ISSN 0374-0641

Том 60, Номер 1

Январь 2024

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ДУ

300 лет

Российская Академия Наук

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 1, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ЛЮДИ НАУКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 3–12

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925+517.968

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. В. С. Бесов, В. И. Качалов

Для решения весьма важных с точки зрения приложений интегро-дифференциальных сингулярно возмущённых уравнений давно применяется метод регуляризации С.А. Ломова. При этом представляющие решения этих уравнений ряды по степеням малого параметра сходились асимптотически. Однако, в соответствии с основной концепцией метода, для построения общей теории сингулярных возмущений требуется указать условия обычной сходимости таких рядов, что и рассматривается в данной статье.

Ключевые слова: метод регуляризации С.А. Ломова, интегро-дифференциальное уравнение, псевдоголоморфное решение, существенно особое многообразие.

DOI: 10.31857/S0374064124010014, EDN: RPVANH

1. Введение. Постановка задачи. Для изучения сингулярно возмущённых задач, многие из которых являются дифференциальными, разработаны различные асимптотические методы, с помощью которых строятся решения этих задач в виде рядов по степеням малого параметра [1–3]. При этом каждый метод по своему описывает сингулярную зависимость решений от малого параметра, что позволяет судить о пограничном слое, присутствующем в каждом таком решении. В настоящее время одним из наиболее используемых методов решения сингулярно возмущённых задач является «метод погранфункций» Васильевой–Бутузова–Нефёдова, с помощью которого решаются многие типы как обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, так и уравнений в частных производных [4, 5].

Метод регуляризации С.А. Ломова описывает пограничный слой с помощью спектра предельного оператора и сводит исходную сингулярно возмущённую задачу к регулярно возмущённой, а теория таких задач разработана достаточно хорошо [6, гл. VII, § 1]. Более того, появилась возможность построения так называемых псевдоаналитических (псевдоголоморфных) решений, т.е. решений, представимых в виде рядов по степеням малого параметра, сходящихся в обычном смысле [7, гл. I, § 4, 5], что дополняет аналитическую теорию Пуанкаре [8, гл. III, §§ 2; 9].

Понятие псевдоголоморфного решения поясним в самом общем случае. Пусть в банаховом пространстве E задана эволюционная задача

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t u = F(t,u), \quad t \in (0,T], \\ u\big|_{t=0} = u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F(t,u)$ — нелинейный оператор, действующий в E при каждом $t \in [0,T]$. Обозначим через ω_0 множество на комплексной плоскости переменной ε, у которого точка $\varepsilon = 0$ является предельной.

Определение 1. Решение $u(t,\varepsilon)$ задачи Коши (1) называется *псевдоголоморфным* на множестве ω_0, если для него имеет место представление в виде ряда

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t,\varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t,\varepsilon^{-1}) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t,\varepsilon^{-1}) + \ldots,$$

который сходится при каждом фиксированном $\varepsilon \in \omega_0$ равномерно на некотором отрезке $[0,T_\varepsilon] \subset [0,T]$.

В линейном случае для построения псевдоголоморфных решений использовались пространства векторов экспоненциального типа [10], в нелинейном — метод голоморфной регуляризации [11]. Тем самым появилась возможность построения точных решений сингулярно возмущённых задач [12].

Рассмотрим при малых положительных значениях параметра ε следующую сингулярно возмущенную задачу:

$$\varepsilon\dot{u} = A(t)u + \varepsilon^2\int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau)u(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad u(0,\varepsilon) = u^0, \tag{2}$$

где $u = \begin{pmatrix}u_1 & \ldots & u_m\end{pmatrix}^T$, $u^0 = \begin{pmatrix}u_1^0 & \ldots & u_m^0\end{pmatrix}^T$ — вектор-столбцы из комплексного пространства $\mathbb{C}^m$; $A(t)$ — матрица размера $m\times m$ с элементами $a_{ij}(t)$, $1\leqslant i,j\leqslant m$, определёнными на отрезке $[0,T]$; $\mathcal{K}(t,\tau)$ — ядро интегрального оператора Вольтерры, представляющее собой матрицу размера $m\times m$ также с комплекснозначными элементами $k_{ij}(t,\tau)$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$, определёнными в квадрате $\chi = [0,T]\times[0,T]$.

Условие ($\boldsymbol{\alpha}$). *Матрицы $A(t)$ и $\mathcal{K}(t,\tau)$ непрерывны по своим переменным на множестве $[0,T]$ соответственно.*

Условие ($\boldsymbol{\beta}$). *Оператор $A(t)$ имеет простую структуру, т.е. его собственные векторы $\mathcal{B} = \{b_1(t),\ldots,b_m(t)\}$, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\}$, при каждом $t\in[0,T]$ образуют базис в пространстве $\mathbb{C}^m$. Обозначим через $\mathcal{B}^* = \{b_1^*(t),\ldots$ $\ldots,b_m^*(t)\}$ биортогонально сопряжённый базис.*

Интегро-дифференциальные уравнения изучались в работах [1, гл. 4; 13; 14] в предположении стабильности спектра оператора $A(t)$. При этом были построены регуляризованные ряды, сходящиеся асимптотически к точному решению $u(t,\varepsilon)$.

2. Голоморфная регуляризация линейной однородной системы. Сначала рассмотрим систему с положительным малым параметром

$$\varepsilon\dot{y} = A(t)y, \quad y = \begin{pmatrix}y_1 & \ldots & y_m\end{pmatrix}^T, \tag{3}$$

и построим для неё псевдоголоморфную фундаментальную матрицу $Z(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)$.

В соответствии с алгоритмом метода голоморфной регуляризации запишем уравнение первых интегралов этой системы

$$\varepsilon\partial_t U + LU = 0, \tag{4}$$

где

$$L = \sum_{i=1}^m (Ay,e_i)\partial_{y_i}$$

— линейный дифференциальный оператор первого порядка в частных производных; $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$, $e_i = \begin{pmatrix}0 & \ldots & 1 & \ldots & 0\end{pmatrix}^T$ — i-й орт в $\mathbb{C}^m$. Будем искать его решение в виде ряда по степеням ε:

$$U(t,y,\varepsilon) = U_0(t,y) + \varepsilon U_1(t,y) + \ldots + \varepsilon^n U_n(t,y) + \ldots \tag{5}$$

Подставив ряд (5) в уравнение (4), получим, в соответствии с методом неопределённых коэффициентов, серию задач для определения коэффициентов этого ряда:

$$LU_0 = 0, \quad LU_1 = -\partial_t U_0, \quad \ldots, \quad LU_n = -\partial_t U_{n-1}, \quad \ldots \tag{6}$$

Для построения m независимых интегралов системы (3) будем последовательно полагать, что функция U_0 равна

$$\varphi_p(t) = \int\limits_0^t \lambda_p(\tau)d\tau, \quad p = \overline{1,m},$$

с учетом кратности корней характеристического уравнения.

Лемма 1. *Если* $\lambda_p(t)$ *— собственное значение оператора* $A(t)$ *и* $\{b_{p_1}(t),\ldots,b_{p_r}(t)\}$ *— соответствующие ему собственные векторы, то каждая функция* $U_s^{[p]}(t,y)=\ln(y,b^*_{p_s}(t))$, $s=\overline{1,r}$, *является решением уравнения*

$$LU_s^{[p]}=\lambda_p(t).$$

Доказательство. Действительно, при фиксированном s имеем

$$LU_s^{[p]}=\frac{1}{(y,b^*_{p_s}(t))}\sum_{i=1}^m(A(t)y,e_i)(e_i,b^*_{p_s}(t))=\frac{1}{(y,b^*_{p_s})}\sum_{i=1}^m(y,e_i)(e_i,A^*(t)b^*_{p_s})=$$

$$=\frac{1}{(y,b^*_{p_s})}\sum_{i=1}^m\lambda_p(t)(y,e_i)(e_i,b^*_{p_s})=\lambda_p(t)\frac{(y,b^*_{p_s})}{(y,b^*_{p_s})}=\lambda_p(t).$$

Лемма 2. *Система функций* $\{U^{[p]}(t,y)\}$, $p=\overline{1,m}$, *является независимой.*

Доказательство. Запишем якобиан данной системы функций

$$\frac{\partial(U^{[1]},\ldots,U^{[m]})}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}=\begin{vmatrix}\dfrac{(e_1,b^*_1)}{(y,b^*_1)} & \cdots & \dfrac{(e_1,b^*_1)}{(y,b^*_1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{(e_m,b^*_m)}{(y,b^*_m)} & \cdots & \dfrac{(e_m,b^*_m)}{(y,b^*_m)}\end{vmatrix}=\frac{\det(B^*(t))}{\prod\limits_{i=1}^m(y,b^m_i(t))}\neq 0,$$

где $B^*(t)=\|b^*_1(t),\ldots,b^*_m(t)\|$ — матрица, столбцами которой служат столбцы сопряжённого базиса. А это и означает независимость системы функций $\{U^{[p]}(t,y)\}$, $p=\overline{1,m}$. Лемма доказана.

Итак, в соответствии с леммой 1 в качестве решений второго уравнения серии (6) можно взять функции $U_1^{[p]}(t,y)=U^{[p]}(t,y)+\alpha_p(t)$, $p=\overline{1,m}$, где $\alpha_1(t)$, $\ldots$, $\alpha_m(t)$ — произвольные дифференцируемые функции переменной t.

Для решения остальных уравнений этой серии воспользуемся интегральным представлением решений уравнений в частных производных первого порядка [15, с. 362].

Добавим для системы (3) начальное условие

$$y(0,\varepsilon)=y^0. \tag{7}$$

Проведём через точку $y^0\in\mathbb{C}^m$ голоморфно-гладкую поверхность Λ с координатами $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_1,\ldots,\widetilde{y}_{m-1})$ на ней и запишем систему уравнений характеристик

$$\frac{dy}{ds}=A(t)y, \tag{8}$$

соответствующую оператору L. Будем считать, что фазовые траектории этой системы трансверсальны (некасательны) к ней при каждом $t\in[0,T]$.

Система (8) является автономной: здесь t выступает в роли параметра, а $s\geqslant 0$ — в роли независимой переменной. Поскольку оператор $A(t)$ при каждом t имеет простую структуру, то общее решение системы (8) задается формулой

$$y=B(t)e^{sD(t)}C,$$

где $B(t)$ — матрица, столбцами которой служат собственные векторы оператора $A(t)$; матрица $D(t)$ диагональная и имеет следующий вид:

$$D(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_m(t)\end{pmatrix},$$

C — столбец произвольных констант.

Добавим для системы (8) начальное условие

$$y\big|_{s=0} \in \Lambda. \tag{9}$$

Если $\Lambda = \{\Theta \in \mathbb{C}^m: \ \Theta = \Theta(\widetilde{y}), \ \ \widetilde{y} \in \widetilde{\omega}\}$, где $\widetilde{\omega}$ — некоторая область пространства $\mathbb{C}^{m-1}$, то условие (9) можно представить в виде

$$y\big|_{s=0} = \Theta(\widetilde{y}), \quad \widetilde{y} \in \widetilde{\omega}. \tag{10}$$

Для решения задачи Коши (8), (10) имеем представление

$$Y(s, \widetilde{y}, t) = B(t)e^{sD(t)}B^{-1}(t)\Theta(\widetilde{y}).$$

Составим алгебраическую систему

$$B(t)e^{sD(t)}B^{-1}(t)\Theta(\widetilde{y}) = y,$$

и пусть

$$s = S(y, t), \quad \widetilde{y} = \widetilde{Y}(y, t)$$

— её решение относительно $(s, \widetilde{y})$.

Обозначим при каждом $t \in [0, T]$ через Ω_t^Λ область в $\mathbb{C}^m$, которую заполняют фазовые траектории системы уравнений характеристик (8), проходящие через Λ, и пусть

$$\Omega^\Lambda = \bigcup_{t \in [0,T]} \Omega_t^\Lambda.$$

Далее введём операторы замены переменных с помощью указанных функций, обозначив через $R(t)$ оператор замены переменных $(s, \widetilde{y})$ на переменную y, а оператор обратной замены — через $R^{-1}(t)$:

$$R[\Psi(s, \widetilde{y}, t)] = \Psi(S(y, t), \widetilde{Y}(y, t), t),$$

$$R^{-1}[\Psi(y, t)] = \Psi(Y(s, \widetilde{y}, t), t).$$

Замечание 1. Если переменная s будет индексироваться, то и введённые операторы также будут индексироваться.

Обозначим через I_n^s оператор интегрирования по переменной s_n, когда нижний предел равен нулю, а верхний — s_{n-1}, $n = 2, 3, \ldots$ В итоге для решений уравнений серии (6), начиная со второго, имеем

$$U_2(t, y) = -R(t)I_1^s R_1^{-1}(t)\partial_t U_1, \quad U_3(t, y) = R(t)I_1^s R_1^{-1}(t)\partial_t R_1(t)I_2^s R_2^{-1}(t)\partial_t U_1, \quad \ldots,$$

$$U_n(t, y) = (-1)^{n-1}R(t)I_1^s R_1^{-1}(t)\partial_t R_1(t)I_2^s R_2^{-1}(t)\partial_t \ldots R_{n-2}(t)I_{n-1}^s R_{n-1}^{-1}(t)\partial_t U_1, \quad \ldots$$

При этом $U_n(t, y) = 0$ на поверхности Λ при всех $n = 2, 3, \ldots$ Выберем $U_1(t, y)$ обращающимся в нуль в начальной точке $(0, y^0)$:

$$U_1^{[p]}(t, y) = -\ln \frac{(y, b_p^*(t))}{(y_0, b_p^*(0))}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Условие (γ). *Предположим, что все введённые функции, зависящие от переменной t, допускают голоморфное продолжение с отрезка $[0, T]$ на круг $P = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| \leqslant 2T\}$. Фиксируем n и строим на комплексной плоскости переменной t $(n-1)$ окружность*

$$\gamma_k = \{t \in \mathbb{C}: \ |t| = r_k\},$$

где

$$r_k = T + \frac{Tk}{n-1}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Соседние окружности находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, равном $T/(n-1)$. Обозначим через J_k^t следующий интегральный оператор:

$$(J_k^t g)(t_{k-1}) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_k}\frac{g(t_k)}{(t_k-t_{k-1})^2}dt_k, \quad k=\overline{1,n-1}, \quad t_0=t\in[0,T].$$

Тогда, в соответствии с интегральной формулой Коши, имеем

$$U_n(t,y) = (-1)^n R(t) I_1^s R_1^{-1}(t) J_1^t R_1(t_1) I_2^s R_2^{-1}(t_1) J_2^t \ldots R_{n-2}(t_{n-2}) I_{n-1}^s R_{n-1}^{-1}(t_{n-2}) J_{n-1}^t U_1.$$

Оценим $U_n(t,y)$:

$$|U_n(t,y)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}|I_1^s I_2^s \ldots I_{n-1}^s|\, H_{n-1}\max_{|t|\leqslant 2T}|U_1(t,y)|,$$

где

$$H_{n-1} = \oint\limits_{\gamma_1}\frac{|dt_1|}{|t_1-t|^2}\cdots\frac{|dt_{n-1}|}{|t_{n-1}-t_{n-2}|^2} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{r_1 d\alpha}{r_1^2+t^2-2r_1 t\cos\alpha}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\frac{r_{n-1}d\alpha}{r_{n-1}^2+r_{n-2}^2-2r_{n-2}r_{n-1}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n-1}r_1 r_2\ldots r_{n-1}}{(r_1^2-t^2)(r_2^2-r_1^2)\ldots(r_{n-1}^2-r_{n-2}^2)} \leqslant \frac{(2\pi)^{n-1}(2T)^{n-1}(n-1)^{n-1}}{T(2T)^{n-2}T^{n-1}}.$$

Поскольку при $s\geqslant 0$

$$\left|\int\limits_0^s ds_1\int\limits_0^{s_1}ds_2\ldots\int\limits_0^{s_{n-2}}ds_{n-1}\right| = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!},$$

то

$$|U_n(t,y)| \leqslant \frac{(n-1)^{n-1}s^{n-1}}{2T^{n-1}(n-1)!}.$$

Из этой оценки как раз и следует, что ряд (5) сходится в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$.

Таким образом, имеет место утверждение о существовании аналитических по ε первых интегралов у сингулярно возмущённой системы (3).

Теорема 1. *Если выполнены условия (α), (β) и (γ), то система (3) имеет в области Ω^Λ m независимых интегралов $\{U^{[i]}(t,y,\varepsilon)\}_{i=1}^m$, аналитических в точке $\varepsilon=0$.*

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Условие (δ). $\operatorname{Re}\lambda_p(t)\leqslant 0$, $p=\overline{1,m}$.

Очевидно, что при выполнении условия (δ) область Ω^Λ является ограниченной при любом $s\geqslant 0$, если ограничена поверхность Λ. Это следует из устойчивости системы уравнений характеристик.

3. Псевдоголоморфные решения линейных систем.

Определение 2. Решение $y(t,\varepsilon)$ системы (3) называется *псевдоголоморфным* (*псевдоаналитическим*) в точке $\varepsilon=0$, если существует функция $\widetilde{Y}(t,\eta,\varepsilon)$, голоморфная в точке $\varepsilon=0$ при каждом $t\in[0,T]$ и любом $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ из некоторого неограниченного множества $G\subset\mathbb{C}^m$ такая, что существуют $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t))$ и $T_\varepsilon>0$, что для любых $\varepsilon>0$ и $t\in[0,T_\varepsilon]$ выполняется равенство $y(t,\varepsilon)=\widetilde{Y}(t,\varphi(t)/\varepsilon,\varepsilon)$.

Для доказательства следующей теоремы дадим определение введённому С.А. Ломовым понятию существенно особого многообразия.

Определение 3. Пусть $\psi(t)$ — комплекснозначная функция вещественной переменной $t \in [0,T]$ такая, что $\psi(0)=0$. *Существенно особым многообразием*, порождаемым точкой $\varepsilon=0$, называется множество

$$Q^+(\psi,T,\varepsilon)=\{q\in\mathbb{C}:\ q=e^{\psi(t)/\varepsilon},\ \ t\in[0,T],\ \ \varepsilon>0\}$$

(знак “+” означает, что значение ε положительно).

Ясно, что если $\operatorname{Re}\psi(t)\leqslant 0$ для любого $t\in[0,T]$, то $Q^+(\psi,T,\varepsilon)\subset\dot{S}$ — замкнутому единичному кругу с выколотым центром.

Теорема 2. *Если выполнены условия (α), (β), (γ) и (δ), то решение $y(t,\varepsilon)$ задачи Коши (3), (7) является псевдоголоморфным в точке $\varepsilon=0$.*

Доказательство. Запишем систему m независимых интегралов системы (3):

$$\ln\frac{(y,b_1^*(t))}{(y^0,b_1^*(0))}-\varepsilon U_2^{[1]}(t,y)+\ldots=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_1(\tau)d\tau,\quad \ldots,$$

$$\ln\frac{(y,b_m^*(t))}{(y^0,b_m^*(0))}-\varepsilon U_2^{[m]}(t,y)+\ldots=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_m(\tau)d\tau.$$

Пропотенциируем эти уравнения по основанию e:

$$\frac{(y,b_1^*(t))}{(y^0,b_1^*(0))}+\varepsilon\Phi^{[1]}(t,y,\varepsilon)=\exp\biggl\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_1(\tau)d\tau\biggr\},\quad\ldots,$$

$$\frac{(y,b_m^*(t))}{(y^0,b_m^*(0))}+\varepsilon\Phi^{[m]}(t,y,\varepsilon)=\exp\biggl\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_m(\tau)d\tau\biggr\},\tag{11}$$

где $\Phi^{[k]}(t,y,\varepsilon)$ $(k=\overline{1,m})$ — голоморфные в точке $\varepsilon=0$ функции, причём равномерно голоморфные по переменным t и y на множествах вида $[0,T]\times R$, R — компакт области Ω.

Введём новые переменные

$$q_k=\exp\biggl\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_k(\tau)d\tau\biggr\},\quad k=\overline{1,m},$$

перепишем систему (11) в виде

$$\frac{(y,b_1^*(t))}{(y^0,b_1^*(0))}+\varepsilon\Phi^{[1]}(t,y,\varepsilon)=q_1,\quad\ldots,\quad\frac{(y,b_m^*(t))}{(y^0,b_m^*(0))}+\varepsilon\Phi^{[m]}(t,y,\varepsilon)=q_m\tag{12}$$

и применим к ней теорему о неявной функции. Положим в этой системе $\varepsilon=0$:

$$\frac{(y,b_1^*(t))}{(y^0,b_1^*(0))}=q_1,\quad\ldots,\quad\frac{(y,b_m^*(t))}{(y^0,b_m^*(0))}=q_m.$$

Её решение $Y_0(t,q)=\{Y_{0,1}(t,q),\ldots,Y_{0,m}(t,q)\}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} Y_{0,1}(t,q)\\ \vdots\\ Y_{0,m}(t,q)\end{pmatrix}=[B^*(t)]^{-1}\begin{pmatrix}(y^0,b_1^*(0))q_1\\ \vdots\\ (y^0,b_m^*(0))q_m\end{pmatrix}.$$

Пусть $\varphi_p(t) = \int_0^t \lambda_p(\tau)d\tau$, $p = \overline{1,m}$. Обозначим через $Q_p^+(\varphi_p(t), T, \varepsilon) = \{q_p \in \mathbb{C} : q_p = e^{\varphi_p(t)/\varepsilon}, \ t \in [0,T], \ \varepsilon > o\}$ p-е существенно особое многообразие, порождаемое точкой $\varepsilon = 0$. И пусть $Q^+ = Q_1^+ \times \ldots \times Q_m^+ \subset \mathbb{C}^m$ — декартово произведение этих многообразий.

Замечание 2. При фиксированных $\varepsilon > 0$ многообразия Q_p^+ представляют собой кривые, принадлежащие замкнутым единичным кругам $\dot{S}_p = \{q_p \in \mathbb{C} : 0 < |q_p| \leqslant 1\}$ с выколотыми центрами.

Обозначим
$$\dot{S} = \dot{S}_1 \times \ldots \times \dot{S}_m \subset \mathbb{C}^m.$$
Выберем a — достаточно малое положительное число и построим кольца
$$S_p^a = \{q_p \in \mathbb{C} : \ a \leqslant |q_p| \leqslant 1\}, \quad p = \overline{1,m}.$$
Пусть $S^a = S_1^a \times \ldots \times S_m^a$ — компактное множество из $\dot{S}$.

В соответствии с теоремой о неявной функции у каждой точки (t,q) множества $P_a^T = [0,T] \times S^a$ существует окрестность σ_{tq}, в которой система (12) имеет голоморфное по ε решение $Y(t,q,\varepsilon) = \{Y_1(t,q,\varepsilon), \ldots, Y_m(t,q,\varepsilon)\}$. Из открытого покрытия $\{\sigma_{tq}\}$ компакта P_a^T выберем конечное подпокрытие $\{\sigma_{tq}\}_1^N$. Тогда функция $Y(t,q,\varepsilon)$ будет голоморфной по ε в окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ равномерно на множестве P_a^T, где ε_0 — наименьший радиус голоморфности в конечном подпокрытии.

Пусть в системе (3) ε фиксировано и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда, как следует из предыдущего, для её решения $y(t,\varepsilon)$ будет иметь место следующее представление:
$$y(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(t,q)\Bigg|_{q=\{q_1,\ldots,q_m\},\ q_p=\exp\Big\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_m(\tau)d\tau\Big\},\ p=\overline{1,m}}, \tag{13}$$
причём этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0,T_\varepsilon] \subset [0,T]$, где T_ε — такое значение независимой переменной t, что при каждом $p = \overline{1,m}$ кривая
$$\Gamma_p^\varepsilon = \left\{q_p \in \mathbb{C} : \ q_p = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_m(\tau)d\tau\right\}, \quad t \in [0,T_\varepsilon]\right\}$$
принадлежит кольцу S_p^a. Теорема доказана.

Замечание 3. Если $T_\varepsilon < T$, то для построения решения системы (3) на всём промежутке $[0,T]$ требуется применить алгоритм псевдоголоморфного продолжения [16, 17].

Последовательно полагая в (7), что y^0 равно векторам $e_1, \ldots, e_m$, построим фундаментальную матрицу $W(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)$ системы (3). Очевидно, что матрицант этой системы $Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = W(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)W^{-1}(\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)$ также будет псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$. При этом имеют место следующие разложения по степеням ε:
$$W(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = W_0(t,\varepsilon^{-1}) + \varepsilon W_1(t,\varepsilon^{-1}) + \ldots, \tag{14}$$
$$Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = Z_0(t,\tau,\varepsilon^{-1}) + \varepsilon Z_1(t,\tau,\varepsilon^{-1}) + \ldots \tag{15}$$
Нетрудно видеть, что
$$Z_0(t,\tau,\varepsilon^{-1}) = W_0(t,\varepsilon^{-1})W_0^{-1}(\tau,\varepsilon^{-1}). \tag{16}$$

4. Псевдоголоморфное решение сингулярно возмущённого интегро-дифференциального уравнения. Перейдём к изложению основного результата работы. Будем искать решение задачи Коши (2) в виде ряда по степеням ε:
$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^n u_n + \ldots \tag{17}$$

с коэффициентами, подчинёнными следующей серии задач:

$$\varepsilon\dot{u}_0 = A(t)u_0, \quad u_0\big|_{t=0} = u^0,$$
$$\varepsilon\dot{u}_1 = A(t)u_1 + \varepsilon\int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau)u_0(\tau,\varepsilon^{-1})d\tau, \quad u_1\big|_{t=0} = 0, \quad \ldots,$$
$$\varepsilon\dot{u}_n = A(t)u_n + \varepsilon\int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau)u_{n-1}(\tau,\varepsilon^{-1})d\tau, \quad u_n\big|_{t=0} = 0, \quad \ldots \tag{18}$$

Последовательно решив задачи (18), найдём коэффициенты ряда (17):

$$u_0(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = W(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)u^0,$$
$$u_1(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = \int\limits_0^t Z(t,t_1,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\bigg(\int\limits_0^{t_1}\mathcal{K}(t_1,t_2)u_0(t_2,\varepsilon^{-1},\varepsilon)dt_2\bigg)dt_1, \quad \ldots,$$
$$u_n(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = \int\limits_0^t Z(t,t_1,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\bigg(\int\limits_0^{t_1}\mathcal{K}(t_1,t_2)u_{n-1}(t_2,\varepsilon^{-1},\varepsilon)dt_2\bigg)dt_1, \quad \ldots \tag{19}$$

Из этих формул видно, что коэффициенты ряда зависят также и от ε, причем голоморфным образом. Докажем методом математической индукции, что для любого $t \in [0,T]$

$$\|u_n(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\| \leqslant \frac{t^{2n}}{(2n)!}\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|\bigg)^n\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|\mathcal{K}(t,\tau)\|\bigg)^n\max_{t\in[0,T]}\|u_0(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|. \tag{20}$$

При $n=1$ оценка (20), очевидно, верна. Докажем, что из предположения справедливости неравенства (20) при $n=m$ вытекает его справедливость при $n=m+1$. В самом деле, если

$$\|u_{m-1}(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{t^{2m-2}}{(2m-2)!}\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|\bigg)^{m-1}\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|\mathcal{K}(t,\tau)\|\bigg)^{m-1}\max_{t\in[0,T]}\|u_0(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|,$$

то будет выполняться следующее неравенство:

$$\|u_m(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\| \leqslant \int\limits_0^t \|Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|\bigg(\int\limits_0^\tau \|\mathcal{K}(\tau,\xi)\|\,\|u_{m-1}(\xi,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|d\xi\bigg)d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|\bigg)^m\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|\mathcal{K}(t,\tau)\|\bigg)^m\max_{t\in[0,T]}\|u_0(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!}d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{t^{2m}}{(2m)!}\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|\bigg)^m\bigg(\max_{(t,\tau)\in\chi}\|\mathcal{K}(t,\tau)\|\bigg)^m\max_{t\in[0,T]}\|u_0(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon)\|.$$

Отсюда и следует оценка (20).

Сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (α), (β), (γ) и (δ). Тогда задача Коши для интегро-дифференциального уравнения (2) имеет единственное псевдоголоморфное решение.*

Доказательство. В соответствии с оценкой (20) ряд (17) сходится при $t \in [0,T]$ (и даже при всех вещественных t) и всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ — интервала псевдоголоморфности эволюционного оператора $Z(t,\tau,\varepsilon^{-1},\varepsilon)$. Далее, поскольку матрица $Z(t,\tau,\varepsilon_*^{-1},\varepsilon)$ при каждом $\varepsilon_* \in (0,\varepsilon_0)$ голоморфна при $\varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0$, сумма $u(t,\varepsilon,\varepsilon_*^{-1})$ голоморфна в этой же окрестности точки $\varepsilon = 0$, что и означает псевдоголоморфность $u(t,\varepsilon,\varepsilon^{-1})$. Теорема доказана.

Пример. Найдём приближение первого порядка по ε к псевдоголоморфному решению задачи Коши

$$\varepsilon\dot{v} = A(t)v + \varepsilon^2\int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau)v(\tau)d\tau, \quad t \in (0,t], \quad u\big|_{t=0} = e_1, \tag{21}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, $A(t) = \begin{pmatrix} -(e^t+1) & 2e^{-t} \\ e^{2t} & -3 \end{pmatrix}$; $\mathcal{K}(t,\tau)$ — произвольная матрица размера 2×2 с непрерывными по обеим переменным элементами; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ — начальный вектор.

Собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $A(t)$ следующие:

$$\lambda_1 = -1, \qquad b_1(t) = (2e^{-t}, e^t)^T,$$
$$\lambda_2 = -(3+e^t), \qquad b_2(t) = (-1, e^t)^T.$$

В соответствии с ранее описанным алгоритмом построения фундаментальной матрицы и формулами (14), (15) имеем

$$W_0(t,\varepsilon^{-1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2e^{-t/\varepsilon} - 2e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^{2t}+2e^t} & \dfrac{2e^{-t/\varepsilon} - 2e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^{2t}+2e^t} \\[2ex] \dfrac{e^{t-t/\varepsilon} - e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^t+2} & \dfrac{e^{t-t/\varepsilon} + 2e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon}}{e^t+2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение начальной задачи (21) в первом приближении имеет вид

$$v(t,\varepsilon^{-1},\varepsilon) = \begin{pmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \end{pmatrix} + \varepsilon\left[\begin{pmatrix} V_{1,1} \\ V_{1,2} \end{pmatrix} + \int\limits_0^t Z_0(t,t_1,\varepsilon^{-1})\left(\int\limits_0^{t_1} \mathcal{K}(t_1,t_2)\begin{pmatrix} V_{0,1} \\ V_{0,2} \end{pmatrix} dt_2\right)dt_1\right] + \ldots$$

Здесь $V_{0,1} = (2e^{-t/\varepsilon} + e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon})/(2e^t+e^{2t})$, $V_{0,2} = (e^{t-t/\varepsilon} - e^{-(3t+e^t-1)/\varepsilon})/(e^t+2)$; $V_{1,1}$, $V_{1,2}$ определены в работе [18]; $Z_0(t,t_1,\varepsilon^{-1})$ вычисляется по формуле (16).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00496).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М., 1973.
3. *Маслов В.П.* Асимптотические методы в теории возмущений. М., 1988.
4. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 11. С. 1851–1860.

5. *Нефедов Н.Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция–диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Мат. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
7. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
8. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1981.
9. *Качалов В.И.* Псевдоголоморфные и ε-псевдорегулярные решения сингулярно возмущенных задач // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 361–370.
10. *Качалов В.И., Ломов С.А.* Гладкость решений дифференциальных уравнений по сингулярно входящему параметру // Докл. АН СССР. 1988. Т. 37. № 2. С. 465–467.
11. *Качалов В.И.* О методе голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных задач // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 52–59.
12. *Ломов И.С.* Построение точных решений некоторых сингулярно возмущенных уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 6. С. 1073–1075.
13. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 2. С. 3–15.
14. *Bobodzhanov A., Safonov V., Kachalov V.* Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. Art. 27.
15. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения. М., 1989.
16. *Besova M.I., Kachalov V.I.* Analytical aspects of the theory of Tikhonov systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 1. Art. 72.
17. *Бесова М.И.* Голоморфная регуляризация в теории краевых задач // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обз. 2021. № 193. С. 11–16.
18. *Качалов В.И., Фёдоров Ю.С.* Голоморфная регуляризация слабо нелинейных сингулярно возмущенных задач // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 17–30.

Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт"

Поступила в редакцию 13.07.2023 г.
После доработки 06.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 13–23

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54+517.913

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА

© 2024 г. В. И. Мироненко, В. В. Мироненко

Прослеживаются связи понятия обобщённого интеграла с понятиями отражающей функции и отображения Пуанкаре (отображения за период) для периодических дифференциальных систем. Понятие обобщённого первого интеграла применяется при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений периодических дифференциальных систем и исследовании проблемы центра-фокуса.

Ключевые слова: периодическая дифференциальная система, обобщённый первый интеграл, отражающая функция, отображение Пуанкаре, периодическое решение.

DOI: 10.31857/S0374064124010025, EDN: RPYEFD

1. Введение. Вспомогательные сведения. Пусть некоторый детерминированный процесс моделируется дифференциальной системой

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

правая часть которой непрерывно дифференцируема.

Отражающей функцией рассматриваемого процесса (или дифференциальной системы (1)) называется [1] функция $F(t,x)$, которая для каждого решения $x(t)$ этой системы, определённого на симметричном относительно нуля интервале $(-\alpha,\alpha)$, обладает следующими свойствами: $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$ для всех $t \in (-\alpha,\alpha)$ и $F(0,x) \equiv x$.

Отражающая функция дифференциальной системы позволяет по её прошлому состоянию $x(-t)$ в момент времени $-t$ найти будущее состояние $x(t) = F(-t, x(-t))$ в симметричный относительно нуля момент времени t и обладает своеобразным инволюционным свойством $F(-t, F(t,x)) \equiv x$.

Для каждой системы (1) с общим решением в форме Коши $\varphi(t; t_0, x_0)$ имеет место тождество $F(t,x) \equiv \varphi(-t; t, x)$, которое можно принять и за определение отражающей функции дифференциальной системы (1).

Впервые понятие отражающей функции появилось в статье [1]. Последующим исследованиям по теории отражающей функции посвящены монография [2] и брошюра [3], в которой приведено большое количество примеров и упражнений. Значительный вклад в теорию отражающей функции внесла Чжоу Чжиньсинь [4].

Приведём некоторые свойства дифференциальных систем, необходимые для понимания данной статьи, доказательство которых можно найти в работах [2, 3, 5].

1. Дифференцируемая функция $F = F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши [2, с. 11]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + X(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x.$$

2. Пусть правая часть $X(t,x)$ системы (1) не только дифференцируема, но и 2ω-периодична по переменной t. Тогда функция $F(-\omega,x) \equiv \varphi(\omega; -\omega, x)$ представляет собой отображение Пуанкаре на отрезке $[-\omega,\omega]$ (отображение за период 2ω). При этом решение $\varphi(t; -\omega, x_0)$ системы (1) будет 2ω-периодичным тогда и только тогда, когда оно продолжимо на отрезок $[-\omega,\omega]$ и верно равенство $F(-\omega, x_0) = x_0$ [2, с. 12].

3. Функция $F(t,x) \equiv x$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда правая часть $X(t,x)$ этой системы нечётна по t. При этом все решения системы (1), продолжимые на отрезок $[-\omega,\omega]$, являются чётными. Они будут 2ω-периодичными, если $X(t,x)$ 2ω-периодична по t [2, с. 13; 3, с. 63].

4. Разные системы вида (1) одной и той же размерности n могут иметь одну и ту же отражающую функцию. Две системы вида (1) с отражающими функциями $F(t,x)$ и $\Phi(t,x)$ названы *эквивалентными*, если $F(t,x) \equiv \Phi(t,x)$ для $x \in D$ и $t \in [-\alpha,\alpha]$ при некотором $\alpha > 0$ [2, с. 21–26].

Множество систем (и только таких систем) вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ — любая дифференцируемая вектор-функция, образует класс эквивалентности, характеризуемый отражающей функцией $F(t,x)$ при условии, что эта функция обладает свойством [5, с. 83]

$$F(-t,F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x.$$

5. Дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial F(-t,F)}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}$$

названа *простой* [6] (см. также [5, с. 81–86]).

6. Система $dx/dt = S(t,x)$ с непрерывно дифференцируемой правой частью является простой тогда и только тогда, когда для её отражающей функции $F(t,x)$ выполнено тождество [5, с. 82]

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\, S(t,x) \equiv S(-t,F(t,x)).$$

Исследованиями простых систем, их применением и другими вопросами теории отражающей функции, начиная с работы [7], активно занимается Э. В. Мусафиров.

7. Если система $dx/dt = X(t,x)$ имеет отражающую функцию $F(t,x)$, то все эквивалентные ей системы (и только они) образуют множество систем вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + F_x^{-1} R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая вектор-функция (см. лемму в [2, с. 24] или теорему 2.10 в [5, с. 78]).

2. Основные результаты. Будем традиционно определять первый интеграл дифференциальной системы (1) как дифференцируемую функцию $U(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$ этой системы обращается в постоянную [8, с. 308].

В работах [9–11] указаны условия существования стационарных первых интегралов у нестационарных дифференциальных систем и рассмотрены некоторые случаи их использования.

Если $F(t,x)$ — отражающая функция системы (1), а $U(t,x)$ — её первый интеграл, то $U(-t,F(t,x(t))) \equiv U(-t,x(-t)) \equiv c \equiv U(t,x(t))$.

Таким образом, в силу произвольности решения $x(t)$ системы (1) верно тождество

$$U(-t,F(t,x)) \overset{t,x}{\equiv} U(t,x).$$

Так будет и всякий раз, когда $U(t,x(t))$ будет чётной функцией времени t на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha,\alpha)$, системы (1). В связи с этим дадим здесь

Определение. Всякую дифференцируемую функцию $U(t,x)$, отличную от тождественной постоянной, назовём *обобщённым первым интегралом* дифференциальной системы (1), если для любого решения $x(t)$ этой системы, определённого на симметричном относительно нуля интервале $(-\alpha,\alpha)$, функция $U(t,x(t))$ является чётной.

Множество обобщённых первых интегралов системы (1) гораздо шире множества обычных первых интегралов. Для понимания этого факта достаточно заметить, что любая дифференцируемая функция $V(t,U_1(t,x),\ldots,U_r(t,x))$ от обобщённых первых интегралов $U_1(t,x)$, … …, $U_r(t,x)$, чётная по первому аргументу, также представляет собой обобщённый первый интеграл.

Так как для отражающей функции $F(t,x)$ системы (1) и любого решения $x(t)$, $t\in(-\alpha,\alpha)$, этой системы верно тождество $F(t,x(t))\equiv x(-t)$, то вектор-функция $x(t)+F(t,x(t))\equiv x(t)+x(-t)$ является чётной. Поэтому функции $U_i(t,x):=x_i+F_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, где $F_i(t,x)$ — i-я компонента отражающей функции $F(t,x)$ системы (1), представляют собой обобщённые первые интегралы системы (1). Они образуют базис во множестве обобщённых первых интегралов этой системы в том смысле, что любой обобщённый первый интеграл $U(t,x)$ системы (1) может быть получен по формуле

$$U(t,x)=\Phi(t,\,x_1(t)+F_1(t,x(t)),\,x_2(t)+F_2(t,x(t)),\ldots,\,x_n(t)+F_n(t,x(t))),$$

где функция Φ чётная по первому аргументу t.

Теорема 1. *Пусть для дифференцируемых, отличных от тождественных постоянных, функций $U(t,x)=\big(U_1(t,x)\ \ \ldots\ \ U_r(t,x)\big)^{\mathrm{т}}$ (знак “т” обозначает операцию транспонирования) выполнены тождества*

$$\frac{\partial U}{\partial t}+X(t,x)\frac{\partial U}{\partial x}\overset{t,x}{\equiv} f_{\mathrm{od}}(t,U(t,x)),$$

где $f_{\mathrm{od}}(t,U)$ — нечётная по первому аргументу дифференцируемая вектор-функция.

Тогда для отражающей функции $F(t,x)$ дифференциальной системы (1) выполнены тождества $U(-t,F(t,x))\equiv U(t,x)$, а для каждого решения $x(t)$, $t\in(-\alpha,\alpha)$, системы (1) — тождества $U(-t,x(-t))\equiv U(t,x(t))$, т.е. все функции $U_i(t,x)$, $i=\overline{1,r}$, являются обобщёнными первыми интегралами системы (1).

Доказательство. Пусть $x(t)$, $t\in(-\alpha,\alpha)$, — решение системы (1). Построим функции $V_i(t):=U_i(t,x(t))$, $i=\overline{1,r}$, которые, согласно условию теоремы 1, образуют решение $V(t)=\big(V_1(t)\ \ \ldots\ \ V_r(t)\big)^{\mathrm{т}}$ системы $dV(t)/dt=f_{\mathrm{od}}(t,V)$ с нечётной по переменной t правой частью. Тогда, согласно сформулированному выше свойству 3 отражающей функции, функции $V_i(t)=U_i(t,x(t))$, $i=\overline{1,r}$, являются чётными, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Если выполнены все условия теоремы 1 и вектор-функция $f_{\mathrm{od}}(t,U)$ является 2ω-периодической по t, то для любого продолжимого на отрезок $[-\omega,\omega]$ решения $x(t)$ системы (1) функции $U_i(t,x(t))$, $i=\overline{1,r}$, являются не только чётными, но и 2ω-периодическими по t.*

Для доказательства достаточно снова использовать свойство 3 отражающей функции из п. 1.

В качестве примера использования теоремы 1 рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=\alpha(t)x+m(t)y+(\beta(t)x-n(t)y)z,\\
\frac{dy}{dt}&=-m(t)x+\alpha(t)y+(n(t)x+\beta(t)y)z,\\
\frac{dz}{dt}&=\gamma(t)(x^2+y^2)+\delta(t)z.
\end{aligned}\tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть в системе (2) все коэффициенты представляют собой непрерывные 2ω-периодические функции, из которых $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и $\delta(t)$ к тому же нечётные. Тогда тривиальное решение $x(t)\equiv0$, $y(t)\equiv0$, $z(t)\equiv0$ этой системы устойчиво неасимптотически, а для всякого продолжимого на отрезок $[-\omega,\omega]$ решения $(x(t),y(t),z(t))$ функции $x^2(t)+y^2(t)$ и $z(t)$ чётны и 2ω-периодичны.*

Доказательство. Легко проверить выполнение соотношений

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2\alpha(t)(x^2+y^2) + 2\beta(t)z(x^2+y^2) \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = \gamma(t)(x^2+y^2) + \delta(t)z.$$

Тогда, согласно теореме 1, функции x^2+y^2 и z являются обобщёнными первыми интегралами системы (2) и выполняются равенства $x^2(-\omega)+y^2(-\omega) = x^2(\omega)+y^2(\omega)$, $z(-\omega) = z(\omega)$. Продолжимость решений системы (2), начинающихся при $t=0$ вблизи точки $t=0$, $x_0=y_0=z_0=0$, гарантируется теоремой об интегральной непрерывности (теоремой о непрерывной зависимости от начальных данных) [12, с. 22]. Отсюда следует 2ω-периодичность функций $x^2(t)+y^2(t)$ и $z(t)$, а значит, и неасимптотическая устойчивость нулевого решения дифференциальной системы (2). Теорема доказана.

Используя теорему 1, легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть:*

1) для дважды непрерывно дифференцируемых функций $U_1(t,x)$, $\ldots$, $U_r(t,x)$, *где* $x = (x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}$, *определитель матрицы*

$$\frac{\partial(U_1,\ldots,U_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)} := \begin{pmatrix} \partial U_1/\partial x_1 & \ldots & \partial U_1/\partial x_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial U_r/\partial x_1 & \ldots & \partial U_r/\partial x_r \end{pmatrix}$$

не обращается в нуль в области $D\subset\mathbb{R}^n$ *при всех* $t\in\mathbb{R}$;

2) непрерывно дифференцируемые функции $S_i(t,U_1,\ldots,U_r)$, $i=\overline{1,r}$, *нечётны по первому аргументу;*

3) произвольные функции $f_{r+1}(t,x)$, $\ldots$, $f_n(t,r)$ *непрерывно дифференцируемы в* $\mathbb{R}\times D$.

Тогда функции $U_1(t,x)$, $\ldots$, $U_r(t,x)$ *являются обобщёнными первыми интегралами системы*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(U_1,\ldots,U_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}\right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} S_1(t,U_1,\ldots,U_r) \\ \ldots \\ S_r(t,U_1,\ldots,U_r) \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} U_1 \\ \ldots \\ U_r \end{pmatrix} - \frac{\partial(U_1,\ldots,U_r)}{\partial(x_{r+1},\ldots,x_n)} \begin{pmatrix} f_{r+1}(t,x) \\ \ldots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}\right], \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{r+1}(t,x) \\ \ldots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

При этом для отражающей функции $F(t,x)$ *системы (3), (4) выполнены тождества*

$$U_i(-t,F_1(t,x),\ldots,F_n(t,x)) = U_i(t,x_1,\ldots,x_n), \quad i=\overline{1,r}.$$

Доказательство теоремы становится очевидным, если соотношения (3), (4) записать в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U_1(t,x) \\ \ldots \\ U_r(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t,U_1(t,x),\ldots,U_r(t,x)) \\ \ldots \\ S_r(t,U_1(t,x),\ldots,U_r(t,x)) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что для любого решения $x(t)$ системы (3), (4) вектор-функция $U_i(t,x(t)) = (U_1t,x(t)),\ldots,U_r(t,x(t))^{\mathrm{т}}$ является решением системы (5) с нечётной по t правой частью. Поэтому, согласно свойству 3 отражающей функции, функции $U_1(t,x(t))$, $\ldots$, $U_r(t,x(t))$ чётны, откуда и следует утверждение теоремы.

Отражающая функция системы (5) имеет вид $F(t,U_1,\ldots,U_r) = \begin{pmatrix} U_1 & \ldots & U_r \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}$, т.е. $F(t,U)=U$. Если потребовать, чтобы она задавалась формулой вида $F(t,U)=\Phi(t,U)$, то придём к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть:*

1) для дважды непрерывно дифференцируемых функций $U_1(t,x),\ \ldots,\ U_r(t,x)$, *где* $x = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_r & x_{r+1} & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, *определитель матрицы*

$$\frac{\partial(U_1,\ldots,U_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)} := \begin{pmatrix} \partial U_1/\partial x_1 & \ldots & \partial U_1/\partial x_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial U_r/\partial x_1 & \ldots & \partial U_r/\partial x_r \end{pmatrix}$$

не обращается в нуль в области $D \subset \mathbb{R}^n$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$;

2) непрерывно дифференцируемые функции $S_i(t,U_1,\ldots,U_r)$, $i=\overline{1,r}$, *таковы, что отражающая функция* $\Phi(t,U)$ *системы (5) имеет вид* $\Phi(t,U)=\Phi(t,U_1,\ldots,U_r)$;

3) произвольные функции $f_{r+1}(t,x),\ \ldots,\ f_n(t,r)$ *непрерывно дифференцируемы в* $\mathbb{R}\times D$.

Тогда для отражающей функции $F(t,x)$ *системы (3), (4) выполнены соотношения*

$$U_i(-t,F_1(t,x),\ldots,F_n(t,x)) = \Phi(t,U_1(t,x),\ldots,U_r(t,x)).$$

В качестве примера приведём случай, когда в системе

$$\frac{dx}{dt} = a_{10}(t)x + a_{01}(t)y + a_{20}(t)x^2 + 2a_{11}\,(t)\,xy + a_{02}(t)y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = b_{10}(t)x + b_{01}(t)y + b_{20}(t)x^2 + 2b_{11}\,(t)\,xy + b_{02}(t)y^2 \tag{6}$$

с непрерывными на $\mathbb{R}$ коэффициентами обобщённый первый интеграл является линейной функцией $U=m(t)x+n(t)y$ с дифференцируемыми коэффициентами $m(t)$ и $n(t)$.

Для этого предположим, что в соответствии с теоремой 1 производная функции U вдоль решений системы (6) имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = x\frac{dm}{dt} + y\frac{dn}{dt} + m\frac{dx}{dt} + n\frac{dy}{dt} = x\left(\frac{dm}{dt} + ma_{10} + nb_{10}\right) +$$
$$+ y\left(\frac{dn}{dt} + ma_{01} + nb_{01}\right) + x^2\left(ma_{20}+nb_{20}\right) + 2xy\left(ma_{11}+nb_{11}\right) +$$
$$+ y^2\left(ma_{02}+nb_{02}\right) \equiv S_1(t)(mx+ny) + S_2(t)(m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2),$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — нечётные и непрерывные на $\mathbb{R}$ функции.

Из записанного выше тождества вытекают следующие соотношения:

$$\frac{dm}{dt} + ma_{10} + nb_{10} = S_1 m, \quad \frac{dn}{dt} + ma_{01} + nb_{01} = S_1 n, \tag{7}$$

$$ma_{20}+nb_{20} = S_2 m^2, \quad ma_{11}+nb_{11} = S_2 mn, \quad ma_{02}+nb_{02} = S_2 n^2. \tag{8}$$

Пусть $m=k(t)n$, где $k(t)$ — дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Тогда, предполагая, что $n\neq 0$, равенства (8) несложно свести к соотношениям

$$ka_{20}+b_{20} = S_2k^2n, \quad ka_{11}+b_{11} = S_2kn, \quad ka_{02}+b_{02} = S_2n,$$

из которых получаем

$$S_2n = ka_{02}+b_{02}, \quad ka_{11}+b_{11} = k(ka_{02}+b_{02}), \quad ka_{20}+b_{20} = k(ka_{11}+b_{11}). \tag{9}$$

Из последних двух соотношений (при $a_{11}\neq 0$ или $a_{02}\neq 0$) имеем

$$ka_{11}^2 + a_{11}b_{11} - ka_{20}a_{02} - b_{20}a_{02} = (b_{02}a_{11} - b_{11}a_{02})k$$

и, значит, при $a_{11}{}^2 + b_{11}a_{02} - b_{02}a_{11} - a_{20}a_{02} \neq 0$ однозначно определим коэффициент

$$k = \frac{b_{20}a_{02} - a_{11}b_{11}}{a_{11}^2 + b_{11}a_{02} - b_{02}a_{11} - a_{20}a_{02}}. \tag{10}$$

Исключив S_1 из равенств (7), получим

$$n\frac{dm}{dt} - m\frac{dn}{dt} + mn(a_{10} - b_{01}) + n^2 b_{10} - m^2 a_{01} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $m = kn$, приходим к условию

$$\frac{dk}{dt} = a_{01}k^2 + (b_{01} - a_{10})k - b_{10}. \tag{11}$$

Второе соотношение в (7) запишем в виде

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt} = S_1 - ka_{01} - b_{01},$$

откуда находим, что

$$n(t) = N(t)\exp\bigg\{-\int\limits_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau))d\tau\bigg\}, \tag{12}$$

где $N(t)$ — произвольная чётная и не обращающаяся в нуль функция (в частности, можно принять $N(t) \equiv 1$). Её чётность следует из того, что интеграл нечётной функции $S_1(t)$ представляет собой чётную функцию.

Условия (11), (12) обеспечивают выполнение соотношений (7). Для выполнения равенств (8) необходимо и достаточно выполнения условий (9), и значит, необходимо, чтобы функция

$$S_2(t) = \frac{ka_{02} + b_{02}}{n} = (ka_{02} + b_{02})\exp\bigg\{\int\limits_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau))d\tau\bigg\}$$

была нечётной.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть для системы (6) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами выполнены условия:*

1) функция k, задаваемая равенством (10), определена при всех t из некоторого симметричного интервала $(-\alpha, \alpha)$ и удовлетворяет соотношению (11);

2) функция $S_2(t) = (ka_{02} + b_{02})/n = (ka_{02} + b_{02})\exp\left\{\int_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau))d\tau\right\}$ нечётная;

3) выполнены тождества

$$ka_{11} + b_{11} = k(ka_{02} + b_{02}) \quad \text{и} \quad ka_{20} + b_{20} = k(ka_{11} + b_{11}).$$

Тогда функция

$$U(t,x,y) = (k(t)x + y)n(t) = (k(t)x + y)\exp\bigg\{-\int\limits_0^t (k(\tau)a_{01}(\tau) + b_{01}(\tau))d\tau\bigg\}$$

представляет собой обобщённый первый интеграл системы (6), т.е. для каждого продолжимого на $(-\alpha, \alpha)$ решения $(x(t), y(t))$ системы (6) верно соотношение $U(-t, x(-t), y(-t)) \equiv$ $\equiv U(t, x(t), y(t))$.

Пример. Функция $U = a(t,x) + x'$ является обобщённым первым интегралом уравнения

$$x'' + a'_t(t,x) + a'_x(t,x)x' + \Phi(t, a(t,x) + x') = 0,$$

где $x' = dx/dt$, $a'_t = \partial a/\partial t$, $a'_x = \partial a/\partial x$ и $\Phi(t,U)$ — нечётная по t дифференцируемая функция.

Это утверждение следует из соотношения

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}x' + x'' = -\Phi(t,U).$$

В теореме 5 рассматривалась дифференциальная система вида

$$\frac{dx}{dt} = M(t,x,y), \quad \frac{dy}{dt} = N(t,x,y), \tag{13}$$

а в качестве её обобщённого первого интеграла выбиралась функция $U(t,x,y) := m(t)x+n(t)y$, линейная по фазовым переменным x и y. Это обеспечивает справедливость того факта, что оператор сдвига

$$A\colon \begin{pmatrix} x(-t) \\ y(-t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

отображает прямую $m(-t)x + n(-t)y = 0$ в прямую $m(t)x + n(t)y = 0$, и, в частности, отображение Пуанкаре

$$B\colon \begin{pmatrix} x(-\omega) \\ y(-\omega) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix},$$

если система (6) 2ω-периодична по t, переводит прямую $m(-\omega)x + n(-\omega)y = 0$ в прямую $m(\omega)x + n(\omega)y = 0$.

Если в качестве функции U для системы (13) взять многочлен второго порядка по x и y с 2ω-периодическими коэффициентами, то операторы A и B будут отображать кривую второго порядка в кривую второго порядка. Если обе эти кривые окажутся замкнутыми, а система (13) будет 2ω-периодической по t и не имеющей особых точек на этих кривых, то решения системы (13), начинающиеся на них, будут 2ω-периодическими.

Следует иметь в виду, что первый интеграл, как правило, может трактоваться как некоторый закон сохранения (энергии, количества движения и т.п.). То же верно и для обобщённого первого интеграла, только в его случае соответствующая величина сохраняется при переходе от $-t$ к t. Это замечание указывает, интегралы какого вида следует искать, если известно, какую реальную (физическую, химическую и т.д.) систему описывает исследуемая дифференциальная система.

Теорема 6. *Пусть 2ω-периодичная по t дифференциальная система*

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + \frac{M(t,x,y)}{q_0(t) + q_1(t)H + q_2(t)H^2} =: Q,$$

$$\frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + \frac{N(t,x,y)}{q_0(t) + q_1(t)H + q_2(t)H^2} =: R,$$

где функция $H = h_{10}(t)x + h_{01}(t)y + h_{20}(t)x^2 + 2h_{11}(t)xy + h_{02}(t)y^2$ положительно определена, удовлетворяет условиям:

1) функция $H(t,x,y)$ имеет непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ и 2ω-периодические коэффициенты;

2) функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и 2ω-периодичны;

3) функции $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ непрерывны, чётны, 2ω-периодичны и принимают только положительные значения на $\mathbb{R}$;

4) имеют место соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial t}+(ax+by)\frac{\partial H}{\partial x}+(cx+dy)\frac{\partial H}{\partial y}=s(t)H,\quad M\frac{\partial H}{\partial x}+N\frac{\partial H}{\partial y}=s_1(t)H+s_2(t)H^2;$$

5) $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — многочлены по x и по y не выше пятой степени, а $s(t)$, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — непрерывные на $\mathbb{R}$, нечётные, 2ω-периодические функции.

Тогда все решения рассматриваемой системы существуют на всём пространстве $\mathbb{R}$, функция $H(t,x,y)$ представляет собой её обобщённый первый интеграл, а отражающая функция системы $\big(F_1(t,x,y)\quad F_2(t,x,y)\big)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет соотношению

$$H(-t,F_1(t,x,y),F_2(t,x,y))\equiv H(t,x,y).$$

Доказательство. Из вида правых частей Q и R системы следует, что существуют постоянные c_1 и c_2, при которых выполняется неравенство $|dx/dt|+|dy/dt|=|Q|+|R|\leqslant c_1\,|x|+ +c_2\,|y|$. Отсюда вытекает продолжимость решений рассматриваемой системы на всё пространство $\mathbb{R}$.

Из условий 4) и 5) теоремы заключаем, что правая часть соотношения

$$\frac{dH}{dt}=s(t)H+\frac{s_1(t)H+s_2(t)H^2}{q_0(t)+q_1(t)H+q_2(t)H^2}$$

нечётна по t как функция двух аргументов t и H. Тогда ссылка на теорему 1 завершает доказательство.

При доказательстве теоремы 6 мы воспользовались периодичностью коэффициентов только для того, чтобы доказать ограниченность правой части системы функцией $c_1\,|x|+c_2\,|y|$. Используя эту периодичность и теорему 1, получаем

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда отображение Пуанкаре*

$$B\colon \begin{pmatrix}x(-\omega)\\ y(-\omega)\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x(\omega)\\ y(\omega)\end{pmatrix}$$

преобразует каждую кривую $H(-\omega,x(-\omega),y(-\omega))=f_{\mathrm{ev}}(\omega)$ в кривую $H(\omega,x(\omega),y(\omega))= =f_{\mathrm{ev}}(\omega)$.

Следствие даёт нам возможность судить о существовании периодических решений изучаемой системы и устойчивости её нулевого решения. Конкретным примером такой дифференциальной системы является система

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{dm(t)}{dt}\frac{x}{2m(t)}-b(t)n(t)y+\frac{s(t)x-n(t)c(t)y}{p(t)+q(t)(m(t)x^2+n(t)y^2)},$$
$$\frac{dy}{dt}=b(t)m(t)x-\frac{dn(t)}{dt}\frac{y}{2n(t)}+\frac{m(t)c(t)x+s(t)y}{p(t)+q(t)(m(t)x^2+n(t)y^2)},$$

все коэффициенты которой представляют собой дифференцируемые на $\mathbb{R}$ 2ω-периодические функции, причём $s(t)$ — нечётная, а $p(t)$ и $q(t)$ — чётные и не равные нулю, $m(t)$ и $n(t)$ — не обращающиеся в нуль функции.

Теорема 7. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{P(\varphi,\rho)}{S(\varphi,\rho)},\tag{14}$$

где $P(\varphi,\rho)$ и $S(\varphi,\rho)$ — сходящиеся степенные по ρ ряды с непрерывными коэффициентами. Пусть также существуют дифференцируемые функции $U(\varphi,\rho)$, $g(\varphi,\rho)$ и $\Phi(\varphi,\rho)$, *где* $g(\varphi,\rho)$ *— чётная по первому аргументу и* $\Phi(\varphi,\rho)$ *— нечётная по первому аргументу функции такие, что имеют место тождества*

$$S(\varphi,\rho)\equiv g(\varphi,U)U'_\rho(\varphi,\rho) \quad \text{и} \quad P(\varphi,\rho)\equiv \Phi(\varphi,U)-g(\varphi,U)U'_\varphi. \tag{15}$$

Тогда функция $U(\varphi,\rho)$ *представляет собой обобщённый первый интеграл уравнения (14).*

Доказательство. Найдём полную производную функции $U(\varphi,\rho)$ вдоль решений уравнения (14). Имеем

$$\frac{dU}{d\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}=U'_\varphi+U'_\rho\frac{P(\varphi,\rho)}{S(\varphi,\rho)}=U'_\varphi+\frac{P(\varphi,\rho)}{g(\varphi,U)}=U'_\varphi+\frac{\Phi(\varphi,U)-g(\varphi,U)U'_\varphi}{g(\varphi,U)}=\frac{\Phi(\varphi,U)}{g(\varphi,U)}.$$

Таким образом, верно соотношение $dU/d\varphi=\Phi(\varphi,U)/g(\varphi,U)$. Правая часть этого равенства представляет собой нечётную по первому аргументу функцию. Тогда ссылка на теорему 1 завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Чтобы обозначить возможности использования теоремы 7, полезно заметить, что при построении конкретных уравнений, удовлетворяющих условиям этой теоремы, функции $U(\varphi,\rho)$, $g(\varphi,\rho)$ и $\Phi(\varphi,\rho)$ можно выбирать произвольным образом.

Замечание 2. Если уравнение (14) удовлетворяет условиям теоремы 7, то первообразная

$$\int S(\varphi,\rho)d\rho=\int g(\varphi,U)U'_\rho d\rho =: G(\varphi,U)$$

(при некотором выборе постоянной по ρ, добавляемой при интегрировании) представляет собой функцию $G(\varphi,U)$, чётную по первому аргументу, если вторым аргументом считать U. Это замечание помогает найти функции $U(\varphi,\rho)$, $g(\varphi,\rho)$ и $\Phi(\varphi,\rho)$ из условий (15).

Теорема 8. *Пусть для* 2π*-периодического по* φ *дифференциального уравнения*

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{P(\varphi,\rho)}{1+2m\rho+a\cos\rho+2am(\sin\rho+\rho\cos\rho)+ma^2\sin 2\rho} \tag{16}$$

выполнены условия:

1) функция $m=m(\varphi)$ *непрерывная, чётная и* 2π*-периодическая, а функция* $a=a(\varphi)$ *имеет производную* $a'(\varphi)$ *и* 2π*-периодична;*

2) для функций $P(\varphi,\rho)$ *верно тождество* $P(\varphi,0)\equiv 0$ *и справедливо соотношение*

$$P(\varphi,\rho)+(1+2mU)a'(\varphi)\sin\rho =: \Phi(\varphi,U),$$

где $U=\rho+a(\varphi)\sin\rho$, *а функция* $\Phi(\varphi,U)$ *нечётна по первому аргументу.*

Тогда функция $U(\varphi,\rho)=\rho+a(\varphi)\sin\rho$ *представляет собой обобщённый первый интеграл рассматриваемого уравнения, а особая точка* $\rho=0$ *для этого уравнения является центром при условии, что* $|a(\varphi)|<1$ *для всех* φ.

Доказательство. В рассматриваемом случае получаем

$$\int S(\varphi,\rho)d\rho=\rho+m\rho^2+a\sin\rho+2am\rho\sin\rho+ma^2\sin^2\rho=$$
$$=\rho+a\sin\rho+m(\rho^2+2a\rho\sin\rho+a^2\sin^2\rho),$$

поэтому

$$\int S(\varphi,\rho)d\rho=\rho+a\sin\rho+m(\rho+a\sin\rho)^2.$$

Естественно предположить, что $U(\varphi,\rho)=\rho+a\sin\rho$, $g(\varphi,U)=1+2mU$.

Непосредственная проверка показывает, что с такими функциями $U(\varphi,\rho)$ и $g(\varphi,\rho)$ все условия теоремы 7 выполнены. Отсюда следует, что для каждого решения $\rho(\varphi)$ уравнения (16) функция $U(\varphi)=\rho(\varphi)+a(\varphi)\sin\rho(\varphi)$ является чётной, поэтому $\rho(\pi)=\rho(-\pi)$, т.е. $\rho(\pi)$ является неподвижной точкой отображения Пуанкаре на отрезке $[-\pi,\pi]$. Следовательно, всякое решение $\rho(\varphi)$ уравнения (16), продолжимое на $[-\pi,\pi]$, будет 2π-периодическим.

Продолжимость решения $\rho(\varphi)$ при достаточно малых $\rho(-\pi)$ гарантируется теоремой об интегральной непрерывности [12, с. 22], поскольку уравнение (16) имеет решение $\rho(\varphi)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Предположим, что мы ограничиваемся поиском только одного обобщённого первого интеграла $U(t,x)$, который является многочленом по $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда, дифференцируя тождество $U(-t,F(t,x))\overset{t,x}{\equiv}U(t,x)$ частным образом по t и каждому x_i, придём к соотношениям

$$-\frac{\partial U(-t,F)}{\partial t}+\frac{\partial U(-t,F)}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(-t,F)}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial U(t,x)}{\partial x_i}, \quad i=\overline{1,n.}$$

Эта дополнительная информация облегчит поиск обобщённого первого интеграла в некоторых частных случаях. В других случаях она поможет отыскать предельные циклы изучаемой дифференциальной системы.

Отметим, что если мы имеем однопараметрическое семейство (гладкое многообразие) гладких кривых $U(t,x,y)=0$, где $t\in(-\alpha,\alpha)$, и дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt}=Z(t,z), \quad t,z\in\mathbb{R},$$

с отражающей функцией $F(t,z)$, то можно построить класс систем вида (13), для которых

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+M\frac{\partial U}{\partial x}+N\frac{\partial U}{\partial y}=Z(t,U)+F_z^{-1}(t,U)R(t,U)-R(-t,F(t,U)),$$

где R — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. С этой целью используем приведённое в п. 1 второе свойство отражающей функции. Тогда для решений $(x(t),y(t))$, $t\in(-\alpha,\alpha)$, построенных систем верно соотношение $U(-t,x(-t),y(-t))=U(t,x(t),y(t))$.

Это замечание переносится и на многомерный случай, когда $U=U(t,x_1,...,x_n)$.

Заключение. Введено понятие обобщённого первого интеграла дифференциальной системы и установлена его связь с понятием отражающей функции. Доказаны теоремы, позволяющие находить обобщённые первые интегралы. Полученные результаты применены к изучению вопросов существования периодических решений дифференциальных систем, а также к исследованию проблемы центра-фокуса.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1635–1638.
2. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.

3. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных систем: учеб. пособие. Гомель, 1985.
4. *Zhou Z.* The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications. Beijing, 2014.
5. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
6. *Мироненко В.И.* Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2109–2114.
7. *Мусафиров Э.В.* О простоте линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 570–572.
8. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.
9. *Мироненко В.И.* Замечания о стационарных интегралах и стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 864–868.
10. *Мироненко В.И.* Стационарные интегралы и инварианты оператора сдвига вдоль решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 12. С. 2170–2177.
11. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск, 1981.
12. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.

Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.
После доработки 09.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 24–40

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

© 2024 г. М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова

Предложены новые подходы в задаче конструирования для многомерных нелинейных систем теории управления эквивалентных скалярных дифференциальных уравнений, а также в задаче конструирования для нелинейных уравнений Лурье (скалярных дифференциальных уравнений, содержащих производные только чётных порядков) эквивалентных гамильтоновых систем. Изучены условия разрешимости соответствующих задач, предложены новые формулы перехода к эквивалентным уравнениям и системам. Для уравнений Лурье предлагаемые подходы основаны на переходе от линейной части к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием найденной системы. Получены расчётные формулы и алгоритмы, эффективность которых иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: скалярное дифференциальное уравнение, нелинейное уравнение, уравнение Лурье, линейная задача, нелинейная задача, эквивалентность, разрешимость, гамильтонова система, наблюдаемость системы.

DOI: 10.31857/S0374064124010038, EDN: RQBIXE

1. Введение и постановка задач. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y), \tag{1}$$

в котором

$$L(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n, \quad M(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m \tag{2}$$

— взаимно простые вещественные многочлены степеней n и m $(n > m \geqslant 0)$ соответственно, а $f(y)$ — скалярная m раз непрерывно дифференцируемая функция. К такому уравнению приводят многие задачи теории систем, теории управления и др. (см., например, [1, § 1.2; 2, гл. 4, § 3; 3, § 1.1.4]). Уравнение (1) описывает динамику одноконтурной системы управления, состоящей из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной обратной связи с характеристикой $f(y)$.

Уравнение (1) различными способами может быть преобразовано к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Наиболее простым является переход от (1) к системе

$$z' = A_0z + \gamma f((z, c_0)), \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

в которой

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

коэффициенты вектора γ определяются равенствами

$$\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_{n-m-1} = 0, \quad \gamma_{n-m} = b_0, \quad \gamma_{n-m+1} + \gamma_{n-m}a_1 = b_1, \quad \ldots,$$
$$\gamma_n + \gamma_{n-1}a_1 + ... + \gamma_{n-m}a_m = b_m. \tag{5}$$

Здесь и ниже символ (z, c) обозначает скалярное произведение векторов $z, c \in \mathbb{R}^n$. Решения уравнения (1) и системы (3) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$.

Основное внимание в настоящей работе уделяется изучению следующих двух задач.

Задача Z1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$x' = Ax + \xi f((x, c)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

в которой A — квадратная (порядка n) матрица, $f(y)$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция, а $\xi, c \in \mathbb{R}^n$ — фиксированные векторы, при этом $c \neq 0$. Требуется определить условия, при выполнении которых система (6) будет эквивалентна скалярному дифференциальному уравнению вида (1) таким образом, чтобы их решения $x(t)$ и $y(t)$ были бы связаны равенством $y(t) = (x(t), c)$.

Понятие эквивалентности системы (6) и уравнения (1) более детально будет обсуждаться ниже.

Изучению различных аспектов взаимосвязи уравнения (1) и системы (6) посвящена обширная литература (см., например, [1, § 1.2; 2, гл. 4, § 3; 3, § 1.1.4; 4, гл. 4, § 1; 5, § 23]).

Вторая задача связана с изучением важного частного случая дифференциального уравнения вида (1), в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}p^2 + a_n, \tag{7}$$
$$M(p) = b_0p^{2m} + b_1p^{2m-2} + \ldots + b_{m-1}p^2 + b_m \tag{8}$$

— взаимно простые многочлены $(0 \leqslant m < n)$, а $f(y)$ — скалярная $2m$ раз непрерывно дифференцируемая функция.

К таким уравнениям с многочленами (7) и (8), содержащими степени только чётных порядков, приводят многие задачи гамильтоновой механики, теории гамильтоновых систем и её приложений (см., например, [6, 7]). Для того чтобы в задаче исследования уравнения (1), (7), (8) воспользоваться богатым арсеналом теории гамильтоновых систем и её методами, полезно от уравнения перейти к эквивалентной гамильтоновой системе в стандартной форме

$$x' = J\nabla H(x), \quad y = (x, c), \tag{9}$$

здесь $c \in \mathbb{R}^{2n}$ — фиксированный вектор, символ (x, c) обозначает скалярное произведение векторов x и c из $\mathbb{R}^{2n}$, а матрица J и вектор $\nabla H(x)$ определяются равенствами

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}\right)^T, \tag{10}$$

в которых 0 и I — соответственно нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x)$ — скалярная вещественная гладкая функция, называемая *гамильтонианом* системы (9).

Второй в настоящей статье является

Задача Z2. Рассматривается дифференциальное уравнение вида (1), (7), (8). Требуется построить эквивалентную этому уравнению гамильтонову систему

$$x' = Ax + \xi f((x, c)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{11}$$

так, чтобы их решения $y(t)$ и $x(t)$ были бы связаны равенством $y(t) = (x(t), c)$. Здесь A — квадратная (порядка $2n$) матрица, $\xi, c \in \mathbb{R}^{2n}$ — фиксированные векторы.

Гамильтоновость системы (11) означает существование скалярной вещественной гладкой функции $H(x)$ такой, что

$$J\nabla H(x) = Ax + \xi f((x,c)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Отметим, что уравнение (1), (7), (8) может быть сведено к системе вида (3). Однако такая система, вообще говоря, не является гамильтоновой. Изучению взаимосвязи уравнений вида (1), (7), (8) и гамильтоновых систем вида (11) и их приложениям посвящена обширная литература (см., например, [8–10]).

В настоящей статье обсуждаются условия, при выполнении которых задачи Z1 и Z2 имеют решения, а также предлагаются алгоритмы конструирования эквивалентных уравнений и систем.

2. Вспомогательные сведения.

2.1. Об эквивалентности систем. Имеют место следующие несложно устанавливаемые утверждения.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\det(A_0 - pI) = (-1)^n L(p).$$

В частности, собственные значения матрицы A_0 совпадают с нулями многочлена $L(p)$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Тогда решения $y = y(t)$ и $z = z(t)$ уравнения (1) и системы (3) связаны равенствами*

$$y = (z, c_0), \quad z = \tilde{y} - T\tilde{f}(y). \tag{12}$$

Здесь

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \\ (f(y))'' \\ \vdots \\ (f(y))^{(m-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

при этом вектор $\tilde{f}(y)$ имеет размерность $n-1$, а прямоугольная $n\times(n-1)$-матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \dots & \gamma_1 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

производные $y^{(k)}$ и $(f(y))^{(k)}$ вычисляются по переменной t от функций $y = y(t)$ и $f(y(t))$ соответственно.

Равенства (12) дают формулы перехода от уравнения (1) к системе (3) и обратно. В соответствии с этими формулами уравнение (1) и система (3) эквивалентны: каждому $y_0 \in \mathbb{R}^n$ соответствует $z_0 = y_0 - T\tilde{f}(y_0) \in \mathbb{R}^n$ (здесь $\tilde{f}(y_0)$ — значение вектор-функции $\tilde{f}(y(t))$ при $t = 0$, а $y(t)$ — это решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $\tilde{y}(0) = y_0$) так, что если $z(t)$ — решение задачи Коши для системы (3) с начальным условием $z(0) = z_0$, то $y(t) = (z(t), c_0)$, и наоборот.

Замечание 1. Отметим, что уравнение (1) имеет смысл только для m раз дифференцируемых функций $f(y)$. В то же время эквивалентная ему система (3) определена для существенно более широкого класса функций, в частности, для непрерывно дифференцируемых функций $f(y)$.

Пусть функция $f(y)$ является непрерывно дифференцируемой. Системы (3) и (6) будем называть *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (6) в систему (3). Другими словами, существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены равенства

$$A_0 = Q^{-1}AQ, \quad \xi = Q\gamma, \quad Q^*c = c_0, \tag{15}$$

здесь Q^* — транспонированная матрица.

Пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1) и систему (6) будем называть *эквивалентными*, если система (6) эквивалентна системе (3). В этом случае решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (1) и системы (6) связаны, соответственно, равенствами

$$y(t) = (x(t), c), \quad x(t) = Q[\tilde{y}(t) - T\tilde{f}(y(t))]. \tag{16}$$

Сформулируем следующее полезное утверждение.

Лемма 3. *Пусть уравнение (1) и система (6) эквивалентны. Тогда имеет место равенство*

$$\det(A - pI) = (-1)^n L(p), \tag{17}$$

в котором $L(p)$ — многочлен из (2).

Справедливость равенства (17) следует из леммы 1 и из первого равенства в (15), означающего, что матрицы A и A_0 подобны.

Замечание 2. Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Тогда, в частности, матрицы A и A_0 подобны. В этом случае A_0 представляет собой (см., например, [3, § 1.1.4]) фробениусову нормальную форму матрицы A, состоящую из одного блока (фробениусовой клетки). Поэтому эквивалентность систем (3) и (6), в частности, означает, что матрица A приводима к фробениусовой форме, состоящей из одного блока. Указанная приводимость равносильна тому, что геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице (см. также приводимую ниже теорему 6). Матрица A приводима, если все её собственные значения являются различными. Соответственно, если фробениусова нормальная форма матрицы A состоит из более чем одного блока, то системы (3) и (6) не являются эквивалентными.

2.2. О наблюдаемости систем. Рассмотрим систему (6). Определим квадратную (порядка n) матрицу

$$D(c) = \begin{bmatrix} c^* \\ c^*A \\ c^*A^2 \\ \vdots \\ c^*A^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

в которой вектор c^* и произведения c^*A^j рассматриваются как вектор-строки. Матрица D называется (см., например, [1, § 2.3; 3, § 1.3.3]) *матрицей наблюдаемости* системы (6). Система (6) называется *наблюдаемой*, если $\det D(c) \neq 0$.

Обратим внимание, что система (3) является наблюдаемой.

3. Решение задачи Z1. Отметим сначала, что не для любой системы вида (6) задача Z1 имеет решение. Простым примером является система

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 + x_2^2,$$

для которой имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(y) = y^2.$$

Рассматриваемая система не может быть эквивалентна никакому уравнению вида $y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0(y^2)' + b_1 y^2$. Действительно, в силу леммы 3 указанная система может быть эквивалентна только уравнению вида $y'' - 2y' + y = b_0(y^2)' + b_1 y^2$. Но в этом случае соответствующая фробениусова матрица A_0 должна иметь вид

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для матриц A и A_0 ни при какой невырожденной матрице Q не может выполняться первое из равенств (15), участвующих в определении эквивалентности.

Приведем критерий эквивалентности систем (3) и (6).

Теорема 1. *Пусть функция $f(y)$ является непрерывно дифференцируемой. Системы (3) и (6) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства*

$$A_0 = DAD^{-1}, \quad \gamma = D\xi, \tag{19}$$

здесь $D = D(c)$ — матрица наблюдаемости системы (6).

Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Тогда система (6) приводима к системе (3) невырожденной заменой переменных $z = Dx$.

Прежде чем привести доказательство теоремы 1, отметим, что в соотношениях (19) отсутствует третье из равенств (15), используемых в определении эквивалентности систем (3) и (6). Это связано с тем, что верна

Лемма 4. *Имеет место равенство $S^*c = c_0$, здесь $S = D^{-1}$.*

Это равенство (или равносильное ему $(S^*)^{-1}c_0 = c$) следует из соотношений $(S^*)^{-1} = D^*$ и $D^*c_0 = c$.

Доказательство теоремы 1. Достаточность следует из равенств (19) и леммы 4.

Необходимость. Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Требуется тогда показать, что система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства (19).

Установим сначала, что система (6) является наблюдаемой, т.е. матрица (18) невырождена. Как было отмечено выше, система (3) является наблюдаемой, т.е. матрица $D(c_0)$ невырождена или (что равносильно) векторы

$$c_0^*, \quad c_0^*A_0, \quad c_0^*A_0^2, \quad \ldots, \quad c_0^*A_0^{n-1}$$

линейно независимы. Эти векторы нам удобно представить в виде вектор-столбцов:

$$c_0, \quad A_0^*c_0, \quad (A_0^*)^2c_0, \quad \ldots, \quad (A_0^*)^{n-1}c_0. \tag{20}$$

Так как системы (3) и (6) эквивалентны, то существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены равенства (15). Несложно видеть, что матрица $(Q^*)^{-1}$ переводит набор векторов (20) в набор

$$c, \quad A^*c, \quad (A^*)^2c, \quad \ldots, \quad (A^*)^{n-1}c,$$

который образует линейно независимую систему. Это равносильно невырожденности матрицы (18). Таким образом, система (6) является наблюдаемой.

Покажем теперь справедливость равенства $A_0 = DAS$, здесь $S = D^{-1}$. Замена $x = Sz$ приводит систему (6) к эквивалентной системе

$$z' = DASz + D\xi f(y), \quad y = (z, S^*c) = (z, c_0). \tag{21}$$

Далее для упрощения изложения ограничимся рассмотрением случая $n = 3$. Тогда в силу соотношения (17) имеем

$$-\det(A_0 - pI) = p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3. \tag{22}$$

Равенство $z = Dx$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^* \\ c^*A \\ c^*A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$z_1 = (c, x), \quad z_2 = (A^*c, x), \quad z_3 = ((A^*)^2c, x),$$

откуда находим

$$z_1' = (c, x') = (c, Ax + \xi f(y)) = (A^*c, x) + (c, \xi)f(y) = z_2 + (c, \xi)f(y),$$
$$z_2' = (A^*c, x') = (A^*c, Ax + \xi f(y)) = ((A^*)^2c, x) + (A^*c, \xi)f(y) = z_3 + (A^*c, \xi)f(y),$$
$$z_3' = ((A^*)^2c, x') = ((A^*)^2c, Ax + \xi f(y)) = ((A^*)^3c, x) + ((A^*)^2c, \xi)f(y) =$$
$$= ((A^*)^3c, Sz) + ((A^*)^2c, \xi)f(y).$$

С учётом этого система (21) в развёрнутом виде записывается следующим образом:

$$z_1' = z_2 + (c, \xi)f(y), \quad z_2' = z_3 + (A^*c, \xi)f(y),$$
$$z_3' = ((A^*)^3c, Sz) + ((A^*)^2c, \xi)f(y). \tag{23}$$

Представим линейный функционал $((A^*)^3c, Sz)$ в виде $((A^*)^3c, Sz) = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$ с некоторыми коэффициентами β_1, β_2, β_3. Тогда матрица DAS и вектор $D\xi$ в системе (21) или (что равносильно) в системе (23) имеют вид

$$DAS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \qquad D\xi = \begin{bmatrix} (c, \xi) \\ (A^*c, \xi) \\ ((A^*)^2c, \xi) \end{bmatrix}.$$

Но так как $S = D^{-1}$, то матрицы A и $\tilde{B} = DAS$ подобны и, следовательно, характеристические многочлены этих матриц должны быть одинаковы, т.е. $a_1 = -\beta_3$, $a_2 = -\beta_2$, $a_3 = -\beta_1$ (см. (22)). Отсюда следует, что матрица $\tilde{B}$ совпадает с определённой равенством (4) матрицей A_0 (при $n = 3$), т.е. имеет место соотношение $A_0 = DAS$.

Одновременно было показано, что решения $x(t)$ и $z(t)$ систем (6) и (3) связаны равенством $z_1(t) = (x(t), c)$, где $z_1(t)$ — первая компонента вектор-функции $z(t)$. Таким образом, система (6) эквивалентна и системе (3), и системе (21), которые отличаются только векторами γ и $D\xi$, поэтому $\gamma = D\xi$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть системы (3) и (6) эквивалентны. Тогда в равенствах (15) следует полагать* $Q = D^{-1}$; *здесь* $D = D(c)$. *Другими словами, замена* $x = D^{-1}z$ *преобразует систему (6) в систему (3) и, следовательно, верны равенства*

$$A_0 = DAD^{-1}, \quad \xi = D^{-1}\gamma, \quad (D^{-1})^*c = c_0.$$

3.1. Об эквивалентности уравнения (1) и системы (6). Пусть системы (3) и (6) эквивалентны и пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Тогда уравнение (1) и система (6) тоже эквивалентны. Это означает, что каждому вектору $\tilde{y}_0 = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ соответствует вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что соответствующие решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (1) и системы (6) связаны равенствами (16), которые принимают вид

$$y(t) = (x(t), c), \quad \tilde{y}(t) = D(c)x + T\tilde{f}(y(t)),$$

где $D(c)$ — матрица (18), T — матрица (14).

Отсюда и из теоремы 1 вытекает основное утверждение для задачи Z1.

Теорема 2. *Пусть функция $f(y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1) и система (6) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства (19).*

Пусть уравнение (1) и система (6) эквивалентны. Тогда система (6) приводима к уравнению (1) заменой переменных

$$x = D^{-1}[\tilde{y} - T\tilde{f}(y)],$$

здесь T — матрица (14), а $\tilde{y}$ и $\tilde{f}(y)$ — векторы из (13).

3.2. Конструирование эквивалентного скалярного уравнения (1). Пусть система (6) является наблюдаемой и выполнены равенства (19). Тогда в соответствии с теоремой 2 система (6) эквивалентна некоторому скалярному уравнению вида (1). Опишем схему конструирования такого уравнения. Очевидно, что достаточно построить соответствующие многочлены $L(p)$ и $M(p)$ (см. равенства (2)):

1) многочлен $L(p)$ определяется по формуле (17);

2) по матрице наблюдаемости $D = D(c)$ и вектору ξ системы (6) строится вектор $\gamma = D\xi$;

3) по формулам (5) вычисляются коэффициенты b_j многочлена $M(p)$ и, следовательно, определяется сам многочлен $M(p)$.

3.3. Пример 1. В качестве иллюстрации рассмотрим трехмерную систему

$$x' = Ax + \xi f((x,c)), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{24}$$

в которой ξ и c — некоторые фиксированные векторы из $\mathbb{R}^3$, а матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Изучим вопрос о том, при каких значениях вектора c система (24) сводится к эквивалентному скалярному дифференциальному уравнению (1).

Предположим сначала, что при некотором векторе $c = (c_1, c_2, c_3)$ такое сведение возможно. Тогда, так как характеристический многочлен матрицы A равен $\det(A - pI) = -(p^3 + 7p^2 + 14p + 8)$, в силу леммы 3 соответствующее эквивалентное уравнение будет иметь вид

$$y''' + 7y'' + 14y' + 8y = b_0(f(y))'' + b_1(f(y))' + b_2 f(y) \tag{25}$$

с неизвестными (пока) коэффициентами b_0, b_1, b_2. Другими словами, в указанном случае система (24) будет сводиться к одному уравнению (25) третьего порядка относительно неизвестной функции $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$.

Исследуем теперь указанный вопрос на основе теорем 1 и 2. Имеем

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad A^*c = \begin{bmatrix} c_2 - c_1 \\ -2c_2 \\ -4c_3 \end{bmatrix}, \quad (A^*)^2 c = \begin{bmatrix} c_1 - 3c_2 \\ 4c_2 \\ 16c_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица (18) здесь запишется как

$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 - c_1 & -2c_2 & -4c_3 \\ c_1 - 3c_2 & 4c_2 & 16c_3 \end{bmatrix},$$

тогда $\det D(c) = -6c_2c_3(c_1 + c_2)$.

Таким образом, в силу теоремы 2 система (24) сводится к одному уравнению (25) третьего порядка относительно функции $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ тогда и только тогда, когда $c_2c_3(c_1 + c_2) \neq 0$. В частности, система (24) не может быть сведена к уравнению (25) относительно одной из координат x_1, x_2 или x_3 вектора x, так как для этого в качестве вектора c следует брать $c=(1,0,0)$, $c=(0,1,0)$ или $c=(0,0,1)$ соответственно; но тогда $\det D(c)=0$.

Вместе с тем если взять некоторые комбинации координат x_1, x_2 и x_3, то это становится возможным. Пусть, например, $c=(1,-2,1)$. В этом случае имеем

$$D=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & 4 & -4\\ 7 & -8 & 16\end{bmatrix} \tag{26}$$

и, следовательно, $\det D(c)=-12\neq 0$. Тогда в силу теоремы 2 система (24) при любом векторе ξ сводится к одному уравнению (25) относительно функции $y=x_1-2x_2+x_3$.

Пусть, например, $\xi=(1,0,0)$. Согласно теореме 1 векторы γ и ξ, участвующие в канонической системе (3) и системе (24), связаны равенством $\gamma=D\xi$. Отсюда получим $\gamma=(1,-3,7)$. Следовательно, коэффициенты b_0, b_1, b_2 в правой части уравнения (25) равны (см. формулы (5)) $b_0=1$, $b_1=4$, $b_2=0$. Таким образом, уравнение (25) принимает вид

$$y'''+7y''+14y'+8y=(f(y))''+4(f(y))'. \tag{27}$$

Для конструирования замены, приводящей систему (24) к эквивалентному уравнению (27), воспользуемся теоремой 2. Согласно этой теореме соответствующая замена определяется равенством $x=D^{-1}[\tilde y-T\tilde f(y)]$, в котором, в соответствии с формулами (13), (14) и (26),

$$\tilde y=\begin{bmatrix}y\\ y'\\ y''\end{bmatrix},\quad \tilde f(y)=\begin{bmatrix}f(y)\\ (f(y))'\end{bmatrix},$$

$$D^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}32 & 24 & 4\\ 20 & 9 & 1\\ -4 & -6 & -2\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}.$$

4. Линейная задача. Задача Z1 изучалась для нелинейной системы (6), которая становится линейной при $\xi=0$, т.е. когда она принимает вид

$$x'=Ax,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{28}$$

где A — квадратная (порядка n) матрица.

Конечно, система (28) является частным случаем системы (6) и поэтому полученные выше результаты переносятся и на линейную задачу. Однако в силу важности линейной постановки, а также с учётом того, что линейная задача имеет свои особенности, полезно привести и некоторые результаты, относящиеся к системе (28).

Задача Z1 в линейной постановке может быть сформулирована как задача об условиях, при выполнении которых линейную систему (28) можно преобразовать к эквивалентному скалярному линейному дифференциальному уравнению вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \tag{29}$$

В более полной формулировке вопрос состоит в следующем. Можно ли с помощью какой-либо линейной замены свести n-мерную систему (28) к эквивалентному уравнению n-го порядка вида (29), в котором роль неизвестного y играет линейная комбинация (x,c), где $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ — некоторый ненулевой вектор.

Замечание 3. В нелинейной постановке задачи Z1 вектор c прямо указан в исходной системе (6), а в линейной постановке это не так, поэтому естественно рассматривать два варианта постановки задачи:

1. Вектор c задаётся и для этого вектора решается задача Z1. Такую постановку будем называть *задачей L1*.

Здесь особый интерес вызывает вопрос о том, можно ли систему (28) свести к эквивалентному уравнению (29), в котором роль неизвестного y играет какая-либо координата x_j вектора x, например, первая координата x_1 (в этом случае полагаем $c = (1, 0, \ldots, 0)$).

2. Вектор c следует определить. В этой постановке требуется выяснить, существует ли ненулевой вектор c такой, что систему (28) можно свести к эквивалентному уравнению (29), в котором роль неизвестного y играет функция $y = (x, c)$. Такую постановку будем называть *задачей L2*.

Соответственно и понятие эквивалентности системы (28) и уравнения (29) можно рассматривать в двух вариантах.

Прежде чем сформулировать это понятие отметим, что, как и в нелинейной задаче, переход от уравнения (29) к системе вида (28) несложен. Он может быть осуществлен, например, с помощью замены

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \ldots, \quad z_n = y^{(n-1)},$$

которая приводит уравнение (29) к линейной системе

$$\frac{dz}{dt} = A_0 z, \quad z \in \mathbb{R}^n; \tag{30}$$

здесь A_0 — матрица, определённая в (4). В этом случае решения уравнения (29) и системы (30) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$, где $c_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$.

В случае задачи L1 будем говорить, что для заданного вектора c уравнение (29) и система (28) *эквивалентны*, если существует невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (28) в систему (30), при этом выполнено равенство $Q^*c = c_0$. Другими словами, существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены соотношения

$$A_0 = Q^{-1}AQ, \quad Q^*c = c_0.$$

В этом случае решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (29) и системы (28) связаны, соответственно, равенствами

$$y(t) = (x(t), c), \quad x(t) = Q\tilde{y}(t).$$

В случае задачи L2 будем говорить, что уравнение (29) и система (28) *эквивалентны*, если существует ненулевой вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, для которого уравнение (29) и система (28) эквивалентны.

Прежде чем переходить к обсуждению задач L1 и L2, отметим, что из теоремы 2 и леммы 3 следует

Теорема 3. *Пусть уравнение (29) и система (28) эквивалентны. Тогда уравнение (29) — это уравнение* $L(d/dt)y = 0$, *где* $L(p) = (-1)^n \det(A - pI)$.

Другими словами, системе (28) может соответствовать единственный вид эквивалентного уравнения (29): этот вид определяется характеристическим многочленом матрицы A.

4.1. Задача L1. Пусть задан ненулевой вектор c. Определим в соответствии с равенством (18) матрицу $D = D(c)$ наблюдаемости системы (28).

Для решения задачи L1 применимы полученные выше результаты (с естественными модификациями). Ограничимся здесь приведением аналогов теорем 1 и 2.

Теорема 4. *Уравнение (29) и система (28) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (28) является наблюдаемой и выполнено равенство* $A_0 = DAD^{-1}$.

Теорема 5. *Пусть уравнение (29) и система (28) эквивалентны. Тогда система (28) приводима к уравнению (29) заменой переменных* $x = D^{-1}\tilde{y}$.

4.2. Задача L2. Справедлива следующая

Теорема 6. *Задача L2 разрешима тогда и только тогда, когда геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача L2 разрешима, т.е. существует ненулевой вектор $\tilde{c}$ такой, что матрица $D(\tilde{c})$, определённая равенством (18), обратима и, следовательно, система (28) эквивалентна уравнению (29), в котором роль неизвестного y играет функция $y = (x, \tilde{c})$. Требуется показать, что тогда геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице. Допустим противное, т.е. пусть геометрическая кратность некоторого собственного значения λ_0 матрицы A больше единицы. Тогда и у транспонированной матрицы A^* геометрическая кратность собственного значения $\bar{\lambda}_0$ больше единицы. Для упрощения пусть указанная геометрическая кратность равна двум, т.е. существуют два линейно независимых вектора e_1 и e_2, так что $A^*e_1 = \bar{\lambda}_0 e_1$ и $A^*e_2 = \bar{\lambda}_0 e_2$.

Вектор $\tilde{c}$ единственным образом представляется в виде $\tilde{c} = k_1e_1 + k_2e_2 + g$, где k_1 и k_2 — некоторые коэффициенты, а g — вектор, являющийся линейной комбинацией остальных собственных и присоединённых векторов матрицы A^*. Нетрудно видеть, что тогда векторы $\tilde{c}$, $A^*\tilde{c}$, $(A^*)^2\tilde{c}$, $\ldots$, $(A^*)^n\tilde{c}$ линейно зависимы, т.е. матрица $D(\tilde{c})$, определённая равенством (18), вырождена, что противоречит исходному предположению. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть геометрические кратности всех собственных значений матрицы A равны единице. Требуется показать, что тогда задача L2 разрешима. У транспонированной матрицы A^* геометрические кратности всех собственных значений также равны единице. Пусть e_1, e_2, $\ldots$, e_n — базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, образованный собственными и присоединёнными векторами матрицы A^*. Положим $\tilde{c} = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. Нетрудно видеть, что тогда векторы $\tilde{c}$, $A^*\tilde{c}$, $(A^*)^2\tilde{c}$, $\ldots$, $(A^*)^n\tilde{c}$ линейно независимы, т.е. матрица $D(c_0)$, определённая равенством (18), невырождена. Достаточность доказана.

Одновременно была предложена схема конструирования вектора $\tilde{c}$, для которого задача L2 разрешима.

5. Гамильтоновы системы: вспомогательные сведения. Прежде чем перейти к обсуждению задачи Z2, приведём необходимые сведения из теории гамильтоновых систем (см., например, [6, 7]).

Автономной гамильтоновой системой называют динамическую систему, описываемую уравнением

$$x' = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n},$$

в котором матрица J и вектор $\nabla H(x)$ определяются равенствами (10).

Линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{31}$$

в которой A — вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) матрица. Гамильтониан этой системы равен $H(x) = (Ax, x)/2$.

Ниже участвующую в системе (31) матрицу JA будем называть *гамильтоновой.* Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы JA:

G1) если матрица JA имеет собственное значение λ, то числа $-\lambda$, $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причём той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;

G2) если матрица JA имеет собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является чётным числом;

G3) характеристический многочлен матрицы JA содержит степени только чётных порядков.

Отметим также, что каждая гамильтонова матрица входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют один представитель, называемый *нормальной формой.* Вид нормальной формы определяется свойствами корневых подпространств матрицы JA. Более детально с теорией нормальных форм и, в частности, со списками нормальных форм можно ознакомиться в работах [7, § 7.2; 11, § 2.6; 12].

Одной из специфик нормальных форм является тот факт, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы. Указанные свойства гамильтоновых матриц определяют многие важные качественные характеристики гамильтоновых систем (линейных и нелинейных), такие как свойства сильной устойчивости, устойчивость в линейной и нелинейной постановках и др. (см., например, [12, 13]).

Для иллюстрации указанного факта рассмотрим гамильтоновы матрицы четвёртого порядка, имеющие две пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_1 i$ и $\pm\omega_2 i$ (здесь $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$). В этом случае имеются два вида нормальных форм:

$$JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{здесь } \sigma = 1 \text{ или } \sigma = -1. \tag{32}$$

В случае $\sigma = 1$ говорят, что числа $\omega_1 i$ и $\omega_2 i$ являются собственными значениями первого рода, а при $\sigma = -1$ – собственными значениями первого и второго рода соответственно. Отметим, что не существует симплектических преобразований, переводящих нормальную форму при $\sigma = 1$ в нормальную форму при $\sigma = -1$.

Как будет показано ниже, отмеченный факт может приводить к тому, что задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1), (7), (8) может иметь качественно различные решения, а именно приводить к гамильтоновым системам вида (31) с различными нормальными формами.

6. Задача Z2: вспомогательная система. Рассмотрим задачу построения для дифференциального уравнения (1), (7), (8) эквивалентной гамильтоновой системы вида (11).

На первом этапе построим вспомогательную систему, а именно в соответствии с указанными в лемме 2 формулами (12) перейдём от уравнения (1), (7), (8) к эквивалентной системе вида (3):

$$z' = A_0 z + \gamma f(y), \quad y = (z, c_0), \tag{33}$$

в которой $z, c_0, \gamma \in \mathbb{R}^{2n}$; запись (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов; A_0, c_0 и γ — соответственно матрица и векторы

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & -a_{n-1} & 0 & \ldots & -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

при этом координаты вектора γ определяются равенствами

$$\gamma_2 = \gamma_4 = \ldots = \gamma_{2n-2m-2} = 0, \quad \gamma_{2n-2m} = b_0,$$

$$\gamma_{2n-2m+2} + \gamma_{2n-2m} a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad \gamma_{2n} + \gamma_{2n-2} a_1 + \ldots + \gamma_{2n-2m} a_m = b_m.$$

Переход от уравнения (1), (7), (8) к системе (33) осуществляется заменой

$$z = \tilde{y} - T\tilde{f}(y),$$

где T — прямоугольная $2n \times (2n-2)$-матрица

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & \dots & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix},$$

$\tilde{y}$ и $\tilde{f}(y)$ — векторы

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \\ (f(y))'' \\ \vdots \\ (f(y))^{(2m-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

при этом вектор $\tilde{f}(y)$ имеет размерность $2n-2$. В этих формулах производные $y^{(k)}$ и $(f(y))^{(k)}$ вычисляются по t от заданной функции $y = y(t)$ и от $f(y(t))$ соответственно.

Теорема 7. *Система (33) является гамильтоновой только при $n = 1$, т.е. когда уравнение (1), (7), (8) является простейшим вида $y'' + a_1 y = b_0 f(y)$. При $n \geqslant 2$ система (33) уже не является гамильтоновой.*

Справедливость этой теоремы вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5. *Система*

$$J\nabla H(z) = A_0 z + \gamma f((z, c_0)), \quad z \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{35}$$

разрешима относительно неизвестной функции $H(z)$ тогда и только тогда, когда $n = 1$.

Справедливость этой леммы устанавливается перекрёстным дифференцированием уравнений системы (35), а именно: при $n \geqslant 2$ следует продифференцировать первое уравнение по z_{2n}, а n-е уравнение — по z_{n+1}; тогда получим противоречие: вычисленная производная $\partial^2 H/(\partial z_{n+1} \partial z_{2n})$ в первом случае равна нулю, а во втором — единице. При $n = 1$ система (35) является двумерной; перекрестное дифференцирование уравнений этой системы даёт нуль в обоих случаях и, следовательно, система (35) разрешима.

Ниже будем предполагать, что $n \geqslant 2$.

7. Задача Z2: основное утверждение.

7.1. Вспомогательные построения. Обсудим задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1), (7), (8).

Так как многочлен $L(p)$ содержит степени только чётных порядков, то корни уравнения $L(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными свойствам G1) и G2) гамильтоновых матриц. Поэтому многочлену $L(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько соответствующих нормальных форм с тем же набором собственных значений.

На первом этапе по корням уравнения $L(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA.

На втором этапе задаётся ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^{2n}$ и линейная гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad y = (x(t), c). \tag{36}$$

Пусть эта система наблюдаема и $D = D(c)$ — соответствующая матрица наблюдаемости.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть функция $f(y)$ является $2m$ раз непрерывно дифференцируемой. Пусть линейная система (36) наблюдаема. Тогда замена*

$$x = (D(c))^{-1}[\tilde{y} - T\tilde{f}(y)] \tag{37}$$

осуществляет переход от уравнения (1), (7), (8) к системе

$$x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x, c), \tag{38}$$

в которой матрица JA — это выбранная нормальная форма, $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$.

Отметим также, что уравнение (1), (7), (8) и система (38) эквивалентны. Однако получаемая при замене (37) нелинейная система (38) совсем не обязательно будет гамильтоновой.

Напомним, что вектор c выбирался из единственного условия наблюдаемости линейной системы (36). Это, вообще говоря, предоставляет большую свободу в выборе вектора c. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях на вектор c нелинейная система (38) уже будет гамильтоновой, т.е. верна

Лемма 7. *Пусть функция $f(y)$ является $2m$ раз непрерывно дифференцируемой. Пусть вектор c выбран с учётом двух требований:*

а) линейная система (36) наблюдаема;

б) при некотором вещественном α выполняется равенство

$$\gamma = \alpha D(c)Jc, \tag{39}$$

в котором $D(c)$ – матрица наблюдаемости системы (36), γ — вектор из (34), J — матрица (10).

Тогда замена (37) приводит нелинейное уравнение (1), (7), (8) к системе (38), которая является гамильтоновой, при этом функция

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F((x, c)) \tag{40}$$

является её гамильтонианом. Здесь $F(y)$ — первообразная функции $f(y)$, т.е. $F'(y) = f(y)$.

Справедливость леммы 7 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 8. *Система*

$$J\nabla H(x) = JAx + \xi f((c, x)), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{41}$$

разрешима относительно неизвестной функции $H(x)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что функция (40) является решением системы (41). Действительно, для функции (40) имеем

$$J\nabla H(x) = JAx + \alpha J\nabla F((x, c)),$$

поэтому остаётся установить справедливость равенства

$$\alpha J\nabla F((x, c)) = \xi f((c, x)).$$

Имеем $\nabla F((x, c)) = f((c, x))c$, отсюда $J\nabla F((x, c)) = f((c, x))Jc$. Таким образом, следует показать справедливость равенства $\alpha Jc = \xi$, которое следует из (39) и равенства $\xi = D^{-1}\gamma$ (см. лемму 6). Лемма доказана.

Доказательство леммы 7. В силу леммы 6 замена (37) преобразует уравнение (1), (7), (8) к системе (38). Поэтому остаётся убедиться в том, что функция (40) является гамильтонианом системы (38), а этот факт следует из леммы 8.

Замечание 4. Равенство (39) в развёрнутом виде сводится к системе из n линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных αc_1^2, αc_2^2, ..., αc_{2n}^2 с параметром α.

В указанные уравнения входят и коэффициенты, определяющие вид выбранной нормальной формы. Это может приводить к тому, что только при одном выборе нормальной формы система уравнений (39) имеет решение. Другими словами, в нелинейной задаче, в отличие от линейной постановки (см. ниже в п. 9), вид нормальной формы конструируемой гамильтоновой системы может определяться однозначно.

7.2. Основное утверждение. Подытожим полученные результаты в виде отдельного утверждения.

Теорема 8. *Пусть функция $f(y)$ является $2m$ раз непрерывно дифференцируемой. Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения $L(p)=0$ выбрана одна из возможных нормальных форм JA. Пусть вектор c выбран таким образом, чтобы:*

1) линейная система (36) была наблюдаема;

2) выполнялось равенство (39) при некотором α.

Тогда замена (37) приводит уравнение (1), (7), (8) к эквивалентной гамильтоновой системе (38) с гамильтонианом (40).

8. Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'''' + 5y'' + 4y = (f(y))'' + 3f(y), \tag{42}$$

в котором $f(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Оно является уравнением вида (1), (7), (8), в котором

$$L(p) = p^4 + ap^2 + b, \quad M(p) = b_0p^2 + b_2.$$

В этих многочленах $a=5$, $b=4$, $b_0=1$ и $b_2=3$.

Отметим, что определенный в (34) вектор γ здесь равен $\gamma = \begin{bmatrix}0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_4\end{bmatrix}^T$ при $\gamma_2 = 1$ и $\gamma_4 = -2$. Отметим также, что все четыре корня характеристического уравнения $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$ являются чисто мнимыми вида $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$.

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (42) эквивалентной гамильтоновой системы вида (38):

$$x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x, c), \quad x \in \mathbb{R}^4, \tag{43}$$

используя теорему 8.

Выше было отмечено, что многочлену $L(p)$ соответствуют две различные нормальные формы JA системы (43), а именно матрицы (32) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$.

В качестве вектора c будем рассматривать вектор $c = (c_1, c_2, 0, 0)$ такой, что $c_1c_2 \neq 0$. В этом случае матрица (18) имеет вид

$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma\omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma\omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Тогда

$$\det D(c) = \begin{cases} -c_1^2c_2^2\omega_1\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2, & \text{если } \sigma = 1, \\ c_1^2c_2^2\omega_1\omega_2(\omega_1^4 - \omega_2^4), & \text{если } \sigma = -1, \end{cases} \tag{45}$$

и, следовательно, $\det D(c) \neq 0$ при $c_1c_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$. Таким образом, матрица $D(c)$ обратима, а значит, система (43) наблюдаема.

Остаётся обеспечить выполнение условия 2) теоремы 8, т.е. выбрать вектор c таким, чтобы выполнялось равенство (39). Это равенство в рассматриваемом примере сводится к системе двух уравнений

$$\alpha(\omega_1c_1^2 + \sigma\omega_2c_2^2) = -\gamma_2, \quad \alpha(\omega_1^3c_1^2 + \sigma\omega_2^3c_2^2) = \gamma_4$$

относительно неизвестных αc_1^2 и αc_2^2. Отсюда получим

$$\alpha c_1^2 = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad \alpha c_2^2 = -\frac{\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4}{\sigma\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Отметим, что в силу взаимной простоты многочленов $L(p)$ и $M(p)$ имеем

$$(\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4)(\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4) \neq 0,$$

поэтому $\alpha \neq 0$ и

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = -\sigma\frac{\omega_2}{\omega_1}\kappa, \quad \kappa = \frac{\omega_2^2\gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1^2\gamma_2 + \gamma_4} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Таким образом, уравнение (39) разрешимо только при $\sigma = 1$. Тогда вид нормальной формы (32) определяется однозначно: в ней следует положить $\sigma = 1$. Числа c_1, c_2, α здесь имеют следующие значения: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $\alpha = -1/6$.

Следовательно, по теореме 8 замена (37) (в которой $D(c)$ — матрица (44) при $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$, $\sigma = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$) приводит уравнение (42) к эквивалентной гамильтоновой системе вида (43), в которой JA – матрица (32) при $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ и $\sigma = 1$, а вектор $\xi = (D(c))^{-1}\gamma = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix}^T$. Гамильтониан этой системы равен

$$H(x) = \frac{1}{2}(2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{6}F(x_1 + 2x_2).$$

9. Линейная задача: гамильтоновы системы. Обсудим теперь задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для линейного уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0, \tag{46}$$

в котором $L(p)$ — многочлен (7). Конечно, уравнение (46) является частным случаем уравнения (1), (7), (8) и, следовательно, полученные выше результаты переносятся и на линейную задачу. Однако линейная задача имеет свои особенности, поэтому полезно привести и некоторые результаты, относящиеся к уравнению (46).

Уравнение (46) стандартной заменой $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\ldots$, $z_{2n} = y^{(2n-1)}$ сводится к эквивалентной системе

$$z' = A_0 z, \quad y = (z, c_0), \tag{47}$$

в которой матрица A_0 и вектор c_0 определены первыми двумя равенствами в (34). В соответствии с теоремой 7 система (47) является гамильтоновой только при $n = 1$, т.е. когда уравнение (46) является простейшим вида $y'' + a_1 y = 0$. При $n \geqslant 2$ система (47) уже не является гамильтоновой. Таким образом, переход от уравнения (46) к системе (47) при $n \geqslant 2$ не решает задачу Z2.

Как и в общем нелинейном случае, на первом этапе по корням уравнения $L(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA. На втором этапе задаётся ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad y = (x(t), c). \tag{48}$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 9. *Уравнение (46) и гамильтонова система (48) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (48) наблюдаема.*

Эта теорема может быть дополнена следующим утверждением, справедливость которого следует из теоремы 2. Положим $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y & y' & \cdots & y^{(2n-1)} \end{bmatrix}^T$, здесь $y^{(k)}$ — производные заданной скалярной функции $y = y(t)$.

Теорема 10. *Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения $L(p) = 0$ выбрана одна из возможных нормальных форм JA. Пусть вектор c выбран таким образом, что система (48) наблюдаема. Тогда замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ (здесь $D = D(c)$ — матрица наблюдаемости системы (48)) приводит уравнение (46) к эквивалентной гамильтоновой системе (48). При этом матрицы A_0 и JA связаны равенством $A_0 = D(JA)D^{-1}$.*

Замечание 5. В соответствии с теоремами 9 и 10 задача построения для уравнения (46) эквивалентной гамильтоновой системы в нормальной форме может иметь более одного решения. Другими словами, уравнение (46) линейными невырожденными преобразованиями может сводиться к качественно различным гамильтоновым системам вида (48) в том смысле, что соответствующие гамильтоновы матрицы входят в разные классы эквивалентности симплектически подобных матриц.

Отметим также, что задача построения для уравнения (46) эквивалентной гамильтоновой системы с конкретной нормальной формой может не иметь решения. Такая ситуация возникает, например, когда уравнение $L(p) = 0$ имеет кратные корни. В этом случае уравнению (46) могут соответствовать такие варианты нормальных форм гамильтоновых матриц, для которых соответствующая система не является наблюдаемой при любом векторе c.

10. Пример 3. В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение Лурье четвёртого порядка

$$y'''' + ay'' + by = 0, \tag{49}$$

в котором вещественные коэффициенты a и b удовлетворяют условиям $a > 0$, $b > 0$, $d = a^2 - 4b > 0$. В этом случае все четыре корня характеристического уравнения $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$ различные и чисто мнимые вида $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где числа $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ являются корнями уравнения $\omega^4 - a\omega^2 + b = 0$.

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (49) эквивалентной гамильтоновой системы. Воспользуемся предложенной выше схемой. В рассматриваемой задаче уравнению (49) могут соответствовать две различные нормальные формы искомой гамильтоновой системы, а именно матрицы (32) при $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$. Покажем, что соответствующим выбором вектора $c \in \mathbb{R}^4$ можно получить две качественно различные ЛАГС вида (48), в которых матрица JA имеет вид нормальной формы (32), и которые будут эквивалентны уравнению (49) как при $\sigma = 1$, так и при $\sigma = -1$.

Пусть, например, $c = (c_1, c_2, 0, 0)$ — некоторый вектор такой, что $c_1 c_2 \neq 0$. Покажем, что тогда уравнение (49) можно свести линейным невырожденным преобразованием к гамильтоновой системе вида (48).

Воспользуемся теоремой 9 для определения наблюдаемости системы (48), в которой JA имеет вид нормальной формы (32). Как и в примере 2, матрица $D(c)$ здесь имеет вид (44) и, следовательно (см. (45)), $\det D(c) \neq 0$ при $c_1 c_2 \neq 0$ и $\omega_1 \neq \omega_2$. Отсюда матрица $D(c)$ обратима, а, следовательно, система (48) наблюдаема. Тогда по теореме 9 уравнение (49) и система (48) эквивалентны.

Таким образом, линейное уравнение (49) приводимо к двум качественно раздичным гамильтоновым представлениям (48) с нормальными формами (32). Конкретный выбор нормальной формы требует учёта дополнительной информации об объекте, описываемом уравнением (49).

Заключение. В статье исследуются два вопроса, связанные с построением эквивалентных дифференциальных уравнений в задачах теории управления и теории гамильтоновых систем. При обсуждении первого предложены новые подходы в задаче конструирования эквивалентных скалярных дифференциальных уравнений для многомерных нелинейных систем теории управления, изучены условия разрешимости соответствующих задач, предложены новые формулы перехода к эквивалентным уравнениям и системам. При обсуждении второго из указанных вопросов предложены новые подходы в задаче конструирования эквивалентных гамильтоновых систем для дифференциальных уравнений, содержащих производные только чётных порядков (уравнений Лурье). Эти подходы основаны на переходе от линейной части уравнения к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим исследованием полученной переопределённой системы.

Авторы выражают благодарность проф. Э.М. Мухамадиеву и проф. А.Б. Назимову за полезное обсуждение рассмотренных в настоящей статье вопросов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась за счёт средств бюджета Уфимского университета науки и технологий. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М., 1985.
2. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М., 1970.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М., 2019.
4. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М., 2005.
5. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М., 1985.
6. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York, 2009.
7. *Журавлев В.Ф., Петров Ф.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М., 2015.
8. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О гамильтоновости систем Лурье // Автоматика и телемеханика. 2000. № 8. С. 25–29.
9. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосциллирующими коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2022. № 2. С. 107–121.
10. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н., Исанбаева Н.Р.* Бифуркации в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел // Астрономический журн. 2018. Т. 95. № 2. С. 158–168.
11. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М., 2005.
12. *Брюно А.Д.* Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением. М., 2019 (Препринт / Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша; № 56).
13. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 178–195.

Уфимский университет науки и технологий

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.
После доработки 10.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 41–54

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Д. К. Дурдиев

Изучены прямая и обратная задачи для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В прямой задаче рассмотрена задача типа Трикоми для этого уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. Неизвестными обратной задачи являются переменные коэффициенты при младших членах уравнения. Для их определения относительно решения, определяемого в параболической части области, задано интегральное условие переопределения, а в гиперболической части заданы условия на характеристиках: на одной — значение нормальной производной, а на другой — значение самой функции. Доказаны теоремы однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения смешанного типа, характеристика, функция Грина, принцип сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064124010047, EDN: RQIAJP

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega_T \subset \mathbb{R}^2$ — конечная открытая область, ограниченная при $y>0$ отрезками AB, BC, CD, где $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(T,1)$, $D(T,0)$, T — фиксированное положительное число, а при $y<0$ — характеристиками $AE: x+y=0$ и $DE: x-y=T$ уравнения

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u_x - u_{yy} - q(x)u = 0, & y>0, \\ u_{xx} - u_{yy} - p(x)u = 0, & y<0. \end{cases} \tag{1}$$

Для параболо-гиперболического уравнения (1) линия изменения типа $y=0$ не является характеристикой (параболическое вырождение первого рода [1, с. 258]).

Прямая задача. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$u|_{AB} = \varphi(y), \quad y \in [0,1], \quad u|_{BC} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{AE} = \psi(x), \quad x \in [0, T/2]. \tag{3}$$

Здесь функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ считаются заданными.

Введём обозначения $\Omega_{1T} := \Omega_T \cap \{0 < y \leqslant 1\}$, $\Omega_{2T} := \Omega_T \cap \{-T/2 \leqslant y < 0\}$.

Определение. *Решением задачи* (1)–(3) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C^1(\overline{\Omega_T}) \cap$ $\cap\, C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T}) \cap C^2(\Omega_{2T})$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В *обратной задаче* предполагаются неизвестными коэффициенты $q(x)$ и $p(x)$ уравнения (1). В данной работе изучим обратную задачу определения этих коэффициентов по следующим условиям переопределения, заданным относительно решения прямой задачи (1)–(3):

$$\int\limits_0^1 h(y)u(x,y)dy = f(x), \quad x \in [0,T], \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AE} = \psi_1(x), \quad x \in [0, T/2], \quad u\big|_{DE} = \psi_2(x), \quad x \in [T/2, T], \tag{5}$$

где $n=(1,1)$ — вектор в направлении нормали к характеристике AE, внутренней по отношению к области Ω_{2T}, а $h(y)$, $f(x)$, $\psi_i(x)$, $i=1,2$, — заданные достаточно гладкие функции.

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

(B1) $\varphi(y)\in C^3[0,1]$, $\psi(x)\in C^2[0,T/2]$;

(B2) $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$, $\varphi(1)=\varphi'(1)=\varphi''(1)=0$, $\psi(0)=\psi'(0)=0$;

(B3) $h(y)\in C^2[0,1]$, $h(0)=h'(0)=0$, $h(1)=h'(1)=0$; $f(x)\in C^1[0,T]$, $\int_0^1 h(y)\varphi(y)dy = f(0)$, $|f(x)|\geqslant f_0>0$, $f_0=\mathrm{const}$, $x\in[0,T]$;

(B4) $\psi_1(x)\in C^1[0,T/2]$, $\psi_2(x)\in C^2[T/2,T]$, $\psi(T/2)=\psi_2(T/2)$, $\psi_1(T/2)=\psi_2'(T/2)$, $|\psi_2(x)|\geqslant\psi_{00}>0$, $\psi_{00}=\mathrm{const}$, $x\in[T/2,T]$.

Важность изучения задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений была впервые отмечана И.М. Гельфандом [2]. Такого рода задачи встречаются при изучении электрических колебаний в проводах [3, с. 443–447], при исследовании движения жидкости в канале, окружённом пористой средой [4], и в других областях прикладной науки. В уравнении (1) функция $q(x)$ представляет собой коэффициент теплоёмкости, а переменный коэффициент $p(x)$ в случае, когда второе уравнение (1) моделирует электрические колебания в проводах, выражается через коэффициенты электропроводности и электрической проницаемости среды.

Начально-краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучались в работах многих авторов [5–12] (см. также библиографию в [8, 9]). В этих работах гиперболическую часть области представлял треугольник, ограниченный характеристиками волнового уравнения и характеристической линией изменения типа $y=0$, и в основном изучались различные прямые начально-краевые задачи. Методы решения прямых и обратных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области были предложены в монографии [13] (см. также библиографию в ней). Среди работ по исследованию начально-краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа отметим [14–18], в которых исследовались задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями и различными условиями сопряжения на границе раздела областей.

Вообще говоря, прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо изучены, как аналогичные задачи для классических уравнений. Отметим, что обратные задачи определения переменных коэффициентов и правых частей отдельных параболических уравнений второго порядка исследовались в работах [19–21] (см. также монографии [22, 23]). В [24–26] рассматривались задачи восстановления свёрточного ядра в параболических уравнениях, опысывающих процессы с памятью. Различным обратным задачам для уравнений гиперболического типа второго порядка посвящены монографии [27–30] (см. также обширную библиографию в них).

Настоящая статья продолжает исследования, начатые автором в работе [31], в которой изучена однозначная разрешимость обратной задачи (1)–(3), (5) определения переменного коэффициента $p(x)$ при младшем члене гиперболического уравнения в (1), когда $q(x)=0$ и условие (4) отсутствует.

2. Исследование прямой задачи. Изучим прямую задачу (1)–(3). Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (B1), (B2) и функции $q(x),p(x)\in C[0,T]$. Тогда в области Ω_T существует единственное решение прямой задачи (1)–(3).*

Предположим, что функции $q(x)$ и $p(x)$ известны и непрерывны на отрезке $[0,T]$. Следуя традиции, установившейся в теории уравнений смешанного типа, обозначим $\tau(x):=u(x,0)$, $\nu(x)=\partial u(x,0)/\partial y$. Тогда решение уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}=F(x,y)$$

в области Ω_{2T}, согласно формуле Даламбера, записывается в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x+y)+\tau(x-y)]-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)}F(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{6}$$

где $\nabla(x,y)=\{(\xi,\eta): x+y\leqslant\xi\leqslant x-y,\ y+|\xi-x|\leqslant\eta\leqslant 0\}$.

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_{2T}. Перенося член, содержащий произведение $p(x)u$, в правую часть равенства и используя формулу (6), представим $u(x,y)$ в виде интегрального уравнения

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x+y)+\tau(x-y)]-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{7}$$

Учитывая (3) и $\tau(0)=\psi(0)$, из (7) получаем равенство

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left[\psi(0)+\tau(2x)\right]-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x}\nu(s)ds-\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,-x)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi, \quad x\in[0,T/2].$$

Отсюда нетрудно найти

$$\tau(x)=2\psi(x/2)-\psi(0)+\int\limits_{0}^{x}\nu(s)ds+\iint\limits_{\nabla(x/2,-x/2)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi, \quad x\in[0,T]. \tag{8}$$

Продифференцировав это соотношение, будем иметь

$$\tau'(x)=\psi'(x/2)+\nu(x)+\int\limits_{x/2}^{x}p(\xi)u(\xi,-x+\xi)d\xi, \quad x\in[0,T]. \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) обычно называют основными соотношениями для функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученными из гиперболической части области.

Введём при $k=1,2$ обозначения

$$G_k(x-\xi,y,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left\{-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right\}+(-1)^k\exp\left\{-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right\}\right].$$

Используя функцию Грина $G_1(x-\xi,y,\eta)$ первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области Ω_{1T}, решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{AD}=\tau(x)$ представим в виде интегрального уравнения

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi+\int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{10}$$

Отметим, что функции $G_k(x-\xi,y,\eta)$, $k=1,2$, имеют эквивалентные представления

$$G_1(x-\xi,y,\eta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-(n\pi)^2(x-\xi)\right\}\sin(n\pi y)\sin(n\pi\eta),$$

$$G_2(x-\xi,y,\eta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-(n\pi)^2(x-\xi)\right\}\cos(n\pi y)\cos(n\pi\eta)$$

и являются бесконечно дифференцируемыми в области Ω_{1T} [3, с. 200–204].

Найдем производные первых двух слагаемых в правой части (10), используя очевидные соотношения

$$G_{1y}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2\eta}(x-\xi,y,\eta),$$
$$G_{1\eta}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2y}(x-\xi,y,\eta),\quad G_{2\xi}(x-\xi,y,\eta)=-G_{2yy}(x-\xi,y,\eta).\tag{11}$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int\limits_0^1 G_{1y}(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=-\int\limits_0^1 G_{2\eta}(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=$$
$$=G_2(x,y,0)\varphi(0)-G_2(x,y,1)\varphi(1)+\int\limits_0^1 G_2(x,y,\eta)\varphi'(\eta)d\eta.$$

Учитывая (11) и интегрируя по частям, вычислим производную по y следующего слагаемого в правой части (10):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x G_{2y}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=$$
$$=\int\limits_0^x G_{2\xi}(x-\xi,y,0)\tau(\xi)d\xi=-G_2(x,y,0)\tau(0)-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,y,0)\tau'(\xi)d\xi.$$

Используя эти соотношения, продифференцируем теперь (10) по y и положим $y=0.$ Так как $\partial u(x,0)/\partial y=\nu(x),$ то ввиду условий согласования (B2) и равенства (9) находим

$$\nu(x)=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'(\xi/2)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu(\xi)d\xi+\int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi-$$
$$-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\int\limits_{\xi/2}^{\xi} p\,(s)\,u\,(s,-x+s)\,ds d\xi,\quad x\in[0,T].\tag{12}$$

Исключив функцию $\tau(x)$ в (10) с помощью равенства (8), получим интегральное уравнение для функции $u(x,y)$ в области Ω_{1T}:

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)[2\psi(\xi/2)-\psi(0)]d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^{\xi}\nu(s)dsd\xi+\int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\iint\limits_{\nabla(\xi/2,-\xi/2)} p(s)u(s,\eta)d\eta ds d\xi.\tag{13}$$

В уравнения (12) и (13) входит функция $u(x,y)$ для $(x,y)\in\Omega_{2T}$ (интегралы в последних слагаемых). Поэтому, учитывая формулу (8) для $\tau(x)$, перепишем (7) в виде

$$u(x,y)=\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi(0)+\int\limits_0^{x+y}\nu(s)ds+$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla\left(\frac{x+y}{2},-\frac{x+y}{2}\right)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi+\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla\left(\frac{x-y}{2},-\frac{x-y}{2}\right)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi-\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)}p(\xi)u(\xi,\eta)d\eta d\xi. \quad (14)$$

Заметим, что для функции $G_2(x-\xi,0,0)$ в интегралах (12) имеет место следующее равенство:

$$G_2(x-\xi,0,0)=\frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}+\frac{2}{\sqrt{\pi(x-\xi)}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}. \quad (15)$$

Уравнения (12)–(14) представляют в области Ω_T систему линейных интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода для определения неизвестных функций $u(x,y)$ и $\nu(x)$. В силу формулы (15) интегральное уравнение (12) имеет слабую полярную особенность. Известно, что система уравнений (12)–(14) разрешима в классе непрерывных в $\overline{\Omega}_T$ функций. Это решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений и $\nu(0)=0$ в силу $\lim\limits_{x\to 0}G_2(x,0,\eta)=0$ для $\eta\in(0,1)$.

Покажем теперь, что найденная функция $u(x,y)$ является классическим решением прямой задачи (1)–(3).

По известным u и ν функция τ вычисляется по формуле (8). Таким образом, $\tau(x)\in$ $\in C^1[0,T]$, $\nu(x)\in C[0,T]$. Так как эти функции известны, то в дальнейшем мы используем уравнения (7) для u в области Ω_{2T}. При выполнении условий (B1) выражение, стоящее в формуле (7) справа, имеет по x, y частные производные первого порядка, поэтому и левая часть этого равенства, т.е. функция $u(x,y)$, также имеет производные первого порядка в области Ω_{2T}:

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau'(x+y)+\tau'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[\nu(x+y)-\nu(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}p(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)\operatorname{sign}(\xi-x)d\xi, \quad (16)$$
$$u_y(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau'(x+y)-\tau'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[\nu(x+y)+\nu(x-y)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}p(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)d\xi, \quad (17)$$

где $\tau'(x)$ определяется по формуле (9).

Для дальнейших рассуждений нам необходим тот факт, что в условиях (B1) и (B2) верны включения $\tau(x)\in C^2[0,T]$, $\nu(x)\in C^1[0,T]$. Тогда, учитывая эти условия и равенство

$$\int\limits_0^1 G_{2x}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta=\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta,$$

с помощью интегрирования по частям находим
$$\int\limits_0^1 G_{2\eta\eta}(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta = \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta.$$

Предположив теперь существование производной функции $\nu(x)$, с учётом условий (B1), (B2) и предыдущих соотношений получим для $\nu'(x)$ уравнение
$$\nu'(x) = \int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta - \frac{1}{2}\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)d\xi -$$
$$-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\left[p(\xi)u(\xi,0) - \frac{1}{2}p(\xi/2)\psi(\xi/2) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} p\left(\eta\right)u_y\left(\eta,-\xi+\eta\right)d\eta\right]d\xi +$$
$$+\int\limits_0^x q(\xi)\int\limits_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi - \int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\nu'(\xi)d\xi, \quad x\in[0,T], \tag{18}$$
с непрерывным свободным членом (свободным членом является всё выражение в правой части, кроме последнего слагаемого) и слабо полярным ядром. Это уравнение разрешимо в классе непрерывных функций. Таким образом, $\nu(x)\in C^1[0,T]$. Тогда, в силу формулы (9) и условий (B1), имеем $\tau(x)\in C^2[0,T]$. Функция $u(x,y)$, построенная как решение уравнения (1) с условиями (2) $u|_{AD}=\tau(x)$, удовлетворяет уравнению (10), и при выполнении условий (B1), (B2), $q(x)\in C\left[0,T\right]$ принадлежит классу $C^{1,2}_{x,y}(\Omega_{1T})$.

Полученные равенства (16), (17) показывают, что функции $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ являются непрерывными в области Ω_{2T}. Тогда, ввиду только что доказанной гладкости функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, заключаем, что правые части равенств (17), (18) также имеют по x, y частные производные первого порядка и, следовательно, функция $u(x,y)$ имеет непрерывные в Ω_{2T} производные второго порядка. Для исследования обратной задачи нам понадобятся выражения для этих производных:
$$u_{xx}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)\right] + p(x)u(x,y) -$$
$$-\frac{1}{2}\left[p\left(x+y\right)u\left(x+y,0\right)+p\left(x-y\right)u\left(x-y,0\right)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} p(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)d\xi, \tag{19}$$
$$u_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau''(x+y)-\tau''(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[\nu'(x+y)+\nu'(x-y)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left[p\left(x+y\right)u\left(x+y,0\right)-p\left(x-y\right)u\left(x-y,0\right)\right] - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} p(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)\operatorname{sign}(\xi-x)d\xi, \tag{20}$$
$$u_{yy}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau''(x+y)+\tau''(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[\nu'(x+y)-\nu'(x-y)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left[p\left(x+y\right)u\left(x+y,0\right)+p\left(x-y\right)u\left(x-y,0\right)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} p(\xi)u_x(\xi,y+|\xi-x|)d\xi. \tag{21}$$

Формулы (19)–(21) показывают, что $u_{xx}, u_{yx}, u_{yy}\in C\left(\Omega_{2T}\right)$.

Таким образом, построенные в областях Ω_{1T} и Ω_{2T} функции в совокупности определяют классическое решение прямой задачи (1)–(3) в области Ω_T. Теорема доказана.

3. Исследование обратной задачи. Построение интегральных уравнений. Переходим к исследованию обратной задачи. Пусть выполнены условия (B2). Умножив уравнение (1) в области Ω_{1T} на функцию $h(y)$ и проинтегрировав его по отрезку $[0,1]$, с учётом (4) найдём

$$q(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)}\int\limits_0^1 h''(y)u(\xi,y)dy, \quad x \in [0,T]. \tag{22}$$

С целью получения интегрального уравнения для неизвестной функции $p(x)$, $x \in [0,T]$, предположим, что выполнены условия (B2), и представим $p(x)$ в виде $p(x) = p_1(x)$, $x \in \in [0,T/2]$, $p(x) = p_2(x)$, $x \in [T/2,T]$, причём $p_1(T/2) = p_2(T/2)$. Здесь и далее значение функции на концах отрезка понимается как предел в точке с той стороны, где она определена.

В работе [31] выведено интегральное уравнение для $p(x)$ на основе условий (5) в обратной задаче, когда $q(x) = 0$. При этом были использованы уравненения (18)–(21) и условия (5). В данной статье только уравнение (18) для функции ν' отличается от соответствующего уравнения в [31] наличием последнего интеграла в правой части, а остальные уравнения одинаковы. Приведём окончательное уравнение (см. [31]) для $p(x)$:

$$\begin{gathered}
p(x) = p_0(x) - \frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\nu'(\xi)d\xi + \\
+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)\left[p(\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_{\xi/2}^{\xi} p(\eta)u_y(\eta,-\xi+\eta)d\eta\right]d\xi + \\
+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\left[\int\limits_{x-T/2}^{2x-T} p(\xi)u_y(\xi,-2x+T+\xi)d\xi + \int\limits_{2x-T}^{x} p(\xi)u_y(\xi,2x-T-\xi)d\xi\right] - \\
-\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} q(\xi)\int\limits_0^1 G_{1yx}(2x-T-\xi,0,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi,
\end{gathered} \tag{23}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда $(\theta(t) = 1,\ t \geqslant 0,\ \theta(t) = 0,\ t < 0)$;

$$\begin{gathered}
p_0(x) = \theta(T/2-x)\frac{\psi_1'(x)}{\psi(x)} + \frac{\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}[\psi_2''(x) - \psi''(x-T/2) + \psi_1'(x-T/2)] - \\
-\frac{2}{\psi_2(x)}\int\limits_0^1 G_2(2x-T,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta + \frac{2}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T} G_2(2x-T-\xi,0,0)[\psi''(\xi/2) - \psi_1'(\xi/2)]d\xi.
\end{gathered}$$

Также в работе [31] получены достаточные условия на данные:

$$\psi_1'(T/2) = \psi_2''(T/2) - \psi''(0) + \psi_1'(0), \tag{24}$$

$$\int\limits_0^{T/2} \frac{\psi_1'(\xi)}{\psi(\xi)}\left[\psi_1(\xi) - \psi_1'(\xi)\right]d\xi = 0, \tag{25}$$

при выполнении которых $p(x) \in C[0,T]$.

Определим теперь основные интегральные уравнения, которые составляют замкнутую систему для нахождения решения обратной задачи. Для этого исключим сначала функцию $\tau'(x)$

в (17) с помощью (9), а затем $\nu(x)$ в получившемся уравнении с помощью очевидного равенства $\nu(x)=\int_0^x \nu'(\xi)d\xi$. Введём для сокращения записей интегральный оператор вольтерровского типа по формуле

$$P[u,\nu',p](x,y)=\int\limits_0^{x+y}\nu'(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{(x+y)/2}^{x+y}p(\xi)u(\xi,-x-y+\xi)d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(x-y)/2}^{x-y}p(\xi)u(\xi,-x+y+\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}p(\xi)u(\xi,y+|\xi-x|)d\xi$$

и перепишем уравнение (17) в виде

$$u_y(x,y)=\frac{1}{2}\left[\psi'\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]+P[u,\nu',p](x,y). \tag{26}$$

Если теперь исключим $u_y(x,y)$ в уравнениях (18), (22) с помощью (26) и подставим вместо $q(x)$ в (13), (18), (23) правую часть (22), то получим замкнутую систему интегральных уравнений (13), (14), (18), (23) относительно неизвестных функций $u(x,y)$, $\nu'(x)$, $p(x)$ в области $\overline{\Omega}_T$ (при этом также будем считать, что $\nu(x)$ в уравнениях (13), (14) заменена на $\int_0^x\nu'(\xi)d\xi$). После решения этой системы $q(x)$ находится по формуле (22).

Для удобства введём обозначения для неизвестных функций:

$$w_1(x,y):=\theta(y)w_1^1(x,y)+\theta(-y)w_1^2(x,y),$$

где $w_1^1(x,y):=u(x,y)$, $(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}$; $w_1^2(x,y):=u(x,y)$, $(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}$; а $\theta(\cdot)$, как и выше, — функция Хевисайда;

$$w_2(x):=\nu'(x),\quad w_3(x):=p(x),\quad x\in[0,T].$$

Тогда уравнения (13), (14), (18), (23) с учётом описанных выше постановок и введённых обозначений могут быть записаны в области $\overline{\Omega}_T$ в векторно-операторном виде

$$w(x,y)=Aw(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_T, \tag{27}$$

где $w(x,y)=\begin{bmatrix}w_1(x,y) & w_2(x) & w_3(x)\end{bmatrix}^*$, $*$ — знак транспонирования, $A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_3\end{bmatrix}^*$ и A_i, $i=1,2,3$, в соответствии с правыми частями (13), (14), (18), (23) определяются равенствами

$$A_1w(x,y)=\theta(y)w_{01}^1(x,y)+\theta(-y)w_{01}^2(x,y)+\theta(y)A_1^1w(x,y)+\theta(-y)A_1^2w(x,y), \tag{28}$$

где

$$A_1^1w(x,y)=w_{01}^1(x,y)+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi(\xi-s)w_2(s)dsd\xi+$$
$$+\int\limits_0^x\left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\xi)}\int\limits_0^1 h''(\theta)w_1(\xi,\theta)d\theta\right]\int\limits_0^1 G_1(x-\xi,y,\eta)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\iint\limits_{\nabla(\xi/2,-\xi/2)}w_3(s)w_1(s,-\xi+s)dsd\xi, \tag{29}$$

$$A_1^2w(x,y)=w_{01}^2(x,y)+\int\limits_0^{x+y}(x+y-s)w_2(s)ds+\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla\left(\frac{x+y}{2},-\frac{x+y}{2}\right)}w_3(\xi)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla\left(\frac{x-y}{2},-\frac{x-y}{2}\right)}w_3(\xi)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi-\frac{1}{2}\iint\limits_{\nabla(x,y)}w_3(\xi)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{30}$$

$$A_2w(x)=w_{02}(x)-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)w_2(\xi)d\xi-\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\bigg\{w_3(\xi)w_1(\xi,0)-$$
$$-\frac{1}{2}w_3\left(\frac{\xi}{2}\right)\psi\left(\frac{\xi}{2}\right)+\int\limits_{\xi/2}^{\xi}w_3(\eta)\left(\frac{1}{2}\left[\psi'\left(\frac{2\eta-\xi}{2}\right)-\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)\right]+P[w_1,w_2,w_3](\eta,-\xi+\eta)\right)d\eta\bigg\}d\xi+$$
$$+\int\limits_0^x\left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\xi)}\int\limits_0^1 h''(s)w_1(\xi,s)ds\right]\int\limits_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{31}$$

$$A_3w(x)=w_{03}(x)-\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T}G_2(2x-T-\xi,0,0)w_2(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^{2x-T}G_2(2x-T-\xi,0,0)\bigg\{w_3(\xi)\varphi(\xi)+$$
$$+\int\limits_{\frac{\xi}{2}}^{\xi}w_3(\eta)\left(\left[\psi'\left(\frac{2\eta-\xi}{2}\right)-\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)\right]+P[w_1,w_2,w_3](\eta,-\xi+\eta)\right)d\eta\bigg\}d\xi+$$
$$+\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\bigg\{\int\limits_{x-T/2}^{2x-T}w_3(\xi)\left(\left[\psi'\left(\frac{2(\xi-x)+T}{2}\right)-\psi'\left(\frac{2x-T}{2}\right)\right]+P[w_1,w_2,w_3](\xi,-2x+T+\xi)\right)d\xi+$$
$$+\int\limits_{2x-T}^{x}w_3(\xi)\left(\left[\psi'\left(\frac{2x-T}{2}\right)-\psi'\left(\frac{2(\xi-x)+T}{2}\right)\right]+P[w_1,w_2,w_1]\left(\xi,2x-T-\xi\right)\right)d\xi\bigg\}-$$
$$-\frac{4\theta(x-T/2)}{\psi_2(x)}\int\limits_0^x\left[-\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\xi)}\int\limits_0^1 h''(\theta)w_1(\xi,\theta)d\theta\right]\int\limits_0^1 G_{1yx}(x-\xi,0,\eta)w_1(\xi,\eta)d\eta d\xi. \tag{32}$$

В формулах (28)–(32) через w_{01}^1, w_{01}^2, w_{02}, w_{03} обозначены свободные члены интегральных уравнений

$$w_{01}^1(x,y):=\int\limits_0^1 G_1(x,y,\eta)\varphi(\eta)d\eta+2\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\psi(\xi/2)d\xi,$$
$$w_{01}^2(x,y):=\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi(0), \tag{33}$$
$$w_{02}(x):=\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'''(\eta)d\eta-\frac{1}{2}\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi''(\xi/2)d\xi,\quad w_{03}(x):=p_0(x).$$

4. Исследование обратной задачи. Доказательство основного результата. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (B1)–(B4), (24), (25). Тогда для достаточно малых* T *существует единственное решение* $(q(x),\, p(x)) \in C\,[0,T]$ *обратной задачи (1)–(5).*

Доказательство. Применим принцип сжимающих отображений (теорема Банаха) к уравнению (27). Нам необходимы оценки интегралов, содержащих функции G_k, $k=1,2$, и их некоторые прозводные в определениях компонент оператора A в формулах (28)–(32) и их свободных членах (33). Ниже оценим один из интегралов (второй оценивается аналогично). При этом будем использовать легко проверяемые соотношения

$$\int\limits_0^1 G_k(x,y,\eta)d\eta \leqslant 1, \quad k=1,2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2z^2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2z}, \quad z>0.$$

Справедливы следующие неравенства (см. [20, 31]):

$$\left|\int\limits_0^1 G_2(x,0,\eta)\varphi'(\eta)d\eta\right| \leqslant \max_{y\in[0,1]} |\varphi'(y)|,$$

$$\left|\int\limits_0^x G_2(x-\xi,0,0)\psi'(\xi/2)d\xi\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \frac{\psi'(\xi/2)}{\sqrt{x-\xi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}\right)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}+x\right| \leqslant \sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{T}\right)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)|. \tag{34}$$

Оценим теперь интеграл с некоторой непрерывной функцией $g(x,y)$:

$$\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)g(\xi,\eta)d\eta d\xi\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|\times$$

$$\times\int\limits_0^x\frac{d\xi}{(x-\xi)^{3/2}}\int\limits_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\eta+2\pi)\exp\left\{-\frac{(\eta+2n)^2}{4(x-\xi)}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\eta)\exp\left\{-\frac{(2n-\eta)^2}{4(x-\xi)}\right\}\right)d\eta.$$

Вычислив здесь интегралы, продолжим

$$\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^1 G_{1y}(x-\xi,0,\eta)g(\xi,\eta)d\eta d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\times$$

$$\times\left|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\exp\left\{-\frac{-n^2}{x-\xi}\right\}-\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2}{4(x-\xi)}\right\}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(2n-1)^2}{4(x-\xi)}\right\}-\exp\left\{-\frac{n^2}{x-\xi}\right\}\right)\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \leqslant \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|g(x,y)|. \tag{35}$$

Далее, использовав эквивалентное выражение для $G_1(x,y,\eta)$ в виде (10), будем иметь равенство

$$G_{1\eta}(x-\xi,y,0)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{-(n\pi)^2(x-\xi)\}n\pi\sin(n\pi)=\int\limits_0^1 G_{1\xi}(x-\xi,y,\eta)\,(1-\eta)\,d\eta,$$

которое проверяется непосредственно.

Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi \nu(s)dsd\xi=\int\limits_0^1(1-\eta)\int\limits_0^x G_{1\xi}(x-\xi,y,\eta)\int\limits_0^\xi \nu(s)dsd\xi=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\eta)\biggl\{\biggl[G_1(x-\xi,y,\eta)\int\limits_0^\xi\nu(s)ds\biggr]_0^x-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi\biggr\}=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\eta)\delta(y-\eta)d\eta\int\limits_0^\xi\nu(s)ds-\int\limits_0^1(1-\eta)\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=(1-y)\int\limits_0^x\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta. \tag{36}$$

Здесь использовано соотношение $\lim\limits_{\xi\to x}G_1(x-\xi,y,\eta)=\delta(y-\eta)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, для которой имеет место равенство $\int_0^1 a(\eta)\delta(y-\eta)d\eta=a(y)$, $a(y)$ — любая непрерывная функция на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, мы получили равенство

$$\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi\nu(s)dsd\xi=(1-y)\int\limits_0^x\nu(\xi)d\xi-\int\limits_0^x\nu(\xi)G_1(x-\xi,y,\eta)d\xi d\eta,$$

из которого следует оценка

$$\biggl|\int\limits_0^x G_{1\eta}(x-\xi,y,0)\int\limits_0^\xi\nu(s)dsd\xi\biggr|\leqslant 2T\max_{x\in[0,T]}|\nu(x)|. \tag{37}$$

Вернёмся к уравнению (27). Очевидно, что оператор A переводит функции $w(x,y)\in$ $\in C\left(\overline{\Omega}_T\right)$ в функции, также принадлежащие пространству $C\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Покажем теперь, что при достаточно малом T оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S\left(w_0,r\right)\subset C\left(\overline{\Omega}_T\right)$ радиуса r с центром в точке $w_0(x,y)=(w_{01}(x,y),\ w_{02}(x),\ w_{03}(x))$ в себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (27) имеет в области $\overline{\Omega}_T$ при достаточно малом T единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|w-w_0\|_T\leqslant r$. Норму вектор-функции w определим равенством

$$\|w\|_T=\max\Bigl\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_T}|w_1(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_2(x)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_3(x)|\Bigr\},$$

при этом для $\|w_1\|_T$ используем $\|w_1\|_T=\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}\left|w_1^1(x,y)\right|+\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}}\left|w_1^2(x,y)\right|$. Очевидно, что для элементов $w\in S\left(w_0,r\right)$ имеет место оценка

$$\|w\|_T\leqslant\|w_0\|_T+r=:R,$$

где

$$\|w_0\|_T = \max\Big\{\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_T}|w_{01}(x,y)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_{02}(x)|,\ \max_{x\in[0,T]}|w_{03}(x)|\Big\},$$

$$\|w_{01}\|_T = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{1T}}|w_{01}^1(x,y)| + \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}}|w_{01}^2(x,y)|.$$

Из соотношений (33), с учётом (34)–(37), для нормы $\|w_0\|_T$ следует оценка

$$\|w_0\|_T \leqslant \max\Big\{\max_{y\in[0,1]}|\varphi(y)| + (4T+3)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi(x)|,$$

$$\max_{y\in[0,1]}|\varphi'''(y)| + \sqrt{T}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{T}}{2}\right)\max_{x\in[0,T/2]}|\psi''(x)|,$$

$$\frac{1}{\psi_0}\max_{x\in[0,T/2]}|\psi_1'(x)| + \frac{1}{\psi_{00}}\Big[\max_{x\in[T/2,T]}|\psi_2''(x)| + 2\max_{y\in[0,1]}|\varphi'''(y)| +$$

$$+\left(1 + 2\sqrt{T}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\right)\max_{x\in[0,T/2]}(|\psi''(x)| + |\psi_1'(x)|)\Big]\Big\}.$$

Теперь покажем, что для некоторых малых T оператор A является на шаре $S\,(w_0,r)$ оператором сжатия. Действительно, пусть $w\in S\,(w_0,r)$. Тогда для всех $(x,y)\in\overline{\Omega}_{2T}$, учитывая соотношения (28)–(32), получаем неравенства

$$|A_1w - w_{01}| \leqslant \left[3 + \frac{1}{f_0}\Big(\max_{x\in[0,T]}|f'(x)| + R\max_{x\in[0,1]}|h''(y)|\Big) + 3\Big(\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + RT\Big)\right]RT,$$

$$|A_2w - w_{02}| \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\left(1 + 3\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + \frac{3RT}{4}\right)R\sqrt{T},$$

$$|A_3w - w_{03}| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\left(1 + \max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + \frac{TR}{2} + \frac{3R\sqrt{T}}{2}\right)R\sqrt{T}.$$

Обозначим через T^* наибольшее значение T, для которого правые части этих неравенств будут меньше, чем R. Тогда для $T\leqslant T^*$ имеет место включение $Aw\in S(w_0,r)$. Нам остаётся показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(w_0,r)$. Для этого возьмём любые два элемента $w^1, w^2\in S(w_0,r)$ и оценим норму разности между их образами Aw^1, Aw^2. Обозначим компоненты элементов $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ через $w_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$, $i=1,2,3$. При оценке $\|Aw^{(1)} - Aw^{(2)}\|_T$ воспользуемся неравенствами

$$\big|w_k^{(1)}w_s^{(1)} - w_k^{(2)}w_s^{(2)}\big| \leqslant \big|w_k^{(1)} - w_k^{(2)}\big|\,\big|w_s^{(1)}\big| + \big|w_k^{(2)}\big|\,\big|w_s^{(1)} - w_s^{(2)}\big| \leqslant 2R\big\|w^{(1)} - w^{(2)}\big\|_T,\quad k,s=1,2,3,$$

которые справедливы для произвольных $w^1, w^2\in S\,(w_0,r)$. Проведя очевидные оценки, находим

$$\big|A_1w^{(1)} - A_1w^{(2)}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \left[3 + \frac{1}{f_0}\Big(\max_{x\in[0,T]}|f'(x)| + R\max_{x\in[0,1]}|h''(y)|\Big) + 3\Big(\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + 2RT\Big)\right]T\big\|w^{(1)} - w^{(2)}\big\|_T,$$

$$\big|A_2w^{(1)} - A_2w^{(2)}\big| \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\Big(1 + 3\max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + 3RT\Big)\sqrt{T}\big\|w^{(1)} - w^{(2)}\big\|_T,$$

$$\big|A_3w^{(1)} - A_3w^{(2)}\big| \leqslant \frac{4}{\psi_{00}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{T}\right)\Big(1 + \max_{x\in[0,T/2]}|\psi'(x)| + TR + 3R\sqrt{T}\Big)\sqrt{T}\big\|w^{(1)} - w^{(2)}\big\|_T.$$

Отсюда следует, что
$$\|Aw^{(1)} - Aw^{(2)}\| \leqslant \frac{T}{T^*}\big\|w^{(1)} - w^{(2)}\big\|_T$$
и оператор A при $T \in (0, T^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(w_0, r)$ на себя. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (27) определяет единственное решение, принадлежащее этому шару. Теорема доказана.

Замечание. По найденной функции $w_1(x, y)$ для $y \in [0, 1]$ коэффициент $q(x)$ параболического уравнения в (1) находится по формуле (22).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г.* Линейные уравнения математической физики. М., 1964.
2. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 3. С. 3–19.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
4. *Лейбензон Л.Л.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л., 1947.
5. *Золина Л.А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 6. С. 991–1001.
6. *Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 261–264.
7. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 22–29.
8. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент, 1979.
9. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, 1986.
10. *Капустин Н.Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.
11. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 117–126.
12. *Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Бесселя // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 3. С. 14–24.
13. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. Уфа, 2015.
14. *Капустин Н.Ю.* Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 6. С. 1294–1298.
15. *Елеев В.А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 56–63.
16. *Елеев В.А.* Обобщенная задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 41–53.
17. *Елеев В.А., Балкизова А.Х.* О некоторых задачах сопряжения уравнений параболо-гиперболического типов с интегро-дифференциальными условиями на границе раздела областей // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Т. 3. № 24. С. 8–25.
18. *Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А.* О задаче типа Франкеля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 298–304.

19. *Прилепко А.И., Костин А.В., Соловьёв В.В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гельдера и Соболева // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17. № 3. С. 67–85.
20. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 612–621.
21. *Durdiev D.K., Durdiev D.D.* The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation // Turkish J. of Mathematics. 2022. V. 46. № 8. P. 3223–3233.
22. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
23. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, 1999.
24. *Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z.* Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Methods in the Applied Sci. 2022. V. 45. № 14. P. 8374–8388.
25. *Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z.* One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // Ukrainian Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1723–1740.
26. *Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж.* Задача определения тепловой памяти проводящей среды // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 796–807.
27. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
28. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
29. *Hasanov A., Romanov V.G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer, 2017.
30. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. Singapore, 2023.
31. *Дурдиев Д.К.* Об определении коэффициента уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1633–1644.

Институт математики
имени В.И. Романовского АН РУз,
г. Ташкент

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
После доработки 01.08.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 55–63

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.951

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. III

 В. И. Елкин

Рассматриваются симметрии уравнений с частными производными на основе использования дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, дифференциальная система, динамическая система с управлением, первый интеграл, симметрия, декомпозиция.

DOI: 10.31857/S0374064124010055, EDN: RQSDRQ

1. Введение. Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t,y,p)=0,\quad \nu=\overline{1,l}. \tag{1}$$

После приведения этой системы к специальному виду в параметрической форме, разрешённой относительно всех производных

$$\partial_k y^i = g^i_k(t,y,u), \tag{2}$$

где $\partial_k=\partial/\partial_{t^k}$, открывается возможность применения дифференциально-геометрических и алгебраических методов теории динамических систем с управлением, используя некоторую аналогию данных объектов. Эти методы позволяют исследовать некоторые вопросы декомпозиции, построения симметрий и др. В статье [1] на основе понятия первого интеграла с помощью замены координат, куда входят первые интегралы, была получена простая декомпозиция вида

$$\partial_k z^i=0,\quad i=\overline{1,q},\quad \partial_k z^j=h^j_k(t,x,u),\quad j=\overline{q+1,n}. \tag{3}$$

В работе [2] рассматривается более общая декомпозиция, которая также имеет аналог в теории динамических систем с управлением под названием *агрегирование* (*факторизация*). Здесь исследуются симметрии, т.е. преобразования переменных, "переводящие решения в решения". Кроме практического смысла тиражирования решений, симметрии определяют также некоторую декомпозицию уравнений с частными производными.

2. О симметриях дифференциальных уравнений. Симметрии дифференциальных уравнений — это такие преобразования зависимых и независимых переменных, которые переводят решения дифференциальных уравнений в решения. Таким образом, симметрии позволяют находить новые решения по известным решениям, но этим не ограничивается их роль. Различные качественные характеристики дифференциальных уравнений определяются существованием тех или иных симметрий. Например, для обыкновенных дифференциальных уравнений симметрии помогают находить интегралы, которые в случае уравнений механики дают законы сохранения. Для уравнений с частными производными (математической физики) симметрии также поставляют законы сохранения, которые имеют более сложный вид. Знание симметрий позволит преобразовать дифференциальные уравнения к удобному для исследований виду, например, к некоторой декомпозиции.

В данном пункте кратко опишем поход к нахождению симметрий дифференциальных уравнений, предложенный Л.В. Овсянниковым, под наименованием *групповой анализ* [3].

Рассмотрим систему $\mathcal{L}$ дифференциальных уравнений первого порядка (1), включающую m независимых переменных $t = (t^1, \ldots, t^m)$ и n зависимых переменных $y = (y^1, \ldots, y^n)$. *Решением системы* $\mathcal{L}$ является гладкая функция $y = \Phi(t)$, удовлетворяющая системе $\mathcal{L}$. Будем отождествлять эту функцию, заданную в области $I \subset \mathbb{R}^m$ изменения переменных t, с её графиком, т.е. с множеством точек

$$N = \{(t, y) \in \mathbb{R}^d \colon y = \Phi(t)\}, \quad d = m + n.$$

Этот график является m-мерным многообразием в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим некоторый диффеоморфизм (т.е. взаимно-однозначное отображение, гладкое в обе стороны) $\psi \colon M \to M$, где M — область в $\mathbb{R}^d$, причём $N \subset M$. Под действием диффеоморфизма ψ многообразие N перейдёт в некоторое многообразие $\hat{N} = \psi(N)$. Многообразие $\hat{N}$ не является, вообще говоря, графиком какой-либо однозначной функции $y = \hat{\Phi}(t)$. Понятие симметрии относится к случаю, когда $\hat{N}$ — график.

Итак, будем говорить, что диффеоморфизм ψ является симметрией системы $\mathcal{L}$, если каждое решение $y = \Phi(x)$ системы, трактуемое как многообразие N, переводится этим диффеоморфизмом в многообразие $\hat{N} = \psi(N)$, являющееся графиком некоторой функции $y = \hat{\Phi}(t)$, представляющей собой решение системы $\mathcal{L}$. Естественным образом понятие симметрии обобщается для случая локального диффеоморфизма ψ.

Перейдём теперь к группам симметрий. Пусть S — локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов некоторой области в $\mathbb{R}^d$, состоящая из преобразований s^τ вида

$$t' = h(t, y, \tau), \quad y' = g(t, y, \tau). \tag{4}$$

Под действием преобразования s^τ группы S многообразие N, являющееся графиком функции $y = \Phi(t)$, перейдёт в многообразие $\hat{N}$, которое в параметрической форме (параметр t) задаётся уравнениями

$$t' = h(t, \Phi(t), \tau), \tag{5}$$

$$y' = g(t, \Phi(t), \tau). \tag{6}$$

Так как $h(t, y, 0) = t$, то (по крайней мере для малых τ) уравнения (5) можно разрешить относительно t и подставить в (6). В результате получим представление многообразия $\hat{M}$ в виде графика функции $y' = \hat{\Phi}(t')$. Будем говорить, что эта функция получается из функции $y = \Phi(t)$ действием преобразования s^τ. Группа S называется *группой симметрий*, если такие функции, получаемые действием преобразований группы на решения, снова являются решениями системы $\mathcal{L}$, т.е. преобразования s^τ — симметрии системы $\mathcal{L}$. Заметим, что симметрии часто называют *допускаемыми преобразованиями*, а группы симметрий — *допускаемыми группами* системы $\mathcal{L}$. Говорят также, что система $\mathcal{L}$ допускает преобразование или группу преобразований.

При рассмотрении вопроса о симметриях удобно перейти в так называемое расширенное пространство переменных, которое, наряду с зависимыми и независимыми переменными, содержит в качестве переменных ещё производные зависимых переменных по независимым. Введём в рассмотрение величины p^i_k, равные значениям производных от функций $y = \Phi(t)$:

$$p^i_k = \frac{\partial \Phi^i}{\partial t^k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Под действием преобразования s^τ группы S функция $y = \Phi(t)$ перейдет в некоторую функцию $y' = \hat{\Phi}(t')$. Для того чтобы получить закон изменения производных запишем, используя (5), (6), следующие равенства:

$$g^i(t, \Phi(t), \tau) = \hat{\Phi}^i(h(t, \Phi(t), \tau)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Продифференцировав эти равенства по t^k, получим систему уравнений

$$\frac{\partial g^i}{\partial t^k} + \frac{\partial g^i}{\partial y^l} p_k^l = \hat{p}_j^i \left(\frac{\partial h^j}{\partial t^k} + \frac{\partial h^j}{\partial y^l} p_k^l \right), \tag{7}$$

которые следует разрешить относительно $\hat{p}_j^i = \partial \hat{\Phi}^i / \partial \hat{t}^j$. Последняя операция (при достаточно малых τ) даёт однозначный результат. Действительно, при $\tau = 0$ скобки в (7) равны символу Кронекера δ_k^j. Следовательно, определитель этой системы уравнений отличен от нуля на некотором интервале изменения величины τ. Поэтому величины $\hat{p}_j^i$ можно представить как функции переменных t, y, p, τ, причём никак не связанные с конкретным видом функции $y = \Phi(t)$:

$$\hat{p}_j^i = f_j^i(t, y, p, \tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (4), (8) задают однопараметрическую группу, действующую в пространстве $\mathbb{R}^{(m+n+n)\times m}$ точек с координатами (t, y, p). Это пространство называется *продолженным пространством.* (Предложенная конструкция продолжения евклидова пространства представляет собой сильно упрощённый вариант теории расслоения струй.) Группа (4), (8) называется *продолжением группы* S на производные $p_k^i = \partial y^i / \partial t^k$. Обозначим её через $\tilde{S}$.

Продолженная группа $\tilde{S}$, задаваемая соотношениями (4), (8), действует в продолженном пространстве $\mathbb{R}^{(m+n+n)\times m}$. Найдём векторное поле, порождаемое группой $\tilde{S}$ в этом пространстве.

Пусть группе S соответствует векторное поле

$$X = \xi^k(t, y) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{9}$$

Таким образом,

$$\xi^k(t, y) = \frac{\partial h^k(t, y, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0}, \quad \eta^i(t, y) = \frac{\partial g^i(t, y, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0}.$$

Из определения группы $\tilde{S}$ следует, что ей соответствует векторное поле вида

$$\tilde{X} = X + \zeta_k^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p_k^i} = \xi^k(t, y) \frac{\partial}{\partial t^k} + \eta^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i} + \zeta_k^i(t, y, p) \frac{\partial}{\partial p_k^i}.$$

Поле $\tilde{X}$ называется *продолжением* поля X на производные $p_k^i = \partial y^i / \partial t^k$. Найдём компоненты $\zeta_k^i(t, y, p)$ продолженного поля. По определению

$$\zeta_k^i(t, y, p) = \frac{\partial f_k^i(t, y, p, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Для того чтобы вычислить эти производные, продифференцируем равенства (7) по τ при $\tau = 0$. Заметим, что в этих равенствах можно менять порядок дифференцирования. После этих операций получим уравнения

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial t^k} + \frac{\partial \eta^i}{\partial y^l} p_k^l = \zeta_k^i + p_j^i \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial t^k} + \frac{\partial \xi^j}{\partial y^l} p_k^l \right),$$

откуда окончательно имеем

$$\zeta_k^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial t^k} + \frac{\partial \eta^i}{\partial y^l} p_k^l - p_j^i \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial t^k} + \frac{\partial \xi^j}{\partial y^l} p_k^l \right).$$

Система дифференциальных уравнений $\mathcal{L}$ задаёт в продолженном пространстве некоторое множество

$$F^\alpha(t, y, p) = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \tag{10}$$

где F^α — гладкие функции. Далее всегда предполагается, что система удовлетворяет так называемому условию максимального ранга, которое означает, что ранг матрицы Якоби от функций F^α (по всем переменным) равен r во всех точках продолженного пространства, удовлетворяющих (10). В этом случае уравнения (10) определяют в продолженном пространстве многообразие размерности $(m + n + m) \times (n - r)$.

Следующее достаточно очевидное утверждение является основным для нахождения групп симметрий: однопараметрическая группа S, действующая в пространстве независимых переменных t и зависимых переменных y, является группой симметрий системы дифференциальных уравнений $\mathcal{L}$, если равенства (10), задающие эту систему, определяют инвариантное многообразие продолженной группы $\tilde{S}$, т.е. преобразования группы переводят точки многообразия снова в точки многообразия.

Теперь воспользуемся критерием инвариантности многообразия, заданного в неявном виде [3, с. 45]. Из него следует, что векторное поле (9) порождает однопараметрическую группу симметрий системы дифференциальных уравнений $\mathcal{L}$, если

$$\tilde{X} F^\alpha |_{F(t,y,p)=0} = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}. \tag{11}$$

(Здесь в левой части равенства указано действие поля как оператора на функцию.)

Векторное поле (9), порождающее однопараметрическую группу симметрий, называется *инфинитезимальной симметрией* или *допускаемым полем*. В действительности уравнения (11) являются дифференциальными уравнениями относительно неизвестных компонент ξ и η таких полей. Уравнения (11) называются *определяющими уравнениями* для системы $\mathcal{L}$.

Найдём определяющие уравнения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{12}$$

Искомое допускаемое векторное поле имеет вид

$$X = \xi(t, y)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

продолженное (на производные $p^i = dy^i/dt$) поле —

$$\tilde{X} = X + \zeta^i(t, y, p)\frac{\partial}{\partial p^i} = \xi(t, y)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y)\frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial t} + \frac{\partial \eta^i}{\partial y^l}p^l - p^i\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y^l}p^l\right)\right)\frac{\partial}{\partial p^i}. \tag{13}$$

Система (12) в продолженном пространстве записывается в виде многообразия

$$p^i - f^i(t, y) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для нахождения определяющих уравнений нужно подействовать продолженным векторным полем (13) на функции $p^i - f^i(t, y)$, затем подставить вместо p^i функции $f^i(t, y)$ и приравнять полученные выражения к нулю. В результате получим равенства

$$X_0\eta^i - f^i X_0\xi = Xf^i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{14}$$

где X_0 — векторное поле, имеющее вид

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t, y)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Нетрудно видеть, что соотношения (14) можно записать в компактной форме

$$[X_0, X] = (X_0\xi)X_0.$$

3. Симметрии динамических систем с управлением. *Динамической системой с управлением* называется система уравнений вида

$$\dot{y}^i = g^i(t, y, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad (t, y) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r. \tag{15}$$

Предполагается, что функции g^i, $\partial f^i/\partial y^j$, $\partial g^i/\partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно называют y *фазовыми переменными* (*состояниями*), u — *управлениями* (*внешними воздействиями*). Множество M, называемое *фазовым пространством*, — область, U — область. Управления могут быть кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае они называются *допустимыми*.

Решением или фазовой траекторией системы (15) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (15).

Далее будем считать, что управления являются постоянными. Дело в том, что для исследования агрегирования этого достаточно, а в качестве приложения симметрий будет именно декомпозиция, основанная на агрегировании, при этом будем следовать работам [4, 5], которые затем будут обобщены для дифференциальных уравнений с частными производными в п. 4. Предполагаем, что однопараметрические группы симметрий порождаются векторными полями (инфинитезимальными) операторами

$$X = \xi(t, y)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, y)\frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha(t, y, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

действующими в $(n+r+1)$-мерном пространстве переменных (t, y, u). Продолжение осуществляется на производные $\partial y^i/\partial t$, $\partial y^i/\partial u^\alpha$, причём продолженный оператор имеет вид

$$\tilde{X} = X + \zeta^i(t, y, p)\frac{\partial}{\partial p^i} + \lambda^i_\alpha(t, y, p)\frac{\partial}{\partial q^i_\alpha},$$

где

$$\zeta^i = D_t(\eta^i) - p^i D_t(\xi) - q^i_\alpha D_t(\omega^\alpha), \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + p^i\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Условие того, что поле X допускается системой:

$$\tilde{X}(p^i - f^i(t, y, u))|_{p=f} = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$X_0\eta^i - f^i X_0\xi = Xf^i, \tag{16}$$

$$X_0(\omega^\alpha) = 0, \tag{17}$$

где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Полагая

$$X^* = \theta^i(t, y)\frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad X = \xi X_0 + X^*, \tag{18}$$

получаем из (16), (17) соотношения

$$X_0(\theta^i) = X^*(f^i), \tag{19}$$

$$X_0(\omega^\alpha) = 0. \tag{20}$$

Это можно записать с помощью коммутатора

$$[X_0, X^*] = 0.$$

Соотношения (19), (20) представляют собой дифференциальные уравнения относительно компонент допускаемого поля (18). После их нахождения симметрии являются решением некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Симметрии, как уже отмечалось, могут быть использованы для построения новых решений системы уравнений по известным решениям. Существует ещё одно приложение симметрий для упрощения исследования систем уравнений, а именно, декомпозиция этих уравнений.

4. Симметрии и декомпозиция дифференциальных уравнений с частными производными. Вернёмся к дифференциальным уравнениям с частными производными (1), причём в специальной форме (2):

$$\partial_k y^i = g^i_k(t,y,u), \quad t\in I\subset\mathbb{R}^m, \quad y\in L\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^s, \tag{21}$$

где I, L, U — некоторые области. Исследуем вопрос о существовании инфенитезимальных симметрий (допускаемых векторных полей) для системы (21). Как и в работах [1, 2], воспользуемся аналогией систем (2) с управляемыми системами (15). Далее будем считать, что параметрические переменные (“управления”) являются всевозможными постоянными. Дело в том, что (также как и для управляемых систем (15)) для исследования агрегирования этого достаточно (см. [2]), а в качестве приложения симметрий будет именно декомпозиция, основанная на агрегировании, при этом будем следовать работам [4, 5], которые здесь обобщаются на дифференциальные уравнения с частными производными. Итак, речь идёт о нахождении векторных полей

$$X=\xi^k(t,y,u)\frac{\partial}{\partial t^k}+\eta^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i}+\omega^\alpha(t,y,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{22}$$

Этим полям соответствуют продолженные поля (продолжение осуществляется на производные $\partial y^i/\partial t$, $\partial y^i/\partial u^\alpha$), причём продолженные операторы имеют вид

$$\tilde X = X+\zeta^i_k(t,y,p)\frac{\partial}{\partial p^i_k}=\xi^k(t,y)\frac{\partial}{\partial t^k}+\eta^i(t,y)\frac{\partial}{\partial y^i}+\zeta^i_k(t,y,p)\frac{\partial}{\partial p^i_k},$$

где

$$\zeta^i_k=D_{t_k}(\eta^i)-p^iD_{t_k}(\xi)-q^i_\alpha D_{t_k}(\omega^\alpha), \quad D_{t_k}=\frac{\partial}{\partial t_k}+p^i_k\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

По аналогии с п. 3 условие того, что поле X допускается системой, будет следующим:

$$\tilde X(p^i_k-g^i_k(t,y,u))\,|_{p=g}=0,$$

где

$$X_l\eta^i-g^iX_l\xi-q^i_\alpha X_l\omega^\alpha=Xg^i. \tag{23}$$

Так как эти равенства должны выполняться тождественно по t, y, u, p, q, то

$$X_l\eta^i-g^iX_l\xi=Xg^i, \quad i=\overline{1,n}, \tag{24}$$

$$X_l(\omega^\alpha)=0, \tag{25}$$

где X_l — операторы полного дифференцирования системы (21) по переменным t^l:

$$X_l=g^i_l(t,y,u)\partial/\partial y^i, \quad l=\overline{1,m}. \tag{26}$$

Далее при исследовании симметрий и декомпозиции рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными специального вида, причём для упрощения, не ограничивая общности, «автономные», т.е. с правыми частями, не зависящими от аргументов t:

$$\partial_k y^i = g^i_k(y,u), \quad t\in I\subset\mathbb{R}^m, \quad y\in L\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^s, \tag{27}$$

где $I,\ L,\ U$ — некоторые области. Речь идёт о декомпозиции системы (27) с помощью замены зависимых переменных $y,$ точнее, о возможности преобразования системы с помощью замены переменных

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = \overline{1,n}, \tag{28}$$

к виду

$$\partial_k z^l = h^l_k(z^1, \ldots, z^m, u), \quad l = \overline{1,m}, \tag{29}$$

$$\partial_k z^i = h^i_k(z^1, \ldots, z^n, u), \quad i = \overline{m+1,n}. \tag{30}$$

Если такое представление возможно, то будем говорить, что система (27) допускает декомпозицию по зависимым переменным порядка $n-m,$ причём первые m функций в замене переменных (28)

$$z^i = \varphi^i(y), \quad i = \overline{1,m}, \tag{31}$$

называются *агрегатами.* Замену зависимых переменных (28) в системе (27) будем осуществлять следующим образом: нужно подействовать операторами (26) на функции (28), получив

$$X_l(\varphi^i(y)) = g^j_l(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}, \tag{32}$$

и выразить функционально полученные функции через (28):

$$g^j_l(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^n(y), u). \tag{33}$$

Функции $h^i(z^1, \ldots, z^n, u)$ являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (29), (30) возникает, когда первые m функций (33) функционально выражаются только через агрегаты (31), т.е.

$$g^j_l(y,u)\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j} = h^i(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^m(y)u), \quad i = \overline{1,m}.$$

Непосредственное применение этого условия не даёт конструктивного метода нахождения агрегатов и проверки возможности декомпозиции. Поэтому в статье [2] применён опосредованный подход, когда сначала с помощью решения некоторых систем дифференциальных уравнений отыскиваются полные семейства векторных полей, для которых агрегаты являются интегралами, а затем находятся агрегаты, т.е. интегралы этих семейств. При этом совместность упомянутых систем дифференциальных уравнений определяет возможность декомпозиции.

Для применения симметрий в вопросах декомпозиции вида (29), (30) в силу указанных выше причин (в частности, автономности) естественно рассматривать симметрии, не меняющие переменные t и параметрические переменные $u.$ Для соответствующих полей (22) это означает, что $\xi^k = 0,\ \omega^\alpha = 0.$ Тогда для искомых векторных полей

$$X = \eta^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{34}$$

выражения (24), (25) можно с помощью операции коммутирования заменить компактным выражением

$$[X_l, X] = 0, \quad l = \overline{1,m}. \tag{35}$$

Векторные поля (34), удовлетворяющие (35), образуют алгебру Ли, обозначаемую $\mathfrak{a},$ т.е. коммутаторы и линейные комбинации полей из $\mathfrak{a}$ снова принадлежат $\mathfrak{a}.$ Кроме того, введём подалгебру, состоящую из полей вида

$$X = \eta^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

которую обозначим через $\mathfrak{a}_0.$ Заметим, что существуют аналоги этих алгебр для управляемых динамических систем. В частности, была обнаружена глубокая связь свойств структуры управляемой динамической системы со свойствами соответствующих алгебр. Вероятно, что существуют подобные связи и для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Здесь рассматривается применение алгебры $\mathfrak{a}_0$ для исследования возможности декомпозиции системы (27).

Напомним, что *полным семейством векторных полей* или *операторов* называется семейство полей

$$Z_a = b_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{36}$$

где по повторяющемуся индексу здесь и далее проводится суммирование, если:

1) $\operatorname{rank}\left\|b_a^i(y)\right\| = p$, т.е. векторы $Z_a(y)$, $a=\overline{1,p}$, линейно независимы в каждой точке $y \in M$ или, как ещё говорят, линейно несвязаны в области M;

2) $[Z_a, Z_c] = h_{ac}^d(y)Z_d$, $\quad a,c,d=\overline{1,p}$, т.е. все коммутаторы $[Z_a,Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h_{ac}^d(y)$ через остальные поля семейства.

Теорема 1 [6, с. 12]. *Полное семейство (36), $p<n$, имеет в окрестности каждой точки $m=n-p$ функционально независимых интегралов (полный набор)*

$$\Phi^k(y), \quad \operatorname{rank}\left\|\frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i}\right\|_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n-m}} = n-m, \tag{37}$$

причём любой интеграл $\Phi(y)$ функционально выражается через полный набор

$$\Phi(y) = F(\Phi^1(y),\ldots,\Phi^m(y)).$$

Следующее утверждение определяет некоторое условие декомпозиции на основе существования симметрий.

Теорема 2. *Если в $\mathfrak{a}_0$ существует полное семейство векторных полей*

$$Z_a = b_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l=\overline{1,p}, \tag{38}$$

то система допускает декомпозицию (29), (30) системы (27), причём агрегатами являются полный набор интегралов этого семейства.

Доказательство. Для семейства (38) возьмём полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,m}$, $m=n-p$. Рассмотрим выражения

$$[X_l, Z_a](\varphi^i(y)) = X_l(Z_a(\varphi^i(y))) - Z_a(X_l(\varphi^i(y))) = 0. \tag{39}$$

Из (39) вытекает, что функции $X_l(\varphi^i(y))$ являются интегралами семейства (36) и по теореме 1 функционально выражаются через полный набор интегралов и, следовательно, $\varphi^i(y)$ являются агрегатами для системы (27).

Выражения (35) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$X_l(b_a^i) = Z_a(g^i), \quad i=\overline{1,n}, \quad a=\overline{1,p}, \quad u \in U, \tag{40}$$

относительно неизвестных компонент семейства (36). В (40) выражения $\xi_u(b_a^i)$, $Z_a(f^i)$ представляют собой действия полей ξ_u, Z_a на функции $b_a^i(y)$, g^i как операторов. После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,m}$, $m=n-p$, полного семейства (36), что, согласно [6, с. 12], сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых частей фактор-системы следует функции $g^j(y,u)\partial\varphi^k/\partial y^j$ выразить функционально через функции $\varphi^i(y)$, $i=\overline{1,m}$, $m=n-p$, т.е. представить их в виде

$$g^j(y,u)\frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} = h^p(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y),u).$$

Построенные функции h^k и определяют искомую фактор-систему

$$\dot{z}^k = h^k(z, u), \quad k = \overline{1, m}.$$

Пример. Рассмотрим

$$\partial_k y_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + u_1, \quad \partial_k y_2 = 2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + u_2, \quad \partial_k y_3 = 2y_1 y_3 + u_3.$$

Убедимся, что компоненты полей семейства

$$X_1 = \eta_{11}\frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{21}\frac{\partial}{\partial y_2} + \eta_{31}\frac{\partial}{\partial y_3}, \quad X_2 = \eta_{12}\frac{\partial}{\partial y_1} + \eta_{22}\frac{\partial}{\partial y_2} + \eta_{32}\frac{\partial}{\partial y_3},$$

такие что

$$\eta_{11} + \eta_{21} + \eta_{31} = 0, \quad \eta_{12} + \eta_{22} + \eta_{32} = 0, \tag{41}$$

удовлетворяют соответствующим уравнениям (35), причём интеграл семейства равен

$$y_1 + y_2 + y_3.$$

Для нахождения агрегированной системы следует подействовать операторами полного дифференцирования на этот интеграл и выразить функционально полученный результат через интеграл. В полученном выражении следует заменить интеграл на новую переменную z^1. В результате агрегированная система примет вид

$$\partial_k z_l = z_1^2 + u_1 + u_2 + u_3.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елкин В.И.* Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. I. // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1474–1482.
2. *Елкин В.И.* Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. II. // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 57. № 11. С. 1453–1460.
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.
4. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры. I. Группы, характеризующие динамические системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 862–872.
5. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры. II. Фазовые организационные структуры // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 5. С. 1093–1103.
6. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М., 1947.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 18.07.2023 г.
После доработки 18.07.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 64–75

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

СТРУКТУРА ВНУТРЕННЕГО ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ В СЛУЧАЕ СБАЛАНСИРОВАННОЙ РЕАКЦИИ СО СЛАБЫМ РАЗРЫВОМ

© 2024 г. Е. И. Никулин, В. Т. Волков, Д. А. Карманов

Для сингулярно возмущённого уравнения типа реакция–диффузия исследована структура внутреннего переходного слоя в случае сбалансированной реакции со слабым разрывом. Доказано существование решений с внутренним переходным слоем (контрастных структур), исследован вопрос об их устойчивости, получены асимптотические приближения решений указанного типа. Показано, что в случае баланса реакции наличие даже слабого (асимптотически малого) разрыва реакции может приводить к образованию контрастных структур конечного размера, как устойчивых, так и неустойчивых.

Ключевые слова: сингулярно возмущённые параболические уравнения, уравнения реакция–диффузия, контрастные структуры, внутренние слои, метод дифференциальных неравенств, асимптотические методы, асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.31857/S0374064124010068, EDN: RSQLCN

Введение. Одной из актуальных задач теории сингулярных возмущений в настоящее время является исследование нелинейных сингулярно возмущённых уравнений в частных производных, решения которых имеют пограничные и внутренние слои. Такие уравнения представляют большой интерес как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих прикладных задачах, в частности, в математических моделях химической кинетики, синергетики, нелинейной теории волн, биофизики и других областях физики [1], где исследуемые процессы описываются нелинейными параболическими уравнениями с малыми параметрами при производных. Решения таких задач могут содержать узкие области быстрого изменения параметров: пограничные или внутренние переходные слои (контрастные структуры) различных типов — стационарные или движущиеся фронты (см. [2, 3] и библиографию в них).

Уравнения типа реакция–диффузия и реакция–диффузия–адвекция интенсивно изучаются также в связи с тем, что они выступают в качестве математических моделей, выявляющих основные механизмы, определяющие поведение и более сложных физических систем. В частности, к рассматриваемой в статье задаче может быть сведена хорошо известная система ФитцХью–Нагумо [4–6] в стационарном случае. Также к этой задаче сводится система уравнений дрейфо-диффузионной модели полупроводника, обладающего N-образной зависимостью скорости дрейфа от напряжённости электрического поля [7–10].

Причиной образования переходных слоев (контрастных структур) в сингулярно возмущённых моделях типа реакция–диффузия–адвекция может служить выполнение условия баланса реакции в некоторой точке или на некоторой кривой, лежащей в области рассмотрения [3, 11] или баланса адвекции [12], адвекции и реакции [13], а также разрыв коэффициентов по пространственной координате [14, 15].

В статьях [16–18] в случае непрерывных коэффициентов был рассмотрен так называемый *критический случай*, когда условие баланса реакции выполняется тождественно, т.е. в любой точке области. В настоящей работе рассматривается краевая задача для нелинейного сингулярно возмущённого уравнения реакция–диффузия в критическом случае при наличии слабого разрыва реактивного слагаемого. Под *слабым разрывом* понимается разрыв первого рода в некоторой точке, который претерпевает функция источников в первом порядке по малому параметру. Показано, что в этом случае даже асимптотически малое воздействие на систему в виде разрыва реакции в первом порядке по малому параметру может вызвать конечное изменение решения задачи: образуется переходный слой конечной амплитуды. Сформулированы условия, при которых существует решение типа контрастной структуры, имеющее внутренний переходный слой, локализованный в окрестности точки разрыва реакции, и построено асимптотическое приближение этого решения по малому параметру. Изучена тонкая структура переходного слоя и показана возможность существования различных типов таких решений, как устойчивых, так и неустойчивых. Сформулированы достаточные условия, определяющие либо асимптотическую устойчивость по Ляпунову, либо неустойчивость каждого такого решения.

Асимптотическое приближение решения строится по методике, изложенной в работе [2]; для обоснования существования решения применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств [19–21], а также асимптотический метод дифференциальных неравенств, развитый для задач с разрывными нелинейностями [22–26]; исследование устойчивости проводится методом сжимающих барьеров [18].

Статья содержит шесть пунктов. В п. 1 сформулирована постановка задачи и основные условия, обеспечивающие существование решения с внутренним переходным слоем. В п. 2 и 3 описывается алгоритм построения асимптотического приближения и нахождения асимптотики уровня перехода. Обоснованию существования решения и исследованию его устойчивости посвящены п. 4 и 5. В п. 6 приведены примеры асимптотического расчёта и численного моделирования для конкретных входных параметров задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущённую краевую задачу:

$$N_\varepsilon u := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u,x) - \varepsilon f_1(u,x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$f_1(u,x) := \begin{cases} f_1^{(+)}(u,x), & u \in I_u, \quad x_p < x \leqslant 1; \\ f_1^{(-)}(u,x), & u \in I_u, \quad -1 \leqslant x < x_p, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0\,. \tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$; $x_p \in (-1;1)$; I_u — отрезок изменения функции $u(x,\varepsilon)$.

Будем рассматривать задачу (1) при следующих условиях.

Условие 1. Пусть функции f, $f_1^{(\pm)}$ являются достаточно гладкими и пусть для любого $u \in I_u$ выполняется

$$\lim_{x \to x_p+0} f_1^{(+)}(u,x) \neq \lim_{x \to x_p-0} f_1^{(-)}(u,x).$$

Условие 1 означает, что функция $f_1(u,x)$ имеет разрыв первого рода по переменной x в точке x_p.

Условие 2. Пусть вырожденное уравнение $f(u,x) = 0$ имеет три корня $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x) < 0, \quad x \in [-1,1].$$

Условие 2 гарантирует существование точек покоя $(\varphi^{(\pm)}(x),0)$ типа седла на фазовой плоскости $(\tilde u, \tilde v)$ присоединённой системы, соответствующей задаче (1):

$$\frac{\partial \tilde u}{\partial \xi} = \tilde v, \quad \frac{\partial \tilde v}{\partial \xi} = f(\tilde u, x)\,. \tag{2}$$

Условие 3. Пусть

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u,x)\,du \equiv 0, \qquad x \in [-1,1].$$

Условие 3 означает наличие баланса реакции и выделяет так называемый *критический* случай. Данное условие позволяет утверждать, что сепаратриса на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ присоединённой системы, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}(x),0)$, при любом $x\in[-1,1]$ попадает в седло $(\varphi^{(+)}(x),0)$.

Основной целью данной статьи является доказательство существования решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1) в виде контрастной структуры типа "ступенька", т.е. решения, которое при достаточно малых ε вне некоторой окрестности точки x_p близко к функциям $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$ и имеет резкий переходный слой между этими уровнями вблизи точки x_p. Методика исследования основана на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств, а именно: для доказательства существования решения использованы идеи работ [27–29], а построение верхнего и нижнего решений с нужными свойствами проводится путём модификации членов формального асимптотического приближения.

2. Построение формального асимптотического приближения. Введём функцию $p(\varepsilon)$, определяющую уровень переходного слоя в точке x_p: положим $u(x_p,\varepsilon)=p(\varepsilon)$. Функция $p(\varepsilon)$ заранее неизвестна и определяется в процессе построения асимптотического приближения.

Асимптотическое приближение решения получается путём построения асимптотик погранслойного типа слева и справа от точки x_p:

$$U^{(-)}(x,\varepsilon)=\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)+Q^{(-)}(\xi,p,\varepsilon)+R^{(-)}(\sigma_-,\varepsilon),\quad x\in[-1,x_p],$$
$$U^{(+)}(x,\varepsilon)=\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon)+Q^{(+)}(\xi,p,\varepsilon)+R^{(+)}(\sigma_+,\varepsilon),\quad x\in[x_p,1], \tag{3}$$

и их дальнейшего C^1-сшивания в точке x_p на уровне $u=p(\varepsilon)$. Здесь $\overline{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ — регулярная часть асимптотики, описывающая решение вне окрестности точки x_p; функции $Q^{(\pm)}(\xi,p,\varepsilon)$, где $\xi=(x-x_p)/\varepsilon$, описывают решение вблизи точки $x=x_p$ (внутренний переходный слой).

Пограничные функции $R^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)$, описывающие поведение решения вблизи точек $x=1$ и $x=-1$, строятся известными стандартными методами [2] и являются экспоненциально убывающими по переменным $\sigma_\pm=(1\mp x)/\varepsilon$ при удалении от границ $x=1$ и $x=-1$, поэтому они не влияют на поведение решения вблизи внутреннего переходного слоя в точке $x=x_p$ и не рассматриваются в настоящей работе. Заметим, что в силу условий второго рода на границах $x=1$ и $x=-1$ пограничные функции в нулевом порядке по ε отсутствуют.

Каждое слагаемое в (3) ищется в виде рядов по степеням ε:

$$\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{u}_k^{(\pm)}(x)\varepsilon^k,\quad Q^{(\pm)}(\xi,p,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k^{(\pm)}(\xi,p)\varepsilon^k,$$

коэффициенты которых определяются стандартным образом по алгоритму, изложенному в [2].

Функции регулярной части нулевого и первого порядков имеют вид

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x)=\varphi^{(\pm)}(x)\quad\text{и}\quad \bar{u}_1^{(\pm)}(x)=-\frac{f_1^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(x),x)}{f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x)}$$

соответственно.

Для определения функций $Q_0^{(\pm)}$ получаем следующие задачи:

$$\varepsilon^0:\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 {Q_0}^{(\pm)}}{\partial\xi^2}=f(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_p)+{Q_0}^{(\pm)},x_p),\\ {Q_0}^{(\pm)}(0,p)=p-{\bar{u}_0}^{(\pm)}(x_p),\\ {Q_0}^{(\pm)}(\pm\infty,p)=0\,.\end{cases} \tag{4}$$

Зависимость функции Q_0 от переменной p объясняется наличием этой переменной в начальном условии.

Хорошо известно (см., например, [2]), что при выполнении условия 2 каждая из задач (4) имеет единственное монотонное решение, экспоненциально убывающее при $\xi \to \pm\infty$.

Функции $Q_1^{(\pm)}$ находятся как решения задач

$$\varepsilon^1: \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 {Q_1}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial u}\, Q_1^{(\pm)} + r_1^{(\pm)}, \\ {Q_1}^{(\pm)}(0,p) + {\bar{u}_1}^{(\pm)}(x_p) = 0, \\ {Q_1}^{(\pm)}(\pm\infty, p) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$r_1^{(\pm)}(\xi,p) = \xi\left(\frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi^{(\pm)}}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial u}\,\bar{u}_1^{(\pm)}(x_p) + \tilde{f}_1^{(\pm)},$$

а символ $\sim$ означает, что функция берётся при аргументе $(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_p) + Q_0^{(\pm)}, x_p)$.

Решения задач (5) можно получить в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,p) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(x_p)\,\frac{v^{(\pm)}(\xi,p)}{v^{(\pm)}(0,p)} + v^{(\pm)}(\xi,p)\int\limits_0^{\xi}\frac{\mathrm{d}s}{(v^{(\pm)}(s,p))^2}\int\limits_{\pm\infty}^{s} v^{(\pm)}(\eta,p)\, r_1^{(\pm)}(\eta,p)d\eta, \tag{6}$$

где введено обозначение $v^{(\pm)}(\xi,p) := \partial Q_0^{(\pm)}(\xi,p)/\partial\xi$.

Задачи для определения функций внутреннего переходного слоя следующих порядков по ε аналогичны (5), а их решения находятся в явном виде по формулам вида (6).

3. Определение уровня перехода $p(\varepsilon)$. Подробнее остановимся на определении коэффициентов асимптотического приближения уровня перехода

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots \tag{7}$$

Из условия C^1-сшивания разложений (3) в точке x_p получим

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p} - \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p}\right) = \left[\frac{\partial Q_0}{\partial \xi}(0,p)\right]_-^+ + \varepsilon\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0,p)\right]_-^+ + \ldots, \tag{8}$$

где $[A]_-^+ := A^{(+)} - A^{(-)}$.

Главный член в правой части (8) $[\partial Q_0(0,p)/\partial\xi]_-^+ \equiv 0$, $p \in (\varphi^{(-)}(x_p), \varphi^{(+)}(x_p))$, откуда следует тождество $v^{(+)}(0,p) \equiv v^{(-)}(0,p) =: v_0(p)$ в силу условия 3.

Введём обозначение

$$\varepsilon\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0,p)\right]_-^+ + \ldots =: \frac{\varepsilon}{v_0(p(\varepsilon))}[K_1(p(\varepsilon)) + \varepsilon K_2(p(\varepsilon)) + \ldots] \tag{9}$$

и каждое слагаемое в правой части (9) представим в виде рядов по степеням ε, используя (7):

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p} - \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p}\right) = \frac{\varepsilon}{v_0(p_0)}\left[K_1(p_0) + \varepsilon\frac{\partial K_1}{\partial p}\bigg|_{p=p_0} p_1 + \varepsilon\, K_2(p_0)\right] + \ldots = 0. \tag{10}$$

Можно показать, что $K_1(p)$ приводится к виду

$$K_1(p) = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}}\left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u,x_p)\,\xi(u,p) + f_1^{(+)}(u,x_p)\right]du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}}\left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u,x_p)\,\xi(u,p) + f_1^{(-)}(u,x_p)\right]du.$$

Следующее условие обеспечивает выполнение равенства (10) в первом порядке по ε.

Условие 4. Пусть уравнение

$$K_1(p) = 0 \tag{11}$$

имеет корень $p = p_0 \in (\varphi^{(-)}(x_p), \varphi^{(+)}(x_p))$.

Равенство (10) во втором порядке ε приводит к уравнению для определения p_1:

$$\left.\frac{dK_1(p)}{dp}\right|_{p=p_0} p_1 + K_2(p_0) = 0. \tag{12}$$

Условие 5. Пусть выполняется неравенство

$$\left.\frac{dK_1(p)}{dp}\right|_{p=p_0} < 0.$$

Это условие обеспечивает разрешимость уравнения (12) и, как будет показано ниже, устойчивость контрастной структуры.

Отметим, что корень p_0 уравнения (11) может быть неединственным на указанном промежутке (см. пример 2). Далее будет показано, что каждому корню p_i уравнения (11), удовлетворяющему условию 5, отвечает асимптотически устойчивое по Ляпунову решение уравнения (1) с переходным слоем на уровне p_i.

Преобразуем последнее неравенство к виду

$$\frac{dK_1(p)}{dp} = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}} \left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u, x_p)\ \frac{\partial \xi(u,p)}{\partial p}\right] du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}} \left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u, x_p) \frac{\partial \xi(u,p)}{\partial p}\right] du +$$
$$+ \frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(p, x_p)\ \xi(p,p) + f_1^{(+)}(p, x_p) - \frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(p, x_p)\ \xi(p,p) - f_1^{(-)}(p, x_p).$$

Для $\xi(u,p)$ и $\partial\xi/\partial p$ получаем

$$\xi(u,p) = \int\limits_p^u \left(2\int\limits_{\varphi^{(\pm)}}^{u^*} \tilde{f}^{(\pm)}(\tilde{u}, x_p) d\tilde{u}\right)^{-1/2} du^*,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\int\limits_u^p \left(2\int\limits_{\varphi^{(\pm)}}^{u^*} \tilde{f}^{(\pm)}(\tilde{u}, x_p) d\tilde{u}\right)^{-1/2} du^*\right) = -\left(2\int\limits_{\varphi^{(\pm)}}^{p} \tilde{f}^{(\pm)}(\tilde{u}, x_p) d\tilde{u}\right) = -\frac{1}{v_0(p)}.$$

После подстановки приходим к равенству

$$\frac{dK_1(p)}{dp} = \frac{1}{v_0(p)} \int\limits_{\varphi^{(-)}}^{\varphi^{(+)}} \frac{\partial f(u, x_p)}{\partial x} du + f_1^{(+)}(p, x_p) - f_1^{(-)}(p, x_p).$$

В силу условия 3 (критический случай) первое слагаемое в правой части последнего равенства обращается в нуль, поэтому

$$\frac{dK_1(p)}{dp} = f_1^{(+)}(p, x_p) - f_1^{(-)}(p, x_p).$$

Таким образом, знак производной функции $K_1(p)$ (а следовательно, и устойчивость или неустойчивость контрастной структуры) в критическом случае определяется только разностью предельных значений $f_1^{(+)}(p, x_p)$ и $f_1^{(-)}(p, x_p)$ в точке x_p.

4. Существование и устойчивость решения. *Решением задачи* (1) назовём функцию $u(x,\varepsilon)\in C^1([-1,1])\cap C^2((-1,x_p)\cup(x_p,1))$ по переменной x, удовлетворяющую уравнению (1) при $x\in(-1,x_p)\cup(x_p,1)$, а также граничным условиям этой задачи.

Определение. Функции $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ называются, соответственно, *верхним* и *нижним решениями задачи* (1), если $\beta(x,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-f(\beta,x)-\varepsilon f_1(\beta,x)\leqslant 0,\quad -1<x<1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(-1,\varepsilon)\leqslant 0,\quad \frac{\partial\beta}{\partial x}(1,\varepsilon)\geqslant 0, \tag{14}$$

а $\alpha(x,\varepsilon)$ — аналогичным неравенствам с противоположными знаками. Функции $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$ могут иметь в некоторой точке $x^*\in(-1,1)$ скачок производных допустимого знака, а именно:

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(x^*+0,\varepsilon)-\frac{\partial\beta}{\partial x}(x^*-0,\varepsilon)\leqslant 0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x^*+0,\varepsilon)-\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x^*-0,\varepsilon)\geqslant 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1)–(5). Тогда при достаточно малом ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), для которого имеет место оценка*

$$|u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon)|<C\varepsilon^{n+1}.$$

Здесь $U_n(x,\varepsilon)$ — частичные суммы порядка n асимптотических рядов (3), где положено $p=\hat p_n:=p_0+\varepsilon p_1+...+\varepsilon^n p_n$.

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение [28, 29]. *Пусть существуют верхнее $\beta(x,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha(x,\varepsilon)$ решения задачи (1), причём $\beta(x,\varepsilon)\geqslant\alpha(x,\varepsilon)$ при $x\in[-1,1]$. Тогда при достаточной гладкости функций $f(u,x)$ и $f_1^{(\pm)}(u,x)$ существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющее неравенствам $\alpha(x,\varepsilon)\leqslant u(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,\varepsilon)$.*

Поэтому достаточно построить верхнее и нижнее решения задачи (1), обладающие нужными свойствами. Это построение будем проводить путём модификации членов асимптотического ряда (3):

$$\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon)=\bar u_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar u_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^{n+2}\bar u_{n+2}^{(\pm)}(x)+$$
$$+Q_0^{(\pm)}(\xi,p_\delta)+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_\delta)+\varepsilon^2Q_2^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+\ldots+\xi^{n+2}Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+$$
$$+R_\beta^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)+\varepsilon^{n+2}(\gamma+q_\beta^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})),$$

$$\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)=\bar u_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar u_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^{n+2}\bar u_{n+2}^{(\pm)}(x)+$$
$$+Q_0^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta})+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta})+\varepsilon^2Q_2^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+\ldots+\xi^{n+2}Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+$$
$$+R_\alpha^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)+\varepsilon^{n+2}(-\gamma+q_\alpha^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})).$$

Здесь $\gamma>0$ — постоянная, обеспечивающая выполнение неравенств (13), $p_\delta(\varepsilon)=p_0+\varepsilon p_1+\ldots$ $\ldots+\varepsilon^{n+1}(p_{n+1}+\delta)$, $\delta>0$ — некоторая постоянная величина.

Функции $q_{\alpha,\beta}$ нужны для устранения невязок в уравнениях для $Q^{(\pm)}_{n+2}$, вносимых постоянной γ. Функции q_β определяются как решение задачи

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}(\xi,p)}{\partial\xi^2} - \frac{\partial f}{\partial u}(\bar u_0^{(\pm)}(x_p) + Q_0^{(\pm)}(\xi,p), x_p) q_\beta^{(\pm)}(\xi,p) = r_\beta^{(\pm)}(\xi,\varepsilon),$$
$$q_\beta^{(\pm)}(0,\varepsilon) + \gamma = 0,$$
$$q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty,\varepsilon) = 0,$$

где $r_\beta(\xi,\varepsilon) = \gamma(\partial f(\bar u_0^{(\pm)}(x_p) + Q_0^{(\pm)}(\xi,p), x_p)/\partial u - \partial f(\varphi^{(\pm)}(x_p), x_p)/\partial u)$.

Нижнее решение $\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Прямая подстановка показывает, что

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta_{n+2}}{\partial x^2} - f(\beta_{n+2},x) - \varepsilon f_1(\beta_{n+2},x) = -\varepsilon^{n+2}\gamma\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}(x),x) + O(\varepsilon^{n+3}).$$

Таким образом, в силу условия 3 при достаточно малых ε последнее выражение отрицательно. Неравенства (14), в свою очередь, выполняются за счёт аналогичной модификации пограничных функций $R^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)$.

Рассмотрим разность верхнего и нижнего решений

$$\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon) - \alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon) \geqslant 2\delta\varepsilon^{n+1}(C_0e^{-k_0|\xi|} - \varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|}) + 2\gamma\varepsilon^{n+2} + O(\varepsilon^{n+3}), \qquad (15)$$

где $C_{0,1}$ и $k_{0,1}$ — некоторые положительные константы.

Заметим, что неравенство $C_0e^{-k_0|\xi|} - \varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|} > 0$ выполнено для любых ξ, если $k_1 > k_0$. В случае $k_1 < k_0$ неравенство верно для $\xi < \ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}$.

При $\xi = \ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}$ слагаемые в неравенстве равны и имеют значения $C_0e^{-k_0\ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}} = C_0(\varepsilon C_1/C_0)^{k_0/(k_0-k_1)}$. Степень при ε, равная $k_0/(k_0-k_1)$, больше единицы, так как $k_0 > k_1$. Тогда при $\xi > \ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}$ разность $C_0e^{-k_0|\xi|} - \varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|}$ отрицательна и имеет порядок не меньше $\varepsilon^{k_0/(k_0-k_1)}$. Следовательно, слагаемое $2\delta\varepsilon^{n+1}(C_0e^{-k_0|\xi|} - \varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|}) < 0$, но имеет порядок выше $O(\varepsilon^{n+2})$. В этом случае неравенство (15) достигается за счёт положительного слагаемого $2\gamma\varepsilon^{n+2}$.

Таким образом, упорядоченность решений $\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta}(\varepsilon),\varepsilon)$ и $\beta_{n+2}(x,p_\delta(\varepsilon),\varepsilon)$ доказана.

Остаётся проверить условие на скачок производной верхнего и нижнего решений:

$$\frac{\partial\beta^{(+)}_{n+2}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon) - \frac{\partial\beta^{(-)}_{n+2}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon) \leqslant 0, \quad \frac{\partial\alpha^{(+)}_{n+2}}{\partial x}(x_p,p_{-\delta},\varepsilon) - \frac{\partial\alpha^{(-)}_{n+2}}{\partial x}(x_p,p_{-\delta},\varepsilon) \geqslant 0.$$

Легко видеть, что

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta^{(+)}_{n+2}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon) - \frac{\partial\beta^{(-)}_{n+2}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon)\right) =$$
$$= \varepsilon^{n+2}\frac{1}{v_0(p_0)}\left(\delta\,\frac{dK(p_0)}{dp} - \gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\tilde f_u - \bar f_u)v^{(\pm)}(\xi,p_0)d\xi\right) + O(\varepsilon^{n+3}),$$

где $\tilde f_u = \partial f(\varphi^{(\pm)}(x_p) + Q_0^{(\pm)}(\xi,p_0), x_p)/\partial u$, $\bar f_u = \partial f(\varphi^{(\pm)}(x_p), x_p)/\partial u$.

В силу условия 5 выбором достаточно большого значения $\delta > 0$ обеспечивается необходимый знак скачка производной.

Аналогичным образом проверяются неравенства для нижнего решения $\alpha_{n+2}(x,p,\varepsilon)$.

Таким образом, из сформулированного ранее утверждения следует существование решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), причём $\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon) \geqslant u(x,\varepsilon) \geqslant \alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)$. Кроме того, из (15) получаем, что $\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon) - \alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, откуда вытекает оценка, сформулированная в теореме 1.

5. Асимптотическая устойчивость решения. Рассмотрим нестационарную задачу

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)=f(v,x)+\varepsilon f_1(v,x),\quad -1<x<1,\quad 0<t<\infty,$$

$$f_1(v,x):=\begin{cases}f_1^{(+)}(v,x), & u\in I_v, \quad x_p<x\leqslant 1;\\ f_1^{(-)}(v,x), & u\in I_v, \quad -1\leqslant x<x_p,\end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad 0<t<\infty,$$

$$v(x,0,\varepsilon)=v^0(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1]. \tag{16}$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$, где $u(x,\varepsilon)$ — решение задачи (1), то задача (16) имеет стационарное решение $v=u(x,\varepsilon)$.

Для доказательства асимптотической устойчивости по Ляпунову решения $u(x,\varepsilon)$ как решения задачи (16) используем метод сжимающих барьеров [18]. Будем искать нижнее и верхнее решения в виде

$$\alpha(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_{n+2}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)),$$

$$\beta(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_{n+2}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)).$$

Легко видеть, что $\alpha(x,t,\varepsilon)<\beta(x,t,\varepsilon)$, поэтому остаётся проверить выполнение неравенств $N_\varepsilon\beta<0$ и $N_\varepsilon\alpha>0$. Для $N_\varepsilon\beta$ получаем

$$N_\varepsilon\beta=e^{-\lambda(\varepsilon)t}\Bigg[\Bigg(\varepsilon^2\Bigg(-\frac{\partial\beta_{n+2}}{\partial t}+\frac{\partial^2\beta_{n+2}}{\partial x^2}\Bigg)-f(\beta_{n+2},x)-\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)\Bigg)+$$
$$+\varepsilon^2\Bigg(-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg)-f(u,x)-\varepsilon f_1(u,x)+f(\beta_{n+2},x)+\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)-$$
$$-f(u,x)-\varepsilon f_1(u,x)-(f_u^*+\varepsilon f_{1u}^*)(\beta_{n+2}-u)+\varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\beta_{n+2}-u)\Bigg],$$

где символ $*$ означает, что значение функции берётся при аргументе

$$u(x,t,\varepsilon)+\theta e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_{n+2}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)),\quad 0<\theta<1.$$

Используя доказанные ранее оценки, а также учитывая, что $f(\beta_{n+2},x)+\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)-$ $-f(u,x)-\varepsilon f_1(u,x)-(f_u^*+\varepsilon f_{1u}^*)(\beta_{n+2}-u)=O(\varepsilon^{2n+2})$, получаем

$$N_\varepsilon\beta=e^{-\lambda(\varepsilon)t}\Bigg(-\gamma\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}(x),x)\varepsilon^{n+2}+O(\varepsilon^{n+3})+O(\varepsilon^{2n+2})+\varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\beta_{n+2}-u)\Bigg).$$

Выбирая $\gamma>0$ достаточно большим, а $\lambda>0$ произвольной постоянной, получаем $N_\varepsilon\beta<0$ при $n\geqslant 0$. Аналогично можно показать, что $N_\varepsilon\alpha>0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия (1)–(5), то при достаточно малом ε стационарное решение $v=u(x,\varepsilon)$ задачи (16) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $\big[\alpha_2,\beta_2\big]$ и, следовательно, $u(x,\varepsilon)$ — единственное решение задачи (1) в указанной области.*

Для каждого корня p_i уравнения (11), удовлетворяющего условию 5, справедливы теоремы 1 и 2, обеспечивающие существование локально единственного асимптотически устойчивого по Ляпунову решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1) с уровнем перехода $p(0)=p_i$. Можно показать, как это было сделано в работе [30], что каждому корню p_i уравнения (11), удовлетворяющему неравенству $dK_1(p_0)/dp>0$, отвечает неустойчивое решение задачи (1) с уровнем перехода $p(0)=p_i$.

Таким образом, внутренний переходный слой в ε-окрестности точки x_p имеет структуру, которая полностью определяется расположением корней уравнения (11).

6. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(u^2-1)+\varepsilon f_1(u,x), \quad -1<x<1,$$
$$f_1(u,x) := \begin{cases} f_1^{(+)}, & u\in I_u, \quad x_p<x\leqslant 1; \\ f_1^{(-)}, & u\in I_u, \quad -1<x\leqslant x_p, \end{cases}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где $f_1^{(\pm)}=\mathrm{const}$.

Очевидно, что условие 1 выполнено. Кроме того, выполнено и условие 2, где

$$\varphi^{(\pm)}(x)=\pm 1, \quad \varphi^0(x)=0.$$

Легко проверить, что выполняется и условие 3.

Остановимся подробнее на проверке условий 4 и 5. В рамках поставленной задачи $K_1(p)$ определяется как

$$K_1(p) = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}}\left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p)+f_1^{(+)}(u,x_p)\right]du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}}\left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p)+f_1^{(-)}(u,x_p)\right]du =$$
$$= -\int\limits_p^1 f_1^{(+)}du + \int\limits_p^{-1} f_1^{(-)}du = -(1-p)f_1^{(+)} + (-1-p)f_1^{(-)},$$

откуда имеем $p_0=(f_1^{(+)}+f_1^{(-)})/(f_1^{(+)}-f_1^{(-)})$.

Легко видеть, что

$$\left.\frac{dK_1(p)}{dp}\right|_{p=p_0} = f_1^{(+)}-f_1^{(-)}<0.$$

Учитывая, что $p_0\in(-1,1)$, получаем следующие ограничения на $f_1^{(\pm)}$: $f_1^{(+)}<0$, $f_1^{(-)}>$ >0. При таких $f_1^{(\pm)}$ задача удовлетворяет условиям 4 и 5. Например, при $f_1^{(+)}=-1$ и $f_1^{(-)}=0.5$ уровень перехода $p_0=1/3$. Следовательно, существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (17), для которого справедлива оценка

$$|u(x,\varepsilon)-U_0(x,\varepsilon)|<O(\varepsilon).$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(u^2-1)+\varepsilon f_1(u,x), \quad -1<x<1,$$
$$f_1(u,x) := \begin{cases} -7.5u^2+5u, & u\in I_u, \quad 0<x\leqslant 1; \\ 0.15, & u\in I_u, \quad -1\leqslant x<0, \end{cases}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon)=0. \tag{18}$$

Все условия, сформулированные ранее, для поставленной задачи выполнены. Выражение для $K_1(p)$ принимает следующий вид:

$$K_1(p) = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}} \left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p) + f_1^{(+)}(u,x_p)\right]du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}} \left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p) + f_1^{(-)}(u,x_p)\right]du =$$

$$= -\int\limits_p^{1} f_1^{(+)}(u)du + \int\limits_p^{-1} f_1^{(-)}(u)du = -2.5p^3 + 2.5p^2 - 0.15p - 0.15 = 0.$$

На сегменте $[-1,1]$ уравнение имеет три корня, наибольший и наименьший из которых отвечают устойчивым решениям задачи (18) (рис. 1). Можно показать, что третий корень, находящийся между ними, соответствует неустойчивому решению задачи (18).

На рис. 2 показано поведение решения нестационарной задачи для различных начальных значений. Видно, что фронт движется к устойчивым решениям стационарной задачи.

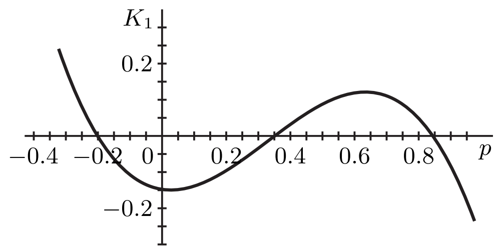


Рис. 1. Зависимость K_1 от p.

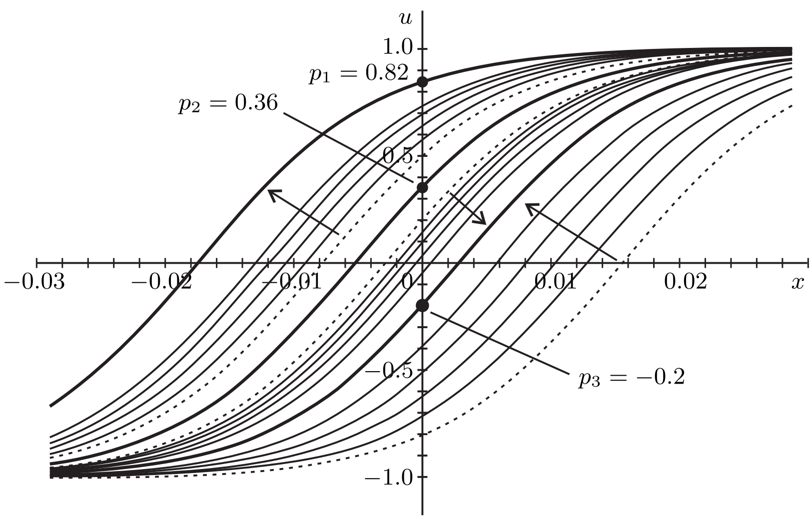


Рис. 2. Численное решение задачи (18): штриховые линии — начальные положения, жирные сплошные — решения стационарной задачи; тонкие сплошные — решения задачи для различных значений t, взятых с постоянным шагом. $x_p = 0$, $\varepsilon = 0.01$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоволновые процессы в системах с диффузией / Под ред. М.Т. Греховой и др. Горький, 1981.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундам. и прикл. математика. 1998. Т. 4. С. 799–851.
3. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
4. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445–466.
5. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. Inst. Radio Engrs. 1962. V. 50. P. 2061–2070.
6. *McKean H.P.* Nagumo's equation // Adv. Math. 1970. V. 4. P. 209–223.
7. *Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С.* Эффект Ганна. М., 1975.
8. *Orlov A.O., Levashova N.T., Burbaev T.M.* The use of asymptotic methods for modelling of the carriers wave functions in the si/sige heterostructures with quantum-confined layers // J. of Phys.: Conf. Ser. 2015. V. 586. Art. 012003.
9. *Белянин М.П., Васильева А.Б.* О внутреннем переходном слое в одной задаче теории полупроводниковых плёнок // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 2. С. 224–236.
10. *Белянин М.П., Васильева А.Б., Воронов А.В., Тихонравов А.В.* Об асимптотическом подходе к задаче синтеза полупроводникового прибора // Мат. моделирование. 1989. Т. 1. № 9. С. 43–63.
11. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // Rus. J. of Math. Phys. 2015. V. 22. P. 215–226.
12. *Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2013. V. 405. P. 90–103.
13. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 708–722.
14. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Existence of contrast structures in a problem with discontinuous reaction and advection // Rus. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 2. P. 214–224.
15. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Contrast structures in the reaction–diffusion–advection problem in the case of a weak reaction discontinuity // Rus. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 1. P. 81–90.
16. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция–адвекция–диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
17. *Nefedov N., Sakamoto K.* Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction–diffusion equations with balanced nonlinearity // Hiroshima Math. J. 2003. V. 33. № 3. P. 391–432.
18. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция–диффузия // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 4. С. 615–623.
19. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
20. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–723.
21. *Nefedov N.N.* Comparison principle for reaction–diffusion–advection problems with boundary and internal layers // Lect. Not. in Computer Sci. 2013. V. 8236. P. 62–72.
22. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Стационарное уравнение реакция–диффузия с разрывным реактивным членом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 5. С. 854–866.
23. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция–диффузия с разрывным реактивным членом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 4. С. 611–620.
24. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А.* Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция–диффузия–адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 207. № 2. С. 293–309.

25. *Levashova N., Nefedov N., Nikolaeva O. et al.* The solution with internal transition layer of the reaction–diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Math. Methods in the Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9203–9217.
26. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция–диффузия с источником модульно-кубичного типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
27. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York; London, 1993.
28. *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Сер. мат. 1998. Т. 42. № 11. С. 65–72.
29. *Лепчинский М.Г., Павленко В.Н.* Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 124–138.
30. *Никулин Е.И.* Контрастные структуры в задаче реакция–адвекция–диффузия, возникающей в дрейфо-диффузионной модели полупроводника, в случае негладкой реакции // Теор. и мат. физика. 2023. Т. 215. № 3. С. 360–376.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 05.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 76–89

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РЕШЕНИЯ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПАРЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ H^{2+2+1} ИЕРАРХИИ ВЫРОЖДЕНИЙ ИЗОМОНОДРОМНОЙ СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ

© 2024 г. В. А. Павленко

Настоящая статья продолжает серию работ, в которых построены 2×2-матричные совместные решения двух скалярных эволюционных уравнений, являющиеся аналогами временны́х уравнений Шрёдингера. В построениях данной статьи эти уравнения соответствуют гамильтоновой системе H^{2+2+1} — одной из представительниц иерархии вырождений изомонодромной системы Гарнье. Упомянутую иерархию описал Х. Кимура в 1986 году. В терминах решений линейных систем дифференциальных уравнений метода изомонодромных деформаций, условием совместности которых являются гамильтоновы уравнения системы H^{2+2+1}, конструируемые совместные матричные решения аналогов временны́х уравнений Шрёдингера в настоящей работе выписаны явно.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, уравнение Шрёдингера, уравнение Пенлеве, гамильтонова система, матричное решение.

DOI: 10.31857/S0374064124010078, EDN: RQWAAP

Введение. В работах [1, 2] Б.И. Сулейманов построил решения линейных эволюционных уравнений вида

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\left(t, x, -\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi, \tag{1}$$

линейные дифференциальные операторы $H(t,x,-\partial/\partial x)$ в которых соответствуют квадратичным по импульсам p гамильтонианам $H = H(t,q,p)$ гамильтоновых систем

$$q'_t = H'_p(t,q,p), \qquad p'_t = -H'_q(t,q,p). \tag{2}$$

Замечание 1. Системы (2) таковы, что если в них исключить p, то получится одно из шести обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Пенлеве. Классическим гамильтоновым системам ОДУ с n степенями свободы

$$(\lambda_i)'_\tau = H'_{\mu_i}, \quad (\mu_i)'_\tau = -H'_{\lambda_i}, \quad i = \overline{1,n},$$

определяемых гамильтонианами $H(\tau,\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_n)$, в волновой квантовой механике (см. [3, гл. 2, § 15, формула (29)]) сопоставляется временно́е уравнение Шрёдингера

$$\varepsilon\Psi_\tau = H\left(\tau,\zeta_1,\ldots,\zeta_n,-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta_1},\ldots,-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta_n}\right)\Psi,$$

где посредством параметра $\varepsilon = i\hbar$ учитывается его зависимость от постоянной Планка $h = 2\pi\hbar$. Уравнения (1) получаются из соответствующих временны́х уравнений Шрёдингера в результате формальной подстановки $\hbar = -i$.

В терминах решений линейных систем методы изомонодромных деформаций (ИДМ), которые выписаны в статье [4], решения уравнений (1) в работах [1, 2] представлены явно. При этом условием совместности упомянутых линейных систем являются шесть соответствующих классических ОДУ Пенлеве.

Известно, что все эти ОДУ могут быть получены из шестого уравнения при помощи процедур последовательного вырождения. Другими словами, уравнения Пенлеве представляют собой иерархию, которую можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & H^4 \arrow[dr] & & \\ H^6 \arrow[r] & H^5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & H^2 \arrow[r] & H^1. \\ & & H^3 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Здесь имеются в виду упомянутые выше гамильтоновы системы H_j $(j=\overline{1,6})$ вида (2) для соответствующих уравнений Пенлеве. Каждая стрелка соответствует процедуре вырождения одной из этих «вышестоящих» гамильтоновых систем к «нижестоящей».

Позже специфика связи решений уравнений ИДМ для уравнений Пенлеве с эволюционными уравнениями отмечалась и использовалась, в частности, в работах [5–15].

Помимо шести классических ОДУ Пенлеве в настоящий момент многие исследователи интересуются и другими нелинейными дифференциальными уравнениями более высокого порядка, которые также интегрируются ИДМ. На сегодня, в частности, известен (см. [16–20]) конечный список совместных пар гамильтоновых систем

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{q_j}, \quad k,j=1,2, \tag{3}$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2)$, каждая из которых является условием совместности трёх линейных систем дифференциальных уравнений вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k}V, \tag{4}$$

$$V'_\eta = AV, \tag{5}$$

где квадратные матрицы L_{s_k} и A (матрица A одна и та же для обеих гамильтоновых систем (3)) одинаковой размерности рациональны по переменной η. Соответствующие решения дифференциальных уравнений, являющихся условием совместности таких пар, называются *изомонодромными.* К их числу относятся решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Х. Кимуры [16] (позднее Х. Кавамуко (см. [20]) дополнил этот список).

В работах [16, 17] гамильтоновы системы иерархии Кимуры представлены в виде следующей диаграммы вырождений:

$$\begin{tikzcd} & & H^{2+2+1} \arrow[r] \arrow[dr] & H^{3+2} \arrow[dr] & & \\ H^{1+1+1+1+1} \arrow[r] & H^{2+1+1+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H^5 \arrow[r] & H^{9/2}. \\ & & H^{3+1+1} \arrow[r] \arrow[ur] & H^{4+1} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Замечание 2. Поясним верхний индекс гамильтоновых систем иерархии Кимуры. Обозначение $H^{r_1+r_2+\ldots+r_m}$ показывает, что в соответствующем линейном уравнении (5) имеется m особых точек с рангами Пуанкаре r_1-1, r_2-1, $\ldots$, r_m-1 соответственно.

Замечание 3. Как сами уравнения Пенлеве, так и их высшие аналоги могут быть представлены через гамильтоновы системы с разными гамильтонианами (см. монографию [21, гл. 2, раздел 2.8], а также работу [22]).

Известно, что для всех представителей иерархии Кимуры справедливы две эквивалентные формы: форма совместных пар гамильтоновых систем (3), определяемых квадратичными по импульсам p_1, p_2 и рациональными по координатам q_1, q_2 различными парами гамильтонианов $H_{s_k}(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2)$, а также форма совместных пар гамильтоновых систем (3), определяемых квадратичными по импульсам p_1, p_2 и полиномиальными по координатам q_1, q_2 различными парами гамильтонианов $H_{s_k}(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2)$. Для почти всех из этих гамильтоновых систем с двумя степенями свободы уже построены 2×2-матричные совместные решения пар аналогов уравнений Шрёдингера

$$\varepsilon\Psi_{s_k} = H_{s_k}\left(s_1,s_2,-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x},-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y},x,y\right)\Psi, \quad k=1,2, \tag{6}$$

с $\varepsilon=1$, соответствующие парам гамильтонианов $H_{s_k}(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2)$ $(k=1,2)$ этих изомонодромных систем. (При этом их построение осуществляется совершенно явно в терминах решений соответствующих изомонодромных систем.) Для эволюционных уравнений (6), определяемых низшими представителями $H^{9/2}$ и H^5 вырождений системы Гарнье, это сделано в статье [23]. Для самой системы Гарнье — первого представителя $H^{1+1+1+1+1}$ данной иерархии — соответствующие решения представлены в работе [24]. Для вырождений $H^{2+1+1+1}$ и H^{4+1} подобного рода решения выписаны в работах [25, 26]. Для ещё одного вырождения, а именно для H^{3+2}, соответствующие решения эволюционных уравнений представлены в [27].

В настоящей статье будут сконструированы $2{\times}2$-матричные решения аналогов временны́х уравнений Шрёдингера с $\varepsilon=1$, которые соответствуют гамильтоновой системе H^{2+2+1}. Эти решения будут представлены в двух формах: в рациональной и в полиномиальной. Другими словами, мы построим решения уравнений вида

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau_j}=H^{2+2+1}_{\tau_j}\biggl(\tau_1,\tau_2,x,y,-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y}\biggr)\Psi,\quad j=1,2. \tag{7}$$

В (7) дифференциальные операторы $H^{2+2+1}_{\tau_j}(\tau_1,\tau_2,x,y,-\partial/\partial x,-\partial/\partial y)$ соответствуют гамильтонианам с рациональными координатами. Затем будут выписаны решения уравнений вида

$$\Psi_{s_k}=H^{2+2+1}_{s_k}\biggl(s_1,s_2,-\frac{\partial}{\partial r},-\frac{\partial}{\partial\rho},r,\rho\biggr)\Phi,\quad k=1,2, \tag{8}$$

где дифференциальные операторы $H^{2+2+1}_{s_k}(s_1,s_2,-\partial/\partial r,-\partial/\partial\rho,r,\rho)$ соответствуют гамильтонианам с полиномиальными координатами. Соответствующие решения (7), (8) явным образом будут выражены через совместные решения матричных линейных пар ИДМ (4), (5) из статьи [17], условием совместности которых являются гамильтоновы дифференциальные уравнения (3), соответствующие гамильтонианам системы H^{2+2+1}.

Отметим, что решения уравнений типа временны́х уравнений Шрёдингера, которые конструируются в данной статье, и те, которые были построены в ряде из упомянутых выше работ, представляют собой своеобразные специальные функции нового типа: несмотря на то, что они не могут быть выписаны в терминах интегралов типа Фурье–Лапласа, задача описания связи их поведения при

$$|s_1|+|s_2|+|x|+|y|\to\infty$$

в различных направлениях решается вполне эффективно даже для комплексных s_1, s_2, x, y. Более подробное описание этого можно найти в [28, разд. 2.3].

1. Различные формы системы H^{2+2+1} и уравнения ИДМ для этой системы. В статье [16] гамильтонова система H^{2+2+1} выписана в двух формах. В первой форме соответствующие гамильтонианы рациональны по координатам. Упомянутая система в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial\tau_j}=\frac{\partial H_j}{\partial\mu_k},\quad \frac{\partial\mu_k}{\partial\tau_j}=-\frac{\partial H_j}{\partial\lambda_k},\quad j,k=1,2, \tag{9}$$

где гамильтонианы $H_i(\tau_1,\tau_2,\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)$ задаются формулами

$$\begin{aligned}\tau_1H_1={}&-\frac{\lambda_1^2(\lambda_1-1)^2(\lambda_2-1)}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1^2+\frac{\lambda_2^2(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_2^2+\\&+\frac{\lambda_1^2(\lambda_1-1)^2(\lambda_2-1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0}{\lambda_1}-\frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_1^2}+\frac{\kappa_1-1}{\lambda_1-1}-\frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_1-1)^2}\right)\mu_1-\\&-\frac{\lambda_2^2(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0}{\lambda_2}-\frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_2^2}+\frac{\kappa_1-1}{\lambda_2-1}-\frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_2-1)^2}\right)\mu_2-\kappa(\lambda_1-1)(\lambda_2-1),\end{aligned} \tag{10}$$

$$H_2 = -\frac{\lambda_1^2\lambda_2(\lambda_1-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_1^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\mu_2^2 +$$
$$+\frac{\lambda_1^2\lambda_2(\lambda_1-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0-1}{\lambda_1} - \frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_1^2} + \frac{\kappa_1}{\lambda_1-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_1-1)^2}\right)\mu_1 -$$
$$-\frac{\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_2-1)^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\kappa_0-1}{\lambda_2} - \frac{\gamma_1\tau_2}{\lambda_2^2} + \frac{\kappa_1}{\lambda_2-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(\lambda_2-1)^2}\right)\mu_2 - \kappa\lambda_1\lambda_2. \tag{11}$$

Во второй форме соответствующие гамильтонианы полиномиальны по координатам. Система H^{2+2+1} в этой форме имеет вид

$$\frac{\partial q_k}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_k}, \quad j,k=1,2,$$

соответствующие гамильтонианы $H_i(s_1,s_2,q_1,q_2,p_1,p_2)$ в этом случае задаются формулами

$$s_1^2H_1 = q_1^2(q_1-s_1)p_1^2 + 2q_1^2q_2p_1p_2 + q_1q_2^2p_2^2 -$$
$$-((\kappa_0-1)q_1^2 + \kappa_1q_1(q_1-s_1) + \gamma_2(q_1-s_1) + \gamma_2s_1q_2)p_1 -$$
$$-((\kappa_0+\kappa_1-1)q_1q_2 + \gamma_1s_2q_1 + \gamma_2q_2)p_2 + \kappa q_1, \tag{12}$$

$$-s_2H_2 = q_1^2q_2p_1^2 + 2q_1q_2^2p_1p_2 + q_2^2(q_2-1)p_2^2 - ((\kappa_0+\kappa_1-1)q_1q_2 + \gamma_1s_2q_1 + \gamma_2q_2)p_1 -$$
$$-\left((\kappa_0-1)q_2(q_2-1) + \kappa_1q_2^2 + \frac{\gamma_1s_2}{s_1}q_1 + \gamma_1s_2(q_2-1)\right)p_2 + \kappa q_2. \tag{13}$$

Известно [16] следующее симплектическое преобразование, связывающее упомянутые выше две формы:

$$q_1 = \frac{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}{\tau_1}, \quad q_2 = \lambda_1\lambda_2, \quad s_1 = \frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = -\tau_2. \tag{14}$$

Ещё одна форма гамильтоновой системы H^{2+2+1}

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t_j} = \frac{\partial K_j}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial t_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial Q_k}, \quad j,k=1,2, \tag{15}$$

приведена в статье [17]. Её гамильтонианы также полиномиальны по координатам Q_1, Q_2 и имеют вид

$$t_1K_1 = P_1^2Q_1(Q_1-1)^2 + [(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1) + (\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1) + t_1Q_1]P_1 - \theta^1\theta_2^\infty(Q_1-1) +$$
$$+(P_1Q_1^2 - \theta^1Q_1 - P_1)P_2Q_2 + P_1Q_2 - \frac{t_2}{t_1}(P_1Q_1 - P_1 - \theta^1)(P_2Q_1 - P_2 + 1), \tag{16}$$

$$t_2K_2 = P_2^2Q_2^2 - P_2Q_2^2 - \theta^0P_2Q_2 + t_2P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1Q_1Q_2 +$$
$$+\frac{t_2}{t_1}(P_1Q_1 - P_1 - \theta^1)(P_2Q_1 - P_2 + 1), \tag{17}$$

где постоянные θ^0, θ^1, θ_1^∞, θ_2^∞ удовлетворяют условию Фукса–Хукухары

$$\theta^0 + \theta^1 + \theta_1^\infty + \theta_2^\infty = 0.$$

В статье [17] также отмечено, что на решениях уравнений (15) с гамильтонианами (16), (17) совместна следующая система линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} = \left(\frac{A_0^{(-1)}}{\eta^2} + \frac{A_0^{(0)}}{\eta} + \frac{A_1^{(0)}}{\eta-1} + A_\infty\right)Y,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial t_1} = \left(E_2\eta + B_1 + \frac{A_0^{(-1)}}{t_1\eta}\right)Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial t_2} = -\frac{A_0^{(-1)}}{t_2\eta}Y \tag{18}$$

с матричными коэффициентами

$$A_0^{(-1)} = \frac{t_2}{t_1}\begin{pmatrix} 1-P_2 & uP_2 \\ (1-P_2)/u & P_2 \end{pmatrix},$$

$$A_0^{(0)} = \begin{pmatrix} P_1Q_1-\theta^1-\theta_1^\infty & -u(P_1Q_1+P_2Q_2+\theta_2^\infty) \\ (P_1Q_1+(1-P_2)Q_2-\theta^1-\theta_1^\infty)/u & -P_1Q_1-\theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(0)} = \begin{pmatrix} -P_1Q_1+\theta^1 & uP_1 \\ (\theta^1Q_1-P_1Q_1^2)/u & P_1Q_1 \end{pmatrix},$$

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \frac{1}{t_1}\begin{pmatrix} 0 & (A_0^{(0)})_{12}+(A_1^{(0)})_{12} \\ (A_0^{(0)})_{21}+(A_1^{(0)})_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

зависящими также от совместного решения следующих линейных дифференциальных уравнений:

$$t_1u_{t_1} = u(\theta^1(1-Q_1)+P_1(1-Q_1)^2+\theta_1^\infty-\theta_2^\infty), \quad t_2u_{t_2} = -uQ_2.$$

Замечание 4. В первом уравнении системы (18) три особые точки: $\eta=0$, $\eta=\infty$ с рангами Пуанкаре, равными единице, и $\eta=1$ с рангом Пуанкаре, равным нулю. Поэтому, согласно замечанию 2, данная гамильтонова система обозначается H^{2+2+1}.

Легко видеть, что замена

$$Y = \exp\left\{\frac{\eta t_1}{2} - \frac{t_2}{2\eta t_1} + \frac{\theta^0}{2}\ln|\eta| + \frac{\theta^1}{2}\ln|\eta-1|\right\}Z$$

совместные системы ИДМ (18) переводит в эквивалентные им совместные системы

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \left(\frac{B_0^{(-1)}}{\eta^2} + \frac{B_0^{(0)}}{\eta} + \frac{B_1^{(0)}}{\eta-1} + B_\infty\right)Z,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \left(F_2\eta + B_1 + \frac{B_0^{(-1)}}{t_1\eta}\right)Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_2} = -\frac{B_0^{(-1)}}{t_2\eta}Z \tag{19}$$

с матричными коэффициентами

$$B_0^{(-1)} = \frac{t_2}{t_1}\begin{pmatrix} 0.5-P_2 & uP_2 \\ (1-P_2)/u & P_2-0.5 \end{pmatrix},$$

$$B_0^{(0)} = \begin{pmatrix} P_1Q_1+0.5\theta^0+\theta_2^\infty & -u(P_1Q_1+P_2Q_2+\theta_2^\infty) \\ (P_1Q_1+(1-P_2)Q_2-\theta^1-\theta_1^\infty)/u & -P_1Q_1-0.5\theta^0-\theta_2^\infty \end{pmatrix},$$

$$B_1^{(0)} = \begin{pmatrix} -P_1Q_1+0.5\theta^1 & uP_1 \\ (\theta^1Q_1-P_1Q_1^2)/u & P_1Q_1-0.5\theta^1 \end{pmatrix},$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} -t_1/2 & 0 \\ 0 & t_1/2 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

которые имеют нулевой след. После замен в (19) по формулам $\tau_1 = t_1$, $\tau_2 = t_2/t_1$ получим совместную систему

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \left(\frac{B_0^{(-1)}}{\eta^2} + \frac{B_0^{(0)}}{\eta} + \frac{B_1^{(0)}}{\eta - 1} + B_\infty\right)Z,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \tau_1} = (F_2\eta + B_1)Z, \quad \tau_2\frac{\partial Z}{\partial \tau_2} = -\frac{B_0^{(-1)}}{\eta}Z \tag{20}$$

с матричными коэффициентами

$$B_0^{(-1)} = \tau_2\begin{pmatrix} 0.5 - P_2 & uP_2 \\ (1-P_2)/u & P_2 - 0.5\end{pmatrix}, \quad B_\infty = \begin{pmatrix} -\tau_1/2 & 0 \\ 0 & \tau_1/2\end{pmatrix},$$
$$B_1 = \frac{1}{\tau_1}\begin{pmatrix} 0 & (A_0^{(0)})_{12} + (A_1^{(0)})_{12} \\ (A_0^{(0)})_{21} + (A_1^{(0)})_{21} & 0\end{pmatrix}.$$

Соответствующие гамильтонианы перепишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\tau_1 K_1 = P_1^2 Q_1(Q_1-1)^2 + [(\theta^1 + \theta_1^\infty)(Q_1 - 1) + \\ + (\theta_2^\infty - \theta^1)Q_1(Q_1-1) + \tau_1 Q_1]P_1 - \theta^1\theta_2^\infty(Q_1 - 1) + \\ + (P_1Q_1^2 - \theta^1 Q_1 - P_1)P_2Q_2 + P_1Q_2 + P_2^2Q_2^2 - P_2Q_2^2 - \theta^0 P_2 Q_2 + \\ + \tau_1\tau_2 P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1Q_1Q_2 = \tau_1 H_V(\theta^0 + \theta_2^\infty, \theta^0 + \theta_1^\infty, \theta^1, \tau_1, P_1, Q_1) + \\ + (P_1Q_1^2 - \theta^1 Q_1 - P_1)P_2Q_2 + P_1Q_2 + P_2^2Q_2^2 - P_2Q_2^2 - \theta^0 P_2 Q_2 + \\ + \tau_1\tau_2 P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1Q_1Q_2, \\ \tau_2 K_2 = P_2^2Q_2^2 - P_2Q_2^2 - \theta^0 P_2Q_2 + \tau_1\tau_2P_2 - \theta_2^\infty Q_2 - P_1Q_1Q_2,\end{gathered}$$

где гамильтониан

$$H_V(\theta^0 + \theta_2^\infty, \theta^0 + \theta_1^\infty, \theta^1, \tau_1, P_1, Q_1) =$$
$$= \frac{1}{\tau_1}\big(P_1^2Q_1(Q_1-1)^2 + \big[(\theta^1 + \theta_1^\infty)(Q_1-1) + (\theta_2^\infty - \theta^1)Q_1(Q_1-1) + \tau_1Q_1\big]P_1 - \theta^1\theta_2^\infty(Q_1-1)\big)$$

определяет гамильтонову систему с одной степенью свободы и независимой переменной τ_1, исключение из которой импульса P_1 даёт пятое уравнение Пенлеве на координату Q_1 (см. [17, с. 25, формула (3.16)]). Этот гамильтониан выписан в работе К. Окамото [29] в следующем виде:

$$H_V(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \eta_1, \tau_1, P_1, Q_1) =$$
$$= \frac{1}{\tau_1}\big(Q_1(Q_1-1)^2P_1^2 - \big[\kappa_0(Q_1-1)^2 + \kappa_1 Q_1(Q_1-1) - \eta_1\tau_1Q_1\big]P_1 + \frac{1}{4}\big[(\kappa_0+\kappa_1)^2 - \kappa_\infty\big](Q_1-1)\big).$$

Очевидно, что

$$H_V(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \eta_1, \tau_1, P_1, Q_1) = \frac{1}{\tau_1}\bigg(Q_1(Q_1-1)^2P_1^2 -$$
$$-\big[(\kappa_0+\kappa_1)Q_1(Q_1-1) - \kappa_0(Q_1-1) - \eta_1\tau_1Q_1\big]P_1 + \frac{1}{4}\big[(\kappa_0+\kappa_1)^2 - \kappa_\infty\big](Q_1-1)\bigg).$$

Тогда связь констант гамильтонианов H_V из работы [17] и работы [29] следующая:

$$\kappa_0 + \kappa_1 = \theta^1 - \theta_2^\infty, \quad \kappa_1 = -\theta^1 - \theta_1^\infty, \quad \eta_1 = 1, \quad \frac{1}{4}[\kappa_\infty - (\kappa_0+\kappa_1)^2] = \theta^1\theta_2^\infty.$$

Сама пара соответствующих гамильтоновых систем при этом принимает вид

$$\tau_1\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_1}:=\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial P_1}=2P_1Q_1(Q_1-1)^2+(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+$$
$$+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1+P_2Q_1^2Q_2-P_2Q_2+Q_2-Q_1Q_2,$$
$$\tau_1\frac{\partial Q_2}{\partial\tau_1}:=\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial P_2}=Q_2(P_1Q_1^2-\theta^1Q_1-P_1-\theta^0)+2P_2Q_2^2-Q_2^2+\tau_1\tau_2,$$
$$\tau_1\frac{\partial P_1}{\partial\tau_1}:=-\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial Q_1}=-P_1^2(Q_1-1)^2-2P_1^2Q_1(Q_1-1)-\tau_1P_1-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+$$
$$+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1(2Q_1-1)+\theta^1\theta_2^\infty+P_2Q_2(\theta^1-2P_1Q_1)+P_1Q_2,$$
$$\tau_1\frac{\partial P_2}{\partial\tau_1}:=-\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial Q_2}=-P_1-P_2(P_1Q_1^2-\theta^1Q_1-P_1+2P_2Q_2-2Q_2-\theta^0)+P_1Q_1+\theta_2^\infty; \qquad (21)$$
$$\tau_2\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_2}:=\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial P_1}=-Q_1Q_2+\tau_2(Q_1-1)(P_2Q_1-P_2+1),$$
$$\tau_2\frac{\partial Q_2}{\partial\tau_2}:=\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial P_2}=2P_2Q_2^2-Q_2^2-\theta^0Q_2+\tau_1\tau_2+\tau_2(Q_1-1)(P_1Q_1-P_1-\theta_1),$$
$$\tau_2\frac{\partial P_1}{\partial\tau_2}:=-\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial Q_1}=P_1Q_2-\tau_2P_2(P_1Q_1-P_1-\theta^1)-\tau_2P_1(P_2Q_1-P_2+1),$$
$$\tau_2\frac{\partial P_2}{\partial\tau_2}:=-\tau_2\frac{\partial K_2}{\partial Q_2}=-2P_2^2Q_2+2P_2Q_2+\theta^0P_2+P_1Q_1+\theta_2^\infty. \qquad (22)$$

Рассмотрим совместные решения пары гамильновых систем (21), (22), которые аналитичны на прямой $\tau_2=0$. На таких решениях при $\tau_2=0$ система (22) сводится к следующим равенствам:

$$Q_1Q_2=0,\quad Q_2(2P_2Q_2-Q_2-\theta^0)=0,$$
$$P_1Q_2=0,\quad -2P_2^2Q_2+2P_2Q_2+\theta^0P_2+P_1Q_1+\theta_2^\infty=0. \qquad (23)$$

Пусть $Q_2\neq0$. Тогда из (23) следует, что

$$Q_1=0,\quad 2P_2Q_2=Q_2+\theta^0,\quad P_1=0,\quad -2P_2^2Q_2+2P_2Q_2+\theta^0P_2+\theta_2^\infty=0. \qquad (24)$$

Подстановка второго соотношения из (24) в четвёртое даёт

$$P_2Q_2=-\theta_2^\infty. \qquad (25)$$

Подставим теперь равенства (24), (25) и $\tau_2=0$ в систему (21) и получим

$$Q_2=\theta^1+\theta_1^\infty-\theta_2^\infty,\quad \frac{\partial P_2}{\partial\tau_1}=0.$$

Таким образом, предположение о том, что первое из равенств (24) выполнено при $Q_2\neq0$ влечёт за собой вывод о том, что $P_1=Q_1=0$, а константы P_2 и Q_2 имеют вид

$$Q_2=\theta^1+\theta_1^\infty-\theta_2^\infty,\quad P_2=\frac{\theta_2^\infty}{\theta_2^\infty-\theta^1-\theta_1^\infty}.$$

Но если положить $Q_2=0$, то

$$\tau_1K_1=\tau_1H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)=$$
$$=P_1^2Q_1(Q_1-1)^2+[(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1]P_1-\theta^1\theta_2^\infty(Q_1-1),$$

где, как уже отмечалось выше, $H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)$ есть гамильтониан пятого уравнения Пенлеве: компоненты P_1, Q_1 удовлетворяют следующей гамильтоновой системе:

$$\begin{gathered}\tau_1\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_1}=\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial P_1}=\tau_1\frac{\partial H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)}{\partial P_1}=\\ =2P_1Q_1(Q_1-1)^2+(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1,\\ \tau_1\frac{\partial P_1}{\partial\tau_1}=-\tau_1\frac{\partial K_1}{\partial Q_1}=-\tau_1\frac{\partial H_V(\theta^0+\theta_2^\infty,\theta^0+\theta_1^\infty,\theta^1,\tau_1,P_1,Q_1)}{\partial Q_1}=\\ =-P_1^2(Q_1-1)^2-2P_1^2Q_1(Q_1-1)-\tau_1P_1-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1(2Q_1-1)+\theta^1\theta_2^\infty,\end{gathered}\tag{26}$$

в которой, если исключить импульс P_1, получим, что Q_1 удовлетворяет пятому уравнению Пенлеве. Действительно, из первого равенства системы (26) следует, что

$$P_1=\frac{\tau_1}{2Q_1(Q_1-1)^2}\frac{\partial Q_1}{\partial\tau_1}-\frac{\theta^1+\theta_1^\infty}{2Q_1(Q_1-1)}+\frac{\theta^1-\theta_2^\infty}{2(Q_1-1)}-\frac{\tau_1}{2(Q_1-1)^2}.\tag{27}$$

Подставив (27) во второе равенство системы (26), видим, что Q_1 есть решение пятого уравнения Пенлеве вида

$$\begin{gathered}(Q_1)_{\tau_1\tau_1}=\left(\frac{1}{2Q_1}+\frac{1}{Q_1-1}\right)(Q_1)_{\tau_1}^2-\frac{(Q_1)_{\tau_1}}{\tau_1}+\\ +\frac{(Q_1-1)^2}{2\tau_1^2}\left((\theta^1+\theta_2^\infty)^2Q_1-\frac{(\theta^1+\theta_1^\infty)^2}{Q_1}\right)-\frac{(\theta_1^\infty+\theta_2^\infty+1)Q_1}{\tau_1}-\frac{Q_1(Q_1+1)}{2(Q_1-1)}.\end{gathered}$$

При этом P_2 удовлетворяет двум непротиворечивым равенствам:

$$\theta^0P_2+\theta_2^\infty+P_1Q_1=0,\tag{28}$$

$$\tau_1\frac{\partial P_2}{\partial\tau_1}=-P_1-P_2(P_1Q_1^2-\theta^1Q_1-P_1).\tag{29}$$

Непротиворечивость здесь означает, что если выполнены (26) и (28), то выполнено и равенство (29). В самом деле, если из (28) выразить P_2 через P_1 и Q_1, то будем иметь

$$P_2=-\frac{\theta_2^\infty+P_1Q_1}{\theta^0}.\tag{30}$$

После подстановки (30) в (29) получим равенство

$$\begin{gathered}\tau_1(P_1Q_1)_{\tau_1}=\theta^0P_1+(\theta_2^\infty+P_1Q_1)(\theta^1Q_1+P_1-P_1Q_1^2)=\\ =-P_1^2Q_1^3+P_1^2Q_1+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1Q_1^2-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+\theta^1\theta_2^\infty Q_1.\end{gathered}\tag{31}$$

Покажем, что равенство (31) справедливо тождественно. Действительно, левая часть (31) имеет вид

$$\tau_1(P_1Q_1)_{\tau_1}=P_1*\tau_1(Q_1)_{\tau_1}+Q_1*\tau_1(P_1)_{\tau_1}.\tag{32}$$

Далее, в силу (26) правая часть соотношения (32) равна

$$\begin{gathered}P_1[2P_1Q_1(Q_1-1)^2+(\theta^1+\theta_1^\infty)(Q_1-1)+(\theta_2^\infty-\theta^1)Q_1(Q_1-1)+\tau_1Q_1]+\\ +Q_1[-P_1^2(Q_1-1)^2-2P_1^2Q_1(Q_1-1)-\tau_1P_1-(\theta^1+\theta_1^\infty)P_1+(\theta^1-\theta_2^\infty)P_1(2Q_1-1)+\theta^1\theta_2^\infty].\end{gathered}\tag{33}$$

Наконец, раскрыв скобки в (33), получим правую часть равенства (31).

Таким образом, на прямой $\tau_2=0$ при редукции $Q_2=0$ аналитические на этой прямой совместные решения выражаются через решения $Q_1(\tau_1)$ данного пятого уравнения Пенлеве.

В п. 2 именно матричная форма (20) уравнений ИДМ гамильтоновой системы H^{2+2+1} будет использована при построении решений соответствующих эволюционных уравнений.

Рассмотрим далее матрицы

$$U = F_2\eta + \frac{1}{\tau_1}\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где

$$a = (A_0^{(0)})_{21} + (A_1^{(0)})_{21}, \quad b = (A_0^{(0)})_{12} + (A_1^{(0)})_{12}, \quad c = P_2 - 0.5, \quad d = -uP_2, \quad e = \frac{P_2 - 1}{u}. \tag{35}$$

Условием совместности последних двух уравнений системы (20) является тождество

$$U_{\tau_2} - V_{\tau_1} + [U, V] = 0. \tag{36}$$

Справедливость (36) с учётом (34), (35) означает, что имеет место замкнутая система дифференциальных уравнений

$$\tau_1 c_{\tau_1} = eb - ad, \quad \tau_1 d_{\tau_1} = -2bc, \quad \tau_1 e_{\tau_1} = 2ac, \quad b_{\tau_2} = \tau_1 d, \quad a_{\tau_2} = -e\tau_1. \tag{37}$$

Из (35) следует, что имеет место равенство

$$c^2 + de = \frac{1}{4}. \tag{38}$$

С учётом (38) из (37) вытекает справедливость формул

$$\tau_1 a_{\tau_1\tau_2} = a_{\tau_2} - a\sqrt{\tau_1^2 + 4a_{\tau_2}b_{\tau_2}}, \quad \tau_1 b_{\tau_1\tau_2} = b_{\tau_2} - b\sqrt{\tau_1^2 + 4a_{\tau_2}b_{\tau_2}}.$$

Выполнив замену по формулам

$$a = \frac{1}{4}\tau_1 A, \quad b = \tau_1 B, \quad \tau_1 = -4T_1, \quad \tau_2 = T_2,$$

получим систему уравнений

$$A_{T_1T_2} = 4A\sqrt{1 + A_{T_2}B_{T_2}}, \quad B_{T_1T_2} = 4B\sqrt{1 + A_{T_2}B_{T_2}}. \tag{39}$$

Таким образом, гамильтонова система H^{2+2+1} эквивалентна решению системы (39), являющемуся в терминах статьи [30] *изомонодромным*. Для вещественных A и B при редукции $A = -B$ система (39) после замены $\sin u = A_{T_2}$, $4T_1 = S_1$, $T_2 = S_2$ сводится (см. [27]) к уравнению синус-Гордона $u_{S_1S_2} = \sin u$.

2. Построение решений аналогов временны́х уравнения Шрёдингера. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Существуют решения уравнений (7) с рациональными коэффициентами, которые явным образом выражаются в терминах решений системы (20).*

Доказательство. Матрица размера 2×2

$$M = Z^{-1}(\tau_1, \tau_2, \eta)Z(\tau_1, \tau_2, \zeta),$$

образованная по совместному фундаментальному решению Z линейных систем (20), удовлетворяет двум следующим скалярным эволюционным уравнениям с временами τ_1 и τ_2:

$$\tau_1 M_{\tau_1} = \frac{\zeta^2(\zeta-1)}{\zeta-\eta}M_{\zeta\zeta} - \frac{\eta^2(\eta-1)}{\zeta-\eta}M_{\eta\eta} + \\ + \frac{\zeta(\zeta^2 - 3\zeta\eta + 2\eta)}{(\zeta-\eta)^2}M_\zeta + \frac{\eta(\eta^2 - 3\zeta\eta + 2\zeta)}{(\zeta-\eta)^2}M_\eta + g_1 M, \tag{40}$$

$$\tau_2 M_{\tau_2} = \frac{\zeta^2\eta(\zeta-1)}{\zeta-\eta}M_{\zeta\zeta} - \frac{\zeta\eta^2(\eta-1)}{\zeta-\eta}M_{\eta\eta} + \frac{\zeta\eta(\zeta+\eta-2\zeta\eta)}{(\zeta-\eta)^2}(M_\zeta + M_\eta) + g_2 M. \tag{41}$$

Здесь функции $g_1(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)$ и $g_2(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)$ задаются формулами

$$g_1(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{4\zeta^2\eta^2}-\frac{\theta^0\tau_2}{2\zeta\eta}+\tau_1\tau_2(0,5-P_2)+\det(B_0^{(0)})+$$

$$+\frac{(\theta^1)^2(\zeta+\eta-\zeta\eta)}{4(\zeta-1)(\eta-1)}-2(B_0^{(0)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}-(B_0^{(0)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}-(B_0^{(0)})_{12}(B_1^{(0)})_{21}-$$

$$-\tau_1(P_1Q_1+0.5\theta^0+\theta_2^\infty)+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)(\zeta+\eta)+0.25\tau_1^2(\zeta+\eta-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta),$$

$$g_2(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta,P_1,P_2,Q_1,Q_2)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta(\zeta+\eta)-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta)}{4\zeta^2\eta^2}+\frac{\theta^0\tau_2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{2\zeta\eta}+$$

$$+\tau_1\tau_2(0.5-P_2)+\det(B_0^{(0)})+\frac{(\theta^1)^2\zeta\eta}{4(\zeta-1)(\eta-1)}+2(B_0^{(-1)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}+$$

$$+(B_0^{(-1)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}+(B_0^{(-1)})_{12}(B_1^{(0)})_{21}+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)\zeta\eta+0.25\tau_1^2\zeta\eta(1-\zeta-\eta).$$

Осуществив замену

$$M=\exp\{S(\tau_1,\tau_2)\}W,$$

где функция S удовлетворяет непротиворечивым равенствам

$$\tau_1S_{\tau_1}=\tau_1\tau_2(0,5-P_2)+\det(B_0^{(0)})-$$

$$-2(B_0^{(0)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}-(B_0^{(0)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}-(B_0^{(0)})_{12}(B_1^{(0)})_{21}-\tau_1P_1Q_1,$$

$$\tau_2S_{\tau_2}=\tau_1\tau_2(0.5-P_2)+\det(B_0^{(0)})+$$

$$+2(B_0^{(-1)})_{11}(B_1^{(0)})_{11}+(B_0^{(-1)})_{21}(B_1^{(0)})_{12}+(B_0^{(-1)})_{12}(B_1^{(0)})_{21},$$

получим, что уравнения (40), (41) сводятся к следующим двум уравнениям:

$$\tau_1W_{\tau_1}=\frac{\zeta^2(\zeta-1)}{\zeta-\eta}W_{\zeta\zeta}-\frac{\eta^2(\eta-1)}{\zeta-\eta}W_{\eta\eta}+$$

$$+\frac{\zeta(\zeta^2-3\zeta\eta+2\eta)}{(\zeta-\eta)^2}W_\zeta+\frac{\eta(\eta^2-3\zeta\eta+2\zeta)}{(\zeta-\eta)^2}W_\eta+g_3W, \tag{42}$$

$$\tau_2W_{\tau_2}=\frac{\zeta^2\eta(\zeta-1)}{\zeta-\eta}W_{\zeta\zeta}-\frac{\zeta\eta^2(\eta-1)}{\zeta-\eta}W_{\eta\eta}+\frac{\zeta\eta(\zeta+\eta-2\zeta\eta)}{(\zeta-\eta)^2}(W_\zeta+W_\eta)+g_4W. \tag{43}$$

Здесь функции $g_3(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)$ и $g_4(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)$ уже не зависят от переменных P_i, Q_i $(i=1,2)$ и имеют вид

$$g_3(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{4\zeta^2\eta^2}-\frac{\theta^0\tau_2}{2\zeta\eta}+\frac{(\theta^1)^2(\zeta+\eta-\zeta\eta)}{4(\zeta-1)(\eta-1)}-\tau_1(0.5\theta^0+\theta_2^\infty)+$$

$$+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)(\zeta+\eta)+0.25\tau_1^2(\zeta+\eta-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta),$$

$$g_4(\tau_1,\tau_2,\zeta,\eta)=\frac{\tau_2^2(\zeta\eta(\zeta+\eta)-\zeta^2-\eta^2-\zeta\eta)}{4\zeta^2\eta^2}+\frac{\theta^0\tau_2(\zeta\eta-\zeta-\eta)}{2\zeta\eta}+$$

$$+\frac{(\theta^1)^2\zeta\eta}{4(\zeta-1)(\eta-1)}+0.5\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)\zeta\eta+0.25\tau_1^2\zeta\eta(1-\zeta-\eta).$$

Далее замена переменных

$$x=\frac{\zeta}{\zeta-1},\quad y=\frac{\eta}{\eta-1}$$

сводит уравнения (42), (43) к уравнениям

$$\tau_1W_{\tau_1}=-\frac{x^2(x-1)^2(y-1)}{x-y}W_{xx}+\frac{y^2(y-1)^2(x-1)}{x-y}W_{yy}+$$
$$+\frac{x(x-1)(y-1)(x^2+xy-2y)}{(x-y)^2}W_x+\frac{y(y-1)(x-1)(y^2+xy-2x)}{(x-y)^2}W_y+g_5W, \tag{44}$$

$$\tau_2W_{\tau_2}=-\frac{x^2(x-1)^2y}{x-y}W_{xx}+\frac{y^2(y-1)^2x}{x-y}W_{yy}+$$
$$+\frac{xy(x+y)(x-1)^2}{(x-y)^2}W_x+\frac{xy(x+y)(y-1)^2}{(x-y)^2}W_y+g_6W, \tag{45}$$

где функции $g_5(\tau_1,\tau_2,x,y)$ и $g_6(\tau_1,\tau_2,x,y)$ принимают вид

$$g_5(\tau_1,\tau_2,x,y)=\frac{\tau_2^2(x+y-xy)(x-1)(y-1)}{4x^2y^2}-\frac{\theta^0\tau_2(x-1)(y-1)}{2xy}+$$
$$+0.25(\theta^1)^2(xy-x-y)-\tau_1(0.5\theta^0+\theta_2^\infty)+\frac{\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)(2xy-x-y)}{2(x-1)(y-1)}-\frac{\tau_1^2(x^2y^2-3xy+x+y)}{4(x-1)^2(y-1)^2},$$

$$g_6(\tau_1,\tau_2,x,y)=\frac{\tau_2^2(2x^2y+2xy^2-x^2y^2-xy-x^2-y^2)}{4x^2y^2}+\frac{\theta^0\tau_2(x+y-xy)}{2xy}+$$
$$+0.25(\theta^1)^2xy+\frac{\tau_1(\theta_2^\infty-\theta_1^\infty)xy}{2(x-1)(y-1)}+\frac{\tau_1^2xy(1-xy)}{4(x-1)^2(y-1)^2}.$$

Наконец, в уравнениях (44), (45) сделаем замену

$$W=e^{f_1(x,y,\tau_1,\tau_2)+f_2(\tau_1,\tau_2)}\Psi,$$

где

$$f_1(x,y,\tau_1,\tau_2)=(0.5\kappa_0-1)\ln(|xy|)+0.5\kappa_1(\ln|(x-1)(y-1)|)+\ln|x-y|+$$
$$+\frac{\gamma_1\tau_2(x+y)}{2xy}+\frac{\gamma_2\tau_1(x+y-2)}{2(x-1)(y-1)},$$

$$f_2(\tau_1,\tau_2)=\frac{((\kappa_1-2)^2-(\theta^1)^2-4)\ln\tau_1}{4}+\frac{(\kappa_0-2)^2\ln\tau_2}{4}-$$
$$-\frac{((\kappa_0-2)\gamma_2+\theta^0+2\theta_2^\infty)\tau_1}{2}+\frac{((\kappa_1-2)\gamma_1+\theta^0)\tau_2}{2}+\frac{\gamma_1\gamma_2\tau_1\tau_2}{2}.$$

Положив при этом

$$\kappa=\frac{(\kappa_0-2)^2}{4}+\frac{(\kappa_1-2)^2}{4}+\frac{\kappa_0\kappa_1}{2}-\frac{(\theta^1)^2}{4}-2,\quad \theta^0=(\kappa_0-2)\gamma_1,\quad \theta_2^\infty-\theta_1^\infty=(\kappa_1-2)\gamma_2,$$

получим следующие уравнения:

$$\tau_1\Psi_{\tau_1} = -\frac{x^2(x-1)^2(y-1)}{x-y}\Psi_{xx} + \frac{y^2(y-1)^2(x-1)}{x-y}\Psi_{yy} -$$
$$-\frac{x^2(x-1)^2(y-1)}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0}{x} - \frac{\gamma_1\tau_2}{x^2} + \frac{\kappa_1-1}{x-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(x-1)^2}\right)\Psi_x +$$
$$+\frac{(x-1)y^2(y-1)^2}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0}{y} - \frac{\gamma_1\tau_2}{y^2} + \frac{\kappa_1-1}{y-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(y-1)^2}\right)\Psi_y + g_7\Psi, \tag{46}$$

$$\tau_2\Psi_{\tau_2} = -\frac{x^2(x-1)^2y}{x-y}\Psi_{xx} + \frac{y^2(y-1)^2x}{x-y}\Psi_{yy} -$$
$$-\frac{x^2(x-1)^2y}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0-1}{x} - \frac{\gamma_1\tau_2}{x^2} + \frac{\kappa_1}{x-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(x-1)^2}\right)\Psi_x +$$
$$+\frac{xy^2(y-1)^2}{(x-y)}\left(\frac{\kappa_0-1}{y} - \frac{\gamma_1\tau_2}{y^2} + \frac{\kappa_1}{y-1} - \frac{\gamma_2\tau_1}{(y-1)^2}\right)\Psi_y + g_8\Psi, \tag{47}$$

где функции $g_7(\tau_1,\tau_2,x,y)$ и $g_8(\tau_1,\tau_2,x,y)$ имеют вид

$$g_7(\tau_1,\tau_2,x,y) = -\kappa(x-1)(y-1) + \frac{(\gamma_1^2-1)\tau_2^2(x-1)(y-1)(x+y-xy)}{4x^2y^2} +$$
$$+\frac{(\gamma_2^2-1)\tau_1^2(x^2y^2-3xy+x+y)}{4(x-1)^2(y-1)^2} + \frac{4(x-1)(y-1)xy}{(x-y)^2},$$
$$g_8(\tau_1,\tau_2,x,y) = -\kappa xy + \frac{(\gamma_1^2-1)\tau_2^2(x^2y^2+xy+x^2+y^2-2x^2y-2xy^2)}{4x^2y^2} +$$
$$+\frac{(\gamma_2^2-1)\tau_1^2xy(xy-1)}{4(x-1)^2(y-1)^2} + \frac{2xy(2xy-x-y)}{(x-y)^2}.$$

Далее, ввиду справедливости коммутационных соотношений Гейзенберга

$$\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}y - y\frac{\partial}{\partial y} = 1,$$

уравнения (46), (47) символически записываются в виде уравнений (7), определяемых гамильтонианами (10), (11) с рациональными коэффициентами гамильтоновой системы (9). Тем самым основная теорема о построении решений аналогов временны́х уравнений Шрёдингера доказана.

Справедливо также следующее

Следствие. *Существуют решения уравнений (8) с полиномиальными коэффициентами, которые явным образом выражаются в терминах решений системы (20).*

Доказательство. Легко проверить, что квантовый аналог замены (14)

$$r = \frac{(x-1)(y-1)}{\tau_1}, \quad \rho = xy, \quad s_1 = \frac{1}{\tau_1}, \quad s_2 = -\tau_2$$

сводит (46), (47) к эволюционным уравнениям

$$s_1^2\Psi_{s_1} = r^2(r-s_1)\Psi_{rr} + 2r^2\rho\Psi_{r\rho} + r\rho^2\Psi_{\rho\rho} + ((\kappa_0-1)r^2 + (\kappa_1 r+\gamma_2)(r-s_1) + \gamma_2 s_1\rho)\Psi_r + \\ + ((\kappa_0+\kappa_1-1)r\rho + \gamma_1 s_2 r + \gamma_2\rho)\Psi_\rho + \kappa r\Psi,$$

$$-s_2\Psi_{s_2} = r^2\rho\Psi_{rr} + 2r\rho^2\Psi_{r\rho} + \rho^2(\rho-1)\Psi_{\rho\rho} + ((\kappa_0+\kappa_1-1)r\rho + \gamma_1 s_2 r + \gamma_2\rho)\Psi_r + \\ + \left((\kappa_0-1)\rho(\rho-1) + \kappa_1\rho^2 + \frac{\gamma_1 s_2 r}{s_1} + \gamma_1 s_2(\rho-1)\right)\Psi_\rho + \kappa\rho\Psi,$$

которые, в силу справедливости соотношений Гейзенберга

$$\frac{\partial}{\partial r}r - r\frac{\partial}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}\rho - \rho\frac{\partial}{\partial \rho} = 1,$$

символически могут быть записаны в виде уравнений (8), определяемых полиномиальными гамильтонианами (12), (13) с полиномиальными коэффициентами. Следствие доказано.

Заключение. Таким образом, к настоящему времени в иерархии вырождений Кимуры остался всего лишь один представитель H^{3+1+1}, для которого решения аналогов временны́х уравнений Шрёдингера в терминах решений соответствующих уравнений ИДМ ещё не построены.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась за счёт средств бюджета Института математики с вычислительным центром. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сулейманов Б.И.* Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа, 1988. С. 93–102.
2. *Сулейманов Б.И.* Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 791–796.
3. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1. М., 1978.
4. *Garnier R.* Sur des equations différentielles du troisieme ordre dont l'integrale generale est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 1912. V. 29. № 3. P. 1–126.
5. *Bloemendal A., Virag B.* Limits of spiked random matrices II // Ann. Probab. 2016. V. 44. № 4. P. 2726–2769.
6. *Conte R.* Generalized Bonnet surfaces and Lax pairs of PVI // J. Math. Phys. 2017. V. 58. № 10. P. 1–31.
7. *Grundland A.M., Riglioni D.* Classical-quantum correspondence for shape-invariant systems // J. Phys. A. 2015. V. 48. № 24. P. 245201–245215.
8. *Levin A.M., Olshanetsky M.A., Zotov A.V.* Planck constant as spectral parameter in integrable systems and KZB equations // J. of High Energy Physics. 2014. V. 10. P. 1–29.
9. *Nagoya H.* Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painlevé equations // J. Math. Phys. 2011. V. 52. № 8. P. 1–16.
10. *Rosengren H.* Special polynomials related to the supersymmetric eight-vertex model: a summary // Commun. Math. Phys. 2015. V. 15. № 3. P. 1143–1170.
11. *Rumanov I.* Painlevé representation of Tracy-Widom $_\beta$ distribution for $\beta = 6$ // Comm. Math. Phys. 2016. V. 342. № 3. P. 843–868.

12. *Zabrodin A., Zotov A.* Quantum Painlevé-Calogero correspondence // J. Math. Phys. 2012. V. 53. № 7. P. 1–19.
13. *Grava T., Its A., Kapaev A., Mezzadri F.* On the Tracy-Widom $_\beta$ distribution for $\beta = 6$ // SIGMA. 2016. V. 12. № 105. P. 1–26.
14. *Новиков Д.П.* О системе Шлезингера с матрицами размера 2×2 и уравнении Белавина–Полякова–Замолодчикова // Теор. и мат. физика. 2009. Т. 161. № 2. С. 191–203.
15. *Сулейманов Б.И.* Квантовые аспекты интегрируемости третьего уравнения Пенлеве и решения временного уравнения Шрёдингера с потенциалом Морса // Уфимский мат. журн. 2016. Т. 8. № 3. С. 141–159.
16. *Kimura H.* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure // Annali di Matematica pura et applicata IV. 1989. V. 155. № 1. P. 25–74.
17. *Kawakami H., Nakamura A., Sakai H.* Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations // arXiv:1209.3836. 2012.
18. *Sakai H.* Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé-type equations // Tech. Report. Tokyo, 2010.
19. *Kawakami H., Nakamura A., Sakai H.* Toward a classification of 4-dimensional Painlevé-type equations // Contemporary Mathematics, 593, eds. A. Dzhamay, K. Maruno, V. U. Pierce, AMS, Providence, RI. 2013. P. 143–161.
20. *Kawamuko H.* On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations // WSEAS Transact. on Math. 2017. V. 16. № 5. P. 39–47.
21. *Цегельник В.В.* Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа. Минск, 2007.
22. *Цегельник В.В.* О свойствах решений двух дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 206. № 3. С. 361–367.
23. *Сулейманов Б.И.* «Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы // Функц. анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 3. С. 52–62.
24. *Новиков Д.П., Сулейманов Б.И.* «Квантования» изомонодромной гамильтоновой системы Гарнье с двумя степенями свободы // Теор. и мат. физика. 2016. Т. 187. № 1. С. 39–57.
25. *Павленко В.А., Сулейманов Б.И.* Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, определяемых изомонодромной гамильтоновой системой $H^{2+1+1+1}$ // Уфимский мат. журн. 2018. Т. 10. № 4. С. 92–102.
26. *Павленко В.А., Сулейманов Б.И.* Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, определяемых изомонодромной гамильтоновой системой H^{4+1} // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 5. С. 695–698.
27. *Павленко В.А.* Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, соответствующих паре гамильтоновых систем H^{3+2} // Теор. и мат. физика. 2022. Т. 212. № 3. С. 340–353.
28. *Сулейманов Б.И.* Изомонодромное квантование второго уравнения Пенлеве посредством консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 6. С. 141–161.
29. *Okamoto K.* Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations // Proceed. of the Japan Academy. 1980. Ser. A. № 6. P. 264–268.
30. *Итс А.Р.* Асимптотика решений нелинейного уравнения Шрёдингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 1. С. 14–18.

Институт математики
с вычислительным центром,
г. Уфа

Поступила в редакцию 13.04.2023 г.
После доработки 10.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 90–98

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ И ИХ ПЕРВЫХ И ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРЫ НА ПОЛУОСИ

© 2024 г. С. Искандаров, А. Т. Халилов

Памяти нашего дорогого учителя
профессора Николая Викторовича Азбелева
(15.04.1922–03.11.2006)

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых двух производных линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерры. Для этого рассматриваемое уравнение с помощью метода, предложенного первым автором в 2006 году, сначала сводится к эквивалентной системе, состоящей из одного дифференциального уравнения первого порядка и одного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Затем для этой системы предлагается новый обобщённый функционал Ляпунова, доказывается его неотрицательность на её решениях и приводится оценка сверху производной этого функционала через исходный функционал. Найденная оценка представляет собой интегро-дифференциальное неравенство, решение которого даёт оценку функционала.

Ключевые слова: уравнение Вольтерры, функционал Ляпунова, ограниченность решения.

DOI: 10.31857/S0374064124010087, EDN: RPRSTF

1. Введение. Постановка задачи. Все рассматриваемые в настоящей работе функции являются непрерывными и приводимые соотношения имеют место при $t \geqslant t_0$ (для функций одной переменной) и при $t \geqslant t_0$, $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ (для функций двух переменных).

Требуется установить достаточные условия ограниченности на полуоси $I \equiv [t_0, \infty)$ всех решений и их первых двух производных линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) третьего порядка типа Вольтерры вида

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \big[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\big]\, d\tau = f(t), \quad t \geqslant t_0, \qquad (1)$$

в случае, когда коэффициенты, ядра и свободный член этого ИДУ могут быть не дифференцируемыми в некоторых точках полуоси I.

Насколько нам известно, такая задача ранее никем не изучалась.

Для исследования вопросов устойчивости решений ИДУ типа Вольтерры или ограниченности решений вместе с несколькими первыми производными разработан ряд качественных методов, в том числе метод функционалов Ляпунова. Для различных классов (линейных или нелинейных, скалярных или векторных) ИДУ метод функционалов Ляпунова развит в работах многих авторов (см., например, монографии [1–3] и обзорную статью [4]). Анализ этих работ показал, что построенный нами для решения поставленной выше задачи функционал Ляпунова является новым.

В статье решение сформулированной задачи состоит в следующем: сначала уравнение (1) методом, предложенным в работе [5], сводится к системе двух уравнений, затем к исследованию полученной системы применяется метод функционалов Ляпунова, при этом предлагается новая конструкция функционала Ляпунова с использованием идей работ [1; 6–9; 10, с. 73–80].

2. Основные результаты. В ИДУ (1) сделаем нестандартную замену переменной [5]:

$$x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \tag{2}$$

где λ — некоторый вспомогательный вещественный параметр, $W(t)$ — некоторая положительная весовая функция и $y(t)$ — новая неизвестная функция. Тогда, объединив замену (2) и получающееся для функции $y(t)$ ИДУ второго порядка, придём к следующей эквивалентной ИДУ (1) системе:

$$\begin{gathered} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \\ y''(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int\limits_{t_0}^{t}\bigl[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\bigr]\,d\tau=F(t), \quad t\geqslant t_0, \end{gathered} \tag{3}$$

где, как несложно убедиться,

$$\begin{gathered} b_0(t)\equiv (W(t))^{-1}\left[a_0(t)-\lambda^2a_1(t)+\lambda^4a_2(t)-\lambda^6\right], \\ b_1(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2a_2(t)+\lambda^4+a_2(t)W'(t)(W(t))^{-1}+\left[W'(t)-\lambda^2W(t)\right]'(W(t))^{-1}, \\ b_2(t)\equiv a_2(t)-\lambda^2+2W'(t)(W(t))^{-1}, \\ P_0(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-\lambda^2Q_1(t,\tau)+\lambda^4Q_2(t,\tau)\right], \\ P_1(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W(\tau)+Q_2(t,\tau)(W'(\tau)-\lambda^2W(\tau))\right], \\ K(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau), \quad F(t)\equiv (W(t))^{-1}f(t). \end{gathered}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Будем называть непрерывную функцию $\psi(t)$, $t\geqslant t_0$, *срезывающей* для непрерывной функции $K(t,\tau)$, $t\geqslant\tau\geqslant t_0$ (для непрерывной функции $F(t)$, $t\geqslant t_0$), если функция $K(t,\tau)\bigl(\psi(t)\psi(\tau)\bigr)^{-1}$ (функция $F(t)\bigl(\psi(t)\bigr)^{-1}$) имеет непрерывные частные производные первого порядка (является дифференцируемой) в каждой точке области определения.

Определение 2. Назовём непрерывные функции $K(t,\tau)$, $t\geqslant\tau\geqslant t_0$, и $F(t)$, $t\geqslant t_0$, *согласованно срезываемыми*, если для них срезывающая их функция может быть выбрана одной и той же.

Далее через $\mathbb{R}_+$ обозначаем полуось $[0,+\infty)$.

Теорема. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1) для функций $K(t,\tau)$ и $F(t)$ имеют место представления

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau)+C(t,\tau), \tag{4}$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \tag{5}$$

где $K_0(t,\tau)$ и $F_0(t)$ — непрерывные функции, а функции $K_i(t,\tau)$ и $F_i(t)$ при каждом $i\in\{1,\ldots,n\}$ являются согласованно срезываемыми со срезывающей функцей $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, т.е. функции

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1} \quad \text{и} \quad E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

дифференцируемы; пусть, кроме того, интеграл $\int_t^\infty |C(s,t)|ds$ определён для всех $t\in I$;

2) при каждом $i\in\{1,\ldots,n\}$ функция $R_i(t,\tau)$ удовлетворяет условию $R'_{i\tau}(t,\tau)\geqslant 0$ и имеет вторую непрерывную смешанную производную, при этом существует функция $R_i^*(t)\in L^1(I,\mathbb{R}_+)$ такая, что $R''_{it\tau}(t,\tau)\leqslant R_i^*(t)R'_{i\tau}(t,\tau)$, $i=\overline{1,n}$;

3) функция

$$D(t) \equiv 2b_2(t) - \int\limits_{t_0}^{t} |C(t,\tau)| d\tau - \int\limits_{t}^{\infty} |C(s,t)| ds$$

неотрицательна;

4) справедливо равенство

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

где $A_i(t)$ *и* $B_i(t)$ *— неотрицательная и положительная дифференцируемые функции, при этом* $B_i'(t) < 0$ *и существуют функция* $A_i^*(t) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ *и дифференцируемая функция* $c_i(t)$ *такие, что* $A_i'(t) \leqslant A_i^*(t) A_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, *и* $(E_i^{(k)}(t))^2 \leqslant B_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $k = 0, 1$;

5) функция $b_1(t)$ *отделена от нуля некоторой положительной постоянной* b_{10} *(т.е.* $b_1(t) \geqslant b_{10} > 0$*) и дифференцируема, при этом существует функция* $b_1^*(t) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ *такая, что* $b_1'(t) \leqslant b_1^*(t) b_1(t)$;

6) верно включение

$$|b_0(t)| + |F_0(t)| + W(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (|P_0(t,\tau)| + |P_1(t,\tau)| + |K_0(t,\tau)|) d\tau \in L^1\left(I, \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}\right),$$

тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ *системы (3) справедливы соотношения*

$$x(t) = O(1),\ y^{(k)}(t) = O(1) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad k = 0, 1, \quad \text{и} \quad x(t) \in L^2(I, \mathbb{R}), \tag{8}$$

$$A_i(t) \Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} \psi_i(\eta) y'(\eta) d\eta \Bigg)^2 = O(1) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{и} \quad D(t)(y'(t))^2 \in L^1(I, \mathbb{R}_+); \tag{9}$$

7) если, кроме того, выполняется и условие $W^{(k)}(t) = O(1)$ *при* $t \to +\infty$, $k = 0, 1$, *то* $x^{(k)}(t) = O(1)$ *при* $t \to +\infty$, $k = 0, 1, 2$, *для любого решения* $x(t)$ *ИДУ (1).*

Доказательство. Пусть $(x(t), y(t))$ — произвольное решение системы (3). Построим следующий функционал Ляпунова:

$$\begin{aligned} V(t; x, y) = (x(t))^2 + 2\lambda^2 \int\limits_{t_0}^{t} (x(s))^2 ds + (y'(t))^2 + b_1(t)(y(t))^2 + \int\limits_{t_0}^{t} D(s)(y'(s))^2 ds + \\ + \sum_{i=1}^{n} \Bigg[R_i(t,t_0)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t) Y_i(t,t_0) + c_i(t) + \int\limits_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau \Bigg] + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t}^{\infty} |C(s,\tau)| ds\, (y'(\tau))^2 d\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$Y_i(t,\tau) \equiv \int\limits_{\tau}^{t} \psi_i(\eta) y'(\eta) d\eta \quad (i = \overline{1,n}). \tag{11}$$

В силу условий 1)–5) теоремы функция $V(t; x, y)$ является неотрицательно определённой, т.е. $V(t; x, y) \geqslant 0$ в области её определения. Действительно, так как $b_1(t) > 0$ и $D(t) \geqslant 0$ согласно условиям 5) и 3) соответственно, то слагаемые в первой строке в (10) неотрицательны. Последнее слагаемое, стоящее под знаком суммы в (10), неотрицательно, поскольку $R'_{i\tau}(t,\tau) \geqslant 0$ для всех $i = \overline{1,n}$ в силу условия 2). Неотрицательность последнего слагаемого в (10) очевидна. Таким образом, для доказательства неотрицательности функции $V(t; x, y)$ остаётся убедиться в неотрицательности первых трёх слагаемых, стоящих под знаком суммы в (10).

Посмотрим на выражение $R_i(t,t_0)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t)$ как на квадратный относительно $Y_i(t,t_0)$ трёхчлен. Оценим его дискриминант $\mathcal{D}$, учитывая условие 4) и представление (7):

$$\mathcal{D} \equiv 4\left(E_i^2(t) - R_i(t,t_0)c_i(t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 4\left(B_i(t)c_i(t) - R_i(t,t_0)c_i(t)\right) \underset{(7)}{=} 4\left(B_i(t)c_i(t) - \left(A_i(t)+B_i(t)\right)c_i(t)\right) = -4c_i(t)A_i(t) \leqslant 0,$$

поскольку $A_i(t)\geqslant 0$ и $c_i(t)\geqslant 0$ согласно условию 4). Так как дискриминант рассматриваемого квадратного трёхчлена неположителен, то сам он неотрицателен в силу того, что коэффициент $R_i(t,t_0)$ при его старшем члене положителен вследствие условия 7).

Возьмём производную от функционала $V(t;x,y)$ и заменим $x'(t)$, $y''(t)$ в силу уравнений системы (3). Тогда с учётом обозначения $D(t)$ и представлений (4), (5), (7) получим

$$\frac{dV(t;x,y)}{dt} = 2x(t)\left[-\lambda^2 x(t) + W(t)y(t)\right] + 2\lambda^2(x(t))^2 + 2y'(t)\Biggl\{-b_2(t)y'(t) -$$
$$- b_1(t)y(t) - b_0(t)x(t) - \int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + K(t,\tau)y'(\tau)]d\tau + F(t)\Biggr\} +$$
$$+ b_1'(t)(y(t))^2 + 2b_1(t)y(t)y'(t) + \left[2b_2(t) - \int\limits_{t_0}^{t}|C(t,\tau)|d\tau - \int\limits_{t}^{\infty}|C(s,t)|ds\right](y'(t))^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\Biggl[R_{it}'(t,t_0)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i'(t)Y_i(t,t_0) + c_i'(t) +$$
$$+ 2R_i(t,t_0)Y_i(t,t_0)\psi_i(t)y'(t) - 2E_i(t)\psi_i(t)y'(t) + \int\limits_{t_0}^{t} R_{i\tau t}''(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau +$$
$$+ 2\int\limits_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)Y_i(t,\tau)\psi_i(t)y'(t)d\tau\Biggr] + \int\limits_{t}^{\infty}|C(s,t)|ds(y'(t))^2 - \int\limits_{t_0}^{t}|C(t,\tau)|(y'(\tau))^2 d\tau =$$
$$= 2W(t)x(t)y(t) - 2y'(t)\Biggl\{b_0(t)x(t) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + \left(\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau) + C(t,\tau)\right)y'(\tau)\right]d\tau - F(t)\Biggr\} +$$
$$+ b_1'(t)(y(t))^2 - \int\limits_{t_0}^{t}|C(t,\tau)|d\tau(y'(t))^2 - \int\limits_{t_0}^{t}|C(t,\tau)|(y'(\tau))^2 d\tau +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\Biggl[A_i'(t)(Y_i(t,t_0))^2 + B_i'(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i'(t)Y_i(t,t_0) + c_i'(t) + 2R_i(t,t_0)Y_i(t,t_0)\psi_i(t)y'(t) -$$
$$- 2E_i(t)\psi_i(t)y'(t) + 2\int\limits_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)Y_i(t,\tau)d\tau\,\psi_i(t)y'(t) + \int\limits_{t_0}^{t} R_{i\,\tau t}''(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau\Biggr], \qquad (12)$$

где $(x(t),y(t))$ — любое решение системы (3).

Чтобы продолжить дальнейшее преобразование производной и оценить суммы некоторых слагаемых в (12), установим аналогично [10, с. 75] следующие четыре утверждения.

а) Проинтегрировав по частям, с учётом определения (11) будем иметь

$$\int\limits_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)Y_i(t,\tau)d\tau = -R_i(t,t_0)Y_i(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} R_i(t,\tau)\psi_i(\tau)y'(\tau)d\tau, \quad i=\overline{1,n},$$

откуда, учитывая обозначение $R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$ $(i=\overline{1,n})$, найдём

$$2R_i(t,t_0)Y_i(t,t_0)\psi_i(t)y'(t) + 2\psi_i(t)y'(t)\int\limits_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)Y_i(t,\tau)d\tau = 2y'(t)\int\limits_{t_0}^{t} K_i(t,\tau)y'(\tau)d\tau$$

для любого $i=\overline{1,n}$. Следовательно, в силу этого представления получим

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(R_i(t,t_0)Y_i(t,t_0)\psi_i(t)y'(t) + \int\limits_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)Y_i(t,\tau)d\tau\,\psi_i(t)y'(t)\right) - 2y'(t)\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)y'(\tau)d\tau =$$
$$= 2y'(t)\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)y'(\tau)d\tau - 2y'(t)\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)y'(\tau)d\tau = 0. \tag{13}$$

б) Согласно условию 4) теоремы имеют место неравенства $B'_i(t)\leqslant 0$ и $(E'_i(t))^2\leqslant B'_i(t)c'_i(t)$. Поэтому дискриминант квадратного относительно $Y_i(t,t_0)$ трёхчлена, составленного из второго, третьего и четвёртого слагаемых, стоящих под знаком суммы в (12), неположителен. Следовательно, этот трёхчлен удовлетворяет неравенству

$$B'_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E'_i(t)Y_i(t,t_0) + c'_i(t)\leqslant 0 \quad (i=\overline{1,n}),$$

так как коэффициент $B'_i(t)$ при его старшем члене отрицателен ввиду условия 4). Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}[B'_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E'_i(t)Y_i(t,t_0) + c'_i(t)]\leqslant 0. \tag{14}$$

в) Применив неравенство $2\alpha_1\alpha_2\leqslant\alpha_1^2+\alpha_2^2$, получим соотношение

$$-2y'(t)\int\limits_{t_0}^{t} C(t,\tau)y'(\tau)d\tau - \int\limits_{t_0}^{t}|C(t,\tau)|d\tau(y'(t))^2 - \int\limits_{t_0}^{t}|C(t,\tau)|(y'(\tau))^2d\tau\leqslant 0. \tag{15}$$

г) Так как $E_i(t)=F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $(i=\overline{1,n})$ в силу второго равенства в (4), то

$$2y'(t)\sum_{i=1}^{n}F_i(t) - \sum_{i=1}^{n}2E_i(t)\psi_i(t)y'(t) = 0. \tag{16}$$

Таким образом, из соотношений (12)–(16) вытекает неравенство

$$\frac{dV(t;x,y)}{dt}\leqslant 2W(t)x(t)y(t) - 2y'(t)\Bigg\{b_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t}\Big[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) +$$
$$+ K_0(t,\tau)y'(\tau)\Big]d\tau - F_0(t)\Bigg\} + b'_1(t)(y(t))^2 + \sum_{i=1}^{n}\left[A'_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 + \int\limits_{t_0}^{t} R''_{i\,\tau t}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\right],$$

а значит, учитывая, что в силу условий теоремы функции $b_1'(t)$ и $A_i'(t)$, $R''_{i\tau t}(t,\tau)$ $(i=\overline{1,n})$ неотрицательны и справедливо тождество $R''_{i\tau t}(t,\tau)=R''_{it\tau}(t,\tau)$, имеет место следующая оценка производной:

$$\frac{dV(t;x,y)}{dt}\leqslant 2W(t)|x(t)|\,|y(t)|+$$
$$+2|y'(t)|\Biggl\{|b_0(t)|\,|x(t)|+\int\limits_{t_0}^{t}\bigl[|P_0(t,\tau)|\,|x(\tau)|+|P_1(t,\tau)|\,|y(\tau)|+|K_0(t,\tau)|\,|y'(\tau)|\bigr]d\tau+|F_0(t)|\Biggr\}+$$
$$+b_1'(t)(y(t))^2+\sum_{i=1}^{n}\Biggl[A_i'(t)(Y_i(t,t_0))^2+\int\limits_{t_0}^{t}R''_{it\tau}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\Biggr]. \tag{17}$$

Так как в определении (10) квадратный трёхчлен

$$T(t,t_0)\equiv R_i(t,t_0)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t),\quad i=\overline{1,n},$$

как доказано выше, неотрицателен и все остальные слагаемые неотрицательны в силу условий теоремы, то справедливы неравенства

$$(x(t))^2\leqslant V(t;x,y),\quad 2\lambda^2\int\limits_{t_0}^{t}(x(s))^2ds\leqslant V(t;x,y),\quad (y'(t))^2\leqslant V(t;x,y),$$
$$b_1(t)(y(t))^2\leqslant V(t;x,y),\quad \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}R'_{i\tau}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\leqslant V(t;x,y). \tag{18}$$

Из неотрицательности квадратного трёхчлена $T(t,t_0)$ и представления (7) вытекает тождество $T(t,t_0)\equiv A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)$. Но квадратный трёхчлен $B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)$, составленный их трёх последних слагаемых этого тождества, неотрицателен, так как для его дискриминанта справедливо неравенство $4(E_i^2(t)-B_i(t)c_i(t))\leqslant 0$ (см. условие 4)), а коэффициент $B_i(t)$ при старшем его члене в силу условия 4) положителен. Поэтому выполняется оценка

$$A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2\leqslant V(t;x,y). \tag{19}$$

Теперь, учитывая оценки (18) и (19), а также условие 4) для функций $A_i'(t)$ $(i=\overline{1,n})$, условие 2) для функций $R''_{it\tau}(t,\tau)$ $(i=\overline{1,n})$ и условие 5) для функций $b_1(t)$ $(i=\overline{1,n})$, из (17) получаем следующее интегро-дифференциальное неравенство:

$$\frac{dV(t;x,y)}{dt}\leqslant 2\Biggl\{|F_0(t)|+\int\limits_{t_0}^{t}\bigl[|P_0(t,\tau)|+|P_1(t,\tau)|(b_1(\tau))^{-1/2}+$$
$$+|K_0(t,\tau)|\bigr](V(\tau;x,y))^{1/2}d\tau\Biggr\}(V(t;x,y))^{1/2}+2\mu(t)V(t;x,y),$$

где

$$\mu(t)\equiv W(t)(b_1(t))^{-1/2}+|b_0(t)|+\frac{1}{2}b_1^*(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(t)+R_i^*(t)].$$

Проинтегрировав это соотношение в пределах от t_0 до t, получим интегральное неравенство

$$V(t;x,y) \leqslant c_* + 2\int\limits_{t_0}^{t}\Biggl\{|F_0(s)| + \int\limits_{t_0}^{s}\bigl[|P_0(s,\tau)| + |P_1(s,\tau)|(b_1(\tau))^{-1/2} + $$
$$ + |K_0(s,\tau)|\bigr](V(\tau;x,y))^{1/2}d\tau\Biggr\}(V(s;x,y))^{1/2}ds + 2\int\limits_{t_0}^{t}\mu(s)V(s;x,y)ds, \tag{20}$$

где

$$c_* = V(t_0;x,y) = (x(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + b_1(t_0)(y(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0).$$

Из доказанной в работе [11] леммы 1 вытекает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть для непрерывных неотрицательных функций* $u(t)$, $\alpha_k(t)$ $(k=1,2)$ *и* $\beta(t,\tau)$ *при* $t \geqslant \tau \geqslant t_0$ *выполняется с некоторой положительной постоянной* C *неравенство*

$$(u(t))^2 \leqslant C + \int\limits_{t_0}^{t}\Biggl[\alpha_1(s)u(s) + \alpha_2(s)(u(s))^2 + \int\limits_{t_0}^{s}\beta(t,\tau)u(s)u(\tau)d\tau\Biggr]ds.$$

Тогда имеет место оценка

$$(u(t))^2 \leqslant \Biggl[C^{1/2} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_1(s)\exp\Biggl\{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{s}M(\eta)d\eta\Biggr\}ds\Biggr]^2\exp\Biggl\{\int\limits_{t_0}^{t}M(s)ds\Biggr\},$$

где $M(t) \equiv \alpha_2(t) + \int_{t_0}^{t}\beta(t,\tau)d\tau$.

Применим к интегральному неравенству (20) сформулированную лемму и с учётом условий 2)–5) теоремы придём к оценке

$$V(t;x,y) \leqslant c_{**}, \tag{21}$$

где

$$c_{**} = \Biggl[(c_*)^{1/2} + \int\limits_{t_0}^{\infty}|F_0(s)|\exp\Biggl\{-\int\limits_{t_0}^{s}M(\eta)d\eta\Biggr\}ds\Biggr]^2\exp\Biggl\{2\int\limits_{t_0}^{\infty}M(\eta)d\eta\Biggr\} < \infty,$$

$$M(t) \equiv \mu(t) + \int\limits_{t_0}^{t}\bigl[|P_0(t,\tau)| + |P_1(t,\tau)|(b_{10})^{-1/2} + |K_0(t,\tau)|\bigr]d\tau.$$

В силу соотношений (18) из неравенства (21) вытекают утверждения (8) и (9) теоремы.

Далее, учитывая условие 7) теоремы, вследствие замены (2) и равенства

$$x''(t) = -\lambda^2x'(t) + W(t)y'(t) + W'(t)y(t) = -\lambda^2[-\lambda^2x(t) + W(t)y(t)] + W(t)y'(t) + W'(t)y(t) =$$
$$= \lambda^4x(t) + [W'(t) - \lambda^2W(t)]y(t) + W(t)y'(t)$$

получаем, что $x'(t) = O(1)$ и $x''(t) = O(1)$. Следовательно, для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верно, что $x^{(k)}(t) = O(1)$ $(k = 0,1,2)$. Теорема доказана.

Отметим, что в работах [1, с. 215–217; 7–9] рассмотрены различные ИДУ типа Вольтерры, причём в [8] рассмотрен векторный аналог результатов из [7, 9], а в монографии [10, с. 73–80] обобщены соответствующие результаты работ [1, с. 215–217; 7–9] на линейные ИДУ первого и второго порядков типа Вольтерры. Мы в настоящей работе использовали, главным образом, идеи построения функционалов из [10, с. 73–80].

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Если*

1) $\lambda > 0$, $W(t) > 0$, $K(t,\tau) = C(t,\tau) + K_0(t,\tau)$, $F(t) = F_0(t)$, *то интеграл* $\int_t^\infty |C(s,t)|ds$ *определён для всех* $t \in I$;

2) выполняются условия 3), 5)–7) теоремы, то любое решение ИДУ (1) и его первая и вторая производные ограничены на полуоси I.

В данном случае $K_i(t,\tau) \equiv F_i(t) \equiv c_i(t) \equiv 0$ $(i = \overline{1,n})$.

3. Пример. Для ИДУ третьего порядка (1) с $t_0 = 1$ и

$$a_2(t) \equiv 4 + e^{t(\sin t)^{1/3}} + \frac{2t+1}{(t+1)^2}, \quad a_1(t) \equiv 2a_2(t) + \frac{t+1}{t+2}, \quad a_0(t) \equiv a_2(t) + 1 + \frac{t+1}{t+2} - \frac{e^{-t}\cos t}{(t+10)^2},$$

$$Q_0(t,\tau) \equiv Q_2(t,\tau) - \frac{e^{-t+\tau}}{\left(t^2+\tau^2+1\right)^2} + e^{-2t}\cos(t\tau), \quad Q_1(t,\tau) \equiv 2Q_2(t,\tau) - \frac{e^{-t+\tau}}{(t^2+\tau^2+1)^2},$$

$$f(t) \equiv e^{-t}\left(\frac{e^{t^2(\cos t)^{1/5}}}{t+7} - \frac{\sin(3t)}{t^2+1}\right),$$

где

$$Q_2(t,\tau) \equiv e^{-t+\tau+t^2(\cos t)^{1/5}+\tau^2(\cos\tau)^{1/5}}\left(\frac{1}{t-\tau+6} + \frac{t+\tau+3}{t+\tau+4}\right) + \frac{e^{-t+\tau}(\sin t)^{1/9}}{(t+\tau+1)^{11/10}} + \frac{e^{-t+\tau}}{(t+\tau+5)^3},$$

выполняются все условия теоремы при $\lambda = 1$, $W(t) \equiv e^{-t}$. Здесь

$$b_2(t) \equiv e^{t(\sin t)^{1/3}} + 1 + \frac{2t+1}{(t+1)^2}, \quad b_1(t) \equiv 3 + \frac{t+1}{t+2}, \quad b_{10} \equiv \frac{7}{2}, \quad b_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+1)(t+2)},$$

$$b_0(t) \equiv \frac{\cos t}{(t+10)^2}, \quad P_0(t,\tau) \equiv e^{-t}\cos(t\tau), \quad P_1(t,\tau) \equiv -\frac{1}{(t^2+\tau^2+1)^2},$$

$$K(t,\tau) \equiv e^{t^2(\cos t)^{1/5}+\tau^2(\cos\tau)^{1/5}}\left(\frac{1}{t-\tau+6} + \frac{t+\tau+3}{t+\tau+4}\right) + \frac{(\sin t)^{1/9}}{(t+\tau+1)^{11/10}} + \frac{1}{(t+\tau+5)^3},$$

$$n = 1, \quad \psi_1(t) \equiv e^{t^2(\cos t)^{1/5}}, \quad R_1(t,\tau) \equiv \frac{t+\tau+3}{t+\tau+4} + \frac{1}{t-\tau+6}, \quad A_1(t) \equiv \frac{t+3}{t+4},$$

$$A_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+3)(t+4)}, \quad R_1^*(t) \equiv 0, \quad B_1(t) \equiv \frac{1}{t+6}, \quad C(t,\tau) \equiv \frac{(\sin t)^{1/9}}{(t+\tau+1)^{11/10}},$$

$$D(t) \geqslant 2e^{t(\sin t)^{1/3}} + 2 + \frac{2t+1}{(t+1)^2}, \quad K_0(t,\tau) \equiv \frac{1}{(t+\tau+5)^3},$$

$$F(t) \equiv \frac{e^{t^2(\cos t)^{1/5}}}{t+7} - \frac{\sin 3t}{t^2+1}, \quad E_1(t) \equiv \frac{1}{t+7}, \quad c_1(t) \equiv \frac{1}{t+6}, \quad F_0(t) \equiv -\frac{\sin 3t}{t^2+1}.$$

Для ИДУ третьего порядка в приведённом примере коэффициенты $a_k(t)$ $(k = 0,1,2)$ не дифференцируемы в точках $t = \pi m$ $(m \in \mathbb{N})$, ядра $Q_k(t,\tau)$ $(k = 0,1,2)$ и свободный член $f(t)$ не дифференцируемы в точках $t = \pi/2 + \pi m$ $(m \in \mathbb{N})$, ядра $Q_k(t,\tau)$ $(k = 0,1,2)$ не дифференцируемы также ещё и в точках $t = \pi l$ $(l \in \mathbb{N})$. Таким образом, нам удалось найти ИДУ вида (1), для которого применима доказанная нами теорема.

Этот пример показывает, что класс ИДУ вида (1), для которого приведённая выше задача решаема, не пуст.

Заключение. Отметим, что идея приведения ИДУ третьего порядка (1) к системе (3) заимствована из монографии академика Г.И. Марчука [12]; идея использования некоторых вспомогательных функций при построении функционала Ляпунова описана в монографии академика Н.Н. Красовского [13, с. 199].

В работе мы, используя конструкции функционалов Ляпунова для ИДУ первого порядка типа Вольтерры [6–9] и для ИДУ первого и второго порядков типа Вольтерры [10, с. 73–80], т.е. используя идеи построения функционалов Ляпунова, смогли построить функционал Ляпунова для ИДУ третьего порядка (1). Для этого понадобился нестандартный метод сведения к системе. Таким образом, главная новизна работы состоит в нестандартном сведении ИДУ к эквивалентной системе, состоящей из одного линейного дифференциального уравнения первого порядка и одного линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерры; в построении нового функционала Ляпунова для исследования ограниченности на полуоси решений и их первых двух производных заданного линейного ИДУ третьего порядка.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа финансировалась за счёт средств Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. New York, 1983.
2. *Lakshmikantham V., Rao M.R.M.* Theory of Integro-Differential Equations. Amsterdam, 1995.
3. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. Amsterdam, 2005.
4. *Tunç C., Tunç O.* New results on the stability, integrability and boundedness in Volterra integro-differential equations // Bull. Comput Appl. Math. 2018. V. 6. № 1. P. 41–58.
5. *Искандаров С.* Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек, 2006. Вып. 34. С. 37–43.
6. *Volterra V.* Sur la theorie mathematique des phenomenes hereditaires // J. Math. Pure and Appl. 1928. V. 7. P. 249–298.
7. *Levin J.J., Nohel J.A.* Perturbations of a nonlinear Volterra equation // Mech. Math. J. 1965. V. 12. P. 431–447.
8. *Винокуров В.Р.* Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 10. С. 1732–1744.
9. *Levin J.J.* A nonlinear Volterra equation not of convolution type // J. of Different. Equat. 1968. V. 4. P. 176–186.
10. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерры. Бишкек, 2002.
11. *Ведь Ю.А., Пахыров З.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
12. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М., 1988.
13. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

Институт математики
НАН Кыргызской Республики,
г. Бишкек

Поступила в редакцию 23.10.2022 г.
После доработки 09.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 99–125

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977+517.929.2

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© 2024 г. А. В. Метельский

Для линейной автономной системы нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями приведён алгоритм решения задачи модальной управляемости (в частности, назначения конечного спектра), обеспечивающий замкнутой системе заданный характеристический квазиполином. Предложена процедура редактирования конечной части спектра. Конструктивно обоснован критерий экспоненциальной стабилизации изучаемой системы. При выполнении критерия, согласно предложенному алгоритму спектрального приведения, замкнутая система может быть сделана экспоненциально устойчивой. Полученные утверждения и алгоритмы управления спектром проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, автономная система, замкнутая система, система нейтрального типа, оператор сдвига, соизмеримые запаздывания, стабилизация, экспоненциальная устойчивость, нормальная форма, спектр.

DOI: 10.31857/S0374064124010097, EDN: RQXLSS

Введение. Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{j=1}^{m}(A_jx(t-jh) + C_j\dot{x}(t-jh)) + \sum_{i=0}^{m} b_ju(t-jh), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0], \tag{2}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]'$ — n-вектор-столбец непрерывного кусочно-гладкого решения системы (1) ($n \geqslant 2$); $h > 0$ — постоянное запаздывание; A_0, A_j, C_j — постоянные $n\times n$-матрицы; b_j — постоянные столбцы; η — начальная функция из пространства гладких n-вектор-функций; u — скалярное кусочно-непрерывное управление. Знак $'$ обозначает операцию транспонирования.

Пусть $p, \lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел). Обозначим:

$$A(p,\lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)\lambda^j,$$

$W(p, e^{-ph}) = pE - A(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица (E — единичная матрица подходящего порядка), $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$ — характеристический квазиполином однородной ($b_j = 0$) системы (1). Здесь и далее $|W|$ — определитель произвольной квадратной матрицы W. Будем также употреблять термин ”характеристический полином” по отношению к полиному $w(p, \lambda)$.

Квазиполином вида ($\lambda = e^{-ph}$)

$$d(p,\lambda) = \sum_{i=0}^{N}\theta_i(\lambda)p^{N-i}, \quad N \geqslant 1,$$

где $\theta_i(\lambda)$ — некоторые полиномы, причём $\theta_0(0) = 1$, будем называть *квазиполиномом нейтрального типа степени* N. Если $\theta_0(\lambda) = 1$, то, как частный случай, имеем квазиполином запаздывающего типа. Характеристический квазиполином $w(p, e^{-ph})$ однородной системы (1) является в общем случае квазиполиномом нейтрального типа степени n.

Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbb{C} : w(p, e^{-ph}) = 0\}$ характеристического квазиполинома с учётом их кратности называют *спектром системы* (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в множество σ сопряжёнными парами.

Краткий обзор начнём с системы запаздывающего типа — частного случая системы (1) с $C_j = 0,\ \ j = \overline{1,m},$ обозначив её $(1')$. Пусть $\breve{A}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} A_j \lambda^j,\ \ b(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_m\lambda^m,$ $\lambda \in \mathbb{C}$.

Задача управления спектром динамических систем инспирирована проектированием систем с заданными свойствами, в частности, задачей стабилизации [1] управляемой системы. В работе [1] задача стабилизации сводится к задаче управляемости конечномерной подсистемы [2], соответствующей неустойчивой части спектра в обобщённом собственном подпространстве системы $(1')$. Этот подход известен как *метод спектральной декомпозиции.* В связи с ним возникла *задача спектральной управляемости* [3] — управляемости конечномерной подсистемы, соответствующей всякому спектральному значению системы $(1')$. Критерий спектральной управляемости для системы запаздывающего типа имеет вид [4]

$$\operatorname{rank}\bigl[pE_n - \breve{A}(e^{-ph}), b(e^{-ph})\bigr] = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Наличие этого критерия необходимо и достаточно [5, 6] для разрешимости задачи FSA (finite spectrum assignment) — назначения произвольного самосопряжённого конечного спектра — в классе регуляторов с распределённым запаздыванием. Более того, выполнение условия (3) позволяет обеспечить не только замкнутой системе заданный конечный спектр (например, асимптотически устойчивый), но и одновременно [7] финитную стабилизацию исходной системы (обнуление фазовых переменных за конечное время).

Бóльшая часть исследований имеет дело со стабилизацией систем нейтрального типа [8–13]. Для системы запаздывающего типа $(1')$ свойства асимптотической и экспоненциальной асимптотической (для краткости экспоненциальной) устойчивости эквивалентны. Для системы нейтрального типа (1) это не так, поэтому, следуя [9], будем говорить об асимптотической и экспоненциальной устойчивости системы (1). Известен (см., например, [9]) спектральный критерий экспоненциальной устойчивости однородной системы нейтрального типа: все корни характеристического квазиполинома должны лежать в левой полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p < \varepsilon\}$, $\varepsilon < 0$ — некоторое число. Непосредственное применение этого критерия проблематично, поэтому авторы, исследующие задачу стабилизации, зачастую заняты и получением удобных критериев для различных определений устойчивости. Основные подходы здесь используют функционалы типа Ляпунова–Красовского, при этом критерий, как правило, формулируется в терминах линейных матричных неравенств [10, 12]. Эффективна теория устойчивости, развитая в работе [9] через изучение спектральных свойств инфинитезимального оператора полугруппы преобразований банахова пространства непрерывных функций, порождаемой системой нейтрального типа (1). На той же основе асимптотическая устойчивость и стабилизируемость системы вида (1) в гильбертовом пространстве состояний M_2 исследована в работе [11]. Частотные методы для дизайна стабилизирующих обратных связей применяются в статье [13]. Несмотря на большое число публикаций по обсуждаемой тематике, ощущается, на наш взгляд, дефицит конструктивных, алгоритмизуемых результатов в задаче стабилизации систем нейтрального типа. Бóльшая часть результатов имеет характер “теорем существования”.

Принципиально иной подход к построению различных типов стабилизаторов и наблюдателей для линейных автономных систем с запаздыванием представлен в работах [14–20]. Суть этого подхода к задаче стабилизации следующая. Система замыкается динамической обратной связью (см. ниже (4)–(6)). Характеристический полином $d(p, \lambda)$ замкнутой системы принадлежит идеалу, порождённому системой полиномов — алгебраических дополнений к элементам последней строки характеристической матрицы замкнутой системы. Поэтому класс возможных характеристических полиномов $d(p, \lambda)$ замкнутой системы может быть проанализирован через вычисление базиса Грёбнера для системы алгебраических дополнений как полиномов переменных p, λ. Если выбранный полином $d(p,\lambda)$ принадлежит идеалу, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы, задающая искомый стабилизатор, может быть найдена методом неопределённых коэффициентов [20].

В настоящей статье этот подход развивается на задачу управления спектром и, в частности, на задачу экспоненциальной стабилизации системы нейтрального типа.

1. Постановка задачи. Пусть имеем операторную запись уравнений $p^i\lambda^j x_k(t)=x_k^{(i)}(t-jh)$ $(i,j\geqslant 0$ — целые числа), т.е. λ — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования. Рассмотрим динамический регулятор по типу обратной связи по состоянию в двух вариантах:

$$u(t)=x_{n+1}(t),\quad t>0, \tag{4}$$

или

$$u(t)=\dot x_{n+1}(t)+\alpha x_{n+1}(t),\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad t>0. \tag{5}$$

В обоих вариантах регулятора переменная x_{n+1} задаётся уравнением

$$\dot x_{n+1}(t)+v_0(\lambda)x_{n+1}(t)+v_1(\lambda)\dot x_{n+1}(t-h)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int\limits_0^h \hat v_{ki}(\lambda)x_{n+1}(t-s)e^{p_ks}s^i/i!\,ds=$$

$$=\tilde q(\lambda)x(t)+q(\lambda)\dot x(t-h)+\sum_{k=1}^{L}\sum_{i=0}^{L_1}\int\limits_0^h \hat q_{ki}(\lambda)x(t-s)e^{p_ks}s^i/i!\,ds,\quad t>0, \tag{6}$$

где $v_i(\lambda)$, $\tilde q(\lambda)=(\tilde q_1(\lambda),\ldots,\tilde q_n(\lambda))$, $q(\lambda)=(q_1(\lambda),\ldots,q_n(\lambda))$ — полиномы с действительными коэффициентами; $\hat v_{ki}(\lambda)$, $\hat q_{ki}(\lambda)=(\hat q_{ki1}(\lambda),\ldots,\hat q_{ki,n}(\lambda))$ – полиномы, возможно, с комплексными коэффициентами; $L\geqslant 1$, $L_1\geqslant 0$ — целые числа; $p_k\in P^*=\{\alpha_k\pm \mathrm{i}\beta_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,L}\}$ — набор действительных и комплексно-сопряжённых чисел, i – мнимая единица.

Замечание 1. Как видно из выражений (4), (5), первый регулятор генерирует непрерывный входной сигнал, второй, вообще говоря, — кусочно-непрерывный, что понижает качество процесса управления, но, с другой стороны, расширяет возможности управления системой. При управлении $u(t)$ вместо вектора $b(\lambda)$ может быть вектор $b(p,\lambda)$, содержащий члены $p\lambda$ с полиномиальными коэффициентами от λ, т.е. управление может иметь производные первого порядка с запаздывающим аргументом: $\dot u(t-ih)$, $i=\overline{1,m}$. Для такой системы допусти́м только регулятор вида (4), (6).

Коэффициенты в выражении (6) и множество P^* подбираем такими, чтобы замкнутая система имела определённый спектр и чтобы после приведения интегралов с применением формулы Эйлера $(e^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ к суммам вида

$$\sum_{\tau=0}^{N_1}\int\limits_0^h R_{j\tau}(s)x_j(t-\tau h-s)\,ds,\quad j=\overline{1,n+1},\quad N_1=\max_{k,i}\{\deg\hat v_{ki}(\lambda),\,\deg\hat q_{ki}(\lambda)\},$$

где $R_{j\tau}(s)=\sum_{k=1}^{L}e^{\alpha_ks}(\cos(\beta_ks)U_{j\tau k}(s)+\sin(\beta_ks)V_{j\tau k}(s))$, $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$, $U_{j\tau k}(s)$, $V_{j\tau k}(s)$ – полиномы степени не выше L_1, все коэффициенты в выражении (6) представляли собой действительные величины.

Членам с распределённым запаздыванием (см. выражение (6)) в характеристической матрице замкнутой системы соответствуют интегралы $\int_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!\,ds$ с полиномиальными коэффициентами от λ. Вычислив эти интегралы, получим целые дробно-рациональные функции $(\lambda=e^{-ph},\ \lambda_k=e^{-p_kh})$:

$$\int\limits_0^h e^{-(p-p_k)s}s^i/i!ds=\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\frac{d^i}{dp^i}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k(p-p_k)}\right),\quad i=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Именно в терминах таких функций будем конструировать управление, задаваемое уравнением (6) и обеспечивающее замкнутой системе определённый спектр.

Если выбран регулятор (5), то, заменив $\dot{x}_{n+1}(t)$ в уравнении (5) согласно (6), получим, что замкнутая система останется системой нейтрального типа.

Определение 1. Систему (1) назовем *спектрально приводимой*, если существует регулятор (4), (6) (или (5), (6)), обеспечивающий замкнутой системе (1) характеристический квазиполином вида

$$d(p,\lambda)=\theta_0(\lambda)d(p),\quad d(p)=\theta_0(\lambda)\sum_{i=0}^{n+1}\gamma_i p^{n+1-i},\quad \lambda=e^{-ph}, \tag{8}$$

где $\theta_0(\lambda)=1+\lambda\tilde{\theta}(\lambda)$, $\tilde{\theta}(\lambda)$ — некоторый полином с действительными коэффициентами; $\gamma_0=1$, γ_i, $i=\overline{1,n+1}$, — действительные числа. В частности, может быть $\theta_0(\lambda)\equiv 1$.

Определение 2. Систему (1) назовем *модально управляемой*, если существует регулятор (4), (6) (или (5), (6)), обеспечивающий замкнутой системе (1) произвольный характеристический квазиполином

$$d(p,\lambda)=\sum_{i=0}^{n+1}\theta_i(\lambda)p^{n+1-i},\quad \lambda=e^{-ph}, \tag{9}$$

где $\theta_0(\lambda)=1+\lambda\tilde{\theta}(\lambda)$, $\theta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, — полиномы с действительными коэффициентами. Коэффициент $\theta_0(\lambda)$ при p^{n+1} будем называть *старшим коэффициентом полинома* $d(p,\lambda)$.

Если посредством регулятора (4), (6) (или (5), (6)) замкнутой системе можно обеспечить квазиполином $d(p,e^{-ph})$, имеющий все корни с отрицательными действительными частями, причём

$$\text{из } d(p,e^{-ph})=0 \text{ следует } \operatorname{Re}p<\varepsilon,\quad \varepsilon<0 \text{ — некоторое число}, \tag{10}$$

то система экспоненциально стабилизируема [9]. Для краткости будем говорить, что квазиполином $d(p,e^{-ph})$ с такими корнями экспоненциально устойчивый.

Если в (8) $\theta_0(\lambda)\equiv 1$, то имеем замкнутую систему с конечным спектром. Если $\theta_0(\lambda)\not\equiv 1$, то имеем замкнутую систему с бесконечным, но более удобным для анализа, спектром. Как следует из (10), замкнутая система (1) с характеристическим полиномом (8) экспоненциально устойчива, если и только если все корни полинома (8) удовлетворяют неравенствам

$$\theta_0(\lambda)=0\Rightarrow|\lambda|>1,\quad d(p)=0\Rightarrow \operatorname{Re}p<0. \tag{11}$$

Задача. Требуется подобрать множество P^* и полиномиальные коэффициенты $v_i(\lambda)$, $\hat{v}_{ki}(\lambda)$, $\tilde{q}(\lambda)$, $q(\lambda)$, $\hat{q}_{ki}(\lambda)$ регулятора (4), (6) (или (5), (6)) так, чтобы характеристическая матрица $pE-\tilde{A}(p,e^{-ph})$ замкнутой системы (1), (4), (6) (или (1), (5), (6)) имела действительные коэффициенты и выполнялось равенство

$$|pE-\tilde{A}(p,e^{-ph})|=d(p,e^{-ph}),$$

где $d(p,e^{-ph})$ — заданный квазиполином вида (9) в случае модальной управляемости, или квазиполином вида (8) в случае спектральной приводимости. Выяснить, когда это возможно.

Поставленную задачу рассмотрим в более широкой постановке: как можно изменить спектр системы (1), замыкая ее регуляторами (4), (6) или (5), (6). В случае отсутствия модальной управляемости проанализируем возможность спектрального приведения и экспоненциальной стабилизируемости системы (1). Для решения этой задачи в общем случае ниже предложен (см. п. 6) алгоритм спектрального приведения.

В работе [16, теорема 2] доказано, что задача модальной управляемости системы (1) разрешима в классе динамических дифференциально-интегроразностных регуляторов, если и только если выполняются следующие два условия:

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)e^{-pjh}, b(e^{-ph})\right] = n, \quad p \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

$$\operatorname{rank}\left[E - \sum_{j=1}^{m} C_j\lambda^j, b(\lambda)\right] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Заметим, что в общем случае условия (12), (13) не следуют [21] одно из другого. В совокупности эти условия обеспечивают [21, 22] полную управляемость системы (1) с соизмеримыми запаздываниями. Начальное состояние (2) называется *полностью управляемым*, если существуют момент времени $t_1 > 0$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad \text{если} \quad u(t) \equiv 0, \quad t > t_1. \tag{14}$$

Если равенство (14) при достаточно большом, но фиксированном моменте времени $t_1 > 0$ возможно для любого начального состояния (2), то систему (1) называют *полностью управляемой*.

2. Схема проверки условий модальной управляемости. Пусть в системе (1) $A(p,\lambda) = [a_{ij}(p,\lambda)]$. Столбец, образованный $b(\lambda)(p+\alpha)$ или $b(\lambda)$, обозначим через $\tilde{b}(p,\lambda)$ и запишем характеристическую матрицу $(p, \lambda \in \mathbb{C})$ системы, замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)):

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pE - A_0 - \sum\limits_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)\lambda^j & & -\tilde{b}(p,\lambda) \\ g_1(p,\lambda) \quad \cdots \quad g_n(p,\lambda) & & g_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Для краткости систему в координатной форме, заданную характеристической матрицей $(*)$ ($(*)$ — номер формулы), иногда будем называть системой $(*)$. Скажем, что под системой (15) будем понимать систему в фазовых переменных с характеристической матрицей (15).

Расширенная характеристическая матрица (добавлен столбец $-\tilde{b}(p,\lambda)$) исходной системы дополнена $(n+1)$-й строкой

$$g(p,\lambda) = (g_1(p,\lambda),\, \ldots,\, g_n(p,\lambda), g_{n+1}(p,\lambda)),$$

отвечающей управлению (6), где $g_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, — линейные комбинации полиномов и дробно-рациональных функций (7). Это следует из вида обратной связи, задаваемой уравнением (6). Таким образом, $g_i(p, e^{-ph})$, $p \in \mathbb{C}$, — целые функции.

Для системы (1), замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)), условие (12) принимает вид

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)e^{-pjh}, \tilde{b}(p, e^{-ph})\right] = n, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Проверка условия (16).

1. Вычисляем алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$, начиная с первого:

$$M(p,\lambda) = (M_1(p,\lambda), ..., M_n(p,\lambda),\, M_{n+1}(p,\lambda))', \quad M_{n+1}(p,\lambda) = w(p,\lambda). \tag{17}$$

2. Находим $G_p(p,\lambda)$ — редуцированный базис Грёбнера идеала, порождённого системой полиномов (17), в порядке $\lambda > p$. Для краткости далее будем говорить о базисе Грёбнера определённой системы полиномов без упоминания идеала.

Пусть $P_\lambda = \{(p,\lambda) \in \mathbb{C}^2 : M(p,\lambda) = 0\}$ — множество решений системы полиномиальных уравнений

$$M_i(p,\lambda) = 0, \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{18}$$

Условие (16) равносильно тому, что при $\lambda = e^{-ph}$ система (18) несовместна. По свойству базиса Грёбнера множества решений системы (18) и $G_p(p,\lambda) = 0$ совпадают.

3. Если элементы базиса $G_p(p,\lambda)$ имеют общий делитель $\theta(p,\lambda) \neq \mathrm{const}$, то полиномы $M_i(p,\lambda)$, $\ i = \overline{1, n+1}$, имеют тот же общий делитель $\theta(p,\lambda)$. Условие (16) будет нарушаться на корнях квазиполинома $\theta(p, e^{-ph})$.

4. Считаем, что элементы базиса $G_p(p,\lambda)$ не имеют общего делителя $\theta(p,\lambda) \neq \mathrm{const}$. Тогда $G_p(p,\lambda) = \{1\}$ или $G_p(p,\lambda)$ содержит некоторый полином $d_0(p)$, множество различных корней которого обозначим $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, \mu} : d_0(p_i) = 0\}$. Если $G_p(p,\lambda) = \{1\}$, то система (18) несовместна и, значит, условие (16) выполняется.

4.1. Пусть базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ содержит некоторый полином $d_0(p)$ (далее полагаем, что его старший коэффициент равен единице). В таком случае по свойству базиса Грёбнера если $(p,\lambda) \in P_\lambda$, то $p \in P_0$. И наоборот, для каждого $p \in P_0$ найдется λ такое, что $(p,\lambda) \in P_\lambda$. Поэтому на корнях полинома $d_0(p)$ проверяем неравенства

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in P_0. \tag{19}$$

Если при каком-либо $p_0 \in P_0$ справедливо равенство $M(p_0, e^{-p_0 h}) = 0$, то условие (16) не имеет места при $p = p_0$. В противном случае условие (16) выполняется.

Для системы (1), замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)), условие (13) принимает вид

$$\operatorname{rank}\Bigl[E - \sum_{j=1}^{m} C_j \lambda^j, \hat{b}(\lambda)\Bigr] = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Здесь $\hat{b}(\lambda) = b(\lambda)\chi(\cdot)$, индикатор $\chi(5) = 1$, если выбран регулятор (5), (6), и $\chi(4) = 0$, если выбран регулятор (4), (6).

Очевидно, что если для исходной системы (1) выполняется условие (13), то аналогичное условие (20) будет выполняться и для системы, замкнутой регулятором (5), (6). При переходе к регулятору (4), (6) условие (13) "чаще" не сохраняется, поскольку столбец $b(\lambda)$ заменяется нулевым. Оно заведомо сохранится, если, например, матрица $\sum_{j=1}^{m} C_j \lambda^j$ нильпотентна.

Проверка условия (20).

1. Обозначим

$$l(\lambda) = (l_1(\lambda), ..., l_{n+1}(\lambda))$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} E - \sum\limits_{j=1}^{m} C_j \lambda^j & -\hat{b}(\lambda) \\ k_1(\lambda) \cdots k_n(\lambda) & k_{n+1}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Здесь $k_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, — полиномы, коэффициенты при первых степенях переменной p в последней строке характеристической матрицы (15), задаваемой уравнением (6) (см. [23]).

2. Пусть $l_0(\lambda) = \mathrm{GCD}(l(\lambda))$ — наибольший общий делитель элементов вектора $l(\lambda)$ со старшим коэффициентом, равным единице. Последний может быть найден по алгоритму Евклида, а также через вычисление базиса Грёбнера системы полиномов $l_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$.

3. Условие (20) равносильно тому, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ хотя бы один из полиномов $l_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, не равен нулю [23], т.е. полиномы $l_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, взаимно просты. Поэтому если $l_0(\lambda) \equiv 1$, то условие (20) выполняется, и наоборот.

Лемма 1. *Старший коэффициент* $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ *характеристического полинома* $d(p,\lambda) = |\tilde{W}(p,\lambda)|$ *системы (15), замкнутой регулятором (4), (6) (или (5), (6)), делится на полином* $l_0(\lambda)$.

Доказательство. Согласно [23] векторный полином $l(\lambda)$ даёт набор коэффициентов $l_i(\lambda)$ при p^n в полиномах $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$. Очевидно, что коэффициент $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ характеристического полинома $d(p,\lambda)$ при p^{n+1} будет равен

$$\theta_0(\lambda) = k_1(\lambda)l_1(\lambda) + \dots + k_{n+1}(\lambda)l_{n+1}(\lambda) = |F(\lambda)|. \tag{22}$$

Из (22) следует, что коэффициент $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ характеристического полинома при p^{n+1} делится на $l_0(\lambda)$. Лемма доказана.

Замечание 2. Очевидно, что утверждение леммы 1 справедливо для всякой однородной $(b(\lambda) = 0)$ линейной автономной системы нейтрального типа вида (1). В этом случае n-вектор $l(\lambda)$ — это алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $E - \sum_{j=1}^{m} C_j\lambda^j$; $k_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$, — коэффициенты при первых степенях переменной p в последней строке той же матрицы.

Условие (20) эквивалентно тому [23, лемма 3], что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ степень относительно p хотя бы одного из полиномов $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, равна n. Условие (13) (в равносильной форме) появилось в работе [21], там же при $m = 1$ доказано, что в совокупности с условием (12) оно образует критерий полной управляемости системы (1).

3. Модальная управляемость и FSA-регулятор. В работе [16] задача модальной управляемости решается через приведение системы нейтрального типа к системе запаздывающего типа невырожденным преобразованием переменных. В настоящей статье обоснована более простая схема замыкания системы (1) без преобразования переменных.

Замечание 3. Пусть система (15) замкнута дифференциально-разностным регулятором. Тогда $(g_1(p,\lambda), \dots, g_{n+1}(p,\lambda))$ — полиномы и в выражении (6) все $\hat{v}_{ki}(\lambda) = \hat{q}_{ki}(\lambda) = 0$. Если (p_0, λ_0) есть решение системы (18): $M(p_0,\lambda_0) = 0$, то из (15) имеем равенства

$$g(p_0,\lambda_0)M(p_0,\lambda_0) = d(p_0,\lambda_0) = 0.$$

Поэтому всякая пара $(p_0,\lambda_0) \in P_\lambda$ останется корнем характеристического полинома $d(p,\lambda)$ системы (1), замкнутой любым дифференциально-разностным регулятором.

Пусть элементы базиса $G_p(p,\lambda)$ не имеют общего делителя $\theta(p,\lambda) \neq \mathrm{const}$. В этом случае базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ содержит полином $d_0(p)$ с набором корней P_0, причём из $(p_0,\lambda_0) \in \in P_\lambda$ следует, что $p_0 \in P_0$. Если $d(p,\lambda) = d(p)$ — характеристический полином системы (1), замкнутой дифференциально-разностным регулятором, то

$$g(p_0,\lambda_0)M(p_0,\lambda_0) = d(p_0) = 0, \quad (p_0,\lambda_0) \in P_\lambda.$$

Таким образом, все корни полинома $d_0(p)$ войдут в конечный спектр замкнутой системы, поэтому значения $p \in P_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями* относительно дифференциально-разностного регулятора. Полином $d_0(p)$ с множеством корней P_0 будем называть *инвариантным полиномом.* Убрать из конечного спектра замкнутой системы нежелательные инвариантные значения $p \in P_0$ можно лишь введя [20] в регулятор распределённые запаздывания. Этим и определяется вид обратной связи (6).

Считаем, что для системы (1) и выбранного регулятора (4), (6) (или (5), (6)) выполнены условия (16), (20). Согласно п. 2 элементы базиса $G_p(p,\lambda)$ не имеют общего делителя $\theta(p,\lambda) \neq \mathrm{const}$. По свойству базиса Грёбнера полином $d_0(p) \in G_p(p,\lambda)$ принадлежит идеалу, порождённому системой полиномов (17). Поэтому найдётся векторный полином

$$\Phi(p,\lambda) = (\varphi_1(p,\lambda), \dots, \varphi_{n+1}(p,\lambda)) \tag{23}$$

такой, что справедливо разложение

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = d_0(p). \tag{24}$$

Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (24).

Замечание 4. При построении искомого регулятора используется требование: различным корням p_i полинома $d_0(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Если набор корней полинома $d_0(p)$ содержит комплексно-сопряжённую пару инвариантных спектральных значений $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ такую, что $\sin(\beta h) = 0$, то $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Для разрешения данной ситуации введём в регуляторе "дробные" запаздывания: $\omega = h/k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда матрица системы (1) примет вид $A(p,\lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^m (A_j + pC_j)\lambda^{jk}$. Натуральное число k можно выбрать так, чтобы $\sin(\beta h/k) \neq 0$ для всех пар $p_{k_{1,2}} = \alpha \pm i\beta$ таких, что $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_{1,2}}h}$. Тогда различным значениям $p_i \in P_0$ будут соответствовать разные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Считаем далее это требование выполненным.

Введём матрицу

$$W_\psi(p,\lambda) = \begin{bmatrix} pE - A_0 - \sum\limits_{j=1}^m (A_j + pC_j)\lambda^j & & -\tilde{b}(p,\lambda) \\ \psi_1(p,\lambda) \quad \cdots & \psi_n(p,\lambda) & \psi_{n+1}(p,\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda), \ldots, \psi_{n+1}(p,\lambda))$ – действительный вектор, образованный полиномами или числами. Её определитель $\Delta(p,\lambda) = |W_\psi(p,\lambda)|$, очевидно, равен

$$\Delta(p,\lambda) = M_1(p,\lambda)\psi_1(p,\lambda) + \ldots + M_n(p,\lambda)\psi_n(p,\lambda) + M_{n+1}(p,\lambda)\psi_{n+1}(p,\lambda). \tag{25}$$

Справедлива

Лемма 2 [20, лемма 1]. *При выполнении условия (16) для произвольного набора чисел $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,\mu}\}$ найдётся действительный числовой вектор $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_{n+1})$ такой, что*

$$\Delta(p_i, e^{-p_i h}) = M_1(p_i, e^{-p_i h})\psi_1 + \ldots + M_n(p_i, e^{-p_i h})\psi_n + M_{n+1}(p_i, e^{-p_i h})\psi_{n+1} \neq 0, \quad p_i \in P_0. \tag{26}$$

Вектор Ψ можно получить, исходя из (26), и затем записать полином $\Delta(p,\lambda)$ согласно (25). Полином $\Delta(p,\lambda)$, удовлетворяющий условию (26), можно строить и с полиномиальными коэффициентами: $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda), \ldots, \psi_{n+1}(p,\lambda))$. В частности, в качестве $\Delta(p,\lambda)$ можно брать подходящие полиномы системы (17) или элементы базиса Грёбнера этой системы полиномов, а также их линейные комбинации. Соответствующий выбранному полиному $\Delta(p,\lambda)$ набор коэффициентов $\Psi(p,\lambda)$ можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (26) (см. ниже пример 1).

Введём функцию [20]

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + d(p,\lambda)). \tag{27}$$

Здесь $q(\lambda)$ — полином с действительными коэффициентами; полином $\Delta(p,\lambda) = \Psi(p,\lambda)M(p,\lambda)$ и вектор $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda), \ldots, \psi_{n+1}(p,\lambda))$ описаны выше в соотношениях (25), (26); $d(p,\lambda)$ — желаемый квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ замкнутой системы (15).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (16), (20). Для того чтобы замкнутая система (15) имела заданный характеристический квазиполином $d(p, e^{-ph})$ вида (9), достаточно:*

1) через вычисление базиса Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ системы полиномов (17) найти полином $d_0(p)$ и векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ согласно равенству (24);

2) найти векторный полином $\Psi(p,\lambda)$ и полином $\Delta(p,\lambda)$ согласно (25), (26);

3) выбрать полином $q(\lambda)$ таким, чтобы функция

$$f(p,\lambda)=K(p,\lambda)/d_0(p) \tag{28}$$

при $\lambda=e^{-ph}$ была целой ($p\in\mathbb{C}$);

4) в матрице (15) ($\lambda=e^{-ph}$) положить

$$(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda))=-f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi(p,\lambda). \tag{29}$$

Доказательство. Разлагая характеристический определитель $|\tilde W(p,\lambda)|$ замкнутой системы (15), (29) по последней строке, получаем

$$|\tilde W(p,\lambda)|=-f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi(p,\lambda)M(p,\lambda).$$

Ввиду (24), (25), (28) имеем

$$|\tilde W(p,\lambda)|=-f(p,\lambda)d_0(p)-q(\lambda)\Delta(p,\lambda)=-K(p,\lambda)-q(\lambda)\Delta(p,\lambda).$$

Заменив $K(p,\lambda)$ согласно (27), получим требуемый квазиполином:

$$|\tilde W(p,\lambda)|=-(-[q(\lambda)\Delta(p,\lambda)+d(p,\lambda)])-q(\lambda)\Delta(p,\lambda)=d(p,\lambda),\quad \lambda=e^{-ph}.$$

Теорема доказана.

Осталось привести замкнутую систему (15), (29) к нормальной форме.

Замечание 5. Если необходимо, то элементарными операциями над строками преобразуем последнюю строку (29) матрицы $\tilde W(p,\lambda)$ к виду, отвечающему управлению (6). В первых n позициях последней строки преобразованной матрицы $\tilde W(p,\lambda)$ полиномы, содержащие переменную p, могут быть только вида $p\lambda\alpha(\lambda)$, а в $(n+1)$-й позиции — $\theta_0(\lambda)p=(1+\lambda\tilde\theta(\lambda))p$, где $\alpha(\lambda)$, $\tilde\theta(\lambda)$ — некоторые полиномы. При наличии условия (20) полином $l_0(\lambda)\equiv 1$, и поэтому указанные преобразования определитель матрицы (15), (29) не меняют (см. ниже п. 5). Возвращаясь к фазовым переменным, получаем замкнутую систему в нормальной форме.

Следствие 1. *Условия (16), (20) необходимы и достаточны для модальной управляемости системы (1) регулятором вида (4), (6) (или (5), (6)).*

Доказательство. Если квазиполином (9) выбран запаздывающего типа, то его старший коэффициент $\theta_0(\lambda)\equiv 1$. Поэтому в силу леммы 1 должно быть $l_0(\lambda)\equiv 1$, что равносильно условию (20).

Если при некотором p_0 имеем $M(p_0,e^{-p_0h})=0$, то это значение не получится удалить из спектра предложенными регуляторами. Это видно [20] из разложения определителя характеристической матрицы (15) по последней строке, образованной целыми функциями. Поэтому условие (20) необходимо для модальной управляемости системы (1).

Достаточность условий (16), (20) для модальной управляемости следует из теоремы 1 и замечания 5. Следствие доказано.

Реализация требований теоремы 1 повторяет алгоритм построения регулятора модальной управляемости для системы запаздывающего типа, приведённый в работе [20, п. 1], поэтому ограничимся построением полинома $q(\lambda)$ согласно условию 3) теоремы 1.

Полином $q(\lambda)$ может быть найден как решение интерполяционной задачи. Напомним, что $P_0=\{p_k\in\mathbb{C},\ \ k=\overline{1,\mu}:d_0(p_k)=0\}$ — множество различных корней полинома $d_0(p)$. Пусть $\hat l_k$ — их алгебраические кратности. Ввиду замечания 4 все числа множества $\Lambda_0=\{\lambda_k=e^{-p_kh}:p_k\in P_0,\ \ k=\overline{1,\mu}\}$ также различны. Условие 3) теоремы 1 равносильно следующему:

$$\frac{d^i}{dp^i}(q(e^{-ph})\Delta(p,e^{-ph})+d(p,e^{-ph}))\bigg|_{p=p_k}=0,\quad p_k\in P_0,\quad i=\overline{0,\hat l_k-1},\quad k=\overline{1,\mu}. \tag{30}$$

Поскольку выполнено условие 2) теоремы 1, то согласно (26) при любом $p_k \in P_0$ имеет место $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$. Поэтому при каждом $k = \overline{1,\mu}$ из уравнения (30) найдём

$$q^{(i)}(\lambda_k), \quad i = \overline{0, \hat{l}_k - 1}, \quad k = \overline{1,\mu}, \quad \lambda_k = e^{-p_k h} \in \Lambda_0. \tag{31}$$

Для комплексно-сопряжённых чисел p, $\bar{p}$ числа $\lambda = e^{-ph}$, $\bar{\lambda} = e^{-\bar{p}h}$ также комплексно сопряжены. Поэтому система (30) для комплексно-сопряжённых пар $\{p_0, \bar{p}_0\} \in P_0$ имеет комплексно-сопряжённые решения

$$(q(\bar{\lambda}_0), q^{(1)}(\bar{\lambda}_0), \ldots, q^{(\hat{l}_0-1)}(\bar{\lambda}_0)) = (\bar{q}(\lambda_0), \bar{q}^{(1)}(\lambda_0), \ldots, \bar{q}^{(\hat{l}_0-1)}(\lambda_0)), \quad \hat{l}_0 \in \{\hat{l}_k, k = \overline{1,\mu}\}.$$

Окончательно полином $q(\lambda)$ получим как интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра по значениям (31), найденным из системы (30). Согласно [24, с. 110] полином $q(\lambda)$, построенный по интерполяционным значениям (31), будет иметь действительные коэффициенты.

Приведём пример построения регулятора модальной управляемости.

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка, заданную характеристической матрицей

$$W(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ -1 & p - p\lambda \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (0, \lambda)', \quad h = \ln 2. \tag{32}$$

Система (32) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$: $w(p,\lambda) = p^2(1-\lambda) - 1$.

Запишем систему (17) алгебраических дополнений к последней строке матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) = (M_1(p,\lambda), M_2(p,\lambda), M_3(p,\lambda))' = \big(\lambda, p\lambda, p^2(1-\lambda) - 1\big)'.$$

Находим базис Грёбнера этой системы полиномов в порядке $\lambda > p$: $G_p(p,\lambda) = ((p-1)(p+1), \lambda)$. Он содержит инвариантный полином $d_0(p) = (p-1)(p+1)$. Значит, множество $P_0 = \{-1; 1\}$. Проверяем неравенства (19) — они справедливы, значит, выполняется условие (16).

Система $l(\lambda) = (l_1(\lambda), l_2(\lambda), l_3(\lambda))$ алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ k_1(\lambda) & k_2(\lambda) & k_3(\lambda) \end{bmatrix}$$

имеет вид $l(\lambda) = (0, 0, 1-\lambda)$.

Очевидно, что наибольший общий делитель $\mathrm{GCD}(l(\lambda)) = 1 - \lambda$, т.е. система не является модально управляемой регулятором (4), (6). Поэтому рассмотрим регулятор (5), (6): $\tilde{b}(p,\lambda) = (0; \lambda(p+\alpha))'$. Будем иметь

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -\lambda \\ k_1(\lambda) & k_2(\lambda) & k_3(\lambda) \end{bmatrix}, \quad l(\lambda) = (0, \lambda, 1-\lambda).$$

Здесь $\mathrm{GCD}(l(\lambda)) = 1$, т.е. выполнено условие (20).

Замечание 6. Если $p = \alpha$ является корнем характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ исходной системы (в частности, возможно $w(\alpha,\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$), то это значение останется в спектре замкнутой системы при любом управлении (6). Это видно из разложения характеристического определителя $|\tilde{W}(p,\lambda)|$ по последней строке. Если $w(\alpha,\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то множество P_λ и, соответственно, множество P_0 не изменятся. Если $w(\alpha,\lambda) \neq \mathrm{const}$, то пары $\{(\alpha, \lambda_i) : w(\alpha,\lambda_i) = 0\}$ добавятся в множество P_λ. Учитываем это замечание при выборе значения α: $\tilde{b}(p,\lambda)=b(\lambda)(p+\alpha)$. В данном примере новая система полиномов $M(p,\lambda)$ будет следующей:

$$M(p,\lambda)=(\lambda(p+\alpha),p\lambda(p+\alpha),p^2(1-\lambda)-1)'.$$

Если $\alpha\neq 0$, то множество P_λ решений системы (17) пополнится парой $(p,\lambda)=(-\alpha,(\alpha^2-1)/\alpha^2)$, при этом изменится полином $d_0(p)=(p-1)(p+1)(p+\alpha)$. Если $\alpha=0$, то базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ остается таким же: $((p-1)(p+1),\lambda)$, и полином $d_0(p)=(p-1)(p+1)$ сохраняет прежний более простой вид.

Итак, полагаем $\alpha=0$, $\tilde{b}(p,\lambda)=(0,\lambda p)'$. Тогда характеристическую матрицу замкнутой системы запишем как

$$\tilde{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p & -1 & 0\\ -1 & p-p\lambda & -\lambda p\\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda)\end{bmatrix}. \tag{33}$$

Из равенства (24), где $(\varphi_1(p,\lambda),\varphi_2(p,\lambda),\varphi_3(p,\lambda))$ — полиномы с неопределёнными коэффициентами, $d_0(p)=(p-1)(p+1)$, заключаем, что $\Phi(p,\lambda)=(0,1,1)$.

Полином $\Delta(p,\lambda)$ находим из условия (26). Очевидно, что этому условию удовлетворяет λ — элемент базиса Грёбнера $G_p(p,\lambda)$, поэтому для $\Delta(p,\lambda)=\lambda$ обязательно найдётся вектор $\Psi(p,\lambda)$ согласно равенству (25). Методом неопределённых коэффициентов из уравнения (25) получаем, что $\Psi(\lambda)=(0,1-\lambda,-\lambda)$.

В качестве желаемого характеристического квазиполинома выбираем $d(p,\lambda)=(1+2p)(3+p)(2+\lambda)(p+\lambda)/4$, $\lambda=e^{-ph}$. Записываем (см. (27)) функцию $K(p,\lambda)$. Интерполяционные значения для полинома $q(\lambda)$ получаем из уравнения (30): $q(e^{-(-1)h})=q(2)=1$, $q(e^{-1h})=q(1/2)=-45/2$. Следовательно, $q(\lambda)=(47\lambda-91)/3$.

Последняя строка характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ замкнутой системы (15) согласно (28), (29) имеет вид

$$(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))=-K(p,\lambda)/d_0(p)\Phi(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi(\lambda).$$

Заменяя полиномы $K(p,\lambda)$, $\Phi(p,\lambda)$, $q(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ соответствующими выражениями, получаем

$$(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))=$$
$$=\left(1,\frac{3p\lambda}{2}+I(p,\lambda)+\frac{194\lambda^2-519\lambda+406}{12},p+\frac{3p\lambda}{2}+I(p,\lambda)+\frac{194\lambda^2-331\lambda+42}{12}\right),$$
$$I(p,\lambda)=\frac{(2-\lambda)(91\lambda-3)}{12(p+1)}-\frac{(1-2\lambda)(14\lambda-9)}{3(p-1)}. \tag{34}$$

Прямым вычислением проверяем, что характеристический определитель замкнутой системы (33), (34) равен $d(p,\lambda)=(1+2p)(3+p)(2+\lambda)(p+\lambda)/4$, $\lambda=e^{-ph}$.

Запишем полученный регулятор в явном виде. Дробно-рациональные функции заменяем [23] интегралами согласно (7), λ — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования. На основании (34) имеем

$$u(t)=\dot{x}_3(t),$$
$$\dot{x}_3(t)=-x_1(t)-\frac{3}{2}\dot{x}_2(t-h)-\frac{1}{12}(406x_2(t)-519x_2(t-h)+194x_2(t-2h))+J_2(t)-$$
$$-\frac{3}{2}\dot{x}_3(t-h)-\frac{1}{12}(42x_3(t)-331x_3(t-h)+194x_3(t-2h))+J_3(t),$$
$$J_i(t)=\frac{1}{6}\int\limits_0^h e^{-s}(3x_i(t-s)-91x_i(t-h-s))ds-\frac{1}{3}\int\limits_0^h e^{s}(9x_i(t-s)-14x_i(t-h-s))ds,\quad i=2,3.$$

Если система модально управляема, то, выбрав характеристический полином $d(p,\lambda)=d(p)$, имеющий корни с отрицательными действительными частями, получим для системы (1) экспоненциальный стабилизатор. Заметим, что квазиполином $d(p,\lambda)=(1+2p)(3+p)(2+\lambda)(p+\lambda)/4$, $\lambda = e^{-ph}$, $h=\ln 2$, задаёт экспоненциально устойчивый спектр, так как все корни квазиполинома $p+e^{-p\ln 2}$ лежат в левой полуплоскости [25, теорема 13.8], и значит, выполнено условие (10).

4. Редактирование части спектра, инвариантной относительно дифференциально-разностного регулятора. Согласно замечанию 3 всякая пара чисел $(p_0,\lambda_0)\in P_\lambda$ является корнем характеристического полинома $d(p,\lambda)$ системы (1), замкнутой любым дифференциально-разностным регулятором.

В случае спектральной приводимости посредством дифференциально-разностного регулятора из (15) получаем равенство

$$g(p_0,\lambda_0)M(p_0,\lambda_0)=d(p_0,\lambda_0)=\theta_0(\lambda_0)d(p_0)=0, \tag{35}$$

из которого вытекает, что хотя бы один множитель из пары $\theta_0(\lambda_0)$, $d(p_0)$ обращается в нуль.

Если $d(p_0)=0$ или/и $\theta_0(e^{-p_0h})=0$, то имеем

$$d(p_0,e^{-p_0h})=\theta_0(e^{-p_0h})d(p_0)=0,$$

т.е. значение p_0 остаётся в спектре системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором. Если же $d(p_0)\neq 0$ и $\theta_0(e^{-p_0h})\neq 0$, то значение p_0 выпадает из спектра системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором, но тогда $\theta_0(\lambda_0)=0$, и спектру принадлежат все p_i — решения уравнения $e^{-p_ih}=\lambda_0$.

Таким образом, когда система замкнута дифференциально-разностным регулятором, то всякая пара $(p_0,\lambda_0)\in P_\lambda$ удовлетворяет равенству (35). Последнее может быть обеспечено либо посредством $d(p_0)=0$, либо посредством $\theta_0(\lambda_0)=0$, т.е. нежелательные значения p_0 можно исключать из спектра системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором, обеспечив равенство $\theta_0(\lambda_0)=0$. Это свойство можно использовать для редактирования спектра системы, замкнутой дифференциально-разностным регулятором.

Реализуем этот подход к управлению спектром для общего случая системы (1) и заодно выясним условия спектральной приводимости. В общем случае базис Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$ в словарном порядке $\lambda>p$ будет иметь вид

$$G_p(p,\lambda)=\theta(p,\lambda)B(p,\lambda),\quad B(p,\lambda)=(d_0(p),\rho_1(p,\lambda),...,\rho_{n_p}(p,\lambda)). \tag{36}$$

Здесь $\theta(p,\lambda)=\mathrm{GCD}(M(p,\lambda))$ — наибольший общий делитель системы полиномов $M(p,\lambda)$, и полиномы $(d_0(p),\rho_1(p,\lambda),...,\rho_{n_p}(p,\lambda))$ не имеют общего делителя-полинома.

По свойству базиса Грёбнера все элементы $P_\lambda=\{(p,\lambda)\in\mathbb{C}^2: M(p,\lambda)=0\}$ и только они есть решения системы $G_p(p,\lambda)=0$. Поэтому P_λ можно представить как объединение решений уравнений

$$\theta(p,\lambda)=0,\quad B(p,\lambda)=0. \tag{37}$$

Пусть, как и раньше, P_0 — множество корней полинома $d_0(p)$. По свойству базиса Грёбнера для каждого корня $p_i\in P_0$ из системы

$$B(p,\lambda)=0 \tag{38}$$

найдётся одно или несколько значений λ_{ij}, $j=\overline{1,r_i}$. Множество всех решений (p_i,λ_{ij}) системы (38) обозначим $\hat{P}_\lambda$. Ввиду (37) $\hat{P}_\lambda\subseteq P_\lambda$.

Поскольку $\hat{d}_0(p,\lambda)=\theta(p,\lambda)d_0(p)$ — элемент базиса Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$, то найдётся векторный полином $\tilde{\Phi}(p,\lambda)$ вида (23), обеспечивающий равенство

$$\tilde{\Phi}(p,\lambda)M(p,\lambda)=\theta(p,\lambda)d_0(p). \tag{39}$$

Все $(p_0, \lambda_0) \in \hat{P}_\lambda$ являются нулями полинома $\theta(p,\lambda)d_0(p)$ ввиду $M(p_0,\lambda_0) = 0,$ так как $\hat{P}_\lambda \subseteq P_\lambda$. Поэтому если из разложения полинома $d_0(p)$ удалить множитель $p-p_0$, отвечающий корню $p_0 \in P_0$, то в правой части равенства, аналогичного (39) (см. (42)), появится полином $\breve{\theta}(\lambda)$ такой, что $\breve{\theta}(\lambda_i) = 0$, где λ_i — все значения такие, что $(p_0, \lambda_i) \in \hat{P}_\lambda$. Разумеется, если $p_0 = \alpha_0 + \mathrm{i}\beta_0$, $\beta_0 \neq 0$, то, чтобы коэффициенты полиномов остались действительными, следует удалять произведение $(p-p_0)(p-\bar{p}_0)$ ($\bar{p}_0$ — комплексно-сопряжённое число).

Пусть $d_0(p) = d_{01}^{\tau_1}(p)\cdots d_{0\nu_p}^{\tau_{\nu_p}}(p)$ — разложение полинома $d_0(p)$ на взаимно простые линейные и квадратичные (с отрицательным дискриминантом) множители. И пусть $\breve{d}_0(p) = d_{01}^{\breve{\tau}_1}(p)\cdots d_{0\nu_p}^{\breve{\tau}_{\nu_p}}(p)$ — отредактированный полином $d_0(p)$, где показатели степеней изменены (скажем, некоторые сделаны нулевыми). А именно, положим $\breve{\tau}_i = 0$, $i \in \overline{1,\nu_p}$, если множитель $d_{0i}(p) = p - p_i$ (или $d_{0i}(p) = (p-p_i)(p-\bar{p}_i)$) содержит значение $\operatorname{Re} p_i \geqslant 0$, а все пары $(p_i, \lambda_{ij}) \in \hat{P}_\lambda$, $j = \overline{1,r_i}$, таковы, что $|\lambda_{ij}| > 1$ (т.е. для p_{ij}, найденных из уравнения $e^{-p_{ij}h} = \lambda_{ij}$, имеем $\operatorname{Re} p_{ij} < 0$). Вычислив базис Грёбнера $\breve{G}_\lambda(p,\lambda)$ для системы полиномов

$$\theta(p,\lambda)(d_0(p), \breve{d}_0(p)\rho_1(p,\lambda), ..., \breve{d}_0(p)\rho_{n_p}(p,\lambda)) \tag{40}$$

в словарном порядке $p > \lambda$, получим

$$\breve{G}_\lambda(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{d}_0(p)(\breve{\theta}(\lambda), \breve{\rho}_1(p,\lambda), ..., \breve{\rho}_{n_\lambda}(p,\lambda)), \quad \breve{\theta}(\lambda) = \prod_{j=1}^{r_i}(\lambda - \lambda_{ij})^{s_j}. \tag{41}$$

Отсюда вместо полинома $\hat{d}_0(p,\lambda)$ будем иметь новый полином $\hat{d}_1(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p)$, где $\breve{d}_0(p_i) \neq 0$ и $\breve{\theta}(\lambda_{ij}) = 0$, $j = \overline{1,r_i}$.

Поскольку полином $\hat{d}_1(p,\lambda)$ принадлежит идеалу, порождённому системой полиномов (17), то по свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ (см. (23)) такой, что

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p). \tag{42}$$

Таким образом, вместо неустойчивого корня p_i ($\operatorname{Re} p_i \geqslant 0$) полинома $d_0(p)$ в спектр добавили набор корней полинома $\breve{\theta}(\lambda)$ таких, что $|\lambda_{ij}| > 1$, $(p_i, \lambda_{ij}) \in \hat{P}_\lambda$, $j = \overline{1,r_i}$.

Если набор корней полинома $\breve{d}_0(p)$ как спектральных значений подходящий, то, взяв

$$g(p,\lambda) = \Phi(p,\lambda)\breve{d}(p,\lambda),$$

где $\breve{d}(p,\lambda)$ — некоторый полином, получим систему (15), замкнутую дифференциально-разностным регулятором, с характеристическим полиномом

$$d(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p)\breve{d}(p,\lambda). \tag{43}$$

Полином $\breve{d}(p,\lambda)$ или $\breve{d}(p,\lambda) = \breve{d}(p)$ может понадобиться, чтобы степень характеристического полинома $d(p,\lambda)$ замкнутой системы (15) относительно p была равна $n+1$.

Замечание 7. Для записи полученной системы в нормальной форме необходимо, чтобы степень полинома $d(p,\lambda)$ относительно p была равна $n+1$. Поскольку $M_{n+1}(p,\lambda) = w(p,\lambda)$, где $w(p,\lambda)$ — характеристический полином системы (1), то степень полинома $\theta(p,\lambda)$, как делителя $w(p,\lambda)$, относительно p не больше чем n. Поэтому указанное требование к полиному $d(p,\lambda)$ можно обеспечить за счёт выбора полиномов $\breve{d}_0(p)$, $\breve{d}(p,\lambda)$.

Если векторный полином $g(p,\lambda)$ содержит слагаемые $\alpha(\lambda)p^k$, $\alpha(\lambda)$ — полином, $k \geqslant 2$, и αp, α — число, то потребуется приведение (см. п. 5) последней строки матрицы (15) к виду, указанному в замечании 5. Корни полинома $\breve{d}_0(p)$, для которых выполняется неравенство

$M(p, e^{-ph}) \neq 0,$ можно при необходимости удалить из спектра замкнутой системы (15), добавив в регулятор интегральные члены (см. п. 6).

Вывод. Для того чтобы замкнутая система (15) имела характеристический полином вида (8), необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель $\theta(p,\lambda)$ системы полиномов $M(p,\lambda)$ допускал разделение переменных: $\theta(p,\lambda) = \bar{\theta}(\lambda)\bar{d}(p),$ если $\theta(p,\lambda) \not\equiv 1.$ При этом спектральное приведение (см. определение 1) можно обеспечить дифференциально-разностным регулятором с изменением части спектра, задаваемой полиномом $d_0(p)$.

Описанный способ управления спектром системы (1) назовём *редактированием конечной части спектра* (множество P_0). Этот подход применим и к системам запаздывающего типа.

Пример 2. Рассмотрим систему второго порядка

$$W(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p-\lambda & -2 \\ \lambda & p+2 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (\lambda - 2, 0)', \quad h = \ln 2. \tag{44}$$

Система (44) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ $w(p,\lambda) = p(p+2-\lambda)$ имеет очевидный корень $p = 0.$ Таким образом, система не является экспоненциально устойчивой.

Выполним проверку условий модальной управляемости (16), (20) для регулятора вида (4), (6). Действуем согласно обоснованной в п. 2 схеме.

Запишем характеристическую матрицу замкнутой системы

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ \lambda & p+2 & 0 \\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем систему (17) алгебраических дополнений к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) = (M_1(p,\lambda), M_2(p,\lambda), M_3(p,\lambda))' = ((p+2)(\lambda-2), (2-\lambda)\lambda, p(p+2-\lambda))'.$$

Находим $G_p(p,\lambda)$ — базис Грёбнера в порядке $\lambda > p.$ Он содержит полиномы $G_p(p,\lambda) = (p^2(p+2), p^2+2\lambda-4).$ Значит, $\theta(p,\lambda) = 1,$ $d_0(p) = p^2(p+2)$ — инвариантный полином, отсюда множество $P_0 = \{-2; 0\}.$ Убеждаемся, что неравенства (19) имеют место. Условие (20) при $C_j = 0,$ $j = \overline{1,m},$ всегда выполнено. Таким образом, система (44) модально управляема и, значит, экспоненциально стабилизируема (см. теорему 1). Посредством интегроразностного регулятора (см. п. 3) замкнутой системе можно обеспечить любой характеристический квазиполином или полином, скажем, $d(p) = (p+1)(p+2)(p+3).$

Покажем, что, используя предложенную методику, можно стабилизировать систему дифференциально-разностным регулятором. Замкнутая система в таком случае, правда, будет иметь нейтральный тип с бесконечным спектром. Построим такой стабилизатор.

Значение $p = 0$ следует исключить из спектра замкнутой системы. Это возможно, так как

$$M(p, e^{-ph})\Big|_{p=0} = (-2, 1, 0) \neq 0.$$

Система полиномиальных уравнений (18) равносильна $G_p(p,\lambda) = 0,$ отсюда находим множество $P_\lambda = \{(-2,0),(0,2)\}.$ Имеем пару $(p,\lambda) = (0,2).$ Так как $\lambda = 2 > 1,$ то, заменив в характеристическом полиноме замкнутой системы множитель p^2 множителем $(\lambda-2)^s,$ $s \geqslant 1$ — целое число, обеспечим выполнение критерия экспоненциальной устойчивости (11).

Возьмём $\check{d}_0(p) = p^0(p+2),$ тогда система полиномов (40) будет иметь вид

$$\left(p^2(p+2), (p+2)\left(p^2+2\lambda-4\right)\right).$$

Вычислив базис Грёбнера (41) для этой системы полиномов в порядке $p > \lambda$, получим полином

$$\breve{G}_\lambda(p,\lambda) = \big((p+2)(\lambda-2), p^2(p+2)\big) \Rightarrow \breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p) = (p+2)(\lambda-2)$$

и новое разложение

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = \breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p) = (p+2)(\lambda-2), \quad \Phi(p,\lambda) = (1,0,0).$$

Поскольку замкнутая система третьего порядка, то обе части последнего равенства домножим на $-(p+1)(p+3)/2$. Последнюю строку характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ системы (15) имеем вида

$$(g_1(p,\lambda), g_2(p,\lambda), g_3(p,\lambda)) = -1/2(p+1)(p+3)\Phi(p,\lambda) = (-3/2 - 2p - p^2/2, 0, 0).$$

Множитель $-1/2$ добавлен, чтобы коэффициент при одночлене p^3 сделать равным единице.

Характеристический определитель замкнутой системы равен $d(p,\lambda) = (p+1)(p+2)(p+ + 3)(1-\lambda/2)$, значит, выполнен критерий экспоненциальной устойчивости (11). Осталось последнюю строку матрицы

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ \lambda & p+2 & 0 \\ -3/2-2p-p^2/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

посредством элементарных операций привести к виду, указанному в замечании 5.

Чтобы исключить переменную p в первой позиции последней строки, домножаем первую строку матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ на $-(-p/2-(\lambda+4)/2)$ и прибавляем к последней. Затем прибавляем вторую строку к полученной третьей, в итоге последняя строка характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$

$$g(p,\lambda) = \left(-\frac{1}{2}\left(\lambda^2+2\lambda+3\right), -2-\lambda, p - \frac{p\lambda}{2} + 4 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Запишем построенный регулятор в явном виде:

$$\begin{gathered} u(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t-2h) + 2x_1(t-h) + 3x_1(t)\right) + 2x_2(t) + x_2(t-h) + \\ + \frac{1}{2}\dot{x}_3(t-h) - 4x_3(t) + x_3(t-h) + \frac{1}{2}x_3(t-2h). \end{gathered}$$

Замечание 8. Если $(p_0,\lambda) \in P_\lambda$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, то значение p_0 исключить указанным способом не получится, так как $(p-p_0)^{\tau_0}$ будет общим множителем для всей системы полиномов $M(p,\lambda)$.

5. Приведение системы к нормальной форме. После замыкания системы (1), как правило, возникает необходимость приведения полученной системы (15) к нормальной форме. Для этого последнюю строку матрицы (15) следует привести в виду (см. замечание 5), отвечающему уравнению (6). Рассмотрим этот вопрос для общего случая, т.е. без допущения условий (16), (20).

Чтобы замкнутая система имела нейтральный тип, в первых n позициях последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ посредством элементарных операций над строками убираем слагаемые вида $\alpha(\lambda)p^k$, $\alpha(\lambda)$ — полином, $k \geqslant 2$, и αp, α — число. Для выполнения этой процедуры приведём матрицу $\tilde{W}(p,\lambda)$ к виду, где переменная p присутствует в первых n строках только в элементах по главной диагонали.

Рассмотрим введённые выше (см. п. 2) коэффициенты $l_i(\lambda)$ при степенях p^n в полиномах $M_i(p,\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$. Полином $M_{n+1}(p,\lambda)$ имеет вид $M_{n+1}(p,\lambda)=p^n(1+\lambda\alpha_0(\lambda))+d_{n-1}(p,\lambda)$, где полином $d_{n-1}(p,\lambda)$ относительно p имеет степень не выше $n-1$. Поэтому $l_{n+1}(\lambda)=1+$ $+\lambda\alpha_0(\lambda)$ и, следовательно, $l_0(\lambda)=1+\lambda\tilde{\alpha}_0(\lambda)$, где $\alpha_0(\lambda)$, $\tilde{\alpha}_0(\lambda)$ — некоторые полиномы. Пользуясь алгоритмом Евклида или методом неопределённых коэффициентов, получаем равенство

$$l_0(\lambda)=\mathrm{GCD}(l(\lambda))=\hat{\beta}_1(\lambda)l_1(\lambda)+...+\hat{\beta}_n(\lambda)l_n(\lambda)+\hat{\beta}_{n+1}(\lambda)l_{n+1}(\lambda), \tag{45}$$

где $\hat{\beta}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, — некоторые полиномы.

Поскольку $l_{n+1}(\lambda)=1+\lambda\alpha_0(\lambda)$, то вектор $(\hat{\beta}_1(\lambda),\ldots,\hat{\beta}_{n+1}(\lambda))$, удовлетворяющий (45), можно привести к виду

$$(\lambda\tilde{\beta}_1(\lambda),\ldots,\lambda\tilde{\beta}_n(\lambda),1+\lambda\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)),$$

где $\tilde{\beta}_1(\lambda)$, $\ldots$, $\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)$ — некоторые полиномы. Действительно, пусть свободный член полинома $\hat{\beta}_i(\lambda)=\hat{\beta}_i+\lambda\hat{\beta}_{i0}(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, отличен от нуля: $\hat{\beta}_i\neq 0$, тогда представим $\hat{\beta}_i(\lambda)$ следующим образом:

$$\hat{\beta}_i(\lambda)=\hat{\beta}_i(1+\lambda\alpha_0(\lambda))+\lambda\tilde{\beta}_i(\lambda)=\hat{\beta}_il_{n+1}(\lambda)+\lambda\tilde{\beta}_i(\lambda),\quad \tilde{\beta}_i(\lambda)=-\hat{\beta}_i\alpha_0(\lambda)+\hat{\beta}_{i0}(\lambda).$$

В результате в соотношении (45) многочлен $\hat{\beta}_i(\lambda)$ заменится на полином $\lambda\tilde{\beta}_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$:

$$\lambda\tilde{\beta}_1(\lambda)l_1(\lambda)+...+\lambda\tilde{\beta}_n(\lambda)l_n(\lambda)+\ldots+\left(\hat{\beta}_{n+1}(\lambda)+\sum_{i=1}^n\hat{\beta}_il_i(\lambda)\right)l_{n+1}(\lambda)=l_0(\lambda).$$

Подставляя $\lambda=0$, получаем $(\hat{\beta}_{n+1}(0)+\sum_{i=1}^n\hat{\beta}_il_i(0))\cdot 1=1$. Отсюда заключаем, что

$$\hat{\beta}_{n+1}(\lambda)+\sum_{i=1}^n\hat{\beta}_il_i(\lambda)=1+\lambda\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda),$$

где $\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)$ — некоторый полином.

Обозначим

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix}E-\sum_{j=1}^mC_j\lambda^j & -\hat{b}(\lambda)\\ \lambda\tilde{\beta}_1(\lambda)...\lambda\tilde{\beta}_n(\lambda) & 1+\lambda\tilde{\beta}_{n+1}(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Понятно, что $|L(\lambda)|=l_0(\lambda)$. Введём присоединённую матрицу $L^v(\lambda)=L^{-1}(\lambda)l_0(\lambda)$ и рассмотрим матрицу

$$\tilde{W}(p,\lambda)L^v(\lambda)=\begin{bmatrix}pl_0(\lambda)-\tilde{a}_{11}(\lambda) & \ldots & -\tilde{a}_{1,n-1}(\lambda) & -\tilde{a}_{1,n}(\lambda) & -\tilde{a}_{1,n+1}(\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\tilde{a}_{n,1}(\lambda) & \ldots & -\tilde{a}_{n,n-1}(\lambda) & pl_0(\lambda)-\tilde{a}_{n,n}(\lambda) & -\tilde{a}_{n,n+1}(\lambda)\\ \tilde{g}_1(p,\lambda) & \ldots & \tilde{g}_{n-1}(p,\lambda) & \tilde{g}_n(p,\lambda) & \tilde{g}_{n+1}(p,\lambda)\end{bmatrix}, \tag{46}$$

последняя строка которой

$$(\tilde{g}_1(p,\lambda),\ldots,\tilde{g}_{n+1}(p,\lambda))=(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda))L^v(\lambda)$$

образована полиномами и дробно-рациональными функциями вида (7).

Согласно замечанию 5, в первых n позициях последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ полиномы, содержащие переменную p, допускаются только вида $p\lambda\alpha(\lambda)$, где $\alpha(\lambda)$ — полином. Поэтому среди первых n элементов этой строки выбираем элемент (пусть его номер i_0), содержащий член $p^{m_1}\xi(\lambda)$ с наибольшей степенью $m_1 \geqslant 2$ относительно p. Пусть $l_c(\lambda) = \mathrm{LCM}(\xi(\lambda), l_0(\lambda))$ — наименьшее общее кратное полиномов $(\xi(\lambda), l_0(\lambda))$, т.е. $l_c(\lambda) = \xi(\lambda)\hat{l}_0(\lambda)$ и $l_c(\lambda) = l_0(\lambda)\tilde{\xi}(\lambda)$, где $\hat{l}_0(\lambda)$, $\tilde{\xi}(\lambda)$ — некоторые полиномы, делители полиномов $l_0(\lambda)$, $\xi(\lambda)$ соответственно. Домножая i_0-ю строку (она содержит $pl_0(\lambda) - \tilde{a}_{i_0,i_0}(\lambda)$) на $-p^{m_1-1}\tilde{\xi}(\lambda)$ и прибавляя к последней строке, домноженной на $\hat{l}_0(\lambda)$, понизим степень переменной p. Повторяя этот процесс, приведём последнюю строку к виду, когда переменная p будет присутствовать только в первой степени: $p\lambda\alpha(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$ — полином. Чтобы убрать в позиции с номером i_0 член вида αp, α — число, к последней строке прибавим i_0-ю строку, умноженную на $-\alpha$.

В результате в первых n позициях последней строки получим функции $\bar{g}_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, включающие члены $p\lambda\alpha(\lambda)$ ($\alpha(\lambda)$ — полином), полиномы от λ и целые дробно-рациональные функции вида (7) с полиномиальными коэффициентами от λ. Поскольку старший член полинома $d(p,\lambda)$ относительно p имеет вид $p^{n+1}(1+\lambda\tilde{\theta}(\lambda))$, $\tilde{\theta}(\lambda)$ — полином, то функция $\tilde{g}_{n+1}(p,\lambda)$ заменится на функцию $p + \bar{g}_{n+1}(p,\lambda)$, где функция $\bar{g}_{n+1}(p,\lambda)$ того же вида, что и $\bar{g}_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$.

Вернёмся к исходной системе вида (15), домножив полученную в результате описанных преобразований характеристическую матрицу справа на матрицу $L(\lambda)(1/l_0(\lambda))$. Чтобы записать последнее уравнение замкнутой системы (1) в координатной форме (6), целые дробно-рациональные функции в последней строке заменяем [23] интегралами вида (7). Эта процедура приведения замкнутой системы к нормальной форме продемонстрирована в [20, пример 1].

Как видно из описанной процедуры, в процессе приведения последней строки матрицы (15) к виду, отвечающему уравнению (6), возможно домножение последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ на делители полинома $l_0(\lambda)$. Соответственно, определитель $\hat{w}(p,\lambda)$ преобразованной матрицы (15) может приобрести некоторый множитель $\tilde{l}_0(\lambda)$, составленный из делителей полинома $l_0(\lambda)$: $\hat{w}(p,\lambda) = \tilde{l}_0(\lambda)d(p,\lambda)$. Однако других корней, кроме корней полинома $l_0(\lambda)$, процедура приведения последней строки матрицы (15) к виду, отвечающему уравнению (6), характеристическому полиному $\hat{w}(p,\lambda)$ не добавит.

Если выполнено условие (20), то $l_0(\lambda) \equiv 1$ и приведение замкнутой системы с матрицей $\tilde{W}(p,\lambda)L^v(\lambda)$ несколько упрощается (см. в [20] приведение к нормальной форме системы запаздывающего типа). При этом характеристический полином $d(p,\lambda) = |\tilde{W}(p,\lambda)|$ не изменится.

6. Построение экспоненциального стабилизатора в общем случае. Как следует из выполненного исследования, возможности модального управления спектром системы (1) определяются полиномами $d_0(p)$ и $l_0(\lambda)$, которые находятся через вычисление базиса Грёбнера (см. п. 2). При невыполнении условия (16) все полиномы $M_i(p,\lambda)$, $i = \overline{1,n+1}$, могут иметь общий множитель $\theta(p,\lambda)$, зависящий от λ и/или от p. В таком случае вместо полинома $d_0(p)$ в базисе Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ будем иметь (см. (36)) полином $\hat{d}_0(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)d_0(p)$ — последний полином, который получается при вычислении базиса Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$ в словарном порядке $\lambda > p$ по алгоритму Бухбергера.

Предложенную в пп. 3–5 схему замыкания системы (1) назовем *спектральным приведением.* Уточним роль каждого из полиномов $\hat{d}_0(p,\lambda)$, $l_0(\lambda)$ в управлении спектром системы (1). Начнём с полинома $l_0(\lambda)$. Докажем лемму.

Лемма 3. *Для экспоненциальной стабилизации системы (1) через спектральное приведение необходимо, чтобы все корни полинома* $l_0(\lambda)$, *если* $l_0(\lambda) \not\equiv 1$, *были* $|\lambda| > 1$.

Доказательство. Согласно [9] для экспоненциальной устойчивости замкнутой системы (15) необходимо, чтобы экспоненциально устойчива была соответствующая разностная система с характеристической матрицей $F(\lambda)$ (см. (21)). Поскольку $|F(\lambda)| = \theta_0(\lambda)$, то необходимо, чтобы корни полинома $\theta_0(\lambda)$ удовлетворяли неравенству $|\lambda| > 1$. Ввиду леммы 1 полином $l_0(\lambda)$ — делитель полинома $\theta_0(\lambda)$, поэтому его корни также должны быть $|\lambda| > 1$. Отсюда получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Утверждение леммы 3 равносильно следующему условию:

$$\operatorname{rank}\Big[E-\sum_{j=1}^{m}C_j\lambda^j,\hat{b}(\lambda)\Big]=n,\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad |\lambda|\leqslant 1. \tag{47}$$

Если применяется регулятор (4), (6), то последний столбец матрицы

$$\tilde{F}(\lambda)=\Big[E-\sum_{j=1}^{m}C_j\lambda^j\quad \hat{b}(\lambda)\Big]$$

нулевой $(\hat{b}(\lambda)=b(\lambda)\chi(4)=0)$, и все полиномы $l_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n+1}$, кроме последнего, равны нулю, поэтому $l_0(\lambda)=|E-\sum_{j=1}^{m}C_j\lambda^j|$. Если применяется регулятор (5), (6), то последний столбец матрицы $\tilde{F}(\lambda)$ — это $\hat{b}(\lambda)=b(\lambda)\chi(5)=b(\lambda)$, и полином $l_0(\lambda)$, вообще говоря, будет другим.

Пример 3. 1. Пусть

$$\tilde{F}(\lambda)=\begin{bmatrix}1+\lambda/2 & 0 & 0\\ 0 & 1+2\lambda & \lambda\chi(\cdot)\end{bmatrix}.$$

Если взят регулятор (4), (6), то $\chi(4)=0$, $l_0(\lambda)=(\lambda+2)(2\lambda+1)$, и ввиду леммы 3 система не может быть стабилизирована через спектральное приведение. Если взят регулятор (5), (6), то $\chi(5)=1$, $l_0(\lambda)=\lambda+2$, и наличие экспоненциального стабилизатора не исключается — зависит от конкретных коэффициентов исходной системы.

2. Пусть

$$\tilde{F}(\lambda)=\begin{bmatrix}1+2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda\chi(\cdot)\end{bmatrix}.$$

Тогда для обоих регуляторов $l_0(\lambda)=1+2\lambda$ и ввиду леммы 3 система не может быть стабилизирована через спектральное приведение.

Перейдём к анализу полинома $\hat{d}_0(p,\lambda)$. В общем случае этот полином имеет вид (см. п. 4)

$$\hat{d}_0(p,\lambda)=\theta(p,\lambda)d_0(p),\quad \theta(p,\lambda)=\hat{d}(p)\hat{\theta}(\lambda)d_2(p,\lambda), \tag{48}$$

где $\theta(p,\lambda)=\mathrm{GCD}(M(p,\lambda))$ — наибольший общий делитель системы полиномов $M(p,\lambda)$; $d_0(p)$, $\hat{d}(p)$, $\hat{\theta}(\lambda)$ — полиномы; $d_2(p,\lambda)$ — произведение неразложимых полиномов, зависящих и от p, и от λ.

1) Если $\theta(p,\lambda)\neq\mathrm{const}$, то этот полином, как общий множитель [20] системы полиномов $M(p,\lambda)$, останется в характеристическом полиноме замкнутой системы при любом регуляторе вида (4), (6) (или (5), (6)). Поэтому если $\hat{d}(p)\neq\mathrm{const}$, то для стабилизации необходимо, чтобы для всех корней данного полинома имело место неравенство $\operatorname{Re}p<0$. Если $\hat{\theta}(\lambda)\neq\mathrm{const}$, то для стабилизации необходимо, чтобы все корни полинома $\hat{\theta}(\lambda)$ были $|\lambda|>1$. Если $d_2(p,\lambda)\neq$ $\neq\mathrm{const}$, то для стабилизации необходимо, чтобы квазиполином $d_2(p,e^{-ph})$ был экспоненциально устойчив. Его корни должны удовлетворять неравенству $\operatorname{Re}p<\varepsilon$, $\varepsilon<0$ — некоторое число.

2) На корнях полинома $d_0(p)$ (множество P_0) проверяем неравенства (19). Если для значения $p_0\in P_0$ выполняется условие (19), то это значение можно исключить, добавив в регулятор интегральные слагаемые (см. примеры 1, 5). Нежелательные значения $p_0\in P_0$ можно также исключить, применив процедуру редактирования (см. примеры 2, 5). При редактировании конечной части спектра (множество P_0) в состав характеристического полинома добавится (см. п. 4) множитель $\breve{\theta}(\lambda)=\prod_{j=1}^{r_i}(\lambda-\lambda_{ij})^{s_j}$, где λ_{ij} — значения, соответствующие исключённым значениям p_i: $(p_i,\lambda_{ij})\in\hat{P}_\lambda$ (см. примеры 2, 5). Поскольку $\lambda=e^{-ph}$, то каждому значению λ_{ij} соответствует бесконечный набор спектральных значений.

3) Если при некотором $p_i \in P_0$, $i \in \overline{1,\mu}$, вектор алгебраических дополнений (17) нулевой: $M(p_i, e^{-p_i h}) = 0$, то

$$\operatorname{rank}[p_i E - A(p_i, e^{-p_i h}), \tilde{b}(p, e^{-p_i h})] < n.$$

Разлагая определитель характеристической матрицы (15) по последней строке, образованной целыми функциями, получаем, что $|\tilde{W}(p_i, e^{-p_i h})| = 0$, т.е. значение p_i остается в спектре замкнутой системы при любом выборе регулятора с дифференциально-разностными и интегральными членами. Если $\operatorname{Re} p_i \geqslant 0$, то система не может быть стабилизирована. Если $\operatorname{Re} p_i < 0$, то это значение не препятствует экспоненциальной стабилизации системы (1).

Из анализа пп. 1)–3) следует, что для экспоненциальной стабилизации системы (1) через спектральное приведение необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - \sum_{j=1}^{m}(A_j + pC_j)e^{-pjh}, \tilde{b}(p, e^{-ph})\right] = n, \tag{49}$$

где $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon < 0$ — некоторое число.

Легко видеть, что наличие у системы полиномов $M(p,\lambda)$ и, соответственно, у элементов базиса Грёбнера общего множителя вида $\theta(p,\lambda)$ алгоритм спектрального приведения, изложенный в пп. 3–5 (в п. 3 $\theta(p,\lambda) = 1$ ввиду условия (16)), существенно не меняет. Его применение раскрывает возможности изменения спектра замкнутой системы и, в частности, — экспоненциальной стабилизации системы.

Таким образом, алгоритм спектрального приведения в общем случае следующий.

1. Вычисляем редуцированный базис Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ и получаем полином $\hat{d}_0(p,\lambda)$ вида (48).

2. Если возможно и необходимо, то выполняем редактирование полинома $\hat{d}_0(p,\lambda)$, а именно, заменяем корни $p_i \in P_0$ полинома $d_0(p)$ парными значениями $\lambda_{i,j}$: $(p_i, \lambda_{i,j}) \in \hat{P}_\lambda$, полученными из уравнения (38). Считаем этот этап выполненным и вместо полинома $\hat{d}_0(p,\lambda)$, согласно (41), будем иметь $\hat{d}_1(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p)$, где полином $\theta(p,\lambda)$ описан в (48).

3. Методом неопределённых коэффициентов находим векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ вида (23) такой, что

$$\Phi(p,\lambda)M(p,\lambda) = \hat{d}_1(p,\lambda). \tag{50}$$

4. Полином $\breve{d}_0(p)$ представим в виде

$$\breve{d}_0(p) = \tilde{d}_0(p)\tilde{d}_1(p) \tag{51}$$

согласно следующему условию. Для корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ (множество его различных корней обозначим $\tilde{P}_0 = \{p_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,\tilde{\mu}} : \tilde{d}_0(p_k) = 0\}$) выполняются неравенства

$$M(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0, \tag{52}$$

и его корни исключаем из спектра замкнутой системы (15). Корни квазиполинома

$$d_1(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\tilde{d}_1(p), \quad \lambda = e^{-ph}, \tag{53}$$

или полинома $(d_1(p,\lambda) = \tilde{d}_1(p))$, если $\theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda) = \mathrm{const}$, оставляем в спектре замкнутой системы.

5. Пусть $\breve{d}(p, e^{-ph})$ — квазиполином или полином $(\breve{d}(p,\lambda) = \breve{d}(p))$, корни которого добавляем в спектр замкнутой системы. Это может понадобиться, чтобы степень характеристического полинома $d(p,\lambda)$ замкнутой системы относительно p была равна $n+1$. Согласно замечанию 7 это можно сделать за счёт выбора полинома $\breve{d}_0(p)$ на этапе редактирования конечной части спектра (см. п. 4), за счёт выбора полинома $\tilde{d}_0(p)$ и степени полинома $\breve{d}(p,\lambda)$. В частности, $\breve{d}(p,\lambda) \equiv 1$, если степень полинома $d_1(p,\lambda)$ относительно p равна $n+1$.

Сконструируем последнюю строку матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ такой, чтобы характеристический полином замкнутой системы (15) имел вид

$$d(p,\lambda) = d_1(p,\lambda)\breve{d}(p,\lambda) = \theta(p,\lambda)\breve{\theta}(\lambda)\tilde{d}_1(p)\breve{d}(p,\lambda). \tag{54}$$

5.1. Для построения регулятора, требуемого полиномом (54), функцию $K(p,\lambda)$ возьмём в виде

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + \breve{d}(p,\lambda)), \tag{55}$$

где, как и в п. 3, $\Delta(p,\lambda) = \Psi M(p,\lambda)$, Ψ — $(n+1)$-вектор. Числовой вектор $\Psi = (\psi_1,\ldots,\psi_{n+1})$ или векторный полином $\Psi(p,\lambda) = (\psi_1(p,\lambda),\ldots,\psi_{n+1}(p,\lambda))$ (см. лемму 2) подбираем таким, чтобы полином $\Delta(p,\lambda)$ удовлетворял неравенствам (26) с заменой множества P_0 на $\tilde{P}_0$:

$$\Delta(p_k, e^{-p_k h}) = \Psi(p_k, e^{-p_k h})M(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0. \tag{56}$$

Это возможно ввиду (52).

5.2. Интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра $q(\lambda)$ строим таким, чтобы функция

$$f(p,\lambda) = K(p,\lambda)/\tilde{d}_0(p), \quad \lambda = e^{-ph},$$

была целой $(p \in \mathbb{C})$. Интерполяционные значения для построения полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения (30), где вместо $d(p,\lambda)$ берём полином $\breve{d}(p,\lambda)$ и вместо P_0 берём $\tilde{P}_0 = \{p_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,\tilde{\mu}} : \tilde{d}_0(p_k) = 0\}$ — множество различных корней полинома $\tilde{d}_0(p)$, $\hat{l}_k$ — их алгебраические кратности. На корнях полинома $\tilde{d}_0(p)$ согласно (56) $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$, поэтому уравнение (30), где $p_k \in \tilde{P}_0$, относительно $q^{(i)}(\lambda_k)$, $\lambda_k = e^{-p_k h}$ при всех $i = \overline{0, \hat{l}_k - 1}$, $k = \overline{1,\tilde{\mu}}$ имеет единственное решение. Интерполирование полинома $q(\lambda)$ возможно ввиду замечания 4.

5.3. В матрице (15) последнюю строку возьмём в виде

$$(g_1(p,\lambda),\ldots,g_{n+1}(p,\lambda)) = -f(p,\lambda)\Phi(p,\lambda) - q(\lambda)d_1(p,\lambda)\Psi(p,\lambda). \tag{57}$$

Доказательство равенства $|\tilde{W}(p,\lambda)| = d(p,\lambda)$, как и в теореме 1, проводится через разложение характеристического определителя $|\tilde{W}(p,\lambda)|$ замкнутой системы (15), (57) по последней строке.

Изложенный алгоритм спектрального приведения системы (1) резюмируем в виде теоремы.

Предположим, что через вычисление базиса Грёбнера системы полиномов $M(p,\lambda)$ (см. (17)) найдены полином $\hat{d}_1(p,\lambda)$ и векторный полином $\Phi(p,\lambda)$, связанные равенством (50). Пусть $\tilde{d}_0(p)$ — полином (см. (51)), корни которого $p_k \in \tilde{P}_0$ удаляются из спектра замкнутой системы введением интегральных слагаемых; $d_1(p, e^{-ph})$ — квазиполином или полином $(d_1(p,\lambda) = \tilde{d}_1(p))$ (см. (53), (54)), корни которого остаются в спектре замкнутой системы; $\breve{d}(p, e^{-ph})$ — квазиполином или полином $(\breve{d}(p,\lambda) = \breve{d}(p))$ (см. (54)), корни которого добавляются в спектр замкнутой системы. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (52). Для того чтобы замкнутая система (15), (57) порядка $n+1$ имела характеристический полином $d(p,\lambda)$ вида (54), достаточно:*

1) через вычисление базиса Грёбнера $G_p(p,\lambda)$ системы полиномов $M(p,\lambda)$ найти полином $\hat{d}_1(p,\lambda)$ и векторный полином $\Phi(p,\lambda)$ согласно равенству (50);

2) взять полиномы $\tilde{d}_0(p)$, $d_1(p,\lambda)$ из равенств (51), (53) такими, чтобы степень полинома $d(p,\lambda)$ относительно p равнялась $n+1$;

3) найти полином $\Delta(p,\lambda)$ и $(n+1)$-векторный полином $\Psi(p,\lambda)$ из условия (56);

4) полином $q(\lambda)$ получить как решение интерполяционной задачи (30) с заменой $d(p,e^{-ph})$ на $\breve{d}(p,e^{-ph})$ и множества P_0 на $\tilde{P}_0$;

5) в матрице (15) последнюю строку положить равной (57).

Последнюю строку матрицы (15), (57) преобразуем согласно п. 5 к виду, указанному в замечании 5. Свободный член старшего коэффициента $\theta_0(\lambda)$ характеристического полинома $\tilde{w}(p,\lambda)$ преобразованной системы должен равняться $\theta_0(0)=1$. Это легко обеспечить, домножив последнюю строку матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ на подходящий числовой множитель.

Как видно из содержания теоремы 2, алгоритм спектрального приведения — это, по сути, алгоритм управления спектром системы нейтрального типа (1).

Следствие 2. *Для экспоненциальной стабилизации системы (1) через спектральное приведение необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (47), (49).*

Доказательство. Необходимость этих условий обоснована выше. Достаточность вытекает из теоремы 2, позволяющей при выполнении этих условий назначить замкнутой системе (15), (57) экспоненциально устойчивый характеристический квазиполином (см. (54))

$$d(p,e^{-ph})=\theta(p,e^{-ph})\breve{\theta}(e^{-ph})\tilde{d}_1(p)\breve{d}(p,e^{-ph}). \tag{58}$$

Действительно, согласно условию (49) решения системы

$$M_i(p,e^{-ph})=0,\quad i=\overline{1,n+1}, \tag{59}$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}p<\varepsilon,\quad \varepsilon<0 \text{ — некоторое число.} \tag{60}$$

Поскольку полином $\theta(p,\lambda)$ — общий множитель системы полиномов $M(p,\lambda)$, то корни квазиполинома $\theta(p,e^{-ph})$ также удовлетворяют неравенству (60).

Если корень $p_i\in P_0$ полинома $d_0(p)$ удовлетворяет системе (59), то он останется в спектре замкнутой системы (см. п. 3)). Поскольку для него выполнено неравенство (60), то он не препятствует экспоненциальной стабилизации системы (1). Если корень $p_i\in P_0$ не удовлетворяет системе (59), то его можно исключить из спектра замкнутой системы либо на этапе редактирования конечной части спектра, либо введением интегральных слагаемых. Поэтому квазиполином $\breve{\theta}(e^{-ph})$ и полином $\tilde{d}_1(p)$ в выражении (58), согласно алгоритму спектрального приведения, изложенному перед теоремой 2, могут быть выбраны удовлетворяющими неравенству (60). Таким же может быть выбран квазиполином $\breve{d}(p,e^{-ph})$, корни которого добавляются в спектр замкнутой системы. Таким образом, все корни характеристического квазиполинома $d(p,e^{-ph})$ вида (58) удовлетворяют критерию экспоненциальной устойчивости (10).

Определитель $d(p,\lambda)=|\tilde{W}(p,\lambda)|$ матрицы (15), (57) в процессе преобразований, указанных в замечании 5, может приобрести некоторый множитель $\tilde{l}_0(\lambda)$, составленный из делителей полинома $l_0(\lambda)$. Корни квазиполинома $\tilde{l}_0(e^{-ph})$, согласно п. 5, являются корнями квазиполинома $l_0(e^{-ph})$ и ввиду условия (47) также удовлетворяют неравенству (60). Таким образом, при выполнении условий (47), (49) алгоритм спектрального приведения позволяет построить экспоненциально устойчивую замкнутую систему с характеристическим полиномом вида $\hat{w}(p,\lambda)=\tilde{l}_0(\lambda)d(p,\lambda)$. Следствие доказано.

Проверка условий (47), (49) выполняется в ходе реализации алгоритма спектрального приведения через вычисление редуцированного базиса Грёбнера для систем алгебраических дополнений $(M_1(p,\lambda),\ldots,M_{n+1}(p,\lambda))$ и $(l_1(\lambda),\ldots,l_{n+1}(\lambda))$ к элементам последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ и матрицы $F(\lambda)$ соответственно.

Пример 4. Рассмотрим замкнутую систему с характеристической матрицей

$$\tilde{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} p+2p\lambda & 1-p\lambda/2 & -\lambda \\ 2p\lambda & p+2 & 2 \\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Здесь $b(\lambda)=(\lambda,-2)'$ и выбран регулятор (4), (6). Находим систему полиномов (17):

$$M(p,\lambda)=(M_1(p,\lambda),M_2(p,\lambda),M_3(p,\lambda))'=\big(2(\lambda+1),-2p(\lambda+1)^2,p(\lambda+1)(2+p+p\lambda)\big)'.$$

Базис Грёбнера этой системы полиномов в словарном порядке $\lambda > p$ состоит из одного элемента $G_p(p,\lambda) = \{\lambda+1\}$, соответственно, $\hat{d}_0(p,\lambda) = \theta(p,\lambda) = \lambda+1$. Характеристический полином системы, замкнутой любым дифференциально-интегроразностным регулятором вида (4), (6), будет иметь делителем полином $\lambda + 1$. При переходе к регулятору (5), (6) по-прежнему $\theta(p,\lambda) = \lambda+1$. Система не может быть стабилизирована ввиду наличия у системы полиномов $M(p,\lambda)$ множителя $\lambda + 1$, так как на корнях уравнения $e^{-ph} + 1 = 0$ нарушается условие (49). Заметим, что в обоих случаях полином $l_0(\lambda) = (\lambda+1)^2$, что также делает невозможной экспоненциальную стабилизацию данной системы согласно лемме 3.

Следствие 3. *Для экспоненциальной стабилизации системы (1) посредством дифференциально-разностного регулятора (в уравнении (6) все полиномы $\hat{v}_{ki}(\lambda)$, $\hat{q}_{ki}(\lambda)$ равны нулю) достаточно, чтобы наряду с условиями (47), (49) имело место следующее условие:*

$$\text{если } \{M(p,\lambda) = 0 : d_0(p) = 0,\ \operatorname{Re} p \geqslant 0\},\ \text{то } |\lambda| > 1. \tag{61}$$

При выполнении условия (61) спектральные значения, порождающие неустойчивые моды, могут быть удалены процедурой редактирования конечной части спектра (см. п. 4).

Экспоненциально устойчивая система с характеристическим полиномом вида (8), замкнутая дифференциально-разностным регулятором, очевидно, будет устойчива независимо от запаздываний (см. (11)).

Пример 5. Пусть характеристическая матрица системы с одномерным входом $(b(\lambda) = (0, (\lambda-2)\lambda)')$, замкнутой регулятором (4), (6), имеет вид

$$\tilde{W}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} p + p\lambda/2 & 3-\lambda & 0 \\ 1/3 & p + 5/12\lambda & (2-\lambda)\lambda \\ g_1(p,\lambda) & g_2(p,\lambda) & g_3(p,\lambda) \end{bmatrix}, \quad h = \ln 2. \tag{62}$$

Исходная система второго порядка имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ имеет вид $w(p,\lambda) = p^2(\lambda+2)/2 + 5/24 p\lambda(\lambda+2) + \lambda/3 - 1$. Легко видеть, что квазиполином $w(p, e^{-ph})$ имеет положительный корень, поскольку $w(0,1) = -2/3 < 0$; $\lim_{p\to+\infty} w(p, e^{-ph}) = +\infty$. Таким образом, невозмущённая система не является экспоненциально устойчивой.

Исследуем возможность стабилизации системы (62) через спектральное приведение.

Запишем систему $l(\lambda)$ алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1(\lambda) & k_2(\lambda) & k_3(\lambda) \end{bmatrix}$$

в виде $l(\lambda) = (0, 0, 1+\lambda/2)$.

Очевидно, что наибольший общий делитель $l_0(\lambda) = \mathrm{GCD}(l(\lambda)) = 1 + \lambda/2$, т.е. старший коэффициент $\theta_0(\lambda) = 1 + \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$ характеристического полинома замкнутой системы делится на $1 + \lambda/2 = (\lambda+2)/2$. Корень $\lambda = -2$ полинома $l_0(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $|\lambda| > 1$, значит, условие (47) экспоненциальной стабилизации выполнено.

Поскольку для регулятора (5), (6) $\hat{b}(\lambda) = (0, (\lambda-2)\lambda(p+\alpha))'$ по-прежнему $l_0(\lambda) = 1+\lambda/2$, то рассмотрим регулятор (4), (6). Так как $l_0(\lambda) \not\equiv 1$, то ввиду леммы 1 характеристический квазиполином замкнутой системы заведомо будет иметь нейтральный тип.

Запишем систему (17) алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$:

$$M(p,\lambda) = \left((\lambda^2 - 5\lambda + 6)\lambda, \frac{p(\lambda^2-4)\lambda}{2}, \frac{p^2(\lambda+2)}{2} + \frac{5p\lambda(\lambda+2)}{24} + \frac{\lambda}{3} - 1\right)'.$$

Находим базис Грёбнера этой системы полиномов в порядке $\lambda > p$:

$$G_p(p,\lambda) =$$
$$= \big((p-1)p(p+1)(6p-1), -(p+1)\left(18p^2-33p-5\lambda+15\right), -18p^3+3p^2+18p+\lambda^2-2\lambda-3\big).$$

Он содержит инвариантный полином $d_0(p) = (p-1)p(p+1)(6p-1)$, $\theta(p,\lambda) = 1$. Значит, множество $P_0 = \{0; \pm 1; 1/6\}$.

На множестве $\{0; 1; 1/6\}$ выполняются неравенства (52):

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in \{0; 1; 1/6\},$$

поэтому данные значения можно исключить из спектра, введя интегральные слагаемые. Одновременно эти неравенства означают выполнение условия (49). Таким образом, для системы (62) справедливо следствие 2. Значит, система (62) экспоненциально стабилизируема.

При $p=-1$ $M(p,e^{-ph})\big|_{p=-1} = 0$, т.е. это значение нельзя исключить из спектра замкнутой системы, но оно не препятствует экспоненциальной стабилизации.

Обратимся к множеству

$$P_\lambda = \{(-1,0), (-1,2), (0,3), (1/6,2), (1,0)\}.$$

Если $p=0$, то $\lambda = 3 > 1$, если $p = 1/6$, то $\lambda = 2 > 1$, т.е. эти значения можно исключить из набора P_0, применив процедуру редактирования. Значение $p=1$, которому соответствует $\lambda = 0$ (см. P_λ), уберём из спектра, введя интегральные слагаемые. К оставшемуся в характеристическом квазиполиноме множителю $\tilde{d}_1(p) = p+1$ добавим, например, $(p+2)(p+3)$.

Итак, замкнутой системе можно назначить следующий характеристический полином:

$$\tilde{w}(p,\lambda) = \theta_0(\lambda)(p+1)(p+2)(p+3),$$

где $\theta_0(\lambda)$ будет иметь делители: $\lambda+2$ за счёт $l_0(\lambda) = (\lambda+2)/2$ (см. лемму 1) и $(\lambda-2)(\lambda-3)$ ввиду исключения из состава полинома $d_0(p)$ множителя $p(6p-1)$.

Следуя п. 4, возьмем $\breve{d}_0(p) = (p-1)p^0(p+1)(6p-1)^0 = (p-1)(p+1)$. Вычислив базис Грёбнера $\breve{G}_\lambda(p,\lambda)$ для системы полиномов

$$\Big(d_0(p), -\breve{d}_0(p)(p+1)(18p^2-33p-5\lambda+15), \breve{d}_0(p)(-18p^3+3p^2+18p+\lambda^2-2\lambda-3)\Big)$$

в порядке $p > \lambda$, получим новый полином $\breve{\theta}(\lambda)\breve{d}_0(p) = (p-1)(p+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Значение $p=1$ исключаем из спектра посредством интегральных слагаемых. Согласно алгоритму спектрального приведения имеем полином $\tilde{d}_0(p) = p-1$ и множество $\tilde{P}_0 = \{1\}$.

Из уравнения (50), где $(\varphi_1(p,\lambda), \varphi_2(p,\lambda), \varphi_3(p,\lambda))$ — полиномы с неопределёнными коэффициентами, $\hat{d}_1(p,\lambda) = (p^2-1)(\lambda-3)(\lambda-2)/6$, заключаем, что

$$\Phi(p,\lambda) = \left(\frac{p^2\lambda}{24}, \frac{5}{24} + \frac{5p}{12} - \frac{p\lambda}{12}, 1 - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Полином $\Delta(p,\lambda)$ находим из условия (56), где $\tilde{P}_0 = \{1\}$. Так как $\lambda = e^{-h} = 1/2$, то данному условию удовлетворяет полином $M_1(p,\lambda) = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)\lambda$, поэтому возьмем $\Delta(p,\lambda) = M_1(p,\lambda)$ и, соответственно, $\Psi(\lambda) = (1,0,0)$.

Записываем (см. (55), где $\breve{d}(p,\lambda) = (p+2)(p+3)$) функцию

$$K(p,\lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p,\lambda) + (p+2)(p+3)).$$

Интерполяционное значение $q(1/2)=-32/5$ для полинома $q(\lambda)$ получаем из уравнения (30), где $p_k\in\tilde{P}_0=\{1\}$:

$$\left(q(e^{-ph})e^{-ph}(e^{-ph}-2)(e^{-ph}-3)+(p+2)(p+3)\right)\Big|_{p=1}=0.$$

Следовательно, $q(\lambda)=-32/5$. Таким образом, последняя строка характеристической матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ замкнутой системы (62) имеет вид

$$(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))=-(K(p,\lambda)/(p-1))\Phi(p,\lambda)-q(\lambda)\Psi(\lambda)(p+1)(\lambda-2)(\lambda-3)/6. \quad (63)$$

Заменяя полиномы $K(p,\lambda)$, $\Phi(p,\lambda)$, $q(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ соответствующими выражениями, получаем векторный полином $(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))$, который содержит слагаемые с третьими и вторыми степенями переменной p. Чтобы их исключить, можно применить методику п. 5 или домножить последнюю строку на $(2+\lambda)/2$ и прибавить к ней первую и вторую строки с подходящими коэффициентами. Вычислив характеристический определитель замкнутой системы, убеждаемся, что он равен

$$\tilde{w}(p,\lambda)=(p+1)(p+2)(p+3)(1-\lambda/3)(1-\lambda/2)(1+\lambda/2).$$

Поскольку из развитой выше теории нам известна структура характеристического квазиполинома замкнутой системы и вид искомого регулятора, то его можно найти методом неопределённых коэффициентов из характеристического уравнения

$$|\tilde{W}(p,\lambda)|=\theta_0(\lambda)(p+1)(p+2)(p+3),$$

$\theta_0(\lambda)$ — полином с неопределёнными коэффициентами со свободным членом, равным единице.

Общий вид последней строки матрицы $\tilde{W}(p,\lambda)$ берем из (63):

$$g_i(p,\lambda)=\alpha_{i1}(\lambda)+p\lambda\alpha_{i2}(\lambda)+\alpha_{i3}(\lambda)\frac{1-2\lambda}{p-1},\quad i=1,2;$$
$$g_3(p,\lambda)=p+\alpha_{31}(\lambda)+p\lambda\alpha_{32}(\lambda)+\alpha_{33}(\lambda)\frac{1-2\lambda}{p-1},$$

$\alpha_{ij}(\lambda)$, $i,j=\overline{1,3}$, — полиномы, степени которых можно оценить, используя уравнения для нахождения полиномов $K(p,\lambda)$, $\Phi(p,\lambda)$, $q(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$, или подобрать опытным путем, взяв их для начала достаточно высокими. В результате получим полиномиальное уравнение

$$\begin{vmatrix} p+p\lambda/2 & 3-\lambda & 0\\ 1/3 & p+5/12\lambda & (2-\lambda)\lambda\\ (p-1)g_1(p,\lambda) & (p-1)g_2(p,\lambda) & (p-1)g_3(p,\lambda)\end{vmatrix}=\theta_0(\lambda)(p-1)(p+1)(p+2)(p+3).$$

Коэффициенты полиномов $\alpha_{ij}(\lambda)$, $i,j=\overline{1,3}$, $\theta_0(\lambda)$ находим, сравнивая коэффициенты полиномов относительно p, λ в левой и правой частях последнего уравнения. В результате получим

$$(g_1(p,\lambda),g_2(p,\lambda),g_3(p,\lambda))=\biggl(\frac{5p\lambda}{72}-\frac{1-2\lambda}{p-1}+223/72+2\lambda,-\frac{5p\lambda}{72}+\frac{9(1-2\lambda)}{2(p-1)}-\frac{25}{3}-\frac{185\lambda}{288},$$
$$p-\frac{5p\lambda}{6}+\frac{p\lambda^2}{6}+6\frac{(1-2\lambda)(2-\lambda)}{p-1}+6-\frac{65\lambda}{12}+\frac{29\lambda^2}{24}\biggr), \quad (64)$$
$$\theta_0(\lambda)=(1-\lambda/3)(1-\lambda/2)(1+\lambda/2).$$

Запишем регулятор (64) в явном виде. Напомним, что λ — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования: $p^i\lambda^j\varphi(t) = \varphi^{(i)}(t-jh)$ (φ — функция, $i,j=0,1,\ldots$). Дробно-рациональные функции заменяем [23] интегралами согласно (7). На основании (64) получаем

$$u(t) = x_3(t),$$

$$\dot x_3(t) = -5/72\dot x_1(t-h) + \int\limits_0^h e^s x_1(t-s)ds - 223/72x_1(t) - 2x_1(t-h) + 5/72\dot x_2(t-h) -$$

$$- 9/2\int\limits_0^h e^s x_2(t-s)ds + 25/3x_2(t) + 185/288x_2(t-h) + 5/6\dot x_3(t-h) - 1/6\dot x_3(t-2h) -$$

$$- 6\int\limits_0^h e^s(2x_3(t-s) - x_3(t-h-s))ds - 6x_3(t) + 65/12x_3(t-h) - 29/24x_3(t-2h).$$

Можно в первых двух позициях строки (64) убрать все члены, содержащие $p\lambda$, т.е. получить регулятор запаздывающего типа. Для этого нужно строку (64) домножить на $1+\lambda/2$ и прибавить к ней первую строку, домноженную на $-5\lambda/72$, затем прибавить вторую строку, домноженную на $5\lambda(2+\lambda)/144$. Характеристический определитель замкнутой системы примет вид $\tilde w(p,\lambda) = (p+1)(p+2)(p+3)(1-\lambda/3)(1-\lambda/2)(1+\lambda/2)^2$. Все корни полученного полинома $\tilde w(p,\lambda)$ удовлетворяют неравенствам $p<0$ и $|\lambda|>1$, поэтому замкнутая система экспоненциально устойчива согласно критерию (11).

Заключение. В данной работе обоснован алгоритм модальной управляемости линейной автономной системы нейтрального типа. Этот алгоритм затем адаптирован для экспоненциальной стабилизации названной системы. Обе задачи известны как задачи управления спектром дифференциальной системы.

Регулятор вида (6) выбран из условия, чтобы обеспечить модальную управляемость и экспоненциальную стабилизацию для достаточно широкого класса систем вида (1). Наличие слагаемых нейтрального типа, содержащих производные фазовых переменных с запаздывающим аргументом, позволяет в отдельных случаях (следствие 3) решить задачу стабилизации без использования интегральных слагаемых (см. пример 2). Посредством интегральных слагаемых из спектра замкнутой системы можно исключить (см. примеры 1, 5) нежелательные значения, неустранимые дифференциально-разностным регулятором (теорема 2).

Свойство модальной управляемости позволяет назначить замкнутой системе заданный квазиполином (см. пример 1), в частности, экспоненциально устойчивый, но оно накладывает на коэффициенты системы жёсткие ограничения в виде двух ранговых условий (теорема 1). Если эти условия не выполняются, тогда возможности управления спектром замкнутой системы можно исследовать (см. примеры 2–5) через алгоритм спектрального приведения, представленный в п. 6. Названный алгоритм базируется на анализе корней полиномов. Для управления спектром системы общего вида предложены процедуры редактирования конечной части спектра (см. п. 4) и исключения нежелательных значений введением в регулятор интегральных членов (см. пп. 3, 6). Выделен случай спектрально приводимой системы (см. определение 1), когда замкнутая система имеет, возможно, бесконечный, но более удобный для анализа, спектр.

Экспоненциальная стабилизируемость заданной системы устанавливается применением алгоритма спектрального приведения, не связанного с построением функционалов Ляпунова–Красовского, решением матричных неравенств и другими традиционными методами. Для построения нужного регулятора не требуется априорная информация о расположении корней характеристического квазиполинома исходной системы.

Метод спектрального приведения, развитый в данной работе для решения задач стабилизации, является по своей сути алгебраическим и сводится к стандартным операциям над полиномами и полиномиальными матрицами, реализованным в пакетах компьютерной алгебры. Более того, излагаемый подход позволяет находить коэффициенты регулятора методом неопределённых коэффициентов. Здесь исследована система нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями. Без принципиальных осложнений [26] можно добавить интегральные члены с квазиполиномиальным ядром.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа не финансировалась за счёт средств бюджета какого-либо института (учреждения, организации). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движения управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.
3. *Manitius A., Triggiani R.* Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions // SIAM J. Control Optimization. 1978. V. 16. № 4. P. 599–645.
4. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Modal characterization of controllability and observability of time-delay systems // IEEE Transactions on Autom. Control. 1976. AC-21. № 2. P. 292–293.
5. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Autom. Control. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
6. *Watanabe K., Ito M., Kaneko M.* Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables // Int. J. Contr. 1983. V. 38. № 5. P. 913–926.
7. *Метельский А.В.* Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1119–1131.
8. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 20. № 2. P. 191–204.
9. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* Strong stabilization of neutral functional differential equations // IMA J. Math. Control Inf. 2002. V. 19. № 1–2. P. 5–23.
10. *Chen J.D., Lien C.H., Fan K.K., Chou J.H.* Criteria for asymptotic stability of a class of neutral systems via a LMI approach // IEE Proceedings — Control Theory and Applications. 2001. V. 148. № 6. P. 442–447.
11. *Rabah R., Sklyar G.M., Barkhayev P.Y.* Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. V. 18. № 3. P. 656–692.
12. *Park J.H., Won S.* Asymptotic stability of neutral systems with multiple delays // J. of Optimization Theory and Applications. 1999. V. 103. № 1. P. 183–200.
13. *Hu G.-D.* An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Math. J. 2022. V. 63. № 4. P. 789–800.
14. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.
15. *Метельский А.В., Карпук В.В.* О свойствах точечно вырожденных линейных автономных систем управления. I // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 22–34.
16. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521.
17. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
18. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285.
19. *Метельский А.В., Карпук В.В.* Финитная стабилизация дифференциальных систем с несоизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 105–119.

20. *Метельский А.В.* Стабилизация дифференциально-разностной системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 4. С. 531–553.
21. *Метельский А.В., Минюк С.А.* Критерии конструктивной идентифицируемости и полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 5. С. 15–23.
22. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 59–79.
23. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 70–83.
24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
25. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
26. *Метельский А.В.* Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 692–701.

г. Минск

Поступила в редакцию 28.08.2023 г.
После доработки 06.11.2023 г.
Принята к публикации 13.11.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 126–134

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПОСРЕДСТВОМ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОМЕХИ

© 2024 г. К. А. Щелчков

Рассматривается задача стабилизации в нуль в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования. Динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Множество значений управлений преследователя является конечным, убегающего (помехи) — компактом. Целью управления, т.е. целью преследователя, является приведение, в рамках конечного времени, траектории в любую наперёд заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Для построения управления преследователю известны только фазовые координаты в некоторые дискретные моменты времени и неизвестен выбор управления помехи. В работе получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и имеет дополнительное свойство, указанное в теореме. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменьшаемой в некотором смысле.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейные динамические системы, управление, помеха.

DOI: 10.31857/S0374064124010106, EDN: RRAGXQ

Введение. В трудах Р. Айзекса [1] первоначально рассматривались дифференциальные игры преследования–уклонения и были заложены основы теории. В настоящее время дифференциальные игры представляют собой содержательную теорию и имеют широкое поле для исследований [2–7]. Были разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе определённого уравнения в частных производных и его характеристик; метод экстремального прицеливания Красовского; метод Понтрягина и другие. Н.Н. Красовским и представителями его научной школы создана теория позиционных игр, в основе которой лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для исследования реальных конфликтно-управляемых процессов, в первую очередь нелинейных дифференциальных игр, весьма затруднительно или даже невозможно. Удобнее строить мосты, которые не являются максимальными, но обладают свойством стабильности и дают эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр, обладающих дополнительными свойствами. Построение приближений стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности, в статьях [8, 9].

Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л.С. Понтрягина получены в [10]. В работе [11] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на множество значений правой части системы дифференциальных уравнений. В статье [12] получены достаточные условия поимки в нелинейной игре, описываемой стационарной нелинейной системой, исследована оптимальность времени поимки для некоторого случая на плоскости. Результаты в ней сравнимы с представленными в настоящей работе. Условия поимки в [12] оказываются значительно сильнее условий, полученных нами, и при этом в [12] преследователь использует контрстратегию. В работе [13] рассматривается нелинейная задача управления с помехой с использованием формализации дифференциальной игры. Получены достаточные условия существования выигрышной стратегии. Статья [14] посвящена нелинейной дифференциальной игре двух лиц с интегральным критерием качества. Игроки используют кусочно-программные управления специального вида, причём временно́й интервал делится на две части. Получены необходимые и достаточные условия существования седловой точки для рассматриваемой игры. В работе [15] исследуется дифференциальная игра преследования на плоскости, динамика которой описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений определённого вида. Целевым множеством является начало координат. Получены условия осуществления поимки посредством позиционной контрстратегии и характеристики игры в явном виде, приведены примеры.

В [16] было введено понятие положительного базиса, которое в работах [16–18] эффективно использовалось для исследования свойства управляемости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном евклидовом пространстве. Получены условия управляемости в нуль нелинейной автономной системы посредством дискретного управления с конечным множеством значений управлений.

В работах [19] и [20] рассматривалась задача поимки в нелинейной дифференциальной игре, аналогичной дифференциальной игре представленной статьи. Там были получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит поимка. Ключевым среди этих условий было то, что некоторый набор векторов образует положительный базис. В [21] получены дополнительные свойства выигрышной стратегии для задачи из этой работы.

Представленная статья является продолжением исследований [19–21] с существенно более общей динамикой. Рассматривается задача стабилизации в нуль в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования. Целью управления является приведение в рамках конечного времени траектории в любую наперёд заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменьшаемой.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^k,\ k \geqslant 2,$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия; $U = \{u_1, \ldots, u_m\},\ u_i \in \in \mathbb{R}^i,\ i = \overline{1, m}$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \times V \to \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ непрерывна по совокупности переменных $x,\ v$ и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной, не зависящей от v, т.е. существует положительное число L такое, что выполняется неравенство

$$\|f(x_1, u_i, v) - f(x_2, u_i, v)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v \in V, \quad i = \overline{1, m}.$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой.

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\eta = T$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P на промежутке $[0, T]$ называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ — семейство отображений $d_r,\ r = 0, 1, \ldots, \eta - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U,\ t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию v: $[0, \infty) \to V$. Для построения управления убегающему E в начальный момент времени известно начальное положение x_0 и выбранная стратегия W преследователя P. Кроме того, игрокам известна динамика системы, т.е. функция f и множества $U,\ V$.

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$ такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

Целью преследователя является осуществление ε-поимки, цель убегающего — воспрепятствовать этому.

Отметим, что для любых $u \in U$, измеримой функции $v : [0, \infty) \to V$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^k$, справедливо неравенство

$$\|f(x,u,v(t))\| = \|f(x,u,v(t)) - f(0,u,v(t)) + f(0,u,v(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant L\|x\| + \|f(0,u,v(t))\| \leqslant L\|x\| + B$$

для некоторого положительного B. Такое B существует в силу непрерывности функции f по v, компактности V и конечности U.

Следовательно, для любого $T > 0$ и любого разбиения σ промежутка $[0, T]$ на каждом интервале разбиения выполняются условия Каратеодори существования, единственности и продолжимости вправо решения задачи Коши. Таким образом, постановка задачи корректна.

Введём следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$ — внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A; $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x; $O_\varepsilon(x)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x; $\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение векторов a, b; I — единичная матрица.

2. Теорема об ε-поимке.

Теорема 1. *Пусть*

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(0,u,v), p\rangle > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка. Кроме того, преследователю для построения стратегии достаточно использовать разбиение временнóго интервала с фиксированным шагом.

Доказательство. $\mathbf{1^0}$. Ниже будут получены величина ε_0 из условия теоремы, ряд параметров, которые будут применяться для построения стратегии преследователя, и величина шага разбиения временнóго интервала.

В силу непрерывности функции f в указанном смысле существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $x \in D_{\varepsilon_0}(0)$ справедливо неравенство

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(x,u,v), p\rangle > 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\alpha} = \min_{x\in D_{\varepsilon_0}(0)} \min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(x,u,v), p\rangle > 0. \tag{1}$$

Далее считаем, что $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $x_0 \neq 0$.

Положим

$$D = \max_{x\in D_{\varepsilon_0}(0),\, u\in U, v\in V} \|f(x,u,v)\|.$$

Определим число h вида

$$h = \frac{\overline{\alpha}}{2L}.$$

Пусть $\overline{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $x \in D_h(\overline{x})$, $v \in V$ и

$$\max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(\overline{x},u,v), p\rangle = \langle f(\overline{x},\overline{u},\overline{v}), p\rangle.$$

Отметим, что в силу (1) для любого $v \in V$ имеет место условие

$$\langle f(\overline{x},\overline{u},v), p\rangle \geqslant \overline{\alpha}.$$

Получаем оценку

$$\langle f(x,\overline{u},v), p\rangle = \langle f(\overline{x},\overline{u},v) - (f(\overline{x},\overline{u},v) - f(x,\overline{u},v)), p\rangle \geqslant \overline{\alpha} - L\|x-\overline{x}\| \geqslant \overline{\alpha} - Lh.$$

Отсюда следует, что для любых $\overline{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $x \in D_h(\overline{x})$ и $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle f(x,\overline{u},v), p\rangle \geqslant \frac{\overline{\alpha}}{2} = \alpha.$$

Зафиксируем $0 < \delta < \varepsilon_0$. Выберем шаг разбиения

$$\Delta = \min\left\{\frac{\alpha\delta}{D^2N}, \frac{h}{D}\right\},$$

где $N \geqslant 1$ — произвольное число. Отметим, что если $x(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ для всех $t \in [0, \Delta]$, то $\|x(t) - x_0\| \leqslant h$, $t \in [0, \Delta]$.

2^0. Проведём оценку приближения к нулю функции $x(\cdot)$ за один шаг разбиения.

Рассмотрим полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in \{0, \ldots, \eta - 1\}$. Отметим, что $\tau_i = i\Delta$ для всех i. Также предполагаем, что $x(\tau_i) \in D_{\varepsilon_0}(0)$. Значение управления преследователя будем выбирать следующим образом. Если $x(\tau_i) = 0$, то $\overline{u}_0 \in U$ — произвольное. В таком случае справедливо неравенство $\|x(t)\| \leqslant (t - \tau_i)D \leqslant \Delta D \leqslant \alpha\delta/D < \delta$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Если $x(\tau_i) \neq 0$, то обозначим $p = -x(\tau_i)/\|x(\tau_i)\|$ и $\overline{u}_i \in U$ выбираем из следующего максимума:

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V}\langle f(x(\tau_i), u, v), p\rangle = \langle f(x(\tau_i), \overline{u}_i, \overline{v}), p\rangle.$$

Таким образом, в силу п. 1^0 для любых $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ и $v \in V$ справедливо следующее неравенство:

$$\langle f(x(t), \overline{u}_i, v), p\rangle \geqslant \alpha.$$

Пусть $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Оценим квадрат нормы $x(t)$:

$$\|x(t)\|^2 = \left\|x(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} f(x(s), \overline{u}_i, v(s))\,ds\right\|^2 =$$

$$= \|x(\tau_i)\|^2 + \left\|\int\limits_{\tau_i}^{t} f(x(s), \overline{u}_i, v(s))\,ds\right\|^2 + 2\int\limits_{\tau_i}^{t}\langle f(x(s), \overline{u}_i, v(s)), x(\tau_i)\rangle\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|x(\tau_i)\|^2 + D^2(t-\tau_i)^2 - 2(t-\tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\|.$$

Оценим последний трёхчлен $A = \|x(\tau_i)\|^2 + D^2(t-\tau_i)^2 - 2(t-\tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\|$.

Если $\|x(\tau_i)\| \leqslant \delta$, то трёхчлен A достигает своего максимума при $\|x(\tau_i)\| = 0$ или при $\|x(\tau_i)\| = \delta$. Отметим, что в силу п. 1^0 $D > \alpha$. Тогда, если $\|x(\tau_i)\| = 0$, из условия $\Delta \leqslant \alpha\delta/D^2N$ следует

$$A = D^2(t-\tau_i)^2 \leqslant D^2\Delta^2 \leqslant \frac{\alpha^2\delta^2}{D^2N^2} < \delta^2.$$

Если $\|x(\tau_i)\| = \delta$, то

$$A = \delta^2 + D^2(t-\tau_i)^2 - 2(t-\tau_i)\alpha\delta \leqslant \delta^2 + D^2(t-\tau_i)\Delta - 2(t-\tau_i)\alpha\delta \leqslant$$

$$\leqslant \delta^2 + \frac{D^2(t-\tau_i)\alpha\delta}{D^2N} - 2(t-\tau_i)\alpha\delta \leqslant \delta^2 - (t-\tau_i)\alpha\delta < \delta^2.$$

Если $\|x(\tau_i)\| > \delta$ и $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, то

$$A \leqslant \|x(\tau_i)\|^2 + \frac{D^2(t-\tau_i)\alpha\delta}{D^2N} - 2(t-\tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\| \leqslant \|x(\tau_i)\|^2 - (t-\tau_i)\alpha\|x(\tau_i)\| < \|x(\tau_i)\|^2.$$

Если $\|x(\tau_i)\| > \delta$ и $t = \tau_{i+1}$, то

$$A \leqslant \|x(\tau_i)\|^2 + \frac{D^2\Delta\alpha\delta}{D^2N} - 2\Delta\alpha\|x(\tau_i)\| = \|x(\tau_i)\|^2 - \|x(\tau_i)\|\left(2\Delta\alpha - \frac{\Delta\alpha}{N}\right) - \frac{\Delta\alpha\|x(\tau_i)\|}{N} + \frac{\Delta\alpha\delta}{N} <$$

$$< \|x(\tau_i)\|^2 - \left(2\Delta\alpha - \frac{\Delta\alpha}{N}\right)\|x(\tau_i)\| < \left(\|x(\tau_i)\| - \Delta\alpha\left(1 - \frac{1}{2N}\right)\right)^2.$$

Таким образом, если $\|x(\tau_i)\| > \delta,$ то $\|x(t)\| < \|x(\tau_i)\|$ для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ и

$$\|x(\tau_{i+1})\| < \|x(\tau_i)\| - \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right).$$

Если $\|x(\tau_i)\| \leqslant \delta,$ то $\|x(t)\| < \delta$ для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}].$

Так как $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0),$ то в силу полученных в данном пункте оценок предполагаемое включение $x(\tau_i) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ выполняется для всех $i = 0, \ldots, \eta.$

3^0. Далее построим стратегию для приведения фазовой траектории в $D_\delta(0)$ и оценим время.

На каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}),$ $i = \overline{0, \eta - 1},$ будем выбирать управление преследователя в соответствии с п. 2^0. Выберем такое натуральное $\eta,$ что имеют место соотношения

$$\Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \eta < \|x_0\| \leqslant \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) (\eta + 1),$$

т.е.

$$\eta = \left[\frac{\|x_0\|}{\Delta\alpha(1 - 1/(2N))}\right].$$

В силу оценок п. 2^0 если $\|x(\tau_i)\| \leqslant \delta$ для некоторого $i,$ то $\|x(\tau_j)\| < \delta$ для всех $j = \overline{i+1, \eta}.$ Предположим, что $\|x(\tau_\eta)\| \geqslant \delta.$ Тогда $\|x(\tau_i)\| > \delta$ для всех $i = \overline{0, \eta - 1}.$ Следовательно, в силу оценок п. 2^0 и определения η справедливы неравенства

$$\|x(\tau_\eta)\| \leqslant \|x(\tau_{\eta-1})\| - \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \leqslant \cdots \leqslant \|x_0\| - \eta\Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \leqslant \Delta\alpha \left(1 - \frac{1}{2N}\right) < \delta,$$

т.е. получаем противоречие. Таким образом, справедливо неравенство $\|x(\tau_\eta)\| < \delta.$

Оценим τ_η:

$$\tau_\eta = \eta\Delta \leqslant \frac{\|x_0\|\Delta}{\Delta\alpha(1 - 1/(2N))} = \frac{\|x_0\|}{\alpha(1 - 1/(2N))} = \hat{T}.$$

Полученное $\hat{T}$ не зависит от $\delta,$ следовательно для любого $N \geqslant 1$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка за время $\hat{T}.$

Покажем, что в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка за время

$$T = \lim_{N\to\infty} \hat{T} = \frac{\|x_0\|}{\alpha}.$$

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем такое $N,$ что $\hat{T} \leqslant \|x_0\|/\alpha + \delta/(2D).$ За время $\hat{T}$ происходит ε-поимка, т.е. существует кусочно-постоянная стратегия преследователя, для которой $\|x(\hat{T})\| < \delta/2.$ Следовательно, так как скорость ограничена величиной $D,$ $\|x(\hat{T} - \delta/(2D))\| < < \delta.$ Таким образом, по определению ε-поимка происходит за время $T.$ Теорема доказана.

Замечание 1. Так как полученная в доказательстве теоремы 1 выигрышная стратегия преследователя гарантирует движение внутри $D_{\|x_0\|}(0),$ т.е. $x(t) \in D_{\|x_0\|}(0),$ $t \in [0, T],$ то достаточно, чтобы функция f была локально липшицевой.

Замечание 2. В силу п. 2^0 доказательства теоремы 1 при достижении целевой окрестности нуля радиуса δ преследователь может обеспечить сколь угодно долгое дальнейшее нахождение траектории системы внутри этой окрестности вне зависимости от действий помехи.

Пример 1. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + C(x)v,$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \end{pmatrix} \right\}, \quad V = D_r(0),$$

где $\beta, r > 0$, $B(0) = C(0) = I$. Здесь $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые по x квадратные матрицы, определённые на всём пространстве $\mathbb{R}^2$. Таким образом, правая часть дифференциального уравнения для каждого фиксированного u является локально липшицевой по совокупности переменных x, v.

Найдём минимум из условия теоремы 1. Он имеет следующий вид:

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle u+v, p\rangle = \gamma.$$

Нетрудно проверить из геометрических соображений, что $\gamma = \beta/\sqrt{2} - r$. Следовательно, условие теоремы выполнено при $\beta > r\sqrt{2}$.

Пример 2. Рассмотрим динамику в $\mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$\dot{x} = A(x,v)u,$$
$$U = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-\beta, \beta],$$

где $0 < \beta < \pi/4$. Здесь $A(\cdot,\cdot)$ — квадратная матрица, определённая на всём пространстве $\mathbb{R}^2 \times V$, элементы которой являются липшицевыми функциями по совокупности аргументов x, v. Кроме того, $A(0,v)$ является матрицей поворота на угол v.

Найдём минимум из условия теоремы 1:

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle A(0,v)u, p\rangle = \gamma.$$

Из геометрических соображений нетрудно проверить, что $\gamma = \cos(\pi/4 + \beta)$.

Отметим, что в примере 1 для каждого $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, справедливо равенство

$$\max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(0,u,v), p\rangle = \min_{v\in V} \max_{u\in U} \langle f(0,u,v), p\rangle.$$

Однако в данном примере это свойство не выполнено, т.е.

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \min_{v\in V} \max_{u\in U} \langle A(0,v)u, p\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \gamma.$$

3. Оценка времени ε-поимки. Справедливо

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$. Тогда ε-поимка происходит за время $T(x_0) = \|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$, где

$$\alpha(r) = \min_{x\in D_r(0)} \min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(x,u,v), p\rangle.$$

Доказательство. Так как полученная в доказательстве теоремы 1 выигрышная стратегия преследователя гарантирует движение внутри $D_{\|x_0\|}(0)$, то достаточно использовать

$$\overline{\alpha} = \min_{x\in D_{\|x_0\|}(0)} \min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \langle f(x,u,v), p\rangle.$$

Пусть $\mu \in (0,1)$. Положим

$$h(\mu) = \frac{\mu\overline{\alpha}}{L}.$$

Далее, как в п. 1^0 доказательства теоремы 1, будем использовать $h(\mu)$ вместо h. Отсюда получаем, что

$$\alpha = \overline{\alpha}(1-\mu),$$

$$\Delta = \Delta(\mu) = \min\left\{ \frac{\alpha\delta}{D^2N}, \frac{h(\mu)}{D} \right\} = \min\left\{ \frac{\overline{\alpha}(1-\mu)\delta}{D^2N}, \frac{h(\mu)}{D} \right\},$$

где $N \geqslant 1$ — произвольное число. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что ε-поимка происходит за время

$$T = T(\mu) = \frac{\|x_0\|}{\alpha} = \frac{\|x_0\|}{\overline{\alpha}(1-\mu)}.$$

Так как ε-поимка происходит для любого $\mu \in (0,1)$, то ε-поимка происходит за любое время $\hat{T} > \|x_0\|/\overline{\alpha}$. Покажем, что ε-поимка происходит за время $\|x_0\|/\overline{\alpha}$. Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем $\hat{T} = \|x_0\|/\overline{\alpha} + \delta/(2D)$. За время $\hat{T}$ происходит ε-поимка, т.е. существует кусочно-постоянная стратегия преследователя, для которой $\|x(\hat{T})\| < \delta/2$. Следовательно, так как скорость ограничена величиной D, $\|x(\hat{T} - \delta/(2D))\| < \delta$. Таким образом, по определению ε-поимка происходит за время $\|x_0\|/\overline{\alpha}$. При этом по определению $\overline{\alpha} = \alpha(r)$.

Следствие доказано.

Пример 3. Покажем, что существуют системы и начальные положения, для которых ε-поимка не происходит за любое время $T < \|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$.

Рассмотрим случай $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 + v_2, \end{cases} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = [-1,1] \times [-1,1], \quad v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0.$$

Отметим, что здесь, в силу доказательства теоремы 1, ε-поимка будет происходить из любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Для данного примера

$$\alpha(\|x_0\|) = 0.5, \quad T(x_0) = 2.$$

Оценим $x_2(t)$:

$$x_2(t) = 1 + \int\limits_0^t (u_2(s) + 1)\, ds \geqslant 1 + \int\limits_0^t (-1.5 + 1)\, ds = 1 - 0.5t.$$

Отсюда если $T \in [0,2)$, то $x(T) \notin O_{1-0.5T}(0)$. Следовательно, ε-поимка не происходит за любое время $T < 2 = T(x_0)$.

4. Сравнение с предыдущими результатами. В работах [19] и [21] рассмотрена задача, аналогичная задаче настоящей статьи, с менее общей динамикой вида

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0.$$

Здесь множества U, V определяются аналогично множествам U, V из п. 1 с постановкой задачи. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа L_1, L_2 такие, что

$$\|f(x_1,u_i) - f(x_2,u_i)\| \leqslant L_1\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1,\ldots,m,$$

$$\|g(x_1,v_1) - g(x_2,v_2)\| \leqslant L_2(\|x_1 - x_2\| + \|v_1 - v_2\|), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v_1, v_2 \in V.$$

В работе [19] доказана теорема об ε-поимке, для формулировки которой необходимо ввести дополнительное определение.

Определение 3 [16]. Совокупность векторов $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1,\ldots,\mu_n \geqslant 0$ такие, что $\xi = = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Теорема 2 [19]. *Пусть* $f(0,u_1)$, $\ldots$, $f(0,u_m)$ *образуют положительный базис и* $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0,u_1),\ldots,f(0,u_m)\})$. *Тогда существует число* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любой точки* $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ *в игре* $\Gamma(x_0)$ *происходит* ε*-поимка.*

Отметим, что с учётом доказательства теоремы 2 в формулировке теоремы можно указывать $D_{\varepsilon_0}(0)$ вместо $O_{\varepsilon_0}(0)$.

Далее используем следующее свойство положительного базиса: векторы $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}^k$ образуют положительный базис тогда и только тогда, когда для любого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся индекс $j \in \{1,\ldots,n\}$ такой, что $\langle a_j, p\rangle > 0$.

В силу условия теоремы 2 и свойств положительного базиса (см. [16]) для каждого $v \in V$ векторы $f(0,u_1)+g(0,v)$, $\ldots$, $f(0,u_m)+g(0,v)$ образуют положительный базис. Следовательно, для любых $v \in V$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся индекс $j \in \{1,\ldots,n\}$ такой, что $\langle f(0,u_j)+g(0,v),p\rangle > 0$. Таким образом, в силу липшицевости функций f и g справедливо следующее неравенство:

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k,\|p\|=1}\max_{u\in U}\min_{v\in V}\langle f(0,u)+g(0,v),p\rangle > 0,$$

т.е. выполняется условие теоремы 1.

С другой стороны, если справедливо последнее неравенство, т.е. выполняется условие теоремы 1, то для любых $v \in V$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдётся индекс $j \in \{1,\ldots,n\}$ такой, что $\langle f(0,u_j)+g(0,v),p\rangle > 0$. Отсюда, в силу свойств положительного базиса (см. [16]), найдётся такой вектор $\xi \in \mathbb{R}^k$, что функции $\hat{f}(x,u) = f(x,u) - \xi$ и $\hat{g}(x,v) = g(x,v) + \xi$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Таким образом, теоремы 1 и 2 являются эквивалентными для динамики, являющейся допустимой для обеих теорем.

В работе [21] получена оценка времени ε-поимки, которая является неуменьшаемой в том же смысле, что и в примере 1. Оценка, полученная в работе [21], имеет вид $\|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$, где

$$\alpha(r) = \min_{x\in D_r(0)}\min_{\|p\|=1}\min_{v\in V}\max_{i=1,\ldots,m}\langle f(x,u_i)+g(x,v),p\rangle.$$

Так как

$$\min_{v\in V}\max_{i=1,\ldots,m}\langle f(x,u_i)+g(x,v),p\rangle = \max_{i=1,\ldots,m}\min_{v\in V}\langle f(x,u_i)+g(x,v),p\rangle,$$

то получаем, что данное $\alpha(\cdot)$ эквивалентно $\alpha(\cdot)$ из следствия 1 для динамики $\dot{x} = f(x,u) + g(x,v)$.

Заключение. Рассмотрена задача приведения системы в любую наперёд заданную окрестность нуля в условиях воздействия помехи в терминах дифференциальной игры преследования, в которой динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Управление происходит на конечном интервале, в рамках которого преследователю требуется обеспечить возможность приведения системы в любую наперёд заданную окрестность нуля вне зависимости от действий помехи. Для построения управления преследователю известны только фазовые координаты в некоторые дискретные моменты времени и неизвестен выбор управления помехи. Получены условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит поимка в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и может быть построено с фиксированным шагом разбиения временнóго интервала. Кроме того, получена оценка времени поимки, которая является неуменьшаемой в следующем смысле: существуют системы, удовлетворяющие постановке задачи, и ненулевые начальные положения, для которых поимка в указанном смысле не происходит за любое время, меньшее оценки. Дополнительно проведено сравнение с предыдущими результатами с менее общей динамикой, которое показывает идентичность результатов при одинаковой динамике.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-01032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaacs R.* Differential Games. New York, 1965.
2. *Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G.* Quantitative and Qualitative Differential Games. New York, 1969.
3. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., 1970.
4. *Friedman A.* Differential Games. New York, 1971.
5. *Hajek O.* Pursuit Games. New York, 1975.
6. *Leitmann G.* Cooperative and Noncooperative Many-Player Differential Games. Vienna, 1974.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
8. *Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е.* Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255.
9. *Ушаков В.Н., Ершов А.А.* К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564.
10. *Никольский М.С.* Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94.
11. *Пшеничный Б.Н., Шишкина Н.Б.* Достаточные условия конечности времени преследования // Прикл. матем. и механика. 1985. Т. 49. № 4. С. 517–523.
12. *Сатимов Н.* К задаче преследования в нелинейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1973. № 3. С. 88–93.
13. *Soravia Pierpaolo.* $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear systems: differential games and viscosity solutions // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1996. V. 34. № 3. P. 1071–1097.
14. *Natarajan T., Pierre D.A., Naadimuthu E.S., Lee E.S.* Piecewise suboptimal control laws for differential games // J. of Math. Analysis and Appl. 1984. V. 104. № 1. P. 189–211.
15. *Азамов А.А.* Об одном классе нелинейных дифференциальных игр // Мат. заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 619–625.
16. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
17. *Петров Н.Н.* Локальная управляемость автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1218–1232.
18. *Петров Н.Н.* Плоские задачи теории управляемости // Вестн. ЛГУ. 1969. № 13. С. 69–78.
19. *Щелчков К.А.* Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 111–118.
20. *Shchelchkov K.* ε-capture in nonlinear differential games described by system of order two // Dyn. Games Appl. 2022. V. 12. № 2. P. 662–676.
21. *Щелчков К.А.* Оценка времени поимки и построение стратегии преследователя в нелинейной дифференциальной игре двух лиц // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. Р. 260–269.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 18.08.2023 г.
После доработки 04.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 135–142

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.632+519.651+517.956.225

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОПЕРАТОРОВ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© 2024 г. А. Б. Утесов

Построен оператор дискретизации решения уравнения Пуассона с правой частью из класса Коробова и оценена его погрешность в метрике L^p, $2 \leqslant p \leqslant \infty$. Доказано, что при $p = 2$ полученная оценка погрешности оператора дискретизации является неулучшаемой по порядку в степенной шкале. Также найдена погрешность вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье, используемых при построении оператора дискретизации. Следует отметить, что полученная оценка в одном случае лучше ранее известных оценок погрешностей операторов дискретизации, построенных по значениям правой части уравнения в узлах модифицированной сетки Коробова и сетки Смоляка, а другом — совпадает с ними с точностью до констант.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, класс Коробова, оператор дискретизации.

DOI: 10.31857/S0374064124010113, EDN: RRKIYJ

1. Введение. Постановка задачи. Уравнение Пуассона — это эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f, \tag{1}$$

которое описывает электростатическое поле, стационарное поле температуры, поле давления и потенциала скорости в гидродинамике, где $\triangle$ — оператор Лапласа, $u = u(x)$, $f = f(x)$, $s \in \{2, 3, \ldots\}$, $x = (x_1, \ldots, x_s)$.

Приведём определение класса Коробова E_s^r с параметрами $r > 1$ и $s \in \mathbb{N}$ (см., например, [1, с. 29]). *Класс Коробова* состоит из всех непрерывных на $[0,1]^s$ и 1-периодических по каждой переменной $x_1, \ldots, x_s$ функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x) \exp\{-2\pi i(m,x)\} dx, \quad m \in Z^s,$$

которых удовлетворяют условию

$$|\hat{f}(m)| \leqslant \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^r},$$

где $(m,x) = m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s$, $\overline{m}_i = \max\{1, |m_i|\}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Нетрудно проверить, что если функция f принадлежит классу Коробова и $\hat{f}(0) \neq 0$, то при любом краевом условии существует непрерывная на $[0,1]^s$ функция $\omega = \omega(x)$ с $\triangle\omega = 1$ на $[0,1]^s$ такая, что решение уравнения (1) имеет вид (см. [2])

$$u_\omega(x; f) = \omega(x)\hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}^{*} \frac{\hat{f}(m)}{(m,m)} \exp\{2\pi i(m,x)\}, \tag{2}$$

здесь и всюду ниже знак $*$ над знаком суммы означает, что вектор $m = (0, \ldots, 0) \in Z^s$ в суммировании не участвует.

Обратно, всякая достаточно гладкая функция вида (2) удовлетворяет уравнению (1) на множестве $[0,1]^s$.

Поскольку кратный функциональный ряд из (2) является бесконечным объектом, то возникает задача дискретизации (приближения) решения $u_\omega(x;f)$ конечным объектом и установления точности погрешности дискретизации.

Первый результат в задаче дискретизации решения $u_\omega(x;f)$ был получен в работе [1, с. 187]. Там автором при нечетных по каждой из $x_1,\ldots,x_s$ переменных функций $f\in E_s^r$ для решения

$$u(x;f)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in Z^s}^{*}\frac{\hat f(m)}{(m,m)}\exp\{2\pi i(m,x)\}$$

была установлена оценка

$$u(x;f)=-\frac{1}{4\pi^2 N}\sum_{k=1}^{N} f(\{a_1k/N\},\ldots,\{a_sk/N\})\times$$

$$\times\sum_{\overline{\overline{m}}\leqslant[\sqrt{N}(\ln N)^{-\beta/2}]}\frac{\exp\{2\pi i(m_1(x_1-a_1k/N)+\ldots+m_s(x_s-a_sk/N))\}}{m_1^2+\ldots+m_s^2}+\mathcal{O}\biggl(\frac{(\ln N)^{r\beta/2+s}}{N^{(r-1)/2+1/s}}\biggr), \quad (3)$$

где символом $[d]$ здесь и всюду ниже обозначена целая часть числа d, $\{d\}$ — дробная часть числа d, $\overline{\overline{m}}=\prod\limits_{i=1}^{s}\max\{1,|m_i|\}$ для каждого $m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s$, $a_1\ldots,a_s$ — целые числа взаимно простые с N такие, что для некоторых величин $\beta=\beta(s)$ и $C=C(s)$ при

$$\delta_N(l)=\begin{cases}1, & \text{если } l \text{ делится на } N,\\ 0, & \text{если } l \text{ не делится на } N\end{cases}$$

имеет место неравенство

$$\sum_{m_1=\ldots=m_s=-(N-1)}^{N-1}\frac{\delta_N(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{\overline{m}}}\leqslant C\frac{\ln^\beta N}{N}.$$

Исследования задачи дискретизации решения $u_\omega(x;f)$ уравнения Пуассона с правой частью из класса Коробова E_s^r продолжились в статьях [2, 3]. Другие результаты по дискретизации решения $u_\omega(x;f)$ можно найти в [4, гл. 3]. Также отметим обзорную статью [5], посвящённую некоторым теоретико-числовым методам решения дифференциальных уравнений в частных производных на классах Коробова.

Далее нам понадобятся следующие обозначения. Для положительных последовательностей $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ запись $a_n\underset{\alpha,\beta}{\ll}b_n$ будет означать существование некоторой величины $C(\alpha,\beta,\ldots)>0$, зависящей лишь от указанных в скобке параметров, такой, что $a_n\leqslant C(\alpha,\beta,\ldots)b_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Символом $|G|$ будем обозначать число элементов конечного множества G. Для $1\leqslant p<\infty$ через $L^p(\Omega)$ обозначается пространство измеримых на Ω функций f с нормой

$$\|f\|_p\equiv\|f\|_{L^p}=\biggl(\int\limits_\Omega|f(x)|^p dx\biggr)^{1/p}<+\infty,$$

а через $L^\infty(\Omega)$ — пространство существенно ограниченных на Ω функций f с нормой

$$\|f\|_\infty\equiv\|f\|_{L^\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|<+\infty.$$

В статье [2], используя узлы модифицированной сетки Коробова (см. [6, 7]), был построен оператор дискретизации

$$\delta_N\left(\Lambda_N(x;f)\right)=$$
$$=\sum_{\tau\in Z_+^s:\|\tau\|<n}\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k\in K(n,\tau)} f\left(k(A_{n,\tau}^{-1})'\right)\left(\omega(x)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in\rho(\tau)}^{*}\frac{\exp\{2\pi i(m,x-k(A_{n,\tau}^{-1})')\}}{(m,m)}\right) \quad (4)$$

(обозначения $\mathbb{Z}_+^S$, $\|\tau\|$, $A_{n,\tau}$, $K_{n,\tau}$, $(A_{n,\tau}^{-1})'$, $\rho(\tau)$ см. в [2]) при $f\in E_s^r$ и была оценена его погрешность в метрике L^p $(2\leqslant p\leqslant\infty)$:

$$\delta_N\left(\Lambda_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}\equiv$$
$$\equiv\sup_{f\in E_s^r}\|u_\omega(x;f)-\Lambda_N(x;f)\|_p\underset{\omega,s,r}{\ll}\begin{cases}\dfrac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}, & 1-1/p-2/s>0,\\ \dfrac{(\ln N)^{r(\beta+s)+s}}{N^r}, & 1-1/p-2/s\leqslant 0.\end{cases} \quad (5)$$

Здесь же заметим, что оценка (5), соответствующая случаю $p=\infty$, почти в «квадрат раз» лучше оценки (3).

Далее в [3], используя узлы сетки Смоляка (см., например, [8, 9]) и результаты статьи [10], был построен оператор дискретизации

$$(Jf)_N(x)=$$
$$=\omega(x)\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\Omega_{(\nu^{(0)},q)}\subset Z^s_{\nu^{(0)}}}\frac{1}{2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s-1}}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)\mathrm{sign}(\nu_j-\nu_j^{(0)})}f(k_1/2^{\nu_1},\ldots,k_s/2^{\nu_s})-$$
$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in V_q\setminus\{0\}}\frac{\exp\{2\pi i(m,x)\}}{(m,m)}\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\Omega_{(\nu(m),q)}\subset Z^s_{\nu(m)}}\frac{1}{2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}}\times$$
$$\times\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s-1}}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)\mathrm{sign}(\nu_j-\nu_j^{(0)})}f(k_1/2_1^{\nu},\ldots,k_s/2_s^{\nu})\exp\{-2\pi i(m,k/2^{\nu})\} \quad (6)$$

(обозначения $\nu^{(0)}$, $Z^s_{\nu^{(0)}}$, $\Omega_{(\nu^{(0)};q)}$, $Z^s_{\nu(m)}$, $\Omega_{(\nu(m);q)}$, V_q см. в [3]) такой, что

$$\delta_N\left((Jf)_N(x);E_s^r\right)_{L^p}\equiv$$
$$\equiv\sup_{f\in E_s^r}\|u_\omega(x;f)-(Jf)_N(x)\|_p\underset{\omega,s,r}{\ll}\begin{cases}\dfrac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}, & 1-1/p-2/s>0,\\ \dfrac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^r}, & 1-1/p-2/s<0,\\ \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)+2s-1-s/p}}{N^r}, & 1-1/p-2/s=0.\end{cases}$$

Таким образом, в случае $1-1/p-2/s>0$ оценка погрешности $\delta_N\left(\Lambda_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}$ совпадает с оценкой погрешности $\delta_N\left((Jf)_N;E_s^r\right)_{L^p}$, а в остальных двух случаях различия имеются лишь в показателях логарифмов.

2. Основные результаты. Перечислим результаты работы.

1. Построен оператор дискретизации решения уравнения Пуассона с правой частью из класса Коробова

$$\Psi_N(x;f)=\omega(x)\hat{f}(0)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in\Gamma_n}^{*}\frac{\hat{f}(m)}{(m,m)}\exp\{2\pi i(m,x)\}, \tag{7}$$

где число n выбирается по заданному натуральному N таким, что $|\Gamma_n|\leqslant N<|\Gamma_{n+1}|$ для множества $\Gamma_n=\{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s:\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s\leqslant 2^n\}$, и оценена его погрешность $\delta_N\left(\Psi_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}$ в метрике L^p $(2\leqslant p\leqslant\infty)$.

2. Найдена погрешность $\widetilde{\varepsilon}_N>0$ (определение $\widetilde{\varepsilon}_N$ дано ниже) вычисления коэффициентов Фурье $\hat{f}(m)$, $m\in\Gamma_n$, сохраняющая оценку погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x;f)$ с точностью до константы.

3. При $p=2$ доказано, что полученная оценка погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x;f)$ неулучшаема в степенной шкале.

Следует подчеркнуть, что оценка погрешности $\delta_N\left(\Psi_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}$ в случае $1-1/p-2/s\leqslant 0$ лучше оценок погрешностей $\delta_N\left(\Lambda_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}$ и $\delta_N\left((Jf)_N(x);E_s^r\right)_{L^p}$, а в случае $1-1/p-2/s>0$ совпадает с ними с точностью до констант.

Сравнив (4), (6) и (7), заключаем, что

1) оператор дискретизации $\Psi_N(x;f)$ имеет более простой вид, чем операторы дискретизации $\Lambda_N(x;f)$ и $(Jf)_N(x)$;

2) оценка погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x;f)$ при всех значениях $s\in\{2,3,\ldots\}$ и $p\in[2,+\infty)$ представлена одной формулой.

Вычисление тригонометрических коэффициентов Фурье $\hat{f}(m)$, как правило, не может быть математически точным. Поэтому, опираясь на идеи статьи [11], примем следующее

Определение. Последовательность $\varepsilon_N>0$ называется *погрешностью вычисления коэффициентов Фурье* $\hat{f}(m)$, $m\in\Gamma_n$, сохраняющей оценку погрешности оператора дискретизации $\Psi_N(x;f)$ с точностью до константы, если справедливо соотношение

$$\sup_{z=(z_1,\ldots,z_{N'})}\sup_{f\in E_s^r}\left\{\|u_\omega(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\varepsilon_N)\|_p:|z_i-\hat{f}(\widetilde{m}^{(i)})|<\varepsilon_N,i=1,\ldots,N'\right\}\underset{\omega,s,r}{\ll}$$
$$\underset{\omega,s,r}{\ll}\frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}, \tag{8}$$

где $N'=|\Gamma_n|$, $\{\widetilde{m}^{(1)}=0,\widetilde{m}^{(2)},\ldots,\widetilde{m}^{(N')}\}$ — некоторое упорядочение множества Γ_n,

$$\triangle_N(x;z;f;\varepsilon_N)=\omega(x)z_1-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=2}^{N'}\frac{z_k}{(\widetilde{m}^{(k)},\widetilde{m}^{(k)})}\exp\{2\pi i(\widetilde{m}^{(k)},x)\}. \tag{9}$$

Теперь приведём основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть даны* $s\in\{2,3,\ldots\}$, $r>1$ *и* $2\leqslant p\leqslant\infty$. *Тогда для каждого* $N=2,3,\ldots$ *имеет место неравенство*

$$\delta_N\left(\Psi_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}\equiv\sup_{f\in E_s^r}\|u_\omega(x;f)-\Psi_N(x;f)\|_p\underset{s,r}{\ll}\frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}} \tag{10}$$

и последовательность

$$\widetilde{\varepsilon}_N=\begin{cases}\dfrac{(\ln N)^r}{N^{r+1/p}}, & \text{если}\quad s=2,\\[2ex] \dfrac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^{r+1/p}}, & \text{если}\quad s=3,4,\ldots\end{cases}$$

является погрешностью вычисления коэффициентов Фурье $\hat{f}(m)$, $m \in \Gamma_n$, *сохраняющей оценку погрешности оператора дискретизации* $\Psi_N(x;f)$ *с точностью до константы.*

Теорема 2. *При* $p=2$ *оценка погрешности* $\delta_N\left(\Psi_N(x;f);E_s^r\right)_{L^p}$ *неулучшаема по порядку в степенной шкале, т.е. при увеличении показателя* $r-(1-1/p-2/s)=r-1/2+2/s$ *из оценки* $\underset{s,r}{\ll}(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}/N^{r-1/2+2/s}$ *на любое число* $\delta>0$ *нарушается неравенство (10).*

Доказательство теоремы 1.

Лемма [1, с. 125]. *При любых действительных* $\alpha>1$ *и* $t\geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1\ldots m_s\geqslant t}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^{\alpha}}\leqslant \alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1,\ldots,m_s$, *для которых произведение* $m_1\cdots m_s$ *больше или равно* t.

В силу равенств (2), (7) и равенства Парсеваля имеем

$$\|u_\omega(x;f)-\Psi_N(x;f)\|_2^2\leqslant\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\frac{|\hat{f}(m)|^2}{(m,m)^2}. \tag{11}$$

Поскольку для всех $m\neq 0$ справедливо неравенство

$$(m,m)=m_1^2+\ldots+m_s^2\geqslant(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{2/s} \tag{12}$$

(см., например, [1, с. 189]), то, учитывая включение $f\in E_s^r$, в силу сформулированной выше леммы и соотношений $|\Gamma_{n+1}|\underset{s}{\succ\prec}2^{n+1}(n+1)^{s-1}$ (см., например, [12, с. 22]),

$$2^n\underset{s}{\succ\prec}\frac{N}{\ln^{s-1}N},\quad n\underset{s}{\succ\prec}\ln N, \tag{13}$$

получаем соотношения

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\frac{|\hat{f}(m)|^2}{(m,m)^2}\leqslant\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{2r+4/s}}\leqslant\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant 2^n}\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{2r+4/s}}\underset{s,r}{\ll}$$

$$\underset{s,r}{\ll}\frac{n^{s-1}}{(2^n)^{2r+4/s-1}}\underset{s,r}{\ll}\frac{n^{s-1}}{(2^n)^{2r}(2^n)^{4/s-1}}\underset{s,r}{\ll}\frac{(\ln N)^{s-1}}{(N/(\ln N)^{s-1})^{2r}(N/(\ln N)^{s-1})^{4/s-1}}=$$

$$=\frac{(\ln N)^{s-1}(\ln N)^{2r(s-1)}(\ln N)^{(s-1)(4/s-1)}}{N^{2r-1+4/s}}=\frac{(\ln N)^{2(r+2/s)(s-1)}}{N^{2r-1+4/s}}.$$

Следовательно, согласно (11)

$$\|u_\omega(x;f)-\Psi_N(x;f)\|_2\underset{s,r}{\ll}\frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-1/2+2/s}}. \tag{14}$$

Так как для непрерывных на множестве $[0,1]^s$ функций f имеет место равенство $\|f\|_\infty = =\max\limits_{x\in[0,1]^s}|f(x)|$ (см., например, [13, гл. 13, задача 13.6]), то

$$\|u_\omega(x;f)-\Psi_N(x;f)\|_\infty\leqslant\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\frac{|\hat{f}(m)|}{(m,m)}.$$

Поэтому, повторив проведённые выше рассуждения, придём к оценке
$$\|u_\omega(x;f)-\Psi_N(x;f)\|_\infty \underset{s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-1+2/s}}. \tag{15}$$

Хорошо известно, что для любой функции $g\in C[0,1]^s$ при $p\in[2,+\infty)$ справедливо неравенство [14, с. 93]
$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_2^{2/p}\|g\|_\infty^{1-2/p}.$$

Тогда ввиду неравенств (14) и (15) с учётом произвольности функций $f\in E_s^r$ имеем
$$\sup_{f\in E_s^r}\|u_\omega(x;f)-\Psi_N(x;f)\|_p \underset{s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}. \tag{16}$$

Теперь убедимся в том, что для последовательности $\widetilde{\varepsilon}_N$ справедливо неравенство (8). Для произвольных чисел $z_1,\ \ldots,\ z_{N'}$ таких, что
$$|z_1-\hat f(\widetilde m^{(1)})|<\widetilde{\varepsilon}_N,\quad \ldots,\quad |z_{N'}-\hat f(\widetilde m^{(N')})|<\widetilde{\varepsilon}_N, \tag{17}$$
имеет место неравенство
$$\|u_\omega(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p \leqslant \|u_\omega(\cdot;f)-\Psi_N(\cdot;f)\|_p+\|\Psi_N(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p. \tag{18}$$

Понятно, что
$$\Psi_N(x;f)=\omega(x)\hat f(0)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=2}^{N'}\frac{f(\widetilde m^{(k)})}{(\widetilde m^{(k)},\widetilde m^{(k)})}\exp\{2\pi i(\widetilde m^{(k)},x)\}.$$

Поэтому в силу равенств (7) и (9), неравенств (17) и (12) имеем
$$\|\Psi_N(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p \underset{\omega,s,r}{\ll} \widetilde{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k=2}^{N'}\frac{\exp\{2\pi i(\widetilde m^{(k)},x)\}}{(\widetilde m^{(k)},\widetilde m^{(k)})}\right\|_p=$$
$$=\widetilde{\varepsilon}_N\left\|\sideset{}{^*}\sum_{m\in\Gamma_n}\frac{\exp\{2\pi i(m,x)\}}{(m,m)}\right\|_p \underset{\omega,s,r}{\ll} \widetilde{\varepsilon}_N\sideset{}{^*}\sum_{m\in\Gamma_n}\frac{1}{(m,m)} \underset{\omega,s,r}{\ll} \widetilde{\varepsilon}_N\sideset{}{^*}\sum_{m\in\Gamma_n}\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{2/s}}.$$

Следовательно,
$$\|\Psi_N(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p \underset{\omega,s,r}{\ll} \widetilde{\varepsilon}_N\int\limits_1^{2^n}\frac{dx}{x^{2/s}}. \tag{19}$$

Так как
$$\int\limits_1^{2^n}\frac{dx}{x^{2/s}} \underset{s}{\ll} \begin{cases} n, & \text{если}\quad s=2,\\ (2^n)^{(s-2)/s}, & \text{если}\quad s=3,4,\ldots,\end{cases}$$
то, используя соотношения (13) и формулу погрешности $\widetilde{\varepsilon}_N$, из (19) легко выводим оценку
$$\|\Psi_N(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p \underset{\omega,s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}.$$

Поэтому согласно неравенствам (16) и (18)
$$\|u_\omega(\cdot;f)-\triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p \underset{\omega,s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}},$$

откуда, в силу произвольности функций $f \in E_s^r$ и чисел $z_1, \ldots, z_{N'}$, удовлетворяющих условиям (17), получим

$$\sup_{z=(z_1,\ldots,z_{N'})} \sup_{f\in E_s^r} \Big\{ \|u_\omega(\cdot;f) - \triangle_N(\cdot;z;f;\widetilde{\varepsilon}_N)\|_p : |z_i - \hat{f}(\widetilde{m}^{(i)})| < \widetilde{\varepsilon}_N, i=1,\ldots,N' \Big\} \underset{\omega,s,r}{\ll}$$

$$\underset{\omega,s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-(1-1/p-2/s)}}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для каждого $N = 2, 3, \ldots$ определим множество

$$U_N = \Big\{ m \in Z^s : [N^{1/s}] \leqslant m_1 \leqslant 7[N^{1/s}], \ldots, [N^{1/s}] \leqslant m_s \leqslant 7[N^{1/s}] \Big\}.$$

Так как $|U_N| = \big(6[N^{1/s}]+1\big)^s > 2N,$ то для множества $G_N = U_N \backslash \Gamma_n$ имеет место неравенство $|G_N| > N.$ Следовательно, с учетом $G_N \subset U_N$ получим

$$\sum_{m\in G_N} \frac{1}{(m,m)^2} = \sum_{m\in G_n} \frac{1}{(m_1^2+\ldots+m_s^2)^2} \underset{s}{\gg} \frac{N}{N^{4/s}}. \tag{20}$$

Функция $g(x) = 1/(7^{sr}N^r) \sum_{m\in G_N} \exp\{2\pi i(m,x)\}$ принадлежит классу E_s^r. Действительно, согласно включению $G_N \subset U_N$ для каждого $m \in G_N$ справедливы неравенства

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \leqslant 7^s N \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{7^{sr}N^r} \leqslant \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^r} \ \Leftrightarrow\ \hat{g}(m) \leqslant \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^r}.$$

Поскольку $\hat{g}(\widetilde{m}^{(1)}) = \hat{g}(0) = 0,$ $\hat{g}(\widetilde{m}^{(2)}) = 0,$ $\ldots,$ $\hat{g}(\widetilde{m}^{(N')}) = 0,$ то

$$\Psi_N(x;g) = 0, \quad u_\omega(x;g) = -\frac{1}{4\pi^2 7^{sr} N^r} \sum_{m\in G_N} \frac{\exp\{2\pi i(m,x)\}}{(m,m)}. \tag{21}$$

В силу равенств (21) и Парсеваля, неравенства (20) имеем

$$\|u_\omega(\cdot;g) - \Psi_N(\cdot;g)\|_2 = \|u_\omega(\cdot;g)\|_2 \underset{s,r}{\gg} \frac{1}{N^r} \bigg(\sum_{m\in G_N} \frac{1}{(m,m)^2} \bigg)^{1/2} \underset{s,r}{\gg} \frac{1}{N^{r-1/2+2/s}},$$

откуда находим

$$\sup_{f\in E_s^r} \|u_\omega(\cdot;f) - \Psi_N(\cdot;f)\|_2 \underset{s,r}{\gg} \frac{1}{N^{r-1/2+2/s}}. \tag{22}$$

Поскольку $\lim\limits_{N\to\infty} N^\delta/(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)} = +\infty$ для каждого $\delta > 0,$ то, начиная с некоторого номера, справедлива оценка

$$\frac{1}{N^{r-1/2+2/s}} \underset{r,s}{\gg} \frac{(\ln N)^{(r+2/s)(s-1)}}{N^{r-1/2+2/s+\delta}}.$$

Следовательно, согласно (22) при увеличении показателя $r - 1/2 + 2/s$ из последней оценки на любое число $\delta > 0$ нарушается неравенство (10). Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные советы и замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджета Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. *Баилов Е., Темиргалиев Н.* О дискретизации решений уравнения Пуассона // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 9. С. 1515–1525.
3. *Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г.* О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 13. № 7. С. 1082–1093.
4. *Баилов Е.А.* Приближенное интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.
5. *Родионов А.В.* Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 3. С. 256–297.
6. *Шерниязов К.Е.* Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.
7. *Шерниязов К.Е.* Оптимальные методы приближенного восстановления функций и решений уравнений в частных производных вычислительными агрегатами по линейным комбинациям сеток Коробова со сверхсжатием информации и смежные вопросы // Вестн. Евразийского нац. ун-та имени Л.Н. Гумилева. Сер. Математика. Компьют. науки. Механика. 2022. Т. 139. № 2. С. 26–76.
8. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
9. *Naurizbayev N., Temirgaliyev N.* An exact order of discrepancy of the Smolyak grid and some general conclusionc in the theory of numerical integrations // Found Comput. Math. 2012. V. 12. P. 139–172.
10. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А.* Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 183–224.
11. *Утесов А.Б., Базарханова А.А.* Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1705–1714.
12. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–113.
13. *Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах. М., 2005.
14. *Temlyakov V.* Multivariate Approximation. Cambridge, 2018.

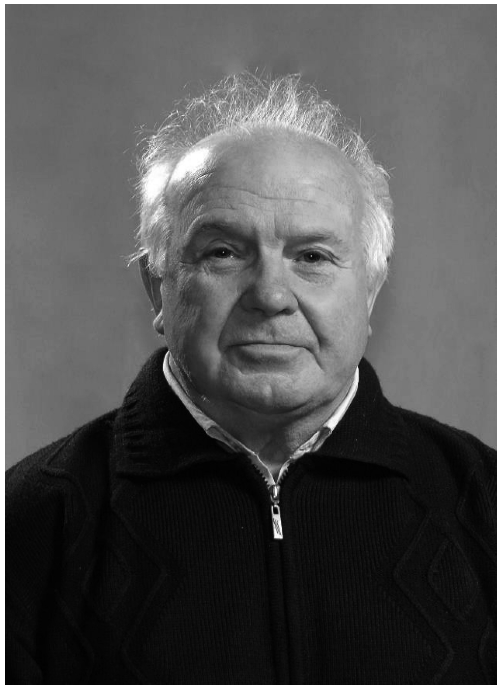
Актюбинский региональный университет
имени К. Жубанова,
г. Актобе, Казахстан

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.
После доработки 05.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 143–144

ЛЮДИ НАУКИ

К ДЕВЯНОСТОЛЕТИЮ АНАТОЛИЯ ИВАНОВИЧА ПЕРОВА



EDN: RRNLBV

30 сентября 2023 г. исполнилось 90 лет со дня рождения известного специалиста в области дифференциальных уравнений, доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Ивановича Перова.

Анатолий Иванович родился в Ленинграде. В 1951 году, окончив школу, он поступает в Воронежский государственный университет на физико-математический факультет, где знакомится с профессором Марком Александровичем Красносельским, а после окончания университета поступает к нему в аспирантуру. В дальнейшем их связывает не только совместная научная работа, но и дружба.

В 1959 году А.И. Перов защитил кандидатскую диссертацию "Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений", где рассмотрен, в частности, метод направляющих функций, позволяющий исследовать ограниченность, устойчивость, периодичность решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный метод впоследствии получил большую известность и был распространён на широкий круг задач.

После окончания аспирантуры Анатолий Иванович начинает свою преподавательскую деятельность в Воронежском университете, с которым будет связана вся его дальнейшая жизнь. В 1966 году он защищает в Физико-техническом институте низких температур (г. Харьков) диссертацию "Многомерные дифференциальные уравнения" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук и избирается на должность заведующего кафедрой вычислительной математики на математико-механическом факультете ВГУ.

С 1981 по 1987 годы А.И. Перов занимал должность декана факультета прикладной математики и механики, долгие годы заведовал кафедрой нелинейных колебаний (с момента её основания по 2003 г.). Анатолий Иванович является председателем диссертационного совета, ведёт разнообразную исследовательскую деятельность и решает практические задачи. Его работы посвящены свойствам монотонных операторов и монотонных дифференциальных уравнений, вариационным методам в теории нелинейных колебаний, периодической оптимизации (в частности, в применении к задачам управления химическими реакторами), приближённым методам, исследованию устойчивости решений матричных уравнений Лурье и Риккати, эффективным критериям устойчивости, оценкам логарифмической нормы линейного оператора на подпространстве, существованию периодических решений и эргодичности марковских цепей, и многим другим вопросам.

А.И. Перов является автором около 250 работ и 10 монографий. Под его руководством подготовлены 26 кандидатов физико-математических наук, восемь из которых (А.Г. Баскаков, А.Ю. Борисович, Г.С. Жукова, В.Г. Задорожний, Ю.В. Трубников, В.М. Тюрин, М.Б. Рагимов, В.Л. Хацкевич) в дальнешем защитили докторские диссертации.

Следуя своему жизненному кредо: “Надо уметь работать. Надо не только уметь работать, но и работать”, Анатолий Иванович продолжает активную научную деятельность, публикует новые результаты и является ярким примером учёного, педагога и организатора.

Поздравляем юбиляра и желаем ему здоровья, бодрости и новых успехов!

НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ А.И. ПЕРОВА

1. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М., 1963.
2. *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск, 1986.
3. *Перов А.И.* Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж, 1981.
4. *Перов А.И.* Формулы для нормы линейного оператора на подпространстве // Докл. Акад. наук. 1999. Т. 368. № 5. С. 601–603.
5. *Перов А.И., Евченко Е.К.* Метод направляющих функций. Воронеж, 2012.
6. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка. Воронеж, 2013.
7. *Боровских А.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения. В 2-х ч. М., 2016.

А.В. Боровских, В.Г. Задорожний, А.В. Звягин,
В.Г. Звягин, В.Г. Курбатов, В.В. Обуховский