}{1+\lambda}, \quad \Theta_2 = \operatorname{tr} A_2 - \frac{\beta \mu}{1+\mu}. \quad (52)$$

Доказательство утверждения 5 повторяет схему доказательства утверждения 1, поэтому приводить его не будем.

Утверждение 6. *Система матричных уравнений (51) обладает частным решением*

$$A_1 = \nu S E_m S^T, \quad A_2 = \frac{\nu}{\gamma} \left(\frac{(1+\lambda)(m\lambda+2)}{\lambda^2} \nu - \alpha \right) S E_m S^T, \quad (53)$$

где S – произвольная ортогональная матрица, E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, а параметр $\nu \neq 0$ является вещественным корнем кубического уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\lambda)^2}{\gamma^2 \lambda^2} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)^2 \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^3 - \frac{2\alpha(1+\lambda)}{\gamma^2 \lambda} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right) \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^2 + \\ & + \left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left(m + \frac{2}{\mu}\right) - \frac{\beta(1+\lambda)\mu}{\gamma\lambda(1+\mu)} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)\right) \nu + \frac{\delta\mu}{1+\mu} \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} - 1\right) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

и удовлетворяет условию

$$\frac{(1+\lambda)(m\lambda+2)}{\lambda^2} \nu - \alpha \neq 0. \quad (55)$$

Доказательство. Будем отыскивать числовую симметричную матрицу A_1 в виде $A_1 = \nu S E_m S^T$, где S – произвольная ортогональная матрица, E_m – диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, $\nu \neq 0$ – вещественный параметр, подлежащий определению. После подстановки матрицы A_1 в первое матричное уравнение системы (51) и элементарных преобразований получим выражение для матрицы A_2 следующего вида:

$$A_2 = \frac{(1+\lambda)\nu}{\gamma\lambda} \left(\frac{2\nu}{\lambda} + \Theta_1\right) S E_m S^T. \quad (56)$$

При этом имеем

$$\text{tr } A_1 = m\nu, \quad \text{tr } A_2 = \frac{m(1+\lambda)\nu}{\gamma\lambda} \left(\frac{2\nu}{\lambda} + \Theta_1\right).$$

С учётом соотношений (52) находим

$$\Theta_1 = m\nu - \frac{\alpha\lambda}{1+\lambda}, \quad \Theta_2 = \frac{(1+\lambda)m}{\gamma\lambda} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right) \nu^2 - \frac{m\alpha}{\gamma} \nu - \frac{\beta\mu}{1+\mu}.$$

Подставляя выражение для Θ_1 в формулу (56), получаем окончательный вид матрицы A_2 , определяемый формулой (53). Теперь подставим матрицы (53) во второе матричное уравнение системы (51) и после несложных преобразований придём к равенству

$$\begin{aligned} & \nu \left[\frac{(1+\lambda)^2}{\gamma^2 \lambda^2} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)^2 \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^3 - \frac{2\alpha(1+\lambda)}{\gamma^2 \lambda} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right) \left(m + \frac{2}{\mu}\right) \nu^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left(m + \frac{2}{\mu}\right) - \frac{\beta(1+\lambda)\mu}{\gamma\lambda(1+\mu)} \left(m + \frac{2}{\lambda}\right)\right) \nu + \frac{\delta\mu}{1+\mu} \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} - 1\right) \right] S E_m S^T = 0. \end{aligned}$$

По предположению $\nu \neq 0$, поэтому чтобы это равенство обращалось в тождество мы должны потребовать равенство нулю выражения, стоящего в квадратных скобках, которое можно рассматривать как кубическое уравнение (54) относительно искомого параметра ν . Поскольку кубическое уравнение (54) имеет по крайней мере один вещественный корень, то матрицы A_1 , A_2 , определяемые формулами (53), с вещественным параметром ν будут также вещественными. Кроме того, найденный из уравнения (54) вещественный параметр ν должен удовлетворять условию (55), выполнение которого гарантирует нетривиальность матрицы A_2 . Утверждение доказано.

Следствие 4. Нелинейная эллиптическая система вида (7) с параметрами $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq -1$, $\mu \neq 0$ имеет частное точное радиально-симметричное решение

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{\nu}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right]^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(\mathbf{x}) = \left[\frac{\nu}{2\gamma} \left(\frac{(1+\lambda)(n\lambda+2)}{\lambda^2} \nu - \alpha \right) \|\mathbf{x}\|^2 \right]^{(1+\mu)/\mu}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где постоянная ν удовлетворяет условию $\nu(1 + \lambda)(n\lambda + 2) - \alpha\lambda^2 \neq 0$ и является вещественным корнем кубического уравнения (54), в котором параметр m нужно положить равным n .

Отметим, что матрицы A_1 , A_2 , определяемые формулами (53), являются не единственными решениями системы матричных уравнений (51). Ниже в примере 7 мы приведём матрицы A_1 , A_2 , которые удовлетворяют системе (51) и получены при определённых соотношениях на параметры системы, но не задаются формулами (53).

4. Примеры. Приведём примеры, иллюстрирующие полученные выше результаты.

Пример 1. Пусть $n = 3$ и ортогональная матрица S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Матрицы E_m возьмём трёх возможных рангов $\text{rank } E_m = m = 1$, $\text{rank } E_m = m = 2$ и $\text{rank } E_m = m = 3$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (28) матрицы

$$A_1 = \frac{\alpha(1 - \lambda)^2}{1 + \lambda} \begin{pmatrix} \frac{27}{64} & \frac{3\sqrt{3}}{64} & \frac{9\sqrt{3}}{32} \\ \frac{3\sqrt{3}}{64} & \frac{1}{64} & \frac{3}{32} \\ \frac{9\sqrt{3}}{32} & \frac{3}{32} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq -1, \quad \lambda \neq 1,$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\alpha(1 - \lambda)^2 \begin{pmatrix} \frac{39}{64} & \frac{15\sqrt{3}}{64} & \frac{5\sqrt{3}}{32} \\ \frac{15\sqrt{3}}{64} & \frac{37}{64} & -\frac{9}{32} \\ \frac{5\sqrt{3}}{32} & -\frac{9}{32} & \frac{13}{16} \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1,$$

$$A_3 = \frac{\alpha(1 - \lambda)^2}{3 - \lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1, \quad \lambda \neq 3,$$

являются решением матричного уравнения (23). Здесь и далее в этом примере нижние индексы у матриц A , векторов $\mathbf{B}$, констант C и решений $U(x, y, z)$ означают ранг соответствующей матрицы E_m . Для матриц A_i , $i = 1, 2, 3$, векторное и скалярное уравнения (23) имеют, соответственно, следующие решения:

$$\mathbf{B}_1 = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{1}{6}b, b\right), \quad C_1 = \frac{8(1 + \lambda)b^2}{9\alpha(1 - \lambda)^2}, \quad b \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{B}_2 = \text{col}\left(b_1, \frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2, b_2\right), \quad C_2 = \frac{52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2}{27\alpha(1 - \lambda)^2}, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{B}_3 = \text{col}(b_1, b_2, b_3), \quad C_3 = \frac{(3-\lambda)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{\alpha(1-\lambda)^2}, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

Для найденных матриц A , векторов $\mathbf{B}$ и постоянных C получим, что нелинейное эллиптическое уравнение (2) в трёхмерном координатном пространстве имеет параметрические семейства точных многомерных решений

$$\begin{aligned} U_1(x, y, z) &= \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{1152(1+\lambda)} \left(9\sqrt{3}x + 3y + 18z + \frac{32b(1+\lambda)}{\alpha(1-\lambda)^2} \right)^2 \right]^{1/(1-\lambda)}, \\ U_2(x, y, z) &= \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{256} (39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) + \right. \\ &\quad \left. + b_1x + \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2 \right)y + b_2z + \frac{52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2}{27\alpha(1-\lambda)^2} \right]^{1/(1-\lambda)}, \\ U_3(x, y, z) &= \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(3-\lambda)} (x^2 + y^2 + z^2) + b_1x + b_2y + b_3z + \frac{(3-\lambda)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{2\alpha(1-\lambda)^2} \right]^{1/(1-\lambda)}. \end{aligned}$$

Решение $U_1(x, y, z)$ является формально одномерным, так как зависит от линейной комбинации пространственных координат и имеет место для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. анизотропное решение представлено функцией $U_2(x, y, z)$ и имеет место для всех λ , кроме $\lambda = 1$. Решение $U_3(x, y, z)$ является радиально-симметричным и имеет место для любых параметров $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq 3$. Переобозначением констант b_i по формулам $b_i = \frac{\alpha(1-\lambda)^2}{(3-\lambda)}c_i$, $i = 1, 2, 3$, решение $U_3(x, y, z)$ можно записать как

$$U_3(x, y, z) = \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(3-\lambda)} \right]^{1/(1-\lambda)} [(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 + (z+c_3)^2]^{1/(1-\lambda)},$$

где c_i – произвольные постоянные.

Пример 2. В этом примере построим частные точные анизотропные решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} = \alpha U^5, \quad U = U(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Положив $\lambda = 5$, $n = 4$, $m = 3$, из утверждения 1 получим

$$U_1(\mathbf{x}) = \left[-\frac{\alpha}{16} (39x_1^2 + 37x_2^2 + 52x_3^2 + 64x_4^2 + 30\sqrt{3}x_1x_2 + 20\sqrt{3}x_1x_3 - 36x_2x_3) \right]^{-1/4}.$$

Пусть $n = 4$, $m = 3$, тогда из утверждения 2 находим

$$U_2(\mathbf{x}) = \left[\frac{\nu}{18} (5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3) - \frac{2\alpha}{3\nu} \right]^{-1/2},$$

где $\nu \neq 0$ – произвольная постоянная. Для краткости записи в решениях $U_1(\mathbf{x})$, $U_2(\mathbf{x})$ компоненты вектора $\mathbf{B}$ и константу C положили равными нулю.

Пример 3. В этом примере построим точные многомерные решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\Delta U = \alpha U^3, \quad U = U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 4. \quad (57)$$

При $\lambda = 3$, $n = 4$, $m = 2$ из утверждения 1 находим анизотропное решение

$$U_1(\mathbf{x}) = \left[\frac{\alpha}{225} (121x_1^2 + 4x_2^2 + 100x_3^2 + 225x_4^2 + 44x_1x_2 + 220x_1x_3 + 40x_2x_3) \right]^{-1/2}.$$

Пусть $\lambda = 3$, $n = 4$, $m = 4$, тогда из утверждения 3 получим радиально-симметричное решение

$$U_2(\mathbf{x}) = \frac{4\nu}{2\nu^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \alpha},$$

где $\nu \neq 0$ – произвольная постоянная. Аналогичное решение можно получить из следствия 2. Полагая $C_1 = \tau/(64\alpha)$, из формулы (43) при $\lambda = 3$ получаем

$$g(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{\tau}{\alpha}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \xi + C_2 \right).$$

Пусть $n = 5$, $m = 4$. Тогда имеем $\tau = 2\sigma$ и с учётом равенств $U = f(W)$, $f(W) = g(\xi)W^{1/(1-\lambda)}$, $\xi = \ln W$ получим анизотропное решение уравнения (57) следующего вида:

$$U_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{W(\mathbf{x})}} \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \ln W(\mathbf{x}) + C_2 \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5,$$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{16} (3x_1^2 + x_2^2 + 4(x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + 2\sqrt{3}x_1x_2),$$

где $\sigma \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные. Для краткости записи в решениях $U_1(\mathbf{x})$, $U_2(\mathbf{x})$ и функции $W(\mathbf{x})$ компоненты вектора $\mathbf{B}$ и константу C положили равными нулю.

Пример 4. Пусть $\lambda = -1$, тогда нелинейное эллиптическое уравнение (2) примет вид

$$\Delta U = \alpha U^{-1}. \quad (58)$$

В работе [13] уравнение (58) с $\alpha = 1$ возникает при построении точных решений следующей системы параболических уравнений четвёртого порядка:

$$u_t = \Delta(u\Delta u) + k_1 v, \quad v_t = \Delta(v\Delta v) + k_2 u.$$

Воспользовавшись результатами примера 1, легко записать анизотропное точное решение уравнения (58) в трёхмерном координатном пространстве:

$$U(x, y, z) = \left[\frac{\alpha}{64} (39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) + \right. \\ \left. + b_1x + \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2 \right)y + b_2z + \frac{1}{\alpha 108} (52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2) \right]^{1/2},$$

где b_1 , b_2 – произвольные постоянные. Отметим, что в [13] получено только радиально-симметричное решение уравнения (58), которое для любого $n > 1$ приведено в следствии 1.

Пример 5. В этом примере, используя результаты утверждения 4 и примера 1, построим частные точные многомерные решения нелинейного эллиптического уравнения (3). Так, в трёхмерном случае уравнение (3) имеет анизотропное частное точное решение

$$U(x, y, z) = \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{256} (39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) + \right. \\ \left. + b_1x + \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}b_1 - \frac{2}{3}b_2 \right)y + b_2z + \frac{52b_1^2 - 20\sqrt{3}b_1b_2 + 39b_2^2}{27\alpha(1-\lambda)^2} - \frac{\beta}{\alpha\lambda} \right]^{1/(1-\lambda)}$$

и радиально-симметричное частное точное решение вида

$$U(x, y, z) = \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(3-\lambda)} \right]^{1/(1-\lambda)} \left[(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 + (z+c_3)^2 - \frac{\beta(3-\lambda)^2}{\alpha^2\lambda(1-\lambda)^2} \right]^{1/(1-\lambda)},$$

где $\lambda \neq 1$, $\alpha \neq 0$, β , c_i , $i = 1, 2, 3$, – произвольные параметры. Поскольку радиально-симметричное решение получается для матрицы A полного ранга, то легко записать решение нелинейного эллиптического уравнения (3) в случае произвольной размерности:

$$U(\mathbf{x}) = \left[\frac{\alpha(1-\lambda)^2}{2(n+(2-n)\lambda)} |\mathbf{x}|^2 - \frac{\beta(n+(2-n)\lambda)}{2\alpha\lambda} \right]^{1/(1-\lambda)}.$$

Пример 6. Пользуясь результатами утверждения 6 и примера 1, построим точное анизотропное решение нелинейной эллиптической системы (7) в трёхмерном координатном пространстве. Как уже было отмечено выше, для построения анизотропных точных решений мы должны использовать матрицы E_m ранга $m = 2$. Кроме того, мы должны предъявить вещественное решение кубического уравнения (54). Для упрощения задачи параметры α , β , γ , δ системы (7) возьмём единичными, тогда уравнение (54) имеет три вещественных корня:

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \frac{\lambda(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)}{2(1+\lambda)^2(1+\mu)}, \quad \nu_3 = \frac{\lambda(\lambda - \mu)}{2(1+\lambda)^2(1+\mu)}.$$

Корень ν_1 интереса не представляет, так как приводит к тривиальному решению матричной системы (51). В случае $\lambda = \mu$ получим $\nu_3 = 0$. Поэтому при равенстве параметров λ и μ из кубического уравнения (54) получим единственный нетривиальный корень $\nu = \lambda^2/(1+\lambda)^2$. В этом примере будем использовать корень ν_2 , ортогональную матрицу S и матрицу E_2 , приведённые в примере 1. Также должно выполняться условие на параметры $\lambda + 2\lambda\mu + \mu \neq 0$, которое гарантирует нетривиальность матрицы A_2 . Кроме того, с учётом неравенства (55) параметры системы (7) должны удовлетворять дополнительному ограничению

$$2(\lambda + 2\lambda\mu + \mu) - \alpha\lambda(1 + \mu) \neq 0.$$

Таким образом, получим, что нелинейная эллиптическая система (7) с параметрами $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ имеет анизотропное параметрическое семейство точных решений вида

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = & \left[\frac{\lambda(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz)}{256(1+\lambda)^2(1+\mu)} + \right. \\ & \left. + bx + \frac{5\sqrt{3}}{9}by + \frac{52}{27} \frac{(1+\lambda)^2(1+\mu)}{\lambda(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)} b^2 \right]^{(1+\lambda)/\lambda}, \\ V(x, y, z) = & \left[\frac{\mu(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz)}{256(1+\lambda)^2(1+\mu)} + \right. \\ & \left. + \frac{(1+\lambda)\mu}{\lambda(1+\mu)} bx + \frac{5\sqrt{3}}{9} \frac{(1+\lambda)\mu}{\lambda(1+\mu)} by + \frac{52}{27} \frac{(1+\lambda)^3\mu}{\lambda^2(\lambda + 2\lambda\mu + \mu)} b^2 \right]^{(1+\mu)/\mu}, \end{aligned}$$

где b – произвольный параметр.

Пример 7. В случае когда параметры матричной системы (51) удовлетворяют некоторым соотношениям можно получить решение этой системы, отличное от матриц, приведённых в утверждении 6. Пусть выполнены равенства

$$\alpha = \frac{28(1+\lambda)^2}{5\lambda^2}, \quad \beta = \frac{28(1+\mu)^2}{5\mu^2}, \quad \gamma = \frac{8(1+\lambda)}{5\lambda^2}, \quad \delta = \frac{48(1+\mu)}{5\mu^2}, \quad (59)$$

тогда в трёхмерном случае матричная система (51) имеет следующее решение:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц нелинейная эллиптическая система уравнений (7) с параметрами, заданными формулами (59), имеет частное точное анизотропное решение

$$U(x, y, z) = \left(x^2 + 2y^2 - \frac{1}{5}z^2\right)^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(x, y, z) = \left(-x^2 + 3y^2 + \frac{4}{5}z^2\right)^{(1+\mu)/\mu}.$$

В частном случае при $\lambda = \mu = 1$ получим, что нелинейная эллиптическая система вида

$$\Delta U = \frac{112}{5}U^{1/2} + \frac{16}{5}V^{1/2}, \quad \Delta V = \frac{112}{5}V^{1/2} + \frac{96}{5}U^{1/2}$$

обладает точным решением

$$U(x, y, z) = \left(x^2 + 2y^2 - \frac{1}{5}z^2\right)^2, \quad V(x, y, z) = \left(-x^2 + 3y^2 + \frac{4}{5}z^2\right)^2.$$

Пусть теперь выполнены соотношения

$$\alpha = \frac{(5\lambda - 2)(1 + \lambda)}{\lambda^2}, \quad \beta = \frac{7(\mu + 2)(1 + \mu)}{\mu^2}, \quad \gamma = \frac{4(1 + \lambda)}{\lambda^2}, \quad \delta = -\frac{12(1 + \mu)}{\mu^2}, \quad (60)$$

тогда матричная система (51) в трёхмерном случае имеет решение

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Нелинейная эллиптическая система уравнений (7) с параметрами, заданными по формулам (60), имеет частное точное анизотропное решение

$$U(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right)^{(1+\lambda)/\lambda}, \quad V(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2\right)^{(1+\mu)/\mu}.$$

Если $\lambda = 2/5$, $\mu = -2$, то в силу (60) имеем $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 35$, $\delta = 3$, в этом случае система уравнений (7) упростится и примет вид

$$\Delta U = 35U^{3/7}V^2, \quad \Delta V = 3U^{2/7}V^{-3}.$$

Эта нелинейная эллиптическая система уравнений имеет частное точное анизотропное решение

$$U(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right)^{7/2}, \quad V(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2\right)^{1/2}.$$

Пример 8. Рассматривается нелинейная эллиптическая система уравнений

$$\Delta U = \alpha U^{2/3} + \gamma U^{1/3}V^{1/5}, \quad \Delta V = \beta U^{4/5} + \delta U^{1/3}V^{3/5}, \quad (62)$$

которая получается из (7) при $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/4$. Для указанных значений параметров λ , μ из равенств (60) имеем

$$\alpha = 3, \quad \beta = 315, \quad \gamma = 24, \quad \delta = -240. \quad (63)$$

В этом случае с использованием матриц (61) можно построить точное анизотропное решение системы (62), которое имеет вид

$$U_1(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right)^3, \quad V_1(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2\right)^5.$$

С другой стороны, по утверждению 6 матричная система (51) имеет частное решение (53), где параметр ν является вещественным корнем уравнения (54). Пусть $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/4$, $m = 2$ и α , β , γ , δ задаются формулами (63), тогда кубическое уравнение (54) имеет три вещественных корня:

$$\nu_1 = \frac{3}{2}, \quad \nu_2 = -\frac{7}{12} + \frac{1}{20}\sqrt{2785}, \quad \nu_3 = -\frac{7}{12} - \frac{1}{20}\sqrt{2785}.$$

Для построения точных решений системы (62) возьмём матрицы S и E_2 , приведённые в примере 1, также, для краткости, векторы $\mathbf{B}_i$, постоянные C_i , $i = 1, 2$, положим равными нулю. Заметим, что для корня ν_1 матрицы A_1 и A_2 совпадают. В этом случае получим точное решение системы (62) вида

$$U_2(x, y, z) = \left(\frac{3}{256}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^3,$$

$$V_2(x, y, z) = \left(\frac{3}{256}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^5.$$

Для корней ν_2 , ν_3 имеем, соответственно, следующие точные решения системы (62):

$$U_3(x, y, z) = \left(\frac{-35 + 3\sqrt{2785}}{7680}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^3,$$

$$V_3(x, y, z) = \left(\frac{111 - \sqrt{2785}}{2560}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^5,$$

$$U_4(x, y, z) = \left(-\frac{35 + 3\sqrt{2785}}{7680}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^3,$$

$$V_4(x, y, z) = \left(\frac{111 + \sqrt{2785}}{2560}(39x^2 + 37y^2 + 52z^2 + 30\sqrt{3}xy + 20\sqrt{3}xz - 36yz) \right)^5.$$

Воспользовавшись результатами примера 6, получим при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ следующее анизотропное параметрическое семейство точных решений системы (62):

$$U(x, y, z) = \left(\frac{13}{480}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{48}xy + \frac{\sqrt{3}}{72}xz + \frac{37}{1440}y^2 - \frac{1}{40}yz + \frac{13}{360}z^2 \right)^3,$$

$$V(x, y, z) = \left(\frac{13}{800}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{80}xy + \frac{\sqrt{3}}{120}xz + \frac{37}{2400}y^2 - \frac{3}{200}yz + \frac{13}{600}z^2 \right)^5.$$

Пример 9. В этом примере мы построим точное решение системы (16) с использованием анзацев $U = f(W)$, $V = g(W)$. Пусть $p = q = 2$, тогда система (16) запишется как

$$\Delta U = \alpha U^2 + \gamma U^3 V^{-1}, \quad \Delta V = \beta V^2 + \delta U^{-1} V^3. \quad (64)$$

После подстановки функций $U = f(W)$, $V = g(W)$ и несложных преобразований с учётом формулы (10) и равенств

$$|\nabla W|^2 = \sigma W, \quad \Delta W = \text{tr } A \equiv \tau$$

придём к системе ОДУ (49), для которой при условии $\tau = 3\sigma$ можно получить частное точное решение. Как уже было отмечено выше, равенство $\tau = 3\sigma$ приводит к необходимости рассмотрения задачи в пространстве шести и более переменных. Пусть искомые функции $U(\mathbf{x})$,

$V(\mathbf{x})$ и оператор Лапласа Δ заданы в 7-мерном координатном пространстве, тогда система (64) обладает частными точными анизотропными решениями в элементарных функциях

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{x}) &= PF_1(\mathbf{x}), \quad V_1(\mathbf{x}) = \frac{2\gamma P^2}{\sigma - 2\alpha P} F_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \\ U_2(\mathbf{x}) &= QF_2(\mathbf{x}), \quad V_2(\mathbf{x}) = -\frac{2\gamma Q^2}{6\sigma C_3 + \alpha Q} F_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^7, \\ F_1(\mathbf{x}) &= \frac{3 \operatorname{tg}^2(0.5 \ln W(\mathbf{x}) + C_2) + 1}{W(\mathbf{x})}, \quad F_2(\mathbf{x}) = (C_3 W(\mathbf{x}) + 1)^{-2}, \end{aligned}$$

где $\sigma \neq 0$, $C_2, C_3 \neq 0$ – произвольные постоянные; ненулевые константы $P \neq \sigma/(2\alpha)$, $Q \neq -6\sigma C_3/\alpha$ являются вещественными решениями следующих кубических уравнений:

$$\begin{aligned} 8\gamma(\alpha\beta - \gamma\delta)P^3 + 4\sigma(\alpha^2 - \beta\gamma)P^2 - 4\alpha\sigma^2P + \sigma^3 &= 0, \\ \gamma(\alpha\beta - \gamma\delta)Q^3 - 6\sigma C_3(\alpha^2 - \beta\gamma)Q^2 - 72\alpha\sigma^2 C_3^2 Q - 216C_3^2\sigma^3 &= 0, \end{aligned}$$

а функция $W(\mathbf{x})$ задаётся формулой (47).

Заключение. В статье получены формулы новых точных многомерных решений нелинейной эллиптической системы (7) и нелинейных эллиптических уравнений (2), (3) с использованием конструкции (10), которая в работах других авторов не применялась. При этом использовались не только степенные анзацы (22), (50), но и анзацы с другой функциональной зависимостью. В частности, построено точное многомерное решение уравнения (2) с показателем $\lambda = 2$, которое выражается формулой, содержащей эллиптический синус Якоби. Полезная особенность конструкции (10) с точки зрения построения точных многомерных решений состоит в том, что помимо линейных слагаемых она содержит квадратичную форму $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ n переменных. Из полученных результатов следует, что пространственная структура решений определяется рангом матрицы A . Если $\operatorname{rank} A = 1$, то имеем “псевдомногомерные” точные решения, т.е. решения с линейной комбинацией пространственных переменных. Если $1 < \operatorname{rank} A < n$, то получим анизотропные точные решения. Наконец, если $\operatorname{rank} A = n$, то имеем радиально-симметричные точные решения. Определённые ограничения на существование решений вида (22) с заданной пространственной структурой при некоторых значениях параметров λ накладывает условие (27). Так, при $\lambda = -1$ уравнение (2) не имеет точных решений вида (22) ранга 1, т.е. решений с линейной комбинацией переменных. Нелинейное эллиптическое уравнение (2) размерности $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, с показателем $\lambda = n/(n-2)$ не имеет радиально-симметричных решений вида (22) соответствующей размерности. Нелинейное эллиптическое уравнение (2) размерности $n = 2$ не имеет точных анизотропных решений вида (22). Отметим, что в справочниках [7, 36, 37] приведено радиально-симметричное решение уравнения (2) в двумерном координатном пространстве. Нелинейное эллиптическое уравнение (3) с показателем $\lambda = 5$ в трёхмерном координатном пространстве не имеет точных анизотропных решений вида (30). В статье остались не рассмотренными нелинейные системы (18)–(21) (по причине ограничения объёма), для них мы только указали анзацы точных решений; этим системам будут посвящены отдельные исследования. Задача построения точных решений с использованием функциональных анзацев $U = f(W)$, $V = g(W)$ сводится к нелинейным ОДУ второго порядка (39), (48) и системе ОДУ (49), детальное исследование которых также осталось за рамками данной статьи. Все полученные новые результаты подкреплены соответствующими примерами, а найденные явные выражения точных многомерных решений в элементарных и специальных функциях могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближённых решений краевых задач для нелинейных систем вида (7), (16) и нелинейного эллиптического уравнения (2) большой размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shahzad M.M., Saeed. Z., Akhtar A., Munawar H., Yousaf M.H., Baloach N.K., Hussain F.A. Review of swarm robotics in a nutshell // Drones. 2023. V. 7. № 4. Art. 269.
2. Muniganti P., Pujol A.O. A survey on mathematical models of swarm robotics // Conf. Paper. Workshop of Physical Agents. 2010. P. 29–30.
3. Wei J., Fridman E., Johansson K.H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. V. 106. P. 47–53.
4. Elamvazhuthi K., Berman S. Mean-field models in swarm robotics: a survey // Bioinspir Biomim. 2019. V. 15. № 1. Art. 015001.
5. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // J. of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 1847. № 1. Art. 012007.
6. Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I. 1966. V. 13. P. 109–124.
7. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Ч. 2. М., 2017.
8. Brezis H., Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // Comm. on Pure and Applied Mathematics. 1983. V. 34. P. 437–477.
9. Похожаев С.И. О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 4. С. 769–772.
10. Похожаев С.И. Об одной задаче Л.В. Овсянникова // Прикл. механика и техн. физика. 1989. № 2. С. 5–10.
11. Horedt, G.P. Topology of the Lane–Emden equation // Astronomy and Astrophysics. 1987. V. 117. № 1–2. P. 117–130.
12. Bohmer C.G., Harko T. Nonlinear stability analysis of the Emden–Fowler equation // J. of Nonlin. Math. Phys. 2010. V. 17. P. 503–516.
13. Косов А.А., Семенов Э.И. О существовании периодических решений одной нелинейной системы параболических уравнений четвертого порядка // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. Темат. обзоры. 2021. Т. 196. С. 98–104.
14. Sharaf K. Existence of solutions for elliptic nonlinear problems on the unit ball of $\mathbb{R}^3$ // Electronic J. of Differ. Equat. 2016. V. 229. P. 1–9.
15. Свиридзе Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М., 1987.
16. Березовская Ф.С., Карев Г.П. Бифуркации бегущих волн в популяционных моделях с таксисом // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169. № 9. С. 1011–1024.
17. Brezis H. Some variational problems with lack of compactness // Proc. of Symposia in Pure Math. 1986. V. 45. P. 167–201.
18. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1952. V. 237. P. 37–72.
19. Maini P.K., Benson D.L., Sherratt J.A. Pattern formation in reaction-diffusion models with spatially inhomogeneous diffusion coefficients // J. of Math. Appl. in Medicine & Biology. 1992. V. 9. P. 197–213.
20. Lair A.V., Wood A.W. Existence of entire large positive solutions of semilinear elliptic systems // J. of Differ. Equat. 2000. V. 164. P. 380–394.
21. Bozhkov Y., Freire I.L. Symmetry analysis of the bidimensional Lane–Emden systems // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388. P. 1279–1284.
22. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London; N.Y., 2002.
23. Канцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М., 2009.
24. Шмидт А.В. Точные решения систем уравнений типа реакция–диффузия // Вычислит. технологии. 1998. Т. 3. № 4. С. 87–94.
25. Cherniha R., King J.R. Non-linear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansatzes and exact solutions // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 308. P. 11–35.
26. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Differential Equations. Boca Raton, 2012.
27. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 108–122.
28. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях системы уравнений реакции–диффузии со степенными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 796–812.
29. Kosov A.A., Semenov E.I., Tirskikh V.V. On exact multidimensional solutions of a nonlinear system of first order partial differential equation // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 28. С. 53–68.

30. Косов А.А., Семенов Э.И. Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63. № 6. С. 1282–1299.
31. Косов А.А., Семенов Э.И. Анизотропные решения нелинейной кинетической модели эллиптического типа // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2020. Т. 13. № 4. С. 48–57.
32. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
33. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
34. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.
35. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.
36. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики: справочник. М., 2002.
37. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Ч. 1. М., 2017.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.
После доработки 28.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ
И УСЛОВИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

© 2023 г. С. И. Сахаров

Рассмотрены начально-краевые задачи для однородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с нулевыми начальными условиями в полуограниченной плоской области с негладкой боковой границей. Методом граничных интегральных уравнений доказана теорема об однозначной классической разрешимости таких задач в пространстве функций, непрерывных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании области. Дано интегральное представление полученных решений. Показано, что рассматриваемое в работе условие разрешимости поставленных задач эквивалентно известному условию дополненности.

DOI: 10.31857/S0374064123120051, EDN: NVAUBL

Введение. Теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем общего вида с гёльдеровскими коэффициентами в пространствах $H^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, в областях с гладкими боковыми границами построена в работе [1] (см. также [2, с. 705]). Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, “клювы”. В случае параболических систем с гёльдеровскими коэффициентами первая и вторая начально-краевые задачи в плоских областях с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ рассматривались в статьях [3–8]. В случае параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в [9–14] доказаны теоремы о существовании и единственности решений из пространства $C^{1,0}_0(\bar{\Omega})$ первой, второй и смешанной начально-краевых задач в областях с боковыми границами из класса $H^{1/2+\omega}$, где ω удовлетворяет условию Дини.

Естественно возникает вопрос об исследовании начально-краевых задач для параболических систем в областях с негладкими боковыми границами, на которых задаются граничные условия общего вида. В настоящей работе доказана однозначная классическая разрешимость в пространстве $C^{1,0}_0(\bar{\Omega})$ начально-краевых задач общего вида для однородных параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, с нулевыми начальными условиями в полуограниченной области с боковой границей из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$, где ω удовлетворяет условию Дини. Коэффициенты в граничных условиях являются постоянными. Показано, что рассматриваемое в данной статье условие разрешимости поставленных задач эквивалентно известному условию дополненности (см. [2, с. 700; 15, с. 360]). Построен пример, иллюстрирующий тот факт, что в общем случае это условие может не выполняться. Приведён алгоритм вычислений, связанный с проверкой выполнения указанного условия разрешимости.

Работа состоит из четырёх пунктов. В п. 1 приводятся необходимые определения и формулируются основные результаты. В п. 2 доказывается теорема об однозначной разрешимости в пространстве $C[0, T]$ систем граничных интегральных уравнений, которые индуцируются граничными условиями поставленных задач. Доказательству основной теоремы об однозначной разрешимости рассматриваемых задач посвящён п. 3. В п. 4 доказывается эквивалентность условия разрешимости из основной теоремы и известного условия дополненности, кроме того, строится пример, показывающий, что в общем случае это условие может не выполняться, а также приводится алгоритм вычислений, связанный с проверкой выполнения указанного условия.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Следуя [16, с. 151], *модулем непрерывности* называем непрерывную неубывающую полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z y^{-1} \omega(y) dy < +\infty, \quad z > 0. \quad (1)$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество модулей непрерывности, удовлетворяющих условию Дини (1).

Пусть $T > 0$ – фиксированное число. Через $C[0, T]$ обозначим пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ вектор-функций с нормой $\|\psi; [0, T]\|^0 = \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|$. Положим $C_0[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi(0) = 0\}$.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Введём пространства

$$H^{q+\omega}[0, T] = \left\{ \psi \in C[0, T] : \|\psi; [0, T]\|^{q+\omega} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{\substack{t, t+\Delta t \in (0, T) \\ \Delta t \neq 0}} \frac{|\Delta_t \psi(t)|}{|\Delta t|^q \omega(|\Delta t|^{1/2})} < \infty \right\},$$

$$H_0^{q+\omega}[0, T] = \{\psi \in H^{q+\omega}[0, T] : \psi(0) = 0\}, \quad q = 0, 1/2,$$

где $\Delta_t \psi(t) = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [3, 4], введём пространство

$$C_0^{1/2}[0, T] = \{\psi \in C_0[0, T] : \partial^{1/2} \psi \in C_0[0, T], \|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\partial^{1/2} \psi; [0, T]\|^0 < \infty\}.$$

Функция $\nu(z)$, $z \geq 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leq C\nu(z_2)$, $z_1 \geq z_2 \geq 0$.

В полосе $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)\}$ выделим область $\Omega = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$, где g удовлетворяет условию

$$g \in H^{1/2+\omega_1}[0, T], \quad \omega_1 \in \mathcal{D}, \quad (2)$$

причём для некоторого $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ функция $z^{-\varepsilon_1} \omega_1(z)$, $z > 0$, почти убывает.

Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ вектор-функций u с нормой $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x, t) \in \Omega} |u(x, t)|$.

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ понимаем их предельные значения “изнутри” Ω .

Положим $C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega})\}$, $\|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u; \Omega\|^0$, $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x, 0) = 0, l = 0, 1\}$.

Пусть число $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, зафиксировано. Рассмотрим в полосе D равномерно параболический по Петровскому (см. [17]) оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l(x, t) \partial_x^l u, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T,$$

где $A_l = \|a_{jkl}\|$ — $m \times m$ -матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые и ограниченные в $\overline{D}$, и выполнены условия:

(а) собственные числа μ_r , $r = \overline{1, m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$;

(б) $|a_{jkl}(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_{jkl}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $(x + \Delta x, t + \Delta t), (x, t) \in \overline{D}$, где ω_0 — модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y x^{-1} \omega_0(x) dx < +\infty, \quad z > 0,$$

причём для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функция $z^{-\varepsilon_0} \omega_0(z)$, $z > 0$, почти убывает.

Пусть

$$Z(x, t; A_2(\xi, \tau)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \exp\{-y^2 A_2(\xi, \tau)t\} dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \quad (\xi, \tau) \in \overline{D}. \quad (3)$$

Обозначим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \overline{D} \times \overline{D} : t > \tau\}$. Известно (см. [18]), что при выполнении условий (а) и (б) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, $(x, t; \xi, \tau) \in D^*$, справедливы оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad 2k + l \leq 2,$$

и, кроме того, для разности

$$W(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) - Z(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau)), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \quad (4)$$

выполнены оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l W(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2}) \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\}, \quad 2k + l \leq 2,$$

$$|\Delta_t \partial_x W(x, t; \xi, \tau)| \leq C(\Delta t)^{1/2} (t - \tau)^{-3/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2}) \exp\{-c(x - \xi)^2/(t - \tau)\},$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*$, $0 < \Delta t \leq t - \tau$.

Пусть $m_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 0, 1$, и $m_0 + m_1 = m$, и пусть заданы $m_0 \times m$ -матрица $B_0 = \|b_{jk0}\|$ и $m_1 \times m$ -матрицы $B_1 = \|b_{jk1}\|$, $\hat{B}_1 = \|\hat{b}_{jk1}\|$, где b_{jk0} , b_{jk1} , $\hat{b}_{jk1}$ — вещественные числа.

Рассмотрим задачу о нахождении вектор-функции $u \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$, являющейся классическим решением системы

$$Lu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (5)$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad (6)$$

и граничным условиям

$$B_0 u(g(t), t) = \psi_0(t), \quad (7)$$

$$B_1 \partial_x u(g(t), t) + \hat{B}_1 u(g(t), t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Положим

$$A(t) = A_2(g(t), t), \quad M(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2 A(t)\} dy, \quad (9)$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 M(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Заметим, что из равенства (см. [19]) $M^2(t) = (A(t))^{-1}$, $t \in [0, T]$, следует, что

$$\det M(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и, кроме того,

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

Тогда для любых вектор-функций $\psi_0 \in C_0^{1/2}[0, T]$ и $\psi_1 \in C[0, T]$ существует единственное классическое решение $u \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$ задачи (5)–(8) и справедлива оценка

$$\|u; \Omega\|^{1,0} \leq C\{\|\psi_0; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_1; [0, T]\|^0\}. \quad (13)$$

При этом для решения $u \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$ задачи (5)–(8) справедливо интегральное представление в виде векторного параболического потенциала простого слоя

$$u(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad (14)$$

где $\varphi \in C[0, T]$ – единственное в пространстве $C[0, T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода

$$B_0 \int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi_0(t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} B_1 (A(t))^{-1} \varphi(t) + \int_0^t [B_1 \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) + \\ & + \hat{B}_1 \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau)] \varphi(\tau) d\tau = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и далее через C , c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T , m , коэффициентов оператора L , элементов матриц B_j , $j = 0, 1$, $\hat{B}_1$ и модуля непрерывности ω_1 .

Замечание 1. Пусть E – единичная $m \times m$ -матрица. Для первой начально-краевой задачи ($m_0 = m$, $B_0 = E$) и второй начально-краевой задачи ($m_1 = m$, $B_1 = E$, $\hat{B}_1 = 0$) теорема 1 следует из [9, 10, 13].

В настоящей работе также проверяется, что условие (12) эквивалентно известному (см. [2, с. 700; 15, с. 360]) условию дополнителности: для произвольно фиксированных чисел $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$, и $t \in [0, T]$

$$\det \begin{pmatrix} B_0 \int_{\gamma^+(p,t)} (pE + y^2 A(t))^{-1} dy \\ B_1 \int_{\gamma^+(p,t)} y(pE + y^2 A(t))^{-1} dy \end{pmatrix} \neq 0, \quad (17)$$

где $\gamma^+(p, t)$ – произвольный простой замкнутый контур, содержащийся в полуплоскости $\{\operatorname{Im} y > 0\}$ и охватывающий корни уравнения $\det(pE + y^2 A(t)) = 0$, имеющие положительную

мнимую часть (здесь и далее обход кривых, по которым ведётся интегрирование, предполагается направленным против часовой стрелки). А именно, доказывается следующая

Теорема 2. Если выполняется условие (а), то условие (12) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется условие (17).

Из теоремы 2 следует, в частности, что для первой и второй начально-краевых задач условие (17) выполнено. Для первой начально-краевой задачи это было ранее показано в монографии [2, с. 715], для второй – в работах [10, 13].

В общем случае условие (12) может не выполняться. Соответствующий пример приводится ниже в п. 4.

Заметим, что если известна такая матрица $F(t)$, $t \in [0, T]$, что $\bar{A}(t) = F^{-1}(t)A(t)F(t)$, $t \in [0, T]$, где $\bar{A}$ – жорданова форма матрицы A , то элементы матрицы G из условия (12) могут быть легко вычислены. Алгоритм такого вычисления приводится в п. 4. В некоторых случаях вычисление элементов матрицы G можно провести даже если матрица F неизвестна (см. п. 4).

2. Система граничных интегральных уравнений. Приведём сведения, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1 [20]. Пусть $\omega \in \mathcal{D}$. Тогда $\partial^{1/2}$ является ограниченным оператором из пространства $H_0^{1/2+\omega}[0, T]$ в пространство $H_0^{\omega}[0, T]$.

Следуя А.Н. Тихонову (см. [21]), назовём оператор $K : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ вольтерровым, если для любого $t \in [0, T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0, t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0, t]$.

Лемма 2 [22]. Пусть ω – некоторый модуль непрерывности и $K : C[0, T] \rightarrow H_0^{\omega}[0, T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой вектор-функции $\psi \in C[0, T]$ уравнение $\varphi + K\varphi = \psi$ имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C\|\psi; [0, T]\|^0.$$

Докажем, что справедлива

Теорема 3. Пусть выполнены условия (а), (b), (2) и (12). Тогда для любых вектор-функций $\psi_0 \in C_0^{1/2}[0, T]$ и $\psi_1 \in C_0[0, T]$ система (15), (16) имеет единственное в пространстве $C[0, T]$ решение $\varphi \in C[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C\{\|\psi_0; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_1; [0, T]\|^0\}. \quad (18)$$

Замечание 2. Для первой и второй начально-краевых задач теорема 3 доказана в работах [9] и [10] соответственно.

Доказательство теоремы 3. Полагая (см. (4))

$$N_0(t, \tau) = B_0[Z(g(t) - g(\tau), t - \tau; A(\tau)) - Z(0, t - \tau; A(\tau)) + W(g(t), t; g(\tau), \tau)],$$

$$N_1(t, \tau) = B_1\partial_x\Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) + \hat{B}_1\Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau), \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

систему (15), (16) можно записать в виде

$$\int_0^t B_0Z(0, t - \tau; A(\tau))\varphi(\tau) d\tau + \int_0^t N_0(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = \psi_0(t), \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2}B_1(A(t))^{-1}\varphi(t) + \int_0^t N_1(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (20)$$

Пусть оператор дробного интегрирования действует на функцию $\varphi \in C[0, T]$ по формуле

$$I^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

В силу (3) и (9)

$$Z(0, t-\tau; A(\tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} M(\tau), \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

поэтому уравнение (19) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2} B_0 I^{1/2}(M\varphi)(t) + \int_0^t N_0(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi_0(t), \quad t \in [0, T]. \quad (21)$$

Введём операторы H_l , $l = 0, 1$, действующие на функцию $\varphi \in C[0, T]$, по формулам

$$(H_l \varphi)(t) = \int_0^t N_l(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

и запишем систему (21), (20) в операторном виде

$$\frac{1}{2} B_0 I^{1/2}(M\varphi) + H_0 \varphi = \psi_0, \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} B_1 A^{-1} \varphi + H_1 \varphi = \psi_1. \quad (23)$$

Положим $\omega_2(z) = \tilde{\omega}_0(z) + \omega_1(z)$, $z \geq 0$. Из [9, 10] следует, что H_0 – ограниченный оператор из $C[0, T]$ в $H_0^{1/2+\omega_2}[0, T]$ и H_1 – ограниченный оператор из $C[0, T]$ в $H_0^{\tilde{\omega}_2}[0, T]$.

Применив к обеим частям уравнения (22) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, в силу приведённых свойств операторов H_l , $l = 0, 1$, леммы 1 и справедливых для $\chi \in C[0, T]$, $\psi \in C^{1/2}[0, T]$ равенств $\partial^{1/2} I^{1/2} \chi = \chi$, $I^{1/2} \partial^{1/2} \psi = \psi$, получим систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода, эквивалентную (22), (23) для $\varphi \in C[0, T]$:

$$B_0 M\varphi + K_0 \varphi = 2\partial^{1/2} \psi_0, \quad (24)$$

$$B_1 A^{-1} \varphi + K_1 \varphi = -2\psi_1, \quad (25)$$

где $K_0 = 2\partial^{1/2} H_0$, $K_1 = -2H_1$.

Положим

$$K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 2\partial^{1/2} \psi_0 \\ -2\psi_1 \end{pmatrix}.$$

В силу (11) и (12) систему (24), (25) можно записать как

$$\varphi + \hat{K} \varphi = \hat{\psi}, \quad (26)$$

где $\hat{K} = (GM)^{-1} K$, $\hat{\psi} = (GM)^{-1} \psi \in C[0, T]$. Из свойств операторов H_l , $l = 0, 1$, и леммы 1 следует, что $\hat{K} : C[0, T] \rightarrow H_0^{\tilde{\omega}_2}[0, T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, тогда по лемме 2 уравнение (26) имеет единственное в $C[0, T]$ решение φ , причём выполнено неравенство $\|\varphi; [0, T]\|^0 \leq C \|\psi; [0, T]\|^0$. Отсюда получаем оценку (18). Кроме того, из вида уравнения (26) следует, что $\varphi(0) = 0$. Теорема 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем *существование* решения задачи (5)–(8). Это решение будем искать в виде потенциала простого слоя (14) с плотностью $\varphi \in C[0, T]$, подлежащей определению. Для любой $\varphi \in C[0, T]$ потенциал (14) является решением системы (5) и удовлетворяет начальному условию (6). Подставив (14) в граничные условия (7) и (8), получим систему интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода (15) и (16). Из теоремы 3 следует, что система (15), (16) имеет единственное в пространстве $C[0, T]$ решение $\varphi \in C_0[0, T]$, подставив которое в потенциал (14), получим решение задачи (5)–(8). Из оценки (18) и свойств потенциала простого слоя (см. [18]) делаем вывод, что найденное решение принадлежит пространству $C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$ и выполнено неравенство (13).

Далее докажем *единственность* решения задачи (5)–(8). Пусть $u \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$ – классическое решение задачи (5)–(8) при $\psi_j(t) = 0$, $t \in [0, T]$, $j = 0, 1$. Тогда вектор-функция u является единственным (см. [13]) в пространстве $C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$ классическим решением второй начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \\ \partial_x u(g(t), t) &= \psi(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где $\psi \in C[0, T]$, и для неё справедливо интегральное представление (см. [10])

$$u(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad (27)$$

где $\varphi \in C_0[0, T]$. Подставив выражение (27) в граничные условия (7) и (8) с нулевыми правыми частями, получим, что $\varphi \in C_0[0, T]$ одновременно является решением однородной системы уравнений (15), (16) и, следовательно, в силу теоремы 3 $\varphi(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Возвращаясь к представлению (27), получаем, что $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Следуя [23, с. 139], приведём определение показательной функции матрицы и её свойства. *Показательной функцией* $e^H \equiv \exp\{H\}$ квадратной матрицы H называется сумма ряда $\sum_{j=0}^{+\infty} H^j/j!$. Она обладает следующими свойствами:

$$\exp\{H^T\} = (\exp\{H\})^T, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} e^{tH} = H e^{tH}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

$$e^{R+H} = e^R e^H, \quad \text{если} \quad RH = HR. \quad (30)$$

Пусть $\overline{H}$ – жорданова форма матрицы H , s – количество жордановых клеток K_j в $\overline{H}$, k_j – размеры этих клеток, ν_j – соответствующие им собственные числа. Пусть F – такая матрица, что $\overline{H} = F^{-1} H F$. Имеют место равенства

$$e^{tH} = F e^{t\overline{H}} F^{-1}, \quad (31)$$

$$e^{t\overline{H}} = \text{diag}[e^{tK_1}, \dots, e^{tK_s}], \quad (32)$$

$$e^{tK_j} = e^{t\nu_j} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{k_j-3}}{(k_j-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, s}. \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, в частности, что

$$e^{yE} = e^y E, \quad y \in \mathbb{C}. \quad (34)$$

Пусть $P(y)$, $y \geq 0$, — $m \times m$ -матрица, элементами которой являются полиномы, $\nu_j(y)$, $j = \overline{1, m}$, — собственные числа $P(y)$. Имеют место оценки (см. [24, с. 171])

$$|\exp\{\tau P(y)\}| \leq C(1 + \tau^{1/2} + \tau^{1/2}y)^{2(m-1)} \exp\{\tau \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \operatorname{Re} \nu_j(y)\}, \quad y \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (35)$$

Далее обозначим через $\mathcal{K}_m$ пространство (кольцо) $m \times m$ -матриц над полем $\mathbb{C}$. Следуя [25, с. 7], *нормой* на $\mathcal{K}_m$ назовём функционал $\|\cdot\| : \mathcal{K}_m \rightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющий следующим условиям для всех $H, R \in \mathcal{K}_m$:

- 1) $\|H\| = 0$ тогда и только тогда, когда $H = 0$;
- 2) $\|\lambda H\| = |\lambda| \|H\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- 3) $\|H + R\| \leq \|H\| + \|R\|$;
- 4) $\|HR\| \leq \|H\| \|R\|$.

Известно [26, с. 354], что функционал $H \mapsto m|H|$, $H \in \mathcal{K}_m$, является нормой на $\mathcal{K}_m$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $t_0 \in [0, T]$, $p_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p_0) > 0$, и положим $M = M(t_0)$, $A = A(t_0)$, $\gamma^+ = \gamma^+(p_0, t_0)$. Достаточно доказать справедливость равенств

$$M = \frac{1}{\sqrt{\pi} \hat{p}_0} \int_{\gamma^+} (p_0 E + y^2 A)^{-1} dy, \quad (36)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma^+} y (p_0 E + y^2 A)^{-1} dy, \quad (37)$$

где

$$\hat{p}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{|p_0|^{1/2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad \alpha = \operatorname{Arg}(p_0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Докажем (36). Из равенств (см. [27, с. 27])

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} \cos(|p_0| \tau \sin \alpha) \exp\{-|p_0| \tau \cos \alpha\} d\tau &= \frac{\sqrt{\pi}}{|p_0|^{1/2}} \cos \frac{\alpha}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} \sin(|p_0| \tau \sin \alpha) \exp\{-|p_0| \tau \cos \alpha\} d\tau &= \frac{\sqrt{\pi}}{|p_0|^{1/2}} \sin \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \operatorname{Arg}(p_0)$, следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} e^{-p_0 \tau} d\tau &= \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} \exp\{-|p_0| \tau (\cos \alpha + i \sin \alpha)\} d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} \cos(|p_0| \tau \sin \alpha) \exp\{-|p_0| \tau \cos \alpha\} d\tau - i \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} \sin(|p_0| \tau \sin \alpha) \exp\{-|p_0| \tau \cos \alpha\} d\tau = \hat{p}_0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (30) и (34), получаем

$$M = \frac{1}{\sqrt{\pi} \hat{p}_0} \int_0^{+\infty} \tau^{-1/2} e^{-p_0 \tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-y^2 A\} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi} \hat{p}_0} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 \tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\tau y^2 A\} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hat{p}_0}} \int_0^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\} dy = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi\hat{p}_0}} \int_{\varepsilon}^b d\tau \int_0^{+\infty} \exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\} dy.$$

Известно (см. [2, с. 699]), что уравнение

$$\det(p_0E + y^2A) = 0 \quad (38)$$

имеет m корней с положительной мнимой частью и m корней с отрицательной мнимой частью. Следовательно, $\det(p_0E + y^2A)$ – полином степени $2m$, причём

$$\det(p_0E + y^2A) \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

и

$$(p_0E + y^2A)^{-1} = \left\| \frac{A_{jk}(y)}{\det(p_0E + y^2A)} \right\|, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

где A_{jk} , $j, k = \overline{1, m}$, – полиномы степени не выше $2(m-1)$.

Зафиксируем произвольные ε , b , $0 < \varepsilon < b$. Используя равенство (30), оценку (35) и свойство 4) нормы $m|\cdot|$, с учётом условия (а) получаем

$$\begin{aligned} |\exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\}| &= \frac{1}{m} m |\exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\}| \leq m |\exp\{-\tau p_0E\}| |\exp\{-\tau y^2A\}| \leq \\ &\leq C(1 + b^{1/2} + b^{1/2}y)^{2(m-1)} \exp\{-c\varepsilon(1 + y^2)\}, \quad y \geq 0, \quad \tau \in [\varepsilon, b]. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\} dy$$

сходится равномерно по $\tau \in [\varepsilon, b]$. Отсюда, учитывая (29) и (39), имеем

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi\hat{p}_0}} \int_0^{+\infty} dy \int_{\varepsilon}^b \exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\} d\tau = \\ &= - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi\hat{p}_0}} \int_0^{+\infty} dy \int_{\varepsilon}^b (p_0E + y^2A)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\} d\tau = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \frac{2}{\sqrt{\pi\hat{p}_0}} \int_0^{+\infty} (p_0E + y^2A)^{-1} [\exp\{-\varepsilon(p_0E + y^2A)\} - \exp\{-b(p_0E + y^2A)\}] dy. \end{aligned} \quad (41)$$

Зафиксируем произвольно $y_0 > 0$. Используя оценку (35), получаем

$$|\exp\{-b(p_0E + y^2A)\}| \leq C(1 + b^{1/2} + b^{1/2}y_0)^{2(m-1)} e^{-cb}, \quad y \in [0, y_0]. \quad (42)$$

Кроме того, в силу (40) отображение $y \mapsto (p_0E + y^2A)^{-1}$ непрерывно на $[0, y_0]$. Отсюда и из (39), (42) следует, что

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (p_0E + y^2A)^{-1} \exp\{-b(p_0E + y^2A)\} = 0, \quad (43)$$

причём стремление к пределу равномерно по $y \in [0, y_0]$.

Далее положим

$$\mathcal{B} = \{(y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, y_0], \varepsilon \in [0, 1]\}, \quad Q(y, \varepsilon) = \exp\{-\varepsilon(p_0 E + y^2 A)\}, \quad (y, \varepsilon) \in \mathcal{B}.$$

В силу равномерной непрерывности отображения Q на множестве $\mathcal{B}$ для любого $\varkappa > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $0 \leq \varepsilon < \delta$

$$|Q(y, \varepsilon) - Q(y, 0)| = |Q(y, \varepsilon) - E| < \varkappa, \quad y \in [0, y_0],$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (p_0 E + y^2 A)^{-1} \exp\{-\varepsilon(p_0 E + y^2 A)\} = (p_0 E + y^2 A)^{-1}, \quad (44)$$

причём стремление к пределу равномерно по $y \in [0, y_0]$.

Из (43) и (44) вытекает равенство

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_0^d (p_0 E + y^2 A)^{-1} [\exp\{-\varepsilon(p_0 E + y^2 A)\} - \exp\{-b(p_0 E + y^2 A)\}] dy = \int_0^d (p_0 E + y^2 A)^{-1} dy, \quad (45)$$

где $d = 2 \max\{1, |a_1|, \dots, |a_{2m}|\}$, a_j , $j = \overline{1, 2m}$, – корни уравнения (38).

Далее докажем, что интеграл

$$\int_d^{+\infty} (p_0 E + y^2 A)^{-1} [\exp\{-\varepsilon(p_0 E + y^2 A)\} - \exp\{-b(p_0 E + y^2 A)\}] dy \quad (46)$$

сходится равномерно по $\varepsilon, b > 0$. Пусть F такая матрица, что $\bar{A} = F^{-1} A F$, где $\bar{A}$ – жорданова форма матрицы A . Обозначим через s количество жордановых клеток K_j в $\bar{A}$, через k_j – размеры этих клеток, а через μ_j – соответствующие им собственные числа матрицы A . Тогда, учитывая (31)–(33),

$$\exp\{-\tau y^2 A\} = F \operatorname{diag} [\exp\{-\tau y^2 K_1\}, \dots, \exp\{-\tau y^2 K_m\}] F^{-1}, \quad y \geq d, \quad \tau \geq 0,$$

причём

$$\exp\{-\tau y^2 K_j\} = \exp\{-\tau y^2 \mu_j\} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\tau y^2}{1!} & \frac{(-\tau y^2)^2}{2!} & \dots & \frac{(-\tau y^2)^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{-\tau y^2}{1!} & \dots & \frac{(-\tau y^2)^{k_j-2}}{(k_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(-\tau y^2)^{k_j-3}}{(k_j-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, s}. \quad (47)$$

Положим

$$R_{jl}(y, \tau) = \exp\{-\tau y^2 \mu_l\} \frac{(-\tau y^2)^j}{j!}, \quad y \geq 0, \quad \tau \geq 0, \quad j = \overline{0, k_l-1}, \quad l = \overline{1, s}.$$

В силу условий (а) справедливы оценки

$$|R_{jl}(y, \tau)| \leq C, \quad y \geq 0, \quad \tau \geq 0, \quad j = \overline{1, k_l-1}, \quad l = \overline{1, s}.$$

Отсюда, используя равенства (30), (34), (47) и свойство 4) нормы $m|\cdot|$, получаем

$$|\exp\{-\tau(p_0E + y^2A)\}| \leq m|\exp\{-\tau pE\}||\exp\{-\tau y^2A\}| \leq C, \quad y \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (48)$$

Кроме того, из равенства (40) следует, что

$$|(p_0E + y^2A)^{-1}| \leq C \frac{1}{y^2}, \quad y \geq d.$$

Поэтому в силу (48) интеграл (46) сходится равномерно по $\varepsilon, b > 0$. Отсюда и из (43)–(45), переходя к пределу в (41) при $\varepsilon \rightarrow +0$, $b \rightarrow +\infty$ и учитывая (40), получаем (см. [28, с. 219])

$$M = \frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (p_0E + y^2A)^{-1} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}\hat{p}_0} \int_{\gamma^+} (p_0E + y^2A)^{-1} dy.$$

Следовательно, выполняется равенство (36).

Докажем равенство (37). Известно (см. [15, с. 357]), что

$$A^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} y(p_0E + y^2A)^{-1} dy, \quad (49)$$

где $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ – окружность достаточно большого радиуса $R > 0$, охватывающая корни уравнения (38). Заметим, что

$$\int_{-R}^R y(p_0E + y^2A)^{-1} dy = 0$$

и, следовательно, справедливы равенства

$$\int_{C_R^+} y(p_0E + y^2A)^{-1} dy = \int_{\gamma^+} y(p_0E + y^2A)^{-1} dy, \quad (50)$$

где $C_R^+ = \{z \in C_R : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Далее имеем

$$\int_{C_R^+} y(p_0E + y^2A)^{-1} dy = i \int_0^\pi R^2 e^{2i\varphi} (p_0E + R^2 e^{2i\varphi} A)^{-1} d\varphi = \int_{C_R^-} y(p_0E + y^2A)^{-1} dy,$$

где $C_R^- = \{z \in C_R : \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Отсюда и из (49), (50) вытекает равенство (37). Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Условие (12) может не выполняться.

Например, если $m_0 = m_1$ и для некоторого $t_0 \in [0, T]$ имеет место равенство $B_0 = B_1 M(t_0)$, то $\det G(t_0) = 0$. В частности, если

$$A(t) \equiv A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, применив (28), (32), (33), равенства

$$\int_0^\infty y^{2k} e^{-ay^2} dy = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}a^k} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a > 0, \quad (51)$$

и формулы (9), (10), последовательно найдём

$$M(t) \equiv M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G(t) \equiv G = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает равенство $\det G = 0$.

Заметим, что можно описать конкретный алгоритм вычисления элементов матрицы $G(t)$ в том случае, если известна такая матрица $F(t)$, что

$$\overline{A}(t) = F^{-1}(t)A(t)F(t), \quad t \in [0, T], \quad (52)$$

где $\overline{A}$ – жорданова форма матрицы A . Для этого зафиксируем произвольно $t_0 \in [0, T]$ и положим $A = A(t_0)$, $\overline{A} = \overline{A}(t_0)$, $M = M(t_0)$, $F = F(t_0)$, $G = G(t_0)$. Обозначим через s количество жордановых клеток K_j в составе $\overline{A}$, через k_j – размеры этих клеток, а через μ_j – соответствующие этим клеткам собственные числа матрицы A . Используя (31)–(33), получаем

$$e^{-y^2 A} = F \operatorname{diag} [e^{-y^2 K_1}, \dots, e^{-y^2 K_s}] F^{-1}, \quad (53)$$

$$e^{-y^2 K_j} = e^{-y^2 \mu_j} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-y^2}{1!} & \frac{y^4}{2!} & \dots & \frac{(-y)^{2k_j-2}}{(k_j-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{-y^2}{1!} & \dots & \frac{(-y)^{2k_j-4}}{(k_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(-y)^{2k_j-6}}{(k_j-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, s}. \quad (54)$$

Используя (9), (51)–(54) и учитывая условие (а), можно вычислить элементы матрицы M , а затем по формуле (10) – элементы матрицы G .

Заметим, что приведённый выше пример показывает, что вычисление элементов матрицы G в отдельных случаях возможно без предварительного нахождения матрицы F из (52).

Автор выражает благодарность профессору Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
4. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
5. Baderko E.A., Cherepova M.F. Uniqueness of a solution in a Holder class to the first initial-boundary value problem for a parabolic system in a bounded nonsmooth domain in the plane // J. of Math. Sci. 2020. V. 251. № 5. P. 557–572.
6. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
7. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.

8. Коненков А.Н. Существование и единственность классического решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 7. С. 904–913.
9. Baderko E.A., Cherepova M.F. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
10. Зейнеддин М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
11. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2. С. 26–29.
12. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
13. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Журн. вычислит. математики. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.
14. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 5. С. 608–618.
15. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964.
16. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
17. Петровский И.Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
18. Зейнеддин М. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294-B92.
19. Семаан Х.Д. О решении второй краевой задачи для параболических систем на плоскости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1999.
20. Камынин Л.И. Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
21. Тихонов А.Н. О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
22. Baderko E.A., Cherepova M.F. Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 753–765.
23. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2015.
24. Friedman A. Generalized Functions and Partial Differential Equations. New Jersey, 1963.
25. Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М., 1998.
26. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.
27. Бейтемен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1965.
28. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М., 1974.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 12.09.2023 г.
После доработки 12.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.951

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ
НАД МНОГООБРАЗИЕМ

© 2023 г. М. С. Смирнов

Установлено необходимое и достаточное условие для замкнутости образа или сюръективности дифференциального оператора, действующего на гладких сечениях векторных расслоений. Для связных некомпактных многообразий показано, что эти условия выводятся из условий регулярности и свойства единственности продолжения решений. Приведено приложение этих результатов к эллиптическим операторам (точнее, к операторам с сюръективным главным символом) с аналитическими коэффициентами, к эллиптическим операторам второго порядка на линейных расслоениях с вещественной старшей частью и к оператору Ходжа–Лапласа–де Рама. Показано, что старшая группа когомологий де Рама (соответственно Дольбо) на связном некомпактном гладком (соответственно комплексно-аналитическом) многообразии обнуляется. Для эллиптических операторов доказано, что разрешимость в гладких сечениях влечёт за собой разрешимость в обобщённых сечениях.

DOI: 10.31857/S0374064123120063, EDN: NXYOPV

Введение. Имеется большое количество исследований разрешимости (или, что равносильно, сюръективности) скалярных линейных дифференциальных операторов в пространстве гладких функций. Для операторов с гладкими коэффициентами на открытом подмножестве в пространстве $\mathbb{R}^n$ были получены окончательные результаты, содержащие необходимые и достаточные условия разрешимости в гладких функциях. Точные формулировки и обзор результатов по данному вопросу можно найти в работе [1] (для случая операторов с постоянными коэффициентами см. также [2, гл. 10]). Для скалярных дифференциальных (и даже псевдодифференциальных) операторов на произвольных многообразиях существует подход, основанный на теории распространения особенностей (см. [3, 4]). Данный подход применялся в различных контекстах, включая операторы первого порядка (см. [3, 5]) и инвариантные операторы на однородных пространствах групп Ли (см. [6, 7]). Цель данной статьи – найти удобные для применения условия замкнутости образа или разрешимости линейные дифференциальные операторы, действующие на гладких сечениях векторных расслоений, аналогичные установленным в [1] для скалярных операторов. По-видимому, такие результаты встречаются в литературе довольно редко. В [8] разрешимость исследовалась для операторов, действующих в пространствах сечений векторных расслоений над аналитическим многообразием, принадлежащих классу Жевре. В работе [9] утверждается (без доказательства), что эллиптический оператор с аналитическими коэффициентами на связном некомпактном аналитическом многообразии разрешим в гладких сечениях (мы доказываем это утверждение в п. 5). В [10] утверждается, что эллиптический оператор второго порядка, действующий на гладких сечениях векторного расслоения над связным некомпактным многообразием, разрешим. Это утверждение в приведённой общности, по всей видимости, неверно, так как эллиптический оператор второго порядка с непостоянными коэффициентами (в случае когда расслоение имеет размерность больше единицы) может иметь нетривиальные функции с компактным носителем в ядре (см. [11, пример 1.11]). Тем не менее можно доказать разрешимость оператора Ходжа–Лапласа–де Рама (для связных некомпактных многообразий), который в [10] приведён как основной мотивирующий пример.

Статья организована следующим образом. В п. 1 приводится вся необходимая предварительная информация и фиксируются основные обозначения. В п. 2 доказывается главный

результат по аналогии с теоремой 3.14 из [1], дающий критерий замкнутости образа дифференциального оператора, а также доказывается, что если оператор обладает дополнительными свойствами регулярности, то условия основной теоремы несколько упрощаются. Распространение результатов о разрешимости в гладких сечениях на обобщённые сечения для эллиптических операторов рассматривается в п. 3. В п. 4 описывается случай когда многообразие связно и некомпактно, показывается, что условия разрешимости могут быть получены из условия регулярности и свойства единственности продолжения решений. Наконец, в п. 5 собраны некоторые приложения полученных результатов для операторов с аналитическими коэффициентами, эллиптических операторов второго порядка с вещественной главной частью на линейных расслоениях и оператора Ходжа–Лапласа–де Рама.

1. Предварительные сведения. Мы используем слово “гладкий” исключительно как синоним “класса C^∞ ”. На протяжении данной статьи все многообразия по умолчанию считаются гладкими и без края, а векторные расслоения – гладкими и комплексными. Для расширения многих результатов этой статьи на случай вещественных расслоений достаточно рассмотреть комплексификации.

Целью этого пункта является фиксация обозначений и необходимых результатов из теории обобщённых функций (сечений расслоений) и дифференциальных операторов на многообразиях, поскольку единого подхода к этим понятиям в литературе на данный момент не существует. Приведённое ниже определение обобщённого сечения векторного расслоения широко известно и может быть найдено в книге [12, гл. 3] (см. также [13, гл. 8] для случая тривиальных расслоений). Чтобы удобно и бескоординатно определять топологии на пространствах обобщённых сечений векторных расслоений над многообразиями, мы будем свободно использовать понятия проективной и индуктивной локально выпуклых топологий (см. [14, II.5–6]). Определения линейного дифференциального оператора на векторных расслоениях и его главного символа можно найти в [15, гл. IV] или [16, гл. 4]. Тем не менее, в отличие от авторов этих источников, будем отталкиваться от понятия транспонированного оператора (а не сопряжённого), чтобы избежать необходимости фиксировать плотности и эрмитовы структуры. Книги [14] и [16] будут использоваться как основные источники по теории многообразий и функциональному анализу соответственно. Все необходимые сведения из теории пучков содержатся в [16, гл. 2]. Наконец, для краткости будем называть топологию $\sigma(T', T)$ на сопряжённом пространстве T' к локально выпуклому пространству T **-слабой топологией*.

1.1. Обобщённые сечения векторных расслоений. Пусть M – многообразие, а E – векторное расслоение над M . Через $C^\infty(M, E)$ и $\mathcal{D}(M, E)$ обозначаем пространства гладких сечений и гладких сечений с компактным носителем расслоения E соответственно. Эти пространства наделяются стандартными топологиями пространства Фреше и LF-пространства соответственно. Очевидно, что $\mathcal{D}(M, E)$ плотно в $C^\infty(M, E)$.

Если M – гладкое многообразие, то через Vol_M обозначается (комплексное) расслоение плотностей на M (определение и основные свойства расслоения Vol_M можно найти в [12, разд. 3.1.2]). Отметим, что Vol_M тривиально, и ненулевое сечение этого расслоения можно построить, выбрав риманову метрику на M . Для непрерывного сечения ϕ расслоения Vol_M с компактным носителем канонически определяется число $\int_M \phi$. Для векторного расслоения E над M положим $E^\bullet = E^* \otimes \text{Vol}_M$ (как обычно, E^* обозначает сопряжённое расслоение к E , т.е. $\text{Hom}(E, \mathbb{C})$), так что имеется канонический морфизм $\mathbf{c}_E : E \otimes E^\bullet \rightarrow \text{Vol}_M$. Для таких непрерывных сечений ϕ и ψ векторных расслоений E и $E^\bullet$, что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ компактно, положим $\langle \phi, \psi \rangle_E = \int_M \mathbf{c}_E(\phi \otimes \psi)$. Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ определяет двойственность между $C^\infty(M, E)$ и $\mathcal{D}(M, E^\bullet)$, а также между $\mathcal{D}(M, E)$ и $C^\infty(M, E^\bullet)$. Обозначим через $\mathcal{D}'(M, E)$ сопряжённое пространство к $\mathcal{D}(M, E^\bullet)$ (наделённое топологией сильного сопряжённого). Элементы этого пространства называются *обобщёнными сечениями расслоения E* . Пространство $C^\infty(M, E)$ канонически вложено в $\mathcal{D}'(M, E)$, и с этого момента мы будем отождествлять $C^\infty(M, E)$ с его образом вложения в $\mathcal{D}'(M, E)$. Пространство обобщённых сечений расслоения E может быть определено над любым открытым $U \subset M$, и совокупность таких пространств образует пучок (ограничения определяются стандартным способом). Определим *носитель обобщённого сечения*, как это принято в теории пучков, как множество таких $x \in M$, что росток данного сечения в точке x отличен от нуля. Как обычно, обобщённое

сечение $\phi \in \mathcal{D}'(M, E)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда ϕ непрерывен на $\mathcal{D}(M, E^\bullet)$ по отношению к топологии, индуцированной из $C^\infty(M, E^\bullet)$. Таким образом, пространство $\mathcal{E}'(M, E)$, состоящее из обобщённых сечений расслоения E с компактным носителем, канонически изоморфно сопряжённому пространству к $C^\infty(M, E^\bullet)$. Также отметим, что $(E^\bullet)^\bullet$ канонически изоморфно E , поскольку $\text{Vol}_M^* \otimes \text{Vol}_M$ канонически изоморфно расслоению $M \times \mathbb{C}$ (ввиду того, что Vol_M одномерно), а E^{**} канонически изоморфно E . Отсюда получаем канонические изоморфизмы

$$(C^\infty(M, E))' \cong \mathcal{E}'(M, E^\bullet) \quad \text{и} \quad (\mathcal{D}(M, E))' \cong \mathcal{D}'(M, E^\bullet).$$

Пространство тех обобщённых сечений расслоения E , что локально принадлежат (принадлежит ограничение на каждую относительно компактную карту, над которой расслоение E тривиально) пространству Соболева H^s , обозначается через $H_{\text{loc}}^s(M, E)$ (см. [17, § I.7]). На этом пространстве есть естественная топология пространства Фреше: она определяется стандартным образом если M является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$, а E тривиально, в то время как для общего случая она определяется как проективная топология по отношению к ограничениям на относительно компактные карты, над которыми E тривиализуется. Пространство элементов $H_{\text{loc}}^s(M, E)$, имеющих носитель в компакте $K \subset M$, обозначается через $H^s(K, M, E)$. Это пространство замкнуто в $H_{\text{loc}}^s(M, E)$, а его топология нормируема (т.е. порождается некоторой нормой). Отметим, что теорема вложения Соболева (см., например, [17, теорема I.7.6]) влечёт за собой, что $C^\infty(M, E) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H_{\text{loc}}^s(M, E)$, причём топология на $C^\infty(M, E)$ совпадает с топологией проективного предела. Наконец, определим $H_c^s(M, E) = H_{\text{loc}}^s(M, E) \cap \mathcal{E}'(M, E)$. Очевидно, что $H_c^s(M, E)$ совпадает с объединением пространств $H^s(K, M, E)$ по всем компактам $K \subset M$. Мы наделяем $H_c^s(M, E)$ топологией индуктивного предела, т.е.

$$H_c^s(M, E) = \varinjlim H^s(K, M, E).$$

Следующие свойства описанных выше пространств выделим в отдельное предложение.

Предложение 1. Пусть M – многообразие, а E – векторное расслоение над M . Тогда выполнены следующие утверждения:

- (i) пусть $s, t \in \mathbb{R}$, $s < t$ и $K \subset M$ – компакт, тогда оператор вложения $H^t(K, M, E) \rightarrow H^s(K, M, E)$ компактен;
- (ii) двойственный оператор к оператору вложения $C^\infty(M, E^\bullet) \rightarrow H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$ задаёт топологический изоморфизм пространства $(H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet))'$ на $H_c^{-s}(M, E)$;
- (iii) множество $B \subset \mathcal{E}'(M, E)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда найдутся такие $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$, что B содержится и ограничено в $H^s(K, M, E)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (i), достаточно воспользоваться теоремой Реллиха (см. [2, теорема 10.1.10]) для открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ и очевидным рассуждением, использующим разбиение единицы (см. также [17, теорема I.7.4], где в случае тривиального расслоения используется другой подход).

Теперь докажем (ii). Доказательство локальной версии этого утверждения (т.е. случая открытого подмножества в $\mathbb{R}^n$ и тривиального расслоения) можно найти в работах [18] или [17, теорема I.7.7]. Приводимое далее рассуждение является прямым обобщением доказательства из [18, разд. 3], поэтому опустим детали. Очевидно, что $C^\infty(M, E^\bullet)$ плотно в $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$, а потому каноническое отображение $(H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet))' \rightarrow \mathcal{E}'(M, E)$ инъективно. Из локальной версии утверждения (ii) и рассуждения, использующего разбиение единицы, легко вытекает, что образ вложения равен $H_c^{-s}(M, E)$. Также легко видеть, что обратное отображение к нему непрерывно. Остаётся показать, что топология на $H_c^{-s}(M, E)$ слабее сильной топологии пространства, сопряжённого к $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$. Заметим, что сопряжённое к $H_c^{-s}(M, E)$ пространство канонически отождествляется с $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$, так что топология на $H_c^{-s}(M, E)$ согласована с двойственностью между $H_{\text{loc}}^s(M, E)$ и его сопряжённым пространством. Таким образом, из теоремы Макки–Аренса (см. [14, теорема IV.3.2]) следует, что топология на $H_c^{-s}(M, E)$ слабее топологии Макки, которая, в свою очередь, слабее сильной топологии.

Наконец, утверждение (iii) напрямую выводится из (ii). Действительно, раз $C^\infty(M, E^\bullet)$ является проективным пределом пространств $H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet)$, получаем, что $B \subset \mathcal{E}'(M, E) =$

$= (C^\infty(M, E^\bullet))'$ равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда найдётся такое $s \in \mathbb{R}$, что B содержится в $(H_{\text{loc}}^s(M, E^\bullet))'$ и ограничено там по отношению к сильной топологии. Иначе говоря, $B \subset \mathcal{E}'(M, E)$ равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда B содержится и ограничено в $H_c^s(M, E)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$. Доказательство завершается применением результатов [14, II.6.5], поскольку $H_c^s(M, E)$ является строгим индуктивным пределом последовательности $H^s(K_1, M, E) \subset H^s(K_2, M, E) \subset \dots$ для произвольной последовательности $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, если $\bigcup_n K_n = M$ и $K_n \subset \text{Int } K_{n+1}$ для всех n (Int обозначает внутренность). Предложение доказано.

1.2. Дифференциальные операторы на векторных расслоениях. Пусть M – многообразие, а E и F – векторные расслоения над M . Будем обозначать через $\text{Diff}_k(M, E, F)$ пространство линейных дифференциальных операторов из E в F , имеющих порядок не выше k (и гладкие коэффициенты). В дальнейшем все операторы предполагаются линейными без явного указания на это. Для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ будем обозначать той же буквой L действие этого оператора из $C^\infty(U, E)$ в $C^\infty(U, F)$ для любого открытого $U \subset M$. Указанный оператор непрерывен. Отметим, что для расслоений E, F и G над M и дифференциальных операторов $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ и $N \in \text{Diff}_m(M, F, G)$ композиция NL также является дифференциальным оператором порядка не выше $m + k$, т.е. $NL \in \text{Diff}_{m+k}(M, E, G)$.

Ключевую роль в дальнейшем будет играть *транспонированный оператор* tL дифференциального оператора $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. По определению tL – это единственный такой оператор из $\text{Diff}_k(M, F^\bullet, E^\bullet)$, что $\langle L\phi, \psi \rangle_F = \langle \phi, {}^tL\psi \rangle_E$ для всех таких $\phi \in C^\infty(M, E)$ и $\psi \in C^\infty(M, F^\bullet)$, что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ – компакт. Единственность tL очевидна. Также существование тривиально доказывается в случае, когда M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а E и F тривиальны. Для доказательства существования в общем случае достаточно склеить (в смысле теории пучков) транспонированные операторы к ограничениям L на карты, над которыми E и F тривиальны.

Существование транспонированного оператора позволяет определить действие дифференциальных операторов на обобщённые сечения. Действительно, для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ существует единственный непрерывный оператор из $\mathcal{D}'(M, E)$ в $\mathcal{D}'(M, F)$, продолжающий действие L с пространства $C^\infty(M, E)$, и, кроме того, этот оператор совпадает с двойственным оператором к ${}^tL : \mathcal{D}(M, F^\bullet) \rightarrow \mathcal{D}(M, E^\bullet)$. Этот расширенный оператор мы также будем обозначать через L . Отметим, что $L(\mathcal{D}(M, E)) \subset \mathcal{D}(M, F)$, $L(C^\infty(M, E)) \subset C^\infty(M, F)$, $L(\mathcal{E}'(M, E)) \subset \mathcal{E}'(M, F)$, $L(H_{\text{loc}}^s(M, E)) \subset H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ и $L(H_c^s(M, E)) \subset H_c^{s-k}(M, F)$ для всех $s \in \mathbb{R}$; $L(H^s(K, M, E)) \subset H^{s-k}(K, M, E)$ для $s \in \mathbb{R}$ и компактных $K \subset M$. Во всех перечисленных включениях оператор L непрерывен по отношению к естественным топологиям на этих пространствах.

Пусть $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Обозначим *главный символ* оператора L через $\sigma_k(L)$, так что $\sigma_k(L)$ – это морфизм расслоений $\pi^*E \rightarrow \pi^*F$, где $\pi : T_0^*M \rightarrow M$ – каноническая проекция, T_0^*M – кокасательное расслоение над M без нулевого сечения, а π^* – обратный образ. Известно, что $\sigma_{k+m}(NL) = \sigma_m(N)\sigma_k(L)$ для произвольных $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ и $N \in \text{Diff}_m(M, F, G)$. Напомним, что оператор L называется *эллиптическим*, если $\sigma_k(L)$ – изоморфизм. Перейдём к вычислению главного символа оператора tL . Для начала заметим, что $\pi^*F^\bullet$ канонически изоморфно $(\pi^*F)^* \otimes \pi^*\text{Vol}_M$. Из прямого вычисления tL в картах легко показать, что $\sigma_k({}^tL)$ совпадает с $(-1)^k \sigma_k(L)^* \otimes \text{Id}_{\pi^*\text{Vol}_M}$, или, точнее, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^*F^\bullet & \xrightarrow{\sigma_k({}^tL)} & \pi^*E^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\pi^*F)^* \otimes \pi^*\text{Vol}_M & \xrightarrow{(-1)^k \sigma_k(L)^* \otimes \text{Id}_{\pi^*\text{Vol}_M}} & (\pi^*E)^* \otimes \pi^*\text{Vol}_M \end{array}$$

коммутативна, где вертикальные стрелки – упомянутые канонические изоморфизмы. Теперь очевидно, что сюръективность (соответственно инъективность) главного символа оператора L влечёт за собой инъективность (соответственно сюръективность) главного символа tL . В частности, из эллиптичности L следует эллиптичность оператора tL .

В дальнейшем будем пользоваться коммутативностью диаграмм

$$\begin{array}{ccccccc}
 (C^\infty(M, F))' & \xrightarrow{L'} & (C^\infty(M, E))' & & (\mathcal{D}(M, F))' & \xrightarrow{L'} & (\mathcal{D}(M, E))' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E}'(M, F^\bullet) & \xrightarrow{{}^tL} & \mathcal{E}'(M, E^\bullet) & & \mathcal{D}'(M, F^\bullet) & \xrightarrow{{}^tL} & \mathcal{D}'(M, E^\bullet)
 \end{array} \quad (1)$$

для произвольных векторных расслоений E и F и произвольного дифференциального оператора $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ (вертикальные стрелки в (1) – канонические изоморфизмы, индуцированные изоморфизмами расслоений $(E^\bullet)^\bullet \cong E$ и $(F^\bullet)^\bullet \cong F$).

Предположим, что зафиксирована всюду положительная плотность $\mu \in C^\infty(M, \text{Vol}_M)$ и эрмитовы структуры на расслоениях E и F . В этом случае понятие транспонированного оператора для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ может быть заменено понятием *сопряжённого оператора*. Говоря точнее, определим $\langle \phi, \psi \rangle_{E, \mu} = \int (\phi, \psi)_E \mu$, где ϕ и ψ – такие непрерывные сечения E , что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ компактно, а $(\phi, \psi)_E$ – поточечное скалярное произведение. Тогда сопряжённый оператор L^* к оператору $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ определяется как единственный оператор из $\text{Diff}_k(M, F, E)$, удовлетворяющий условию $\langle L\phi, \psi \rangle_{F, \mu} = \langle \phi, L^*\psi \rangle_{E, \mu}$ для всех таких $\phi \in C^\infty(M, E)$ и $\psi \in C^\infty(M, F)$, что $\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi \subset M$ компактно. Очевидно, имеется тесная связь между операторами tL и L^* . Именно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(M, F^\bullet) & \xrightarrow{{}^tL} & C^\infty(M, E^\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C^\infty(M, F) & \xrightarrow{L^*} & C^\infty(M, E)
 \end{array} \quad (2)$$

коммутативна (вертикальные стрелки индуцированы каноническими сопряжённо-линейными изоморфизмами $E^\bullet \cong E$ и $F^\bullet \cong F$, порождаемыми эрмитовыми структурами и тривиализацией Vol_M сечением μ). Наконец отметим, что $\sigma_k(L^*) = (-1)^k \sigma_k(L)^* : \pi^*F \rightarrow \pi^*E$ (здесь сопряжённый морфизм к $\sigma_k(L)$ понимается в смысле канонических эрмитовых структур на π^*E и π^*F , индуцированных эрмитовыми структурами на E и F соответственно).

Оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ называется *гипоэллиптическим*, если из условий $\phi \in \mathcal{D}'(U, E)$ и $L\phi \in C^\infty(U, F)$ следует, что $\phi \in C^\infty(U, E)$ для произвольного открытого $U \subset M$. В дальнейшем нам понадобятся более тонкие условия регулярности для оператора L . Будем говорить, что оператор L является *r -гипоэллиптическим* для $r \in \mathbb{R}$, если условия $\phi \in \mathcal{D}'(U, E)$ и $L\phi \in H_{\text{loc}}^{s+r}(U, F)$ влекут $\phi \in H_{\text{loc}}^{s+r}(U, E)$ на произвольном открытом $U \subset M$. Очевидно, что r -гипоэллиптичность (для некоторого $r \in \mathbb{R}$) влечёт за собой гипоэллиптичность. Напомним теорему регулярности для эллиптических операторов, утверждающую, что эллиптический оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ является k -гипоэллиптическим (для доказательства достаточно заметить, что r -гипоэллиптичность – локальное свойство, а потому теорему достаточно доказать для открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, см., например, [13, следствие 7.20]). Наконец, отметим, что оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$, главный символ которого инъективен, также является k -гипоэллиптическим. Действительно, зафиксируем положительную плотность на M и эрмитовы структуры на E и F и рассмотрим оператор $N = L^*L$. Этот оператор эллиптивен и имеет порядок $2k$, так что он $2k$ -гипоэллиптический. Значит, если $L\phi \in H^s(U, F)$, то $L^*L\phi \in H^{s-k}(U, E)$, откуда $\phi \in H^{s+k}(M, E)$.

2. Основные теоремы о замкнутости образа.

Лемма 1 (ср. с теоремой 1.3 из [1]). Пусть T_1 и T_2 – пространства Фреше, а $u : T_1 \rightarrow T_2$ – непрерывный линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $u(T_1)$ замкнуто в T_2 ;
- (ii) для любого равномерно непрерывного $A \subset T_1'$ найдётся такое равномерно непрерывное $B \subset T_2'$, что $A \cap u'(T_2') \subset u'(B)$;
- (iii) для любого равномерно непрерывного $A \subset T_1'$ найдётся такое подпространство $R \subset T_2$, что $(u')^{-1}(A) \subset R^\circ$, и для всех $y \in \overline{u(T_1)}$ найдётся такое $x \in T_1$, что $u(x) - y \in R$.

Доказательство. Покажем сначала, что из (ii) следует утверждение (i). Достаточно доказать, что $u'(T'_2) \subset T'_1$ *-слабо замкнуто (см. [14, IV.7.7]). Поскольку пространства Фреше В-полны (см. [14, IV.8]), остаётся показать, что $A \cap u'(T'_2)$ *-слабо замкнуто в A для любого равномерно непрерывного $A \subset T'_1$. Пусть $B \subset T'_2$ равномерно непрерывно и $u'(B) \supset \supset A \cap u'(T'_2)$. Заметим, что $A \cap u'(T'_2) = A \cap u'(\overline{B})$, где замыкание понимается в *-слабой топологии. Действительно, раз $u'(\overline{B}) \subset u'(T'_2)$, имеем

$$A \cap u'(\overline{B}) \subset A \cap u'(T'_2).$$

С другой стороны, $A \cap u'(T'_2) \subset u'(B) \subset u'(\overline{B})$. Теперь, так как B равномерно непрерывно, а $\overline{B}$ *-слабо компактно, получаем, что $A \cap u'(\overline{B}) = A \cap u'(T'_2)$ *-слабо замкнуто в A .

Поскольку импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) очевидна (достаточно взять $R = \{0\}$), завершим доказательство, показав, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $A \subset T'_1$ равномерно непрерывно, а $R \subset T_2$ – линейное подпространство, удовлетворяющее условиям (iii) по отношению к A . Обозначим через $\theta : T'_2 \rightarrow (\overline{u(T_1)})'$ двойственный оператор к оператору вложения $\overline{u(T_1)} \rightarrow T_2$, а через $w : (\overline{u(T_1)})' \rightarrow T'_1$ – двойственный оператор к оператору $u : T_1 \rightarrow \overline{u(T_1)}$, так что $w\theta = u'$. Утверждаем, что множество $\theta((u')^{-1}(A))$ равномерно непрерывно как подмножество в $(\overline{u(T_1)})'$. Достаточно проверить, что оно *-слабо ограничено, так как пространство $\overline{u(T_1)}$ бочечно (см. [14, IV.5.2]). Рассмотрим $y \in \overline{u(T_1)}$ и возьмём такой $x \in T_1$, что $u(x) - y \in R$. Тогда для любого $g \in \theta((u')^{-1}(A))$ выполнено $g(y) = g(u(x)) = w'(g)(x)$, где $w'(g) \in A$, так как $w'(g) \in w(\theta((u')^{-1}(A))) = u'((u')^{-1}(A)) \subset A$. Таким образом, множество $\{g(y) : g \in \theta((u')^{-1}(A))\} \subset \mathbb{C}$ ограничено для любого $y \in \overline{u(T_1)}$, что влечёт за собой *-слабую ограниченность $\theta((u')^{-1}(A))$. Значит, найдётся такая выпуклая закругленная окрестность нуля $U \subset T_2$, что $\theta((u')^{-1}(A)) \subset (U \cap \overline{u(T_1)})^\circ$. Из теоремы Хана–Банаха (см. [14, II.3.2]) следует, что $(U \cap \overline{u(T_1)})^\circ \subset \theta(U^\circ)$. Наконец,

$$u'(U^\circ) = w(\theta(U^\circ)) \supset w(\theta((u')^{-1}(A))) = u'((u')^{-1}(A)) = A \cap u'(T'_2).$$

Таким образом, утверждение (ii) доказано. Лемма доказана.

Определение 1. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Будем говорить, что M является L -выпуклым, если для любого компакта $K \subset M$ и любого $s \in \mathbb{R}$ найдётся такой компакт $K' \subset M$, что условия $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$ и ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$ влекут $\text{supp } \phi \subset K'$.

Определение 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Оператор L называется *полуглобально нормально разрешимым*, если для любого относительно компактного открытого $U \subset M$ и любого $\phi \in \overline{L(C^\infty(M, E))}$ найдётся такое $\psi \in C^\infty(M, E)$, что $L\psi$ совпадает с ϕ на U . Если описанное выше условие выполняется для произвольного $\phi \in C^\infty(M, F)$, то оператор L называется *полуглобально разрешимым*.

В доказательстве следующей теоремы будем неоднократно использовать первую диаграмму из (1), чтобы заменить двойственный оператор на транспонированный и применить лемму 1.

Теорема 1. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$;
- (ii) для любого $s \in \mathbb{R}$ и любого компакта $K \subset M$ найдутся такие $t \in \mathbb{R}$ и компакт $K' \subset M$, что выполнены условия:
 - a) если $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$ и ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$, то $\phi \in H^t(K', M, F^\bullet)$,
 - b) если $U \subset H^t(K', M, F^\bullet)$ – окрестность нуля, то множество ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ является окрестностью нуля в ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ по отношению к топологии, индуцированной из пространства $H^s(K, M, E^\bullet)$;
- (iii) многообразие M является L -выпуклым, а оператор L полуглобально нормально разрешим.

Доказательство. Докажем, что из (i) следует утверждение (ii). Рассмотрим произвольное $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$. Пусть V – ограниченная окрестность нуля в $H^s(K, M, E^\bullet)$.

Поскольку V равностепенно непрерывное подмножество в $\mathcal{E}'(M, E^\bullet)$, из леммы 1 вытекает, что найдётся такое равностепенно непрерывное множество $B \subset \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$, что

$$V \cap {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \subset {}^tL(B).$$

Пусть $t \in \mathbb{R}$ и компакт $K' \subset M$ выбраны так, что B содержится и ограничено в $H^t(K', M, F^\bullet)$ (см. предложение 1 (iii)). Очевидно, что t и K' удовлетворяют условию а) из (ii), поскольку V поглощает каждую точку пространства $H^s(K, M, E^\bullet)$. Наконец, пусть $U \subset H^t(K', M, F^\bullet)$ – окрестность нуля. Тогда U поглощает B , а значит, ${}^tL(U)$ поглощает $V \cap {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet))$. Таким образом, множество ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ поглощает окрестность нуля в пространстве ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$, откуда следует, что оно само является окрестностью нуля.

Покажем, что из (ii) следует утверждение (i). Пусть $A \subset \mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ равностепенно непрерывно. Рассмотрим такие $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$, что A содержится и ограничено в $H^s(K, M, E^\bullet)$. Пусть t и K' удовлетворяют условиям а) и б) из (ii). Выберем ограниченную окрестность нуля $U \subset H^t(K, M, F^\bullet)$, так что ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ – окрестность нуля в ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$. Поскольку A ограничено, ${}^tL(U)$ поглощает ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap A$. Значит, найдётся такая постоянная $C > 0$, что $A \cap {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \subset {}^tL(CU)$. Поскольку U ограничено в $H^t(K, M, F^\bullet)$, множество CU равностепенно непрерывно в $\mathcal{E}'(M, F^\bullet)$. Таким образом, оператор L удовлетворяет условиям (ii) леммы 1, что доказывает замкнутость образа оператора L .

Импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) очевидна (заметим, что L -выпуклость следует из условия а) в (ii)), так что остаётся доказать импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Рассмотрим равностепенно непрерывное $A \subset \mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ и выберем такие $s \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset M$, что $A \subset H^s(K, M, E^\bullet)$. Пусть $K' \subset \subset M$ – такой компакт, что $\text{supp } \phi \subset K'$ для всех таких $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$, что ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$. Наконец, пусть $U \subset M$ – произвольное относительно компактное открытое множество, содержащее K' . Мы утверждаем, что линейное пространство $R = \{\phi \in C^\infty(M, F) : \phi|_U = 0\}$ удовлетворяет условию (iii) леммы 1 для A . Действительно, если ${}^tL(\phi) \in A$, то $\text{supp } \phi \subset K'$ и $\phi \in R^\circ$. Второе условие на R (iii) из леммы 1 является прямым следствием полуглобальной нормальной разрешимости L . Так что утверждение (i) вытекает из леммы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$ тогда и только тогда, когда многообразие M является L -выпуклым, а оператор L полуглобально разрешим.

Обычно полуглобальную (нормальную) разрешимость достаточно трудно проверить для данного оператора (исключение составляют операторы с постоянными коэффициентами на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$, для которых полуглобальная разрешимость вытекает из теоремы Мальгранжа–Эренпрейса, см. [2, теорема 7.3.10]). Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться условием (iii) из теоремы 1, а сосредоточим внимание на условии (ii).

Упростим условия теоремы 1 для операторов, удовлетворяющих условиям регулярности (а именно, для операторов с r -гипоэллиптическим транспонированным). Пусть оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ гипоэллиптичен. Тогда для компакта $K \subset M$ введём обозначение $\ker_K L$ для пространства таких $\phi \in \mathcal{D}'(M, E)$, что $L\phi = 0$ и $\text{supp } \phi \subset K$. Гипоэллиптичность L влечёт за собой гладкость сечений из $\ker_K L$. Отметим, что $\ker_K L$ – замкнутое подпространство в $H^s(K, M, E)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M , а $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ r -гипоэллиптичен. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) пусть $K \subset M$ компактен, а s и t – такие вещественные числа, что $t < s + r$, пространство $T(t, s, K) = \{\phi \in H^t(K, M, E) : L\phi \in H^s(K, M, F)\}$ полно и нормируемо относительно проективной топологии, порождённой оператором вложения $T(t, s, K) \rightarrow H^t(K, M, E)$ и оператором $L : T(t, s, K) \rightarrow H^s(K, M, F)$;

(ii) пусть K , s , t такие же как в (i), тогда $T(t, s, K) \subset H^{s+r}(K, M, E)$ и оператор вложения непрерывен;

(iii) если $K \subset M$ компактен, $s \in \mathbb{R}$, а $\phi_n \in H^{s+r}(K, M, E)$ – такая последовательность, что $L\phi_n$ лежит в $H^s(K, M, F)$ и сходится там к нулю, то канонический образ ϕ_n в пространстве $H^{s+r}(K, M, E)/\ker_K L$ сходится к нулю (относительно фактор-топологии).

Доказательство. Пространство $T(t, s, K)$, очевидно, хаусдорфово, так как оператор вложения $T(t, s, K) \rightarrow H^t(K, M, E)$ инъективен и пространство $H^t(K, M, E)$ хаусдорфово. Пространство $T(t, s, K)$ также нормируемо, поскольку его топология проективна по отношению к конечному набору операторов в нормируемые пространства. Остаётся показать, что $T(t, s, K)$ полно. Пусть $\phi_n \in T(t, s, K)$ – последовательность Коши. Тогда ϕ_n и $L\phi_n$ – последовательности Коши в пространствах $H^t(K, M, E)$ и $H^s(K, M, F)$ соответственно, а значит, они сходятся там к $\phi \in H^t(K, M, E)$ и $\psi \in H^s(K, M, F)$ соответственно. Легко показать, что $L\phi = \psi$, так как оператор $L : \mathcal{E}'(M, E) \rightarrow \mathcal{E}'(M, F)$ непрерывен, а сходимости $\phi_n \rightarrow \phi$, $L\phi_n \rightarrow \psi$ имеют место в пространствах обобщённых сечений с компактным носителем. Значит, $\phi \in T(t, s, K)$ и очевидно, что $\phi_n \rightarrow \phi$ в топологии пространства $T(t, s, K)$. Таким образом, $T(t, s, K)$ полно и утверждение (i) доказано.

Вложение $T(t, s, K) \subset H^{s+r}(K, M, E)$ следует из r -гипоэллиптичности оператора L . Непрерывность оператора вложения элементарно следует из теоремы о замкнутом графике [14, теорема IV.8.5]. Таким образом, доказали (ii).

Зафиксируем $s \in \mathbb{R}$, обозначим через P пространство $H^{s+r}(K, M, E)/\ker_K L$, и пусть θ обозначает фактор-отображение из $H^{s+r}(K, M, E)$ в P . Заметим, что пространство P нормируемо, а значит, там есть ограниченная окрестность U нуля. Предположим, что утверждение (iii) не выполнено. Тогда найдётся такая последовательность $\psi_n \in H^{s+r}(K, M, E)$, что $\theta(\psi_n) \in P$ не сходится к нулю, а $L\psi_n$ лежит в $H^s(K, M, F)$ и сходится там к нулю. Очевидно, что можно найти такое число $\varepsilon > 0$, что некоторая подпоследовательность последовательности $\theta(\psi_n)$ лежит целиком вне εU . Не ограничивая общности, можем считать, что $\theta(\psi_n) \notin \varepsilon U$ для всех $n \in \mathbb{N}$, переходя к этой подпоследовательности. Наконец, найдутся такие числа $C_n > \varepsilon$, что $\theta(\psi_n)/C_n \in 2U \setminus U$. Получаем, что последовательность $\phi_n = \psi_n/C_n$ обладает следующими свойствами: $L\phi_n$ лежит в $H^s(K, M, F)$ и сходится там к нулю, притом что $\theta(\phi_n)$ – ограниченная последовательность в P , лежащая за пределами U . В частности, ни одна подпоследовательность в $\theta(\phi_n)$ не сходится к нулю в P . Поскольку $\theta(\phi_n)$ ограничена, а $H^s(K, M, E)$ нормируемо, найдётся такая ограниченная последовательность $\phi'_n \in H^s(K, M, E)$, что $\theta(\phi_n) = \theta(\phi'_n)$ для всех n . Пусть t – такое число, что $t < s + r$. Тогда найдётся подпоследовательность последовательности ϕ'_n , сходящаяся в $H^t(K, M, E)$ (см. предложение 1 (i)). Меняя обозначения, можем считать, что ϕ'_n сама сходится в $H^t(K, M, E)$ к некоторому элементу, который мы обозначим через ϕ . Поскольку последовательности ϕ'_n и $L\phi_n = L\phi'_n$ сходятся к ϕ и к нулю соответственно в топологии пространств $\mathcal{D}'$, а оператор $L : \mathcal{D}'(M, E) \rightarrow \mathcal{D}'(M, F)$ непрерывен, имеем

$$L\phi = \lim L\phi'_n = \lim L\phi_n = 0.$$

Таким образом, ϕ'_n сходится к ϕ в $H^t(K, M, E)$, а $L\phi'_n = L\phi_n$ сходится к $L\phi = 0$ в $H^s(K, M, F)$. По определению проективной топологии на $T(t, s, K)$ получаем, что ϕ'_n сходится к ϕ в этом пространстве. Отсюда, по утверждению (ii), сходимость имеет место в $H^{s+r}(K, M, E)$. Непрерывность оператора θ влечёт за собой

$$\theta(\phi_n) = \theta(\phi'_n) \rightarrow \theta(\phi) = 0,$$

так как $\phi \in \ker_K L$. Мы пришли к противоречию, поскольку $\theta(\phi_n)$ содержится в $P \setminus U$, где U – окрестность нуля. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Если оператор tL r -гипоэллиптичен для некоторого $r \in \mathbb{R}$, а многообразие M L -выпукло, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$.

Доказательство. Покажем, что L удовлетворяет условию (ii) из теоремы 1. Пусть $K \subset M$ компактно, а $s \in \mathbb{R}$. Поскольку M является L -выпуклым, найдётся такой компакт $K' \subset M$, что условия $\phi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$ и ${}^tL\phi \in H^s(K, M, E^\bullet)$ влекут $\text{supp } \phi \subset K'$. Отсюда очевидно, что $t = r + s$ и K' удовлетворяют условию (ii), а) теоремы 1. Рассмотрим окрестность нуля $U \subset H^t(K', M, F^\bullet)$ и предположим, что ${}^tL(U) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$ не является окрестностью нуля в ${}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$. Тогда найдётся последовательность $\phi_n \in {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet)) \cap H^s(K, M, E^\bullet)$, сходящаяся к нулю и не лежащая в ${}^tL(U)$ для всех n .

Выберем произвольные $\psi_n \in H^t(K', M, F^\bullet)$ так, что ${}^tL\psi_n = \phi_n$ для всех n . Из леммы 2 (iii) следует, что образ ψ_n в пространстве $H^t(K', M, F^\bullet)/\ker_{{}^tL} L$ сходится к нулю. Значит, найдётся такое n , что $\psi_n \in U + \ker_{{}^tL} L$. Отсюда имеем

$$\phi_n = {}^tL\psi_n \in {}^tL(U + \ker_{{}^tL} L) = {}^tL(U).$$

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Стоит отметить, что компактное многообразие M L -выпукло для любого оператора L . Значит если tL r -гипоэллиптичен, то L имеет замкнутый образ, а предложение 1 (i) влечёт за собой конечномерность $\ker_M {}^tL$. Отсюда нетрудно вывести фредгольмовость таких операторов $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$, что L и tL оба r -гипоэллиптичны для некоторого $r \in \mathbb{R}$. По-видимому, более точной информации с помощью описанных выше методов в случае компактного многообразия получить невозможно. Изучение фредгольмовых дифференциальных операторов на компактных многообразиях (чаще всего эллиптических операторов) обычно основывается на методах алгебраической топологии и К-теории (детальное изложение см., например, в [15; 16, гл. 4, 5; 2, гл. 19, 20]).

3. Достаточное условие разрешимости в обобщённых сечениях. Далее покажем, что для гипоэллиптических операторов порядка k с k -гипоэллиптическим транспонированным оператором разрешимость в гладких сечениях влечёт за собой разрешимость в обобщённых сечениях. В частности, этот результат применим к эллиптическим операторам. Начнём со следующего простого результата о замкнутости образа в пространствах Соболева.

Предложение 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Предположим, что оператор tL k -гипоэллиптичен и пространство $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$. Тогда $L(H_{\text{loc}}^s(M, E))$ замкнуто в $H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку $H_{\text{loc}}^s(M, E)$ и $H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ являются пространствами Фреше, а L действует там непрерывно, достаточно показать, что двойственный оператор имеет $*$ -слабо замкнутый образ (см. [14, IV.7.7]). Ввиду предложения 1 (ii) очевидно, что двойственный оператор отождествляется с ${}^tL : H_c^{-s+k}(M, F^\bullet) \rightarrow H_c^{-s}(M, E^\bullet)$. Пусть ϕ лежит в замыкании пространства ${}^tL(H_c^{-s+k}(M, F^\bullet))$ в $*$ -слабой топологии на $H_c^{-s}(M, E^\bullet)$. Очевидно, что $\phi \in {}^tL(\mathcal{E}'(M, F^\bullet))$, так как последнее пространство $*$ -слабо замкнуто в $\mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ и вложение $H_c^{-s}(M, E^\bullet) \rightarrow \mathcal{E}'(M, E^\bullet)$ непрерывно в $*$ -слабых топологиях. Так что найдётся такое $\psi \in \mathcal{E}'(M, F^\bullet)$, что $\phi = {}^tL\psi$. Из k -гипоэллиптичности оператора tL следует, что $\psi \in H_c^{-s+k}(M, F^\bullet)$, откуда получается, что ${}^tL(H_c^{-s+k}(M, F^\bullet))$ $*$ -слабо замкнуто. Предложение доказано.

Следствие 2. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Предположим, что оператор tL k -гипоэллиптичен и $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$. Тогда $L(H_{\text{loc}}^s(M, E)) = H_{\text{loc}}^{s-k}(M, F)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Введём некоторые обозначения. Если M – многообразие, а E – векторное расслоение над M , то через $C^\infty(E)$ (соответственно $\mathcal{D}'(E)$) обозначаем пучок гладких (соответственно обобщённых) сечений E , т.е. пучок, который сопоставляет пространство $C^\infty(U, E)$ (соответственно $\mathcal{D}'(U, E)$) открытому множеству $U \subset M$ со стандартными операторами ограничения. Для $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ обозначим той же буквой L морфизмы пучков $L : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ и $L : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(F)$, заданные оператором L . Отметим, что описанные выше пучки тонкие, а значит, и мягкие (см. [16, предложение 3.5]).

Теорема 3. Пусть M – многообразие, E и F – векторные расслоения над M , а оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ гипоэллиптичен. Предположим, что tL k -гипоэллиптичен и $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$. Тогда $L(\mathcal{D}'(M, E)) = \mathcal{D}'(M, F)$.

Доказательство. Пусть $\ker L$ обозначает ядро морфизма пучков $L : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(F)$. Поскольку L гипоэллиптичен, очевидно, что $\ker L$ также является ядром морфизма $L : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$. Мы утверждаем, что морфизмы $L : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(F)$ и $L : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ являются эпиморфизмами (в смысле теории пучков). Действительно, эпиморфность L на пучках гладких сечений следует из сюръективности на глобальных сечениях и мягкости пучков. Эпиморфность морфизма на обобщённых сечениях вытекает из следствия 2, поскольку

L получается сюръективным на ростках обобщённых сечений в каждой точке многообразия M (каждое обобщённое сечение локально лежит в некотором пространстве Соболева). Таким образом, доказана точность последовательностей

$$0 \rightarrow \ker L \rightarrow C^\infty(E) \xrightarrow{L} C^\infty(F) \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \ker L \rightarrow \mathcal{D}'(E) \xrightarrow{L} \mathcal{D}'(F) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Первая из последовательностей в (3) приводит к длинной точной последовательности (см. [16, теорема II.3.11 (c)])

$$0 \rightarrow \ker L(M) \rightarrow C^\infty(M, E) \xrightarrow{L} C^\infty(M, F) \rightarrow H^1(\ker L) \rightarrow H^1(C^\infty(E)) \rightarrow \dots,$$

где оператор $L : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ сюръективен, а $H^1(C^\infty(E)) = 0$ (так как $C^\infty(E)$ мягкий, см. [16, теорема II.3.11 (a)]). Таким образом, $H^1(\ker L) = 0$. Наконец, вторая точная последовательность в (3) приводит к точности последовательности

$$0 \rightarrow \ker L(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M, E) \xrightarrow{L} \mathcal{D}'(M, F) \rightarrow H^1(\ker L) = 0,$$

что доказывает сюръективность оператора $L : \mathcal{D}'(M, E) \rightarrow \mathcal{D}'(M, F)$. Теорема доказана.

4. Роль свойства единственности продолжения решений.

Определение 3. Пусть M – многообразие, а E и F – векторные расслоения над M . Дифференциальный оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ удовлетворяет свойству единственности продолжения решений, если для любого связного открытого множества $U \subset M$ и условий $L\phi = 0$ и $\text{supp } \phi \neq U$ следует, что $\phi = 0$ для $\phi \in C^\infty(U, E)$.

Отметим, что свойство единственности продолжения решений является локальным. Говоря точнее, если $\mathcal{U}$ это открытое покрытие M и ограничение L на каждый элемент $\mathcal{U}$ удовлетворяет этому свойству, то L удовлетворяет ему на многообразии M . Благодаря локальности мы можем применять известные результаты о единственности продолжения для операторов на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$ (таких как в [19] или [2, § 17.2]) к операторам на произвольных многообразиях.

Напомним, что топологическое пространство X называется *локально связным*, если для любого $x \in X$ найдётся базис связных окрестностей точки x . *Компонентой* пространства X называется непустое связное открыто-замкнутое подмножество X . Две различные компоненты пространства X не могут пересекаться. В дальнейшем будем использовать следующие свойства локально связных пространств: открытое подмножество локально связного пространства само локально связно, локально связное пространство совпадает с объединением своих компонент (см., например, [20, гл. 3]). Следующая лемма была доказана в работе [10], но для полноты изложения мы приведём её доказательство здесь.

Лемма 3. Пусть X – связное, локально связное, локально компактное, хаусдорфово топологическое пространство. Тогда если $K \subset X$ компактно, то объединение K и всех относительно компактных компонент пространства $X \setminus K$ является компактным подмножеством в X .

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ обозначает множество всех компонент пространства $X \setminus K$. Пусть $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ – подмножество относительно компактных элементов в $\mathcal{V}$. Рассмотрим произвольное относительно компактное открытое множество U , содержащее K . Поскольку $\partial U = \overline{U} \setminus U$ компактно, а $\mathcal{V}$ – дизъюнктное открытое покрытие ∂U , получаем, что ∂U пересекает только конечное число элементов $\mathcal{V}$ и, в частности, $\mathcal{V}_0$. Мы утверждаем, что если $V \in \mathcal{V}$ и $V \cap \partial U = \emptyset$, то $V \subset U$. Действительно, если $V \cap \partial U = \emptyset$, то $V = (V \cap U) \cup (V \setminus \overline{U})$. Так как V связно, то либо $V \cap U = \emptyset$, либо $V \setminus \overline{U} = \emptyset$. Значит, остаётся понять, что $V \cap U \neq \emptyset$. Заметим, что если $V \cap U = \emptyset$, то V замкнуто в X , поскольку $\overline{V} \cap K = \emptyset$. Но, кроме того, V открыто в X , что противоречит связности X . Значит, если $V \in \mathcal{V}$ и $V \cap \partial U = \emptyset$, то $V \subset U$. Таким образом, объединение K' множества K и всех элементов $\mathcal{V}_0$ содержится в объединении U и тех элементов $\mathcal{V}_0$, что пересекают ∂U . Следовательно, K' относительно компактно. Остаётся заметить, что K' замкнуто, так как $X \setminus K' = \bigcup_{V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0} V$ открыто. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть M – связное некомпактное многообразие, E и F – векторные расслоения над M , а $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ гипоеллиптичен. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) если имеет место свойство единственности продолжения решений оператора L , то $L : \mathcal{E}'(M, E) \rightarrow \mathcal{E}'(M, F)$ инъективен;

(ii) предположим, что L удовлетворяет свойству единственности продолжения решений вне компакта $Q \subset M$ и пусть $K \subset M$ – компакт, тогда условия $\phi \in \mathcal{E}'(M, E)$ и $\text{supp } L\phi \subset K$ влекут $\text{supp } \phi \subset K'$, где K' – объединение $K \cup Q$ и всех относительно компактных компонент пространства $M \setminus (K \cup Q)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (i) рассмотрим такое $\phi \in \mathcal{E}'(M, E)$, что $L\phi = 0$. Гипоеллиптичность L влечёт за собой $\phi \in C^\infty(M, E)$. Раз M связно и $\text{supp } \phi \neq M$, из свойства единственности продолжения решений следует, что $\phi = 0$.

Теперь докажем (ii). Пусть U – компонента $M \setminus (K \cup Q)$, не являющаяся относительно компактной. Поскольку $L\phi = 0$ всюду на U , из гипоеллиптичности следует, что $\phi \in C^\infty(U, E)$. Поскольку ϕ имеет компактный носитель и U не является относительно компактным, получаем, что $\phi = 0$ всюду на U из свойства единственности продолжения решений. Таким образом, $\text{supp } \phi \subset K'$. Лемма доказана.

Прямым следствием лемм 3 и 4, а также теоремы 2 является

Теорема 4. Пусть M – связное некомпактное многообразие, E и F – векторные расслоения над M и $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$. Предположим, что оператор tL r -гипоеллиптичен для некоторого $r \in \mathbb{R}$. Если tL удовлетворяет свойству единственности продолжения решений вне некоторого компакта, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$. Если tL удовлетворяет свойству единственности продолжения решений всюду на M , то $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$.

5. Примеры и приложения.

5.1. Операторы с аналитическими коэффициентами. На протяжении этого пункта будем использовать слово “аналитический” как синоним термина “вещественно аналитический”. В качестве источника по теории аналитических многообразий мы следуем книге [21].

Пусть M – аналитическое многообразие, а E и F – аналитические векторные расслоения над M . Определим подпространство $\text{Diff}_k^A(M, E, F) \subset \text{Diff}_k(M, E, F)$, состоящее из операторов с аналитическими коэффициентами. Отметим, что расслоение Vol_M также аналитично, и если $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$, то ${}^tL \in \text{Diff}_k^A(M, F^\bullet, E^\bullet)$ (это можно проверить прямым вычислением в картах). Будем использовать очевидное следствие из теоремы Петровского (см. [22]), а именно, если $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$ эллиптичен, $\phi \in \mathcal{D}'(M, E)$ и $L\phi = 0$, то ϕ – аналитическое сечение E . Отметим, что данное утверждение элементарно распространяется на операторы с аналитическими коэффициентами и инъективным главным символом. Как следствие, получаем свойство единственности продолжения решений для таких операторов.

Предложение 3. Пусть M – некомпактное связное аналитическое многообразие, E и F – аналитические векторные расслоения над M , а оператор $L \in \text{Diff}_k(M, E, F)$ имеет сюръективный главный символ. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) если L имеет аналитические коэффициенты за пределами компактного множества, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$;

(ii) если $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$, то $L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F)$;

(iii) если L эллиптичен и $L \in \text{Diff}_k^A(M, E, F)$, то $L(\mathcal{D}'(M, E)) = \mathcal{D}'(M, F)$.

Доказательство. Действительно, tL имеет инъективный главный символ, а потому он k -гипоеллиптичен, а также удовлетворяет свойству единственности продолжения решений всюду, где его коэффициенты аналитичны. Таким образом, все утверждения следуют из теорем 4 и 3. Предложение доказано.

Можно применить предложение 3 к оператору Коши–Римана

$$\bar{\partial}_{q,p}^E \in \text{Diff}_1^A(M, E \otimes \Lambda^{q,p} T^*M, E \otimes \Lambda^{q,p+1} T^*M),$$

где M – комплексно-аналитическое многообразие, а E – голоморфное векторное расслоение над M (определения см. в [16, § II.3]). Отметим, что при $p = \dim_{\mathbb{C}} M - 1$ этот оператор имеет

сюръективный символ (см. [16, пример IV.2.7]). Таким образом, мы можем доказать обнуление старшей группы когомологий Дольбо на связном некомпактном комплексно-аналитическом многообразии.

Следствие 3. Пусть M – некомпактное связное комплексно-аналитическое многообразие, а E – голоморфное векторное расслоение над M . Тогда группа когомологий Дольбо $H^{q,n}(M, E)$ равна нулю при $q \geq 0$ и $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Частные случаи следствия 3 имеют полезные применения. В качестве примера можно привести простое доказательство классической теоремы Бенке–Штейна [23, § 26] о том, что некомпактные римановы поверхности являются многообразиями Штейна. Действительно, если X – некомпактная риманова поверхность, то по следствию 3 $H^{0,1}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, откуда элементарно выводятся теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Лёффлера для X (см. [23, § 26]). После этих замечаний завершение доказательства теоремы Бенке–Штейна не представляет труда. Кроме того, тривиальность группы $H^n(U, \mathcal{O})$ для открытого $U \subset \mathbb{C}^n$ использовалась в статье [24] для анализа скорости аппроксимации аналитических функций полиномами.

5.2. Эллиптические операторы второго порядка с вещественной главной частью на линейных расслоениях. Пусть M – многообразие, а E – вещественное векторное расслоение над M . Тогда на сечениях комплексификации $\mathbb{C}E = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ канонически определены операции взятия вещественной и мнимой частей, а также сопряжение. Морфизм $u : \mathbb{C}E \rightarrow \mathbb{C}F$ называется *вещественным*, если $u(\bar{\phi}) = \overline{u(\phi)}$ для любого сечения ϕ из E (или, что эквивалентно, u является комплексификацией морфизма вещественных расслоений $E \rightarrow F$). Более обобщённо, оператор $L \in \text{Diff}_k(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ имеет *вещественные коэффициенты*, если оператор $L\bar{\phi} = \overline{L\phi}$ для всех $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C}E)$. Легко проверить, что данное определение эквивалентно тому, что L имеет вещественные коэффициенты в каждой карте, над которой E и F тривиализуются. Мы также будем говорить, что $L \in \text{Diff}_k(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ имеет *вещественную главную часть*, если главный символ $\sigma_k(L) : \pi^*\mathbb{C}E \rightarrow \pi^*\mathbb{C}F$ является вещественным морфизмом. Очевидно, что оператор с вещественными коэффициентами имеет вещественную главную часть. Также отметим, что если L имеет вещественные коэффициенты (или вещественную главную часть), то tL обладает тем же свойством (тут важно уточнить, что расслоение плотностей есть комплексификация расслоения вещественных плотностей $\text{Vol}_M^{\mathbb{R}}$, а значит $(\mathbb{C}E)^{\bullet}$ является комплексификацией расслоения $E^* \otimes_{\mathbb{R}} \text{Vol}_M^{\mathbb{R}}$).

Для скалярных эллиптических операторов с вещественной главной частью на открытых подмножествах в пространстве $\mathbb{R}^n$ известно свойство единственности продолжения решений (см., например, [19] или [2, теорема 17.2.6]). Отсюда получаем, что эллиптический оператор $L \in \text{Diff}_2(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ с вещественной главной частью удовлетворяет свойству единственности продолжения решений, если E и F одномерны (иначе говоря, являются линейными расслоениями). Поскольку tL наследует все необходимые свойства от оператора L , получаем следующий факт.

Предложение 4. Пусть M – связное некомпактное многообразие, E и F – вещественные линейные расслоения над M , $L \in \text{Diff}_2(M, \mathbb{C}E, \mathbb{C}F)$ – эллиптический оператор. Если L имеет вещественную главную часть за пределами некоторого компакта, то $L(C^\infty(M, E))$ замкнуто в $C^\infty(M, F)$. Если L всюду имеет вещественную главную часть, то

$$L(C^\infty(M, E)) = C^\infty(M, F) \quad \text{и} \quad L(\mathcal{D}'(M, E)) = \mathcal{D}'(M, F).$$

5.3. Оператор Ходжа–Лапласа–де Рама. Пусть M – риманово многообразие. Риманова метрика определяет положительную плотность на M . Пусть Ω_M^p обозначает векторное расслоение $\mathbb{S}L^p(T^*M)$, так что сечения Ω_M^p являются комплекснозначными p -формами на M (для удобства мы считаем Ω_M^p нулевым расслоением, если $p < 0$ или $p > \dim M$). Риманова метрика на M индуцирует эрмитову структуру на Ω_M^p . Через $d_p \in \text{Diff}_1(M, \Omega_M^p, \Omega_M^{p+1})$ обозначим дифференциал де Рама (для $p < 0$ или $p \geq n$ положим $d_p = 0$) и пусть $\delta_p = d_p^* \in \text{Diff}_1(M, \Omega_M^{p+1}, \Omega_M^p)$. Оператором Ходжа–Лапласа–де Рама будем называть эллиптический оператор $\Delta_p \in \text{Diff}_2(M, \Omega_M^p, \Omega_M^p)$, равный по определению $-(\delta_p d_p + d_{p-1} \delta_{p-1})$. В работе [16, пример IV.5.4] можно найти доказательство эллиптичности оператора Δ_p . В [19, с. 248] было показано, что Δ_p удовлетворяет условию единственности продолжения решений.

Предложение 5. Пусть M – связное некомпактное риманово многообразие. В этом случае $\Delta_p(C^\infty(M, \Omega_M^p)) = C^\infty(M, \Omega_M^p)$ и $\Delta_p(\mathcal{D}'(M, \Omega_M^p)) = \mathcal{D}'(M, \Omega_M^p)$.

Доказательство. По теореме 4 достаточно показать, что ${}^t\Delta_p$ удовлетворяет условию единственности продолжения решений. Ввиду того что $\Delta_p^* = \Delta_p$, это нетрудно вывести из (2) и свойства единственности продолжения решений оператора Δ_p . Предложение доказано.

Из предложения 5 выведем существование разложения Гельмгольца и обнуление старшей группы когомологий де Рама.

Следствие 4. Пусть M – связное некомпактное риманово многообразие. Тогда для любого $\omega \in C^\infty(M, \Omega_M^p)$ найдутся такие $\phi \in C^\infty(M, \Omega_M^{p-1})$ и $\psi \in C^\infty(M, \Omega_M^{p+1})$, что $\omega = \delta_p\phi + d_{p-1}\psi$. То же утверждение верно, если заменить гладкие сечения на обобщённые. Наконец, если ω – вещественнозначное сечение, то ϕ и ψ можно выбрать такими же.

Доказательство. Пусть $\omega' \in C^\infty(M, \Omega_M^p)$ удовлетворяет равенству $\Delta_p\omega' = \omega$. Тогда $\omega = \delta_p\phi + d_{p-1}\psi$, где $\phi = -d_p\omega'$ и $\psi = -\delta_{p-1}\omega'$. Для случая обобщённых сечений доказательство аналогично. Если же ω вещественнозначно, то, поскольку Δ_k , d_k и δ_k имеют вещественные коэффициенты, мы можем заменить ω' на $\text{Re}(\omega')$, так что ϕ и ψ тоже вещественнозначны. Следствие доказано.

Следствие 5. Пусть M – связное некомпактное многообразие. Тогда группа когомологий де Рама $H_{\text{dR}}^n(M)$ равна нулю при $n = \dim M$.

Доказательство. Пусть $\omega \in C^\infty(M, \Omega_M^n)$ – вещественнозначная форма. Выберем произвольную риманову метрику на M и применим следствие 4. Получаем существование такой вещественнозначной формы $\psi \in C^\infty(M, \Omega_M^{n-1})$, что $\omega = d_{n-1}\psi$. Таким образом, ω – точная форма, а значит, $H_{\text{dR}}^n(M) = 0$. Следствие доказано.

Отметим, что следствие 5 можно установить, не обращаясь к вопросам разрешимости уравнений в частных производных (см., например, [25, теоремы 17.32, 17.34]).

Автор благодарит центр дополнительного профессионального образования “Университет Сириус” за приглашение на образовательный модуль “Матричные методы и моделирование в науках о жизни и Земле” в 2022 г., в ходе которого были получены некоторые из результатов данной статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sagrалoff B.* Normal solvability of linear partial differential operators in $C^\infty(\Omega)$ // Geometrical Approaches to Differential Equations. Lect. Not. in Math. 2006. V. 810. P. 290–305.
2. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. М., 1986.
3. *Duistermaat J.J., Hörmander L.* Fourier integral operators. II // Acta Math. 1972. V. 128. № 3–4. P. 183–269.
4. *Hörmander L.* Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo)differential operators of principal type // Ann. of Math. 1978. V. 108 (3). № 2. P. 569–609.
5. *Hounie J.* A note on global solvability of vector fields // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 94. № 1. P. 61–64.
6. *Rauch J., Wigner D.* Global solvability of the Casimir operator // Ann. of Math. 1976. V. 103. № 2. P. 229–236.
7. *Helgason S.* Solvability of invariant differential operators on homogeneous manifolds // Centro Internaz. Mat. Estivo. 1975. P. 281–310.
8. *Araújo G.* Regularity and solvability of linear differential operators in Gevrey spaces // Math. Nachr. 2018. V. 291. № 5–6. P. 729–758.
9. *Bunke U., Olbrich M.* Gamma-cohomology and the Selberg zeta function // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 467. P. 199–219.
10. *Rinehart L.* Elliptic operators on non-compact manifolds have closed range // <https://arxiv.org/abs/2203.07534>.
11. *Kazdan J.L.* Unique continuation in geometry // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. № 5. P. 667–681.
12. *Grosser M., Kunzinger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R.* Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity. Dordrecht, 2001.

13. *Grubb G.* Distributions and Operators. New York, 2009.
14. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. М., 1971.
15. *Palais R.S.* Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem. Princeton, 1965.
16. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М., 1976.
17. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М., 2005.
18. *Antonić N., Burazin K.* On certain properties of spaces of locally Sobolev functions // Proc. of the Conf. on Appl. Math. and Sci. Comp. Dordrecht, 2005. P. 109–120.
19. *Aronszajn N.* A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order // J. Math. Pures. Appl. 1957. V. 36. № 9. P. 235–249.
20. *Munkres J.R.* Topology. Upper Saddle River, 2000.
21. *Kriegl A., Michor P.W.* The Convenient Setting of Global Analysis. Providence, 1997.
22. *Petrowsky I.G.* Sur l’analyticité des solutions des systèmes d’équations différentielles // Rec. Math. N. S. 1939. V. 5. № 47. P. 3–70.
23. *Форстер О.* Римановы поверхности. М., 1980.
24. *Smirnov M.* On the rate of polynomial approximations of holomorphic functions on convex compact sets // Complex Anal. Oper. Theory. 2023. V. 17. Art. 129.
25. *Lee J.M.* Introduction to Smooth Manifolds. Graduate Texts in Math. V. 218. New York, 2013.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.
После доработки 03.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.957

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА
В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. А. Б. Хасанов, Т. Г. Хасанов

К нахождению решения задачи Коши для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций применён метод обратной спектральной задачи. Предложены простой алгоритм построения уравнения Кортевега–де Фриза высокого порядка с нагруженными членами и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, действительно удовлетворяет нагруженному нелинейному уравнению Кортевега–де Фриза. Кроме того, доказано, что если начальная функция является действительной π -периодической аналитической функцией, то и решение задачи Коши тоже является действительной аналитической функцией по переменной x , а также что если число π/n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, является периодом начальной функции, то число π/n является периодом для решения задачи Коши по переменной x .

DOI: 10.31857/S0374064123120075, EDN: NVRNLU

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для нагруженного нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x, \quad (1)$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2)$$

в классе бесконечнозонных π -периодических по x функций

$$q(x + \pi, t) = q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

В уравнении (1) коэффициенты $a(t), b(t) \in C[0, \infty)$ – ограниченные действительные функции, а $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма построения решения $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3) в рамках метода обратной спектральной задачи для оператора Хилла

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Метод обратной задачи берёт своё начало с работы [1], в которой удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

сведением её к обратной задаче рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad |q(x)|(1 + |x|) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в статье [2], а затем рассматривалась в работах [3, 4] и др. В статье [5] отмечена универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщено уравнение КдФ с помощью введённого понятия высшего уравнения КдФ.

С помощью МОЗР для оператора Хилла, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакунов, в работах [6, 7] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ

в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3, 4, 8, 9].

Отметим, что в задаче

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x, 0) = 2a \cos(2x), \quad a \neq 0,$$

нам не удалось найти для решения $q(x, t)$ аналог формулы Итса–Матвеева [6].

Известно [10], что если $q(x) = 2a \cos(2x)$, $a \neq 0$, то открыты все лакуны в спектре оператора Хилла $Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y$, $x \in \mathbb{R}$, иначе говоря, $q(x)$ – бесконечнозонный π -периодический потенциал. В связи с этим мы изучаем задачу Коши (1)–(3) в классе периодических бесконечнозонных функций. К данной задаче можно применить метод из статьи [11], при этом её решение получится в виде равномерно сходящегося функционального ряда. Следует отметить, что решения в классе периодических функций для нелинейных эволюционных уравнений в различных постановках изучались в работах [12–17].

В связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, применяемых в агроэкосистеме (например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги), существенно вырос интерес к нагруженным уравнениям. *Нагруженными дифференциальными уравнениями* в литературе принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений. Среди работ, посвящённых нагруженным уравнениям, следует особо отметить работы А.М. Нахушева [18, 19] и А.И. Кожанова [20].

Уравнения вида (1) без нагруженного члена встречаются также в прикладной механике. Например, в [21, 22] система уравнений, описывающая распространение одномерных нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде, сводится к одному уравнению вида

$$u_\tau + \alpha(\tau)uu_\eta + \beta(\tau)u_{\eta\eta} - \mu(\tau)u_{\eta\eta} + \left(\frac{k}{2\tau} + \delta(\tau)\right)u = 0.$$

В частности, при $\mu = 0$, $k = 1$, $\delta = 0$ показано, что при определённых условиях цилиндрические волны могут существовать в виде солитонов.

В настоящей работе предлагаются простой алгоритм построения уравнения КдФ высокого порядка с нагруженными членами и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Отметим, что существуют несколько методов построения высших уравнений КдФ. Важно также уточнить, что найденное нами высшее уравнение КдФ также включает в себя и уравнение КдФ с нагруженными членами.

2. Вывод уравнения КдФ высокого порядка с нагруженными членами. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$q_t = P[q], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5)$$

с начальным условием

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Здесь $q = q(x, t)$ – достаточно гладкая π -периодическая по x функция, а $P[q]$ – многочлен от q и его производных по x .

Построим многочлен $P[q]$ таким образом, чтобы задача Коши (5), (6) интегрировалась при помощи обратной задачи для оператора Хилла с коэффициентом $q(x, t)$:

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Обозначим через $y_n = y_n(x, t)$, $n \geq 1$, ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geq 1$, задачи Дирихле ($y(0, t) = 0$, $y(\pi, t) = 0$) для уравнения (7).

Продифференцировав по t тождество $\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n)$, $n \geq 1$, и используя симметричность оператора $L(t)$, будем иметь

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi q_t y_n^2 dx. \quad (8)$$

Подставим выражение (5) в формулу (8) и получим равенство

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi P[q] y_n^2 dx.$$

Ищем далее первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y'_n , т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n y'_n + cy_n'^2)' = P[q] y_n^2, \quad (9)$$

где функции $a = a(x, t, \xi_n)$, $b = b(x, t, \xi_n)$, $c = c(x, t, \xi_n)$ не зависят от y_n и y'_n . Используя равенство $y_n'' = (q - \xi_n)y_n$ и приравнявая соответствующие коэффициенты, из (9) найдём

$$b = -c', \quad a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n), \quad P[q] = \frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x. \quad (10)$$

Левые части равенств (10) не зависят от ξ_n , поэтому и правые части также не должны зависеть от ξ_n . Функцию $c(x, t, \xi_n)$ будем искать в виде многочлена от ξ_n :

$$c(x, t, \xi_n) = \sum_{k=0}^N c_k(x, t) \xi_n^{N-k}. \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в (10), будем иметь

$$\begin{aligned} P[q] = & 2c'_0(x, t)\xi_n^{N+1} + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2}c_k'''(x, t) - 2qc'_k(x, t) - q_x c_k(x, t) + 2c'_{k+1}(x, t) \right] \xi_n^{N-k} + \\ & + \frac{1}{2}c_N'''(x, t) - 2qc'_N(x, t) - q_x c_N(x, t), \end{aligned}$$

откуда с учётом независимости многочлена $P[q]$ от ξ_n получаем

$$c'_0(x, t) = 0, \quad c'_{k+1}(x, t) = -\frac{1}{4}[c_k'''(x, t) - 4qc'_k(x, t) - 2q_x c_k(x, t)], \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$P[q] = \frac{1}{2}c_N'''(x, t) - 2qc'_N(x, t) - q_x c_N(x, t).$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc'_N - q_x c_N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (12)$$

где функция $c_N = c_N(x, t)$ выражается через $q = q(x, t)$ следующим образом: по заданным непрерывным функциям $d_k = d_k(t)$, $k = \overline{0, N}$, строим последовательность функций

$$c_0(x, t) = d_0(t), \quad c_{k+1}(x, t) = -\frac{1}{4}c_k''(x, t) + qc_k(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^x q_x c_k(x, t) dx + d_{k+1}(t), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Так, например,

$$c_1(x, t) = \frac{1}{2}d_0(t)[q + q(0, t)] + d_1(t),$$

$$c_2(x, t) = \frac{1}{8}d_0(t)[-q_{xx} + 3q^2 + 2qq(0, t) + 3q^2(0, t)] + \frac{1}{2}d_1(t)[q + q(0, t)] + d_2(t)$$

и т.д.

Нелинейное уравнение (12) называется *высшим уравнением Кортевега–де Фриза*. В случае $N = 1$ оно принимает вид

$$q_t = \frac{1}{4}d_0(t)(q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{2}[2d_1(t) + d_0(t)q(0, t)]q_x.$$

В частности, при $d_0(t) = 0$ и $d_1(t) = -1$ отсюда получаем уравнение

$$q_t = q_x,$$

а при $d_0(t) = 4$, $d_1(t) = -2q(0, t)$ – уравнение КдФ

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x.$$

При $d_0(t) = 4a(t)q(0, t)$, $d_1(t) = -2a(t)q^2(0, t)$ получаем нелинейное уравнение КдФ с нагруженным членом

$$q_t = a(t)q(0, t)(q_{xxx} - 6qq_x),$$

а при $d_0(t) = 4$, $d_1(t) = c(t)q(0, t)$ – уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0, t)q_x.$$

Точно также можно найти и другие уравнения Кортевега–де Фриза с нагруженными членами:

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x, \quad q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + P_1[q(x_1, t)]q_x.$$

В случае $N = 2$ уравнение (12) принимает вид

$$\begin{aligned} q_t = & -\frac{1}{16}d_0(t)(q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x) + \\ & + \frac{1}{8}(d_0(t)q(0, t) + 2d_1(t))(q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{8}(3d_0(t)q^2(0, t) + 4d_1(t)q(0, t) + 8d_2(t))q_x. \end{aligned} \quad (13)$$

В частности, из (13) при $d_0 = -16$, $d_1 = 8q(0, t)$, $d_2 = 2q^2(0, t)$ получаем нелинейное уравнение

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x.$$

В случае $d_0(t) = -16$ уравнение (13) можно записать как

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x + P_1[q(0, t)](q_{xxx} - 6qq_x) + P_2[q(0, t)]q_x,$$

где

$$P_1[y] = a_0(t)y + a_1(t), \quad P_2[y] = a_0(t)y^2 + a_1(t)y + a_2(t).$$

3. Предварительные сведения. Далее для полноты изложения представим некоторые из основных свойств оператора Хилла.

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Хилла

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

где $q(x) \in C^1(\mathbb{R})$ – действительная π -периодическая функция, $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр. Обозначим через $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ решения уравнения (14), удовлетворяющие начальным

условиям $c(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = 0$ и $s(0, \lambda) = 0$, $s'(0, \lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)$ называется *функцией Ляпунова*. Функции

$$\psi_{\pm} = c(x, \lambda) + \frac{s'(\pi, \lambda) - c(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi, \lambda)} s(x, \lambda)$$

называются *решениями Флоке* уравнения (14).

Спектр оператора L представляет собой следующее множество [23, 24]:

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ (-\infty, \lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\},$$

при этом интервалы $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \geq 1$, называются *лакунами*, где λ_0 , λ_{4k-1} , λ_{4k} – собственные значения периодической задачи ($y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$), а λ_{4k+1} , λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$) для уравнения (14).

Через ξ_n , $n \geq 1$, обозначим собственные значения задачи Дирихле ($y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$) для уравнения (14), при этом имеют место включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \geq 1$.

Определение 1. Числа ξ_n , $n \geq 1$, вместе со знаками $\sigma_n = \text{sign} \{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\} = \pm 1$, $n \geq 1$, называются *спектральными параметрами оператора L* .

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n , σ_n , $n \geq 1$, и границы λ_n , $n \geq 0$, спектра называются *спектральными данными оператора L* .

Задача нахождения спектральных данных оператора L называется *прямой спектральной задачей*, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным – *обратной спектральной задачей* для оператора L .

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом (см. [25]) по спектральным данным $\{\lambda_{n-1}, \xi_n, \sigma_n, n \geq 1\}$.

Если в уравнении (14) вместо $q(x)$ использовать $q(x + \tau)$, то границы $\lambda_n(\tau)$, $n \geq 0$, спектра получаемого оператора $L(\tau)y \equiv -y'' + q(x + \tau)y = \lambda y$ не будут зависеть от параметра τ : $\sigma(L(\tau)) = \sigma(L)$, $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \geq 0$, а спектральные параметры – будут: $\xi_n = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau)$, $n \geq 1$. Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n(\tau) &= 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} th_n(\xi), \\ h_n(\xi) &= \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

где знак $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система дифференциальных уравнений Дубровина и формула первого следа

$$q(\tau) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau)) \quad (16)$$

приводят к методу решения обратной задачи.

Обратные задачи для конечнозонных потенциалов впервые были рассмотрены в работе [26], поиск их решений был сведён к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов. В статье [6] найдена явная формула для конечнозонных потенциалов. В случае конечнозонных потенциалов система дифференциальных уравнений (15) впервые была получена в [11], в случае периодических потенциалов – в [27], а для почти периодических бесконечнозонных потенциалов – в работе [4].

Отметим, что впервые формула типа (16) была получена в [28] в случае, когда в спектре оператора L имеется конечное число лакун. Позже аналогичные формулы следов удалось получить и другим авторам [4, 14, 29, 30].

В процессе изучения обратной спектральной задачи для оператора L найдена связь между гладкостью потенциала $q(x)$ и длиной лакун (см., например, [3, 27, 31, 32]).

Теорема 1 [3]. Если $q(x) \in \tilde{W}_2^n[0, \pi]$ и $\operatorname{Im} q(x) = 0$, то собственные значения периодической и антипериодической задач для оператора L удовлетворяют равенствам

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}}, \sqrt{\lambda_{2k}} = k + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n+2} \frac{a_{2j+1}}{(2k)^{2j+1}} \mp \frac{|l_n(2k)|}{(2k)^{n+1}} + \frac{\gamma_k^\pm}{k^{n+2}}, \quad (17)$$

где a_{2j+1} , b_{2j+1} не зависят от k и

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt, \quad l_n(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q^{(n)}(x) e^{-ipx} dx, \quad \sum_{k=0}^\infty |\gamma_k^\pm|^2 < \infty.$$

Здесь $\tilde{W}_2^n[0, \pi]$ – подпространство пространства Соболева $W_2^n[0, \pi]$, состоящее из функций $f(x) \in \tilde{W}_2^n[0, \pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0, n-1}$. Заметим, что $W_2^0[0, \pi] = \tilde{W}_2^0[0, \pi] = L_2[0, \pi]$.

Из асимптотических формул (17) вытекает следующая оценка для длин лакун:

$$\gamma_k = \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{1}{2^{n-1}} k^{-n} |l_n(2k)| + \frac{\alpha_k}{k^{n+1}}, \quad \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < \infty. \quad (18)$$

Теорема 2 [27]. Для экспоненциального убывания длины лакун оператора L с π -периодическим действительным потенциалом $q(x)$ необходима и достаточна аналитичность $q(x)$.

Теорема 3 [33]. Для того чтобы число π/n , $n \geq 2$, было периодом потенциала $q(x)$ оператора L , необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не кратны n .

Эта теорема была доказана в статье [34] для $n = 2$.

4. Эволюция спектральных данных. Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, – решение задачи (1)–(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(t)$, $n \geq 0$, оператора $L(t)$ не зависят от параметра t , т.е. $\lambda_n(t) = \lambda_n$, $n \geq 0$, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \geq 1$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1, t)], \quad n \geq 1, \quad (19)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \bar{h}_n(\xi), \quad \bar{h}_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k=1, k \neq n}^\infty \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Здесь знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geq 1,$$

где ξ_n^0 , σ_n^0 , $n \geq 1$, – спектральные параметры оператора $L(0)$.

Доказательство. Пусть $q(x, t)$ – π -периодическая по x функция, удовлетворяющая уравнению (1). Обозначим через $y_n = y_n(x, t)$, $n \geq 1$, ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0, t) = 0$, $y(\pi, t) = 0$) для уравнения (4), соответствующие собственным

значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geq 1$. Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n(t)$, $n \geq 1$, и используя симметричность оператора $L(t)$, будем иметь

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi q_t(x, t) y_n^2(x, t) dx. \quad (20)$$

Используя уравнение (1), из равенства (20) получаем

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi \{a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)qq_x\} y_n^2 dx = I_1. \quad (21)$$

Ищем первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y'_n , т.е. пусть

$$(ay_n^2 + by_n y'_n + cy_n'^2)' = [a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x] y_n^2, \quad (22)$$

где функции $a = a(x, t, \xi_n)$, $b = b(x, t, \xi_n)$ и $c = c(x, t, \xi_n)$ не зависят от y_n и y'_n . Используя равенство $y_n'' = (q(x, t) - \xi_n(t))y_n$ и приравнявая коэффициенты, из (22) найдём

$$b = -c', \quad a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n),$$

$$\frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x. \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что

$$c(x, t, \xi_n) = 2a(t)q(x_0, t)q(x, t) + \alpha(t),$$

где $\alpha(t) = 4a(t)q(x_0, t)\xi_n(t) - b(t)q(x_1, t)$ удовлетворяет равенству (23).

Таким образом, при

$$a(x, t, \xi_n) = a(t)q(x_0, t)q_{xx} - [2a(t)q(x_0, t)q + 4a(t)q(x_0, t)\xi_n - b(t)q(x_1, t)](q - \xi_n),$$

$$b(x, t, \xi_n) = -2a(t)q(x_0, t)q_x, \quad c(x, t, \xi_n) = a(t)q(x_0, t)q(x, t) + 4a(t)q(x_0, t)\xi_n - b(t)q(x_1, t)$$

выполняется соотношение (22). Значит,

$$\begin{aligned} I_1 &= (ay_n^2 + by_n y'_n + cy_n'^2)|_0^\pi = c(x, t, \xi_n) y_n'^2(x, t)|_0^\pi = \\ &= [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1, t)] [y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Подстановка формулы (24) в (21) даёт

$$\dot{\xi}_n(t) = [y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t)] [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1, t)]. \quad (25)$$

Так как собственные значения $\xi_n(t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, то получим

$$y_n(x, t) = \frac{1}{\alpha_n(t)} s(x, \xi_n(t), t),$$

где

$$\alpha_n^2(t) = \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), t) dx = s'(\pi, \xi_n(t), t) \frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda},$$

откуда будем иметь равенство

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = \left(\frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \left(s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} \right).$$

Подставив в него выражение

$$s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4},$$

получим

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4} \left(\frac{\partial s(\pi, \xi_n(t), t)}{\partial \lambda} \right)^{-1}.$$

Здесь

$$\sigma_n(t) = \text{sign} \left(s'(\pi, \xi_n(t), t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n(t), t)} \right).$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \lambda)(\lambda_{2k} - \lambda)}{k^4}, \quad s(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(t).$$

Если подставим это равенство в (25), то получим систему (19).

Теперь докажем независимость от t собственных значений $\lambda_n(t)$, $n \geq 0$, периодической и антипериодической задач для уравнения (4). Обозначим через $\nu_n(x, t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, $n \geq 0$, периодической и антипериодической задач для уравнения (4). Действуя приведённым выше образом, получим равенство

$$\dot{\lambda}_n(t) = [a(t)q(x_0, t)(2q(0, t) + 4\lambda_n(t)) - b(t)q(x_1, t)][v_n'^2(\pi, t) - v_n'^2(0, t)],$$

из которого следует, что $\dot{\lambda}_n(t) = 0$, $n \geq 0$, так как $\nu_n(0, t) = \pm \nu_n(\pi, t)$, $\nu_n'(0, t) = \pm \nu_n'(\pi, t)$. Это и означает независимость границы спектра оператора $L(t)$ от параметра t .

Следствие 1. Обозначим через λ_n , $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$, спектральные данные оператора

$$L(\tau)y \equiv -y'' + q_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, – решение задачи (1)–(3). Тогда спектральные данные $\lambda_n(\tau, t)$, $n \geq 0$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \geq 1$, оператора

$$L(\tau, t)y \equiv -y'' + q(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n,$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) [a(\tau)q(x_0, t)(2q(\tau, t) + 4\xi_n(\tau, t)) - b(\tau)q(x_1, t)]. \quad (26)$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau, t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geq 1. \quad (27)$$

Замечание 1. С помощью формулы первого следа

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) \quad (28)$$

систему дифференциальных уравнений (26) можно записать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \left[a(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(x_0, t)) \right) \left(2\lambda_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) + 4\xi_n(\tau, t) \right) - b(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(x_1, t)) \right) \right], \quad n \geq 1. \quad (29)$$

В результате замены переменных по формуле

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in \mathbb{N},$$

систему дифференциальных уравнений Дубровина (29) и начальные условия (27) можно записать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K :

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, 0) = x^0(\tau) \in K,$$

где

$$K = \left\{ x(\tau, t) = (x_1(\tau, t), x_2(\tau, t), \dots, x_n(\tau, t), \dots) \mid \|x(\tau, t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) x_n(\tau, t) < \infty \right\},$$

$$H(x) = (H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x), \dots),$$

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(\dots, \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \dots) \times \\ \times f_n(\dots, \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \dots) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x(\tau, t)) f_n(x(\tau, t)),$$

$$g_n(\xi(\tau, t)) = a(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} \lambda_{2k} - 2\xi_k(x_0, t)) \right) \left(4\xi_n(\tau, t) + 2\lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) \right) - \\ - b(t) \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k} - 2\xi_k(x, t)) \right),$$

$$f_n(\xi(\tau, t)) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_0) \prod_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$\xi = \xi(\tau, t) = (\xi_1(\tau, t), \xi_2(\tau, t), \dots, \xi_n(\tau, t), \dots),$$

$$\sigma = \sigma(\tau, t) = (\sigma_1(\tau, t), \sigma_2(\tau, t), \dots, \sigma_n(\tau, t), \dots),$$

$$x = x(\tau, t) = (x_1(\tau, t), x_2(\tau, t), \dots, x_n(\tau, t), \dots).$$

Лемма. Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R})$, то вектор-функция $H(x(\tau, t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K , т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau, t), y(\tau, t) \in K$ выполняется следующее неравенство:

$$\|H(x(\tau, t)) - H(y(\tau, t))\| \leq L \|x(\tau, t) - y(\tau, t)\|,$$

где

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \gamma_n < \infty.$$

Таким образом, условие Липшица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (26), (27) для всех $t > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ существует и единственно.

Следствие 2. Лемма даёт метод решения задачи (1)–(3). Обозначим через λ_n , $n \geq 0$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \geq 1$, спектральные данные оператора $L(\tau, t)$. Сначала найдём спектральные данные λ_n , $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$, для оператора $L(\tau)$. После этого в уравнении (29) и в начальных условиях (27) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решив полученные задачи Коши, найдём $\xi_n(x_0, t)$ и $\xi_n(x_1, t)$. Затем из формулы (28) определим функции $q(x_0, t)$ и $q(x_1, t)$. Далее, подставив эти данные в систему уравнений (26) и решив задачу Коши (26), (27) при произвольном значении τ , получим $\xi_n(\tau, t)$, $n \geq 1$. Из формулы следов (28) найдём $q(\tau, t)$.

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)–(3) имеет решение. От этого предположения нетрудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q(\tau, t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 2. Покажем, что найденная функция $q(\tau, t)$ действительно удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi), \quad n \geq 1, \quad (30)$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau, t) - \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t)). \quad (31)$$

Из систем (26) и (30) имеем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = [-a(t)q(x_0, t)(2q(\tau, t) + 4\xi_n(\tau, t)) + b(t)q(x_1, t)] \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau}. \quad (32)$$

Продифференцировав формулу первого следа (28) по t , с учётом (32) найдём

$$q_t = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial t} = 2a(t)q(x_0, t) \left(2q(\tau, t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} \right) - 2b(t)q(x_1, t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}. \quad (33)$$

Далее продифференцировав по τ формулы следов (28) и (31), будем иметь

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = -q_{\tau}, \quad 4 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = \frac{1}{2} q_{\tau\tau} - 2qq_{\tau}.$$

Используя эти равенства, из (33) выводим

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{\tau\tau} - 6qq_{\tau}) + b(t)q(x_1, t)q_{\tau}.$$

Замечание 3. Равномерная сходимость рядов в указанных выше формулах следует из (18) и оценки (см. [4, 27])

$$c_1 n \leq |\bar{h}_n(\xi)| \leq c_2 n, \quad n \geq 1,$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ не зависят от n .

Теорема 5. Пусть функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию

$$q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^4(\mathbb{R}).$$

Тогда существует решение $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3), однозначно определяемое по формуле (28) и принадлежащее классу

$$C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0).$$

Следствие 3. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π -периодической аналитической функцией, то решение $q(x, t)$ задачи (1)–(3) тоже является действительной аналитической функцией по x .

Это утверждение следует из теоремы Трубовица [27]. Так как длины лакун, соответствующие потенциалу $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а потенциалу $q(x, t)$ соответствуют те же лакуны, то $q(x, t)$ является действительной аналитической функцией по x .

Следствие 4. Если число π/n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n , исчезают. Потенциалу $q(x, t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта, число π/n является периодом и для функции $q(x, t)$ по переменной x . Здесь лакуна $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ имеет номер k .

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$q_t = a(t)q(x_0, t)(q_{xxx} - 6qq_x) + b(t)q(x_1, t)q_x,$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x) \equiv 2\wp(x - \bar{x}_0) + \frac{c}{6},$$

где $\wp(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, т.е. однозонный потенциал, задаваемый спектром $E = [\lambda_0, \lambda_1] \cup [\lambda_2; \infty)$ и спектральными параметрами $\xi_0(0) \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\sigma_0(0) = \pm 1$, а $c = +2(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)$.

Нетрудно видеть, что решение этой задачи определяется по формуле

$$q(x, t) = 2\wp\left(x + \int_0^t b(\tau)q(x_1, \tau) d\tau + c \int_0^t a(\tau)q(x_0, \tau) d\tau - \bar{x}_0\right) + \frac{c}{6}.$$

Таким образом, при наличии нагруженного коэффициента или члена в уравнении КдФ скорость распространения периодической бегущей волны в зависимости от коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ увеличивается или уменьшается, а амплитуда не меняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1098.
2. Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М., 1984.
5. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math. 1968. V. 21. P. 467–490.
6. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. теор. и мат. физики. 1975. Т. 23. № 1. С. 51–68.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза // Журн. эксп. и теор. физики. 1974. Т. 67. № 12. С. 2131–2143.
8. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев, 1987.
9. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
10. Ince E.L. A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.
11. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. Вып. 3. С. 41–51.
12. Grinevich P.G., Taimanov I.A. Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2008. V. 224. P. 125–138.

13. *Khasanov A.B. Yakshimuratov A.B.* The almos-periodicity of infinite-gap potentials of the Dirac operator // *Dokl. Math.* 1996. V. 54. № 2. P. 767–769.
14. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Обратная задача на полуоси для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом // *Дифференц. уравнения.* 2015. Т. 51. № 1. С. 23–33.
15. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза // *Мат. сб.* 1994. Т. 185. № 8. С. 103–114.
16. *Lax P.* Almost periodic solutions of the KdF equation // *SCAM Rev.* 1976. V. 18. № 3. P. 351–575.
17. *Домрин А.В.* Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2010. Т. 74. № 3. С. 23–44.
18. *Нахушеев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // *Дифференц. уравнения.* 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
19. *Нахушеев А.М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
20. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2004. Т. 44. С. 694–716.
21. *Луговцов А.А.* Распространение нелинейных волн в газожидкостной среде. Точные и приближённые аналитические решения волновых уравнений // *Прикл. механика и техн. физика.* 2010. Т. 51. № 1. С. 54–61.
22. *Луговцов А.А.* Распространение нелинейных волн в неоднородной газожидкостной среде. Вывод волновых уравнений в приближении Кортевега–де Фриза // *Журн. теор. и мат. физики.* 2009. Т. 50. № 2. С. 188–197.
23. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., 1960.
24. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М., 1961.
25. *Станкевич И.В.* Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // *Докл. АН СССР.* 1970. Т. 192. № 1. С. 34–37.
26. *Ахизер Н.И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 141. № 2. С. 262–266.
27. *Trubowitz E.* The inverse problem for periodic potentials // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1977. V. 30. P. 321–337.
28. *Hochstadt H.* On the determination of Hill's equation from its spectrum // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1965. V. 19. P. 353–362.
29. *McKean H.P., Moerbeke P.* The spectrum of Hill's equation // *Invent. Math.* 1975. V. 30. № 3. P. 217–274.
30. *Flachka H.* On the inverse problem for Hill's operator // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1975. V. 59. № 4. P. 293–309.
31. *Hochstadt H.* Estimates on the stability interval's for the Hill's equation // *Proc. AMS.* 1963. V. 14. P. 930–932.
32. *Левитан Б.М., Гусейнов Г.Ш.* Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма–Лиувилля // *Сердика Българско математическо списание.* 1977. Т. 3. С. 273–280.
33. *Hochstadt H.* A generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equations // *J. Math. Anal. and Appl.* 1984. V. 102. P. 599–605.
34. *Borg G.* Eine umkehrung der Sturm–Liouvillschen eigenwertaufgabe. Bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwete // *Acta Math.* 1946. V. 78. P. 1–96.

Самаркандский государственный университет,
Узбекистан,
Ургенчский государственный университет,
Узбекистан

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.
После доработки 23.10.2023 г.
Принята к публикации 13.11.2023 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.23

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2023 г. А. А. Полосин

Изучается асимптотическое поведение спектра интегрального оператора, схожего с интегральным оператором с логарифмическим ядром, зависящим от суммы аргументов. Простой заменой переменных соответствующее уравнение сводится к интегральному уравнению типа свёртки, заданному на конечном отрезке (как известно, такие уравнения в общем случае не решаются в квадратурах). Далее с помощью преобразования Фурье уравнение сводится к задаче сопряжения аналитических функций, а затем – к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, выделение главных членов в которой позволяет получить соотношение, определяющее спектр исходной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123120087, EDN: NXR BRI

Введение. В работе [1] было доказано, что интегральный оператор с логарифмическим ядром, зависящим от суммы аргументов, вида

$$(Au)(x) = \int_{\delta}^1 \ln(t+x)u(t) dt, \quad \delta \leq x \leq 1,$$

где $0 < \delta < 1$ – фиксированное число, имеет лишь одно положительное собственное значение. В статье [2] найдена асимптотика спектра интегрального уравнения переноса

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{|t-x|^{\alpha}}, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

В работах [3, 4] изучена асимптотика собственных значений и собственных функций более общего семейства интегральных операторов типа свёртки

$$(Au)(\tau) = \int_0^T k(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $K(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т.е. $K(cx) = c^{-\gamma}K(x)$ для любого $c > 0$ и любого вещественного x , где $0 < \gamma < 1$.

Метод решения уравнений типа свёртки, рассматриваемых на конечном отрезке, при известных двух частных решениях, отвечающих правым частям специального вида, предложен в [5]. В [6] изучена асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с ядром $k(x) = (\pi x)^{-1} \sin(lx)$, $l > 0$, рассматриваемого на отрезке $[-1, 1]$, а в статье [7] исследована асимптотика собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с логарифмическим ядром.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу на собственные значения для интегрального оператора, родственного используемому в работе [1]:

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{\delta}^1 \ln \frac{\gamma \sqrt{xt}}{t+x} \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{xt}}, \quad \delta \leq x \leq 1, \quad (1)$$

где $0 < \delta < 1$, $\gamma > 0$ – фиксированные числа. Изучим асимптотику спектра этого оператора в предположении, что $\lambda \gg 0$.

Обозначив $x = \sqrt{\delta}e^y$, $t = \sqrt{\delta}e^s$, $v(y) = e^{y/2}\psi(\sqrt{\delta}e^y)$, $a = -\ln \sqrt{\delta}$, запишем (1) в виде

$$v(y) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{\gamma/2}{\operatorname{ch}((y-s)/2)} v(s) ds, \quad -a \leq y \leq a. \quad (2)$$

Заметим, что собственная функция уравнения (2) будет либо чётной, либо нечётной.

Рассмотрим сначала случай чётной собственной функции: $v(y) = v(-y)$. Пусть $T(y)$ – чётная функция, удовлетворяющая условиям $T''(y) = v(y)$, $T(\pm a) = 0$:

$$T(y) = \int_0^y (y-t)v(t) dt - \int_0^a (a-t)v(t) dt,$$

тогда с учётом равенства

$$T'(a) = \int_0^a v(t) dt = -T'(-a)$$

уравнение (2) можно представить в виде

$$v(y) = w(y) - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{T(s) ds}{\operatorname{ch}^2((s-y)/2)}, \quad -a \leq y \leq a, \quad (3)$$

где

$$w(y) = \frac{\lambda}{\pi} T'(a) \ln \frac{\gamma^2/2}{\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} a}.$$

В соответствии с общей схемой, описанной в [8, с. 201], продолжим уравнение (3) на всю вещественную прямую, доопределив функции $v(y)$, $w(y)$ и $T(y)$ нулём вне отрезка $[-a, a]$:

$$v(y) = w(y) - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(s) ds}{\operatorname{ch}^2((s-y)/2)} + f_+(y-a) + f_+(-y-a), \quad -\infty < y < +\infty, \quad (4)$$

где $f_+(y) = 0$ при $y \leq 0$.

Перейдём в соотношении (4) к образам Фурье, обозначив

$$V(p) = \int_{-a}^a v(y) e^{ipy} dy, \quad W(p) = \int_{-a}^a w(y) e^{ipy} dy, \quad F^+(p) = \int_0^{+\infty} f_+(y) e^{ipy} dy.$$

В результате будем иметь

$$T'(a) = \int_0^a v(t) dt = \frac{V(0)}{2}, \quad \int_{-a}^a T(y) e^{ipy} dy = \frac{V(0) \cos(ap) - V(p)}{p^2},$$

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi} V(0) \int_0^a \cos(py) \ln \frac{\gamma^2/2}{\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} a} dy.$$

Заметим, что

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi} V(0) \left[\frac{\sin(ap)}{p} \ln \frac{\gamma^2/4}{\operatorname{ch} a} - \frac{\cos(ap)}{p^2} \frac{\operatorname{th} a}{2} + \int_0^a \frac{1 + \operatorname{ch} y \operatorname{ch} a}{(\operatorname{ch} y + \operatorname{ch} a)^2} \frac{\cos(py)}{p^2} dy \right],$$

так что при $p \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$W(p) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi} V(0) \frac{\sin(ap)}{p} \ln \frac{\gamma^2/4}{\operatorname{ch} a} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), & \gamma \neq 2\sqrt{\operatorname{ch} a}, \\ -\frac{\lambda}{2\pi} V(0) \frac{\cos(ap)}{p^2} \operatorname{th} a + O\left(\frac{1}{p^3}\right), & \gamma = 2\sqrt{\operatorname{ch} a}. \end{cases}$$

Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\left(1 - \frac{\lambda}{p \operatorname{sh}(\pi p)}\right) (V(p) - V(0) \cos(ap)) = \tilde{W}(p) + e^{iap} F^+(p) + e^{-iap} F^+(-p), \quad -\infty < p < +\infty, \quad (5)$$

где $\tilde{W}(p) = W(p) - V(0) \cos(ap)$.

Обозначим через μ вещественный положительный корень уравнения $p \operatorname{sh}(\pi p) = \lambda$. Положив в (5) $p = \mu$, получим условие, определяющее собственные значения исходной задачи:

$$-\tilde{W}(\mu) = e^{i\mu} F^+(\mu) + e^{-i\mu} F^+(-\mu). \quad (6)$$

Введём каноническую функцию $X(z)$ задачи сопряжения [9, с. 176] по правилу

$$1 - \frac{\lambda}{p \operatorname{sh}(\pi p)} = \left(1 - \frac{\mu^2}{p^2}\right) \frac{X^-(p)}{X^+(p)}, \quad X(\infty) = 1,$$

тогда

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(\pi t)}{t} \frac{t^2 - \mu^2}{t \operatorname{sh}(\pi t) - \lambda} \right) \frac{dt}{t - z} \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что $X^-(-z) = 1/X^+(z)$.

Положим

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - \mu^2}{z^2 X^+(z)} \left(V(z) e^{iaz} - V(0) \frac{1 + e^{2iaz}}{2} \right) - \frac{\tilde{W}(z) e^{iaz} + F^+(z) e^{2iaz}}{X^-(z)}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \frac{F^+(-z)}{X^-(z)}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

В силу (5) $\Phi(z)$ будет мероморфной функцией, исчезающей на бесконечности, так что

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - z_k},$$

где через z_k , $k \in \mathbb{N}$, обозначены корни уравнения

$$z \operatorname{sh}(\pi z) = \lambda, \quad (8)$$

лежащие строго в верхней полуплоскости.

2. Основные результаты. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Уравнение (8) не имеет кратных корней тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Lambda \sin(\lambda\Lambda) \neq -1, \quad (9)$$

где $\Lambda = \sqrt{(1 + \sqrt{1 + (\pi\lambda/2)^{-2}})/2}$.

Для доказательства достаточно исключить z из системы, состоящей из уравнения (8) и уравнения $\operatorname{sh}(\pi z) + \pi z \operatorname{ch}(\pi z) = 0$, получающегося в результате дифференцирования уравнения (8) по z .

В дальнейшем будем предполагать, что условие (9) выполнено.

Вычислив вычеты в выражении для функции $\Phi(z)$, находим

$$a_k = -\frac{z_k^2 - \mu^2}{z_k^2 X^+(z_k)} \frac{F^+(z_k)e^{2iaz_k} + \tilde{W}(z_k)e^{iaz_k}}{\pi \operatorname{cth}(\pi z_k) + 1/z_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

откуда при $\operatorname{Im} z > 0$ следует, что

$$F^+(z) = X^-(-z)\Phi(-z) = -\frac{1}{X^+(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z + z_k}.$$

Таким образом, мы получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k , $k \in \mathbb{N}$, в обозначениях $p(z) = \pi \operatorname{cth}(\pi z) + z^{-1}$, $\chi(z) = (e^{-iaz} X^+(z))^2 / (1 - \mu^2 z^{-2})$:

$$a_m = \frac{1}{\chi(z_m)p(z_m)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z_m + z_k} - \frac{1 - (\mu/z_m)^2}{X^+(z_m)} \frac{\tilde{W}(z_m)e^{iaz_m}}{p(z_m)}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Исследуем расположение и свойства корней z_k , $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. Все не вещественные корни уравнения (8) лежат в полосе $|\operatorname{Re} z| < \mu$.

Достаточно заметить, что если $|\operatorname{Re} z| \geq \mu$, $\operatorname{Im} z > 0$, то

$$|z \operatorname{sh}(\pi z)| \geq |z| |\operatorname{sh}(\pi z)| > |\operatorname{Re} z| \operatorname{sh}(\pi |\operatorname{Re} z|) \geq \mu \operatorname{sh} \mu = \lambda.$$

Лемма 3. Количество корней уравнения (8), лежащих в прямоугольнике с вершинами $\pm\mu + i0$, $\pm\mu + i2N$, где $N \in \mathbb{N}$, равно $2N$.

Доказательство. Обозначим $f(z) = z \operatorname{sh}(\pi z) - \lambda$, $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, тогда

$$\operatorname{Re} f(z) = x \operatorname{sh}(\pi x) \cos(\pi y) - y \sin(\pi y) \operatorname{ch}(\pi x) - \lambda, \quad \operatorname{Im} f(z) = x \sin(\pi y) \operatorname{ch}(\pi x) + y \operatorname{sh}(\pi x) \cos(\pi y).$$

Изучим приращение аргумента $f(z)$ на сторонах рассматриваемого прямоугольника.

Подсчитаем количество точек пересечения графика $f(z)$ с действительной осью на отрезке $[\mu, \mu + i2N]$. Уравнение $\operatorname{Im} f(z) = 0$ запишем в виде $\operatorname{tg}(\pi y) = -y \operatorname{th}(\pi \mu)/\mu$. Так как $\operatorname{th}(\pi \mu)/\mu > 0$, то на каждом интервале вида $(k - 1/2, k)$, $k = \overline{1, 2N}$, у этого уравнения будет существовать ровно один корень y_k ; стало быть, общее количество корней равно $2N$. При этом для нечётных k выполняются неравенства $\sin(\pi y_k) > 0$, $\cos(\pi y_k) < 0$, так что

$$\operatorname{Re} f(z_k) = \lambda \cos(\pi y_k) - y_k \sin(\pi y_k) \operatorname{ch}(\pi \mu) - \lambda < 0,$$

а для чётных k – неравенства $\sin(\pi y_k) < 0$, $\cos(\pi y_k) > 0$, а значит,

$$\operatorname{Re} f(z_k) = \lambda \left(\cos(\pi y_k) + \frac{\sin^2(\pi y_k) \operatorname{ch}^2(\pi \mu)}{\operatorname{sh}^2(\pi \mu) \cos(\pi y_k)} - 1 \right) = \lambda \frac{\operatorname{sh}^2(\pi \mu)(1 - \cos(\pi y_k)) + \sin^2(\pi y_k)}{\cos(\pi y_k) \operatorname{sh}^2(\pi \mu)} > 0.$$

С учётом ещё того, что $f(\mu) = 0$, $\arg f(\mu + i0) = \pi/2$ и $f(\mu + i2N) = i2N \operatorname{sh}(\pi \mu)$, приращение аргумента функции $f(z)$ на отрезке $[\mu + i0, \mu + i2N]$ равно $2\pi N$.

На отрезке $[\mu + i2N, -\mu + i2N]$

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + i2N) = x \operatorname{sh}(\pi x) - \lambda \leq 0, \quad \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + i2N) = 2 \operatorname{sh}(\pi x),$$

приращение аргумента равно π .

Так как на отрезке $[-\mu + i2N, -\mu + i0]$ $f(z) = f(-\mu + iy) = f(\mu - iy) = \overline{f(\mu + iy)}$, то приращение аргумента на этом отрезке равно $2\pi N$; на отрезке $[-\mu + i0, \mu + i0]$ приращение аргумента, очевидно, равно $-\pi$. Таким образом, общее приращение аргумента при обходе прямоугольника в направлении против часовой стрелки составляет $4\pi N$, что и доказывает лемму.

Следствие 1. *Количество корней уравнения (8) с ненулевой мнимой частью конечно.*

Два корня уравнения (8), ближайшие к $i\lambda$, обозначим через z_1^* , z_2^* ; возможны случаи $\operatorname{Re} z_1^* = \operatorname{Re} z_2^* = 0$ или $\operatorname{Re} z_1^* = -\operatorname{Re} z_2^* > 0$, $\operatorname{Im} z_1^* = \operatorname{Im} z_2^*$.

Следствие 2. *Для всех корней уравнения (8), кроме z_1^* , z_2^* , справедлива оценка*

$$|z_k - i\lambda| \geq 1.$$

Разобьём множество корней, отличных от z_1^* , z_2^* , на три дизъюнктных подмножества в зависимости от знака их действительной части:

$$\{z_k\}_{k=1}^\infty \setminus \{z_1^*, z_2^*\} = \{z_m^+\}_{m=1}^M \coprod \{z_m^-\}_{m=1}^M \coprod \{z_l^0\}_{l=1}^\infty,$$

$$\operatorname{Re} z_m^+ > 0, \quad z_m^- = -\overline{z_m^+}, \quad m = \overline{1, M}, \quad \operatorname{Re} z_l^0 = 0, \quad l \in \mathbb{N},$$

занумеровав корни в каждом подмножестве в порядке возрастания их мнимых частей.

Лемма 4. *Если $|z| \leq 1$, то $|e^{\pi z} - 1| \geq 2|z|e^{-\pi|z|/2}$.*

Доказательство. Обозначим $z = re^{i\theta}$. Так как $r < 1$, то

$$\left| \sin\left(\frac{\pi r}{2} \sin \theta\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} \frac{\pi r}{2} |\sin \theta| = r |\sin \theta|, \quad \left| \operatorname{sh}\left(\frac{\pi r}{2} \cos \theta\right) \right| \geq \frac{\pi r}{2} |\cos \theta| \geq r |\cos \theta|,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |e^{\pi z} - 1|^2 &= 2e^{\pi r \cos \theta} [\operatorname{ch}(\pi r \cos \theta) - \cos(\pi r \sin \theta)] = \\ &= 4e^{\pi r \cos \theta} \left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi r}{2} \cos \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi r}{2} \sin \theta\right) \right] \geq 4e^{-\pi r} [(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2] = 4r^2 e^{-\pi r}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает искомое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для корней z_m^+ с номерами, удовлетворяющими условию $2m \leq \mu e^{C\mu}$, где $C < \pi$ – фиксированная константа, справедлива асимптотическая формула*

$$z_m^+ = \mu + 2im - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu) + O(1/\mu).$$

Доказательство. Обозначим $f(z) = z \operatorname{sh}(\pi z) - \lambda$, $z_{m,0}^+ = \mu + 2im - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)$. Воспользуемся теоремой Руше, положив $\varphi(z) = -f(z_{m,0}^+)$. Пусть $|\delta| \leq 1$, тогда

$$2f(z) = 2z \operatorname{sh}(\pi z) - 2\lambda = \mu e^{\pi\mu} \left[\frac{z}{\mu} e^{\pi(z-\mu)} - 1 - \left(\frac{z}{\mu} e^{-\pi(z+\mu)} - e^{-2\pi\mu} \right) \right],$$

$$|2f(z)| \geq \mu e^{\pi\mu} \left(\left| \frac{z}{\mu} e^{\pi(z-\mu)} - 1 \right| - \left| \frac{z}{\mu} e^{-\pi(z+\mu)} - e^{-2\pi\mu} \right| \right),$$

$$|2f(z_{m,0}^+ + \delta)| \geq \mu e^{\pi\mu} (|e^{\pi\delta} - 1| - T),$$

где

$$T = e^\pi \left| \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{\mu + 2im} \right| + e^{-2\pi\mu} \left(1 + e^\pi \left| \left(1 + \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{\mu + 2im} \right) \left(1 + \left(\frac{2m}{\mu} \right)^2 \right) \right| \right).$$

Так как

$$\left| \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{1 + 2im/\mu} \right| = O(1),$$

$$\left| \left(1 + \frac{\delta - \pi^{-1} \ln(1 + 2im/\mu)}{\mu + 2im} \right) \left(1 + \left(\frac{2m}{\mu} \right)^2 \right) \right| \leq \left(1 + \frac{O(1)}{\mu} \right) e^{2C\mu},$$

то в силу леммы 4 справедливо неравенство $|2f(z)| \geq \mu e^{\pi\mu} (2|\delta|e^{-\pi/2} + O(1/\mu))$.

Далее, поскольку

$$2\varphi = \mu e^{\pi\mu} \left[\frac{1}{\pi\mu} \frac{\ln(1 + 2im/\mu)}{1 + 2im/\mu} + \left(1 - \frac{1}{\pi\mu} \frac{\ln(1 + 2im/\mu)}{1 + 2im/\mu} \right) \left(1 + \frac{2im}{\mu} \right)^2 e^{-2\pi\mu} - e^{-2\pi\mu} \right],$$

то $|2\varphi(z)| = O(e^{\pi\mu})$, поэтому существует такая константа C_0 , не зависящая ни от m , ни от μ , что на окружности $|\delta| = C_0/\mu$ выполняется неравенство $|f| > |\varphi|$, что и доказывает лемму.

Изучим теперь свойства канонической функции (7).

Лемма 6. *Справедливо неравенство*

$$\frac{t}{\operatorname{sh}(\pi t)} \frac{t \operatorname{sh}(\pi t) - \lambda}{t^2 - \mu^2} > 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Достаточно заметить, что

$$\frac{t}{\operatorname{sh}(\pi t)} \frac{t \operatorname{sh}(\pi t) - \lambda}{t^2 - \mu^2} = \frac{1}{t^2 - \mu^2} \left(t^2 - t \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{\operatorname{sh}(\pi t)} \right) = 1 + \frac{\mu \operatorname{sh}(\pi\mu)}{t^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu}{\operatorname{sh}(\pi\mu)} - \frac{t}{\operatorname{sh}(\pi t)} \right),$$

и записать искомое неравенство в виде

$$\frac{t/\operatorname{sh}(\pi t) - \mu/\operatorname{sh}(\pi\mu)}{t^2 - \mu^2} < 0.$$

Изучим теперь поведение канонической функции (7) в верхней полуплоскости.

Теорема. Пусть $z = \mu + i\mu\xi$, $\operatorname{Re} \xi > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \ln(X^+(z))^{-2} &= \mu \left[\xi \ln \left(1 + \frac{1}{i\xi(2+i\xi)} \right) 2i \ln \left(1 + \frac{1}{1+i\xi} \right) \right] + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1+i\xi+s}{1+i\xi-s} \frac{ds}{s} + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1-s^2} \ln \left(\frac{i\xi}{i\xi+1-s} \frac{i\xi+1+s}{i\xi+2} \right) ds + 2 \frac{\xi-i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s^2}{s^2-1} \right) \frac{ds}{s^2-(1+i\xi)^2} + \\ &+ \frac{\xi-i}{\pi(1+i\xi/2)} \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t}) \frac{dt}{t-i\pi\mu\xi} + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Представим каноническую функцию (7) в виде

$$\ln(X^+(\mu + i\mu\xi))^{-2} = 2 \frac{\xi-i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{s}{s^2-1} \left(s - \frac{\operatorname{sh}(\pi\mu)}{\operatorname{sh}(\pi\mu s)} \right) \right) \frac{ds}{s^2-(1+i\xi)^2} = \sum_{k=1}^3 I_k,$$

где

$$I_1 = 2 \frac{\xi-i}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln e^{\pi\mu(1-s)} ds}{s^2-(1+i\xi)^2} = \mu \left[\xi \ln \left(1 + \frac{1}{i\xi(2+i\xi)} \right) + 2i \ln \left(1 + \frac{1}{1+i\xi} \right) \right],$$

$$I_2 = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{s}{s^2 - 1} \left(s e^{-\pi \mu (1-s)} - \frac{1 - e^{-2\pi \mu}}{1 - e^{-2\pi \mu s}} \right) \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2},$$

$$I_3 = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s}{s^2 - 1} \left(s - \frac{\operatorname{sh}(\pi \mu)}{\operatorname{sh}(\pi \mu s)} \right) \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2}.$$

Вычислим второй интеграл. Для этого представим его в виде $I_2 = I_{21} + I_{22}$, где

$$\begin{aligned} I_{21} &= 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{s}{1 - e^{-2\pi \mu s}} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2} = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \left(\frac{s}{1 - e^{-2\pi \mu s}} \right) d \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi \mu s}{e^{2\pi \mu s} - 1} \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} - \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi \mu} \ln \frac{1 + i\xi - t/(2\pi \mu)}{1 + i\xi + t/(2\pi \mu)} \frac{dt}{e^t - 1} = \\ &= -\frac{1}{\pi i} e^{-2\pi \mu} (1 + O(e^{-2\pi \mu})) \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi \mu} \left(-\frac{t}{\pi \mu (1 + i\xi)} + O\left(\left(\frac{t}{2\pi \mu (1 + i\xi)} \right)^2 \right) \right) \frac{dt}{e^t - 1} = \\ &= -e^{-2\pi \mu} \frac{1}{\pi i} \ln \frac{2 + i\xi}{i\xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi^2 \mu (i - \xi)} \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} + O(\mu^{-2}); \\ I_{22} &= \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{i\xi}{2 + i\xi} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \left(e^{-\pi \mu} \frac{2s \operatorname{sh}(\pi \mu s) - 2 \operatorname{sh}(\pi \mu)}{s^2 - 1} \right) d \left(\ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) \right) - \frac{1}{\pi i} \ln(1 - e^{-2\pi \mu}) \ln \frac{i\xi}{2 + i\xi} = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \left(\frac{2s}{1 - s^2} + \frac{\pi \mu s \operatorname{ch}(\pi \mu s) + \operatorname{sh}(\pi \mu s)}{s \operatorname{sh}(\pi \mu s) - \operatorname{sh}(\pi \mu)} \right) \ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) ds = I_{221} + I_{222}, \\ I_{221} &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1 - s^2} \ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) ds, \\ I_{222} &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{\pi \mu s \operatorname{ch}(\pi \mu s) + \operatorname{sh}(\pi \mu s)}{s \operatorname{sh}(\pi \mu s) - \operatorname{sh}(\pi \mu)} \ln \left(\frac{1 + i\xi - s}{1 + i\xi + s} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) ds = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi \mu} \frac{e^{-t} dt}{e^{-t} - 1} \left[\ln \left(1 - \frac{t}{i\xi \pi \mu} \right) - \ln \left(1 - \frac{t/(\pi \mu)}{2 + i\xi} \right) \right] + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi \mu} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \ln \left(\frac{i\xi + t/(\pi \mu)}{2 + i\xi - t/(\pi \mu)} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) dt, \end{aligned}$$

$$f_1(t) = e^{t-2\pi\mu}(1 - e^{-t}) + \frac{e^{-t}}{\pi\mu} \left(1 - \frac{t}{1 - e^{-t}}\right) + \frac{e^{t-2\pi\mu}}{\pi\mu} \left(\frac{t}{1 - e^{-t}} - 1 - 2t\right),$$

$$f_2(t) = \left(1 - \frac{t}{\pi\mu}\right)(e^{t-2\pi\mu} - e^{-t}) + 1 - e^{-2\pi\mu}.$$

Так как

$$|f_2(t)| = 1 - e^{-t} + t(e^{-t} - e^{t-2\pi\mu})/(\pi\mu) + e^{t-2\pi\mu} - e^{-2\pi\mu} \geq 1 - e^{-t},$$

$$\left| \left(1 - \frac{t}{1 - e^{-t}}\right)(1 - e^{-t})^{-1} \right| = \frac{|1 - t - e^{-t}|}{(1 - e^{-t})^2} = \frac{e^{-t} - 1 + t}{(1 - e^{-t})^2} \leq \frac{1}{2} + t,$$

$$\left| \left(\frac{t}{1 - e^{-t}} - 1 - 2t\right)(1 - e^{-t})^{-1} \right| = \frac{(1 + 2t)(1 - e^{-t}) - t}{(1 - e^{-t})^2} = \frac{1 + t - (1 + 2t)e^{-t}}{(1 - e^{-t})^2} \leq \frac{3}{2} + t,$$

то при $0 \leq t \leq \pi\mu$ справедлива оценка

$$\left| \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \right| \leq e^{-\pi\mu} + \frac{e^{-t}}{\pi\mu} \left(\frac{1}{2} + t\right) + \frac{e^{-\pi\mu}}{\pi\mu} \left(\frac{3}{2} + t\right).$$

Таким образом, $I_2 = J_{21}(\xi) + J_{22}$, где

$$J_{21}(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi + s}{1 + i\xi - s} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1 - s^2} \ln \left(\frac{i\xi}{i\xi + 1 - s} \frac{i\xi + 1 + s}{i\xi + 2} \right) ds,$$

$$J_{22} = \frac{1}{\pi i} (e^{-2\pi\mu} + \ln(1 - e^{-2\pi\mu})) \ln \frac{i\xi}{2 + i\xi} + \frac{1}{\pi^2 \mu (i - \xi)} \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi\mu} \left[\ln \left(1 - \frac{t}{i\xi \pi\mu}\right) - \ln \left(1 - \frac{t}{(2 + i\xi)\pi\mu}\right) \right] \frac{dt}{e^t - 1} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi\mu} O\left(e^{-\pi\mu} + \frac{e^{-t}}{\pi\mu} \left(\frac{1}{2} + t\right) + \frac{e^{-\pi\mu}}{\pi\mu} \left(\frac{3}{2} + t\right)\right) \ln \left(\frac{i\xi + t/(\pi\mu)}{2 + i\xi - t/(\pi\mu)} \frac{2 + i\xi}{i\xi} \right) dt = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Теперь вычислим третий интеграл. Для этого представим его в виде

$$I_3 - 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2} = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{e^{-\pi\mu(s-1)}(1 - e^{-2\pi\mu})}{s(1 - e^{-2\pi\mu s})} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2} =$$

$$= 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{e^{-t}(1 - e^{-2\pi\mu})}{(1 + t/(\pi\mu))(1 - e^{-2\pi\mu}e^{-2t})} \right) \frac{dt}{(t - i\pi\mu\xi)(2 + t/(\pi\mu) + i\xi)} =$$

$$= \frac{\xi - i}{\pi(1 + i\xi/2)} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) \frac{dt}{t - i\pi\mu\xi} + I_{30},$$

где

$$I_{30} = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{e^{-t}(1 - e^{-2\pi\mu})}{(1 + t/(\pi\mu))(1 - e^{-2\pi\mu}e^{-2t})} \right) \frac{dt}{(t - i\pi\mu\xi)(2 + t/(\pi\mu) + i\xi)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\xi - i}{\pi(1 + i\xi/2)} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) \frac{dt}{t - i\pi\mu\xi} = \\
& = 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\pi\mu + t} \frac{t}{e^t - 1} + \frac{e^{-t-2\pi\mu}(1 + e^{-t})}{(1 + t/(\pi\mu))(1 - e^{-2t-2\pi\mu})} \right) \frac{dt}{(t - i\pi\mu\xi)(2 + t/(\pi\mu) + i\xi)} - \\
& - \frac{1}{\pi^2\mu} \frac{\xi - i}{1 + i\xi/2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t - i\pi\mu\xi} \frac{\ln(1 - e^{-t})}{2 + t/(\pi\mu) + i\xi} dt = O\left(\frac{1}{\mu}\right).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 3. При $z = \mu + i\mu\xi$, $\operatorname{Re} \xi > 0$, справедливо представление

$$\frac{1}{\chi(z)} = \exp\{2ia\mu + \mu f(\xi) + g(\xi) + \dots\},$$

где

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= -2\xi + \xi \ln \left(1 + \frac{1}{i\xi(2 + i\xi)} \right) + 2i \ln \left(1 + \frac{1}{1 + i\xi} \right), \\
g(\xi) &= \ln \frac{i\xi(2 + i\xi)}{(1 + i\xi)^2} + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \ln \frac{1 + i\xi + s}{1 + i\xi - s} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{2s}{1 - s^2} \ln \left(\frac{i\xi}{i\xi + 1 - s} \frac{i\xi + 1 + s}{i\xi + 2} \right) ds + \\
& + 2 \frac{\xi - i}{\pi} \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} \right) \frac{ds}{s^2 - (1 + i\xi)^2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$h(\xi) \equiv \operatorname{Re} f(\xi) = -2\xi + \xi \ln(1 + \xi^2) - \frac{\xi}{2} \ln(4 + \xi^2) - \xi \ln \xi + 2 \operatorname{arctg} \xi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi}{2},$$

$h(+0) = 0$, $h(+\infty) = -\infty$, $h(\xi)$ монотонно возрастает при $0 \leq \xi \leq \xi_{\max}$ и монотонно убывает при $\xi_{\max} \leq \xi < +\infty$, где $\xi_{\max}$ – корень уравнения $h'(\xi) = 0$:

$$\xi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e^4 - 1}} \sqrt{1 - \frac{3/2}{\sqrt{1 - (3/4)e^{-4}} + 1}}.$$

Следовательно, на луче $0 < \xi < +\infty$ у функции $h(\xi)$ существует в точности один корень ξ_0 , причём в окрестности этого корня $h(\xi) = h'(\xi_0)(\xi - \xi_0) + O((\xi - \xi_0)^2)$. Таким образом, при $(\xi_0 - \delta)\mu \leq m \leq (\xi_0 + \delta)\mu$

$$\frac{1}{\chi(z_m^+)} = \exp\{2i\tilde{a}\mu + 2f'(\xi_0)(m - S) + \dots\},$$

где $\tilde{a} = a - if(\xi_0)/2$ (заметим, что $\operatorname{Re} f(\xi_0) = 0$), S – номер, ближайший к $\mu\xi_0$.

Изучим теперь систему линейных алгебраических уравнений (10).

Заново разобьём множество корней уравнения (8) на подмножества. Все корни, отличные от a_1^+ , ..., a_S^+ , a_1^- , ..., a_S^- , a_1^* , a_2^* , обозначим через a_1^0 , a_2^0 , ..., занумеровав их в порядке возрастания мнимых частей, а при их равенстве – по убыванию действительных частей.

Так как $S \sim \mu\xi_0$, то коэффициенты $1/(z_m^- + z_k^+)$ малы, если хотя бы один из индексов больше S . Таким образом, главные члены системы (10) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^S \frac{a_k^+}{z_m^- + z_k^+} - p(z_m^-) \chi(z_m^-) a_m^- = X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) e^{-iaz_m^-} - \frac{a_1^*}{z_m^- + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^- + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
-p(z_m^+) \chi(z_m^+) a_m^+ + \sum_{k=1}^S \frac{a_k^-}{z_m^+ + z_k^-} &= X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) e^{-iaz_m^+} - \frac{a_1^*}{z_m^+ + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^+ + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}; \\
a_m^0 &= \frac{1}{p(z_m^0) \chi(z_m^0)} \left(-X^+(z_m^0) \tilde{W}(z_m^0) e^{-iaz_m^0} + \frac{a_1^*}{z_m^0 + z_1^*} + \frac{a_2^*}{z_m^0 + z_2^*} \right), \quad m \in \mathbb{N}; \\
p(z_m^*) \chi(z_m^*) a_m^* - \frac{a_1^*}{z_m^* + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^* + z_2^*} &= \sum_{k=1}^S \frac{a_k^+}{z_m^* + z_k^+} + \sum_{k=1}^S \frac{a_k^-}{z_m^* + z_k^-} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^0}{z_m^* + z_k^0} - \\
&\quad - X^+(z_m^*) \tilde{W}(z_m^*) e^{-iaz_m^*}, \quad m = 1, 2.
\end{aligned}$$

Запишем главные члены первых двух групп уравнений системы (11) в матричной форме $AX = F$, где

$$\begin{aligned}
X &= (a_1^+, \dots, a_S^+, a_1^-, \dots, a_S^-)^T, \quad F = (f_1^+, \dots, f_S^+, f_1^-, \dots, f_S^-)^T, \\
f_m^+ &= X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) e^{-iaz_m^-} - \frac{a_1^*}{z_m^- + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^- + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}, \\
f_m^- &= X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) e^{-iaz_m^+} - \frac{a_1^*}{z_m^+ + z_1^*} - \frac{a_2^*}{z_m^+ + z_2^*}, \quad m = \overline{1, S}, \\
A &= \begin{pmatrix} \Omega & e^{2i\tilde{a}\mu} D \\ e^{-2i\tilde{a}\mu} D & \Omega \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$\Omega = \Omega^T \in \mathbb{C}^{S \times S}$ – матрица, не зависящая от μ , $D \in \mathbb{C}^{S \times S}$ – диагональная матрица, не зависящая от μ . Обращая матрицу A , получаем

$$\begin{aligned}
\Xi &= \Omega^{-1} D, \quad G = (I - \Xi^2)^{-1} \Omega^{-1} = (g_{km})_{k,m=1}^S, \quad H = -\Xi(I - \Xi^2)^{-1} \Omega^{-1} = -\Xi G = (h_{km})_{k,m=1}^S, \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} G & e^{2i\tilde{a}\mu} H \\ e^{-2i\tilde{a}\mu} H & G \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем $X = A^{-1}F$,

$$\begin{aligned}
a_k^+ &= \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) - a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_1^*} - a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \\
&\quad + e^{2i\tilde{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) - e^{2i\tilde{a}\mu} a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_1^*} - e^{2i\tilde{a}\mu} a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_2^*}, \\
a_k^- &= e^{-2i\tilde{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) - e^{-2i\tilde{a}\mu} a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_1^*} - e^{-2i\tilde{a}\mu} a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) - a_1^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_1^*} - a_2^* \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_2^*}, \quad k = \overline{1, S}.
\end{aligned}$$

Таким образом, последние два уравнения системы (11) принимают вид

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

где

$$q_{11} = p(z_1^*) \chi(z_1^*) - \frac{1}{2z_1^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_1^*} + e^{2i\tilde{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_1^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z_1^* + z_k^0)^2} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
q_{12} &= -\frac{1}{z_1^* + z_2^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_2^*} + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_1^* + z_k^0} \frac{1}{z_2^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
q_{21} &= -\frac{1}{z_2^* + z_1^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_1^*} + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_1^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_1^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_2^* + z_k^0} \frac{1}{z_1^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
q_{22} &= p(z_2^*)\chi(z_2^*) - \frac{1}{2z_2^*} + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^- + z_2^*} + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S \frac{h_{km}}{z_m^- + z_2^*} + \sum_{m=1}^S \frac{g_{km}}{z_m^+ + z_2^*} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z_2^* + z_k^0)^2} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)}, \\
r_1 &= \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_1^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_1^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)} e^{-iaz_k^0} X^+(z_k^0) \tilde{W}(z_k^0) + e^{-iaz_1^*} X^+(z_1^*) \tilde{W}(z_1^*), \\
r_2 &= \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^+} \left(\sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + e^{2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^S \frac{1}{z_2^* + z_k^-} \left(e^{-2i\bar{a}\mu} \sum_{m=1}^S h_{km} e^{-iaz_m^-} X^+(z_m^-) \tilde{W}(z_m^-) + \sum_{m=1}^S g_{km} e^{-iaz_m^+} X^+(z_m^+) \tilde{W}(z_m^+) \right) - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_2^* + z_k^0} \frac{1}{p(z_k^0)\chi(z_k^0)} e^{-iaz_k^0} X^+(z_k^0) \tilde{W}(z_k^0) - e^{-iaz_2^*} X^+(z_2^*) \tilde{W}(z_2^*),
\end{aligned}$$

откуда и находим коэффициенты a_1^* , a_2^* .

Подстановка найденных коэффициентов в условие (6) даёт асимптотическое соотношение для определения собственных значений, которое не записываем ввиду его громоздкости.

Случай нечётной собственной функции рассматривается аналогично; тогда функция $T(y)$ – это нечётная функция, удовлетворяющая условиям $T''(y) = v(y)$, $T'(\pm a) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oseledets I.* The integral operator with logarithmic kernel has only one positive eigenvalue // *Linear Algebra and its Appl.* 2008. V. 428. № 7. P. 1560–1564.
2. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood–Riseman integral equation // *J. of Math. Phys.* 1971. V. 12. № 1. P. 83–92.
3. *Пальцев Б.В.* Уравнения свёртки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1980. Т. 44. № 2. С. 322–394.
4. *Пальцев Б.В.* Асимптотика спектра интегральных операторов свёртки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.
5. *Сахнович Л.А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // *Успехи мат. наук.* 1980. Т. 35. № 4. С. 69–129.
6. *Полосин А.А.* О спектре и собственных функциях оператора свёртки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 9. С. 1180–1194.
7. *Полосин А.А.* Об асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций интегрального оператора свёртки с логарифмическим ядром, заданного на конечном отрезке // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 9. С. 1251–1265.
8. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 13.08.2023 г.
После доработки 13.08.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ПОИСК ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ С НАИЛУЧШЕЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТЬЮ

© 2023 г. М. А. Велищанский, В. Н. Четвериков

Исследуется задача оптимального выбора параметров модели относительно какого-либо функционала. Рассматриваются локально управляемые аффинные системы и интегральные функционалы, зависящие от программного управления. Доказывается локальная управляемость аффинных систем с неотрицательными входами в случае, когда столбцы при управлениях образуют положительный базис. Для таких систем вводится коэффициент локальной управляемости и ставится задача его максимизации в зависимости от выбора параметров модели. В качестве примера рассматривается очень упрощённая модель подводного аппарата и исследуется задача такого расположения его управляющих винтомоторных агрегатов, при котором энергопотребление аппарата минимально.

DOI: 10.31857/S0374064123120099, EDN: NWKEBC

Введение. В настоящее время существует множество видов автономных необитаемых подводных аппаратов, отличающихся размерами, формой, областью применения, видами и расположением управляющих агрегатов и т.д. Задача выбора аппарата, оптимального в том или ином смысле, решается, как правило, из механических или технических соображений. Например, в работах [1, 2] задача снижения энергопотребления подводного аппарата решалась с использованием обтекаемой конструкции корпуса и разрабатываемой в этих работах системы управления солнечной энергией и энергией подводного аппарата.

Хорошо известно [3, с. 48], что движение подводного аппарата описывает динамическая система управления с параметрами. Выбор параметров определяет, в частности, вид и расположение управляющих агрегатов подводного аппарата. Энергия, потребляемая аппаратом, равна интегральному функционалу, зависящему от управления системы. Задача поиска модели подводного аппарата с минимальным потреблением энергии формулируется на математическом языке как задача поиска параметров системы, при которых указанный функционал минимален. Аналогичные задачи формулируются для летательных аппаратов и наземных транспортных средств, а также для других функционалов, например, характеризующих время движения. Задача сравнения однотипных роботов по тому или иному критерию с использованием математических методов актуальна ввиду бурного развития робототехники в настоящее время.

Отметим, что рассматриваемая в работе задача близка задаче оптимального управления по какому-либо критерию. Например, задачи оптимального управления по критерию быстрого действия решались для перехвата движущейся по предписанной траектории цели машиной Дубинса [4, 5] и для системы, состоящей из двух несинхронных осцилляторов [6].

Цель данной статьи – попытаться разработать математические методы для сравнения однотипных моделей по тому или иному критерию. Мы не используем методы теории оптимального управления ввиду сложности их применения к данной задаче. Наш подход основан на предположении, что в малой окрестности каждого допустимого состояния любая траектория системы возможна и равновероятна. Из этого следует, в частности, локальная управляемость системы. Кроме того, локальную траекторию системы можно считать случайной величиной. Тогда значение функционала также есть случайная величина, а поставленную задачу можно понимать как задачу минимизации математического ожидания значения функционала. Коэффициент локальной управляемости системы относительно заданного функционала, определяемый нами как величина обратно пропорциональная указанному математическому ожиданию, мы предлагаем использовать для сравнения систем с разными значениями параметров.

Для упрощения определений и вычислений далее будем рассматривать только аффинные системы с неотрицательными входами. Локальная управляемость таких систем исследуется с использованием понятия положительного базиса, введённого в работах [7, 8]. Докажем простой метод проверки положительного базиса, а также достаточное условие локальной управляемости систем указанного типа.

В качестве иллюстрации рассмотрен пример движения в вертикальной плоскости подводного аппарата, управляемого винтомоторными агрегатами (ВМА). Предполагаем, что тяга каждого ВМА может быть направлена только в одну сторону. Показано, что такое движение описывает аффинная система с неотрицательными управлениями, параметрами которой являются количество ВМА и их расположение. Доказано, что данная система локально управляема только в случае четырёх и более ВМА, расположенных определённым образом. В качестве функционала, используемого для сравнения систем с разным расположением ВМА, мы рассматриваем потребляемую энергию двигателями аппарата. Коэффициент локальной управляемости системы относительно этого функционала вычислен для разных значений параметров. Найдены несколько точек локального максимума и соответствующие значения функционала на четырёх выбранных траекториях.

Статья организована следующим образом. В п. 1 ставится задача и формулируется пример. Определения локально управляемой системы и положительного базиса, а также факты о них содержатся в п. 2. Алгоритм управления системами с положительным базисом формулируется в п. 3. В п. 4 определяется коэффициент управляемости и вычисляется для рассматриваемого примера, сравниваются системы с разными значениями параметров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – состояние системы, $u = (u_1, \dots, u_m)$ – её управления, $\mathcal{X}$ – область допустимых состояний, $\mathcal{U}$ – область допустимых управлений, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ – набор параметров, а $\dot{x} \equiv dx/dt$.

Пусть для системы (1) ставится задача выбора таких параметров α , для которых минимален следующий функционал. Рассмотрим гладкую неотрицательную при $x \in \mathcal{X}$ и $u \in \mathcal{U}$ функцию $\Phi(x, u)$ и отображение, которое каждому решению $(x(t), u(t))$ системы (1) ставит в соответствие интеграл по промежутку $[0, T]$ функции $\Phi(x(t), u(t))$. Упомянутый функционал равен максимальному по решениям системы (1) значению этого отображения, т.е.

$$\max_{(x(t), u(t))} \int_0^T \Phi(x(t), u(t)) dt. \quad (2)$$

Пример 1. Рассмотрим упрощённую модель подводного аппарата, эволюция которого ограничена в вертикальной плоскости (рисунок). Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – ортонормированный базис неподвижной системы координат, а $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ – ортонормированный базис подвижной системы координат, прикрепленной к подводному аппарату. Обозначим через θ угол между этими системами координат. Аппарат имеет один более мощный винтовой двигатель (с номером 0) для движения вперед и l_m винтовых двигателей малой мощности для разворота. Обозначим через $P_0, P_1, \dots, P_{l_m}$ точки расположения винтов.

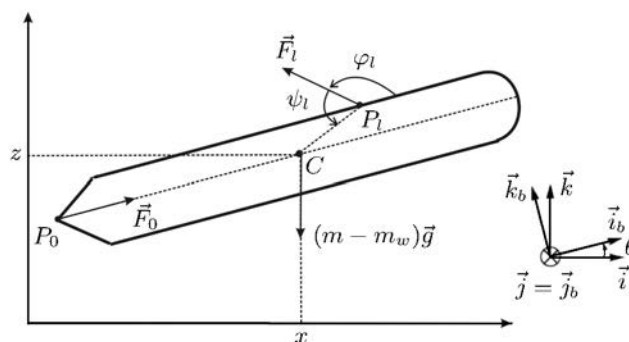


Рисунок. Упрощённая модель подводного аппарата.

На подводный аппарат действуют силы

$$\vec{F}_0 = F_0 \vec{i}_b, \quad \vec{F}_l = F_l (\cos \phi_l \vec{i}_b + \sin \phi_l \vec{k}_b), \quad l = \overline{1, l_m},$$

$$(m - m_w)\vec{g} = -(m - m_w)g\vec{k},$$

где m – масса подводного аппарата; m_w – масса воды, вытесненной подводным аппаратом; ϕ_l – угол между $\vec{i}_b$ и $\vec{F}_l$, ψ_l – угол между $\vec{F}_l$ и $\vec{P}_l\vec{C}$. Вес $m\vec{g}$ и выталкивающая сила $-m_w\vec{g}$ прикладываются к центру масс C ; сила $\vec{F}_l$ прикладывается к точке P_l , $l = \overline{0, l_m}$, где

$$\vec{CP}_l = -|\vec{CP}_l|(\cos(\psi_l + \phi_l)\vec{i}_b + \sin(\psi_l + \phi_l)\vec{k}_b).$$

Уравнения движения, записанные в терминах центра масс C , имеют вид

$$m\dot{\vec{v}}_C = (m - m_w)\vec{g} + \sum_{l=0}^{l_m} \vec{F}_l, \quad \dot{\vec{L}}_C = \sum_{l=0}^{l_m} \vec{CP}_l \times \vec{F}_l,$$

где $\vec{v}_C$ – скорость, $\vec{L}_C$ – угловой момент относительно C . Спроецировав эти уравнения на неподвижные оси, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \cos \theta \left(u_0 + \sum_{l=1}^{l_m} u_l \cos \phi_l \right) - \sin \theta \sum_{l=1}^{l_m} u_l \sin \phi_l, \\ \ddot{z} &= \sin \theta \left(u_0 + \sum_{l=1}^{l_m} u_l \cos \phi_l \right) + \cos \theta \sum_{l=1}^{l_m} u_l \sin \phi_l - \kappa g, \quad \ddot{\theta} = \sum_{l=1}^{l_m} \kappa_l u_l \sin \psi_l, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$u_0 = \frac{F_0}{m}, \quad \kappa = \frac{m - m_w}{m}, \quad u_l = \frac{F_l}{m}, \quad \kappa_l = \frac{m|\vec{CP}_l|}{J}, \quad l = \overline{1, l_m},$$

J – момент инерции подводного аппарата относительно оси Oy . Так как тяга каждого ВМА может быть направлена только в одну сторону, то $u_l \geq 0$, $l = \overline{0, l_m}$.

Параметрами данной системы являются l_m , ϕ_l , ψ_l , $|\vec{CP}_l|$, т.е. количество винтов и их расположение. В качестве функции $\Phi(x, \vec{u})$, определяющей функционал (2), возьмём функцию $\Phi = \sum_{i=0}^{l_m} u_i$. Тогда функционал пропорционален потребляемой энергии всеми двигателями аппарата.

2. Условия локальной управляемости. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m. \quad (4)$$

Напомним, что состояние $x_f \in D \subset \mathcal{X}$ называют *достижимым из состояния* $x_0 \in D \subset \mathcal{X}$ в области D , если существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_f]$, системы (4), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad x(t_f) = x_f, \\ x(t) &\in D, \quad u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned} \quad (5)$$

Систему (4) называют *управляемой в области* $D \subset \mathcal{X}$, если любое состояние $x_f \in D$ достижимо из любого состояния $x_0 \in D$ в области D .

Пример 2. Запишем систему (3) как

$$\begin{aligned} u_0 + \sum_{l=1}^{l_m} u_l \cos \phi_l &= \cos \theta \ddot{x} + \sin \theta (\ddot{z} + \kappa g), \quad \sum_{l=1}^{l_m} u_l \sin \phi_l = -\sin \theta \ddot{x} + \cos \theta (\ddot{z} + \kappa g), \\ \sum_{l=1}^{l_m} \kappa_l u_l \sin \psi_l &= \ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) имеет вид

$$\sum_{l=0}^{l_m} u_l a_l(\bar{x}) = \zeta(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)}), \quad \bar{x} \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad \bar{u} = (u_0, \dots, u_{l_m})^T \in \mathcal{U}, \quad u_l \geq 0, \quad l = \overline{0, l_m}. \quad (7)$$

А именно, для системы (6) $n = 3$, $s = 2$, $\bar{x} = (x, z, \theta)^T$, $a_0, \dots, a_{l_m}$ – столбцы высоты 3, зависящие только от параметров системы.

Для системы (7) обозначим через M матрицу, состоящую из столбцов $a_0, a_1, \dots, a_{l_m}$. Если $\text{rang } M = n$, то для любой векторной функции $\bar{x}(t) \in D \subset \mathcal{X}_0$, $t \in [t_0, t_f]$, существует векторная функция $\bar{u}(t) = (u_0(t), \dots, u_{l_m}(t))^T$, удовлетворяющая вместе с $\bar{x}(t)$ системе (7). Если при этом $\bar{u}(t) \in \mathcal{U}$ и $u_l(t) \geq 0$ для $t \in [t_0, t_f]$ и $l = \overline{0, l_m}$, то пара векторных функций $(\bar{x}, \bar{u}(t))$ удовлетворяет всем условиям (7).

Областью достижимости состояния $x_f \in \mathcal{X}$ за время $T > 0$ в области $D \subset \mathcal{X}$ будем называть множество таких состояний $x_0 \in \mathcal{X}$, что существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_f]$, системы (4), удовлетворяющее условиям (5) при $t_f - t_0 < T$.

Систему (4) будем называть локально управляемой в точке $x_f \in \mathcal{X}$, если для любого $T > 0$ область достижимости состояния x_f за время T в области $\mathcal{X}$ содержит окрестность точки x_f (см. [8]). Система (4) локально управляема в области $\mathcal{X}$, если она локально управляема в любой точке $x_0 \in \mathcal{X}$.

Замечание. В определении локальной управляемости рассматриваются траектории системы, которые начинаются в произвольной точке $x_0 \in \mathcal{X}$ и заканчиваются в заданной точке x_f , а не наоборот. Такой выбор объясняется тем, что в начальный момент, как правило, определены значения u , а в конечный момент мы можем считать компоненты u произвольными.

Существуют системы, которые управляемы, но не локально управляемы.

Пример 3. Рассмотрим подводный аппарат с тремя винтами, т.е. $l_m = 2$. Пусть винты расположены так, что $\phi_1 = \pi/2$, $\psi_1 = 0$, $\phi_2 = 3\pi/4$, $\psi_2 = \pi/2$. Третье уравнение системы (3) имеет вид $\ddot{\theta} = \kappa_2 u_2$. Поскольку $u_2 \geq 0$, то угол θ может только расти, т.е. аппарат может поворачиваться только против часовой стрелки. Чтобы повернуть аппарат на угол $\theta_0 > 0$ по часовой стрелке, необходимо повернуть его на угол $2\pi - \theta_0$ против часовой стрелки. Если угол θ_0 мал, то угол $2\pi - \theta_0$ не является малым, и сколь угодно уменьшать время движения нельзя, потому что u_2 ограничено сверху. Таким образом, система не локально управляема, хотя управляема, если нет ограничения на время движения. Например, при движении из начального состояния в конечное достаточно сначала развернуть аппарат, а потом двигаться по прямой.

Для формулировки условий локальной управляемости в случае $u_l \geq 0$, $l = \overline{0, l_m}$, нам понадобятся следующие понятия и результаты из работ [7, 8]. Говорят, что векторы $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$ составляют *положительный базис* пространства $\mathbb{R}^N$, если для каждого $a \in \mathbb{R}^N$ найдутся такие неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$.

Сформулируем некоторые свойства положительного базиса, доказанные в [7, 8].

Свойство 1. Всегда существует положительный базис размерности $N+1$, т.е. $m = N+1$.

Свойство 2. Для любого положительного базиса имеем $m \geq N+1$.

Свойство 3. Пусть векторы $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$ составляют положительный базис. Тогда найдутся такие положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$.

Свойство 4. Среди векторов, составляющих положительный базис, найдётся N линейно-независимых, а значит, образующих обычный базис пространства $\mathbb{R}^N$.

Учитывая свойство 1 положительного базиса, далее мы будем рассматривать только случай $m = N+1$. Докажем для этого случая ещё два свойства и теорему, дающую простой метод проверки положительного базиса.

Свойство 5. В случае $m = N+1$ любые N векторов положительного базиса образуют обычный базис пространства $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Из соображений размерности вытекает, что если N векторов пространства $\mathbb{R}^N$ линейно независимы, то они образуют обычный базис этого пространства. Предположим существование такого положительного базиса $a_0, a_1, \dots, a_N$ пространства $\mathbb{R}^N$, что векторы $a_1, \dots, a_N$ линейно зависимы. Из свойства 4 положительного базиса следует, что

среди векторов $a_0, a_1, \dots, a_N$ найдётся обычный базис пространства $\mathbb{R}^N$. Этот базис содержит вектор a_0 , пусть он состоит из векторов $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$. Тогда векторы $a_1, \dots, a_{N-1}$ линейно независимы. Из линейной зависимости векторов $a_1, \dots, a_N$ следует, что вектор a_N линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_{N-1}$. Из определения положительного базиса следует представление

$$-a_0 = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_N a_N,$$

где $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{0, N}$. Заменим в этом равенстве вектор a_N на линейную комбинацию векторов $a_1, \dots, a_{N-1}$ и получим представление

$$-a_0 = \lambda_0 a_0 + \lambda'_1 a_1 + \dots + \lambda'_{N-1} a_{N-1}$$

с другими коэффициентами $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{N-1}$, но с тем же λ_0 . Так как векторы $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ образуют обычный базис пространства $\mathbb{R}^N$, то из полученного представления следует, что $\lambda_0 = -1$, $\lambda'_1 = 0, \dots, \lambda'_{N-1} = 0$. Возникает противоречие с условием $\lambda_0 \geq 0$. Поэтому векторы $a_1, \dots, a_N$ не могут быть линейно зависимыми, а значит, они также образуют обычный базис пространства $\mathbb{R}^N$. Свойство доказано.

Свойство 6. В случае $m = N + 1$ векторы $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$ составляют положительный базис тогда и только тогда, когда найдутся такие положительные числа $\alpha_2, \dots, \alpha_m$, что $a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m = 0$, причём числа $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ определяются однозначно.

Доказательство. Из свойства 3 положительного базиса находим такие положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$. Из свойства 5 следует линейная независимость векторов $a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^N$, а значит, $\lambda_1 \neq 0$ и при $\alpha_i = \lambda_i / \lambda_1$, $i = \overline{2, m}$, получаем равенство из свойства 6. Набор чисел $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ единственен, так как векторы $a_2, \dots, a_m$ линейно независимы.

Рассмотрим какой-либо набор векторов $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ и матрицу M размерности $n \times (n + 1)$, столбцы которой состоят из координат этих векторов. Минор, полученный из M удалением i -го столбца, обозначим через M_i .

Теорема 1. Набор векторов $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ образует положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $M_0 \neq 0$, а $(-1)^i M_i / M_0 > 0$ для $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Рассмотрим $(n + 1) \times (n + 1)$ -матрицу, первая строка которой есть j -я строка матрицы M для некоторого $j = \overline{1, n}$, а остальная часть совпадает с матрицей M . Получим вырожденную матрицу. Разложив её определитель по первой строке, получим $a_{0j} M_0 - a_{1j} M_1 + \dots + (-1)^n a_{nj} M_n = 0$, где a_{ij} — j -я координата вектора a_i . Так как значение j произвольно, то получаем соотношение

$$M_0 a_0 - M_1 a_1 + \dots + (-1)^n M_n a_n = 0. \quad (8)$$

Пусть векторы $a_0, a_1, \dots, a_n$ составляют положительный базис. Из свойства 6 следует, что $M_0 \neq 0$. Поэтому $a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$, где $\lambda_i = (-1)^i M_i / M_0$, причём это единственное такое соотношение на векторы $a_0, a_1, \dots, a_n$ ввиду линейной независимости векторов $a_1, \dots, a_n$. Из свойства 6 следует, что $(-1)^i M_i / M_0 > 0$, $i = \overline{1, n}$. Обратное утверждение также следует из свойства 6 и соотношения (8). Теорема доказана.

Отметим, что разложение $a = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n$ вектора a по положительному базису $a_0, \dots, a_n$ неоднозначное, но всегда существует разложение, для которого хотя бы одно α_i нулевое, а остальные неотрицательные. Для построения такого разложения достаточно найти какое-либо соотношение $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$ из свойства 3 и получить разложение

$$a = (\alpha_0 - \lambda_0 \alpha_{l_0} / \lambda_{l_0}) a_0 + \dots + (\alpha_n - \lambda_n \alpha_{l_0} / \lambda_{l_0}) a_n,$$

где $\alpha_{l_0} / \lambda_{l_0}$ — минимальное из чисел α_l / λ_l , $l = \overline{0, n}$. Тогда коэффициент при a_{l_0} нулевой, а остальные неотрицательные. Назовём такое разложение вектора по положительному базису *минимальным*. Ввиду свойства 5 оно единственно.

Теорема 2. Пусть для системы (7) с $l_m = n$ столбцы $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ в точке $\bar{x}_f \in \mathcal{X}_0$ образуют положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$, коэффициенты $u_0, \dots, u_n$ минимального разложения вектора $\zeta(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ по этому базису составляют допустимое управление, функция ζ непрерывна в точке $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$, а компоненты столбцов $a_0, \dots, a_n$ непрерывны в окрестности $\bar{x}_f$. Тогда система (7) локально управляема в точке $\bar{x}_f$.

Доказательство. Если векторы $a_0(\bar{x}_f), \dots, a_{l_m}(\bar{x}_f) \in \mathbb{R}^n$ образуют положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$, то в силу теоремы 1 и непрерывности функций $a_i(\bar{x})$ это свойство выполняется и в некоторой окрестности U точки $\bar{x}_f$. Докажем непрерывность в точке $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ отображения F , которое отображает точку $(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)})$ в набор коэффициентов $u_0, \dots, u_n$ минимального разложения вектора $\zeta(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)})$ по положительному базису $a_0(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$, $\bar{x} \in U$. Область определения этого отображения есть объединение множеств X_i , $i = \overline{0, n}$, где X_j состоит из точек, для которых $u_j = 0$. Обозначим через $A_i(\bar{x})$ квадратную матрицу, составленную из всех столбцов $a_0(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$, кроме $a_i(\bar{x})$. Ввиду теоремы 1 матрицы $A_i(\bar{x})$, $i = \overline{0, n}$, $\bar{x} \in U$, невырождены. Так как каждая такая матрица состоит из непрерывных функций, то обратные им матрицы также состоят из непрерывных функций. Ограничение отображения F на X_j есть $A_j(\bar{x})^{-1}\zeta(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(s)})$ и поэтому непрерывно в точке $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$, если эта точка лежит в X_j . Точка $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ может быть граничной точкой нескольких множеств X_j , но в силу единственности минимального разложения значение $F(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ не зависит от выбора X_j , а значит, отображение F непрерывно в точке $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$.

По условию теоремы точка $F(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$ принадлежит области допустимых управлений $\mathcal{U}$. Поэтому существует окрестность V точки $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$, образ которой при отображении F лежит в $\mathcal{U}$. Выберем такие положительные числа δ_1 и δ_2 , что декартово произведение δ_1 -окрестности точки $\bar{x}_f$ и δ_2 -окрестности точки $(0, \dots, 0)$ лежит в V , т.е. $U_{\delta_1}(\bar{x}_f) \times U_{\delta_2}(0, \dots, 0) \subset V$.

Пусть ξ – произвольный единичный вектор, $\beta(t)$ – какая-либо s раз непрерывно дифференцируемая, убывающая на отрезке $[0, T]$ функция, $\beta(T) = 0$,

$$R = \max_{t \in [0, T]} \|(\dot{\beta}(t), \dots, \beta^{(s)}(t))\|.$$

Рассмотрим траекторию $\bar{x}(t) = \bar{x}_f + (\delta_2/R)\beta(t)\xi$. Тогда $\bar{x}(T) = \bar{x}_f$, и за счёт выбора ξ и t в качестве $\bar{x}(t)$ мы можем получить произвольную точку из δ -окрестности $U_\delta(\bar{x}_f)$ точки $(\bar{x}_f, 0, \dots, 0)$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2\beta(0)/R)$. Поэтому окрестность $U_\delta(\bar{x}_f)$ лежит в области достижимости состояния x_f за время $T > 0$ в $U_\delta(\bar{x}_f)$, а значит, система (7) локально управляема в точке x_f . Теорема доказана.

Пример 4. Из свойства 2 положительного базиса следует, что случай, описанный в теореме 2, возможен только при $l_m \geq 3$. Исследуем случай, когда в (3) $l_m = 2$. Запишем систему (3) в матричном виде $\ddot{\bar{x}} = T_\theta M \bar{u} - B_0$, где

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos \phi_2 \\ 0 & \sin \phi_1 & \sin \phi_2 \\ 0 & \kappa_1 \sin \psi_1 & \kappa_2 \sin \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \zeta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию $h(t, \bar{x}) = C(\dot{\bar{x}} + tB_0)$, где C – некоторая постоянная строка. Производная функции h в силу системы (3) равна $\dot{h} = CT_\theta M \bar{u}$. Пусть θ_f – θ -координата состояния $\bar{x}_f$. Если матрица M невырождена, то, положив $C = (1 \ 1 \ 1)M^{-1}T_{\theta_f}^{-1}$, где M^{-1} – обратная к M матрица, получим равенство

$$\dot{h} = (1 \ 1 \ 1)M^{-1}T_{\theta-\theta_f}M\bar{u} = u_1 + u_2 + u_3 + \alpha(\theta - \theta_f),$$

где $\alpha(\theta - \theta_f) \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \theta_f$. Поэтому если $u_1 + u_2 + u_3 \neq 0$, то $\dot{h}(t, \bar{x}) > 0$ в некоторой окрестности точки $\bar{x}_f$ (напомним, что $u_l \geq 0$ для любого l). Следовательно, значение функции h в окрестности точки $\bar{x}_f$ может только расти, а значит, состояния $\bar{x}$, для которых $h(t, \bar{x}) > h(t, \bar{x}_f)$, не входят в область достижимости состояния $\bar{x}_f$ за малое время и система (3) не является локально управляемой в точке $\bar{x}_f$.

Если $u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0$, то $u_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$, и область достижимости состояния $\bar{x}_f$ есть кривая (не является открытым множеством), и система (3) не является локально управляемой в точке $\bar{x}_f$ и в этом случае.

Если матрица M вырождена, то существует такая строка C_0 , что $C_0 M = 0$. Рассмотрим функцию $h(t, \bar{x}) = C_0 T_{\theta_f}^{-1}(\dot{\bar{x}} + tB)$, где θ_f – θ -координата состояния $\bar{x}_f$, а B – некоторый постоянный столбец. Производная функции h в силу системы (3) равна $\dot{h} = C_0 T_{\theta-\theta_f} M \bar{u} + C_0 T_{\theta_f}^{-1}(B - B_0)$, где первое слагаемое бесконечно малое при $\theta \rightarrow \theta_f$, а второе слагаемое можно сделать положительным за счёт выбора столбца B . При таком выборе B значение функции h в окрестности точки $\bar{x}_f$ может только расти, а значит, система (3) не является локально управляемой в точке $\bar{x}_f$.

Таким образом, мы доказали, что система (3) может быть локально управляема только в случае $l_m \geq 3$.

3. Алгоритм управления системами с положительным базисом. Далее покажем как построить управления для движения по заданной траектории системы с положительным базисом. Рассмотрим систему (7) в случае $l_m = n$. Пусть поставлена задача выбора таких входов $u(t)$, чтобы система двигалась по траектории $x(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, при этом $u(t_0)$ задано.

Шаг 1. Проверяем, что векторы $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ составляют положительный базис. Для этого находим такие положительные числа $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, что $\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0$. Обозначаем через l_d какой-либо номер от 0 до n , а через $\mathcal{B}$ – набор, состоящий из всех векторов a_l , кроме $l = l_d$. (Из свойства 5 следует, что $\mathcal{B}$ образует обычный базис пространства $\mathbb{R}^N$.) Определяем K – количество шагов для перехода от начальной точки в конечную и шаг $\Delta = (t_f - t_0)/K$. Полагаем $t = t_0$.

Шаг 2. Если $u(t) \notin \mathcal{U}$, то делаем вывод, что движение по заданной траектории при заданных ограничениях на управления невозможно и поэтому завершаем вычисления. Иначе переходим на шаг 3.

Шаг 3. Если $t = t_f$, то переходим на шаг 6. Иначе вычисляем

$$t := t + \Delta, \quad \zeta(t) = \zeta(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(s)}(t)).$$

Шаг 4. Раскладываем вектор $\zeta(t)$ по базису $\mathcal{B}$:

$$\zeta(t) = \sum_{l \neq l_d} v_l a_l, \quad v_{l_d} = 0.$$

Шаг 5. Если все полученные v_l неотрицательны, то полагаем $u_l(t) = v_l$, $l = \overline{0, n}$, а затем переходим на шаг 2. Иначе находим минимальное из чисел v_l/λ_l , соответствующий номер обозначаем через l_0 (отметим, что $v_{l_0} < 0$) и получаем разложение

$$\zeta(t) = \sum_{l \neq l_d} v_l a_l - \frac{v_{l_0}}{\lambda_{l_0}} \sum_{l=0}^n \lambda_l a_l = \sum_{l \neq l_0} \left(v_l - \frac{v_{l_0}}{\lambda_{l_0}} \lambda_l \right) a_l.$$

Заменяем в $\mathcal{B}$ вектор a_{l_0} на вектор a_{l_d} и полагаем, что

$$u_l(t) = v_l - \frac{\lambda_l}{\lambda_{l_0}} v_{l_0}, \quad l = \overline{0, n},$$

и $l_d = l_0$. Затем переходим на шаг 2.

Шаг 6. Завершаем вычисления и получаем $u_l(t)$, $l = \overline{0, n}$, $t \in [t_0, t_f]$.

4. Коэффициент локальной управляемости и задача его максимизации. Предположим, что система (1) приведена к виду (7) и выбран функционал (2). Определим коэффициент локальной управляемости, соответствующий этому функционалу. Для управления системой (7) будем использовать алгоритм, приведённый выше. Так как мы не обладаем какой-либо информацией о возможных значениях правой части системы (7) (векторной функции ζ), будем считать, что любое достаточно малое значение ζ возможно и равновероятно. Понимая ζ как случайный вектор, равномерно распределённый на шаре радиуса δ , рассмотрим математическое ожидание $M[\Phi(x_f, u)]$ случайной величины $\Phi(x_f, u)$, где x_f – фиксированная

точка, а компоненты u есть коэффициенты разложения ζ по базису $\mathcal{B}$, составленному из части векторов $a_0, \dots, a_n$ (см. шаги 4 и 5 алгоритма). Коэффициент локальной управляемости системы (7) в состоянии x_f относительно функционала (2) определим как величину, обратную к пределу

$$k(x_f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} M[\Phi(x_f, u)],$$

т.е. $1/k(x_f)$. Коэффициентом локальной управляемости системы (7) относительно функционала (2) будем называть точную нижнюю грань коэффициентов локальной управляемости системы (7) в её допустимых состояниях. Задача поиска параметров модели с наилучшей управляемостью сводится к нахождению максимума по всем параметрам модели коэффициента локальной управляемости системы, т.е. к поиску $\min_{\alpha} \sup_{x_f} k(x_f)$.

Выведем формулу для $k(x)$. Отметим, что на каждом шаге алгоритма по крайней мере одна компонента $\bar{u}$ равна нулю. Обозначим через ν_i вложение пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, которое точку с координатами $v = (v_1, \dots, v_n)$ отображает в точку $u = (u_0, \dots, u_n)$, где $u_j = v_{j+1}$ при $j < i$, $u_i = 0$, $u_j = v_j$ при $j > i$. Пусть A_i – квадратная матрица, полученная из M удалением i -го столбца. Тогда если ζ раскладывается по базису, полученному из набора $a_0, \dots, a_n$ удалением a_i , то

$$\zeta = M\nu_i(v) = A_i v.$$

Обозначим также через $V_n(\delta)$ объём n -мерного шара радиуса δ , а через B_δ^i – часть шара радиуса δ , состоящую из точек $\zeta = A_i v$. Тогда

$$M[\Phi(x_f, u)] = \sum_{i=0}^n \int_{B_\delta^i} \frac{1}{V_n(\delta)} \Phi(x_f, \nu_i(A_i^{-1} \zeta)) d\zeta.$$

В каждом интеграле, сделав замену $\zeta = \delta A_i v$, получим

$$M[\Phi(x_f, u)] = \sum_{i=0}^n \frac{|M_i|}{V_n(1)} \int_{G^i} \Phi(x_f, \delta \nu_i(v)) dv,$$

где $M_i = \det A_i$, а $G^i = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \|A_i v\| \leq 1, v_j \geq 0, j = \overline{1, n}\}$.

Пример 5. Рассмотрим подводный аппарат цилиндрической формы с закругленными концами, причём точки $P_1, \dots, P_m$ расположены на цилиндрической поверхности. В этом случае $|\vec{CP}_l| = d/|\sin(\psi_l + \phi_l)|$, где d – радиус цилиндрической поверхности аппарата. Из условия локальной управляемости следует, что $l_m \geq 3$. Рассмотрим случай $l_m = 3$.

Для упрощения рассуждений разделим последнее уравнение системы (6) на $-J/(md)$. Матрица M коэффициентов при управлениях полученной системы (см. теорему 1) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos \phi_1 & \cos \phi_2 & \cos \phi_3 \\ 0 & \sin \phi_1 & \sin \phi_2 & \sin \phi_3 \\ 0 & \sin \psi_1 & \sin \psi_2 & \sin \psi_3 \\ 0 & \frac{1}{|\sin(\psi_1 + \phi_1)|} & \frac{1}{|\sin(\psi_2 + \phi_2)|} & \frac{1}{|\sin(\psi_3 + \phi_3)|} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что коэффициенты этой матрицы не зависят от $\bar{x}$, а значит, коэффициент локальной управляемости системы во всех состояниях одинаковый. Кроме того, $n = 3$, поэтому $V_n(1) = 4\pi/3$ и

$$k(x_f) = \sum_{i=0}^3 \frac{3|M_i|}{4\pi} \int_{G^i} (v_1 + v_2 + v_3) dv.$$

Таким образом, задача поиска параметров модели с наилучшей управляемостью сводится к нахождению минимума $k = k(x_f)$ по $\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3$, где $\phi_j \in [0, 2\pi]$, $\psi_j \in [0, 2\pi]$, $j = 1, 2, 3$.

Указанная экстремальная задача решалась численно. При этом для исключения деления на малые величины были добавлены следующие ограничения на значения параметров: $|\operatorname{tg}(\psi_j + \phi_j)| \geq 0.2$, $j = 1, 2, 3$, и $|M_i| > 0.1$, $i = 0, 1, 2, 3$. Оказалось, что функция $k(\phi_i, \psi_i)$ имеет большое количество точек локального минимума. Соответствующие значения коэффициента k указаны в таблице.

Системы с полученными значениями параметров были протестированы на следующих четырёх траекториях:

1) поворот

$$x(t) = 0, \quad z(t) = 0, \quad \theta(t) = \theta_f \left(2 \frac{t^3}{T^3} - 3 \frac{t^2}{T^2} \right), \quad t \in [0, T], \quad \theta_f = \frac{\pi}{4}, \quad T = 2 \text{ с};$$

2) движение по синусоиде вниз

$$x(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad z(t) = -\frac{2\pi t}{T}, \quad \theta(t) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\pi t/T) + 1}}, \quad t \in [0, T], \quad T = 18 \text{ с};$$

3) движение по горизонтальной синусоиде

$$x(t) = \frac{40\pi t}{T}, \quad z(t) = 2 \sin\left(\frac{20\pi t}{T}\right), \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} \cos\left(\frac{20\pi t}{T}\right), \quad t \in [0, T], \quad T = 350 \text{ с};$$

4) движение по эллипсу

$$x(t) = 20 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad z(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right), \quad t \in [0, T], \quad T = 210 \text{ с}.$$

Соответствующие значения функционала приведены в таблице.

Таблица. Значения функционала $\sum_{i=0}^3 u_i$

Параметры $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$	k	Траектория			
		1)	2)	3)	4)
2.06, 2.16, 4.28, 1.84, 4.33, 2.70	4.68	5.51	61.23	1124.93	115.49
1.15, 1.12, 3.67, 1.79, 4.27, 3.19	7.41	11.64	40.82	1528.06	243.45
2.11, 1.97, 4.28, 1.23, 4.11, 6.26	4.50	5.49	59.51	1114.02	114.14
2.06, 4.17, 4.17, 0, 5.06, 1.92	4.48	5.44	67.26	1105.61	112.94
1.87, 2.35, 4.23, 2.05, 4.13, 2.83	4.86	5.54	58.03	1109.14	113.69
2.11, 2.11, 4.23, 1.23, 4.37, 3.14	4.44	5.53	62.32	1132.80	116.62
2.09, 2.09, 4.19, 1.22, 4.37, 0	4.37	5.47	61.61	1121.26	115.05
1.74, 4.06, 4.14, 0.27, 5.16, 1.89	4.64	6.42	54.70	1186.55	130.13
1.57, 3.14, 4.19, 3.14, 1.57, 4.71	7.87	5.73	47.84	1011.71	119.65

Заключение. В работе рассмотрены локально управляемые системы с положительными управлениями, введены системы, названные системами с положительным базисом. Для таких систем доказано достаточное условие локальной управляемости, сформулирован алгоритм построения управления для движения по заданной траектории и определён коэффициент локальной управляемости.

Введённые понятия были исследованы для системы, описывающей движение подводного аппарата в вертикальной плоскости. Рассмотрен случай, когда аппарат управляется только винтомоторными агрегатами, винты которых вращаются только в одну сторону. Показано, что движение такого аппарата описывает система с положительным базисом. Она локально

управляема, только если винтомоторных агрегатов не менее четырёх. Задача минимизации потребляемой энергии двигателями аппарата эквивалентна задаче максимизации коэффициента управляемости для соответствующего функционала. Численные расчёты показали, что данный коэффициент имеет большое количество точек локального максимума. Значения функционала для некоторых наборов параметров на четырёх выбранных траекториях показали (см. таблицу), что при движении по конкретной траектории модель с меньшим значением коэффициента управляемости (с большим значением k) может быть более эффективной. Мы объясняем это тем, что определение коэффициента управляемости основано на вероятностных понятиях, и поэтому эффективность модели с максимальным значением коэффициента управляемости должна сказаться при движении на продолжительных и разнообразных траекториях.

Отметим также, что в работе рассмотрен только случай, когда сдвиг из любого состояния в любом направлении возможен и равновероятен. Однако в реальной ситуации вероятность сдвига в каком-либо направлении зависит от решаемой аппаратом задачи. По нашему мнению, закон распределения вероятности сдвига в направлении может быть определён при дополнительном исследовании траекторий аппарата с использованием искусственного интеллекта. При этом изменение закона распределения приведёт к изменению зависимости коэффициента локальной управляемости от параметров и к другим оптимальным значениям параметров.

Работа выполнена при поддержке программы “Приоритет 2030” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amory A., Maehle E.* SEMBIO-a small energy-efficient swarm AUV // OCEANS 2016 MTS/IEEE Monterey. Monterey, 2016. P. 1–7.
2. *Amory A., Maehle E.* Energy efficiency of the swarm-capable micro AUV SEMBIO // OCEANS 2019 Marseille. Marseille, 2019. P. 1–7.
3. *Fossen T.I.* Guidance and Control of Ocean Vehicles. Chichester, 1994.
4. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car // Automation and Remote Control. 2021. V. 82. № 5. P. 745–758.
5. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. 2022. V. 135. Art. 109968.
6. *Berlin L., Galyaev A., Lysenko P.* Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators // Mathematics. 2022. V. 10. Art. 3552.
7. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
8. *Петров Н.Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.
После доработки 07.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ ДЛИННЕЙШИХ

© 2023 г. Ю. Л. Сачков

Получены достаточные условия существования оптимальных траекторий в общих задачах оптимального управления со свободным терминальным временем, а также в сублоренцевых задачах.

DOI: 10.31857/S0374064123120105, EDN: NWKNMD

Введение. Лоренцева геометрия является математической основой теории относительности [1–3], а сублоренцева геометрия – попыткой обобщения субримановой геометрии [4, 5], задающейся распределением и положительно определённой в нём квадратичной формой, на случай квадратичной формы единичного индекса [6–15]. В данной работе методами геометрической теории управления [16–18] получены достаточные условия существования оптимальных траекторий в общих задачах оптимального управления со свободным терминальным временем, а также в сублоренцевых задачах.

1. Существование оптимальных управлений в задачах со свободным терминальным временем. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \text{ свободно}, \quad (2)$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(q, u) dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Обозначим множества достижимости [16–18] этой системы из точки q_0 :

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{q(t_1) : q(t), \quad t \in [0, t_1], \quad \text{траектория системы (1) т.ч. } t_1 \geq 0, \quad q(0) = q_0\}$$

– множество достижимости за произвольное неотрицательное время;

$$\mathcal{A}_{q_0}^- = \{q(t_1) : q(t), \quad t \in [t_1, 0], \quad \text{траектория системы (1) т.ч. } t_1 \leq 0, \quad q(0) = q_0\}$$

– множество достижимости за произвольное неположительное время;

$$\mathcal{A}_{q_0}^{t_1} = \{q(t) : q(t), \quad t \in [0, t_1], \quad \text{траектория системы (1) т.ч. } q(0) = q_0\}$$

– множество достижимости за время не больше $t_1 \geq 0$.

Как известно (см. [17, п. 10.2]), исследование задачи оптимального управления (1)–(3) сводится к исследованию множеств достижимости расширенной системы

$$\dot{\hat{q}} = \hat{f}(\hat{q}, u), \quad \hat{q} = (y, q) \in \widehat{M} = \mathbb{R} \times M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k, \quad (4)$$

$$\hat{f}(\hat{q}, u) = (\varphi(q, u), f(q, u)), \quad (5)$$

$$\hat{q}(0) = (0, q_0), \quad q(t_1) = q_1. \quad (6)$$

А именно, траектория $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, оптимальна в задаче (1)–(3) с оптимальным значением функционала J тогда и только тогда, когда для соответствующей траектории $\hat{q}(t) = (\int_0^t \varphi(q, u) dt, q(t))$ системы (4), (5) выполнено условие

$$\widehat{\mathcal{A}}_{(0, q_0)} \cap \{(y, q_1) : y < J\} = \emptyset. \quad (7)$$

Здесь и далее $\widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}$ есть множество достижимости системы (4), (5) из точки $(0, q_0)$ за произвольное неотрицательное время.

Теорема 1. Пусть для системы (4)–(6) выполнены условия:

- 1) множество $U \subset \mathbb{R}^k$ компактно;
- 2) для любого $\widehat{q} \in \widehat{M}$ множество $\widehat{f}_U(\widehat{q}) = \{\widehat{f}(\widehat{q}, u) : u \in U\} \subset T_{\widehat{q}}\widehat{M}$ выпукло;
- 3) существует компакт $\widehat{K} \subset \widehat{M}$, содержащий образы всех траекторий $\widehat{q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, системы (4), (5) с граничными условиями (6);
- 4) существует траектория $\widehat{q}'(t) = (y'(t), q'(t))$, $t \in [0, t'_1]$, системы (4), (5) с граничными условиями $\widehat{q}'(0) = (0, q_0)$, $\widehat{q}'(t'_1) = (J', q_1)$ такая, что для любой траектории $\widehat{q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, системы (4), (5) с граничными условиями $\widehat{q}(0) = (0, q_0)$, $\widehat{q}(t_1) = (J, q_1)$ из неравенства $t_1 > t'_1$ следует неравенство $J > J'$.

Тогда в задаче оптимального управления (1)–(3) существует оптимальное управление.

Доказательство. Существует компакт $\widehat{K}_1 \subset \widehat{M}$ такой, что $\widehat{K} \subset \text{int } \widehat{K}_1$. Возьмём любую функцию $a \in C^\infty(\widehat{M})$ такую, что $a|_{\widehat{K}} \equiv 1$, $a|_{\widehat{M} \setminus \widehat{K}_1} \equiv 0$. Рассмотрим, наряду с системой (4), систему

$$\dot{\widehat{q}} = \overline{f}(\widehat{q}, u) := a(\widehat{q}) \cdot \widehat{f}(\widehat{q}, u), \quad \widehat{q} \in \widehat{M}, \quad u \in U. \quad (8)$$

В силу теоремы Филиппова [17, теорема 10.1] множества достижимости $\overline{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}^t$ системы (8) из точки $(0, q_0)$ за время не большее t компактны для любого $t \geq 0$, поэтому пересечение $\overline{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}^{t'_1} \cap \{(y, q_1) \in \widehat{M}\}$ компактно. Но системы (4) и (8) имеют одни и те же траектории с граничными условиями (6), потому и пересечение

$$\widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}^{t'_1} \cap \{(y, q_1) \in \widehat{M}\} = \overline{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}^{t'_1} \cap \{(y, q_1) \in \widehat{M}\}$$

также компактно. Положим $\widetilde{J} = \min\{y : (y, q_1) \in \widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}^{t'_1}\}$. Существует траектория $\widetilde{q}(t)$, $t \in [0, \widetilde{t}_1]$, $\widetilde{t}_1 \leq t'_1$, системы (4) с граничными условиями $\widetilde{q}(0) = (0, q_0)$, $\widetilde{q}(\widetilde{t}_1) = (\widetilde{J}, q_1)$. Соответствующая траектория $q(t)$, $t \in [0, \widetilde{t}_1]$, системы (1) оптимальна в задаче (1)–(3), так как

$$\widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)} \cap \{(y, q_1) \in \widehat{M} : y < \widetilde{J}\} = \widehat{\mathcal{A}}_{(0,q_0)}^{t'_1} \cap \{(y, q_1) \in \widehat{M} : y < \widetilde{J}\} = \emptyset$$

(ср. с (7)). Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (4) теоремы 1 выполнено, в частности, если не существует траектории $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, системы (1), удовлетворяющей граничным условиям (2) и неравенству $t_1 > t'_1$.

Определим следующую функцию на $M \times M$, задающую максимальное время движения траекторий системы (1) от точки q_0 до точки q_1 :

$$T(q_0, q_1) := \sup\{t_1 > 0 : \text{существует траектория } q(t) \text{ системы (1), } t \in [0, t_1], \\ \text{такая, что } q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1\}. \quad (9)$$

Условие (4) теоремы 1 может быть ослаблено до более простого условия:

4') $T(q_0, q_1) < +\infty$.

Условие 4') выполнено, если $q = (x^1, \dots, x^n) \in M \subset \mathbb{R}^n$, и в силу управляемой системы (1) для одной из координат имеет место неравенство $\dot{x}^i \geq C > 0$. В этом случае

$$T(q_0, q_1) \leq |x_1^i - x_0^i|/C.$$

2. Существование сублоренцевых длиннейших. Рассмотрим задачу о длиннейших для сублоренцевой структуры с ортонормированным репером $X_1, \dots, X_k \in \text{Vec}(M)$:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \quad q \in M, \quad (10)$$

$$u \in U = \left\{ u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k : -u_1^2 + \sum_{i=2}^k u_i^2 \leq 0, \quad -u_1 \leq 0 \right\}, \quad (11)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \text{ свободно}, \quad (12)$$

$$l = \int_0^{t_1} \left(u_1^2 - \sum_{i=2}^k u_i^2 \right)^{1/2} dt \rightarrow \max. \quad (13)$$

Переходя на траекториях системы (10), (11) к новому времени $s(t) = \int_0^t u_1(\tau) d\tau$, получаем задачу оптимального управления, эквивалентную задаче (10)–(13):

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \quad q \in M, \quad (14)$$

$$u \in U' = \left\{ u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=2}^k u_i^2 \leq 1, \quad u_1 = 1 \right\}, \quad (15)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \text{ свободно}, \quad (16)$$

$$l = \int_0^{t_1} \left(1 - \sum_{i=2}^k u_i^2 \right)^{1/2} dt \rightarrow \max. \quad (17)$$

Траектории этих систем различаются лишь параметризацией времени с одним и тем же значением функционала качества l . Поэтому сублоренцевы длиннейшие в задаче (14)–(17) и в задаче (10)–(13) существуют или не существуют одновременно.

Будем далее обозначать через $T(q_0, q_1)$ функцию (9) для системы (14), (15).

Теорема 2. Пусть для задачи (14)–(17) выполнены условия:

- 1) $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$;
- 2) множество $\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-$ компактно;
- 3) $T(q_0, q_1) < +\infty$.

Тогда в задаче (14)–(17) существует оптимальная траектория.

Доказательство. Рассмотрим, наряду с первой задачей (14)–(17), вторую задачу

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^k u_i X_i, \quad q \in M, \quad (18)$$

$$(u_0, u) \in V = \left\{ (u_0, u) \in \mathbb{R}^{k+1} : u_0 \in [0, 1], \quad u_1 = 1, \quad \sum_{i=2}^k u_i^2 \leq 1 \right\}, \quad (19)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad t_1 \text{ свободно}, \quad (20)$$

$$J = \int_0^{t_1} \varphi(u) dt \rightarrow \min, \quad \varphi(u) = -u_0 \left(1 - \sum_{i=2}^k u_i^2 \right)^{1/2}. \quad (21)$$

При $u_0 = 1$ вторая задача (18)–(21) совпадает с первой задачей (14)–(17). При этом для второй задачи любая траектория, для которой $u_0|_S < 1$ на множестве $S \subset [0, t_1]$ положительной меры, неоптимальна. Поэтому оптимальные траектории в обеих задачах (14)–(17) и (18)–(21) существуют или не существуют одновременно.

Проверим, что вторая задача (18)–(21) удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы 1. Для этой задачи расширенная система (4), (5) имеет вид

$$\dot{\hat{q}} = \hat{f}(\hat{q}, u_0, u), \quad \hat{q} = (y, q) \in \widehat{M} = \mathbb{R} \times M, \quad (u_0, u) \in V, \quad (22)$$

$$\widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u) = \left(\varphi(u), \sum_{i=1}^k u_i X_i \right). \quad (23)$$

1. Множество значений управляющего параметра V компактно.

2. Для любого $\widehat{q} \in \widehat{M}$ множество допустимых скоростей

$$\widehat{f}_V(\widehat{q}) = \{\widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u) : (u_0, u) \in V\}$$

выпукло. Действительно, выберем в $T_q M$ координаты $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ так, чтобы $X_i(q) = \partial q / \partial x_i$, $i = \overline{1, k}$, и обозначим координату в $T_y \mathbb{R}$ через $\dot{y}$. Тогда

$$\widehat{f}(\widehat{q}, u_0, u) = (\dot{y}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = (\varphi(u), u_1, \dots, u_k, \dot{x}_{k+1}, \dots, \dot{x}_n)$$

и множество

$$\widehat{f}_V(\widehat{q}) = \left\{ (\dot{y}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in T_{\widehat{q}} \widehat{M} : \dot{y}^2 \leq 1 - \sum_{i=2}^k \dot{x}_i^2, \quad \dot{y} \leq 0 \right\}$$

выпукло.

3. Докажем, что существует компакт $\widehat{K} \subset \widehat{M}$, содержащий носители всех траекторий $\widehat{q}(t) = (y(t), q(t))$, $t \in [0, t_1]$, расширенной системы (22), (23) с граничными условиями (6). Действительно, пусть $\widehat{q}(t)$, $t \in [0, t_1]$, есть любая такая траектория. Тогда

$$\{q(t) : t \in [0, t_1]\} \subset \mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-, \quad |y(t)| \leq \int_0^t |\varphi(u)| dt \leq t \leq t_1 \leq T(q_0, q_1),$$

так как $\varphi|_V \leq 1$, откуда $\{y(t) : t \in [0, t_1]\} \subset [0, T(q_0, q_1)]$, и искомый компакт есть $\widehat{K} = [0, T(q_0, q_1)] \times (\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-)$.

Условие 4) теоремы 1 следует из условия 3) данной теоремы (см. замечание 1).

Все условия 1)–4) теоремы 1 выполнены, поэтому оптимальная траектория существует во второй задаче (18)–(21), а также и в первой задаче (14)–(17) (а значит, и в задаче (10)–(13)).

Замечание 2. Условие 2) теоремы 2 может очевидным образом быть заменено более слабым условием

2') существует компакт $K \subset M$ такой, что носитель любой траектории системы (10), (11) с граничными условиями (12) содержится в K .

Замечание 3. Теорема 2 есть обобщение на сублоренцев случай аналогичной теоремы, известной в лоренцевой геометрии [2, с. 66].

Замечание 4. М. Гроховским [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть для любых $q_0, q_1 \in M$ выполнены условия 2), 3) теоремы 2. Если для некоторых $q_0, q_1 \in M$ выполнено условие 1) теоремы 2, то для них существует оптимальная траектория.

Теорема 3 следует из теоремы 2. Теорема 2 сильнее теоремы 3, так как в теореме 2 требуется проверка условий 2), 3) лишь для точек q_0, q_1 из граничных условий задачи (16), а не для всех точек $q_0, q_1 \in M$, как в теореме 3 (см. также далее примеры пп. 3.2, 3.5).

3. Примеры.

3.1. Пространство Минковского. Пусть $M = \mathbb{R}_{x^1, \dots, x^n}^n$, $X_i = \partial / \partial x^i$, $i = \overline{1, n}$, $q_j = (x_j^1, \dots, x_j^n) \in M$, $j = 0, 1$. Тогда

$$\mathcal{A}_{q_0} = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in M : x^1 - x_0^1 \geq \left(\sum_{i=2}^n (x^i - x_0^i)^2 \right)^{1/2} \right\},$$

$$\mathcal{A}_{q_1}^- = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in M : x^1 - x_1^1 \leq - \left(\sum_{i=2}^n (x^i - x_1^i)^2 \right)^{1/2} \right\},$$

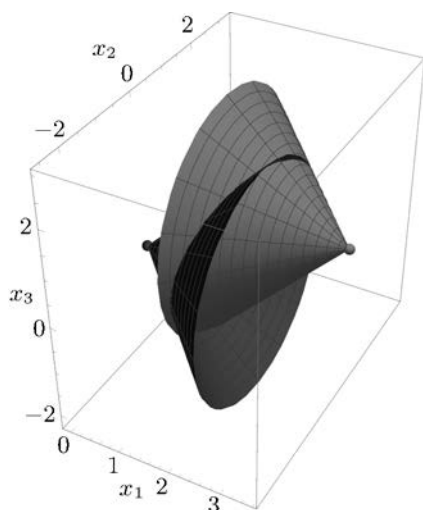


Рис. 1. Пространство Минковского.

гиперболы или прямой, соединяющая q_0 и q_1 (см. [19]).

Случай 2. Если же $y_1 \leq x_1 - 1$, то множество $\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-$ непусто и некомпактно. Кроме того, нарушается условие 3) теоремы 2, так как возможно сколь угодно долгое движение вблизи абсолюта $\{y = 0\}$ (рис. 3). Лоренцева длиннейшая не существует (см. [19]).

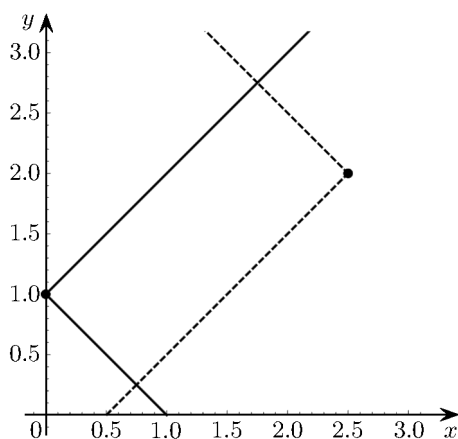


Рис. 2. Лоренцева плоскость Лобачевского, случай 1.

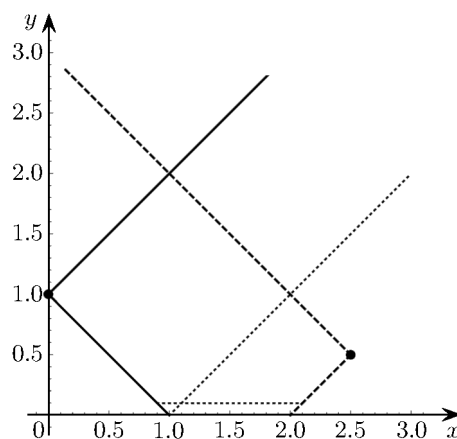


Рис. 3. Лоренцева плоскость Лобачевского, случай 2.

Теорема 3 к данной задаче неприменима, так как существуют точки $q_0, q_1 \in M$, для которых нарушаются условия этой теоремы (см. случай 2).

3.3. Сублоренцева группа Гейзенберга. Пусть

$$M = \mathbb{R}_{x,y,z}^3, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad q_0 = (0, 0, 0), \quad q_1 = (x_1, y_1, z_1) \in M.$$

Тогда [6]

$$\mathcal{A}_{q_0} = \left\{ (x, y, z) \in M : |z| \leq \frac{x^2 - y^2}{4}, \quad x \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{A}_{q_1}^- = \left\{ (x, y) \in M : \left| z - z_1 - \frac{x_1 y - y_1 x}{2} \right| \leq \frac{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}{4}, \quad x \leq x_1 \right\},$$

и множества $\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-$ компактны (рис. 4). Условие 3) теоремы 2 выполнено, так как $\dot{x} = 1$ для системы (14), (15), откуда $T(q_0, q_1) \leq |x_0 - x_1|$. Если $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$, то лоренцева длиннейшая

существует по теореме 2. Если $q_1 \in \partial \mathcal{A}_{q_0}$, то длиннейшая аномальная и светоподобная, а в случае $q_1 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}$ длиннейшая нормальная и времениподобная.

3.4. Лоренцева структура на двумерном торе. Пусть

$$M = \mathbb{T}_{x,y}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad q_0 = (0, 0), \quad q_1 = (x_1, 0) \in M.$$

Тогда $\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-$ компактно в силу компактности тора. Траектория $e^{tX_1}(q_0)$ периодическая, поэтому $T(q_0, q_1) = +\infty$. Лоренцевой длиннейшей, соединяющей q_0 и q_1 , не существует. Этот пример показывает существенность условия 3) теоремы 2.

3.5. Геодезически неполная лоренцева структура на плоскости. Пусть

$$M = \mathbb{R}_{x,y}^2, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = (y^2 + 1) \frac{\partial}{\partial y}, \quad q_0 = (0, 0), \quad q_1 = (x_1, 0) \in M.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_{q_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |\arctg y|\}, \quad \mathcal{A}_{q_1}^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - x_1 \leq -|\arctg y|\}$$

и при $x_1 \geq \pi$ пересечение $\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^- \supset \{(\pi/2, y) \in \mathbb{R}^2\}$ некомпактно (рис. 5). Однако $\dot{x} = 1$, откуда $T(q_0, q_1) = x_1$ при $x_1 \geq 0$. Лоренцева длиннейшая, соединяющая q_0 и q_1 , существует (это прямолинейный отрезок), при $x_1 \in (0, \pi)$ это следует из теоремы 2. Данный пример показывает, что условие 2) теоремы 2 не является необходимым для существования длиннейших.

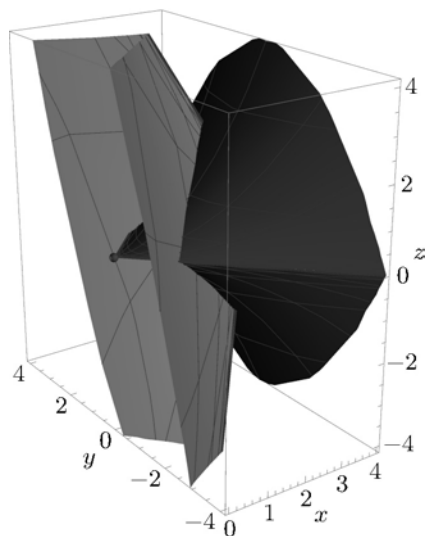


Рис. 4. Сублоренцева группа Гейзенберга.

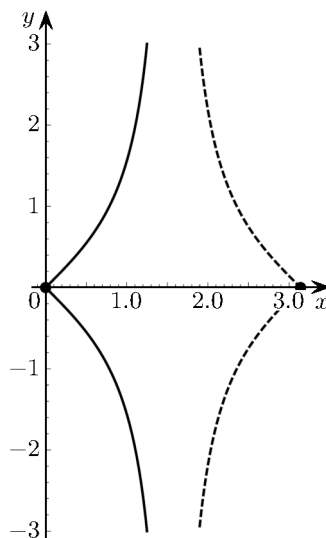


Рис. 5. Лоренцева структура на плоскости.

Теорема 3 к данной задаче неприменима, так как существуют точки $q_0, q_1 \in M$, для которых нарушается условие 2) этой теоремы.

3.6. Сублоренцева структура на группе SH(2). Пусть M есть группа гиперболических движений плоскости

$$\text{SH}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \text{ch } z & \text{sh } z & x \\ \text{sh } z & \text{ch } z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$X_1 = \text{ch } z \frac{\partial}{\partial x} + \text{sh } z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad q_0 = (0, 0, 0), \quad q_1 = (x_1, y_1, z_1) \in M.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{q_0} &= \{(x, y, z) \in M : x \geq 0, \quad |z| \leq \operatorname{arsh} x, \quad \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z)\}, \\ \varphi_1(x, z) &= 1 + \operatorname{ch} z - \sqrt{4 + (x - \operatorname{sh} z)^2}, \quad \varphi_2(x, z) = \sqrt{4 + (x + \operatorname{sh} z)^2} - 1 - \operatorname{ch} z, \\ \mathcal{A}_{q_0}^- &= \{(x, y, z) \in M : x \leq 0, \quad |z| \leq -\operatorname{arsh} x, \quad \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z)\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{q_1}^- = q_1 \mathcal{A}_{q_0}^-$$

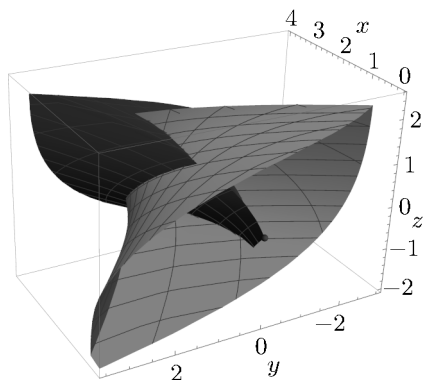


Рис. 6. Группа $\widetilde{\text{SE}}(2)$.

и множества $\mathcal{A}_{q_0} \cap \mathcal{A}_{q_1}^-$ компактны (рис. 6). Условие 3) теоремы 2 выполнено, так как $\dot{x} = \operatorname{ch} z \geq 1$ для системы (14), (15), откуда $T(q_0, q_1) \leq |x_0 - x_1|$. Если $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}$, то сублоренцева длиннейшая существует по теореме 2. Если $q_1 \in \partial \mathcal{A}_{q_0}$, то эта длиннейшая аномальная и светоподобная, а в случае $q_1 \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{q_0}$ длиннейшая нормальная и времени-подобная.

3.7. Сублоренцевы структуры на группах $\text{SE}(2)$, $\widetilde{\text{SE}}(2)$.

Пусть M есть группа евклидовых движений плоскости

$$\text{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \right\},$$

$$X_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad q_0 = (0, 0, 0), \quad q_1 = (x_1, y_1, \theta_1) \in M.$$

Тогда [20] $\mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{A}_{q_1}^- = M$, $T(q_0, q_1) = +\infty$, и сублоренцевой длиннейшей не существует.

Эти же факты справедливы для поднятия задачи на односвязную накрывающую $\widetilde{\text{SE}}(2)$.

Заключение. Примеры п. 3.2 (случай 2) и п. 3.7 показывают, что при нарушении условий 2) и 3) теоремы 2 сублоренцевы длиннейшие могут не существовать.

Примеры пп. 3.4, 3.6 показывают, что нарушение условия 3) теоремы 2 может приводить к несуществованию длиннейших.

Остаётся открытым вопрос, может ли приводить к несуществованию длиннейших нарушение лишь условия 2) теоремы 2?

Автор признателен рецензенту, полезные замечания которого побудили к рассмотрению примеров из пп. 3.6, 3.7.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00140).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wald R.M. General Relativity. Chicago, 1984.
2. Beem J.K., Ehrlich P.E., Easley K.L. Global Lorentzian Geometry. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. V. 202. New York; Basel; Hong Kong, 1996.
3. Müller O., Sánchez M. An Invitation to Lorentzian Geometry // Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 2014. V. 115. P. 153–183.
4. Montgomery R. A Tour of Subriemannian Geometries, their Geodesics and Applications. Providence, 2002.
5. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry from Hamiltonian Viewpoint. Cambridge, 2019.
6. Grochowski M. Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. of Dynamical and Control Systems. 2006. V. 12. № 2. P. 145–160.
7. Grochowski M. Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 2002. V. 50. P. 161–178.

8. *Grochowski M.* Normal forms of germs of contact sub-Lorentzian structures on $\mathbb{R}^3$. Differentiability of the sub-Lorentzian distance // J. Dynam. Control Systems. 2003. V. 9. № 4. P. 531–547.
9. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 59. № 7. P. 885–900.
10. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177. № 3. P. 383–394.
11. *Grochowski M.* On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ // Geometric Singularity Theory. Banach Center Publications. Warszawa, 2004. V. 65. P. 57–65.
12. *Chang D.-C., Markina I., Vasil'ev A.* Sub-Lorentzian geometry on anti-de Sitter space // J. Math. Pures Appl. 2008. V. 90. P. 82–110.
13. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19. P. 864–889.
14. *Grong E., Vasil'ev A.* Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover // J. Geom. Mech. 2011. V. 3. № 2. P. 225–260.
15. *Grochowski M., Medvedev A., Warhurst B.* 3-dimensional left-invariant sub-Lorentzian contact structures // Differ. Geometry and its Appl. 2016. V. 49. P. 142–166.
16. *Jurdjevic V.* Geometric Control Theory. Cambridge, 1997.
17. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М., 2005.
18. *Сачков Ю.Л.* Введение в геометрическую теорию управления. М., 2021.
19. *Сачков Ю.Л.* Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского // Мат. заметки. 2023. V. 114. № 1. P. 127–130.
20. *Bonnard B., Jurdjevic V., Kupka I., Sallet G.* Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 271. № 2. P. 525–535.

Институт программных систем
имени А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.
После доработки 05.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

УДК 517.977.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

© 2023 г. А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Изучается задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий движения поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества.

DOI: 10.31857/S0374064123120117, EDN: NWUHBJ

1. Введение. Постановка задачи. В ограниченной области $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_0^t e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f(t, x); \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$v(t, x)|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0; \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ – искомые скорость и давление рассматриваемой среды; $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – тензор скорости деформации с элементами $\mathcal{E}_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$; $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ – константы, отвечающие за вязкоупругие свойства изучаемой жидкости; $z(\tau; t, x)$ – траектория движения частицы жидкости; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера (см. [1, с. 29]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т.е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

Начально-краевая задача (1)–(4) является математической моделью движения вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траектории движения частицы среды (см. работы [2–7], в которых исследован вопрос слабой разрешимости частных случаев рассматриваемой модели). Наличие интегрального слагаемого в уравнении (1) отражает учёт памяти сплошной среды, которую необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы среды. Таким образом, возникает $z(s; t, x)$ -траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы, находящейся в момент времени t в точке x . Данная траектория определяется полем скоростей v . Необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v , т.е. чтобы уравнение (3) имело единственное решение для поля скоростей v . Для этого в работе разрешимость интегральной задачи Коши (3) изучается в терминах регулярных лагранжевых потоков (РЛП) (см. [8–10]).

В данной статье для изучаемой математической модели рассматривается задача управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число исследований (см., например, книгу [11] и приведённую в ней библиографию), однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье–Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются “неньютоновскими жидкостями”). Список работ, где рассматриваются задачи оптимального

управления, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости, существенно короче (см. [12–14]). В настоящей статье доказывается существование оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью.

2. Постановка задачи управления и основной результат. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из множества Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω . Обозначим множество $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 – по норме $W_2^1(\Omega)$. Через V^{-1} будем обозначать сопряжённое пространство к V^1 . Введём пространство

$$W = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\},$$

в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи.

Перейдём к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W \rightrightarrows L_2(0, T; V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W и имеет непустые компактные выпуклые значения;

(Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху (т.е. для каждого $v \in W$ и открытого множества $V \subset L_2(0, T; V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$) и компактно (т.е. образ Ψ относительно компактен в $L_2(0, T; V^{-1})$);

(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} := \sup\{\|u\|_{L_2(0, T; V^{-1})} : u \in \Psi(v)\} \leq M \quad \text{для всех } v \in W;$$

(Ψ4) отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W$, $v_l \rightharpoonup v_0$, $u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \rightarrow u_0$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1)–(4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \quad (5)$$

Таким образом, в работе рассматриваем задачу управления с обратной связью (1)–(5). Будем предполагать, что начальное условие v_0 принадлежит пространству V^0 .

Определение. Слабым решением задачи управления с обратной связью (1)–(5) называется пара функций $(v, f) \in W \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющая:

- a) условию обратной связи (5);
- b) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

где z – РЛП, порождённый v ;

- c) начальному условию $v(0) = v_0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4). Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(5).

Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(0, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1)–(5). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- (Ф1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;
 (Ф2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. Если отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)$ – $(\Psi 4)$, а функционал Φ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)$, $(\Psi 2)$, то задача оптимального управления с обратной связью (1)–(5) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Доказательство данных утверждений состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В.Г. Звягиным [15, 16], доказываются существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказываются существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение показывается, что во множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. Схема доказательства. Рассмотрим следующее семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных задач с малым параметром $\theta > 0$. Необходимо найти пару функций $(v, f) \in W_1 \times \times L_2(0, T; V^{-1})$ ($W_1 = \{v \in C([0, T]; V^3), v' \in L_2(0, T; V^3)\}$), удовлетворяющих:

- а) условию обратной связи (5);
 б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \xi \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + \\ + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_{\Omega} e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) ds dx = \xi \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

где z – РЛП, порождённый v ;

- с) начальному условию $v(0) = \xi v_0$.

Далее для изучения вспомогательной задачи перейдём к операторной трактовке. Введём операторы

$$J : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1;$$

$$A_2 : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle A_2 v, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1;$$

$$B : V^1 \times [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \quad (B(v, z)(t), \varphi) = \left(\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right),$$

$$v \in V^1, \quad z \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (0, T);$$

$$K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1.$$

Также определим следующие операторы:

$$L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A_2)v' + \mu_0 Av, v|_{t=0});$$

$$\begin{aligned}
C : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\
G : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right); \\
\mathcal{Y} : W_1 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad \mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0).
\end{aligned}$$

Тогда задача о нахождении управления с обратной связью для вспомогательной задачи при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$, удовлетворяющего начальному условию $v(0) = \xi v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$ операторного включения

$$v \in \xi \mathcal{M}, \quad (6)$$

где $\mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v))$.

Для введённых выше операторов справедливы следующие свойства.

Лемма 1. 1. *Отображение $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ обратимо и обратное к нему отображение $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ является непрерывным.*

2. *Отображение $K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является компактным.*

3. *Отображение $B : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ является L -уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k .*

Далее для операторного включения (6) доказываются априорные оценки.

Лемма 2. *Если $v \in W_1$ – решение семейства включений (6) для некоторого $\xi \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка $\|v\|_{W_1} \leq C$, где константа C зависит от θ .*

Из данной априорной оценки следует, что все решения операторного включения (6) лежат в шаре $B_R \subset W_1$ с центром в нуле и радиуса $R = C + 1$. Согласно утверждению 1 леммы 1 оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi \mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R .

В силу утверждения 1 леммы 1 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ является непрерывным. Согласно утверждениям 2 и 3 леммы 1 отображение $(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)) : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_1 \rightarrow W_1$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k .

Таким образом, векторное поле $v - \xi \mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi \mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что $\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1$. Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_1$ включения (6) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи при $\xi = 1$.

Далее для полученного решения вспомогательной задачи при $\xi = 1$ доказывается следующая оценка решений.

Лемма 3. *Если $v \in W_1$ – решение семейства включений (6) для $\xi = 1$, то для него имеет место оценка $\|v\|_W \leq C_1$, где константа C_1 не зависит от θ .*

На основе оценки леммы 3, условий $(\Psi 1)$ – $(\Psi 4)$, плотного вложения пространства V^3 в V^0 , без ограничения общности (если необходимо переходя к подпоследовательности) получаем, что для любого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0 ; $v^m \rightarrow v^*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$ при $m \rightarrow \infty$; $v^m \rightarrow v^*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; V^0)$ при $m \rightarrow \infty$; $(v^m)' \rightarrow (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow \infty$; $z^m(\tau; t, x)$ сходится по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ по (τ, x) к $z(\tau; t, x)$ для $t \in [0, T]$ и существует $f^* \in L_2(0, T; V^{-1})$ такое, что $f^m \rightarrow f^* \in \Psi(v^*)$ при $m \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ в интегральном равенстве для вспомогательной задачи при $\xi = 1$, получаем, что предельная пара функций (v^*, f^*) удовлетворяет интегральному равенству из определения слабого решения задачи управления с обратной связью (1)–(5), условию обратной связи (5) и начальному условию из (4). Это и завершает доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что множество решений Σ не пусто. Таким образом, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Как и ранее, используя оценку леммы 3, без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности), можем предположить, что $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0, T; V^0)$; $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(0, T; L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$; $z_l(\tau; t, x) \rightarrow z_*(\tau; t, x)$ по норме Лебега относительно $(\tau, x) \in [0, T] \times \Omega$; $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v_*)$ сильно в $L_2(0, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow +\infty$.

Аналогично как в п. 2 перейдём к пределу во включении

$$Jv'_l + \mu_0 Av_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

и получим включение

$$Jv'_* + \mu_0 Av_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Следовательно, $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, то имеем $\Phi(v_*, f_*) \leq \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$, откуда следует, что (v_*, f_*) – требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-10026).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. Zvyagin V., Orlov V. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
3. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74. № 3. С. 189–190.
4. Звягин В.Г., Орлов В.П. О регулярности слабых решений обобщённой модели вязкоупругости Фойгта // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1933–1949.
5. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–97.
6. Zvyagin V., Orlov V. Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory // J. of Math. Fluid Mech. 2021. V. 23. Art. 9.
7. Zvyagin V.G., Kostenko E.I. Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory // Lobachevskii J. of Math. 2023. V. 44. № 3. P. 969–988.
8. DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Inventiones Mathematicae. 1989. V. 98. № 3. P. 511–547.
9. Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2008. V. 1. № 2. P. 333–348.
10. Crippa G., de Lellis C. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. für die reine und angewandte Mathematik. 2008. V. 616. P. 15–46.
11. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
12. Звягин А.В. Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
13. Zvyagin V., Zvyagin A., Ustiuzhaninova A. Optimal feedback control problem for the fractional Voigt α -model // Math. 2020. V. 8. № 7. Art. 1197.
14. Звягин В.Г., Звягин А.В., Хонг Н.М. Об оптимальном управлении с обратной связью для модели движения нелинейно-вязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 1. С. 135–139.
15. Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Соврем. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 46. С. 92–119.
16. Звягин В.Г., Турбин М.В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М., 2012.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.09.2023 г.

После доработки 08.09.2023 г.

Принята к публикации 11.10.2023 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

© 2023 г. Б. Ю. Иргашев

Получено решение задачи Коши для одного вырождающегося уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна, частные решения которого представлены с помощью функции Килбаса–Сайго.

DOI: 10.31857/S0374064123120129, EDN: NWUWZQ

В последнее время интенсивно изучаются уравнения с производными дробного порядка с переменными коэффициентами. В работе [1] изучалось уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} x^{\beta} u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < b,$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$, λ – спектральный параметр. В статье [2] были найдены решения в замкнутой форме уравнений дробного порядка

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) = ax^{\beta} y(x) + f(x), \quad 0 < x < d \leq \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

$$(D_{-}^{\alpha} y)(x) = ax^{\beta} y(x) + f(x), \quad 0 \leq d < x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

с производными Римана–Лиувилля на полуоси $(0, \infty)$ (см. [3, с. 85]).

К таким уравнениям приводят многие прикладные задачи [4]. Примером является уравнение теории полярной географии [5]

$$(D_{0+}^{1/2} y)(x) = ax^{\beta} y(x) + x^{-1/2}, \quad x > 0, \quad -1/2 < \beta \leq 0,$$

возникающее при $a = -1$ в задачах диффузии [5].

Рассмотрим следующее уравнение:

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u(y), \quad y > 0, \quad \lambda, s \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1 > 0$, ассоциированный с последовательностью

$$\{\gamma_k\}_0^m = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}, \quad \gamma_k \in (0, 1], \quad k = \overline{0, m},$$

определяемый соотношением [6]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} = D_{0y}^{\gamma_m-1} D_{0y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0},$$

D_{0y}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка γ с началом в точке $y = 0$ [1, с. 9]:

$$D_{0y}^{\gamma} g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^y \frac{g(t) dt}{|y-t|^{1+\gamma}}, & \gamma < 0, \\ g(y), & \gamma = 0, \\ \left(\frac{d}{dy}\right)^p D_{0y}^{\gamma-p} g(y), & p-1 < \gamma \leq p, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

В работе [6] рассмотрена задача Коши для уравнения

$$\sum_{k=0}^n a_k D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u(y) = f(y) \quad (2)$$

с переменными коэффициентами. Исследуемая задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Доказана теорема существования и единственности решения. В статье [7] в терминах функции Райта построено явное представление решения задачи Коши для уравнения (2). В статье [8] для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка вида (2) с производными Римана–Лиувилля была сформулирована и решена начальная задача.

В данной работе в терминах функции Килбаса–Сайго строится решение следующей задачи Коши (см. [6]).

Задача Коши. Найти функцию $u(y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:

- 1) $u(y) \in L_1[0, l]$, $0 < l < +\infty$;
- 2) $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_j\}} u(y) \in AC[0, l]$, $0 \leq j \leq m-1$;
- 3) $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u$, $y > 0$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0\}} u(y) = A_0$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1\}} u(y) = A_1$, $\dots$, $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}\}} u(y) = A_{m-1}$, здесь A_i , $i = \overline{0, m-1}$, – заданные константы.

Теорема. Пусть $\alpha > 0$, $\gamma_0 + \gamma_m + s > 1$. Тогда задача Коши имеет единственное решение.

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} d_k u_k(y), \quad (3)$$

где d_k – произвольные постоянные и

$$u_k(y) = y^{\alpha_k} E_{\alpha, (\alpha+s)/\alpha, (\alpha_k+s)/\alpha}(\lambda y^{\alpha+s}).$$

Здесь

$$E_{\alpha, m, l} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad c_0 = 1, \quad c_i = \prod_{j=0}^i \frac{\Gamma(\alpha(jm+l)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+l+1)+1)}, \quad i \geq 1,$$

– функция Килбаса–Сайго [2].

Для определения постоянных d_k запишем функции u_k в виде

$$u_k(y) = c_0 y^{\alpha_k} + c_1 \lambda y^{\alpha_k + \alpha + s} + y^{\alpha_k} \sum_{n=2}^{\infty} c_n (\lambda y^{\alpha+s})^n, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Учитывая неравенство $\gamma_0 + \gamma_m + s > 1$ и применяя формулу (см. [6])

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_j\}} y^{\alpha_k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq j-1, \\ \Gamma(1 + \alpha_k), & k = j, \\ \frac{\Gamma(1 + \alpha_k)}{\Gamma(1 + \alpha_k - \alpha_j)} y^{\alpha_k - \alpha_j}, & j < k \leq m, \end{cases}$$

из начальных условий 3) задачи Коши находим

$$d_k = \frac{A_k}{\Gamma(\alpha_k + 1)}.$$

Теперь покажем, что представление

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k y^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} E_{\alpha, (\alpha+s)/\alpha, (\alpha_k+s)/\alpha}(\lambda y^{\alpha+s})$$

удовлетворяет уравнению (1). Из обобщённой формулы Ньютона–Лейбница (см., например, [9, с. 15]) имеем

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} u = D_{0y}^{\alpha} u - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{\alpha_k - \alpha} A_k}{\Gamma(\alpha_k - \alpha + 1)}.$$

Далее, используя формулу (10) из работы [2] (в нашем случае $m = (\alpha + s)/\alpha$, $l = (\alpha_k + s)/\alpha$, $\alpha_k = \alpha(l - m + 1)$), будем иметь

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m\}} u(y) = \lambda y^s u(y).$$

Перейдём к единственности решения. Пусть функция $u(y)$ – решение задачи Коши. Из результата работы [6, лемма 1] следует, что $u(y)$ есть также решение следующего интегрального уравнения Вольтерры:

$$u(y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k y^{\alpha_k}}{\Gamma(1 + \alpha_k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1} t^s u(t) dt, \quad 0 \leq y \leq l. \quad (4)$$

Из условий 1) и 2) задачи Коши следует интегрируемость функции $y^s u(y)$. Это означает, что интегральное уравнение (4) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Из утверждения теоремы следует, что общее решение уравнения (1) из класса $L_1[0, l]$, $0 < l < +\infty$, можно представить в виде (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. *Килбас А.А., Сайго М.* Решение в замкнутой форме одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 195–204.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
4. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. New York; London, 1974.
5. *Wiener K.* On solutions of a differential equation of nonintegral order that occurs in the theory of polarography // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe. 1983. V. 32. № 1. Р. 41–46.
6. *Джэрбашян М.М., Нерсисян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. № 1. С. 3–28.
7. *Богатырева Ф.Т.* Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 5. С. 21–26.
8. *Псху А.В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сб. 2011. Т. 202. № 4. С. 111–122.
9. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.

Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан,
Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз,
г. Ташкент

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.
После доработки 21.09.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 59, 2023 г. *)

DOI: 10.31857/S0374064123120130, EDN: NWXFVA

<i>Абакумов М.В., Исаков В.А.</i> О квазиакустической схеме А.П. Фаворского	6	780–790
<i>Абдуллаев О.Х.</i> Нелокальная задача с интегральным условием склеивания для нагруженного парабола-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто	3	350–357
<i>Александров А.Ю.</i> Об асимптотической устойчивости и предельной ограниченности решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием	4	435–445
<i>Алексеев М.В.</i> см. Полехина Р.Р.	7	968–982
<i>Алимов Ш.А., Пирматов Ш.Т.</i> О явлении Пински для В-эллиптических операторов	5	596–607
<i>Алимов Ш.А., Шералиев Ш.Н.</i> О гиперсингулярных операторах, связанных с перидинамикой	7	914–918
<i>Алимуратов Р.Г., Марголина Н.Л., Троскина А.Е., Ширяев К.Е.</i> Об отношении порядка между ляпуновским старшим, центральным и особым верхними показателями неограниченной системы	6	864
<i>Амелькин В.В.</i> Письмо в редакцию	3	432
<i>Амосова Е.В.</i> Регулярность функции давления для слабых решений нестационарных уравнений Навье–Стокса	9	1205–1221
<i>Антоновская О.Г.</i> К исследованию робастной экспоненциальной устойчивости непрерывных и дискретных систем	4	446–455
<i>Антоновская О.Г.</i> О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов	3	295–302
<i>Антоновская О.Г.</i> Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных корней характеристического уравнения	6	707–711
<i>Апаков Ю.П., Мамажонов С.М.</i> Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами	2	183–192
<i>Арабян М.О.</i> Об условиях оптимальности задачи минимизации веса оболочки вращения при заданной частоте колебаний	9	1266–1282
<i>Артемяева М.В., Корпусов М.О.</i> О разрушении решения одной задачи для соболевского уравнения с некоэрцитивным источником	7	893–903
<i>Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.</i> О нелинейных краевых задачах для дифференциальных включений	11	1443–1450
<i>Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю.</i> Об одном классе задач управления со смешанными ограничениями	4	520–530
<i>Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.</i> Об оценках сверху управляющей функции в параболической задаче управления с точечным наблюдением	6	847–849
<i>Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.</i> Оптимизация с помощью управления весовой и начальной функциями в параболической экстремальной задаче с точечным наблюдением	8	1144–1146

*) Составитель указателя С.Г. Красовский.

<i>Асташова И.В., Нижишов В.А.</i> О продолжаемости и асимптотике решений уравнения Риккати с вещественными корнями правой части	6	856–858
<i>Асташова И.В.</i> Об асимптотической эквивалентности квазилинейных уравнений при возмущении степенной малости	11	1585–1586
<i>Астровский А.И.</i> О преобразовании линейных нестационарных систем наблюдения к стационарному виду	8	1146–1148
<i>Бабушкин М.В., Тертычный-Даури В.Ю.</i> Вариационные методы решения задач, связанных с искусственным интеллектом	7	919–932
<i>Бадерко Е.А., Сахаров С.И.</i> Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами	5	608–618
<i>Бадерко Е.А., Семенов К.В.</i> О фундаментальном решении для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами	2	193–207
<i>Бадерко Е.А., Федоров К.Д.</i> О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости	12	1606–1618
<i>Балашов М.В.</i> Внутренность интеграла от многозначного отображения и задачи с линейной управляемой системой	8	1098–1109
<i>Барabanов Е.А., Быков В.В.</i> Коэффициент неправильности Ляпунова и индекс экспоненциальной устойчивости линейной параметрической системы как вектор-функция параметра	6	852–854
<i>Барabanов Е.А., Быков В.В.</i> Поведение размерностей линеалов решений правильной системы при бесконечно малых параметрических возмущениях её матрицы коэффициентов	11	1581–1582
<i>Барановский Е.С.</i> Начально-краевая задача для течения жидкости с памятью в трёхмерной сетеподобной области	4	501–511
<i>Белов И.Р.</i> см. Юрченков А.В.	11	1550–1560
<i>Бесова М.И.</i> Голоморфная регуляризация сингулярно возмущённых уравнений высшего порядка	6	849–850
<i>Бободжанов А.А., Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф.</i> Сингулярно возмущённые интегро-дифференциальные системы с ядрами, зависящими от решений дифференциальных уравнений	5	693–704
<i>Бобылев А.А.</i> Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы	1	115–129
<i>Болдырева Е.С.</i> Об устойчивости периодических решений модельного уравнения Навье–Стокса в тонком слое	11	1561–1565
<i>Бондарев А.А.</i> Два примера неодномерных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью	6	859–861
<i>Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.</i> Анализ многоточечной краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения	12	1591–1598
<i>Борисов Д.И., Зезюлин Д.А.</i> О бифуркации порогов существенного спектра в присутствии спектральной сингулярности	2	270–274
<i>Боровских А.В.</i> Метод распространяющихся волн	5	619–634
<i>Бризицкий Р.В., Максимов П.А.</i> Об устойчивости решений задач управления для нелинейной модели реакции–диффузии–конвекции	3	409–421
<i>Бровкин В.В.</i> О существовании решений задачи Неймана для p -лапласиана на параболических многообразиях с модельным концом	1	30–34
<i>Булатов М.В., Соловарова Л.С.</i> Многошаговые методы для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка	3	389–399
<i>Булатов Ю.Н.</i> см. Ляхов Л.Н.	4	483–493
<i>Бураго Н.Г.</i> см. Голубев В.И.	6	803–813

<i>Быков В.В.</i> см. Барабанов Е.А.	11	1581–1582
<i>Быков В.В.</i> см. Барабанов Е.А.	6	852–854
<i>Быстрецкий М.В.</i> см. Мухамадиев Э.	7	1001–1004
<i>Вабищевич П.Н.</i> Разностные схемы декомпозиции на основе расщепления решения и оператора задачи	7	944–959
<i>Валовик Д.В., Мартынова В.Ю.</i> Об одной неклассической задаче на собственные значения, имеющей нелинеаризуемые решения	3	303–313
<i>Василевич М.Н.</i> см. Руденок А.Е.	2	170–182
<i>Васильев А.В., Васильев В.Б.</i> Эллиптические задачи и интегральные уравнения в пространствах различной гладкости по переменным	6	735–745
<i>Васильев В.Б.</i> см. Васильев А.В.	6	735–745
<i>Васильев В.Д.</i> см. Денисов Н.В.	11	1579–1580
<i>Велищанский М.А., Четвериков В.Н.</i> Поиск параметров модели с наилучшей локальной управляемостью	12	1692–1701
<i>Ветохин А.Н.</i> К задаче Миллионщикова о классе Бэра минорант показателей Ляпунова спустя 30 лет	11	1576–1577
<i>Ветохин А.Н.</i> О некоторых свойствах топологической энтропии на пространстве непрерывных отображений множества Кантора	6	854–855
Власов В.В. , Раутиан Н.А. Спектральные свойства генератора полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением	2	275–279
<i>Войделевич А.С.</i> Линейные рекуррентные уравнения в пространстве выпуклых компактов и диаметры их решений	8	1084–1088
<i>Волдаб М.С.</i> см. Родина Л.И.	8	1022–1028
<i>Вьонг Чан Куанг, Солдатов А.П.</i> О фундаментальной матрице решений плоской анизотропной теории упругости	5	635–641
<i>Высоцкий А.О.</i> см. Фомичев В.В.	11	1571–1574
<i>Высоцкий А.О.</i> см. Фомичев В.В.	2	252–256
<i>Габбасов Н.С.</i> Специальный вариант метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений	4	512–519
<i>Гавриков М.Б., Таюрский А.А.</i> Аналитическое решение смешанных задач для уравнений одномерной ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов	10	1335–1356
<i>Галанин М.П., Родин А.С.</i> Задача о неидеальном тепловом контакте	6	791–802
<i>Глушак А.В.</i> Задача Дирихле на полуоси для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащего степени неограниченного оператора	10	1357–1372
<i>Глызин С.Д., Колесов А.Ю.</i> О некоторых свойствах отображения сдвига на бесконечномерном торе	7	867–880
<i>Голубев В.И., Никитин И.С., Бураго Н.Г., Голубева Ю.А.</i> Явно- неявные схемы расчёта динамики упруговязкопластических сред с малым временем релаксации	6	803–813
<i>Голубева Ю.А.</i> см. Голубев В.И.	6	803–813
<i>Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.</i> Об оптимальной обратной связи в линейно-квадратичной задаче оптимального управления системой дробного порядка	8	1110–1122
<i>Гомоюнов М.И.</i> О связи принципа максимума Понтрягина и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в задачах оптимального управления системами дробного порядка	11	1515–1521
<i>Гребеничиков Б.Г., Ложников А.Б.</i> Асимптотические свойства одного класса систем с линейным запаздыванием	5	569–581

<i>Давыдов А.А., Хачатрян Х.А., Петросян А.С.</i> О решениях одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки на всей числовой прямой	11	1500–1514
<i>Данилин А.Р., Шабуров А.А.</i> Асимптотика решения линейных сингулярно возмущённых задач оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и “дешёвым” управлением	1	85–99
<i>Деменчук А.К., Конюх А.В.</i> О теореме Массеры о существовании периодических решений линейных периодических систем и её обобщении	11	1580–1581
<i>Деменчук А.К.</i> Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с диагональным представлением среднего значения матрицы коэффициентов	2	285–286
<i>Денисов А.М., Дунцин Чжю.</i> Существование двух решений обратной задачи для математической модели динамики сорбции	10	1433–1437
<i>Денисов А.М.</i> Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных	6	746–751
<i>Денисов Н.В., Васильев В.Д.</i> Определение и свойства примитивной меры устойчивости нулевого решения дифференциальной системы	11	1579–1580
<i>Дунцин Чжю</i> см. Денисов А.М.	10	1433–1437
<i>Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.</i> Определение двумерного ядра релаксации интегро-дифференциального волнового уравнения	2	208–222
<i>Дурдиев У.Д.</i> Нелокальная обратная задача по времени для уравнения колебаний балки с интегральным условием	3	358–367
<i>Дурдиев У.Д.</i> Обратная задача по определению неизвестного коэффициента уравнения колебания балки в бесконечной области	4	456–466
<i>Дюзева А.В.</i> см. Кожанов А.И.	2	223–235
<i>Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потапов Д.К.</i> Об одном типе колебательных решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле и возмущением	2	150–163
<i>Евстафьева В.В.</i> Колебательные решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле без выхода в зоны насыщения	6	712–725
<i>Евстафьева В.В.</i> см. Камачкин А.М.	7	996–1000
<i>Елисеев А.Г., Ратникова Т.А., Шапошникова Д.А.</i> Решение сингулярно возмущённой смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота у предельного оператора	8	1029–1045
<i>Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.</i> Построение интегральных представлений для полей в задачах дифракции на пронизываемых телах вращения	9	1240–1246
<i>Жуковская З.Т.</i> см. Арутюнов А.В.	11	1443–1450
<i>Жуковский Е.С., Серова И.Д.</i> О задаче управления для системы неявных дифференциальных уравнений	9	1283–1296
<i>Жуковский С.Е.</i> см. Арутюнов А.В.	11	1443–1450
<i>Зайдель М.И.</i> Полное описание пар индексов устойчивости и экспоненциальной устойчивости линейной системы при экспоненциально убывающих параметрических возмущениях	11	1582–1583
<i>Зайцев В.А., Ким И.Г.</i> Назначение конечного спектра и стабилизация билинейных систем с сосредоточенным и распределённым запаздываниями	8	1148–1151
<i>Зайцева Н.В., Муравник А.Б.</i> Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене	3	368–373
<i>Закора Д.А.</i> Спектральные свойства оператора в задаче о колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей	4	467–482
<i>Зверева М.Б.</i> Задача о двумерных колебаниях струны с нелинейным условием	8	1046–1056

<i>Звягин А.В., Костенко Е.И.</i> О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта	12	1710–1714
<i>Звягин В.Г., Устюжанинова А.С.</i> Обратные аттракторы модели Бингама	3	374–379
<i>Зезюлин Д.А.</i> см. Борисов Д.И.	2	270–274
<i>Ибадов Э.Дж.</i> О свойствах систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка с суммируемым потенциалом	10	1299–1317
<i>Иванов Н.О.</i> см. Скубачевский А.Л.	7	881–892
<i>Игнатъев А.О.</i> О некоторых свойствах решений систем линейных разностных уравнений с периодическими правыми частями	4	494–500
<i>Изобов Н.А., Ильин А.В.</i> Вариант антиперроновского эффекта смены показателей Ляпунова у двумерных дифференциальных систем при возмущениях высшего порядка малости	8	1143–1144
<i>Изобов Н.А., Ильин А.В.</i> Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости	12	1599–1605
<i>Ильин А.В., Фурсов А.С.</i> О задаче стабилизации переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями	2	283–284
<i>Ильин А.В.</i> см. Изобов Н.А.	12	1599–1605
<i>Ильин А.В.</i> см. Изобов Н.А.	8	1143–1144
<i>Иргашев Б.Ю.</i> Решение задачи Коши для одного вырождающегося уравнения с дробной производной Джрбашяна–Нерсесяна	12	1715–1717
<i>Исаков В.А.</i> см. Абакумов М.В.	6	780–790
<i>Кадиев Р.И.</i> Устойчивость по части переменных систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием	10	1318–1334
<i>Калимбетов Б.Т.</i> см. Бободжанов А.А.	5	693–704
<i>Камачкин А.М., Евстафьева В.В., Потапов Д.К.</i> Существование единственной неподвижной точки отображений, порождённых многомерной системой с релейным гистерезисом	7	996–1000
<i>Камачкин А.М.</i> см. Евстафьева В.В.	2	150–163
<i>Канатников А.Н., Ткачева О.С.</i> Поведение траекторий четырёхмерной модели ВИЧ-инфекции	11	1451–1461
<i>Кангузжин Б.Е., Кошанов Б.Д.</i> Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A	1	4–14
<i>Капустин Н.Ю.</i> О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя целого порядка с квадратом спектрального параметра в граничном условии	10	1438–1440
<i>Карамзин Д.Ю.</i> см. Арутюнов А.В.	4	520–530
<i>Карачик В.В.</i> Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре	8	1057–1069
<i>Кашникова А.П.</i> см. Кожевникова Л.М.	1	35–50
<i>Кащенко С.А.</i> Асимптотика релаксационных циклов в обобщённом логистическом уравнении с запаздыванием	4	563–566
<i>Керимов Н.Б.</i> О спектральных свойствах дифференциальных операторов высокого порядка с периодическими краевыми условиями	3	314–332
<i>Ким И.Г.</i> см. Зайцев В.А.	8	1148–1151
<i>Климов В.С.</i> Оценки интегрально ограниченных решений линейных дифференциальных неравенств	9	1157–1171
<i>Кожанов А.И., Дюжеева А.В.</i> Корректность обобщённой задачи Самарского–Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области	2	223–235

<i>Кожеевникова Л.М., Кашиникова А.П.</i> Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака–Орлича	1	35–50
<i>Козлов А.А.</i> Равномерная глобальная достижимость дискретных периодических систем	2	289–290
<i>Козлов В.В.</i> Неаналитические первые интегралы аналитических систем дифференциальных уравнений в окрестности устойчивых положений равновесия	6	843–846
<i>Колесов А.Ю.</i> см. Глызин С.Д.	7	867–880
<i>Кондырев О.В.</i> см. Смирнов Ю.Г.	8	1089–1097
<i>Коненков А.Н.</i> Существование и единственность классического решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости	7	904–913
<i>Коньков А.А.</i> Об отсутствии решений у дифференциальных неравенств с ∞ -лапласианом	2	236–251
<i>Конюх А.В.</i> см. Деменчук А.К.	11	1580–1581
<i>Корзюк В.И., Рудько Я.В.</i> Классическое решение второй смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом	9	1222–1239
<i>Корзюк В.И., Рудько Я.В.</i> Классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом	8	1070–1083
<i>Корпусов М.О.</i> см. Артемьева М.В.	7	893–903
<i>Косов А.А., Семенов Э.И.</i> О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями	12	1619–1640
<i>Косов А.А., Семенов Э.И.</i> Об одном нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка	1	138–141
<i>Костенко Е.И.</i> см. Звягин А.В.	12	1710–1714
<i>Кошанов Б.Д.</i> см. Кангужин Б.Е.	1	4–14
<i>Крищенко А.П., Поддерегин О.А.</i> Бифуркация Хопфа в системе хищник–жертва с инфекцией	11	1566–1570
<i>Круглов В.Е.</i> Построение полиномиальных собственных функций линейного дифференциального уравнения второго порядка	9	1172–1180
<i>Крылов П.А.</i> см. Фурсов А.С.	11	1541–1549
<i>Крылов П.А.</i> см. Фурсов А.С.	4	554–562
<i>Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А.</i> О существовании решения краевой задачи на графе для нелинейного уравнения четвертого порядка	9	1181–1190
<i>Курина Г.А., Хоай Нгуен Тхи.</i> Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае	1	73–84
<i>Лансеев Е.Б., Черникова Н.Ю.</i> Принцип минимума функционала Тихонова в задаче устойчивого продолжения поля потенциала с поверхности	6	752–762
<i>Лаптинский В.Н.</i> см. Бондарев А.Н.	12	1591–1598
<i>Лашин Д.А.</i> см. Астапова И.В.	6	847–849
<i>Лашин Д.А.</i> см. Астапова И.В.	8	1144–1146
<i>Лобода Н.А., Сташ А.Х.</i> Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем	6	862–863
<i>Ложников А.Б.</i> см. Гребенщиков Б.Г.	5	569–581
<i>Ломов И.С.</i> Спектральные свойства одного сингулярного дифференциального оператора на отрезке с условиями сопряжения	5	582–587
<i>Лопушенко В.В.</i> см. Еремин Ю.А.	9	1240–1246

<i>Лукоянов Н.Ю.</i> см. Гомоюнов М.И.	8	1110–1122
<i>Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рошупкин С.А., Санина Е.Л.</i> Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова	4	483–493
<i>Максимов В.И.</i> Об одной задаче позиционного управления нелинейным уравнением с распределёнными параметрами	11	1522–1532
<i>Максимов П.А.</i> см. Бризицкий Р.В.	3	409–421
<i>Мамажонов С.М.</i> см. Апаков Ю.П.	2	183–192
<i>Марголина Н.Л.</i> см. Алимуратов Р.Г.	6	864
<i>Мартынова В.Ю., Смирнов Ю.Г., Тихонравов А.В.</i> Численный метод оптимизации дифракционной эффективности тонкослойных покрытий с дифракционными решётками	3	400–408
<i>Мартынова В.Ю.</i> см. Валовик Д.В.	3	303–313
<i>Матус П.П., Пылак Д.</i> Глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера	7	960–967
<i>Мачтаков А.И.</i> см. Петров Н.Н.	7	933–943
<i>Мельникова А.А., Точилин П.А.</i> Об одной задаче вычисления множества разрешимости для линейной системы с неопределённостью	11	1533–1540
<i>Метельский А.В.</i> Стабилизация дифференциально-разностной системы запаздывающего типа	4	531–553
<i>Миронов А.Н., Миронова Л.Б.</i> К задаче Дарбу для гиперболических систем	5	642–651
<i>Миронова Л.Б.</i> см. Миронов А.Н.	5	642–651
<i>Можегова Е.С., Петров Н.Н.</i> Об одной задаче конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов во временных шкалах	8	1151–1152
<i>Моисеев Т.Е.</i> Задача Геллерстедта с нелокальным краевым условием нечётности для уравнения Лаврентьева–Бицадзе	10	1373–1384
<i>Мокейчев В.С., Сидоров А.М.</i> Разрешимость линейных дифференциальных уравнений	11	1462–1470
<i>Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л.</i> Алгоритм подвижного окна для параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров	6	814–827
<i>Мосолова Ю.М.</i> см. Фурсов А.С.	10	1425–1432
<i>Муравник А.Б.</i> см. Зайцева Н.В.	3	368–373
<i>Мухамадиев Э., Наимов А.Н., Быстрецкий М.В.</i> Об ограниченных траекториях автономной системы с выделенной положительно однородной нелинейностью	7	1001–1004
<i>Мухамадиев Э., Наимов А.Н.</i> О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью	2	280–282
<i>Мухсинов Е.М.</i> Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве	1	142–146
<i>Наимов А.Н.</i> см. Мухамадиев Э.	2	280–282
<i>Наимов А.Н.</i> см. Мухамадиев Э.	7	1001–1004
Некролог. Власов Виктор Валентинович	2	149
Некролог. Евгений Иванович Моисеев	1	3
<i>Нефедов Н.Н., Орлов А.О.</i> Существование и устойчивость решений с внутренним переходным слоем уравнения реакции–диффузии–адвекции с KPZ-нелинейностью	8	1007–1021

<i>Никитин И.С.</i> см. Голубев В.И.	6	803–813
<i>Никишов В.А.</i> см. Астапова И.В.	6	856–858
<i>Николенко П.В.</i> О некоторых экстремальных задачах, связанных с перемещением в поле скоростей	3	422–431
<i>Нормуродов Х.Н.</i> см. Хасанов А.Б.	10	1412–1424
<i>Орлов А.О.</i> см. Нефедов Н.Н.	8	1007–1021
<i>Петров И.Б.</i> см. Хохлов Н.И.	7	983–995
<i>Петров Н.Н., Мачтаков А.И.</i> Линейная задача группового преследования с дробными производными, простыми матрицами и разными возможностями игроков	7	933–943
<i>Петров Н.Н.</i> см. Можегова Е.С.	8	1151–1152
<i>Петросян А.С.</i> см. Давыдов А.А.	11	1500–1514
<i>Петросян А.С.</i> см. Хачатрян Х.А.	3	380–388
<i>Пивень В.Ф.</i> Двумерные задачи фильтрации жидкости с граничными источниками в анизотропном неоднородном слое	6	763–779
<i>Пирматов Ш.Т.</i> см. Алимов Ш.А.	5	596–607
<i>Поддерезин О.А.</i> см. Крищенко А.П.	11	1566–1570
<i>Полехина Р.Р., Алексеев М.В., Савенков Е.Б.</i> К вопросу о численном решении неконсервативных гиперболических систем уравнений	7	968–982
<i>Полосин А.А.</i> Об асимптотике спектра интегрального оператора с логарифмическим ядром специального вида	12	1680–1691
<i>Поляков Д.М.</i> О спектральных свойствах самосопряжённого оператора четвёртого порядка	2	164–169
<i>Попова С.Н., Федорова М.В.</i> Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы	2	287–288
<i>Потапов Д.К.</i> Аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью	9	1191–1198
<i>Потапов Д.К.</i> см. Евстафьева В.В.	2	150–163
<i>Потапов Д.К.</i> см. Камачкин А.М.	7	996–1000
<i>Пылак Д.</i> см. Матус П.П.	7	960–967
<i>Раджабов Н., Раджабова Л.Н.</i> Интегральные уравнения типа Вольтерры с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками	9	1247–1259
<i>Раджабова Л.Н.</i> см. Раджабов Н.	9	1247–1259
<i>Расулов А.Б.</i> О влиянии неизолированных особенностей в младшем коэффициенте уравнения Бицадзе на постановку краевых задач	10	1385–1396
<i>Ратникова Т.А.</i> см. Елисеев А.Г.	8	1029–1045
<i>Раутиан Н.А.</i> см. Власов В.В.	2	275–279
<i>Ревизников Д.Л.</i> см. Морозов А.Ю.	6	814–827
<i>Родин А.С.</i> см. Галанин М.П.	6	791–802
<i>Родина Л.И., Волдеаб М.С.</i> О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий	8	1022–1028
<i>Романов В.Г.</i> Одномерная обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики	10	1397–1411
<i>Россовский Л.Е., Шамин Р.В.</i> О влиянии нерегулярности границы области на решение краевой задачи для уравнения Лапласа	5	652–657

<i>Рощупкин С.А.</i> см. Ляхов Л.Н.	4	483–493
<i>Руденок А.Е., Василевич М.Н.</i> О базисе Грёбнера идеала ляпуновских величин системы Куклеса	2	170–182
<i>Рудько Я.В.</i> см. Корзюк В.И.	8	1070–1083
<i>Рудько Я.В.</i> см. Корзюк В.И.	9	1222–1239
<i>Рязанцева И.П.</i> Непрерывный метод нахождения обобщённой неподвижной точки нерастягивающего отображения на множестве гильбертова пространства	1	130–137
<i>Савенков Е.Б.</i> см. Полехина Р.Р.	7	968–982
<i>Самохин А.Б., Самохина А.С., Юрченков И.А.</i> Интегральное уравнение Фредгольма для задач акустического рассеяния на трёхмерных прозрачных структурах	9	1260–1265
<i>Самохина А.С.</i> см. Самохин А.Б.	9	1260–1265
<i>Санина Е.Л.</i> см. Ляхов Л.Н.	4	483–493
<i>Сафаров Ж.Ш.</i> см. Дурдиев Д.К.	2	208–222
<i>Сафонов В.Ф.</i> см. Бободжанов А.А.	5	693–704
<i>Сахаров С.И.</i> Начально-краевые задачи для однородных параболических систем в полуограниченной плоской области и условие дополненности	12	1641–1653
<i>Сахаров С.И.</i> см. Бадерко Е.А.	5	608–618
<i>Сачков Ю.Л.</i> Существование сублоренцевых длиннейших	12	1702–1709
<i>Семенов К.В.</i> см. Бадерко Е.А.	2	193–207
<i>Семенов Э.И.</i> см. Косов А.А.	1	138–141
<i>Семенов Э.И.</i> см. Косов А.А.	12	1619–1640
<i>Сергеев И.Н., Уманский К.В.</i> Совпадающие критерии ляпуновской и периодической приводимости линейной автономной системы к линейному автономному уравнению	6	855–856
<i>Сергеев И.Н.</i> Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению	6	726–734
<i>Сергеев И.Н.</i> Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы	6	851–852
<i>Сергеев И.Н.</i> Определение полных свойств колеблемости и вращаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению	11	1586–1588
<i>Сергеев И.Н.</i> Определение свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы	6	858–859
<i>Сергеев И.Н.</i> Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы	11	1577–1579
<i>Серова И.Д.</i> см. Жуковский Е.С.	9	1283–1296
<i>Сетуша А.В.</i> Об аппроксимации поверхностных производных функций с применением интегральных операторов	6	828–842
<i>Сидоров А.М.</i> см. Мокейчев В.С.	11	1462–1470
<i>Симаков Р.Е.</i> Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с одномасштабным внутренним слоем	3	333–349
<i>Скубачевский А.Л., Иванов Н.О.</i> Обобщённые решения первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде на интервале конечной длины	7	881–892
<i>Скубачевский А.Л.</i> О существовании глобальных слабых решений с компактными носителями системы Власова–Пуассона с внешним магнитным полем	11	1471–1499

<i>Смирнов М.С.</i> О разрешимости линейных дифференциальных операторов на векторных расслоениях над многообразием	12	1654–1667
<i>Смирнов Ю.Г., Кондырев О.В.</i> О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца	8	1089–1097
<i>Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.</i> О существовании бесконечного спектра затухающих вытекающих ТЕ-поляризованных волн открытого неоднородного цилиндрического металлодиэлектрического волновода, покрытого слоем графена	9	1199–1204
<i>Смирнов Ю.Г.</i> см. Мартынова В.Ю.	3	400–408
<i>Смолькин Е.Ю.</i> см. Смирнов Ю.Г.	9	1199–1204
<i>Солдатов А.П.</i> см. Вьонг Чан Куанг	5	635–641
<i>Соловарова Л.С.</i> см. Булатов М.В.	3	389–399
<i>Сташ А.Х.</i> О нулевых спектрах показателей колеблемости и вращаемости треугольных дифференциальных систем	6	861–862
<i>Сташ А.Х.</i> Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка	5	588–595
<i>Сташ А.Х.</i> Об управлении суслинскими спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней линейных однородных дифференциальных уравнений	11	1575–1576
<i>Сташ А.Х.</i> см. Лобода Н.А.	6	862–863
<i>Сташ А.Х.</i> Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения	8	1139–1142
<i>Таюрский А.А.</i> см. Гавриков М.Б.	10	1335–1356
<i>Тертычный-Даури В.Ю.</i> см. Бабушкин М.В.	7	919–932
<i>Тимергалиев С.Н.</i> О существовании решений нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия оболочек типа Тимошенко в изометрических координатах	5	658–674
<i>Тихонравов А.В.</i> см. Мартынова В.Ю.	3	400–408
<i>Ткачева О.С.</i> см. Канатников А.Н.	11	1451–1461
<i>Точилин П.А.</i> см. Мельникова А.А.	11	1533–1540
<i>Троскина А.Е.</i> О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы	6	863–864
<i>Троскина А.Е.</i> см. Алимуратов Р.Г.	6	864
<i>Тусупбекова Э.Е.</i> Исследование и анализ системы, описывающей модель “лес-биомасса”	11	1583–1585
<i>Тюленев А.В.</i> Пример невычислимых решений задачи Коши для волнового уравнения с вычислимыми начальными условиями	6	850–851
<i>Уманский К.В.</i> см. Сергеев И.Н.	6	855–856
<i>Умаров Х.Г.</i> Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для модельного уравнения в частных производных третьего порядка	1	51–72
<i>Уртаева А.А.</i> см. Кулаев Р.Ч.	9	1181–1190
<i>Устюжанинова А.С.</i> см. Звягин В.Г.	3	374–379
<i>Федоров К.Д.</i> см. Бадерко Е.А.	12	1606–1618
<i>Федорова М.В.</i> см. Попова С.Н.	2	287–288
<i>Фетисов Д.А.</i> О линеаризации нелинейных систем с одним управлением на основе масштабирования времени и однократного продолжения	1	100–114
<i>Филиновский А.В.</i> см. Астахова И.В.	6	847–849

<i>Филиновский А.В.</i> см. Астахова И.В.	8	1144–1146
<i>Фомичев В.В., Высоцкий А.О.</i> Критерий устойчивости и точные оценки для алгоритма “супер-скручивания”	2	252–256
<i>Фомичев В.В., Высоцкий А.О.</i> О вариации параметра нелинейности в алгоритме “super-twisting”	11	1571–1574
<i>Фурсов А.С., Крылов П.А.</i> О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы	11	1541–1549
<i>Фурсов А.С., Крылов П.А.</i> Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов	4	554–562
<i>Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.</i> Некоторые теоретические аспекты нейросетевого подхода к стабилизации переключаемых интервальных систем	10	1425–1432
<i>Фурсов А.С.</i> см. Ильин А.В.	2	283–284
<i>Хартковский В.Е.</i> О методах асимптотической оценки решения линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием	2	290–292
<i>Хартковский В.Е.</i> Условия асимптотической наблюдаемости линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием	8	1152–1154
<i>Хасанов А.Б., Нормуродов Х.Н., Худаёров У.О.</i> Задача Коши для нелинейного уравнения Лиувилля в классе периодических бесконечнозонных функций	10	1412–1424
<i>Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г.</i> Задача Коши для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза в классе периодических функций	12	1668–1679
<i>Хасанов Т.Г.</i> см. Хасанов А.Б.	12	1668–1679
<i>Хачатрян Х.А., Петросян А.С.</i> О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений с оператором Гаммерштейна–Стилтьеса на полуоси	3	380–388
<i>Хачатрян Х.А.</i> см. Давыдов А.А.	11	1500–1514
<i>Хоай Нгуен Тхи</i> см. Курина Г.А.	1	73–84
<i>Хохлов Н.И., Петров И.Б.</i> Сеточно-характеристический метод повышенного порядка для систем гиперболических уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами	7	983–995
<i>Худаёров У.О.</i> см. Хасанов А.Б.	10	1412–1424
<i>Цехан О.Б.</i> Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем	8	1123–1138
<i>Черникова Н.Ю.</i> см. Ланеев Е.Б.	6	752–762
<i>Чернов А.В.</i> О точной управляемости полулинейного эволюционного уравнения с неограниченным оператором	2	257–269
<i>Четвериков В.Н.</i> см. Велицанский М.А.	12	1692–1701
<i>Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.</i> Свойства вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений и начальных задач для них	1	15–29
<i>Чистякова Е.В.</i> см. Чистяков В.Ф.	1	15–29
<i>Шабуров А.А.</i> см. Данилин А.Р.	1	85–99
<i>Шамин Р.В.</i> см. Россовский Л.Е.	5	652–657
<i>Шапошникова Д.А.</i> см. Елисеев А.Г.	8	1029–1045
<i>Шералиев Ш.Н.</i> см. Алимов Ш.А.	7	914–918
<i>Ширяев К.Е.</i> см. Алимуратов Р.Г.	6	864
<i>Щеглова А.А.</i> К вопросу существования решений вырожденных систем с дискретным временем	5	675–692
<i>Юрченков А.В., Белов И.Р.</i> Лемма об ограниченности анизотропной нормы стационарной системы с мультипликативными шумами	11	1550–1560
<i>Юрченков И.А.</i> см. Самохин А.Б.	9	1260–1265