ISSN 0374-0641

Том 60, Номер 2

Февраль 2024

ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДУ

300 лет Российская Академия Наук

НАУКА

1727

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 2, 2024

НЕКРОЛОГ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

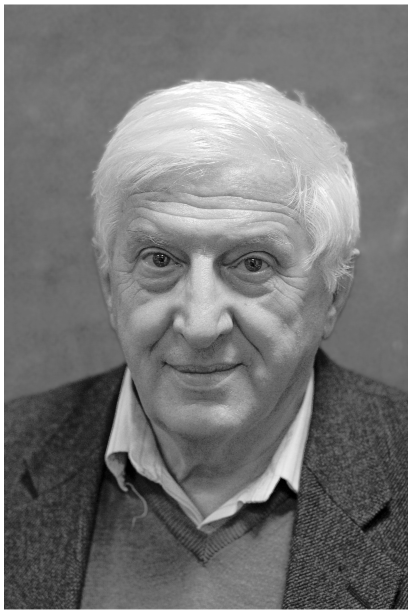
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 147

НЕКРОЛОГ



ВСЕВОЛОД АЛЕКСЕЕВИЧ СОЛОННИКОВ (08.06.1933 – 16.01.2024)

Редакционная коллегия журнала “Дифференциальные уравнения” с глубоким прискорбием сообщает, что 16 января 2024 года ушёл из жизни выдающийся советский и российский математик Всеволод Алексеевич Солонников. Его вклад в развитие теории уравнений в частных производных и математической физики огромен. В.А. Солонникову принадлежит разработка коэрцитивных оценок решений и теории разрешимости для линейных параболических уравнений и систем общего вида. Частично эти результаты вошли в получившую мировую известность монографию “Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа” (в соавторстве с О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой). Всемирно признаны и его результаты в математической гидродинамике и теории задач со свободными границами.

В.А. Солонников — автор более 290 научных работ, в том числе двух монографий. Он был приглашённым докладчиком на многих международных конференциях, в том числе на Международном конгрессе математиков в Беркли (1986). В 2003 году В.А. Солонников удостоен премии Гумбольдтовского научного фонда (Германия) и ему присвоено звание профессора университета города Феррары (Италия), а в 2017 году он был избран иностранным членом Лиссабонской академии наук.

В 2009 году В.А. Солонников стал лауреатом премии имени М.А. Лаврентьева РАН за цикл работ “Задачи со свободной границей для уравнений Навье–Стокса” (совместно с В.В. Пухначёвым), в 2013 году ему присуждена премия Правительства Санкт-Петербурга за выдающиеся научные результаты в номинации “Математика и механика” — премия имени П.Л. Чебышёва. В 2015 году ему присвоено почётное звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”.

Светлую память о Всеволоде Алексеевиче Солонникове — Учёном, Учителе и Человеке — сохранят его друзья, коллеги, ученики.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 148–156

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С СИЛЬНО ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С. А. Кащенко

Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете имени П.Г. Демидова, г. Ярославль

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 20.06.2023 г., после доработки 19.07.2023 г.; принята к публикации 11.10.2023 г.

Исследована локальная динамика логистического уравнения с запаздыванием и с дополнительной обратной связью, содержащей большое запаздывание. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. Показано, что они имеют бесконечную размерность. Хорошо известные методы изучения локальной динамики, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, здесь не применимы, поэтому использованы и развиты предложенные автором методы бесконечномерной нормализации. Построены специальные нелинейные краевые задачи параболического типа, играющие роль нормальных форм. Они определяют главные члены асимптотических разложений решений исходного уравнения, которые называют квазинормальными формами.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, запаздывание, квазинормальные формы, логистическое уравнение.

DOI: 10.31857/S0374064124020014, EDN: QQOZTV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u}(t) = -ru(t-1)[1+u(t)] \tag{1}$$

возникает в задачах математической экологии, биофизики, оптики и лазерной физики [1–4]. Здесь $r>0$ — мальтузианский коэффициент, и для решений уравнения (1) выполнено неравенство $u(t)\geqslant -1$. При условии

$$0<r<\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, а при $r>\pi/2$ — неустойчиво, и в (1) имеется устойчивый цикл. Асимптотика решения при $r\gg 1$ приведена в работах [4, 5].

В данной статье рассмотрим ситуацию, когда выполняется условие (2) и уравнение (1) содержит сильно запаздывающую обратную связь

$$\dot{u}(t) = -ru(t-1)[1+u(t)] + au(t-T), \quad T\gg 1, \tag{3}$$

а, значит, величина $\varepsilon = T^{-1}$ является малым параметром:

$$0<\varepsilon\ll 1. \tag{4}$$

Роль большого запаздывания интересна. С одной стороны, результаты, полученные для бо́льших значений T, позволяют сформулировать выводы о тенденциях изменения динамики при увеличении запаздывания, а с другой, как оказалось, — удаётся в явном виде получить значения параметров, определяющих динамические свойства исходного уравнения и сформулировать аналитические результаты.

Удобно в уравнении (3) провести нормировку времени $t \to Tt$. В результате получим сингулярно возмущённое уравнение с малым параметром при производной

$$\varepsilon\dot{u}(t)+ru(t-\varepsilon)[1+u(t)]=au(t-1). \tag{5}$$

Отметим, что вырожденное при $\varepsilon=0$ уравнение не даёт информации о поведении решений. Тем не менее идеи и методы теории сингулярных возмущений [6–8] будут существенно применяться.

При выполнении условия (4) исследуем поведение всех решений уравнения (5) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности в пространстве $C([-1,0])$ нулевого состояния равновесия.

При изучении решений из окрестности нулевого состояния равновесия важное значение имеют линеаризованное уравнение

$$\varepsilon\dot{u}(t)+ru(t-\varepsilon)=au(t-1)$$

и расположение корней характеристического квазиполинома этого уравнения:

$$\varepsilon\lambda+re^{-\varepsilon}=ae^{-\lambda}. \tag{6}$$

В силу неравенств (2) при $a=0$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Покажем, что найдётся такое значение $a=a_0>0$, что при малых ε и $|a|<a_0$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части, а при условиях (4) и $|a|>a_0$ есть корень уравнения (6) с положительной вещественной частью. При $a=a_0$ будет реализован критический случай в задаче об устойчивости, когда нет корней с положительной и отделённой от нуля вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$.

В п. 2 будет найдено значение a_0 и показано, что в критическом случае бесконечно много корней уравнения (6) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon\to 0$. Это означает, что критический случай имеет бесконечную размерность. Известные методы локального анализа, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий [9, 10] и нормальных форм [11], здесь оказываются не применимы. Исследования будут опираться на методы бесконечной нормализации, развитые в работах [12–14]. Отметим, что после публикации статей [15–18] уравнения с большим запаздыванием изучались с теоретической и прикладной точек зрения во многих работах (см., например, [19–24]).

2. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Положив в (6) $\lambda=i\varepsilon^{-1}\omega$, получим равенство

$$P(i\omega)=a\exp\{-i\varepsilon^{-1}\omega\},$$

где $P(i\omega)=i\omega+r\exp\{-i\omega\}$. Пусть $P(i\omega)=\rho(\omega)\exp\{i\Omega(\omega)\}$, $|P(i\omega)|=\rho(\omega)$. Обозначим через ρ_0 наименьшее значение $\rho(\omega)$, т. е.

$$\rho_0=\min_{\omega}\rho(\omega)=\rho(\omega_0).$$

Отметим, что $\omega_0=0$ при $0<r\leqslant 1/2$ и $\omega_0>0$ при $1/2<r<\pi/2$. Кроме того, имеем $\rho_0=0$ при $r=0$ и $r=\pi/2$. Сформулируем одно простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие (2) и для некоторого фиксированного параметра a имеет место неравенство $|a| < \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε вещественные части всех корней уравнения (6) отрицательны и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$.*

Если же $|a| > \rho_0$, то при достаточно малых ε найдётся корень (6), вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при $\varepsilon \to 0$.

Обоснование первого утверждения леммы 1 сразу следует из определения величины ρ_0. Для обоснования второго утверждения сначала введём обозначение: через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ будем обозначать такое значение, которое дополняет до целого кратного 2π выражение $\omega_0 \varepsilon^{-1}$. Отметим, что при $\omega_0 = 0$ значение $\theta = 0$. Тогда просто показать, используя теорию возмущений, что уравнение (6) имеет корень $\lambda(\varepsilon)$, для которого верна асимптотика

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta - \Omega(\omega)) + O(\varepsilon),$$

где $\lambda_0 = \ln(a\rho_0^{-1}) > 0$.

Исследования в случаях $a > 0$ и $a < 0$ не различаются, поэтому достаточно ограничиться изучением случая $a > 0$.

Из леммы 1 вытекает, что при $0 \leqslant a < \rho_0$ локальная динамика решений (3) тривиальна: все решения из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$, а в случае $a > \rho_0$ задача о динамике перестаёт быть локальной.

Рассмотрим критический случай, когда для произвольного фиксированного значения ρ_1 выполняется равенство

$$a = \rho_0 + \varepsilon^2 \rho_1. \tag{7}$$

В этом случае нет корня уравнения (6), вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при $\varepsilon \to 0$, но есть корни, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Найдём асимптотику всех тех корней (6), которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2), (4) и (7). Тогда уравнение (6) имеет бесконечно много корней $\lambda_n(\varepsilon)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, и справедливы асимптотические равенства*

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon i\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big) + \varepsilon^2 \lambda_{1n} + \varepsilon^3 \lambda_{2n} + \ldots,$$

где

$$\lambda_{1n} = -i\Omega'(\omega_0)\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big),$$

$$\lambda_{2n} = -\frac{1}{2}\big(\rho''(\omega_0)\rho_0^{-1} + i\Omega''(\omega_0)\big)\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big)^2 + i\big(\Omega'(\omega_0)\big)^2\big(\theta - \Omega(\omega_0) + 2\pi n\big) + \rho_1\rho_0^{-1}.$$

Обоснование этой леммы основано на применении стандартных методов теории возмущений. Отметим, что $\rho(0) = r$, $\rho'(0) = 0$, $\rho''(0) = (1 - 2r)r^{-1}$, $\Omega'(0) = (1 - r)r^{-1}$.

Каждому корню $\lambda_n(\varepsilon)$ уравнения (6) отвечает решение Эйлера линеаризованного уравнения

$$u_n(t, \varepsilon) = \exp\{\lambda_n(\varepsilon)t\},$$

а значит, решениями линеаризованного уравнения являются семейства функций

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n u_n(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp\{\lambda_n(\varepsilon)t\} \tag{8}$$

при произвольных значениях коэффициентов ξ_n. Преобразуем выражение (8):

$$u(t, \varepsilon) = E(t, \varepsilon) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) \exp\{i2\pi nx\} = E(t, \varepsilon)\xi(\tau, x). \tag{9}$$

Здесь $\tau=\varepsilon^2 t$, $x=(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))t$, $\xi_n(\tau)=\xi_n\exp\{(\lambda_{2n}+O(\varepsilon))\tau\}$ — коэффициенты Фурье функции $\xi(\tau,x)$. Важно отметить, что функция $\xi(\tau,x)$ 1-периодична по x,

$$E(t,\varepsilon)=\exp\{i(\omega_0+\varepsilon(\theta-\Omega(\omega_0))-\varepsilon^2\Omega'(\omega_0)(\theta-\Omega(\omega_0)))t\}. \tag{10}$$

Представление (10) следует непосредственно из (8) и из приведённой в лемме 2 асимптотики корней $\lambda_n(\varepsilon)$.

Основываясь на (9), решения нелинейного уравнения (3) тоже будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(E(t,\varepsilon)\xi(\tau,x)+\overline{cc}\big)+\varepsilon^2\big(u_{20}(\tau,x)+u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+$$
$$+\varepsilon^3\big(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon)+\overline{cc}+u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+\ldots \tag{11}$$

В (11) и ниже через $\overline{cc}$ обозначаем выражение, комплексно-сопряжённое к предыдущему слагаемому.

3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Для построения асимптотики решений нелинейного уравнения (3) будем опираться на представление (11) “критических” решений линеаризованного уравнения. Рассмотрим отдельно случаи $0<r<1/2$ и $1/2<r<\pi/2$. Эти два случая принципиально отличаются друг от друга.

3.1. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ $0<r<1/2$

При условии $0<r<1/2$ выполнены равенства $\omega_0=0$, $\Omega(\omega_0)=0$, $\rho_0=1$. Тогда из (10) следует, что $E(t,\varepsilon)\equiv 1$, поэтому решения нелинейного уравнения (3) будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon^2\xi(\tau,x)+\varepsilon^4 u_2(\tau,x)+\ldots \tag{12}$$

Здесь учитываем, что

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon^2\frac{\partial\xi}{\partial\tau}+(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\frac{\partial\xi}{\partial x},$$
$$\xi|_{t-\varepsilon}=\xi\big(\tau-\varepsilon^3,x-\varepsilon(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\big)=-\varepsilon^3\xi'_\tau-\varepsilon(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\xi'_x+\frac{1}{2}\varepsilon^2(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))\xi''_{xx}+O(\varepsilon^3),$$
$$\xi|_{t-1}=\xi(\tau-\varepsilon^2,x-(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0)))=\xi(\tau-\varepsilon^2,x+\varepsilon\Omega'(\omega_0)).$$

Подставим формальное выражение (12) в (3) и соберём коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при ε^2, получаем верное равенство. На следующем шаге, собирая коэффициенты при ε^4, приходим к соотношению

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\frac{1-2r^2}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{1-r^2}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\rho_1}{r}\xi-\xi^2. \tag{13}$$

Для неизвестной функции $\xi(\tau,x)$ выполнены краевые условия

$$\xi(\tau,x+1)\equiv\xi(\tau,x). \tag{14}$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4),* $0<r<1/2$, $a=r+\varepsilon^2\rho_1$. *Пусть* $\xi(\tau,x)$ *— ограниченное при* $\tau\to\infty$, $x\in[0,1]$, *решение краевой задачи (13), (14). Тогда функция*

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon^2\xi(\tau,x)$$

удовлетворяет уравнению (3) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

Это утверждение означает, что краевая задача (13), (14) является квазинормальной формой в рассматриваемом случае.

3.2. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ $1/2<r<\pi/2$

Подставим в уравнение (3) вместо $u(t,\varepsilon)$ функцию (11) и будем последовательно приравнивать в получившемся формальном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях ε. При первой степени ε получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при ε^2, приходим к уравнениям для определения $u_{20}(\tau,x)$ и $u_{21}(\tau,x)$:

$$(\rho_0(\omega)-r)u_{20}=2r\cos\Omega(\omega_0)|\xi|^2,$$
$$(2i\omega_0+r\exp\{-2i\omega_0\})u_{21}=\xi^2E^2(t,\varepsilon)\exp\{i\Omega(\omega_0)\}.$$

Отсюда получаем, что

$$u_{20}(\tau,x)=U_{20}|\xi(\tau,x)|^2,\quad U_{20}=2r\cos\Omega(\omega_0),$$
$$u_{21}(\tau,x)=U_{21}\xi^2(\tau,x)E^2(t,\varepsilon),\quad U_{21}=(2i\omega_0+r\exp\{-2i\omega_0\})^{-1}\exp\{i\Omega(\omega_0)\}.$$

Сделаем ещё один шаг. Соберём коэффициенты при ε^3. В итоге получим уравнения относительно $u_{31}(\tau,x)$ и $u_{32}(\tau,x)$. Функция $u_{32}(\tau,x)$ определяется просто, явное выражение для неё опустим. Для разрешимости уравнения относительно $u_{31}(\tau,x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=B_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+B_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_3\xi+\sigma\xi|\xi|^2, \tag{15}$$

где

$$B_1=\frac{1}{2}\big(\rho''(\omega_0)\rho_0^{-1}+i\Omega''(\omega_0)\big),$$
$$B_2=(\Omega'(\omega_0))^2+2iB_1(\theta-\Omega(\omega_0)),$$
$$B_3=\rho_1\rho_0^{-1}-B_1(\theta-\Omega(\omega_0))^2+i(\Omega'(\omega_0))^2(\theta-\Omega(\omega_0)),$$
$$\sigma=\big(1+\exp\{-i\Omega(\omega_0)\}\big)U_{20}+\big(\exp\{-2i\Omega(\omega_0)\}+\exp\{i\Omega(\omega_0)\}\big)U_{21}.$$

Функция $\xi(\tau,x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям

$$\xi(\tau,x+1)\equiv\xi(\tau,x). \tag{16}$$

Через $\varepsilon_n(\theta_0)$ обозначим такую последовательность $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta_0)\to 0$, что $\theta(\varepsilon_n)=\theta_0$. Напомним, что $\tau=\varepsilon^2t,\ x=(1-\varepsilon\Omega'(\omega_0))t$.

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства $1/2<r<\pi/2$ и условия (4) и (7). Фиксируем произвольно $\theta=\theta_0\in[0,2\pi]$. Пусть $\xi(\tau,x)$ — ограниченное при $\tau\to\infty,\ x\in[0,1]$, решение краевой задачи (15), (16) при $\theta=\theta_0$. Тогда функция*

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(\xi(\tau,x)E(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+\varepsilon^2\big(u_{20}(\tau,x)+u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+$$
$$+\varepsilon^3\big(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon)+\overline{cc}+u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)$$

удовлетворяет на последовательности $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\theta_0)$ уравнению (3) с точностью до $O(\varepsilon_n^4)$.

Теорема 2 утверждает, что краевая задача (15), (16) в рассматриваемом случае является квазинормальной формой для уравнения (3).

3.3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ $r=\pi/2$

Коротко изучим решение уравнения (3) при условии $r=\pi/2$. Имеем равенство $\rho_0=0$. Пусть $a=\varepsilon\rho_1$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\dot{u}(t)+\frac{\pi}{2}u(t-1)+\frac{\pi}{2}u(t)u(t-1)=\varepsilon\rho_1 u(t-\varepsilon^{-1}).$$

Линеаризованное в нуле уравнение имеет характеристический квазиполином

$$\lambda+\frac{\pi}{2}e^{-\lambda}=\varepsilon\rho_1 e^{-\varepsilon^{-1}\lambda},$$

у которого бесконечно много корней $\lambda_n(\varepsilon)$ и $\bar{\lambda}_n(\varepsilon)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ стремятся к мнимой оси при $\varepsilon\to0$. Легко проверяется, что

$$\lambda_n(\varepsilon)=i\frac{\pi}{2}+\varepsilon(\theta+\lambda_{1n})+\ldots,$$

а значения λ_{1n} находятся из уравнения

$$\Big(1-i\frac{\pi}{2}\Big)(\lambda_1+\theta)=\rho_1 e^{-\lambda}.$$

Здесь величина $\theta=\theta(\varepsilon)\in[0,2\pi)$ дополняет до целого кратного 2π значение $\pi(2\varepsilon)^{-1}$.

Решение нелинейного уравнения (3) ищем в виде

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\big(\xi(\tau)e^{it}+\overline{cc}\big)+\varepsilon u_2(t,\tau)+\varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau)+\ldots, \tag{17}$$

где $\tau=\varepsilon t$, а функции $u_{2,3}(t,\tau)$ 4-периодичны по первому аргументу. Подставляя (17) в (3) и совершая стандартные действия, на третьем шаге получаем уравнение для определения неизвестной амплитуды $\xi(\tau)$:

$$\Big(1-i\frac{\pi}{2}\Big)\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=-\theta\xi+\rho_1 e^{-i\varepsilon^{-1}}\xi(\tau-1)+\sigma\xi|\xi|^2, \tag{18}$$

в котором

$$\sigma=-\frac{\pi}{2}\big(3\pi-2+i(\pi+6)\big)\Big(10\Big(1+\frac{4}{\pi^2}\Big)\Big)^{-1}.$$

Это уравнение с запаздыванием, равным единице, является квазинормальной формой в рассматриваемом случае. Его решение определяет главные члены асимптотического разложения решений нелинейного уравнения (3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что бесконечно много корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения стремятся к мнимой оси при $\varepsilon\to0$. Реализуются бесконечномерные резонансные соотношения $1:1:1:\ldots$, поскольку главные члены асимптотики корней $\lambda_n(\varepsilon)$ одни и те же:

$$\lambda_n(\varepsilon)=i(\omega_0\varepsilon^{-1}+\theta)(1+O(\varepsilon)).$$

Отсюда следует, что критические случаи имеют бесконечномерную размерность.

С применением методов бесконечномерной нормализации построены квазинормальные формы — специальные нелинейные краевые задачи, которые определяют главные члены асимптотических разложений решений исходного логистического уравнения. Этими квазинормальными формами являются нелинейные задачи параболического типа (13), (14) и (15),

(16) и уравнение с запаздыванием (18). При условии $0 < r < 1/2$ динамика квазинормальной формы тривиальна: все решения стремятся к состоянию равновесия при $t \to \infty$. При $1/2 < r < \pi/2$ ситуация иная. Структура решений соответствующей квазинормальной формы может быть сложной, поскольку эта форма представляет собой комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с периодическими граничными условиями. Известно, что уравнения типа Гинзбурга–Ландау могут иметь и нерегулярную динамику, и много различных аттракторов, и т. д.

Рассмотрены динамические свойства решений при значениях параметра r, близкого к $\pi/2$. Для этого случая показано, что квазинормальной формой является нелинейное уравнение с (конечным) запаздыванием. Динамика таких уравнений тоже может отличаться сложностью, например, может существовать бесконечное число различных циклов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright, E.M. A non-linear difference-differential equation / E.M. Wright // J. fur die reine und angewandte Mathematik. — 1955. — Bd. 194. — S. 66–87.
2. Kuang, Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics / Y. Kuang. — Boston : Academic Press, 1993.
3. Wu, J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. — New York : Springer-Verlag, 1996.
4. Кащенко, С.А. Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием / С.А. Кащенко. — М. : КРАСАНД, 2020. — 576 с.
5. Kashchenko, S.A. Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation / S.A. Kashchenko // Automatic Control and Comput. Sciences. — 2013. — V. 47, № 7. — P. 470–494.
6. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
7. Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, O. Omel'chenko, L. Recke // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. — 2022. — V. 27, № 8. — P. 4255–4283.
8. Nefedov, N.N. Development of methods of asymptotic analysis of transitionlayers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications / N.N. Nefedov // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 2021. — V. 61, № 12. — P. 2068–2087.
9. Hale, J.K. Theory of Functional Differential Equations / J.K. Hale. — New York : Springer-Verlag, 1977. — 366 p.
10. Hartman, P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 612 p.
11. Брюно, А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А.Д. Брюно. — М. : Наука, 1979. — 255 с.
12. Кащенко, С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 8. — С. 1448–1451.
13. Kashchenko, S.A. Normalization in the systems with small diffusion / S.A. Kashchenko // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. — 1996. — V. 6. — P. 1093–1109.
14. Kashchenko, S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay / S.A. Kashchenko // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 1998. — V. 38, № 3. — P. 443–451.

15. Mensour, B. Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations / B. Mensour, A. Longtin // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 113, № 1. — P. 1–25.
16. Wolfrum, M. Eckhaus instability in systems with large delay / M. Wolfrum, S. Yanchuk // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 96, № 22. — Art. 220201.
17. Bestehorn, M. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback / M. Bestehorn, E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — V. 145, № 1–2. — P. 110–129.
18. Giacomelli, G. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems / G. Giacomelli, A. Politi // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 117, № 1–4. — P. 26–42.
19. Synchronization properties of network motifs: influence of coupling delay and symmetry / O. D'Huys, R. Vicente, T. Erneux, J. Danckaert, I. Fischer // Chaos: An Interdisciplinary J. of Nonlinear Science. — 2008. — V. 18, № 3. — Art. 37116.
20. Yanchuk, S. Delay and periodicity / S. Yanchuk, P. Perlikowski // Phys. Rev. E. — 2009. — V. 79, № 4. — P. 1–9.
21. Klinshov, V.V. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators / V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin // Chaos, Solitons and Fractals. — 2011. — V. 44, № 1–3. — P. 98–107.
22. Клиньшов, В.В. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями / В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин // Успехи физ. наук. — 2013. — Т. 183, № 12. — С. 1323–1336.
23. Klinshov, V. Jittering waves in rings of pulse oscillators / V. Klinshov, D. Shchapin, S. Yanchuk, V. Nekorkin // Phys. Rev. E. — 2016. — V. 94, № 1. — Art. 012206.
24. Kashchenko, S.A. Van der Pol equation with a large feedback delay / S.A. Kashchenko // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 6. — Art. 1301.

LOGISTIC EQUATION WITH LONG DELAY FEEDBACK

S. A. Kashchenko

Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

We study the local dynamics of a logistic equation with delay and with additional feedback containing a large delay. Critical cases in the problem of stability of the zero equilibrium state are identified and it is shown that they have infinite dimension. Well-known methods for studying local dynamics, based on the application of the theory of invariant integral manifolds and normal forms, are not applicable here. Methods of infinite-dimensional normalization proposed by the author are used and developed. As the main results, special nonlinear boundary value problems of parabolic type are constructed, which play the role of normal forms. They determine the main terms of the asymptotic expansions of solutions to the original equation. They are called quasinormal forms.

Keywords: dynamics, stability, delay, quasi-normal forms, logistic equation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project 21-71-30011).

REFERENCES

1. Wright, E.M. A non-linear difference-differential equation / E.M. Wright // J. fur die reine und angewandte Mathematik. — 1955. — Bd. 194. — S. 66–87.
2. Kuang, Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics / Y. Kuang. — Boston : Academic Press, 1993.
3. Wu, J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu. — New York : Springer-Verlag, 1996.
4. Kashchenko S.A. Dinamika modeley na osnove logisticheskogo uravneniya s zapazdyvaniyem / S.A. Kashchenko. — Moscow : KRASAND, 2020. — 576 p. [in Russian]

5. Kashchenko, S.A. Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation / S.A. Kashchenko // Automatic Control and Comput. Sciences. — 2013. — V. 47, № 7. — P. 470–494.
6. Vasil'eva A.B. Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations / A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov. — Moscow : Nauka, 1973. [in Russian]
7. Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems / V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, O. Omel'chenko, L. Recke // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. — 2022. — V. 27, № 8. — P. 4255–4283.
8. Nefedov, N.N. Development of methods of asymptotic analysis of transitionlayers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications / N.N. Nefedov // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 2021. — V. 61, № 12. — P. 2068–2087.
9. Hale, J.K. Theory of Functional Differential Equations / J.K. Hale. — New York : Springer-Verlag, 1977. — 366 p.
10. Hartman, P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 612 p.
11. Bruno, A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations / A.D. Bruno. — Berlin : Springer-Verlag, 1989. — 255 p.
12. Kashchenko, S.A. Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative / S.A. Kashchenko // Differents. Uravneniya. — 1989. — V. 25, № 8. — P. 1448–1451.
13. Kashchenko, S.A. Normalization in the systems with small diffusion / S.A. Kashchenko // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. — 1996. — V. 6. — P. 1093–1109.
14. Kashchenko, S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay / S.A. Kashchenko // Comput. Mathematics and Math. Physics. — 1998. — V. 38, № 3. — P. 443–451.
15. Mensour, B. Power spectra and dynamical invariants for delay-differential and difference equations / B. Mensour, A. Longtin // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 113, № 1. — P. 1–25.
16. Wolfrum, M. Eckhaus instability in systems with large delay / M. Wolfrum, S. Yanchuk // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V. 96, № 22. — Art. 220201.
17. Bestehorn, M. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback / M. Bestehorn, E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — V. 145, № 1–2. — P. 110–129.
18. Giacomelli, G. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems / G. Giacomelli, A. Politi // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — V. 117, № 1–4. — P. 26–42.
19. Synchronization properties of network motifs: influence of coupling delay and symmetry / O. D'Huys, R. Vicente, T. Erneux, J. Danckaert, I. Fischer // Chaos: An Interdisciplinary J. of Nonlinear Science. — 2008. — V. 18, № 3. — Art. 37116.
20. Yanchuk, S. Delay and periodicity / S. Yanchuk, P. Perlikowski // Phys. Rev. E. — 2009. — V. 79, № 4. — P. 1–9.
21. Klinshov, V.V. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators / V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin // Chaos, Solitons and Fractals. — 2011. — V. 44, № 1–3. — P. 98–107.
22. Klinshov V.V. Synchronization of delay-coupled oscillator networks / V.V. Klinshov, V.I. Nekorkin // Phys. Usp. — 2013. — V. 56. — P. 1217–1229.
23. Klinshov, V. Jittering waves in rings of pulse oscillators / V. Klinshov, D. Shchapin, S. Yanchuk, V. Nekorkin // Phys. Rev. E. — 2016. — V. 94, № 1. — Art. 012206.
24. Kashchenko, S.A. Van der Pol equation with a large feedback delay / S.A. Kashchenko // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 6. — Art. 1301.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 157–174

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРЕ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. С. Макин

Российский университет дружбы народов, г. Москва

e-mail: alexmakin@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.02.2023 г., после доработки 13.02.2023 г.; принята к публикации 13.11.2023 г.

Рассмотрена спектральная задача для оператора Дирака с произвольными двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым с квадратом потенциалом $V(x)$. Установлены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристическим определителем указанного оператора. В случае нерегулярных краевых условий найдены условия, при выполнении которых множество комплексных чисел является спектром рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: оператор Дирака, характеристический определитель, спектр.

DOI: 10.31857/S0374064124020024, EDN: QOXJKB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0,\pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$U_1(\mathbf{y}) = a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(\mathbf{y}) = a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \tag{3}$$

в которых коэффициенты a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = \overline{1,4}$, являются произвольными комплексными числами, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Строение спектра оператора (1), (3) с регулярными краевыми условиями изучалось во многих работах, среди которых отметим [1–8]. Обширный список литературы по указанной теме приведён в обзоре [4]. Значительно менее исследованными остаются задачи (1)–(3)

с краевыми условиями, не являющимися регулярными (т.е. нерегулярными или вырожденными), изучение спектра которых составляет основное содержание настоящей работы. Пример задачи (1)–(3) с вырожденными краевыми условиями, система корневых функций которой содержит присоединенные функции сколь угодно высокого порядка, был построен в статье [9].

Обозначим через $\|f\| = (|f_1|^2 + |f_2|^2)^{1/2}$ норму произвольного вектора $f = \mathrm{col}(f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2$ и положим $\langle f, g\rangle = f_1\bar{g}_1 + f_2\bar{g}_2$, а через $\|W\| = \sup_{\|f\|=1} \|Wf\|$ обозначим норму произвольной матрицы W размера 2×2. Обозначим через $L_{2,2}(a,b)$ пространство двумерных вектор-функций $f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t))$ с нормой $\|f\|_{L_{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|f(t)\|^2 dt)^{1/2}$ и через $L_{2,2}^{2,2}(a,b)$ пространство матриц-функций $W(t)$ размера 2×2 с нормой $\|W\|_{L_{2,2}^{2,2}(a,b)} = (\int_a^b \|W(t)\|^2 dt)^{1/2}$. Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ будем рассматривать как линейный оператор в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi]\colon \mathbb{L}\mathbf{y} \in L_{2,2}(0,\pi),\ U_j(\mathbf{y}) = 0,\ j = 1,2\}$.

Обозначим через

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) & -s_2(x,\lambda) \\ s_1(x,\lambda) & c_2(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{4}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0,\lambda) = I$, где I — единичная матрица, и через $E_0(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений невозмущённого уравнения $B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}$ с краевыми условиями $E_0(0,\lambda) = I$. Очевидно, что

$$E_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) & -\sin(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) & \cos(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что элементы матрицы $E(x,\lambda)$ связаны соотношением

$$c_1(x,\lambda)c_2(x,\lambda) + s_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda) = 1, \tag{5}$$

справедливом при любых x, λ.

Собственные значения задачи (1)–(3) являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_1(E^{[2]}(\cdot,\lambda)) \\ U_2(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_2(E^{[2]}(\cdot,\lambda)) \end{vmatrix},$$

$E^{[k]}(x,\lambda)$ — k-й столбец матрицы (4).

Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A, $J_0 := J_{12} + J_{34}$, $J_1 := J_{14} - J_{23}$, $J_2 := J_{13} + J_{24}$.

Методом оператора преобразования в работе [2] было показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1)–(3) может быть приведён к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= J_{12} + J_{34} + J_{14}c_2(\pi,\lambda) - J_{23}c_1(\pi,\lambda) - J_{13}s_2(\pi,\lambda) - J_{24}s_1(\pi,\lambda) = \\ &= \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}dt + \int_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}dt, \end{aligned} \tag{6}$$

где функция

$$\Delta_0(\lambda) = J_0 + J_1\cos(\pi\lambda) - J_2\sin(\pi\lambda) = J_0 + \frac{J_1 + iJ_2}{2}e^{i\pi\lambda} + \frac{J_1 - iJ_2}{2}e^{-i\pi\lambda} \tag{7}$$

является характеристическим определителем невозмущённой задачи

$$B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0, \tag{8}$$

а функции $r_j \in L_2(0,\pi)$, $j=1,2$.

Краевые условия (2), (3) могут быть разделены на четыре основных типа.

Определение 1. Краевые условия (2), (3) называются *регулярными*, если

$$J_1^2 + J_2^2 = (J_{14} + J_{32})^2 + (J_{13} + J_{24})^2 \neq 0, \tag{9}$$

и *усиленно регулярными*, если дополнительно выполняется неравенство

$$J_0^2 \neq J_1^2 - J_2^2. \tag{10}$$

Определение 2. Краевые условия (2), (3) называются *регулярными*, но *не усиленно регулярными*, если справедливо (9), но (10) не имеет места, т.е.

$$J_0^2 = J_1^2 - J_2^2.$$

Определение 3. Краевые условия (2), (3) называются *нерегулярными*, если

$$J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \quad J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0.$$

Определение 4. Краевые условия (2), (3) называются *вырожденными*, если

$$J_1 = J_2 = 0; \quad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \quad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0.$$

Легко видеть, что краевые условия (2), (3) являются вырожденными тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ не имеет корней или $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$.

Обозначим $c_j(\lambda) = c_j(\pi,\lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi,\lambda)$, $j=1,2$. Через PW_σ обозначим класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких, что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$. Известно [10], что функции $c_j(\lambda)$, $s_j(\lambda)$ допускают представление

$$c_j(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g_j(\lambda), \quad s_j(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h_j(\lambda),$$

где $g_j, h_j \in PW_\pi$, $j=1,2$.

Лемма (см. [5]). *Целые функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускают представления*

$$u(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h(\lambda), \quad v(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g(\lambda),$$

где $h, g \in PW_\pi$, тогда и только тогда, когда

$$u(\lambda) = -\pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n}, \quad \lambda_n = n + \epsilon_n, \quad \{\epsilon_n\} \in l_2,$$

$$v(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2}, \quad \lambda_n = n - 1/2 + \kappa_n, \quad \{\kappa_n\} \in l_2.$$

Сходимость бесконечных произведений понимается в смысле главного значения.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье будем изучать задачу (1)–(3) при выполнении условий

$$J_{14}\neq 0, \quad J_{23}\neq 0, \quad J_{13}J_{24}=0. \tag{11}$$

Соотношениям (11) удовлетворяет широкий класс краевых условий, например, условия, задаваемые матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

где $a_1d_2b_2c_1\neq 0$, или

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_2d_1b_1c_2\neq 0$; в том числе усиленно регулярные условия, если

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $a\neq 0$, $a\neq \pm 1$; регулярные, но не усиленно регулярные, если в (12) $a=\pm 1$; нерегулярные, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вырожденные условия, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что условия (12) при $a\neq 0$, $a\neq \pm 1$ являются квазипериодическими, при $a=-1$ — периодическими и при $a=1$ — антипериодическими.

Рассмотрим систему Дирака (1)–(3), (11). Очевидно, что хотя бы одно из чисел J_{13}, J_{24} равно нулю. Пусть $J_{24}=0$, случай $J_{13}=0$ рассматривается совершенно аналогично. Из (6), (7) следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ этой задачи может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda)=J_0+J_{14}c_2(\lambda)-J_{23}c_1(\lambda)-J_{13}s_2(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+f(\lambda), \tag{13}$$

где $\Delta_0(\lambda)=J_0+(J_{14}-J_{23})\cos(\pi\lambda)-J_{13}\sin(\pi\lambda)$, $f\in PW_\pi$.

Теорема 1. *Если $J_{14}+J_{23}\neq 0$, то для любой функции $f\in PW_\pi$ существует потенциал $V\in L_2(0,\pi)$ такой, что для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ задачи (1)–(3), (11) с потенциалом $V(x)$ справедливо равенство (13). Если $J_{14}+J_{23}=0$, то последнее утверждение справедливо при выполнении дополнительного условия*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|<\infty. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из класса PW_π. Из теоремы Пэли–Винера и [11, лемма 1.3.1] следует, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|}f(\lambda)=0. \tag{15}$$

Пусть λ_n $(n\in\mathbb{Z})$ — некоторая строго монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условию $(*)$: $\lambda_n=n$, если $n>N_0$, где N_0 — некоторое натуральное число, и $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ для любого $n\neq 0$.

Обозначим
$$s(\lambda)=-\pi(\lambda_0-\lambda)\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{n}. \tag{16}$$

Из леммы следует, что
$$s(\lambda)=\sin(\pi\lambda)+h(\lambda), \tag{17}$$

где $h\in PW_\pi$, поэтому
$$|s(\lambda)|\geqslant C_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{18}$$

если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$, где M – достаточно большое число. Из (16) вытекает, что
$$\dot{s}(\lambda_0)=\pi\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{n}>0.$$

Легко видеть, что неравенство $\dot{s}(\lambda_n)\dot{s}(\lambda_{n+1})<0$ имеет место для всех $n\in\mathbb{Z}$. Из двух последних неравенств следует, что
$$(-1)^n\dot{s}(\lambda_n)>0.$$

Из соотношения (17) и [10, лемма 2.1] вытекает, что
$$\dot{s}(\lambda_n)=\pi(-1)^n+\tau_n,$$

где $\{\tau_n\}\in l_2$, следовательно,
$$\frac{1}{\dot{s}(\lambda_n)}=\frac{(-1)^n}{\pi}+\sigma_n,\quad \{\sigma_n\}\in l_2. \tag{19}$$

Обозначим $\alpha=J_{14}$, $\beta=-J_{23}$, $\gamma=-J_{13}$, $u_+(\lambda)=(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda)$. Заметим, что
$$\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0. \tag{20}$$

Рассмотрим уравнение
$$\alpha w^2-u_+(\lambda_n)w+\beta=0, \tag{21}$$

корни которого определяются по формуле
$$c_n^{\pm}=\frac{u_+(\lambda_n)\pm\sqrt{u_+^2(\lambda_n)-4\alpha\beta}}{2\alpha}.$$

Подставив в неё выражение для $u_+(\lambda_n)$, получим
$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm\sqrt{((\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\alpha\beta}\Big]=$$
$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm$$
$$\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))+(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-(\alpha+\beta)^2\sin^2(\pi\lambda_n)}\Big].$$

Введём следующие обозначения:

$$F^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda)\pm\sqrt{((\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda))^2-4\alpha\beta}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda)\pm$$

$$\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)(\gamma\sin\pi\lambda+f(\lambda))+(\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda))^2-(\alpha+\beta)^2\sin^2(\pi\lambda)}\Big],$$

$$F_0^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)\pm\sqrt{((\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda))^2-4\alpha\beta}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)\gamma\cos(\pi\lambda)\sin(\pi\lambda)+(\gamma^2-(\alpha+\beta)^2)\sin^2(\pi\lambda)}\Big].$$

Обозначим также через $\Gamma(z,r)$ круг с центром в точке z радиуса r. Пусть $\alpha\neq\beta$. Возможны следующие случаи.

1. $\operatorname{Im}(\beta/\alpha)\neq 0$. Пусть прямая l_0 проходит через точки 1 и $-\beta/\alpha$, а прямая l проходит через начало координат и параллельна l_0. Очевидно, существует число ε_0 такое, что круги $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ и $\Gamma(-\beta/\alpha,\varepsilon_0)$ лежат строго по одну сторону от прямой l.

Из (15) и (20) следует, что существует чётное положительное $\tilde N$ такое, что

$$|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{22}$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\tilde N-1$, $\lambda=k$, $k\in\mathbb{Z}$. Из (23) вытекает, что существует $0<\delta_0<1/4$ такое, что

$$|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{23}$$

при $\lambda=\pm\tilde N$, $|z|<\delta_0$. Определим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ следующим образом: $\lambda_n=n$, если $n\geqslant\tilde N+1$, и пусть $\lambda_n=\tilde N+\epsilon_n$, $0<\epsilon_1<\ldots<\epsilon_{\tilde N}<\delta$, если $n=\overline{1,\tilde N}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ при $n\neq 0$, $\lambda_0=\tilde N$. Очевидно, $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Получаем, что если $|n|\geqslant\tilde N+1$, то все числа $(-1)^n c_n^+$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ при чётных n, а все числа $(-1)^n c_n^-$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ при нечётных n. Пусть $c_n=c_n^+$, если n чётно, и $c_n=c_n^-$, если n нечётно, следовательно, числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$.

Пусть $|n|\leqslant\tilde N$, тогда из (22) и (23) следует, что

$$|F^{\pm}(\lambda_n)-F_0^{\pm}(\tilde N)|<\varepsilon_0.$$

Очевидно, что в силу чётности $\tilde N$ все числа c_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, а все числа c_n^- лежат внутри круга $\Gamma(\beta/\alpha,\varepsilon_0)$. Положим $c_n=c_n^+$, если n чётно, тогда числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$. Пусть $c_n=c_n^-$, если n нечётно, тогда числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(-\beta/\alpha,\varepsilon_0)$, Таким образом, все числа $(-1)^n c_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ лежат строго по одну сторону от прямой l.

2. $\operatorname{Im}(\beta/\alpha)=0$, $\operatorname{Re}(\beta/\alpha)<0$. Здесь существует число ε_0 такое, что круги $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ и $\Gamma(-\beta/\alpha,\varepsilon_0)$ лежат строго правее мнимой оси. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что все числа $(-1)^n c_n$ лежат строго правее мнимой оси.

3. $\operatorname{Im}(\beta/\alpha)=0$, $\operatorname{Re}(\beta/\alpha)>0$. Обозначим $\tilde\alpha=\alpha\bar\alpha$, $\tilde\beta=\beta\bar\alpha$, $\tilde\gamma=\gamma\bar\alpha$, $\tilde f(\lambda)=\bar\alpha f(\lambda)$, тогда $\tilde\alpha>0$, $\tilde\beta>0$. Легко видеть, что

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\tilde\alpha}\Big[(\tilde\alpha+\tilde\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\tilde\gamma\sin(\pi\lambda_n)+\tilde f(\lambda_n)\pm\sqrt{((\tilde\alpha+\tilde\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\tilde\gamma\sin(\pi\lambda_n)+\tilde f(\lambda_n))^2-4\tilde\alpha\tilde\beta}\Big].$$

Обозначим

$$R^{\pm}=\frac{1}{2\tilde\alpha}\Big[\tilde\gamma\pm\sqrt{\tilde\gamma^2-4\tilde\alpha\tilde\beta}\Big].$$

3.1. $\operatorname{Im}R^{+}\operatorname{Im}R^{-}<0$. В этом случае

$$\tilde\gamma^2-4\tilde\alpha\tilde\beta\neq 0. \tag{24}$$

Пусть для определённости $\operatorname{Im}R^{+}>0$, тогда $\operatorname{Im}R^{-}<0$. Из (24) следует, что существует $\varepsilon_1>0$ такое, что круги $\Gamma(R^{+},\varepsilon_1)$ и $\Gamma(R^{-},\epsilon_1)$ лежат строго по разные стороны от некоторой прямой l, проходящей через начало координат и отличной от вещественной оси. Очевидно, что существует число ε_2, $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$, такое, что круг $\Gamma(-1,\varepsilon_2)$ не пересекается с l, следовательно, круг $\Gamma(-1,\varepsilon_2)$ расположен строго по одну сторону от прямой l. Из (15) и (20) вытекает, что существует нечётное положительное число $\hat N$ такое, что

$$|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_1}{2} \tag{25}$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\hat N-1$, $\lambda=k$, $k\in\mathbb{Z}$. В силу (24) существует $0<\delta_1<1/4$ такое, что

$$|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_2}{2}, \tag{26}$$

если $\lambda=\pm(\hat N-1)$, $|z|<\delta_1$.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ следующим образом: $\lambda_n=n$, если $n\geqslant\hat N+1$, и пусть $\lambda_n=\hat N-1/2+\epsilon_n$, $0<\epsilon_1<\ldots<\epsilon_{\hat N}<\delta_1$, если $n=\overline{1,\hat N}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ при $n\neq 0$, $\lambda_0=\hat N-1/2$. Очевидно, что $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Получаем, что если $|n|\geqslant\tilde N+1$, то все числа c_n^{+} лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_1)$ при чётных n, а все числа c_n^{-} лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_1)$ при нечётных n. Положим $c_n=c_n^{+}$, если n чётно, и $c_n=c_n^{-}$, если n нечётно, следовательно, числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_1)$.

Пусть $|n|\leqslant\tilde N$, тогда из (25), (26) следует, что

$$|F^{\pm}(\lambda_n)-F_0^{\pm}(\hat N-1/2)|<\varepsilon_1,$$

а числа $c_n^{+}\in\Gamma(R^{+},\varepsilon_1)$, $c_n^{-}\in\Gamma(R^{-},\varepsilon_1)$. Предположим, например, что круг $\Gamma(R^{+},\varepsilon_1)$ лежит по одну сторону от прямой l с кругом $\Gamma(1,\varepsilon_0)$. Положим $c_n=c_n^{+}$, если n чётно, и $c_n=c_n^{-}$, если n нечётно, тогда все числа $(-1)^n c_n$, $n\in\mathbb{Z}$, лежат строго по одну сторону от прямой l.

3.2. $\operatorname{Im}R^{+}=\operatorname{Im}R^{-}=0$. Существует число $\varepsilon_3>0$ такое, что круг $\Gamma(-1,\varepsilon_3)$ лежит строго ниже прямой $l_1: y=-x$, причём круг $\Gamma\Big(i\sqrt{\tilde\beta/\tilde\alpha},\varepsilon_3\Big)$ лежит строго выше прямой l_1, а круг $\Gamma\Big(-i\sqrt{\tilde\beta/\tilde\alpha},\varepsilon_3\Big)$ — строго ниже l_1.

Очевидно, что $\tilde\gamma/\tilde\alpha$ вещественно, следовательно, $\tilde\gamma$ вещественно.

Рассмотрим уравнение

$$(\tilde\alpha+\tilde\beta)\cos t+\tilde\gamma\sin t=0.$$

Так как $\tilde\alpha+\tilde\beta\neq 0$, оно имеет корни

$$t_n=\operatorname{arcctg}\frac{-\tilde\gamma}{\tilde\alpha+\tilde\beta}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Обозначим

$$h_0=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{-\tilde\gamma}{\tilde\alpha+\tilde\beta}.$$

Из (15) и (20) вытекает, что существует положительное число $\hat{N}$ такое, что

$$|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_3}{2}$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\hat{N}-1$, $\lambda=k-1$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\lambda_n=\hat{\lambda}=t_{\hat{N}-1}/\pi$, а также существует $\delta_3>0$ такое, что

$$|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_3}{2},$$

если $\lambda=\pm\hat{\lambda}$, $|z|<\delta$.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ следующим образом: $\lambda_n=n$ при $n\geqslant\hat{N}+1$, а если $1\leqslant n\leqslant\hat{N}$, то $\lambda_n=\hat{\lambda}+\epsilon_n$, где $0<\epsilon_1<\ldots<\epsilon_{\hat{N}}<\min\{\delta,1/2-h_0\}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ при $n\neq0$, $\lambda_0=\hat{\lambda}$. Очевидно, что $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Легко видеть, что если $|n|\geqslant\tilde{N}+1$, то все числа c_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, если n чётно, а все числа c_n^- лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$, если n нечётно. Положим $c_n=s_n^+$, если n чётно, и $c_n=s_n^-$, если n нечётно, следовательно, числа $(-1)^nc_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$.

Пусть $|n|\leqslant\tilde{N}$, тогда $c_n^+\in\Gamma(i\sqrt{\beta/\alpha},\varepsilon_2)$, $c_n^-\in\Gamma(-i\sqrt{\beta/\alpha},\varepsilon_2)$. Пусть $c_n=c_n^+$ при чётном n, и $c_n=c_n^-$ при нечётном n. Тогда все числа $(-1)^nc_n$ лежат строго выше прямой l. Так как [12] $\{f(\lambda_n)\}\in l_2$, то из определения чисел c_n следует, что всегда

$$c_n=(-1)^n+\vartheta_n,\quad \{\vartheta_n\}\in l_2. \tag{27}$$

Рассмотрим случай $\alpha=\beta$. Тогда

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\alpha}\Big[2\alpha\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm\sqrt{(2\alpha\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\alpha^2}\Big]=$$
$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[2\alpha\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm$$
$$\pm\sqrt{4\alpha\cos(\pi\lambda_n)(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))+(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\alpha^2\sin^2(\pi\lambda_n)}\Big].$$

Обозначим $\tilde{\alpha}=\alpha\bar{\alpha}$, $\tilde{\beta}=\beta\bar{\alpha}$, $\tilde{\gamma}=\gamma\bar{\alpha}$, $\tilde{f}(\lambda)=\bar{\alpha}f(\lambda)$, тогда $\tilde{\alpha}>0$,

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\tilde{\alpha}}\Big[2\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)+\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm\sqrt{(2\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)+\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\tilde{\alpha}^2}\Big]=$$
$$=\frac{1}{2\tilde{\alpha}}\Big[2\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)+\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm$$
$$\pm\sqrt{4\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)(\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))+(\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\tilde{\alpha}^2\sin^2(\pi\lambda_n)}\Big].$$

Далее аналогично случаю 3 строится последовательность c_n такая, что все числа $(-1)^nc_n$ лежат строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат. Из определения чисел c_n и условия (14) вытекает, что выполняется равенство (27).

Отсюда следует, что все числа $z_n=c_n/\dot{s}(\lambda_n)$ во всех случаях лежат строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, а из (19) и (27) вытекает, что

$$z_n=\frac{1}{\pi}+\rho_n,\quad \{\rho_n\}\in l_2.$$

Пусть $\beta_n=c_n-\cos(\pi\lambda_n)$, тогда из (27) следует, что $\{\beta_n\}\in l_2$. Обозначим

$$h(\lambda)=s(\lambda)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_n}{\dot{s}(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}.$$

Согласно [13, с. 120] функция $h\in PW_\pi$ и $h(\lambda_n)=\beta_n$. Обозначим $c(\lambda)=\cos(\pi\lambda)+h(\lambda)$, тогда $c(\lambda_n)=c_n\neq 0$, следовательно, функции $c(\lambda)$ и $s(\lambda)$ не имеют общих корней.

Обозначим также второй столбец матрицы $E_0(x,\lambda)$ через

$$Y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin(\lambda x)\\ \cos(\lambda x)\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$F(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{c_n}{\dot s(\lambda_n)}Y_0(x,\lambda_n)Y_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\pi}Y_0(x,n)Y_0^T(t,n)\Big).$$

Из [10] следует, что

$$\|F(\cdot,x)\|_{L^{2,2}_{2,2}(0,\pi)}+\|F(x,\cdot)\|_{L^{2,2}_{2,2}(0,\pi)}<C_2,$$

где C_2 не зависит от x.

Используя установленные выше свойства чисел z_n, докажем, что для каждого $x\in[0,\pi]$ однородное уравнение типа Гельфанда–Левитана

$$\mathbf{f}^T(t)+\int_0^x \mathbf{f}^T(s)F(s,t)ds=0, \tag{28}$$

где $\mathbf{f}(t)=\mathrm{col}(f_1(t),f_2(t))$, $\mathbf{f}\in L_{2,2}(0,x)$, $\mathbf{f}(t)=0$, если $x<t\leqslant\pi$, имеет лишь тривиальное решение.

Умножая уравнение (28) на $\overline{\mathbf{f}^T(t)}$ и интегрируя полученное уравнение на отрезке $[0,x]$, получаем

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L_{2,2}(0,x)}+\int_0^x\Big\langle\int_0^x \mathbf{f}^T(s)F(s,t)ds,\mathbf{f}^T(t)\Big\rangle dt=0. \tag{29}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{gathered}\mathbf{f}^T(s)F(s,t)=\\
=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{z_n\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t),\\
-f_1(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)\Big]-\\
-\frac{1}{\pi}\Big[f_1(s)\sin(ns)\sin(nt)-f_2(s)\cos(ns)\sin(nt),\\
-f_1(s)\sin(ns)\cos(nt)+f_2(s)\cos(ns)\cos(nt)\Big]\Big\}=\\
=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{z_n\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)\Big]-\\
-\frac{1}{\pi}\Big[f_1(s)\sin(ns)\sin(nt)-f_2(s)\cos(ns)\sin(nt)\Big],\\
z_n\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)\Big]-\\
-\frac{1}{\pi}\Big[-f_1(s)\sin(ns)\cos(nt)+f_2(s)\cos(ns)\cos(nt)\Big]\Big\}.\end{gathered} \tag{30}$$

Подставляя правую часть (30) во второй член в левой части (29), преобразуя повторные интегралы в произведения интегралов и используя вещественность всех чисел λ_n, находим, что

$$\int\limits_0^x \Big\langle \int\limits_0^x \mathbf{f}^T(s)F(s,t)ds, \mathbf{f}^T(t)\Big\rangle dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^x\bigg(\int\limits_0^x\bigg\{z_n\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)\Big]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\Big[f_1(s)\sin(ns)\sin(nt)-f_2(s)\cos(ns)\sin(nt)\Big]\bigg\}ds\bigg)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^x\bigg(\int\limits_0^x\bigg\{z_n\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)\Big]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\Big[-f_1(s)\sin(ns)\cos(nt)+f_2(s)\cos(ns)\cos(nt)\Big]\bigg\}ds\bigg)\overline{f_2(t)}dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg(z_n\int\limits_0^x\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int\limits_0^x\sin(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\Big[f_1(s)\sin(ns)-f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int\limits_0^x\sin(nt)\overline{f_1(t)}dt\bigg)+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg(z_n\int\limits_0^x\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int\limits_0^x\cos(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\Big[-f_1(s)\sin(ns)+f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int\limits_0^x\cos(nt)\overline{f_2(t)}dt\bigg)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\bigg(\int\limits_0^x\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int\limits_0^x\sin(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\int\limits_0^x\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int\limits_0^x\cos(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}dt\bigg)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\bigg(\int\limits_0^x\Big[f_1(s)\sin(ns)-f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int\limits_0^x\sin(nt)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\int\limits_0^x\Big[-f_1(s)\sin(ns)+f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int\limits_0^x\cos(nt)\overline{f_2(t)}dt\bigg)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\bigg(\int\limits_0^x\Big[f_1(t)\sin(\lambda_n t)-f_2(t)\cos(\lambda_n t)\Big]dt\int\limits_0^x\sin(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\int\limits_0^x\Big[-f_1(t)\sin(\lambda_n t)+f_2(t)\cos(\lambda_n t)\Big]dt\int\limits_0^x\cos(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}dt\bigg)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\bigg(\int\limits_0^x\Big[f_1(t)\sin(nt)-f_2(t)\cos(nt)\Big]dt\int\limits_0^x\sin(nt)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\int\limits_0^x\Big[-f_1(t)\sin(nt)+f_2(t)\cos(nt)\Big]dt\int\limits_0^x\cos(nt)\overline{f_2(t)}dt\bigg)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\int\limits_0^x\Big[f_1(t)\sin(\lambda_n t)-f_2(t)\cos(\lambda_n t)\Big]dt\int\limits_0^x\Big[\overline{f_1(t)}\sin(\lambda_n t)-\overline{f_2(t)}\cos(\lambda_n t)\Big]dt-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\Big[f_1(t)\sin(nt)-f_2(t)\cos(nt)\Big]dt\int\limits_0^x\Big[\overline{f_1(t)}\sin(nt)-\overline{f_2(t)}\cos(nt)\Big]dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\bigg|\int\limits_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle dt\bigg|^2-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\bigg|\int\limits_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,n)\rangle dt\bigg|^2. \tag{31}$$

Хорошо известно, что система функций $\{Y_0(t,n)/\sqrt{\pi}\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$, поэтому из равенства Парсеваля вытекает, что

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L_{2,2}(0,x)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\bigg|\int\limits_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,n)\rangle dt\bigg|^2. \tag{32}$$

Из (29), (31) и (32) следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\bigg|\int\limits_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle dt\bigg|^2=0.$$

Так как все числа z_n расположены строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, то

$$\int\limits_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle dt=0$$

для всех $n\in\mathbb{Z}$. Из (17) вытекает, что функция $s(\lambda)$ является функцией типа синуса [13, с. 118–119], поэтому [1, лемма 5.3] система $Y_0(t,\lambda_n)$ является базисом Рисса в $L_{2,2}(0,\pi)$, а значит, система $Y_0(t,\lambda_n)$ полна в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$, откуда следует, что $\mathbf{f}(t)\equiv 0$.

Согласно [10, теорема 5.1] функции $c(\lambda)$ и $-s(\lambda)$ являются элементами первой строки матрицы монодромии

$$\tilde{E}(\pi,\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{c}_1(\pi,\lambda) & -\tilde{s}_2(\pi,\lambda)\\ \tilde{s}_1(\pi,\lambda) & \tilde{c}_2(\pi,\lambda)\end{pmatrix}$$

задачи (1)–(3) с потенциалом $\tilde{V}\in L_2$, т.е.

$$c(\lambda)=\tilde{c}_1(\pi,\lambda),\quad s(\lambda)=\tilde{s}_2(\pi,\lambda). \tag{33}$$

Из (13) находим, что соответствующий характеристический определитель равен

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=J_0+\alpha\tilde{c}_2(\lambda)+\beta\tilde{c}_1(\lambda)+\gamma\tilde{s}_1(\lambda)=J_0+(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+\tilde{f}(\lambda),\quad \tilde{f}\in PW_\pi.$$

Из (5), (21) и (33) получаем, что

$$\tilde{\Delta}(\lambda_n) = J_0 + \alpha\tilde{c}_2(\pi,\lambda_n) + \beta\tilde{c}_1(\pi,\lambda_n) = J_0 + \frac{\alpha}{\tilde{c}_1(\pi,\lambda_n)} + \beta\tilde{c}_1(\pi,\lambda_n) =$$
$$= J_0 + \frac{\beta}{c(\lambda_n)} + \alpha c(\lambda_n) = J_0 + u_+(\lambda_n) = U(\lambda_n).$$

Отсюда следует, что функция

$$\Phi(\lambda) = \frac{U(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)}{s(\lambda)} = \frac{f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)}{s(\lambda)}$$

является целой функцией на всей комплексной плоскости.

Так как
$$|f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)| < c_1 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{34}$$
то из (18) имеем, что $|\Phi(\lambda)| \leqslant c_2$, если $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M$. Обозначим через H объединение вертикальных отрезков $\{z : |\operatorname{Re} z| = n + 1/2,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant M\}$, где $|n| = N_0+1, N_0+2, \ldots$ Поскольку $c(\lambda)$ является функцией типа синуса [14], то $|s(\lambda)| > \delta > 0$, если $\lambda \in H$. Из последнего неравенства, (34) и принципа максимума модуля аналитической функции находим, что $|\Phi(\lambda)| < c_3$ в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant M$, следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости и в силу теоремы Лиувилля является постоянной. Пусть $|\operatorname{Im}\lambda| = M$. Тогда из (15) получаем, что $\lim_{|\lambda|\to\infty}(f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) = 0$, а значит, $\Phi(\lambda) \equiv 0$, откуда вытекает, что $U(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}(\lambda)$. Теорема 1 доказана.

Дополнительно предположим, что условия (2), (3) нерегулярные, тогда характеристическое уравнение невозмущённой задачи (8) может быть приведено к виду

$$\Delta_0(\lambda) = d - e^{i\pi\lambda} = 0, \tag{35}$$

где $d \neq 0$. Пусть $d = e^{i\pi t}$, где $0 \leqslant \operatorname{Re} t < 2$. Из тривиального равенства

$$1 - e^{i\pi\lambda} = -2ie^{i\pi\lambda/2}\sin(\pi\lambda/2)$$

и хорошо известного разложения функции $\sin z$ в бесконечное произведение следует, что

$$\Delta_0(\lambda) = -i\pi e^{i\pi(t+\lambda)/2}(\lambda - t)\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{2n+t-\lambda}{2n},$$

и тогда уравнение (35) имеет корни

$$\lambda_n^0 = 2n + t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2. *Если $J_{14} + J_{23} \neq 0$, то для любой последовательности*

$$\lambda_n = 2n + t + \varepsilon_n, \tag{36}$$

где $\varepsilon_n \in l_2$, существует потенциал $V \in L_2(0,\pi)$ такой, что спектр соответствующей задачи (1)–(3), (11) совпадает с множеством $\{\lambda_n\}$. Если $J_{14} + J_{23} = 0$, то последнее утверждение справедливо для любой последовательности, удовлетворяющей соотношению (36) и дополнительному условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n+t-k}\right| < \infty, \tag{37}$$

если $t\neq 0,\ t\neq 1$; *дополнительным условиям*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n-2k-1}\right|<\infty,\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_{2k+t}|<\infty,$$

если $t=0$ *или* $t=1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$|\Delta_0(\lambda)|<c_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{38}$$

Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условию (36). Тогда существует постоянная M такая, что

$$\sup|\varepsilon_n|<M,\qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varepsilon_n|^2<M. \tag{39}$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda)=-i\pi e^{i\pi(t+\lambda)/2}(\lambda-\lambda_0)\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{2n}.$$

Пусть $f(\lambda)=\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)$. Исследование свойств функции $f(\lambda)$ основывается на следующих утверждениях.

Утверждение 1. *Функция* $f(\lambda)$ *является целой функцией экспоненциального типа, не превышающего* π.

Доказательство. Обозначим через Γ объединение кругов $\Gamma(2n+t,r_0)$, $n\in\mathbb{Z}$, где $r_0=\min\{|t|/4,1/4\}$ при $t\neq 0$ и $r_0=1/4$ при $t=0$. Если $\lambda\notin\Gamma$, то

$$f(\lambda)=-\Delta_0(\lambda)\left(1-\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0}\right)=-\Delta_0(\lambda)(1-\phi(\lambda)), \tag{40}$$

где

$$\phi(\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-t}\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon_n}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon_n}{2n+t-\lambda}\right).$$

Оценим функцию $\phi(\lambda)$. Обозначим $\alpha_n(\lambda)=\varepsilon_n/(2n+t-\lambda)$. Из (39) следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(|\varepsilon_n|^2+|2n+t-\lambda|^{-2}\big)/2<c_3. \tag{41}$$

Легко видеть, что для всех $|n|>n_0$, где n_0 — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$|\alpha_n(\lambda)|<1/4 \tag{42}$$

для любого $\lambda\notin\Gamma$. Если $|n|\leqslant n_0$, то неравенство (42) имеет место для всех достаточно больших $|\lambda|$, следовательно, указанное неравенство справедливо для всех $|\lambda|\geqslant C_0$. Из (41), (42) и элементарного неравенства

$$|\ln(1+z)|\leqslant 2|z|, \tag{43}$$

справедливого при $|z|\leqslant 1/4$, следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\ln(1+\alpha_n)|\leqslant c_4.$$

Здесь и в дальнейшем выбираем ту ветвь $\ln(1+z)$, которая обращается в нуль при $z=0$. Согласно [15, гл. V, § 1, п. 72] перепишем последнее соотношение в виде

$$|\phi(\lambda)| \leqslant \prod_{n=-\infty}^{\infty} |1+\alpha_n(\lambda)| \leqslant e^{c_4}. \tag{44}$$

Из (38), (40), (44) следует, что

$$|f(\lambda)| < c_5 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{45}$$

вне области $\Gamma' = \Gamma \cup \{|\lambda| < C_0\}$.

Обозначим $D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n+\operatorname{Re}t-1/4, 2n+\operatorname{Re}t+1/4]$, $D_0=(0,2)\setminus D$. Легко видеть, что множество D_0 является объединением конечного числа интервалов, сумма длин которых не менее единицы. Пусть x_0 — середина одного из этих интервалов. Тогда все точки x_0+2k, $k\in\mathbb{Z}$, лежат вне множества D. В частности, неравенство (45) справедливо, если λ принадлежит прямым $\operatorname{Im}\lambda = \pm\hat{C}_0$, где $\hat{C}_0 = C_0 + 2|t| + 1$, и вертикальным отрезкам с вершинами в точках $(x_0+2k, -\hat{C}_0)$, $(x_0+2k, \hat{C}_0)$, $|2k-1| > C_0$, $k\in\mathbb{Z}$. Согласно принципу максимума неравенство (45) имеет место на всей комплексной плоскости, следовательно, функция $f(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, не превышающего π.

Утверждение 2. *Функция f принадлежит классу PW_π.*

Доказательство. Обозначим

$$W(\lambda) = \ln\phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(1+\alpha_n(\lambda)),$$

тогда

$$f(\lambda) = -\Delta_0(\lambda)\left(1-e^{W(\lambda)}\right). \tag{46}$$

Оценим функцию $W(\lambda)$, если $\lambda \notin \Gamma'$. Из (39), (42), (43) следует, что

$$|W(\lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\ln(1+\alpha_n(\lambda))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{|\varepsilon_n|^2}{10M} + \frac{10M}{|2n-\lambda|^2}\right) \leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+|\operatorname{Im}\lambda|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M\left(\frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+|\operatorname{Im}\lambda|^2}\right) \leqslant \frac{2M}{|\operatorname{Im}\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M\left(\frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + \frac{\pi}{2|\operatorname{Im}\lambda|}\right),$$

откуда вытекает, что

$$|W(\lambda)| < 1/4, \tag{47}$$

если $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M_1 = 10(\pi+2+22M) + \hat{C}_0$. Из элементарных соотношений

$$\frac{|z|}{2} \leqslant |1-e^z| \leqslant 2|z|,$$

справедливых при $|z| \leqslant 1/4$, получаем, что выполняется неравенство $|1-e^{W(\lambda)}| \leqslant 2|W(\lambda)|$, из которого и из (38), (46), (47) находим, что

$$|f(\lambda)| \leqslant c_6|W(\lambda)| \tag{48}$$

для $\lambda \in l$, где l – прямая $\operatorname{Im}\lambda = M_1$. Докажем, что

$$\int\limits_l |W(\lambda)|^2 d\lambda < \infty. \tag{49}$$

Из элементарного неравенства $|\ln(1+z)-z| \leqslant |z|^2$, справедливого при $|z| \leqslant 1/2$, получаем, что

$$\ln(1+z)-z = r(z), \quad |r(z)| \leqslant |z|^2,$$

следовательно,

$$W(\lambda) = S_1(\lambda) + S_2(\lambda),$$

где

$$S_1(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(\lambda), \quad |S_2(\lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n(\lambda)|^2.$$

Очевидно, что

$$|W(\lambda)| \leqslant |S_1(\lambda)| + |S_2(\lambda)|. \tag{50}$$

Положим

$$I_m = \int\limits_l |S_m(\lambda)|^2 d\lambda, \quad m = 1, 2.$$

Вначале рассмотрим интеграл I_1. В [16, с. 221] показано, что

$$I_1 = \int\limits_l \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2n+t-\lambda} \right|^2 d\lambda = \int\limits_{l_1} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2n-\lambda} \right|^2 d\lambda < \infty, \tag{51}$$

где l_1 является прямой $\operatorname{Im}\lambda = M_1 - \operatorname{Im} t$.

Легко видеть, что

$$|S_2(\lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-\lambda|^2} \leqslant c_7,$$

тогда

$$I_2 \leqslant c_7 \int\limits_l \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-\lambda|^2} \right) d\lambda \leqslant c_8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|^2 \int\limits_{l_1} \frac{d\lambda}{|2n-\lambda|^2} < c_9 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|^2 < c_{10}. \tag{52}$$

Из (50)–(52) вытекает условие (49). Из (48), (49) и [17, гл. 3, п. 3.2.2] получаем, что

$$\int\limits_R |f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Таким образом, если $J_{14} + J_{23} \neq 0$, то функция $\Delta(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и, значит, существует потенциал $V \in L_2(0,\pi)$ такой, что спектр соответствующей задачи (1)–(3), (11) определяется формулой (36).

Пусть $J_{14} + J_{23} = 0$. Проверим, что функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию (14). Рассмотрим два случая.

1. $t \neq 0$, $t \neq 1$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что

$$0 < c_{11} < |\Delta_0(k)| < c_{12}. \tag{53}$$

Из (36) следует, что существует такое число $n_0>0$, что

$$\sum_{|n|>n_0}|\varepsilon_n|^2<\frac{1}{1000},$$

и для любого $|n|>n_0$ справедливо нервенство

$$|\varepsilon_n|^{2/3}<\frac{1}{1000}.$$

Пусть $\lambda\notin\Gamma'$. Дополнительно предположим, что

$$|\lambda|>M_2=1000(2n_0+1)n_0M.$$

Используя хорошо известное неравенство $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$ $(a,b>0,\ p,q>1,\ 1/p+1/q=1)$, получаем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|\leqslant\sum_{|n|\leqslant n_0}\frac{|\varepsilon_n|}{|2n+t-\lambda|}+\sum_{|n|>n_0}\frac{|\varepsilon_n|}{|2n+t-\lambda|}\leqslant$$

$$\leqslant 2M\sum_{|n|\leqslant n_0}\frac{1}{|2n-\lambda|}+2\sum_{|n|>n_0}\biggl(|\varepsilon_n|^2+\frac{|\varepsilon_n|^{2/3}}{|2n-\lambda|^{4/3}}\biggr)\leqslant\frac{1}{50}+\frac{1}{500}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}<\frac{1}{10},$$

следовательно, неравенство (51) имеет место для любого λ из рассматриваемой области.

Повторяя предыдущие рассуждения, находим, что

$$|f(\lambda)|\leqslant c_{13}\biggl(\biggl|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(\lambda)\biggr|+\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|^2\biggr).$$

Из последнего неравенства вытекает, что для всех $|k|>k_0$, где $k_0=\max(C_0,M_2)$,

$$|f(k)|\leqslant c_{14}\biggl(\biggl|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n+t-k}\biggr|+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-k|^2}\biggr).\tag{54}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-k|^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2n+t-k|^2}<c_{15}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2<c_{16}.\tag{55}$$

Из (37), (53)–(55) следует справедливость условия (14).

2. $t=0$ или $t=1$. Пусть $t=0$, случай $t=1$ рассматривается аналогично.

Оценим $|f(2k+1)|$. Очевидно, что $\Delta_0(2k+1)=-2$. Рассуждая аналогично случаю 1, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(2k+1)|<\infty.\tag{56}$$

Оценим $|f(2k)|$. Очевидно, что $\Delta_0(2k)=0$, следовательно, $f(2k)=\Delta(2k)$. Так как функция $\Delta(\lambda)$ ограничена в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant 1$ и для всех достаточно больших по абсолютной величине k $|\varepsilon_k|<1/2$, то согласно принципу максимума будем иметь

$$|f(2k)|=|\Delta(2k)|\leqslant|\varepsilon_{2k}|\max_{|2k-\lambda|=1}\biggl\{\biggl|\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda_{2k}-\lambda}\biggr|\biggr\}\leqslant c_{17}|\varepsilon_{2k}|.\tag{57}$$

Из (56), (57) и условия теоремы 2 вытекает справедливость (14). Теорема доказана.

Заметим, что краевые условия

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие соотношениям (11), являются нерегулярными, причём выполняется условие $J_{14} + J_{23} = 0$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albeverio, A. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / A. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — V. 12, № 4. — P. 406–423.
2. Lunyov A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A. Lunyov, M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441, № 1. — P. 57–103.
3. Savchuk, A.M. The Dirac operator with complex-valued summable potential / A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2014. — V. 96, № 5. — P. 777–810.
4. Савчук, А.М. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями / А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2020. — Т. 66, № 3. — С. 373–530.
5. Мисюра, Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II / Т.В. Мисюра // Теория функций, функц. анализ и их приложения. — 1979. — Т. 31. — С. 102–109.
6. Набиев, И.М. Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака / И.М. Набиев // Мат. заметки. — 2011. — Т. 89, № 6. — С. 885–893.
7. Djakov, P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov, B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — V. 61. — P. 359–398.
8. Yurko, V.A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval / V.A. Yurko // Results in Mathematics. — 2005. — V. 48, № 3–4. — P. 371–386.
9. Макин, А.С. О спектре двухточечных краевых задач для оператора Дирака / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1023–1031.
10. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators / V. Tkachenko // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 2001. — V. 123. — P. 485–512.
11. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.
12. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra / V. Tkachenko // Int. Equ. Oper. Theory. — 2000. — V. 36. — P. 325–348.
13. Левин, Б.Я. Целые функции (курс лекций) / Б.Я. Левин. — М. : МГУ, мех.-мат. факультет, 1971. — 126 с.
14. Левин, Б.Я. О малых возмущениях множества корней функций типа синуса / Б.Я. Левин, И.В. Островский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 87–110.
15. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М. : Наука, 1973. — 736 с.
16. Sansug, J.-J. Characterization of the periodic and antiperiodic spectra of nonselfadjoint Hill's operators / J.-J. Sansug, V. Tkachenko // Oper. Theory Adv. and Appl. — 1997. — V. 98. — P. 216–224.
17. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

ON THE SPECTRUM OF NON-SELFADJOINT DIRAC OPERATORS WITH TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS

A. S. Makin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow
e-mail: alexmakin@yandex.ru

We consider spectral problem for the Dirac operator with arbitrary two-point boundary conditions and any square integrable potential V. The necessary and sufficient conditions are established that an entire function must satisfy in order to be a characteristic determinant of the specified operator. In the case of irregular boundary conditions, conditions are found under which a set of complex numbers is the spectrum of the problem under consideration.

Keywords: Dirac operator, characteristic determinant, spectrum.

REFERENCES

1. Albeverio, A. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / A. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — V. 12, № 4. — P. 406–423.
2. Lunyov A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A. Lunyov, M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441, № 1. — P. 57–103.
3. Savchuk, A.M. The Dirac operator with complex-valued summable potential / A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2014. — V. 96, № 5. — P. 777–810.
4. Savchuk, A.M. Spectral analysis of one-dimensional Dirac system with summable potential and Sturm–Liouville operator with distribution coefficients / A.M. Savchuk, I.V. Sadovnichaya // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. — 2020. — V. 66, № 3. — P. 373–530.
5. Misyura, T.V. Characterization of spectra of periodic and anti-periodic problems generated by Dirac's operators. II / T.V. Misyura // Theoriya functfii, funct. analiz i ikh prilozhen. — 1979. — V. 31. — P. 102–109. [in Russian]
6. Nabiev, I.M. Solution of the quasiperiodic problem for the Dirac system / I.M. Nabiev // Math. Notes. — 2011. — V. 89, № 6. — P. 845–852.
7. Djakov, P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov, B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — V. 61. — P. 359–398.
8. Yurko, V.A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval / V.A. Yurko // Results in Mathematics. — 2005. — V. 48, № 3–4. — P. 371–386.
9. Makin, A.S. On the spectrum of two-point boundary value problems for the Dirac operator / A.S. Makin // Differ. Equat. — 2021. — V. 57, № 8. — P. 993–1002.
10. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators / V. Tkachenko // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 2001. — V. 123. — P. 485–512.
11. Marchenko, V.A. Sturm–Liouville operators and their applications / V.A. Marchenko. — Basel : Birkhauser Verlag, 1986.
12. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra / V. Tkachenko // Int. Equ. Oper. Theory. — 2000. — V. 36. — P. 325–348.
13. Levin, B.Ya. Lectures on Entire Functions / B.Ya. Levin . — Providence : American Mathematical Society, 1996.
14. Levin, B.Ya. On small perturbations of the set of zeros of functions of sine type / B.Ya. Levin, I.V. Ostrovskii // Math. USSR-Izv. — 1980. — V. 14, № 1. — P. 79–101.
15. Lavrentiev, M.A. Methods of Theory of Complex Variable / M.A. Lavrentiev, B.V. Shabat. — Moscow : Nauka, 1973. — 736 p. [in Russian]
16. Sansug, J.-J. Characterization of the periodic and antiperiodic spectra of nonselfadjoint Hill's operators / J.-J. Sansug, V. Tkachenko // Oper. Theory Adv. and Appl. — 1997. — V. 98. — P. 216–224.
17. Nikolskii, S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems / S.M. Nikolskii. — Moscow : Nauka, 1977. — 456 p. [in Russian]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 175–186

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПОЛОСЕ В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

О. М. Джохадзе[1], С. С. Харибегашвили[2]

[1]*Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили, Грузия*
[2]*Грузинский технический университет, г. Тбилиси*
e-mail: [1]ojokhadze@yahoo.com, [2]kharibegashvili@yahoo.com

Поступила в редакцию 13.07.2023 г., после доработки 24.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Для неоднородного линейного уравнения колебаний струны рассмотрены периодическая по пространственной переменной и смешанная задачи в полуполосе, решения которых выписаны в квадратурах в виде конечных сумм. Для решения этих задач использованы тождество характеристического прямоугольника, инварианты Римана и метод характеристик.

Ключевые слова: уравнение колебания струны, периодическая и смешанные задачи, полуполоса, тождество характеристического прямоугольника, инварианты Римана, метод характеристик.

DOI: 10.31857/S0374064124020038, EDN: QNOYED

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В полуполосе $D:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<l,\ t>0\}$ рассмотрим задачу определения решения $u(x,t)$ уравнения колебаний струны

$$\Box u = f(x,t), \quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным по переменной t условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{2}$$

и одному из следующих граничных условий по переменной x:

периодическим условиям

$$u(0,t)=u(l,t), \quad u_x(0,t)=u_x(l,t), \quad t\geqslant 0; \tag{3}$$

условиям Дирихле

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t\geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь f, φ, ψ и μ_i, $i=1,2$, — заданные, а u — искомая действительные функции, $\Box := \partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2$ — волновой оператор.

Всюду ниже при рассмотрении в классической постановке этих задач в классе $C^2(\overline{D})$ будем предполагать выполненными следующие условия гладкости, наложенные на данные рассматриваемых задач, а также необходимые условия согласования до второго порядка включительно в угловых точках $(0,0)$ и $(l,0)$:

$$f\in C^1(\overline{D}), \quad \varphi\in C^2([0,l]), \quad \psi\in C^1([0,l]),$$

$$f(0,0)+\varphi''(0)=f(l,0)+\varphi''(l),$$
$$\varphi(0)=\varphi(l), \quad \varphi'(0)=\varphi'(l), \quad \psi(0)=\psi(l), \quad \psi'(0)=\psi'(l) \tag{5}$$

для задачи (1)–(3) и

$$f\in C^1(\overline{D}), \quad \varphi\in C^2([0,l]), \quad \psi\in C^1([0,l]), \quad \mu_i\in C^2([0,\infty)), \quad i=1,2,$$
$$f(0,0)+\varphi''(0)=\mu_1''(0), \quad f(l,0)+\varphi''(l)=\mu_2''(l),$$
$$\mu_1(0)=\varphi(0), \quad \mu_1'(0)=\psi(0), \quad \mu_2(l)=\varphi(l), \quad \mu_2'(0)=\psi(l) \tag{6}$$

для задачи (1), (2), (4).

Периодические и смешанные задачи для гиперболических уравнений и систем были предметом исследований многих авторов. Для них рассматривались вопросы существования, отсутствия единственности и представления в явном виде решений (см., например, работы [1–24] и приведённую в них литературу).

В данной статье, используя тождество характеристического прямоугольника, инварианты Римана, методы характеристик и априорных оценок, для неоднородного линейного уравнения колебаний струны рассмотрены периодическая по пространственной переменной и смешанная задачи в полуполосе, решения которых выписаны в квадратурах в виде конечных сумм слагаемых, зависящих от граничных и начальных значений этих решений и правой части рассматриваемого уравнения. Авторы надеются, что полученные представления решений найдут приложения при исследовании других начально-краевых задач как для линейных, так и для нелинейных гиперболических уравнений и систем.

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Рассмотрим прямоугольную область $D_T:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<l,\ 0<t<T\}$. Имеет место следующая

Лемма. *Для решения $u\in C^2(\overline{D})$ задачи (1)–(3) в области D_T при любом фиксированном $T>0$ справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)}\leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)}+c_2\|\varphi\|_{C^1([0,l])}+c_3\|\psi\|_{C([0,l])} \tag{7}$$

с положительными постоянными $c_i=c_i(l,T)$, $i=1,2$, не зависящими от функций u, f, φ и ψ.

Доказательство. Умножив обе части уравнения (1) на $2u_t$ и проинтегрировав его затем по области D_τ, $0<\tau\leqslant T$, получим равенство

$$\int\limits_{D_\tau}(u_t^2)_t\,dx\,dt-2\int\limits_{D_\tau}u_{xx}u_t\,dx\,dt=2\int\limits_{D_\tau}fu_t\,dx\,dt. \tag{8}$$

Положим $\omega_\tau:=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant l,\ t=\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant T\}$; $\Gamma:=\Gamma_1\cup\omega_0\cup\Gamma_2$, где $\Gamma_1:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$; $\Gamma_2:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:x=l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$. Пусть $\nu:=(\nu_x,\nu_t)$ — единичный вектор внешней нормали к границе ∂D_τ. Легко видеть, что

$$\nu_x\big|_{\omega_\tau}=0, \quad 0\leqslant\tau\leqslant T, \quad \nu_t\big|_{\omega_\tau}=1, \quad 0<\tau\leqslant T,$$
$$\nu_x\big|_{\Gamma_1}=-1, \quad \nu_x\big|_{\Gamma_2}=1, \quad \nu_t\big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}=0, \quad \nu_t\big|_{\omega_0}=-1. \tag{9}$$

Применяя интегрирование по частям, с учётом (2), (3) и (9) будем иметь

$$\int\limits_{D_\tau}(u_t^2)_t\,dx\,dt=\int\limits_{\partial D_\tau}u_t^2\nu_t\,ds=\int\limits_{\omega_\tau}u_t^2\,dx-\int\limits_{\omega_0}\psi^2\,dx,$$

$$-2\int\limits_{D_\tau} u_{xx}u_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{D_\tau}\big[u_xu_{tx}-(u_xu_t)_x\big]\,dx\,dt = \int\limits_{D_\tau}(u_x^2)_t\,dx\,dt - 2\int\limits_{\partial D_\tau}u_xu_t\nu_x\,ds =$$
$$= \int\limits_{\partial D_\tau}u_x^2\nu_t\,ds + 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}}u_xu_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}}u_xu_t\,dt = \int\limits_{\omega_\tau}u_x^2\,dx - \int\limits_{\omega_0}\varphi'^2\,dx, \tag{10}$$

где $\Gamma_{i,\tau} := \Gamma_i \cap \{t\leqslant\tau\},\ i=1,2.$

Равенство (8) в силу (10) перепишем в виде

$$w(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau}(u_x^2+u_t^2)\,dx = \int\limits_{\omega_0}(\varphi'^2+\psi^2)\,dx + 2\int\limits_{D_\tau}fu_t\,dx\,dt. \tag{11}$$

Принимая во внимание очевидные неравенства

$$2\bigg|\int\limits_{D_\tau}fu_t\,dx\,dt\bigg| \leqslant \int\limits_{D_\tau}f^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_\tau}u_t^2\,dx\,dt \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\omega_t}u_t^2\,dx\bigg)dt \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau w(t)\,dt,$$
$$\int\limits_{\omega_0}(\varphi'^2+\psi^2)\,dx \leqslant l\big(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}\big) \leqslant l\big(\|\varphi\|^2_{C^1(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}\big),$$

из (11) получаем соотношение

$$w(\tau) \leqslant \int\limits_0^\tau w(t)\,dt + \alpha, \tag{12}$$

где

$$\alpha := l\big(T\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \|\varphi\|^2_{C^1(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}\big). \tag{13}$$

Применив лемму Гронуолла к неравенству (12), будем иметь

$$w(\tau) \leqslant \alpha e^T, \quad 0<\tau\leqslant T. \tag{14}$$

Далее, поскольку в силу (2)

$$u(x,\tau) = \varphi(x) + \int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt,$$

можем записать

$$|u(x,\tau)|^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\bigg(\int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt\bigg)^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\tau\int\limits_0^\tau u_t^2(x,t)\,dt.$$

Отсюда, интегрируя по переменной x и учитывая (11), получаем неравенства

$$\int\limits_{\omega_\tau}u^2\,dx \leqslant 2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\omega_t}u_t^2\,dx\bigg)\,dt \leqslant 2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{15}$$

При $(x,t)\in\overline{D}_T$, проинтегрировав очевидное соотношение

$$|u(x,t)|^2 = \bigg|u(\xi,t) + \int\limits_\xi^x u_x(x_1,t)\,dx_1\bigg|^2 \leqslant 2|u(\xi,t)|^2 + 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx$$

по переменной $\xi\in[0,l]$ (аналогично тому как было получено неравенство (15)), будем иметь

$$|u(x,t)|^2 \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^l|u(\xi,t)|^2\,d\xi + 2lw(t) = \frac{2}{l}\int\limits_{\omega_t}u^2\,dx + 2lw(t). \tag{16}$$

Из (14)–(16) следует, что

$$|u(x,t)|^2 \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma + 2lw(t) \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2\alpha\left(\frac{2T^2}{l} + l\right)e^T, \quad (x,t)\in \overline{D}_T,$$

откуда с учётом очевидного неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|$$

и (13) получим оценку (7), где

$$c_1 = c_0\sqrt{T}, \quad c_2 = 2 + c_0, \quad c_3 = c_0, \quad c_0^2 = 2(2T^2 + l^2)e^T.$$

Лемма доказана.

В частности, из этой леммы следует единственность решения задачи (1)–(3). Действительно, если $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$ — два различных решения этой задачи, то для произвольного фиксированного $T > 0$ функция $u := (u_2 - u_1)|_{D_T} \in C^2(\overline{D}_T)$ будет решением соответствующей однородной задачи с тождественно равными нулю функциями f, φ и ψ, для которого справедлива априорная оценка (7). Отсюда следует, что $u_1 = u_2$ в области D_T, и поскольку T — произвольное положительное число, то $u_1 = u_2$ во всей области D.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3) В КВАДРАТУРАХ В ПОЛУПОЛОСЕ D В ВИДЕ КОНЕЧНОЙ СУММЫ

Пусть $u \in C^2(\overline{D})$ — классическое решение задачи (1)–(3). Рассмотрим новые неизвестные функции

$$v_1 := u_t - u_x, \quad v_2 := u_t + u_x, \tag{17}$$

являющиеся инвариантами Римана уравнения (1). Легко видеть, что в силу (2) и (17) имеет место формула

$$u(x,t) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (v_1 + v_2)(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}. \tag{18}$$

С учётом (1)–(3) и (17) очевидно, что функции v_1 и v_2 являются решениями следующих задач:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)v_1 = f(x,t), \quad (x,t)\in D, \tag{19}$$

$$v_1(x,0) = \varphi_1(x) := \psi(x) - \varphi'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{20}$$

$$v_1(0,t) = v_1(l,t), \quad t \geqslant 0, \tag{21}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)v_2 = f(x,t), \quad (x,t)\in D, \tag{22}$$

$$v_2(x,0) = \varphi_2(x) := \psi(x) + \varphi'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

$$v_2(0,t) = v_2(l,t), \quad t \geqslant 0. \tag{24}$$

Замечание 1. В силу (18) для нахождения решения задачи (1)–(3) достаточно решить задачи (19)–(21) и (22)–(24).

Обозначим через G_1 треугольник, ограниченный прямыми $t=0$, $t=x$ и $x=l$, а через G_n — параллелограмм, ограниченный прямыми $x=0$, $x=l$, $t=x+(n-2)l$ и $t=x+(n-1)l$, $n\geqslant 2$.

Проинтегрировав уравнение (19) вдоль характеристики $t-x=\mathrm{const}$ с учётом начального условия (20) в замкнутой области $\overline{G}_1$, получим для функции v_1 представление

$$v_1(x,t)=\varphi_1(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_1. \tag{25}$$

Аналогично в случае $(x,t)\in\overline{G}_2$, интегрируя уравнение (19) вдоль характеристического отрезка с концами в точках $(0,t-x)$ и (x,t), будем иметь

$$v_1(x,t)=v_1(0,t-x)+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_2. \tag{26}$$

Поскольку в силу (21) $v_1(0,t-x)=v_1(l,t-x)$ и точка $(l,t-x)\in\overline{G}_1$, то согласно (25) запишем

$$v_1(l,t-x)=\varphi_1(l+x-t)+\int\limits_{l+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi,$$

откуда, учитывая (26), получаем для функции v_1 в замкнутой области $\overline{G}_2$ представление

$$v_1(x,t)=\varphi_1(l+x-t)+\int\limits_{l+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_2. \tag{27}$$

Аналогичные рассуждения для точки $(x,t)\in\overline{G}_3$ приводят к следующей формуле для функции v_1:

$$v_1(x,t)=\varphi_1(2l+x-t)+\int\limits_{2l+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-2l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi.$$

С помощью этих процедур индукцией по $n>3$ для функции v_1 можно показать, что имеет место представление

$$v_1(x,t)=\varphi_1\big((n-1)l+x-t\big)+\int\limits_{(n-1)l+x-t}^{l} f\big(\xi,\xi+t-x-(n-1)l\big)\,d\xi+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\int\limits_{0}^{l} f(\xi,\xi+t-x-kl)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_n,\quad n\geqslant 3. \tag{28}$$

Действительно, предположим, что равенство (28) справедливо для $n=m$, $m\geqslant 3$, и покажем его справедливость для $n=m+1$. Если точка (x,t) принадлежит области G_{m+1}, то аналогично (26) с учётом (21) и нашего предположения (28) при $n=m$, $m\geqslant 3$, будем иметь

$$v_1(x,t)=v_1(0,t-x)+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=v_1(l,t-x)+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=$$
$$=\varphi_1(ml+x-t)+\int\limits_{ml+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-ml)\,d\xi+\sum_{k=1}^{m-2}\int\limits_{0}^{l} f\big(\xi,\xi+t-x-(k+1)l\big)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{0}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=$$

$$=\varphi_1(ml+x-t)+\int\limits_{ml+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-ml)\,d\xi+\sum_{k=2}^{m-1}\int\limits_0^l f(\xi,\xi+t-x-kl)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^l f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_0^x f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=$$

$$=\varphi_1(ml+x-t)+\int\limits_{ml+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-ml)\,d\xi+\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^l f(\xi,\xi+t-x-kl)\,d\xi+\int\limits_0^x f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi.$$

Теперь рассмотрим задачу (22)–(24). Обозначим через E_1 треугольник, ограниченный прямыми $t=0$, $t=-x+l$ и $x=0$, а через E_n — параллелограмм, ограниченный прямыми $x=0$, $x=l$, $t=-x+(n-1)l$ и $t=-x+nl$, $n\geqslant 2$.

Проинтегрировав уравнение (22) вдоль характеристики $t+x=\mathrm{const}$ с учётом начального условия (23) в замкнутой области $\overline{E}_1$, получим для функции v_2 представление

$$v_2(x,t)=\varphi_2(x+t)+\int\limits_x^{x+t} f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_1. \tag{29}$$

Аналогично для случая $(x,t)\in\overline{E}_2$, интегрируя уравнение (23) вдоль характеристического отрезка с концами в точках (x,t) и $(l,x+t-l)$, найдём

$$v_2(x,t)=v_2(l,x+t-l)+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_2. \tag{30}$$

Поскольку $v_2(l,x+t-l)=v_2(0,x+t-l)$ в силу (24) и точка $(0,x+t-l)\in\overline{E}_1$, то согласно (29) будем иметь равенство

$$v_2(0,x+t-l)=\varphi_2(x+t-l)+\int\limits_0^{x+t-l} f(\xi,-\xi+x+t-l)\,d\xi,$$

откуда и из (30) следует, что для функции v_2 в замкнутой области $\overline{E}_2$ справедливо представление

$$v_2(x,t)=\varphi_2(x+t-l)+\int\limits_0^{x+t-l} f(\xi,-\xi+x+t-l)\,d\xi+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_2. \tag{31}$$

Аналогичные рассуждения для точки $(x,t)\in\overline{E}_3$ приводят к следующей формуле для функции v_2:

$$v_2(x,t)=\varphi_2(x+t-2l)+\int\limits_0^{x+t-2l} f(\xi,-\xi+x+t-2l)\,d\xi+\int\limits_0^l f(\xi,-\xi+x+t-l)\,d\xi+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi.$$

Выполнив эти же процедуры, индукцией по $n>3$ (как и в случае нахождения формулы (28)) получим для функции v_2 следующее представление:

$$v_2(x,t)=\varphi_2\big(x+t-(n-1)l\big)+\int\limits_0^{x+t-(n-1)l} f\big(\xi,-\xi+x+t-(n-1)l\big)\,d\xi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}\int\limits_0^l f(\xi,-\xi+x+t-kl)\,d\xi+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_n,\quad n\geqslant 3. \tag{32}$$

Замечание 2. Для нахождения значения функций v_1 или v_2 в произвольной точке $(x,t)\in\overline{D}$ сначала следует определить какой области (G_n или E_n) эта точка принадлежит. Легко видеть, что число $n=n(x,t)$, определяющее область G_n или E_n, вычисляется по формуле

$$n=\left[\frac{t-x}{l}\right]+2\left(\left[\frac{t+x}{l}\right]+1\right),$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть действительного числа, и по найденному числу значения функций v_1 и v_2 определяются, соответственно, по формулам (25), (27), (28) и (29), (31), (32). В свою очередь решение u задачи (1)–(3) определяется по формуле (18).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (5). Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение класса $C^2(\overline{D})$, которое представимо в квадратурах формулами (25), (27)–(29), (31), (32) и (18).*

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4) В КВАДРАТУРАХ В ПОЛУПОЛОСЕ D В ВИДЕ КОНЕЧНОЙ СУММЫ

Разобьём полуполосу D на квадраты $K_m:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x<l,\ ml<t<(m+1)l\}$, $m=0,1,2,\ldots,$ с вершинами в точках $A_m(0,ml)$, $B_m(0,(m+1)l)$, $C_m(l,(m+1)l)$, $F_m(l,ml)$ и на четыре прямоугольных треугольника $K_m^1:=\Delta A_mO_mF_m$, $K_m^2:=\Delta A_mO_mB_m$, $K_m^3:=\Delta F_mO_mC_m$, $K_m^4:=\Delta B_mO_mC_m$, где точка $O_m(l/2,(m+1/2)l)$ — центр квадрата K_m.

Пусть сначала $(x,t)\in K_0$. В треугольнике K_0^1 в силу условий (2) и формулы Даламбера справедливо равенство [17, стр. 59]

$$u(x,t)=A_1(\varphi,\psi,f)(x,t):=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-t)+\varphi(x+t)\right]+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{x,t}^1}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\ \ (x,t)\in K_0^1, \tag{33}$$

где $\Omega_{x,t}^1$ — треугольник с вершинами в точках (x,t), $(x-t,0)$ и $(x+t,0)$.

Как известно, для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции v и характеристического для уравнения (1) прямоугольника $PP_1P_2P_3$ из области её определения имеет место тождество характеристического прямоугольника [24, стр. 173]

$$v(P)=v(P_1)+v(P_2)-v(P_3)+\frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3}\Box v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{34}$$

где P и P_3, а также P_1 и P_2 соответственно — противоположные вершины этого прямоугольника, причём ордината точки P больше значений ординат остальных точек.

Пусть теперь $(x,t)\in K_0^2$. Тогда, применяя равенство (34) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0,t-x)$, $P_2(t,x)$ и $P_3(t-x,0)$ и формулу (33) для точки $P_2(t,x)\in K_0^1$, с учётом (1) и (4) получаем

$$u(x,t)=A_2(\varphi,\psi,\mu_1,f)(x,t):=\mu_1(t-x)+\frac{1}{2}\left[\varphi(t+x)-\varphi(t-x)\right]+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{x,t}^2}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in K_0^2. \tag{35}$$

Здесь $\Omega_{x,t}^2$ — четырехугольник $P\widetilde{P}_2P_3P_1$, $\widetilde{P}_2:=\widetilde{P}_2(t+x,0)$.

Аналогично будем иметь

$$u(x,t)=A_3(\varphi,\psi,\mu_2,f)(x,t):=\mu_2(x+t-l)+\frac{1}{2}\left[\varphi(x-t)-\varphi(2l-x-t)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{2l-x-t}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^3_{x,t}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in K^3_0, \tag{36}$$

и

$$u(x,t)=A_4(\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2,f)(x,t):=\mu_1(t-x)+\mu_2(x+t-l)-\frac{1}{2}\left[\varphi(t-x)+\varphi(2l-t-x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{2l-t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^4_{x,t}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in K^4_0. \tag{37}$$

В формулах (36) и (37) соответственно $\Omega^3_{x,t}$ — четырехугольник с вершинами $P^3(x,t)$, $P^3_1(l,x+t-l)$, $P^3_2(x-t,0)$ и $P^3_3(2l-x-t,0)$, а $\Omega^4_{x,t}$ — пятиугольник с вершинами $P^4(x,t)$, $P^4_1(0,t-x)$, $P^4_2(t-x,0)$, $P^4_3(2l-x-t,0)$ и $P^4_4(l,x+t-l)$.

Пусть теперь $P_0:=P_0(x,t)\in\overline{D}\setminus\overline{K}_0$. Легко видеть, что $P_0\in K_m$, $m\geqslant 1$, где

$$m=m(t):=[t/l],\quad t>0. \tag{38}$$

Обозначим через $P_0M_1P_1N_1$ характеристический относительно уравнения (1) прямоугольник, вершины M_1 и N_1 которого лежат соответственно на прямых $x=0$ и $x=l$, т.е. $M_1(0,t-x)$, $N_1(l,t+x-l)$, $P_1(l-x,t-l)$. Поскольку $P_1\in K_{m-1}$, то аналогичным образом построим характеристический прямоугольник $P_1M_2P_2N_2$, вершины M_2 и N_2 которого лежат соответственно на прямых $x=0$ и $x=l$. Продолжив этот процесс, получим характеристический прямоугольник $P_{i-1}M_iP_iN_i$ с вершинами M_i и N_i соответственно на прямых $x=0$ и $x=l$, причём так как $P_0\in K_m$, то

$$P_m\in K_0, \tag{39}$$

где $P_m=(l-x,t-ml)$, если m — нечётное число, и $P_m=(x,t-ml)$, когда m — чётное. При этом если точка $P_0\in K^1_m(K^4_m)$, то $P_m\in K^1_0(K^4_0)$ для любого $m\geqslant 1$, а если точка $P_0\in K^2_m(K^3_m)$, то $P_m\in K^3_0(K^2_0)$ для нечётного числа m и $P_m\in K^2_0(K^3_0)$ для чётного m. Координаты точек M_i и N_i следующие:

$$M_i(0,t-x-(i-1)l),\quad N_i(l,t+x-il),\quad i=1,3,5,\ldots,$$
$$M_i(0,t+x-il),\quad N_i(l,t-x-(i-1)l),\quad i=2,4,6,\ldots$$

Легко видеть, что если $P_0\in K_1$, то, используя тождество (34), будем иметь равенства

$$u(P_0)=u(M_1)+u(N_1)-u(P_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$
$$=\mu_1(M_1)+\mu_2(N_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-u(P_1). \tag{40}$$

Индукцией по числу m доказывается справедливость следующего представления для решения $u\in C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), (4) в полуполосе D:

$$u(P_0)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\left(\mu_1(M_i)+\mu_2(N_i)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_{i-1}M_iP_iN_i}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right)+(-1)^m u(P_m),\quad P_0\in K_m, \tag{41}$$

где в силу (39) для нечётного числа m

$$u(P_m)=\begin{cases} A_1(\varphi,\psi,f)(P_m), & P_0\in K_m^1,\\ A_3(\varphi,\psi,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^2,\\ A_2(\varphi,\psi,\mu_1,f)(P_m), & P_0\in K_m^3,\\ A_4(\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^4, \end{cases} \tag{42}$$

а для чётного m

$$u(P_m)=\begin{cases} A_1(\varphi,\psi,f)(P_m), & P_0\in K_m^1,\\ A_2(\varphi,\psi,\mu_1,f)(P_m), & P_0\in K_m^2,\\ A_3(\varphi,\psi,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^3,\\ A_4(\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^4. \end{cases} \tag{43}$$

Здесь операторы A_i, $i=\overline{1,4}$, определены формулами (33), (35)–(37), а число m — равенством (38).

Действительно, в силу (39) формула (40) имеет место при $m=1$. Предположим теперь, что представление (40) справедливо для $m=k$, $k\geqslant 2$, покажем его справедливость и для $m=k+1$. Если $P_0\in K_{k+1}$, то очевидно, что $P_1\in K_k$, тогда в силу (34) и равенства (40) будем иметь

$$u(P_0)=u(M_1)+u(N_1)-u(P_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\mu_1(M_1)+\mu_2(N_1)-\biggl[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\biggl(\mu_1(M_{i+1})+\mu_2(N_{i+1})+\frac{1}{2}\int\limits_{P_iM_{i+1}P_{i+1}N_{i+1}} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\biggr)+$$

$$+(-1)^k u(P_{k+1})\biggr]+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\mu_1(M_1)+\mu_2(N_1)+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j-1}\biggl(\mu_1(M_j)+\mu_2(N_j)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_{j-1}M_jP_jN_j} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\biggr)+$$

$$+(-1)^{k+1}u(P_{k+1})+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\biggl(\mu_1(M_i)+\mu_2(N_i)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_{i-1}M_iP_iN_i} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\biggr)+(-1)^{k+1}u(P_{k+1}).$$

Отметим, что другие представления решения задачи (1), (2), (4) в виде бесконечных рядов можно найти, например, в работах [17–24].

Замечание 3. Аналогичные результаты справедливы и для уравнения $w_{\tau\tau}-a^2w_{\xi\xi}=$ $=F(\xi,\tau)$, где $a:=\mathrm{const}>0$, так как преобразованием переменных $x=\xi$ и $t=a\tau$ это уравнение переходит в уравнение (1) при $F(\xi,\tau)=a^2f(\xi,a\tau)$, а полоса $\{\xi,\tau\in\mathbb{R}^2:0<\xi<l,\ \tau>0\}$ переходит в полосу D.

Замечание 4. Вопрос единственности классического решения $u\in C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), (4) раскрыт в учебнике [20, с. 482].

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1), (2), (4) имеет единственное классическое решение класса $C^2(\overline{D})$, которое представимо в квадратурах формулами (33), (35)–(37), (41)–(43), где число m определяется равенством (38).*

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда имени Шота Руставели (проект FR-21-7307).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rabinowitz, P. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Aple. Math. — 1984. — V. 37. — P. 189–206.
2. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term / E. Feireisl // Chechosl. Math. J. — 1988. — V. 38, № 1. — P. 78–87.
3. Brezis, H. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles / H. Brezis // Bull. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 8, № 3. — P. 409–426.
4. Vejvoda, O. Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions / O. Vejvoda. — Leiden : Martinus Nijhoff Publishers, 1982. — 358 p.
5. Рудаков, И.А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле / И.А. Рудаков // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 2. — С. 46–55.
6. Рудаков, И.А. Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями / И.А. Рудаков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 10. — С. 1392–1399.
7. Kiguradze, T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations / T. Kiguradze // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. — 2000. — V. 39, № 2. — P. 173–185.
8. Kiguradze, T. On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations / T. Kiguradze // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — V. 259, № 1. — P. 253–276.
9. Асанова, А.Т. Периодические на плоскости решения системы гиперболических уравнений второго порядка / А.Т. Асанова // Мат. заметки. — 2017. — Т. 101, № 1. — Р. 20–30.
10. Колесов, А.Ю. Влияние квадратичной нелинейности на динамику периодических решений волнового уравнения / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 1. — Р. 93–118.
11. Корзюк, В.И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В.И. Корзюк, И.И. Столярчук // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 77–88.
12. Корзюк, В.И. Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В.И. Корзюк // Докл. НАН Беларуси. — 2017. — Т. 61, № 3. — С. 7–13.
13. Корзюк, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Корзюк. — М. : Ленанд, 2021. — 480 с.
14. Харибегашвили, С.С. Периодическая по времени задача для слабо нелинейного телеграфного уравнения с наклонной производной в краевом условии / С.С. Харибегашвили, О.М. Джохадзе // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1376–1392.
15. Харибегашвили, С.С. О разрешимости периодической задачи для слабо нелинейного телеграфного уравнения / С.С. Харибегашвили, О.М. Джохадзе // Сибирский мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 4. — С. 735–743.
16. Джохадзе, О.М. Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны / О.М. Джохадзе // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 591–606.

17. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
18. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. — 5-е изд. — М. : Наука, 1979. — 686 с.
19. Бицадзе, А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. — 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1985. — 310 с.
20. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — 4-е изд. — М. : Наука, 1981.
21. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова [и др.]. — М. : Физматлит, 2003. — 288 с.
22. Смирнов, М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М.М. Смирнов. — 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1975. — 127 с.
23. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. — 2-е изд. — М. : Высшая школа, 1970. — 710 с.
24. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1982.

SOLUTION OF SOME HALF-STRIP PROBLEMS IN QUADRATURES FOR THE STRING VIBRATION EQUATION

O. M. Jokhadze[1], S. S. Kharibegashvili[2]

[1]*Andrea Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia*
[2]*Georgian Technical University, Department of Mathematics, Tbilisi*
e-mail: [1]ojokhadze@yahoo.com, [2]kharibegashvili@yahoo.com

In this paper, for an inhomogeneous string vibration equation, we consider a periodic in spatial variable and a mixed half-strip problems, the solutions of which are written in quadratures in the form of finite sums. When solving these problems we use the characteristic rectangle identity, Riemann invariants and the method of characteristics.

Keywords: string vibration equation, periodic and mixed problems, half-strip, characteristic rectangle identity, Riemann invariants, method of characteristics.

FUNDING

This work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (project FR-21-7307).

REFERENCES

1. Rabinowitz, P. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Aple. Math. — 1984. — V. 37. — P. 189–206.
2. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term / E. Feireisl // Chechosl. Math. J. — 1988. — V. 38, № 1. — P. 78–87.
3. Brezis, H. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles / H. Brezis // Bull. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 8, № 3. — P. 409–426.
4. Vejvoda, O. Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions / O. Vejvoda. — Leiden : Martinus Nijhoff Publishers, 1982. — 358 p.
5. Rudakov, I.A. Periodic solutions of the nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions / I.A. Rudakov // News of Higher Educational Institutions. Mathematics. — 2007. — № 2. — P. 46–55. [in Russian]
6. Rudakov, I.A. Nontrivial periodic solution of a nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions / I.A. Rudakov // Differ. Equat. — 2005. — V. 41, № 10. — P. 1467–1475.
7. Kiguradze, T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations / T. Kiguradze // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. — 2000. — V. 39, № 2. — P. 173–185.
8. Kiguradze, T. On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations / T. Kiguradze // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — V. 259, № 1. — P. 253–276.

9. Asanova, A.T. Periodic solutions in the plane of systems of second-order hyperbolic equations / A.T. Asanova // Math. Notes. — 2017. — V. 101, № 1. — P. 39–47.
10. Kolesov, A.Yu. The influence of quadratic nonlinearity on the dynamics of periodic solutions of the wave equation / A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov // Math. Collection. — 2002. — V. 193, № 1. — P. 93–118.
11. Korzyuk, V.I. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Differ. Equat. — 2017. — V. 53, № 1. — P. 74–87.
12. Korzyuk, V.I. The characteristic parallelogram method using the example of the first mixed problem for a one-dimensional wave equation / V.I. Korzyuk // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. — 2017. — V. 61, № 3. — P. 7–13.
13. Korzyuk, V.I. Equations of mathematical physics / V.I. Korzyuk. — Moscow : Lenand, 2021. — 480 p. [in Russian]
14. Kharibegashvili, S.S. Time-periodic problem for a weakly nonlinear telegraph equation with directional derivative in the boundary condition / S.S. Kharibegashvili, O.M. Dzhokhadze // Differ. Equat. — 2015. — V. 51, № 10. — P. 1369–1386.
15. Kharibegashvili, S.S. On solvability of a periodic problem for a nonlinear telegraph equation / S.S. Kharibegashvili, O.M. Dzhokhadze // Siberian Math. J. — 2016. — V. 57, № 4. — P. 735–743.
16. Dzhokhadze, O.M. Mixed problem with a nonlinear boundary condition for a semilinear wave equation / O.M. Dzhokhadze // Differ. Equat. — 2022. — V. 58, № 5. — P. 593–609.
17. Tikhonov, A.N. Equations of mathematical physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. — Moscow : Nauka, 1977. — 736 p. [in Russian]
18. Budak, B.M. Collection of problems in mathematical physics / B.M. Budak, A.A. Samarsky, A.N. Tikhonov. — Moscow : Nauka, 1979. — 686 p. [in Russian]
19. Bitsadze, A.V. Collection of problems on the equations of mathematical physics / A.V. Bitsadze, D.F. Kalinichenko. Moscow : Nauka, 1985. — 310 p. [in Russian]
20. Vladimirov, V.S. Equations of mathematical physics / V.S. Vladimirov. — Moscow : Nauka, 1981. [in Russian]
21. Collection of problems on the equations of mathematical physics / V.S. Vladimirov, A.A. Vasharin, Kh.Kh. Karimova [et al.]. — Moscow : Fizmatlit, 2003. — 288 p. [in Russian]
22. Smirnov, M.M. Problems on the equations of mathematical physics / M.M. Smirnov. — Moscow : Nauka, 1975. — 127 p. [in Russian]
23. Koshlyakov, N.S. Partial differential equations of mathematical physics / N.S. Koshlyakov, E.B. Gliner, M.M. Smirnov. — Moscow : Vyschaya Schkola, 1970. — 710 p. [in Russian]
24. Bitsadze, A.V. Equations of mathematical physics / A.V. Bitsadze. — Moscow : Nauka, 1982. [in Russian]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 187–210

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА С ПАМЯТЬЮ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

М. В. Турбин[1], А. С. Устюжанинова[2]

Воронежский государственный университет

e-mail: [1]mrmike@mail.ru, [2]nastyzhka@gmail.com

Поступила в редакцию 01.06.2023 г., после доработки 16.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Доказана разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для модифицированной модели Кельвина–Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения частиц жидкости. Для доказательства рассмотрена аппроксимационная задача, для которой на основе теоремы Лере–Шаудера о неподвижной точке установлена разрешимость. На основе априорных оценок показано, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Ключевые слова: слабое решение, модифицированная модель Кельвина–Фойгта, траектория, жидкость с памятью, начально-краевая задача, теорема существования.

DOI: 10.31857/S0374064124020046, EDN: QMTGVM

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С середины XX века известно достаточно большое число моделей неньютоновой гидродинамики, описывающих движение различных полимерных растворов и расплавов, эмульсий и суспензий одной ньютоновской жидкости в другой, жидкостей с полимерными добавками и др. Подобные модели активно изучаются в связи с наличием большого числа приложений в медицине, в химической и фармацевтической промышленности и во многих других областях.

Одной из хорошо известных моделей неньютоновской жидкости является модель движения жидкости Кельвина–Фойгта. Реологическое соотношение для этой модели имеет вид

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E}(v) + 2\varkappa\frac{d}{dt}\mathcal{E}(v). \tag{1}$$

Здесь σ — девиатор тензора напряжений, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций, ν — вязкость жидкости, $\varkappa$ — время запаздывания, а $d/dt = \partial/\partial t + \sum_{i=1}^n v_i\partial/\partial x_i$ — субстанциональная производная по времени. Соотношение (1) предложено в статье [1] и было подтверждено экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида [2] и гуаровой смолы [3].

Подставляя реологическое соотношение (1) в систему уравнений движения жидкости в форме Коши и пренебрегая членами, содержащими произведения производных в силу принципа малости относительных скоростей деформаций при течении жидкости, в [1] была получена система уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\Delta v+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-\varkappa\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial\Delta v}{\partial x_i}+\nabla p=f;\quad \operatorname{div}v=0. \tag{2}$$

Исследование разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений (2) было начато в работах А.П. Осколкова [4, 5]. Однако в статье [6] им было замечено, что доказательства в упомянутых работах содержат ошибки, и вопрос разрешимости начально-краевой задачи с условием прилипания на границе оставался открытым. Об этом также писала О.А. Ладыженская [7]. Доказательство существования слабого решения начально-краевой задачи для системы (2) было получено в [8]. В работах [8–12] для системы (2) исследованы задачи оптимального управления и вопросы предельного поведения решений.

На основе моделей жидкостей Максвелла, Кельвина–Фойгта и Олдройта была создана общая феноменологическая теория линейных вязкоупругих жидкостей с конечным числом дискретно распределённых времён релаксации и времён запаздывания [13]. В основе этой теории лежит предположение — принцип суперпозиции Л. Больцмана — о том, что все воздействия на среду независимы и аддитивны, а реакции среды на внешние воздействия линейны. Реологическое соотношение для модели Кельвина–Фойгта порядка L, $L\in\mathbb{N}$, имеет вид

$$\Big(1+\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{d^i}{dt^i}\Big)\sigma=2\Big(\mu+\sum_{i=1}^{L+1}\varkappa_i\frac{d^i}{dt^i}\Big)\mathcal{E}(v), \tag{3}$$

где λ_i, $i=\overline{1,L}$, — времена релаксации, а $\varkappa_i$, $i=\overline{1,L+1}$, — времена ретардации. Используя преобразование Лапласа (см., например, [14]) и пренебрегая в силу принципа малости относительных скоростей и деформаций членами, содержащими произведения производных $v(t,x)$ по пространственным переменным, получаем следующую систему уравнений, описывающую движение несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта с памятью:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-\nu\Delta v-\varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-\varkappa\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial\Delta v}{\partial x_i}-$$
$$-\int_0^t\sum_{i=1}^{L}\beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\Delta v(s,z(s,t,x))\,ds+\nabla p=f;\quad \operatorname{div}v=0,\quad (t,x)\in Q_T=[0,T]\times\Omega; \tag{4}$$

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v(s,z(s;t,x))\,ds,\quad 0\leqslant t,\tau\leqslant T,\quad x\in\Omega. \tag{5}$$

Здесь Ω — выпуклая область с гладкой границей; v — вектор скорости частицы жидкости; p — давление жидкости; f — вектор плотности внешних сил; $\nu>0$, $\varkappa>0$ — вязкость жидкости и время ретардации соответственно; β_i, α_i, $i=\overline{1,L}$, — некоторые константы. Исходя из физического смысла предполагается, что константы α_i, $i=\overline{1,L}$, различны, вещественны и отрицательны. Требование вещественности и отрицательности обусловлено физическим смыслом задачи, требование различности продиктовано упрощением вычислений. Функция $z(\tau;t,x)$ — траектория движения жидкости, соответствующая полю скоростей v.

Для системы (4), (5) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0}=a(x),\quad x\in\Omega;\quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0. \tag{6}$$

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для того чтобы ввести понятие слабого решения, нам потребуются определения некоторых пространств. Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть $\mathcal{V}=\{v(x)=(v_1,\ldots,v_n)\in C_0^\infty(\Omega)^n:\operatorname{div}v=0\}$. Определим V^0 и V^1 как пополнение $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Пусть $V^2=H^2(\Omega)^n\cap V^1$.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A=-\pi\Delta$, где $\pi:L_2(\Omega)^n\to V^0$ — проектор Лере. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряжённым положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то собственные функции $\{e_j\}$ оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha}=\big(\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^\alpha|v_k|^2\big)^{1/2}$. В книге [14] показано, что такие нормы в пространствах V^α, $\alpha\in\mathbb{N}$, эквивалентны нормам $\|v\|_{V^\alpha}=\|A^{\alpha/2}v\|_{V^0}$.

Символ “:” обозначает покомпонентное произведение матриц.

Также введём пространства

$$W_1=\{u:u\in L_\infty(0,T;V^2),u'\in L_2(0,T;V^1)\},\quad W_2=\{u:u\in C([0,T],V^5),u'\in L_2(0,T;V^5)\}$$

с нормами $\|u\|_{W_1}=\|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)}+\|u'\|_{L_2(0,T;V^1)}$, $\|u\|_{W_2}=\|u\|_{C([0,T],V^5)}+\|u'\|_{L_2(0,T;V^5)}$.

Будем использовать следующую теорему Лере–Шаудера.

Теорема 1. *Пусть G — открытое ограниченное подмножество банахового пространства X, $0\in G$, и пусть $\Xi(\tau,\cdot):\overline{G}\to X$, $\tau\in[0,1]$, — однопараметрическое семейство отображений, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) отображение $\Xi:[0,1]\times\overline{G}\to X$ компактно по совокупности переменных;

2) $\Xi(\tau,x)\neq x$ для всех $\tau\in[0,1]$ и $x\in\partial G$, т.е. отображение $\Xi(\tau,\cdot)$ не имеет неподвижных точек на границе G;

3) $\Xi(0,\cdot)\equiv0$.

Тогда отображение $\Xi(1,\cdot)$ имеет неподвижную точку, т.е. существует точка $x_1\in G$ такая, что $x_1=\Xi(1,x_1)$.

В дальнейшем нам потребуется теорема Обена–Дубинского–Симона.

Теорема 2 [15]. *Пусть $X\subset E\subset Y$ — банаховы пространства, причём вложение $X\subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E\subset Y$ непрерывно. Пусть $F\subset L_p(0,T;X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Будем предполагать, что для любого $f\in F$ его обобщённая производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1\leqslant r\leqslant\infty$. Далее пусть множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$, а множество $\{f':\,f\in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$.*

Тогда при $p<\infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p=\infty$ и $r>1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.

Нам потребуется одна абстрактная теорема о разрешимости уравнений с вольтерровыми операторами. Чтобы её сформулировать, необходимо дать следующее определение (мы даём его в частном случае, более подробно см. [16]).

Определение 1. Пусть X_1, X_2 — линейные пространства. Отображение $G:L_{p_1}(0,T;X_1)\to L_{p_2}(0,T;X_2)$ называется *оператором Вольтерры*, если из равенства $u(s)=v(s)$ для почти всех $s\in[0,t]$, $t\in[0,T]$ следует, что $(Gu)(s)=(Gv)(s)$ для почти всех $s\in[0,t]$.

Для таких операторов имеет место

Теорема 3. *Пусть X — вещественное банахово пространство. Пусть оператор Вольтерры $G: L_2(0,T;X)\to L_2(0,T;X)$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|Gu-Gv\|_{L_2(0,T;X)}\leqslant C\|u-v\|_{L_2(0,T;X)},\quad C=\mathrm{const}. \tag{7}$$

Тогда при любых $a\in X$, $f\in L_2(0,T;X)$ существует точно одно решение $u\in W=\{u: u\in\in C([0,T],X),\ u'\in L_2(0,T;X)\}$ задачи

$$u'+Gu=f,\quad u(0)=a.$$

Определяемое тем самым соответствие $\{a,f\}\to\{u,u'\}$ непрерывно как отображение из $X\times L_2(0,T;X)$ в $C([0,T],X)\times L_2(0,T;X)$.

Также нам потребуется неравенство Гронуолла–Беллмана (см., например, [17]).

Теорема 4. *Пусть $v(t)$, $g(t)$ — непрерывные неотрицательные на отрезке $[0,T]$ функции и пусть $C\geqslant 0$. Если v удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t)\leqslant C+\int\limits_0^t g(s)v(s)\,ds\quad \textit{для}\quad t\in[0,T],$$

то $v(t)\leqslant C\exp\left\{\int_0^t g(s)ds\right\}$ для $t\in[0,T]$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРАЕКТОРИЙ

Приведём необходимые нам утверждения о разрешимости задачи (5). Следуя работе [18], начнём с гладкого случая. Пусть $v\in L_1(0,T;C(\overline{\Omega})^n)$. Решение (5) определяется как функция $z(\tau)\equiv z(\tau;t,x)$ ($\tau,t\in[0,T]$, $x\in\overline{\Omega}$), такая что $z(\tau)\in C([0,T],\overline{\Omega})$ и удовлетворяет (5). Обозначим через $\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})^n$ множество непрерывных функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Лемма 1. *Пусть $v\in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n\cap\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})^n)$ и $\partial\Omega\in C^1$. Тогда задача (5) имеет единственное решение z. Более того, z, $\partial z/\partial x$ непрерывны по переменным $\tau,t\in[0,T]$, $x\in\overline{\Omega}$.*

Лемма 2. *Пусть $v^k\in L_1(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n\cap\overset{\circ}{C}(\overline{\Omega})^n)$, $k=1,2$, $\partial\Omega\in C^1$, и z^k, $k=1,2$, — решения задачи (5). Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\left\|z^1(\tau;t,x)-z^2(\tau;t,x)\right\|_{L_q(\Omega)^n}\leqslant C\left|\int\limits_t^\tau\|v^1(s,x)-v^2(s,x)\|_{L_q(\Omega)^n}\,ds\right|\times$$
$$\times\exp\left\{C\min_{k=1,2}\left|\int\limits_t^\tau\|v^k(s,x)\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\,ds\right|\right\},\quad 1\leqslant q\leqslant\infty. \tag{8}$$

Здесь C — константа, не зависящая от τ, t и v^k, $k=1,2$.

Для суммируемой функции v требуется более общая концепция решения задачи (5).

Определение 2. Функция $z(\tau;t,x)\colon[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}\to R^n$ называется *регулярным лагранжевым потоком*, соответствующим v, если выполнены следующие условия:

1) для почти всех x и любых $t\in[0,T]$ функция $\gamma(\tau)=z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (5);

2) для любых $\tau,t\in[0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset\overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau,t,B))=m(B)$;

3) для любых $t_1,t_2,t_3\in[0,T]$ и почти всех $x\in\overline{\Omega}$ имеет место равенство $z(t_3,t_1,x)==z(t_3,t_2,z(t_2,t_1,x))$.

Отметим, что для гладкого векторного поля v регулярный лагранжев поток совпадает с классическим решением задачи Коши (5).

Теорема 5. *Пусть $v \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega)^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\operatorname{div} v(t,x)=0$ и $v(t,x)|_{\partial\Omega}=0$. Тогда существует единственный регулярный лагранжев поток z, соответствующий v.*

Пусть v_x — матрица Якоби вектор-функции v.

Теорема 6. *Пусть $v, v^m \in L_1(0,T;W_1^p(\Omega)^n)$, $m=1,2,\ldots$, для некоторого $p>1$. Пусть $\operatorname{div} v^m=0$, $v^m|_{\partial\Omega}=0$, $\operatorname{div} v=0$, $v|_{\partial\Omega}=0$ и пусть выполняются неравенства*

$$\|v_x\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega)^{n^2})}+\|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega)^n)} \leqslant M, \quad \|v_x^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega)^{n^2})}+\|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega)^n)} \leqslant M.$$

Пусть v^m сходится к функции v в $L_1(Q_T)^n$ при $m\to\infty$. Пусть z^m и z — регулярные лагранжевы потоки, соответствующие v^m и v. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега в $[0,T]\times\Omega$ равномерно по $t\in[0,T]$.

В более общем виде эти результаты можно найти в работах [19, 20].

Приведём также лемму, которая понадобится нам для предельного перехода.

Лемма 3. *Пусть $h\in L_\infty([0,T]\times[0,T])$, последовательность v^m равномерно ограничена по норме пространства $L_2(0,T;V^2)$, т.е. $\|v^m\|_{L_2(0,T;V^2)}\leqslant C$, и сходится слабо в $L_2(0,T;V^2)$ к некоторой функции v при $m\to\infty$. Тогда*

$$\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds \rightharpoonup \int\limits_0^t h(s,t)\Delta v(s,z(s;t,x))\,ds \tag{9}$$

слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ при $m\to\infty$. Здесь z^m и z — регулярные лагранжевы потоки, соответствующие v^m и v соответственно.

Доказательство. Покажем, что последовательность $\int_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$. С учётом неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}\Big\|\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\Big\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)} &= \int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big|\int\limits_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\Big|^2dx\,dt \leqslant \\ &\leqslant \|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\bigg(\int\limits_0^t\big|\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\big|\,ds\bigg)^2dx\,dt\leqslant \\ &\leqslant \|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\bigg(\sqrt{t}\bigg(\int\limits_0^t\big|\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\big|^2ds\bigg)^{1/2}\bigg)^2dx\,dt\leqslant \\ &\leqslant T\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\big|\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\big|^2\,dx\,ds\,dt.\end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $x=z^m(t;s,y)$ и получим

$$\begin{aligned}T\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\int\limits_0^T\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\big|\Delta v^m(s,y)\big|^2\,dy\,ds\,dt\leqslant \\ \leqslant T^2\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}\|v^m\|^2_{L_2(0,T;V^2)}\leqslant C^2T^2\|h\|^2_{L_\infty([0,T]\times[0,T])}.\end{aligned}$$

Следовательно, существует $w\in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ такая, что $\int_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds$ сходится слабо к w в $L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$ при $m\to\infty$. Но в смысле распределений эта последовательность сходится к $\int_0^t h(s,t)\Delta v(s,z(s;t,x))\,ds$. На самом деле, для любой функции $\varphi\in\mathcal{V}$,

$\chi\in\mathcal{D}(0,T)$, сделав замену переменной $x=z^m(t;s,y)$ и поменяв порядок интегрирования, имеем

$$\int_0^T\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,z^m(s;t,x))\,ds\,\varphi(x)\,dx\,\chi(t)\,dt=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\Delta v^m(s,y)\,ds\,\varphi(z^m(t;s,y))\,dy\,\chi(t)\,dt=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega \Delta v^m(s,y)\int_s^T h(s,t)\varphi(z^m(t;s,y))\chi(t)\,dt\,dyds=\int_0^T\int_\Omega \Delta v^m(s,y)H^m(s,y)\,dy\,ds,$$

где $H^m(s,y)=\int_s^T h(s,t)\varphi(z^m(t;s,y))\chi(t)\,dt$.

По теореме 6 последовательность z^m сходится к z по мере Лебега в $[0,T]\times\Omega$ равномерно на промежутке $t\in[0,T]$. В силу гладкости функция $\varphi(z^m(t;s,y))$ сходится к функции $\varphi(z(t;s,y))$ почти всюду на Q_T при $m\to\infty$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла равномерно ограниченная последовательность $H^m(s,y)$ сходится почти всюду на Q_T к ограниченной функции $H(s,y)=\int_s^T h(s,t)\varphi(z(s;t,y))\chi(t)\,dt$.

В результате получаем

$$\int_0^T\int_\Omega \Delta v^m(s,y)H^m(s,y)\,dy\,ds\to\int_0^T\int_\Omega \Delta v(s,y)H(s,y)\,dy\,ds$$

при $m\to\infty$. Здесь первый сомножитель сходится слабо в $L_2(Q_T)^n$, а второй сомножитель сходится почти всюду на Q_T. В полученном интеграле меняем порядок интегрирования и делаем замену $y=z(s;t,x)$:

$$\int_0^T\int_\Omega \Delta v(s,y)H(s,y)\,dy\,ds=\int_0^T\int_\Omega \Delta v(s,y)\int_s^T h(s,t)\varphi(z(t;s,y))\chi(t)\,dt\,dy\,ds=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\Delta v(s,y)\,ds\,\varphi(z(t;s,y))\,dy\,\chi(t)\,dt=\int_0^T\int_\Omega\int_0^t h(s,t)\Delta v(z(s;t,x))\,ds\,\varphi(t,x)\,dx\,\chi(t)\,dt.$$

В силу единственности предела $w=\int_0^t h(s,t)\Delta v(z(s;t,x))\,ds$. Лемма доказана.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Будем предполагать, что $a\in V^2$, $f\in L_2(0,T;V^0)$.

Определение 3. Функция $v\in W_1$ называется *слабым решением начально-краевой задачи* (4)–(6) если удовлетворяет для любой пробной функции $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ тождеству

$$\int_\Omega v'\varphi\,dx-\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\nu\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int_\Omega\nabla v':\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\varkappa\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega v_i\Delta v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\Delta v(s,z(s,t,x))\varphi\,dx\,ds=\int_\Omega f\varphi\,dx\qquad(10)$$

и начальному условию $v(0)=a$.

Здесь z — регулярный лагранжев поток, порождённый v. Заметим, что по теореме 5 регулярный лагранжев поток z существует для любой функции $v \in W_1$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 7. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (4)–(6).*

Для доказательства этой теоремы рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и доказывается её разрешимость. После на основе априорных оценок решений, не зависящих от параметра аппроксимации, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

5. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial \Delta^3 v}{\partial t} - \varkappa\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \Delta v}{\partial x_i} -$$

$$-\int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{\alpha_i(t-s)} \Delta v(s, z(s,t,x))\, ds + \nabla p = f; \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T]\times\Omega; \tag{11}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))\, ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \Omega; \tag{12}$$

$$v|_{t=0} = b(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \Delta v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \Delta^2 v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{13}$$

Будем предполагать, что $b \in V^5$, $f \in L_2(0,T;V^0)$.

Определение 4. Функция $v \in W_2$ называется *решением аппроксимационной задачи* (11)–(13), если удовлетворяет для любой функции $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ тождеству

$$\int_\Omega v'\varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx + \varkappa\int_\Omega \nabla v' : \nabla\varphi\, dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla(\Delta^2 v') : \nabla\varphi\, dx +$$

$$+ \varkappa\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \Delta v(s, z(s,t,x))\varphi\, dx\, ds = \int_\Omega f\varphi\, dx$$

и начальному условию $v(0) = b$.

Здесь z — решение задачи (12). Отметим, что в силу вложения $V^5 \subset C^1(\overline{\Omega})^n$ задача (12) имеет единственное классическое решение.

Имеет место следующая

Теорема 8. *Существует хотя бы одно решение аппроксимационной задачи (11)–(13).*

Доказательство этой теоремы (опираясь на теорему 1) приводится в п. 6.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8

Доказательство теоремы приведём в несколько этапов.

Этап 1. Пусть u — фиксированная функция из $C([0,T],V^3)$, $\|u\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant M$ (здесь M — константа, точное значение которой будет указано ниже). В силу непрерывного вложения $V^3 \subset C^1(\overline{\Omega})^n$ получаем, что $u \in C([0,T], C^1(\overline{\Omega})^n)$, причём u обращается в нуль на $\partial\Omega$. Тогда по лемме 1 существует единственное решение Z_u задачи Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s;t,x))\, ds. \tag{14}$$

Этап 2. На этом этапе для исходной функции u и найденной по ней функции Z_u доказывается существование функции $w\in W_2$, удовлетворяющей для любой пробной функции $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ тождеству

$$\int\limits_\Omega w'\varphi\,dx-\xi\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_iw_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\xi\nu\int\limits_\Omega\nabla w:\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int\limits_\Omega\nabla w':\nabla\varphi\,dx+\varepsilon\int\limits_\Omega\nabla(\Delta^2w'):\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\xi\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i\Delta w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\xi\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta w(s,Z_u(s,t,x))\varphi\,dx\,ds=\xi\int\limits_\Omega f\varphi\,dx \tag{15}$$

и начальному условию

$$w(0)=\xi b,\quad \xi\in[0,1]. \tag{16}$$

Для доказательства существования единственного решения этой задачи воспользуемся теоремой 3. Для этого сначала введём операторы при помощи следующих равенств:

$$A:V^1\to V^{-1},\quad \langle Av,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^1;$$
$$J:V^1\to V^{-1},\quad \langle Jv,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega v\varphi\,dx,\quad v,\varphi\in V^1;$$
$$A^3:V^5\to V^{-1},\quad \langle A^3v,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\nabla(\Delta^2v):\nabla\varphi\,dx,\quad v\in V^5,\quad \varphi\in V^1.$$

Также для фиксированной функции $u\in C([0,T],V^3)$ и найденной на первом этапе функции $Z_u\in C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^n)$ введём операторы при помощи равенств

$$B_1(u,\cdot):L_4(\Omega)^n\to V^{-1},\quad \langle B_1(u,v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in L_4(\Omega)^n,\quad \varphi\in V^1;$$
$$B_2(u,\cdot):V^2\to V^{-1},\quad \langle B_2(u,v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i\Delta v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx,\quad v\in V^2,\quad \varphi\in V^1;$$
$$C(\cdot,Z_u):L_2(0,T;V^2)\to L_2(0,T;V^{-1}),$$
$$\langle C(v,Z_u)(t),\varphi\rangle=\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta v(s,Z_u(s,t,x))\varphi\,dx\,ds,\quad v\in L_2(0,T;V^2),\quad \varphi\in V^1.$$

Тогда задача о поиске функции $w\in W_2$, удовлетворяющей для любой пробной функции $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ тождеству (15) и начальному условию (16), эквивалентна задаче о поиске функции $w\in W_2$, являющейся решением операторного уравнения

$$(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)w'+\xi\nu Aw-\xi B_1(u,w)+\xi\varkappa B_2(u,w)-\xi C(w,Z_u)=\xi f \tag{17}$$

и удовлетворяющей начальному условию (16).

Для того чтобы воспользоваться теоремой 3, нужно установить некоторые свойства операторов. Отметим, что мы установим только те свойства, которые нам необходимы.

Лемма 4. *Справедливы следующие свойства.*

1. Для функции $g\in L_2(0,T;V^1)$ значение $Ag\in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A:L_2(0,T;V^1)\to$ $\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка

$$\|Ag\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant\|g\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{18}$$

2. Оператор $(J+\varkappa A)\colon V^1\to V^{-1}$ непрерывен и обратим. Для любой функции $g\in L_2(0,T;V^1)$ значение $(J+\varkappa A)g\in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $(J+\varkappa A):L_2(0,T;V^1)\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка

$$\varkappa\|g\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant\|(J+\varkappa A)g\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{19}$$

3. Для $g\in L_2(0,T;V^5)$ значение $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)g\in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A):L_2(0,T;V^5)\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен, обратим и имеет место оценка

$$\varepsilon\|g\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)g\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant(C_1+\varepsilon+\varkappa C_2)\|g\|_{L_2(0,T;V^5)}. \tag{20}$$

Обратный оператор $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}:L_2(0,T;V^{-1})\to L_2(0,T;V^5)$ непрерывен и для него справедливо неравенство

$$\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}h\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|h\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{21}$$

4. Пусть функция $u\in C([0,T],V^3)$ фиксирована, $\|u\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant M$. Для любой функции $g\in L_2(0,T;V^1)$ значение $B_1(u,g)\in L_2(0,T;V^{-1})$, отображение $B_1(u,\cdot):L_2(0,T;V^1)\to\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывно и для него имеет место оценка

$$\|B_1(u,g)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_3M\|g\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{22}$$

5. Пусть функция $u\in C([0,T],V^3)$ фиксирована, $\|u\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant M$. Для любой функции $g\in L_2(0,T;V^2)$ значение $B_2(u,g)\in L_2(0,T;V^{-1})$, отображение $B_2(u,\cdot):L_2(0,T;V^2)\to\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывно и для него имеет место оценка

$$\|B_2(u,g)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_4M\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}. \tag{23}$$

Доказательства свойств 1 и 2 леммы представлены в статье [8], доказательство свойства 3 содержится в [14]. Свойства операторов B_1, B_2 являются частными случаями для аналогичных операторов из работы [8].

Лемма 5. *Пусть функция $u\in C([0,T],V^3)$ фиксирована и $Z_u\in C([0,T]\times[0,T],C(\overline{\Omega})^n)$ — найденное по u решение задачи (14). Отображение $C(\cdot,Z_u):L_2(0,T;V^2)\to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывно и для него имеет место неравенство*

$$\|C(g,Z_u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_5\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}. \tag{24}$$

Доказательство. По определению $C(\cdot,Z_u)$ для любой функции $g\in L_2(0,T;V^1)$ при почти всех $t\in[0,T]$ и для любой $\varphi\in V^1$ имеем

$$|\langle C(g,Z_u)(t),\varphi\rangle|=\left|\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_\Omega\Delta g(s,Z_u(s,t,x))\varphi\,dx\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int\limits_0^te^{\alpha_i(t-s)}\biggl(\int\limits_\Omega|\Delta g(s,Z_u(s;t,x))|^2\,dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int\limits_\Omega|\varphi|^2\,dx\biggr)^{1/2}ds.$$

В первом интеграле в правой части этого соотношения сделаем замену переменной $y==Z_u(s;t,x)$ (обратная замена $x=Z_u(t;s,y)$). Так как $\operatorname{div}u=0$, то $\det\partial Z_u/\partial x=1$. Поэтому

$$\int\limits_\Omega|\Delta g(s,Z_u(s;t,x))|^2\,dx=\int\limits_\Omega|\Delta g(s,y)|^2\,dy=\|\Delta g(s)\|^2_{L_2(\Omega)^n}.$$

Следовательно, пользуясь тем, что $\alpha_i<0$, $i=\overline{1,L}$, имеем

$$|\langle C(g,Z_u)(t),\varphi\rangle|\leqslant\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\max_{s\in[0,t]}e^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_0^t\|\Delta g(s)\|_{L_2(\Omega)^n}\,ds\,\|\varphi\|_{L_2(\Omega)^n}\leqslant$$
$$\leqslant C_6\sqrt{t}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\bigg(\int\limits_0^t\|g(s)\|_{V^2}^2\,ds\bigg)^{1/2}\|\varphi\|_{V^1}\leqslant C_7\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Отсюда при почти всех $t\in(0,T)$ получим неравенство $\|C(g,Z_u)(t)\|_{V^{-1}}\leqslant C_7\|g\|_{L_2(0,T;V^2)}$. Возводя его в квадрат и интегрируя по $[0,T]$, получаем (24) с константой $C_5=C_7\sqrt{T}$, из которой в силу линейности следует непрерывность оператора $C(\cdot,Z_u)$. Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть функция $u\in C([0,T],V^3)$ фиксирована, $\|u\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant M$. Для любых функций $b\in V^5$, $f\in L_2(0,T;V^0)$ при каждом $\xi\in[0,1]$ существует единственное решение $v\in W_2$ задачи (15), (16).*

Доказательство. Как уже было отмечено ранее, разрешимость задачи (15), (16) эквивалентна существованию решения операторного уравнения (17), удовлетворяющего начальному условию (16). В силу леммы 4 оператор $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A):L_2(0,T;V^5)\to L_2(0,T;V^{-1})$ обратим и обратный к нему оператор непрерывен. Применив оператор $(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}$ к операторному уравнению (17), получим эквивалентное операторное уравнение

$$w'+\xi(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}\big(\nu Aw-B_1(u,w)+\varkappa B_2(u,w)-C(w,Z_u)\big)=$$
$$=\xi(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}f,\quad \xi\in[0,1]. \tag{25}$$

Отметим, что при $\xi=0$ операторное уравнение (25) и начальное условие (16) имеют вид

$$w'=0,\quad w(0)=0.$$

Таким образом, при $\xi=0$ задача (15), (16) имеет только нулевое решение.

Пусть теперь $\xi\in(0,1]$. Докажем существование решения $v\in W_2$ операторного уравнения (25), удовлетворяющего начальному условию (16). Для этого воспользуемся теоремой 3. Проверим выполнение её условий. Очевидно, что оператор $G:L_2(0,T;V^5)\to L_2(0,T;V^5)$:

$$G=\xi(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}\big(\nu A-B_1(u,\cdot)+\varkappa B_2(u,\cdot)-C(\cdot,Z_u)\big)$$

является оператором Вольтерры (см. определение 1). Проверим выполнение условия (7). В силу линейности G покажем, что для любой $h\in L_2(0,T;V^5)$ имеет место неравенство

$$\|Gh\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant L\|h\|_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Для любой функции $h\in L_2(0,T;V^5)$ в силу определения оператора G, а также неравенств (18), (21)–(24), имеем

$$\|Gh\|_{L_2(0,T;V^5)}=\|\xi(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)^{-1}\big(\nu Ah-B_1(u,h)+\varkappa B_2(u,h)-C(h,Z_u)\big)\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\xi}{\varepsilon}(\nu\|Ah\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\|B_1(u,h)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\varkappa\|B_2(u,h)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\|C(\cdot,Z_u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})})\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\xi}{\varepsilon}(\nu\|h\|_{L_2(0,T;V^1)}+C_3M\|h\|_{L_2(0,T;V^1)}+\varkappa C_4M\|h\|_{L_2(0,T;V^2)}+C_5\|h\|_{L_2(0,T;V^2)})\leqslant$$
$$\leqslant C_8\frac{\xi}{\varepsilon}\|h\|_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Следовательно, по теореме 3 существует единственное решение $w\in W_2$ задачи (15), (16). Теорема доказана.

Этап 3. Таким образом, построено семейство отображений T, которое числу $\xi\in[0,1]$ и функции $u\in C([0,T],V^3)$ ставит в соответствие функцию $w\in W_2$. Установим теперь непрерывность отображения $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to W_2$, где B_M — шар в $C([0,T],V^3)$ радиуса M с центром в нуле. Имеет место следующая

Лемма 6. *Отображение* $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to W_2$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\{u^k\}$ — последовательность функций, $u^k\in\overline{B_M}\subset C([0,T],V^3)$, которая сходится в $C([0,T],V^3)$ к функции u^* при $k\to\infty$. Пусть ξ_k — последовательность чисел из $[0,1]$, которая сходится к ξ_* при $k\to\infty$. Обозначим $w^k=T(\xi_k,u^k)$. Покажем, что w^k сходится в пространстве W_2 к функции $w^*=T(\xi_*,u^*)$ при $k\to\infty$.

По построению функция w^k является решением задачи

$$(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^k)'+\xi_k\nu Aw^k-\xi_kB_1(u^k,w^k)+\xi_k\varkappa B_2(u^k,w^k)-\xi_kC(w^k,Z_{u^k})=\xi_kf, \tag{26}$$

$$Z_{u^k}(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau u^k(s,Z_{u^k}(s;t,x))\,ds, \tag{27}$$

$$w^k(0)=\xi_kb. \tag{28}$$

Соответственно w^* является решением задачи

$$(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^*)'+\xi_*\nu Aw^*-\xi_*B_1(u^*,w^*)+\xi_*\varkappa B_2(u^*,w^*)-\xi_*C(w^*,Z_{u^*})=\xi_*f, \tag{29}$$

$$Z_{u^*}(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau u^*(s,Z_{u^*}(s;t,x))\,ds, \tag{30}$$

$$w^*(0)=\xi_*b. \tag{31}$$

Вычитая (29) из (26) и преобразуя стандартным образом слагаемые, получаем

$$\begin{gathered}(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^k-w^*)'+\xi_k\nu A(w^k-w^*)+(\xi_k-\xi_*)\nu Aw^*-\\ -(\xi_k-\xi_*)B_1(u^*,w^*)+\xi_kB_1(u^k-u^*,w^*)-\xi_kB_1(u^k,w^k-w^*)+\\ +(\xi_k-\xi_*)\varkappa B_2(u^*,w^*)-\xi_k\varkappa B_2(u^k-u^*,w^*)+\xi_k\varkappa B_2(u^k,w^k-w^*)-\\ -(\xi_k-\xi_*)C(w^k,Z_{u^k})-\xi_*C(w^k-w^*,Z_{u^k})-\xi_*\big(C(w^*,Z_{u^k})-C(w^*,Z_{u^*})\big)=(\xi_k-\xi_*)f.\end{gathered} \tag{32}$$

Применим последнее равенство к функции w^k-w^*. Преобразовав первые два слагаемых при помощи формулы Грина, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac12\frac{d}{dt}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}+\\ +\xi_k\nu\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}+(\xi_k-\xi_*)\nu\langle Aw^*(t),(w^k-w^*)(t)\rangle-\\ -(\xi_k-\xi_*)\langle B_1(u^*(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle+\xi_k\langle B_1((u^k-u^*)(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle+\\ +(\xi_k-\xi_*)\varkappa\langle B_2(u^*(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle-\xi_k\varkappa\langle B_2((u^k-u^*)(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle+\\ +\xi_k\varkappa\langle B_2(u^k(t),(w^k-w^*)(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle-(\xi_k-\xi_*)\langle C(w^k(t),Z_{u^k}),(w^k-w^*)(t)\rangle-\\ -\xi_*\langle C((w^k-w^*)(t),Z_{u^k}),(w^k-w^*)(t)\rangle-\xi_*\langle(C(w^*(t),Z_{u^k})-C(w^*(t),Z_{u^*}))\,,(w^k-w^*)(t)\rangle=\\ =(\xi_k-\xi_*)\langle f(t),(w^k-w^*)(t)\rangle.\end{gathered} \tag{33}$$

Здесь мы воспользовались равенством $\langle B_1(h,g),g\rangle=0$ (см. [8]).

Перенесём в правую часть оставшиеся слагаемые и оценим её сверху при помощи неравенств Гёльдера и Коши. Для первого слагаемого в силу определения оператора A имеем

$$|(\xi_k-\xi_*)\nu\langle Aw^*(t),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\nu\left|\int\limits_\Omega\nabla(w^*(t)):\nabla(w^k-w^*)(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\nu\|w^*(t)\|_{V^1}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant\frac{1}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\nu^2\|w^*(t)\|^2_{V^1}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Для следующего слагаемого в силу определения отображения B_1 получим

$$|(\xi_k-\xi_*)\langle B_1(u^*(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i^*(t)w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\sum_{i,j=1}^n\|u_i^*(t)\|_{C(\overline{\Omega})}\|w_j^*(t)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_9|\xi_k-\xi_*|\|u^*(t)\|_{V^3}\|w^*(t)\|_{V^1}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_9^2}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\|u^*(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^1}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Аналогично для следующего слагаемого в силу $\xi_k\leqslant 1$ имеем

$$|\xi_k\langle B_1((u^k-u^*)(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant\xi_k\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(u^k-u^*)_i(t)w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_9\|(u^k-u^*)(t)\|_{V^3}\|w^*(t)\|_{V^1}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant\frac{C_9^2}{2}\|(u^k-u^*)(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^1}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Для следующего слагаемого в силу определения B_2 запишем

$$\left|(\xi_k-\xi_*)\varkappa\big\langle B_2(u^*(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\big\rangle\right|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\varkappa\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i^*(t)\Delta w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\varkappa\sum_{i,j=1}^n\|u_i^*(t)\|_{C(\overline{\Omega})}\|\Delta w_j^*(t)\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\varkappa|\xi_k-\xi_*|\|u^*(t)\|_{V^3}\|w^*(t)\|_{V^2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{10}^2\varkappa^2}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\|u^*(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^2}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Аналогично для второго и третьего слагаемых, содержащих B_2, получим

$$|\xi_k\varkappa\langle B_2((u^k-u^*)(t),w^*(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant\xi_k\varkappa\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n(u^k-u^*)_i(t)\Delta w_j^*(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{10}^2\varkappa^2}{2}\|(u^k-u^*)(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^2}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1};$$

$$|\xi_k\varkappa\langle B_2(u^k(t),(w^k-w^*)(t)),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant$$

$$\leqslant\xi_k\varkappa\left|\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n u_i^k(t)\Delta(w^k-w^*)_j(t)\frac{\partial(w^k-w^*)_j}{\partial x_i}(t)\,dx\right|\leqslant C_{10}\varkappa\|u^k(t)\|_{V^3}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^2}.$$

Для следующего слагаемого аналогично доказательству неравенства (24), применяя неравенство Гёльдера, делая замену переменной $y=Z_{u^k}(s;t,x)$ в первом из полученных сомножителей и пользуясь тем, что $\alpha_i<0,\ i=\overline{1,L}$, получаем

$$|(\xi_k-\xi_*)\langle C(w^k(t),Z_{u^k}),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\biggl|\int_\Omega\Delta w^k(s,Z_{u^k}(s,t,x))(w^k-w^*)(t)\,dx\biggr|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\biggl(\int_\Omega\bigl|\Delta w^k(s,Z_{u^k}(s,t,x))\bigr|^2\,dx\biggr)^{1/2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n}ds\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|\sum_{i=1}^L|\beta_i|\max_{s\in[0,t]}e^{\alpha_i(t-s)}\int_0^t\biggl(\int_\Omega|\Delta w^k(s,y)|^2\,dy\biggr)^{1/2}ds\,\|(w^k-w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n}\leqslant$$

$$\leqslant C_7|\xi_k-\xi_*|\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t\|w^k(s)\|_{V^2}\,ds\,\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{T}C_7|\xi_k-\xi_*|\sum_{i=1}^L|\beta_i|\|w^k\|_{L_2(0,T;V^2)}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant C_{11}|\xi_k-\xi_*|^2\|w^k\|^2_{L_2(0,T;V^2)}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Аналогично для следующего слагаемого в силу неравенства $\xi_k\leqslant1$

$$|\xi_*\langle C((w^k-w^*)(t),Z_{u^k}),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant$$

$$\leqslant\xi_*\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\biggl|\int_\Omega\Delta(w^k-w^*)(s,Z_{u^k}(s,t,x))(w^k-w^*)(t)\,dx\biggr|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\int_0^t\|(w^k-w^*)(s)\|^2_{V^2}\,ds+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Для следующей разности аналогично предыдущему, пользуясь теоремой о среднем (см., например, [21, с. 176]) и неравенством (8), будем иметь

$$\bigl|\xi_*\bigl\langle\bigl(C(w^*(t),Z_{u^k})-C(w^*(t),Z_{u^*})\bigr),(w^k-w^*)(t)\bigr\rangle\bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\xi_*\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\biggl|\int_\Omega\bigl(\Delta w^*(s,Z_{u^k}(s,t,x))-\Delta w^*(s,Z_{u^*}(s,t,x))\bigr)(w^k-w^*)(t)\,dx\biggr|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\bigl|\Delta w^*(s,Z_{u^k}(s,t,x))-\Delta w^*(s,Z_{u^*}(s,t,x))\bigr||(w^k-w^*)(t)|\,dx\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\max_{z\in\Omega}\biggl|\frac{\partial\Delta w^*}{\partial z}(s,z)\biggr|\bigl|Z_{u^k}(s,t,x)-Z_{u^*}(s,t,x)\bigr||(w^k-w^*)(t)|\,dx\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\|w^*(s)\|_{C^3(\overline{\Omega})^n}\biggl(\int_\Omega|Z_{u^k}(s,t,x)-Z_{u^*}(s,t,x)|^2\,dx\biggr)^{1/2}\|(w^k-w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int_0^t e^{\alpha_i(t-s)}\|w^*(s)\|_{C^3(\overline{\Omega})^n}C_{12}\int_t^s\|u^k(\tau)-u^*(\tau)\|_{L_2(\Omega)^n}\,d\tau\times$$

$$\times\exp\left\{C_{13}\left|\int_t^s\|u^*(\tau)\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\,d\tau\right|\right\}ds\,\|(w^k-w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n}\leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int_0^t\|w^*(s)\|_{C^3(\overline{\Omega})^n}\,ds\int_0^t\|u^k(\tau)-u^*(\tau)\|_{L_2(\Omega)^n}\,d\tau\times$$

$$\times\exp\bigl\{C_{14}T\|u^*\|_{C([0,T],V^3)}\bigr\}\|(w^k-w^*)(t)\|_{L_2(\Omega)^n}\leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\|w^*\|_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{15}^2}{2}\|w^*\|^2_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Здесь мы для упрощения изложения воспользовались неравенством $\|u^*\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant M$.

Наконец, для последнего слагаемого имеем

$$|(\xi_k-\xi_*)\langle f(t),(w^k-w^*)(t)\rangle|\leqslant|\xi_k-\xi_*|\|f(t)\|_{V^{-1}}\|(w^k-w^*)(t)\|_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|\xi_k-\xi_*|^2\|f(t)\|^2_{V^{-1}}+\frac{1}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Таким образом, из (33) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|^2\left(\frac{\nu^2}{2}\|w^*(t)\|^2_{V^1}+\frac{C_9^2}{2}\|u^*(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^1}+\frac{C_{10}^2\varkappa^2}{2}\|u^*(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^2}+\right.$$

$$\left.+C_{11}\|w^k\|^2_{L_2(0,T;V^2)}+\frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{V^{-1}}\right)+C_{11}\int_0^t\|(w^k-w^*)(s)\|^2_{V^2}\,ds+$$

$$+C_{10}\varkappa\|u^k(t)\|_{V^3}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^2}+\|(u^k-u^*)(t)\|^2_{V^3}\left(\frac{C_{10}^2\varkappa^2}{2}\|w^*(t)\|^2_{V^2}+\frac{C_9^2}{2}\|w^*(t)\|^2_{V^1}\right)+$$

$$+\frac{C_{15}^2}{2}\|w^*\|^2_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}+\frac{9}{2}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}.$$

Умножим последнее неравенство на два и проинтегрируем по переменной t от 0 до τ, $\tau\in[0,T]$. При этом оценим часть слагаемых в правой части, воспользовавшись тем, что в силу теоремы 3 решения задач (26)–(28) и (29)–(31) непрерывно зависят от правой части и начального условия и, следовательно, ограничены. Получим

$$\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^0}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^3}+\varkappa\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^1}\leqslant$$

$$\leqslant\|b\|^2_{V^0}|\xi_k-\xi_*|^2+\varepsilon\|b\|^2_{V^3}|\xi_k-\xi_*|^2+\varkappa\|b\|^2_{V^1}|\xi_k-\xi_*|^2+\int_0^\tau\Bigl(\nu^2\|w^*(t)\|^2_{V^1}+C_9^2\|u^*(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^1}+$$

$$+C_{10}^2\varkappa^2\|u^*(t)\|^2_{V^3}\|w^*(t)\|^2_{V^2}+2C_{11}\|w^k\|^2_{L_2(0,T;V^1)}+\|f(t)\|^2_{V^{-1}}\Bigr)dt\,|\xi_k-\xi_*|^2+$$

$$+2C_{11}\int_0^\tau\int_0^t\|(w^k-w^*)(s)\|^2_{V^2}\,ds\,dt+\int_0^\tau\bigl(C_9^2\|w^*(t)\|^2_{V^1}+C_{10}^2\varkappa^2\|w^*(t)\|^2_{V^2}\bigr)\,\|(u^k-u^*)(t)\|^2_{V^3}\,dt+$$

$$+C_{10}\varkappa\int\limits_0^\tau \|u^k(t)\|_{V^3}\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^2}\,dt+C_{15}^2\|w^*\|^2_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}\int\limits_0^\tau dt+$$

$$+9\int\limits_0^\tau \|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}\,dt\leqslant C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}+\frac{C_{18}}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \varepsilon\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^3}\,dt.$$

В силу неотрицательности слагаемых в левой части при всех $\tau\in[0,T]$

$$\varkappa\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^1}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^3}\leqslant$$
$$\leqslant C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)}+\frac{C_{18}}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\Big(\varkappa\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^1}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(t)\|^2_{V^3}\Big)\,dt.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла–Беллмана (теорема 4) при всех $\tau\in[0,T]$ имеем

$$\varkappa\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^1}+\varepsilon\|(w^k-w^*)(\tau)\|^2_{V^3}\leqslant$$
$$\leqslant(C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)})\exp\bigg\{\frac{C_{18}}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau d\tau\bigg\}\leqslant$$
$$\leqslant(C_{16}|\xi_k-\xi_*|^2+C_{17}\|u^k-u^*\|^2_{C([0,T],V^3)})\exp\bigg\{\frac{TC_{18}}{\varepsilon}\bigg\}. \tag{34}$$

Правая часть (34) не зависит от τ, поэтому можно перейти к максимуму по $\tau\in[0,T]$. Тогда в силу элементарного неравенства $(a^2+b^2)\leqslant(a+b)^2$, которое имеет место для любых неотрицательных a, b, непосредственно получаем, что

$$\sqrt{\varepsilon}\|w^k-w^*\|_{C([0,T],V^3)}\leqslant C_{19}(|\xi_k-\xi_*|+\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}). \tag{35}$$

Далее из (32), оставляя в левой части только первое слагаемое и пользуясь тем, что норма суммы не превосходит суммы норм, имеем

$$\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant\xi_k\nu\|A(w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+|\xi_k-\xi_*|\nu\|Aw^*\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+|\xi_k-\xi_*|\,\|B_1(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_k\|B_1(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\xi_k\|B_1(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+|\xi_k-\xi_*|\varkappa\|B_2(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+|\xi_k-\xi_*|\|C(w^k,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_*\|C(w^k-w^*,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\xi_*\,\|C(w^*,Z_{u^k})-C(w^*,Z_{u^*})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+|\xi_k-\xi_*|\,\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{36}$$

Оценим правую часть (36). Для первых двух слагаемых в силу (18) имеет место соотношение

$$\nu\xi_k\|A(w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\nu|\xi_k-\xi_*|\|Aw^*\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant\nu\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+|\xi_k-\xi_*|\nu\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Для следующего слагаемого в силу оценки (22) получим

$$|\xi_k-\xi_*|\|B_1(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant|\xi_k-\xi_*|C_3M\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Для следующего слагаемого, аналогично доказательству неравенства (22), имеем

$$\xi_k\|B_1(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_3\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Для последнего слагаемого с B_1 в силу (22) получаем

$$\xi_k\|B_1(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_3M\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Аналогично для следующих трёх слагаемых с B_2 в силу неравенства (23) запишем

$$|\xi_k-\xi_*|\varkappa\|B_2(u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k-u^*,w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\xi_k\varkappa\|B_2(u^k,w^k-w^*)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant|\xi_k-\xi_*|\varkappa C_4M\|w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+$$
$$+\varkappa C_4\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\|w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+\varkappa C_4M\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}.$$

Для следующих двух слагаемых в силу (24) получим

$$|\xi_k-\xi_*|\|C(w^k,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\xi_*\|C(w^k-w^*,Z_{u^k})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant|\xi_k-\xi_*|C_5\|w^k\|_{L_2(0,T;V^2)}+C_5\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}.$$

Для предпоследнего слагаемого, аналогично оценке подобного слагаемого выше, имеем

$$\xi_*\,\|C(w^*,Z_{u^k})-C(w^*,Z_{u^*})\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_{15}\|w^*\|_{C([0,T],V^5)}\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}.$$

В силу неравенства (20) левую часть (36) можно оценить следующим образом:

$$\varepsilon\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant\|(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом, из (36) получаем неравенство

$$\varepsilon\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant(\nu+C_3M)\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+(\varkappa C_4M+C_5)\|w^k-w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+$$
$$+\big((\nu+C_3M)\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+(\varkappa C_4M+C_5)\|w^k\|_{L_2(0,T;V^2)}+\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\big)|\xi_k-\xi_*|+$$
$$+\big(C_3\|w^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+\varkappa C_4\|w^*\|_{L_2(0,T;V^2)}+C_{15}\|w^*\|_{C([0,T],V^5)}\big)\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}.$$

Из этого неравенства в силу непрерывности вложений $L_2(0,T;V^2)\subset L_2(0,T;V^1)$ и $C([0,T],V^3)\subset$ $\subset L_2(0,T;V^2)$ и оценки (35) заключаем, что

$$\varepsilon\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant C_{20}\left(|\xi_k-\xi_*|+\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\right). \tag{37}$$

Поскольку $(w^k-w^*)(t)=(w^k-w^*)(0)+\int_0^t(w^k-w^*)'(s)\,ds$, то

$$\|w^k-w^*\|_{C([0,T],V^5)}\leqslant\|(w^k-w^*)(0)\|_{V^5}+\max_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t\|(w^k-w^*)'(s)\|_{V^5}\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\|(\tau_k-\tau_*)b\|_{V^5}+\int\limits_0^T\|(w^k-w^*)'(s)\|_{V^5}\,ds\leqslant|\tau_k-\tau_*|\|b\|_{V^5}+\sqrt{T}\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Из последнего соотношения и из (37) имеем

$$\|w^k-w^*\|_{W_2}=\|w^k-w^*\|_{C([0,T],V^5)}+\|(w^k-w^*)'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant$$
$$\leqslant|\tau_k-\tau_*|\|b\|_{V^5}+\frac{C_{20}}{\varepsilon}(1+\sqrt{T})\left(|\tau_k-\tau_*|+\|u^k-u^*\|_{C([0,T],V^3)}\right).$$

Отсюда следует, что w^k сходится к w^* по норме W_2 при $k\to\infty$. Лемма доказана.

Построенное отображение T не только непрерывно, но и компактно как отображение со значениями в некотором подходящем пространстве. А именно, справедлива следующая

Лемма 7. *Отображение* $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ *компактно.*

Доказательство. В силу леммы 6 отображение $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to W_2$ непрерывно. Так как вложение $V^5\subset V^3$ компактно, то по теореме 2 вложение $W_2\subset C([0,T],V^3)$ компактно. Таким образом, $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ компактно как суперпозиция непрерывного и компактного отображений. Лемма доказана.

Этап 4. Докажем теперь, что отображение $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ не имеет неподвижных точек на границе шара B_R. Для этого покажем сначала, что все неподвижные точки этого отображения удовлетворяют подходящей априорной оценке. Имеет место следующая

Теорема 10. *Если v — неподвижная точка отображения* $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$, *т.е.* $T(\xi,v)=v$ *для некоторого* $\xi\in[0,1]$, *то для него имеют место следующие оценки:*

$$\|v\|^2_{C([0,T],V^2)}\leqslant C_{21}Ke^{TC_{22}}; \tag{38}$$

$$\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant C_{23}K; \tag{39}$$

$$\varkappa\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant 2C_{23}K; \tag{40}$$

$$\varepsilon\|v\|_{C([0,T];V^5)}\leqslant C_{24}K+\varepsilon\|b\|_{V^5}, \tag{41}$$

где $K=\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b\|^2_{V^2}+\varepsilon\|b\|^2_{V^3}+\varepsilon\varkappa\|b\|^2_{V^4}\big)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что, несмотря на то что по условиям теоремы $v\in C([0,T],V^3)$, по построению отображения T функция v принадлежит пространству W_2 и поэтому указанные оценки имеют для неё смысл.

Сначала получим стандартную энергетическую оценку. Так как v — неподвижная точка отображения T, то v является решением задачи

$$(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)v'+\xi\nu Av-\xi B_1(v,v)+\xi\varkappa B_2(v,v)-\xi C(v,Z_v)=\xi f, \tag{42}$$

$$Z_v(\tau;t,x)=x+\int\limits_t^\tau v(s,Z_v(s;t,x))\,ds,$$

$$v(0)=\xi b. \tag{43}$$

Применим (42) к функции $(J+\varkappa A)v$:

$$\begin{aligned}&\langle(J+\varepsilon A^3+\varkappa A)v',(J+\varkappa A)v\rangle+\xi\langle\nu Av,(J+\varkappa A)v\rangle-\xi\langle B_1(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle+\\&+\xi\langle\varkappa B_2(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle-\xi\langle C(v,Z_v),(J+\varkappa A)v\rangle=\xi\langle f,(J+\varkappa A)v\rangle.\end{aligned} \tag{44}$$

В силу свойств операторов B_1 и B_2 (см. [8]) имеем

$$-\xi\langle B_1(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle+\xi\langle\varkappa B_2(v,v),(J+\varkappa A)v\rangle=0.$$

В силу определения $J+\varepsilon A^3+\varkappa A$ и формулы Грина аналогично предыдущему получаем

$$\begin{gathered}\langle\big(J+\varepsilon A^3+\varkappa A\big)\,v',(J+\varkappa A)\,v\rangle=\\=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0}+\varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}+\frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3}+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4}.\end{gathered}$$

Для следующего слагаемого будем иметь

$$\xi\langle \nu Av, (J+\varkappa A)\, v\rangle = \xi\nu\int\limits_{\Omega}\nabla v:\nabla v\,dx + \xi\nu\varkappa\int\limits_{\Omega}\Delta v\Delta v\,dx = \xi\nu\|v(t)\|^2_{V^1}dt + \xi\nu\varkappa\|v(t)\|^2_{V^2}.$$

Последнее слагаемое в левой части в силу неравенства Гёльдера оценим сверху:

$$|\xi\langle C(v,Z_v),(J+\varkappa A)v\rangle| = \xi\left|\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L\beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_{\Omega}\Delta v(s,Z_v(s,t,x))(J+\varkappa A)v(t)\,dx\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s\in[0,t]} e^{\alpha_i(t-s)}\int\limits_0^t\sum_{i=1}^L|\beta_i|\left(\int\limits_{\Omega}|\Delta v(s,Z_v(s;t,x))|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega}|(J+\varkappa A)v(t)|^2\,dx\right)^{1/2}ds.$$

Сделаем замену $x = Z_v(t;s,y)$ в первом сомножителе и получим

$$|\xi\langle C(v,Z_v),(J+\varkappa A)v\rangle| \leqslant \int\limits_0^t\sum_{i=1}^L|\beta_i|\left(\int\limits_{\Omega}|\Delta v(s,y)|^2dy\right)^{1/2}\|(J+\varkappa A)v(t)\|_{V^0}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t\sum_{i=1}^L|\beta_i|\,\|v(s)\|_{V^2}(C_{25}+\varkappa)\|v(t)\|_{V^2}\,ds \leqslant C_{26}(C_{25}+\varkappa)\int\limits_0^t\|v(s)\|_{V^2}\|v(t)\|_{V^2}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C_{26}(C_{25}+\varkappa)\int\limits_0^t\frac12(\|v(s)\|^2_{V^2}+\|v(t)\|^2_{V^2})\,ds \leqslant \frac{C_{26}(C_{25}+\varkappa)}{2}\left(\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^2}\,dt + t\|v(t)\|^2_{V^2}\right).$$

Оценим правую часть:

$$|\xi\langle f,(J+\varkappa A)v\rangle| \leqslant \xi\|f(t)\|_{V^0}\|(J+\varkappa A)v(t)\|_{V^0}dt \leqslant$$

$$\leqslant (C_{25}+\varkappa)\|f(t)\|_{V^0}\|v(t)\|_{V^2}dt \leqslant \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|f(t)\|^2_{V^0}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\frac12\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1} + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^3} + \frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4} +$$

$$+\xi\nu\|v(t)\|^2_{V^1}dt + \xi\nu\varkappa\|v(t)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{C_{26}(C_{25}+\varkappa)}{2}\left(\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^2}\,dt + t\|v(t)\|^2_{V^2}\right) +$$

$$+\frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|v(t)\|^2_{V^2} + \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|f(t)\|^2_{V^0}.$$

Интегрируя его по t от 0 до τ и оценивая в полученном неравенстве левую часть снизу, а правую сверху, имеем

$$\frac{\varkappa^2}{2}\|v(\tau)\|^2_{V^2} \leqslant \frac{C_{25}+\varkappa}{2}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \frac{(C_{25}+\varkappa)(TC_{26}+1)}{2}\int\limits_0^t\|v(t)\|^2_{V^2}\,dt +$$

$$+\frac12\|b\|^2_{V^0} + \varkappa\|b\|^2_{V^1} + \frac{\varkappa^2}{2}\|b\|^2_{V^2} + \frac{\varepsilon}{2}\|b\|^2_{V^3} + \frac{\varepsilon\varkappa}{2}\|b\|^2_{V^4}.$$

Таким образом, имеет место неравенство $\|v(\tau)\|^2_{V^2} \leqslant C_{21}K + C_{22}\int_0^\tau \|v(t)\|^2_{V^2}\,dt$, из которого в силу неравенства Гроноулла–Беллмана при всех $\tau \in [0,T]$ получаем

$$\|v(\tau)\|^2_{V^2} \leqslant C_{21}Ke^{\tau C_{22}} \leqslant C_{21}Ke^{TC_{22}}. \tag{45}$$

Переходя к максимуму по $\tau \in [0,T]$ в левой части (45), получаем (38).

Оценим производную по времени. Так как v — неподвижная точка отображения T, то v удовлетворяет (42). Отметим, что операторы в (42) не являются линейными. Но для наших целей потребуются только следующие оценки сверху:

$$\|B_1(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{27}\|v\|^2_{C([0,T],V^1)}; \quad \|B_2(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{28}\|v\|^2_{C([0,T],V^2)}.$$

Здесь константы C_{27} и C_{28} не зависят от v. Доказательство этих неравенств идейно не отличается от получения подобных оценок в лемме 4 и приведено в [8].

Из (42) в силу приведённых неравенств, оценок (24), (38) и элементарного неравенства $a \leqslant 1 + a^2$ получаем

$$\begin{gathered}\left\|(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)v'\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \|\xi f - \xi\nu Av + \xi B_1(v,v) - \xi\varkappa B_2(v,v) + \xi C(v, Z_v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu\|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B_1(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\ + \varkappa\|B_2(v,v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|C(v,Z_v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu\|v\|_{C([0,T];V^1)} + C_{27}\|v\|^2_{C([0,T];V^1)} + \varkappa C_{28}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} + C_5\|v\|_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_{23}K.\end{gathered}$$

В силу левой части неравенства (20) имеем $\varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^5)} \leqslant \|(J + \varepsilon A^3 + \varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Из двух последних неравенств и следует требуемое неравенство (39).

Аналогично предыдущему из (42) имеем

$$\begin{gathered}\left\|(J + \varkappa A)v'\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \left\|-\varepsilon A^3 v' + \xi f - \xi\nu Av + \xi B_1(v,v) - \xi\varkappa B_2(v,v) + \xi C(v,Z_v)\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant \|\varepsilon A^3 v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + C_{23}K \leqslant \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^5)} + C_{23}K \leqslant 2C_{23}K.\end{gathered}$$

В силу неравенства (19) справедлива оценка $\varkappa\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \|(J + \varkappa A)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Из двух последних неравенств следует (40).

Для доказательства неравенства (41) заметим, что при всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство $v(s) = v(0) + \int_0^t v'(s)ds$. Тогда получаем, что

$$\|v\|_{C([0,T],V^5)} \leqslant \|\xi b\|_{V^5} + \max_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t \|v'(s)\|_{V^5}\,ds \leqslant \|b\|_{V^5} + \sqrt{T}\,\|v'\|^2_{L_2(0,T;V^5)},$$

а отсюда, в силу (39), следует (41). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно заключаем, что если v — неподвижная точка отображения $T : [0,1] \times \overline{B_M} \to C([0,T],V^3)$, то

$$\|v\|_{W_2} = \|v\|_{C([0,T];V^5)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^5)} \leqslant \frac{C_{23} + C_{24}}{\varepsilon}K + \|b\|_{V^5}.$$

Так как вложение $W_2 \subset C([0,T],V^3)$ непрерывно, то $\|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{29}\|v\|_{W_2}$. Следовательно, если v — неподвижная точка отображения T, то

$$\|v\|_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{30} = C_{29}\left(\frac{C_{23} + C_{24}}{\varepsilon}K + \|b\|_{V^5}\right).$$

Тогда, положив $M=C_{30}+1$, получим, что отображение $T:[0,1]\times\overline{B_M}\to C([0,T],V^3)$ не имеет неподвижных точек на границе шара B_M.

Этап 5. Поскольку $T(0,\cdot)\equiv 0$ и $0\in B_M$, то выполнено и последнее условие теоремы 1. Следовательно, отображение $T(1,\cdot)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, т.е. существует хотя бы одно решение аппроксимационной задачи (11)–(13). Теорема 8 доказана.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Перейдём к пределу при $\varepsilon\to 0$ в аппроксимационной задаче (11)–(13). Поскольку пространство V^5 плотно в V^2, то для каждого $a\in V^2$ существует последовательность $b_m\in V^5$, сходящаяся к a по норме V^2. Если $a\equiv 0$, то положим $b_m\equiv 0$, $\varepsilon_m=1/m$. Если же $\|a\|_{V^2}\neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $\|b_m\|_{V^4}\neq 0$ и положим $\varepsilon_m=1/(m\|b_m\|^2_{V^4})$. Таким образом, последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m\to+\infty$ и имеет место неравенство

$$\varepsilon_m\|b_m\|^2_{V^4}\leqslant 1. \tag{46}$$

В силу теоремы 8 для каждых ε_m и b_m существует $v_m\in W_2\subset W_1$ — решение аппроксимационной задачи (11)–(13). Следовательно, каждое v_m удовлетворяет для всех $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ равенству

$$\begin{gathered}\int_\Omega v'_m\varphi\,dx-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n(v_m)_i(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx+\varkappa\int_\Omega\nabla v'_m:\nabla\varphi\,dx+\\ +\varepsilon\int_\Omega\nabla(\Delta^2v'_m):\nabla\varphi\,dx+\nu\int_\Omega\nabla v_m:\nabla\varphi\,dx+\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n(v_m)_i\Delta(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx-\\ -\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\Delta v_m(s,z_m(s,t,x))\varphi\,dx\,ds=\int_\Omega f\varphi\,dx,\end{gathered} \tag{47}$$

где z_m — решение задачи $z_m(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau v_m(s,z_m(s;t,x))\,ds$, удовлетворяющее начальному условию

$$v_m|_{t=0}(x)=b_m(x),\quad x\in\Omega. \tag{48}$$

В силу оценок (38)–(40) и неравенства (46) v_m удовлетворяет оценкам

$$\|v_m\|^2_{C([0,T],V^2)}\leqslant C_{21}\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b_m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b_m\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b_m\|^2_{V^2}+C_{31}+\varkappa\big)e^{TC_{22}}; \tag{49}$$

$$\varepsilon_m\|v'_m\|_{L_2(0,T;V^5)}\leqslant C_{23}\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b_m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b_m\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b_m\|^2_{V^2}+C_{31}+\varkappa\big); \tag{50}$$

$$\varkappa\|v'_m\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant 2C_{23}\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|b_m\|^2_{V^0}+2\varkappa\|b_m\|^2_{V^1}+\varkappa^2\|b_m\|^2_{V^2}+C_{31}+\varkappa\big). \tag{51}$$

В силу непрерывности вложения $C([0,T],V^2)\subset L_2(0,T;V^2)$ и неравенства (49) без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) получим, что

$$v_m\rightharpoonup v\quad\text{слабо в } L_2(0,T;V^2)\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Аналогично в силу неравенства (51) без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) имеем, что

$$v'_m\rightharpoonup v'\quad\text{слабо в } L_2(0,T;V^1)\quad\text{при}\quad m\to+\infty. \tag{52}$$

Тогда при $m\to+\infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu\int_\Omega \nabla v_m:\nabla\varphi\,dx\to\nu\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi\,dx\quad \text{для любого } \varphi\in V^1;$$

$$\int_\Omega v_m'\varphi dx\to\int_\Omega v'\varphi dx\quad \text{для любого } \varphi\in V^1;$$

$$\varkappa\int_\Omega \nabla v_m':\nabla\varphi dx\to\varkappa\int_\Omega\nabla v':\nabla\varphi dx\quad \text{для любого } \varphi\in V^1.$$

По теореме 2 имеет место компактное вложение $W_1\subset C([0,T],V^1)$. Следовательно, как и ранее, без ограничения общности последовательность $\{v_m\}$ сходится сильно в пространстве $C([0,T],V^1)$ к той же самой функции v. Тогда для любой $\varphi\in V^1$

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n (v_m)_i(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\to\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Далее, в силу компактности вложения $W_1\subset C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$, имеет место следующая сильная сходимость: $v_m\to v$ в $C([0,T],C(\overline{\Omega})^n)$. Отсюда в силу слабой сходимости $v_m\rightharpoonup v$ в пространстве $L_2(0,T;V^2)$ получим

$$\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n (v_m)_i\Delta(v_m)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\to\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_i\Delta v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

В силу (50), как и выше, без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) заключаем, что существует функция $u\in L_2(0,T;V^5)$ такая, что $\varepsilon_m v_m'\rightharpoonup u$ слабо в $L_2(0,T;V^5)$ при $m\to+\infty$. Следовательно,

$$\varepsilon_m\int_\Omega\nabla\left(\Delta^2 v_m'\right):\nabla\varphi\,dx\to\int_\Omega\nabla\left(\Delta^2u\right):\nabla\varphi\,dx\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Однако последовательность $\varepsilon_m A^3v_m'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-5}. На самом деле для любых $\chi\in\mathfrak{D}([0,T])$, $\varphi\in V^5$, используя формулу Грина и слабую сходимость (52), получаем

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\varepsilon_m\int_0^T\int_\Omega\nabla(\Delta^2v_m'):\nabla\varphi\,dx\,\chi(t)\,dt\right|=\lim_{m\to+\infty}\varepsilon_m\lim_{m\to+\infty}\left|\int_0^T\int_\Omega\nabla v_m'(t):\nabla(\Delta^2\varphi)\,dx\,\chi(t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^T\int_\Omega\nabla v'(t):\nabla(\Delta^2\varphi)\,dx\,\chi(t)\,dt\right|\lim_{m\to+\infty}\varepsilon_m=0.$$

В силу единственности слабого предела $\varepsilon_m\int_\Omega\nabla(\Delta^2v_m'):\nabla\varphi\,dx\to0$ при $m\to+\infty$.

Наконец, в силу леммы 3 при $m\to+\infty$ имеет место слабая сходимость

$$\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\Delta v_m(s,z_m(s,t,x))\varphi\,dx\,ds\to\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\Delta v(s,z(s,t,x))\varphi\,dx\,ds.$$

Таким образом, переходя в равенстве (47) к пределу при $m\to+\infty$, получаем, что предельная функция v удовлетворяет тождеству (10).

В силу сильной сходимости $v_m\to v$ в $C([0,T],V^1)$ получаем, что v_m сходится к v поточечно на отрезке $[0,T]$. Отсюда, переходя в (48) к пределу при $m\to+\infty$, в силу выбора b_m получаем, что предельная функция v удовлетворяет начальному условию $v(0)=a$. Теорема 7 доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00091).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павловский, В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В.А. Павловский // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.
2. Амфилохиев, В.Б. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах / В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский // Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та. — 1976. — Т. 104. — С. 3–5.
3. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева, Я.С. Ходорковский // Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та. — 1975. — Т. 96. — С. 3–9.
4. Осколков, А.П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1972. — Т. 27. — С. 145–160.
5. Осколков, А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98–136.
6. Осколков, А.П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1975. — Т. 52. — С. 128–157.
7. Ладыженская, О.А. О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье–Стокса и их исправлениях / О.А. Ладыженская // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. — Т. 271. — С. 151–155.
8. Турбин, М.В. Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров / М.В. Турбин, А.С. Устюжанинова // Изв. вузов. Математика. — 2019. — № 8. — С. 62–78.
9. Устюжанинова, А.С. Равномерные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта / А.С. Устюжанинова // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1191–1202.
10. Устюжанинова, А.С. Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта / А.С. Устюжанинова, М.В. Турбин // Сиб. журн. индустр. математики. — 2021. — Т. 24, № 1. — С. 126–138.
11. Ustiuzhaninova, A. Feedback control problem for modified Kelvin–Voigt model / A. Ustiuzhaninova, M. Turbin // J. of Dynam. and Control Systems. — 2022. — V. 28. — P. 465–480.
12. Turbin, M. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Evolution Equat. and Control Theory. — 2022. — V. 11, № 6. — P. 2055–2072.
13. Виноградов, Г.В. Реология полимеров / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. — М. : Химия, 1977. — 440 с.
14. Звягин, В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. — М. : Красанд, 2012. — 412 с.
15. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — № 146. — P. 65–96.
16. Gajewski, H. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen / H. Gajewski, K. Groger, K. Zacharias. — Berlin : Akademie Verlag, 1974. — 281 s.
17. Беккенбах, Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М. : Мир, 1965. — 276 с.
18. Orlov, V.P. On the mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differ. and Integr. Equat. — 1991. — V. 4, № 1. — P. 103–115.

19. DiPerna, R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.-L. Lions // Invent. Math. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.
20. Crippa, G. Estimates and regularity results for the DiPerna–Lions flow / G. Crippa, C. De Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616. — P. 15–46.
21. Edwards, C.H. Advanced calculus of several variables / C.H. Edwards. — New York; London : Academic Press, 1973. — 457 p.

SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MODIFIED KELVIN–VOIGT MODEL WITH MEMORY ALONG TRAJECTORIES OF FLUID MOTION

M. V. Turbin[1], A. S. Ustiuzhaninova[2]

Voronezh State University, Russia
e-mail: [1]mrmike@mail.ru, [2]nastyzhka@gmail.com

The work is devoted to proving the solvability in the weak sense of the initial-boundary value problem for the modified Kelvin–Voigt model taking into account memory along the trajectories of fluid particles motion. For this, an approximation problem is considered for which solvability is established based on the Leray–Schauder fixed point theorem. Then, based on a priori estimates, it is shown that from a sequence of solutions to the approximation problem, one can extract a subsequence that weakly converges to the solution of the original problem as the approximation parameter tends to zero.

Keywords: weak solution, modified Kelvin–Voigt model, trajectory, fluid with memory, initial-boundary value problem, existence theorem.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00091).

REFERENCES

1. Pavlovsky, V.A. On theoretical description of weak aqueous solutions of polymers / V.A. Pavlovsky // Doklady Akademii Nauk SSSR. — 1971. — V. 200, № 4. — P. 809–812. [in Russian]
2. Amfilokhiev, V.B. Experimental data on laminar-turbulent transition for flows of polymer solutions in pipes / V.B. Amfilokhiev, V.A. Pavlovsky // Trudy Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta. — 1975. — V. 104. — P. 3–5. [in Russian]
3. Flows of polymer solutions in the case of convective accelerations / V.B. Amfilokhiev, Y.I. Voitkunskii, N.P. Mazaeva, Y.S. Khodornovskii // Trudy Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta. — 1975. — V. 96. — P. 3–9. [in Russian]
4. Oskolkov, A.P. Solvability in the large of the first boundary value problem for a certain quasilinear third order system that is encountered in the study of the motion of a viscous fluid / A.P. Oskolkov // Zapiski Naucnyh Seminarov Leningradskogo Otdelenija Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI). — 1972. — V. 27. — P. 145–160. [in Russian]
5. Oskolkov, A.P. The uniqueness and solvability in the large of boundary value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers / A.P. Oskolkov // Zapiski Naucnyh Seminarov Leningradskogo Otdelenija Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI). — 1973. — V. 38. — P. 98–136. [in Russian]
6. Oskolkov, A.P. Some quasilinear systems that arise in the study of the motion of viscous fluids / A.P. Oskolkov // Zapiski Naucnyh Seminarov Leningradskogo Otdelenija Matematiceskogo Instituta imeni V.A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI). — 1975. — V. 52. — P. 128–157. [in Russian]
7. Ladyzhenskaya, O.A. On some gaps in two of my papers on the Navier–Stokes equations and the way of closing them / O.A. Ladyzhenskaya // J. of Math. Sci. — 2003. — V. 115. — P. 2789–2791.
8. Turbin, M.V. The existence theorem for a weak solution to initial-boundary value problem for system of equations describing the motion of weak aqueous polymer solutions / M.V. Turbin, A.S. Ustiuzhaninova // Russian Mathematics. — 2019. — V. 63. — P. 54–69.
9. Ustiuzhaninova, A.S. Uniform attractors for the modified Kelvin–Voigt model / A.S. Ustiuzhaninova // Differ. Equat. — 2021. — V. 57, № 9. — P. 1165–1176.

10. Ustiuzhaninova, A.S. Trajectory and global attractors for a modified Kelvin–Voigt model / A.S. Ustiuzhaninova, M.V. Turbin // J. of Appl. and Indust. Math. — 2021. — V. 15. — P. 158–168.
11. Ustiuzhaninova, A. Feedback control problem for modified Kelvin–Voigt model / A. Ustiuzhaninova, M. Turbin // J. of Dynam. and Control Systems. — 2022. — V. 28. — P. 465–480.
12. Turbin, M. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model / M. Turbin, A. Ustiuzhaninova // Evolution Equat. and Control Theory. — 2022. — V. 11, № 6. — P. 2055–2072.
13. Vinogradov, G.V. Rheology of Polymers: Viscoelasticity and Flow of Polymers / G.V. Vinogradov, A.Y. Malkin. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1980.
14. Zvyagin, V.G. Mathematical Problems in Viscoelastic Hydrodynamics / V.G. Zvyagin, M.V. Turbin. — Moscow : Krasand, 2012. — 412 p. [in Russian]
15. Simon, J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — № 146. — P. 65–96.
16. Gajewski, H. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen / H. Gajewski, K. Groger, K. Zacharias. — Berlin : Akademie Verlag, 1974. — 281 s.
17. Beckenbach, E.F. Inequalities / E.F. Beckenbach, R. Bellman. — Berlin; Heidelberg : Springer, 1961.
18. Orlov, V.P. On the mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V.P. Orlov, P.E. Sobolevskii // Differ. and Integr. Equat. — 1991. — V. 4, № 1. — P. 103–115.
19. DiPerna, R.J. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.-L. Lions // Invent. Math. — 1989. — V. 98. — P. 511–547.
20. Crippa, G. Estimates and regularity results for the DiPerna–Lions flow / G. Crippa, C. De Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616. — P. 15–46.
21. Edwards, C.H. Advanced calculus of several variables / C.H. Edwards. — New York; London : Academic Press, 1973. — 457 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 211–223

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.21

О РАЗРЕШИМОСТИ НА СПЕКТРЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА ТРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

А. А. Каширин[1], С. И. Смагин[2]

Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск

e-mail: [1]elomer@mail.ru, [2]smagin@ccfebras.ru

Поступила в редакцию 27.10.2023 г., после доработки 25.12.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Рассмотрены два слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода, к каждому из них может быть сведена стационарная трёхмерная задача дифракции акустических волн. Свойства этих уравнений изучены на спектрах, на которых они являются некорректными. Для одного уравнения показано, что если его решение на спектре существует, то оно позволяет получать решение задачи дифракции. Второе уравнение в этом случае всегда имеет бесконечно много решений, но только одно даёт решение задачи дифракции. Обсуждается метод интерполяции для отыскания приближённых решений рассматриваемых интегральных уравнений и задачи дифракции.

Ключевые слова: задача дифракции, волновое число, интегральное уравнение, собственное значение, приближённое решение.

DOI: 10.31857/S0374064124020054, EDN: QMJVAD

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются два различных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода со слабыми особенностями в ядрах. Каждое уравнение условно эквивалентно задаче дифракции гармонических по времени акустических волн на локальном трёхмерном включении (задаче трансмиссии для уравнения Гельмгольца) [1, 2]. Они получаются с применением к исходной задаче дифракции в неограниченной области непрямого метода сведения к граничным интегральным уравнениям [3, 4]. В соответствии с этим методом в качестве неизвестных функций выбираются плотности вспомогательных источников волнового поля, распределённые по компактной границе включения. В прямом методе искомыми функциями являются граничные значения волнового поля и его нормальные производные [3, 5].

Оба упомянутых метода позволяют сводить исходную задачу дифракции к полностью эквивалентным ей системам двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями на границе включения [6]. Одна из таких систем использовалась, например, для численного решения задачи дифракции в работе [7].

Важным достоинством непрямого метода получения интегральных уравнений является возможность сформулировать задачи дифракции в виде граничных интегральных уравнений с одной неизвестной плотностью. Такие уравнения имеют определённые преимущества при численном исследовании задач дифракции перед другими интегральными формулировками, поскольку требуют меньше вычислительных ресурсов для численного решения [8].

Однако рассматриваемые интегральные уравнения некорректны на счётном множестве собственных значений, связанных с собственными частотами (значениями) внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца [3, 4]. В этих случаях, в силу теории Фредгольма, интегральные уравнения либо не имеют решений, либо имеют бесконечно много решений [9, с. 220]. Для областей сложной формы собственные значения заранее неизвестны, а их поиск является весьма трудоёмкой задачей [10, 11]. Поэтому для получения достоверных результатов необходимо исследовать свойства упомянутых интегральных уравнений на спектрах и учитывать эти свойства при их численном решении.

Отметим, что методы исследования и численного решения граничных интегральных уравнений на спектрах активно развиваются с 1960-х годов. Однако большая их часть позволяет решить относительно простые краевые задачи, характерные для рассеяния на непроницаемых препятствиях [12–16]. На рассматриваемые нами интегральные уравнения эти методы непосредственно не переносятся.

Первое из упомянутых выше уравнений разрешимо на спектре только тогда, когда его правая часть ортогональна нетривиальным решениям сопряжённого однородного уравнения. Если это условие выполнено, то интегральное уравнение имеет бесконечно много решений, и любое из них, подставленное в интегральные представления решения задачи дифракции, даёт решение этой задачи. Задача дифракции на основе такого уравнения численно решена в работе [17]. Поскольку для рассматриваемой задачи интегральное уравнение на спектре не имеет решения, численно решалась задача дифракции с “близкими” волновыми числами, где интегральное уравнение корректно разрешимо. Затем приближённое решение на соответствующей собственной частоте находилось с помощью интерполяции.

Решение второго интегрального уравнения на собственных частотах всегда существует, но не является единственным. При этом только одно решение этого уравнения позволяет получить решение задачи дифракции. Оно может быть приближённо найдено, например, интерполяцией решений корректно разрешимых интегральных уравнений с “близкими” к собственным значениям волновыми числами [17]. Ранее такой подход применялся для численного решения трёхмерных краевых задач для уравнения Гельмгольца [18, 19].

Следует заметить, что рассмотренные нами уравнения могут быть получены из уравнений (5.6) и (6.8) работы [3] при значениях параметров $a=1$, $b=0$. Такой выбор параметров приводит к интегральным уравнениям с более простыми и удобными для аппроксимации и численного решения интегральными операторами. Они равносильны исходным задачам дифракции и корректно разрешимы почти для всех имеющих физический смысл значений волновых чисел на комплексной плоскости. Исключение составляет упомянутое выше счётное множество вещественных чисел, связанных с собственными значениями внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца. В таких случаях можно воспользоваться методикой работ [17–19]. Другие подходы к численному решению интегральных уравнений задачи дифракции на собственных значениях предложены в статьях [20–22].

1. ИСХОДНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ И УСЛОВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ

Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональной системой координат $Ox_1x_2x_3$, заполненное однородной изотропной средой с плотностью ρ_e, скоростью распространения акустических колебаний c_e и коэффициентом поглощения γ_e, в котором имеется ограниченное произвольной замкнутой поверхностью Γ однородное изотропное включение с плотностью ρ_i, скоростью звука c_i и коэффициентом поглощения γ_i. Области $\mathbb{R}^3$, занятые включением и вмещающей средой, обозначим через Ω_i и Ω_e $(\Omega_e=\mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}_i)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что граница $\Gamma\in C^2$ и граничные функции достаточно гладкие.

Пусть в области Ω_e имеются гармонические источники звука, возбуждающие во вмещающей среде исходное волновое поле давлений с комплексной амплитудой u_0. Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нём. В результате в области Ω_e возникают отражённые волны, а в области Ω_i появляются проходящие волны. Поэтому комплексную амплитуду полного поля давлений u можно представить в виде

$$u = \begin{cases} u_i, & x \in \Omega_i, \\ u_e + u_0, & x \in \Omega_e, \end{cases}$$

где u_i, u_e — комплексные амплитуды проходящего и отражённого волновых полей.

Задача дифракции. Найти две комплекснозначные функции $u_{i(e)} \in C^2(\Omega_{i(e)}) \cap C^1(\bar{\Omega}_{i(e)})$, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_{i(e)} + k_{i(e)}^2 u_{i(e)} = 0, \quad x \in \Omega_{i(e)}, \tag{1}$$

условиям сопряжения

$$u_i^- - u_e^+ = f_0, \quad p_i(N_x u_i)^- - p_e(N_x u_e)^+ = p_e f_1, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

а также условию излучения Зоммерфельда равномерно по всем направлениям $x/|x|$

$$\frac{\partial u_e}{\partial |x|} - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь $f_0 \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $f_1 \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, — известные функции, $f_0 = u_0^+$, $f_1 = (N_x u_0)^+$, “$-$” и “$+$” обозначают предельные значения соответствующих выражений, когда $x \to \Gamma$ из Ω_i и из Ω_e, $N_x \equiv \partial/\partial n_x$, n_x — нормаль к границе Γ в точке x, направленная в область Ω_e,

$$p_{i(e)} = (\rho_{i(e)}\omega(\omega + i\gamma_{i(e)}))^{-1}, \quad k_{i(e)}^2 = \omega(\omega + i\gamma_{i(e)})/c_{i(e)}^2, \quad \operatorname{Im}(k_{i(e)}) \geqslant 0,$$

ω — круговая частота колебаний, $k_{i(e)}$ — волновые числа, $c_{i(e)} > 0$, $\rho_{i(e)} > 0$, $\gamma_{i(e)} \geqslant 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1 [2, с. 114]. *Задача дифракции имеет единственное решение.*

Введём обозначения

$$(A_{i(e)}\phi)(x) \equiv \int\limits_\Gamma G_{i(e)}(x,y)\phi(y)\,d\Gamma_y, \quad G_{i(e)}(x,y) = \frac{\exp\{ik_{i(e)}|x-y|\}}{4\pi|x-y|},$$

$$(B_{i(e)}\phi)(x) \equiv \int\limits_\Gamma N_y G_{i(e)}(x,y)\phi(y)\,d\Gamma_y, \quad (B_{i(e)}^*\phi)(x) \equiv \int\limits_\Gamma N_x G_{i(e)}(x,y)\phi(y)\,d\Gamma_y$$

и рассмотрим потенциалы

$$u_e(x) = (A_e\phi)(x), \quad x \in \Omega_e, \tag{4}$$
$$u_i(x) = p_{ei}(A_i((Nu_e)^+ + f_1))(x) - (B_i(u_e^+ + f_0))(x), \quad x \in \Omega_i.$$

Здесь ϕ — неизвестная плотность, $p_{ei} = p_e/p_i$.

Ядрами потенциалов (4) являются фундаментальные решения уравнений Гельмгольца в областях Ω_i и Ω_e и их нормальные производные, поэтому они удовлетворяют уравнениям (1) и условию излучения на бесконечности (3). Кроме того, если ω не является собственной частотой внутренней задачи Дирихле, выполнение для потенциалов (4) первого из условий сопряжения (2) автоматически влечёт за собой выполнение второго условия сопряжения. Подставив их в первое условие сопряжения, получим эквивалентное задаче дифракции слабо сингулярное граничное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$(C\phi)(x) = f_2(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

где

$$(C\phi)(x) \equiv \big((0.5(A_e + p_{ei}A_i) + B_iA_e - p_{ei}A_iB_e^*)\phi\big)(x),$$

$$f_2(x) = -0.5f_0(x) + p_{ei}(A_if_1)(x) - (B_if_0)(x).$$

Справедливо следующее утверждение [4, с. 63–65; 23].

Теорема 2. *Пусть* $f_0 \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $f_1 \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, $\gamma_e > 0$ *или* ω *не является собственной частотой внутренней задачи Дирихле*

$$\Delta v + k_e^2 v = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad v^- = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{6}$$

Тогда интегральное уравнение (5) корректно разрешимо в классе плотностей $\phi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, *и формулы (4) дают решение задачи дифракции.*

Мы можем получить для задачи дифракции ещё одно интегральное уравнение Фредгольма первого рода со слабой особенностью в ядре. Будем искать её решение в виде

$$u_i(x) = (A_i\psi)(x), \quad x \in \Omega_i, \tag{7}$$

$$u_e(x) = (A_e(f_1 - p_{ie}(Nu_i)^-))(x) - (B_e(f_0 - u_i^-))(x), \quad x \in \Omega_e, \tag{8}$$

где $p_{ie} = p_i/p_e$. В этом случае задача сводится к интегральному уравнению

$$(D\psi)(x) = f_0(x), \quad x \in \Gamma, \tag{9}$$

$$(D\psi)(x) \equiv \left(\left(0.5\left(A_i + p_{ie}A_e\right) + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i\right)\psi\right)(x)$$

и имеет место

Теорема 3 [4, с. 65]. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда интегральное уравнение (9) корректно разрешимо в классе плотностей* $\psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, *и формулы (7), (8) дают решение задачи дифракции.*

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СПЕКТРАХ

Пусть теперь ω — собственная частота задачи (6) кратности m, $m \geqslant 1$ (или, другими словами, k_e^2 — собственное значение задачи (6)). В этом случае из [3, теорема 5.2; 4, лемма 2.3.1] следует, что уравнение

$$(A_e\phi)(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

имеет линейно независимые нетривиальные решения ϕ_s. Они связаны с нетривиальными решениями v_s задачи (6) равенствами

$$\phi_s = (Nv_s)^-, \quad s = \overline{1, m}, \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Кроме того, ϕ_s являются решениями однородного уравнения (5), и любое нетривиальное решение этого уравнения можно представить в виде

$$\phi_0 = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s\phi_s, \tag{11}$$

где α_s — произвольные комплексные числа.

Введём обозначение

$$\langle\varphi,\psi\rangle\equiv\int_{\Gamma}\varphi\psi\,d\Gamma.$$

Нам понадобится

Лемма. *Для операторов* C: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ *и* D: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ *и произвольных* $\varphi,\psi\in C(\Gamma)$ *справедливо равенство*

$$\langle p_iC\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,p_eD\psi\rangle,$$

т.е. операторы p_iC *и* p_eD *являются сопряжёнными.*

Доказательство. В работе [2, § 2.7] показано, что интегральные операторы $A_{i(e)}$: $C(\Gamma)\to$ $\to C(\Gamma)$ являются самосопряжёнными, а интегральные операторы $B_{i(e)}$: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ и $B^*_{i(e)}$: $C(\Gamma)\to C(\Gamma)$ — сопряжёнными. Это означает, что для всех $\varphi,\psi\in C(\Gamma)$

$$\langle A_{i(e)}\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,A_{i(e)}\psi\rangle,\quad \langle B_{i(e)}\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,B^*_{i(e)}\psi\rangle.$$

Таким образом, для всех $\varphi,\psi\in C(\Gamma)$ имеют место равенства

$$\langle B_iA_e\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,A_eB_i^*\psi\rangle,\quad \langle A_iB_e^*\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,B_eA_i\psi\rangle,$$

и, следовательно, $\langle p_iC\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,p_eD\psi\rangle$. Лемма доказана.

В силу фредгольмовости операторов C и D [3, с. 319, 322; 4, теоремы 2.2.2, 2.2.3] из леммы непосредственно вытекает

Следствие [9, с. 220]. *Количество линейно независимых нетривиальных решений однородных уравнений (5) и (9) совпадает и равно* m.

Выберем базис $\psi_1,\ldots,\psi_m\in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ в пространстве нулей оператора D: $C^{0,\alpha}(\Gamma)\to C^{1,\alpha}(\Gamma)$. Тогда существуют элементы $a_1,\ldots,a_m\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ и $b_1,\ldots,b_m\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ такие, что [9, с. 221]

$$\langle\phi_j,a_l\rangle=\delta_{jl},\quad j,l=\overline{1,m},$$

$$\langle b_j,\psi_l\rangle=\delta_{jl},\quad j,l=\overline{1,m},$$

где δ_{jl} — символ Кронекера.

Покажем, что уравнение (9) разрешимо на всех собственных частотах задачи (6), хотя и неединственным образом.

Теорема 4. *Пусть* $f_0\in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $f_1\in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, *и* ω — *собственная частота задачи (6) кратности* m, $m\geqslant 1$. *Тогда интегральное уравнение (9) разрешимо и его общее решение может быть представлено в виде*

$$\psi=\widetilde{\psi}+\psi_0,\quad \psi_0=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\psi_s, \tag{12}$$

где $\widetilde{\psi}$ — *произвольное частное решение этого уравнения,* α_s — *произвольные комплексные числа,* ψ_s — *линейно независимые решения однородного уравнения (9).*

Доказательство. По условию задачи источник волн находится в области Ω_e, поэтому u_0 удовлетворяет уравнению (6) в области Ω_i и $u_0^+=u_0^-=f_0$ на Γ.

Учитывая, что v_s — решения задачи (6), используя соотношения (10), (11) и вторую формулу Грина [2, с. 79], имеем

$$\langle f_0,\phi_0\rangle=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\langle u_0^-,(Nv_s)^-\rangle=\sum_{s=1}^{m}\alpha_s\biggl(\int\limits_{\Omega_i}(u_0\Delta v_s-v_s\Delta u_0)\,dx+\langle(Nu_0)^-,v_s^-\rangle\biggr)=$$

$$= -\sum_{s=1}^{m} \alpha_s \int_{\Omega_i} (\Delta u_0 + k_e^2 u_0) v_s \, dx = 0.$$

Таким образом, решение уравнения (9) существует в силу второй теоремы Фредгольма [2, теорема 1.29; 9, с. 220].

По условию теоремы ω — собственная частота задачи (6) кратности m. В этом случае однородные уравнения (5) и (9) имеют m линейно независимых нетривиальных решений (см. следствие). Поэтому общее решение уравнения (9) можно представить в виде (12) [2, следствия 1.19, 1.20]. Теорема доказана.

Изучим теперь вопрос о возможности решения задачи дифракции на собственных частотах с использованием уравнения (9).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда существует единственное решение интегрального уравнения (9), при котором представления (7), (8) дают решение задачи дифракции.*

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что уравнение (9) разрешимо и его решение имеет вид (12). Пусть ψ — произвольное решение этого уравнения. Тогда для потенциалов (7), (8) справедливо равенство

$$u_i^- - u_e^+ = D\psi, \quad x \in \Gamma. \tag{13}$$

Следовательно, любое решение уравнения (9) обеспечивает выполнение первого условия сопряжения (2).

Проверим выполнение второго условия сопряжения. Для этого продолжим u_e формулой (8) в область Ω_i:

$$u_e = u_0 - (0.5 p_{ie} A_e + p_{ie} A_e B_i^* - B_e A_i)\, \psi, \quad x \in \Omega_i. \tag{14}$$

Функция (14) удовлетворяет уравнению (6) с граничным условием

$$u_e^- = f_0 - D\psi, \quad x \in \Gamma. \tag{15}$$

Используя свойства поверхностных потенциалов и их нормальных производных при переходе через границу Γ [2, следствие 2.20, теорема 2.23], имеем

$$\begin{gathered} p_i (Nu_i)^- - p_e (Nu_e)^+ = p_i (Nu_i)^- - p_e [Nu_e] - p_e (Nu_e)^- = \\ = p_i (Nu_i)^- + p_e f_1 - p_i (Nu_i)^- - p_e (Nu_e)^- = p_e f_1 - p_e (Nu_e)^-, \end{gathered} \tag{16}$$

где $[u] \equiv u^+ - u^-$.

Отсюда получаем, что для проверки выполнения второго условия сопряжения достаточно, чтобы продолжение u_e формулой (14) было равно нулю всюду в Ω_i. Для проверки этого условия рассмотрим свойства решения в форме (12) более детально.

Из (12) и (15) следует, что u_e из (14) с плотностью $\psi = \psi_0 \neq 0$ удовлетворяет уравнению (6) с граничным условием $u_e^- = f_0$, $x \in \Gamma$. Учитывая это, покажем, что потенциалы с плотностями ψ_s в (14) линейно независимы. Предположим, что это не так. Тогда существуют ненулевые коэффициенты α_s, при которых $u_e = u_0$ в Ω_i. Следовательно, $(Nu_e)^- = (Nu_0)^- = f_1$. Отсюда и из (16) получаем, что выполняется однородное второе условие сопряжения (2). Первое однородное условие сопряжения (2) в этом случае также выполняется, что следует из определения ψ_0 и равенства (13). Таким образом, мы получили решение задачи дифракции при $f_0 = f_1 = 0$. Эта задача имеет только тривиальное решение [2, теорема 3.40], поэтому $u_i = 0$ в Ω_i.

Подставим теперь ψ_0 в формулу (7) и рассмотрим полученный потенциал во всём пространстве $\mathbb{R}^3$. Поскольку $A_i\psi_0 = u_i = 0$ всюду в Ω_i, то отсюда и из непрерывности этого потенциала как потенциала простого слоя при переходе через границу Γ [2, теорема 2.12] следует, что он является решением однородной внешней задачи Дирихле

$$\Delta u_i + k_i^2 u_i = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad u_i^+ = 0, \quad x \in \Gamma,$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial |x|} - ik_i u_i = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{17}$$

Эта задача также имеет только тривиальное решение [2, теорема 3.21], поэтому $A_i\psi_0 = u_i = 0$ всюду в Ω_e. Используя формулу для скачка нормальных производных потенциала простого слоя, получаем $\psi_0 = -[Nu_i] = 0$ на Γ. Отсюда и из линейной независимости ψ_s следует, что все коэффициенты α_s в (12) равны нулю. А это противоречит первоначальному предположению.

Введём обозначения

$$v_s \equiv (0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\psi_s, \quad x \in \Omega_i, \quad s = \overline{1, m}.$$

Функции $v_s \neq 0$ удовлетворяют уравнению (6) с граничными условиями $v_s^- = D\psi_s = 0$. Они являются линейно независимыми и образуют базис в m-мерном пространстве нетривиальных решений задачи (6).

Покажем теперь, что существует единственное решение уравнения (9), при котором формулы (7), (8) дают решение задачи дифракции. Для этого определим линейный конечномерный оператор $T : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{1,\alpha}(\Gamma)$ по формуле

$$T\psi \equiv \sum_{s=1}^{m} \langle b_s, \psi\rangle a_s.$$

Тогда, в силу леммы Шмидта [9, с. 221], оператор $D + T : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{1,\alpha}(\Gamma)$ непрерывно обратим и уравнение

$$((D+T)\psi)(x) = f_0(x), \quad x \in \Gamma,$$

имеет единственное решение $\psi = \widetilde{\psi} \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ такое, что $\langle b_j, \widetilde{\psi}\rangle = 0$, $j = \overline{1, m}$, и $D\widetilde{\psi} = f_0$.

Подставим $\widetilde{\psi}$ в формулы (14) и (15). Тогда потенциал u_e в области Ω_i будет решением задачи (6). Эта задача имеет как тривиальное, так и m линейно независимых нетривиальных решений. Любое её решение можно единственным образом разложить по базису v_s. Поэтому существует единственный набор коэффициентов $\widetilde{\alpha}_s$, $s = \overline{1, m}$, для которого справедливо равенство

$$u_e = u_0 - (0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\widetilde{\psi} = \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\alpha}_s v_s = \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\alpha}_s\,(0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\,\psi_s, \quad x \in \Omega_i.$$

Подставив функцию

$$\psi = \widetilde{\psi} + \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\alpha}_s \psi_s \tag{18}$$

в формулы (14), будем иметь

$$u_e = u_0 - (0.5p_{ie}A_e + p_{ie}A_eB_i^* - B_eA_i)\left(\widetilde{\psi} + \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\alpha}_s \psi_s\right) = 0, \quad x \in \Omega_i.$$

Поэтому $(Nu_e)^- = 0$, $x \in \Gamma$, и из (16) следует выполнение второго условия сопряжения (2). Выполнение первого условия сопряжения (2) следует из определения ψ и формулы (13).

Таким образом, подставив (18) в формулы (7), (8), получим решение задачи дифракции. Теорема доказана.

Покажем теперь, что уравнение (5) тоже можно использовать для решения задачи дифракции.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и*

$$\langle f_2, \psi_0 \rangle = 0, \tag{19}$$

ψ_0 имеет вид (12). Тогда уравнение (5) разрешимо и его общее решение можно записать как

$$\phi = \widetilde{\phi} + \phi_0, \quad \phi_0 = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \phi_s, \tag{20}$$

где $\widetilde{\phi}$ — произвольное частное решение этого уравнения, α_s — произвольные комплексные числа, ϕ_s — линейно независимые решения однородного уравнения (5). Подстановка любого решения уравнения (5) в формулы (4) даёт решение задачи дифракции.

Доказательство. Операторы $p_i C$ и $p_e D$ из уравнений (5) и (9) являются сопряжёнными в силу сформулированной леммы, ψ_0 из (12) — нетривиальное решение однородного уравнения (9). Поэтому если условие (19) выполнено, из второй теоремы Фредгольма следует, что решение уравнения (5) существует [2, теорема 1.29; 9, с. 220] и имеет вид (20) [2, следствия 1.19, 1.20].

Выражения (4), где ϕ — решение уравнения (5), удовлетворяют уравнениям (1), условию излучения (3) и первому из условий сопряжения (2). Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать выполнение второго условия из (2).

Продолжим потенциал u_i формулой (4) в область Ω_e. Вычислив предельное значение этого продолжения на границе Γ, имеем

$$u_i^+ = f_2 - C\phi = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Таким образом, потенциал u_i — решение внешней задачи (17) с однородным граничным условием. Эта задача имеет только тривиальное решение $u_i = 0$ в Ω_e [2, теорема 3.21], поэтому $(Nu_i)^+ = 0$. Отсюда и из формул для скачка нормальных производных потенциала простого слоя и непрерывности этих производных для потенциала двойного слоя при переходе через границу Γ находим

$$p_i(Nu_i)^- - p_e(Nu_e)^+ = p_i[Nu_i] - p_e(Nu_e)^+ = p_e(Nu_e)^+ + p_e f_1 - p_e(Nu_e)^+ = p_e f_1.$$

Второе условие сопряжения в (2) также выполнено. Теорема доказана.

Отметим, что для произвольных областей нетривиальные решения однородного уравнения (9) на спектре неизвестны. Воспользуемся задачей дифракции с известным аналитическим решением и покажем для конкретного случая, что уравнение (5) на спектре, в отличие от уравнения (9), не всегда имеет решение.

Пример. Рассмотрим задачу дифракции, где Γ — единичная сфера с центром в начале координат, а комплексная амплитуда исходного волнового поля давлений определяется уравнением плоской волны $u_0(x) = \exp\{ik_e x_3\}$, $f_0 = u_0^+$, $f_1 = (Nu_0)^+$.

Разложение u_0 по сферическим функциям и точное решение этой задачи имеют вид [24, § 7.4]

$$u_0(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)i^m j_m(k_e r)P_m(\cos\theta), \quad r\geqslant 0, \tag{21}$$

$$u_e(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^m\alpha_m}{\beta_m}h_m(k_e r)P_m(\cos\theta), \quad r\geqslant 1,$$

$$u_i(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^{m+1}p_e}{k_e\beta_m}j_m(k_i r)P_m(\cos\theta), \quad r\leqslant 1.$$

Здесь и далее $r=|x|$, $\cos\theta=x_3/r$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, P_m — полиномы Лежандра m-го порядка,

$$\alpha_m=p_i k_i j_m(k_e)j_m'(k_i)-p_e k_e j_m(k_i)j_m'(k_e),$$

$$\beta_m=p_e k_e j_m(k_i)h_m'(k_e)-p_i k_i h_m(k_e)j_m'(k_i),$$

$$j_m(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{m+1/2}(z), \quad h_m(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H^{(1)}_{m+1/2}(z),$$

$J_{m+1/2}$, $H^{(1)}_{m+1/2}$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка $m+1/2$ соответственно.

Пусть выполнены условия теоремы 3. В этом случае задача дифракции сводится к уравнению (9). Покажем, что его решение имеет вид

$$\psi(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^m p_e}{k_i k_e\beta_m}\,\frac{P_m(\cos\theta)}{h_m(k_i)}. \tag{22}$$

Для этого используем равенства

$$A_{i(e)}P_m=ik_{i(e)}j_m(k_{i(e)})h_m(k_{i(e)})P_m, \tag{23}$$

$$B_{i(e)}P_m=B^*_{i(e)}P_m=0.5ik^2_{i(e)}\left(j_m(k_{i(e)})h_m(k_{i(e)})\right)'P_m \tag{24}$$

и тождество

$$j_m(z)h_m'(z)-j_m'(z)h_m(z)=i/z^2 \tag{25}$$

из работы [25].

Подействуем оператором D из уравнения (9) на P_m:

$$DP_m=0.5ik_i j_m(k_i)h_m(k_i)\left(1-ik_e^2(2j_m(k_e)h_m'(k_e)-i/k_e^2)\right)P_m+$$

$$+0.5p_{ie}ik_e j_m(k_e)h_m(k_e)\left(1+ik_i^2(2j_m'(k_i)h_m(k_i)+i/k_i^2)\right)P_m=k_i k_e j_m(k_e)h_m(k_i)\beta_m P_m/p_e.$$

Поэтому

$$D\psi=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)i^m p_e}{k_i k_e\beta_m}\,\frac{DP_m(\cos\theta)}{h_m(k_i)}=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)i^m j_m(k_e)P_m(\cos\theta). \tag{26}$$

Отсюда и из (21) следует, что $D\psi=f_0$.

Пусть теперь ω — собственная частота задачи (6). Тогда для однородного уравнения (9) существует нетривиальное решение ψ_0 в силу теоремы 4, и для некоторой функции Бесселя имеет место равенство $j_l(k_e)=0$ [2, § 3.3]. Из (22) и (26) следует, что это нетривиальное решение имеет вид $\psi_0=\alpha P_l(\cos\theta)$, где $\alpha\neq 0$ — произвольное комплексное число.

Проверим, выполняется ли условие разрешимости (19). Используя разложение u_0 по сферическим функциям, равенства (23), (24) и ортогональность функций P_m [24, с. 715], получаем

$$\langle f_2,P_l\rangle=p_{ei}k_ek_i(2l+1)i^{l+1}j_l(k_i)h_l(k_i)j_l'(k_e)\langle P_l,P_l\rangle=4\pi p_{ei}k_ek_ii^{l+1}j_l(k_i)h_l(k_i)j_l'(k_e).$$

Из определения функций j_l, h_l и тождества (25) следует, что функция h_l не имеет действительных корней и $j_l'(k_e)\neq 0$ при $j_l(k_e)=0$. Поэтому условие разрешимости (19) выполняется только при $j_l(k_i)=0$. Если же $j_l(k_i)\neq 0$, то решения уравнения (5) не существует.

3. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА СПЕКТРАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В п. 2 было показано, что для решения задачи дифракции достаточно найти одно из решений интегрального уравнения (9) и воспользоваться потенциалами (7), (8). Рассмотрим возможность получить это решение приближённо.

Обозначим через $k>0$ некоторое собственное волновое число задачи (6), а через $\psi(k)$ — зависящее от него решение (18). Выберем достаточно малое число $\delta>0$. Тогда для решения интегрального уравнения имеют место интерполяционные формулы для плотности

$$\psi(k)=\psi(k+i\delta)+O(\delta),\quad \psi(k)=2\psi(k+i\delta)-\psi(k+2i\delta)+O(\delta^2),$$
$$\psi(k)=4\psi(k+i\delta)-\psi(k-\delta+i\delta)-\psi(k+\delta+i\delta)-\psi(k+2i\delta)+O(\delta^4). \tag{27}$$

Отметим, что в этом случае все плотности в правой части (27) являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Подстановка найденной плотности в интегралы (7), (8) даёт приближённое решение задачи дифракции.

Формулы (27) подразумевают, что искомое решение интегрального уравнения существует. В тех случаях, когда это не так, приближённое решение задачи дифракции может быть найдено по тем же формулам, где ψ следует заменить на $u_{i(e)}$. Однако этот способ решения является более трудоёмким.

Описанный подход ранее использовался для численного решения на спектре трёхмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца [19]. Они были сформулированы в виде граничных слабо сингулярных интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

В работе [17] приведены результаты применения данного подхода для численного решения задачи дифракции плоской акустической волны на единичном шаре на собственных значениях волновых чисел задачи (6). Интегральные уравнения (5) и (9) аппроксимировались системами линейных алгебраических уравнений, которые затем решались численно итерационным методом вариационного типа. При этом для вычисления второго и последующих слагаемых в формулах (27) в качестве начального приближения использовалось найденное ранее первое слагаемое. Это позволило значительно сократить необходимое число итераций.

Сравнение точного и приближённого решений задачи дифракции показало, что интерполяция по формулам (27) позволяет находить решение этой задачи с достаточно высокой точностью. При этом вычисления на собственных волновых числах без применения интерполяции дают неудовлетворительные результаты.

Другие формулы для поиска приближённого решения задачи дифракции на спектрах интегральных уравнений были предложены в работе [26].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы два слабо сингулярных граничных интегральных уравнения Фредгольма первого рода, к каждому из которых может быть сведена трёхмерная стационарная задача дифракции, на спектрах интегральных уравнений, где нарушаются условия эквивалентности интегральных уравнений исходной задаче. Установлено, что решение первого уравнения существует не во всех случаях. Если же оно существует, то, подставленное в интегральные представления решения задачи дифракции, даёт решение этой задачи. Доказано, что решение второго уравнения на спектре существует всегда, но не является единственным. Только одно решение этого уравнения, подставленное в интегральные представления решения задачи дифракции, даёт решение этой задачи.

Описан метод численного решения интегральных уравнений и задачи дифракции на спектрах интегральных уравнений. Его эффективность подтверждена результатами численных экспериментов [17].

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kress, R. Transmission problems for the Helmholtz equation / R. Kress, G.F. Roach // J. Math. Phys. — 1978. — V. 19, № 6. — P. 1433–1437.
2. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс; пер. с англ. Ю.А. Еремина, Е.В. Захарова — М. : Мир, 1987. — 311 с.
3. Kleinman, R.E. On single integral equations for the transmission problem of acoustics / R.E. Kleinman, P.A. Martin // SIAM J. Appl. Math. — 1988. — V. 48, № 2. — P. 307–325.
4. Смагин, С.И. Интегральные уравнения задач дифракции / С.И. Смагин. — Владивосток : Дальнаука, 1995. — 203 с.
5. Дмитриев, В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 316 с.
6. Еремин, Ю.А. Свойства системы интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции на проницаемом теле / Ю.А. Еремин, Е.В. Захаров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 9. — С. 1230–1237.
7. Kleefeld, A. The transmission problem for the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$ / A. Kleefeld // J. Comput. Methods Appl. Math. — 2012. — V. 12, № 3. — P. 330–350.
8. Каширин, А.А. Параллельный алгоритм мозаично-скелетонного метода для численного решения трёхмерной скалярной задачи дифракции в интегральной форме / А.А. Каширин, С.И. Смагин, М.Ю. Тимофеенко // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 5. — С. 917–932.
9. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учебник / В.А. Треногин. — 3-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.
10. Steinbach, O. Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem / O. Steinbach, G. Unger // SIAM J. Numer. Anal. — 2012. — V. 50, № 2. — P. 710–728.
11. Fictitious eigenfrequencies in the BEM for interior acoustic problems / C.-J. Zheng, C.-X. Bi, C. Zhang [et al.] // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2019. — V. 104. — P. 170–182.
12. Панич, О.И. К вопросу о разрешимости внешних краевых задач для волнового уравнения и для системы уравнений Максвелла / О.И. Панич // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 1 (121). — С. 221–226.
13. Schenck, H.A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems / H.A. Schenck // J. Acoust. Soc. Am. — 1968. — V. 44, № 1. — P. 41–58.

14. Burton, A.J. The application of the integral equation method to the numerical solution of some exterior boundary value problems / A.J. Burton, G.F. Miller // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. — 1971. — V. 323, № 2. — P. 201–210.
15. Langrenne, C. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation / C. Langrenne, A. Garcia // J. Acoust. Soc. Am. — 2015. — V. 138, № 1. — P. 3332–3340.
16. Wu, Y.H. Isogeometric indirect boundary element method for solving the 3D acoustic problems / Y.H. Wu, C.Y. Dong, H.S. Yang // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — V. 363, № 2. — P. 273–299.
17. Каширин, А.А. О численном решении скалярных задач дифракции в интегральных постановках на спектрах интегральных операторов / А.А. Каширин, С.И. Смагин // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2020. — Т. 494, № 2. — С. 38–42.
18. Lavie, A. Integral equation methods with unique solution for all wavenumbers applied to acoustic radiation / A. Lavie, A. Leblanc // Eur. J. Comput. Mech. — 2010. — V. 19, № 5-7. — P. 619–636.
19. Каширин, А.А. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов / А.А. Каширин, С.И. Смагин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 8. — С. 1492–1505.
20. Hiptmair, R. Stabilized FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems / R. Hiptmair, P. Meury // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — V. 44, № 5. — P. 2107–2130.
21. Laliena, A.R. Symmetric boundary integral formulations for Helmholtz transmission problems / A.R. Laliena, M.L. Rapun, F.J. Sayas // Appl. Numer. Math. — 2009. — V. 59, № 11. — P. 2814–2823.
22. Regularized combined field integral equations for acoustic transmission problems / Y. Boubendir, V. Dominguez, D. Levadoux, C. Turc // SIAM J. Appl. Math. — 2015. — V. 75, № 3. — P. 929–952.
23. Каширин, А.А. Обобщённые решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции / А.А. Каширин, С.И. Смагин // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 79–90.
24. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — 6-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 798 с.
25. Vico, F. Boundary integral equation analysis on the sphere / F. Vico, L. Greengard, Z. Gimbutas // Numer. Math. — 2014. — V. 128. — P. 463–487.
26. Каширин, А.А. Исследование и численное решение интегральных уравнений трёхмерных стационарных задач дифракции акустических волн : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.А. Каширин. — Хабаровск, 2006. — 118 с.

ON THE SOLVABILITY ON THE SPECTRUM OF FREDHOLM BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND FOR THE THREE-DIMENSIONAL TRANSMISSION PROBLEM

A. A. Kashirin[1], S. I. Smagin[2]

Computer Center of Far Eastern Branch of RAS, Khabarovsk, Russian Federation
e-mail: [1]elomer@mail.ru, [2]smagin@ccfebras.ru

The paper considers two weakly singular Fredholm boundary integral equations of the first kind, to each of which the three-dimensional Helmholtz transmission problem can be reduced. The properties of these equations are studied on spectra, where they are ill-posed. For the first equation, it is shown that if its solution exists on the spectrum, it allows us to find a solution to the transmission problem. The second equation in this case always has infinitely many solutions, only one of which gives a solution to the transmission problem. The interpolation method for finding approximate solutions of the considered integral equations and the transmission problem is discussed.

Keywords: transmission problem, wave number, integral equation, eigenvalue, approximate solution.

REFERENCES

1. Kress, R. Transmission problems for the Helmholtz equation / R. Kress, G.F. Roach // J. Math. Phys. — 1978. — V. 19, № 6. — P. 1433–1437.
2. Colton, D. Integral Equation Methods in Scattering Theory / D. Colton, R. Kress. — New York : John Wiley & Sons, 1983. — 271 p.
3. Kleinman, R.E. On single integral equations for the transmission problem of acoustics / R.E. Kleinman, P.A. Martin // SIAM J. Appl. Math. — 1988. — V. 48, № 2. — P. 307–325.
4. Smagin, S.I. Integral Equations for Diffraction Problems / S.I. Smagin. — Vladivostok : Dalnauka, 1995. — 203 p. [in Russian]
5. Dmitriev, V.I. The Method of Integral Equations in Computational Electrodynamics / V.I. Dmitriev, E.V. Zakharov. — Moscow : MAKS Press, 2008. — 316 p. [in Russian]
6. Eremin, Yu.A. Properties of a system of integral equations of the first kind in problems of diffraction by a permeable body / Yu.A. Eremin , E.V. Zakharov // Differ. Equat. — 2021. — V. 57, № 9. — P. 1205–1213.
7. Kleefeld, A. The transmission problem for the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$ / A. Kleefeld // J. Comput. Methods Appl. Math. — 2012. — V. 12, № 3. — P. 330–350.
8. Kashirin A.A. Parallel mosaic-skeleton algorithm for the numerical solution of a three-dimensional scalar scattering problem in integral form / A.A. Kashirin, S.I. Smagin, M.Y. Timofeenko // Comput. Math. Math. Phys. — 2020. — V. 60, № 5. — P. 895–910.
9. Trenogin, V.A. Functional Analysis : textbook / V.A. Trenogin. — 3rd ed. — Moscow : Fizmatlit, 2002. — 488 p. [in Russian]
10. Steinbach, O. Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem / O. Steinbach, G. Unger // SIAM J. Numer. Anal. — 2012. — V. 50, № 2. — P. 710–728.
11. Fictitious eigenfrequencies in the BEM for interior acoustic problems / C.-J. Zheng, C.-X. Bi, C. Zhang [et al.] // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2019. — V. 104. — P. 170–182.
12. Panich, O.I. On the solvability of exterior boundary-value problems for the wave equation and for a system of Maxwell's equations / O.I. Panich // Uspekhi Mat. Nauk. — 1965. — V. 20, № 1 (121). — P. 221–226. [in Russian]
13. Schenck, H.A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems / H.A. Schenck // J. Acoust. Soc. Am. — 1968. — V. 44, № 1. — P. 41–58.
14. Burton, A.J. The application of the integral equation method to the numerical solution of some exterior boundary value problems / A.J. Burton, G.F. Miller // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. — 1971. — V. 323, № 2. — P. 201–210.
15. Langrenne, C. Solving the hypersingular boundary integral equation for the Burton and Miller formulation / C. Langrenne, A. Garcia // J. Acoust. Soc. Am. — 2015. — V. 138, № 1. — P. 3332–3340.
16. Wu, Y.H. Isogeometric indirect boundary element method for solving the 3D acoustic problems / Y.H. Wu, C.Y. Dong, H.S. Yang // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — V. 363, № 2. — P. 273–299.
17. Kashirin, A.A. Numerical solution of scalar diffraction problems in integral statements on spectra of integral operators / A.A. Kashirin, S.I. Smagin // Dokl. Math. — 2020. — V. 102, № 2. — P. 387–391.
18. Lavie, A. Integral equation methods with unique solution for all wavenumbers applied to acoustic radiation / A. Lavie, A. Leblanc // Eur. J. Comput. Mech. — 2010. — V. 19, № 5-7. — P. 619–636.
19. Kashirin, A.A. Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation / A.A. Kashirin, S.I. Smagin // Comput. Math. Math. Phys. — 2012. — V. 52, № 8. — P. 1173–1185.
20. Hiptmair, R. Stabilized FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems / R. Hiptmair, P. Meury // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — V. 44, № 5. — P. 2107–2130.
21. Laliena, A.R. Symmetric boundary integral formulations for Helmholtz transmission problems / A.R. Laliena, M.L. Rapun, F.J. Sayas // Appl. Numer. Math. — 2009. — V. 59, № 11. — P. 2814–2823.
22. Regularized combined field integral equations for acoustic transmission problems / Y. Boubendir, V. Dominguez, D. Levadoux, C. Turc // SIAM J. Appl. Math. — 2015. — V. 75, № 3. — P. 929–952.
23. Kashirin, A.A. Generalized solutions of the integral equations of a scalar diffraction problem / A.A. Kashirin, S.I. Smagin // Differ. Equat. — 2006. — V. 42, № 1. — P. 88–100.
24. Tikhonov, A.N. Equations of Mathematical Physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. — New York : Dover, 2011. — 800 p.
25. Vico, F. Boundary integral equation analysis on the sphere / F. Vico, L. Greengard, Z. Gimbutas // Numer. Math. — 2014. — V. 128. — P. 463–487.
26. Kashirin, A.A. Research and numerical solution of integral equations of three-dimensional stationary problems of diffraction of acoustic waves : PhD thesis / A.A. Kashirin. — Khabarovsk, 2006. — 118 p. [in Russian]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 224–236

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55+517.956

ГРАДИЕНТ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. М. Романенков

Московский авиационный институт,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, г. Москва
e-mail: romanaleks@gmail.com

Поступила в редакцию 01.08.2023 г., после доработки 19.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассмотрена задача управления процессами, математической моделью которых является начально-краевая задача для псевдогиперболического линейного дифференциального уравнения высокого порядка по пространственной переменной и второго порядка по временно́й переменной. Псевдогиперболическое уравнение является обобщением обычного гиперболического уравнения, типичного в теории колебаний. В качестве примеров изучены модели колебаний движущихся упругих материалов. Для модельных задач установлено энергетическое тождество, сформулированы условия единственности решения. Как оптимизационная рассмотрена задача управления правой частью с целью минимизации квадратичного интегрального функционала, который оценивает близость решения к целевой функции. От изначального функционала выполнен переход к мажорантному функционалу, для которого установлена соответствующая оценка сверху. Получено явное выражение градиента этого функционала, выведены сопряжённые начально-краевые задачи.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, градиент, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0374064124020068, EDN: QKNNLQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $L_j^{2n_j}(z)\in\mathbb{R}[z]$, здесь $n_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,2,3\}$. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_1^{2n_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L_2^{2n_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+L_3^{2n_3}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F(x,t). \tag{1}$$

В нём операторы $L_j^{2n_j}(\partial/\partial x)$ можно рассматривать как линейные дифференциальные операторы порядка $2n$, $n=\max_{j=1,2,3} n_j$, которые порождаются соответствующими многочленами от одной переменной и определяются соотношениями

$$L_j^{2n}(z)=\sum_{k=0}^{2n} p_{j,k}z^k,\quad p_{j,k}\in\mathbb{R},\quad \sum_{k=0}^{2n}|p_{j,k}|\neq 0,$$

а при $z=\partial/\partial x$ имеем

$$L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{2n} p_{j,k}\frac{\partial^k}{\partial x^k},\quad p_{j,k}\in\mathbb{R}.$$

Решение уравнения (1) удовлетворяет краевым условиям

$$\alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \beta_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\bigg|_{x=l} = 0, \quad k = \overline{0, 2n-1}, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x). \tag{3}$$

При этом числа α_k, β_k не все равны нулю. Отметим, что выполняются условия согласования на краях, а именно, условиям (2) удовлетворяют производные по переменной t от функции $u(x,t)$ и функции из начальных условий.

Стоит отметить, что начально-краевую задачу (1)–(3) можно рассматривать как обобщённую математическую модель колебательных процессов самой различной природы. В работе [1] приводится обзор различных математических моделей колебаний упругих материалов, для них устанавливается теорема единственности решения задачи Коши. В [2, 3] предлагаются алгоритмы для построения численных решений начально-краевой задачи для линейного и нелинейного псевдогиперболических уравнений. В статье [4] применяется проекционный метод Галёркина для линейного псевдогиперболического уравнения второго порядка по пространственной переменной с переменными коэффициентами. Важными результатами этой работы являются теорема единственности и оценки погрешности численного метода. Ниже рассмотрим конкретные примеры, в которых будем считать, что внешнего воздействия на колеблющуюся систему не оказывается, т.е. $F(x,t) = 0$ (описание числовых параметров соответствующих моделей можно найти в источниках из предложенного списка литературы).

Пример 1 (уравнение колебаний струны). Пусть $n = 1$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = 1, \quad L_2^{2n}(z) = 0, \quad L_3^{2n}(z) = -a^2 z^2.$$

Тогда получаем (см. [5, 6]) уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Пример 2 (уравнение колебаний балки). Пусть $n = 2$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = 1, \quad L_2^{2n}(z) = 0, \quad L_3^{2n}(z) = A^2 z^4.$$

Тогда (см. [5, 6])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Пример 3 (уравнение колебаний двутавровой балки). Пусть $n = 2$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = 1, \quad L_2^{2n}(z) = 0, \quad L_3^{2n}(z) = -a^2 z^2 + A^2 z^4.$$

Тогда (см. [7])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Пример 4 (уравнение Аллера–Лыкова). Простейшее псевдогиперболическое уравнение получается при $n = 1$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z) = A_1, \quad L_2^{2n}(z) = 1 - A^2 z^2, \quad L_3^{2n}(z) = -D z^2.$$

Имеем (см. [8])

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-A^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-D^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Пример 5 (уравнение колебаний движущейся струны). Пусть $n=1$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}=1,\quad L_2^{2n}=2v_0z,\quad L_3^{2n}(z)=\left(v_0^2-c^2\right)z^2.$$

Тогда [9]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(v_0^2-c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{4}$$

Пример 6 (уравнение колебаний движущегося упругого полотна). Пусть $n=2$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z)=1,\quad L_2^{2n}(z)=2v_0z,\quad L_3^{2n}(z)=\left(v_0^2-c^2\right)z^2+\frac{D}{m}z^4.$$

Получаем [9]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(v_0^2-c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{D}{m}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{5}$$

Пример 7 (уравнение колебаний движущегося вязкоупругого полотна). Пусть $n=3$, многочлены L_1, L_2, L_3 определяются соотношениями

$$L_1^{2n}(z)=1,\quad L_2^{2n}(z)=2cz+\gamma\alpha z^4,\quad L_3^{2n}(z)=(c^2-1)z^2+\alpha z^4+\gamma\alpha c z^5.$$

В результате получаем [9]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\gamma\alpha\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\partial t}+\left(c^2-1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\gamma\alpha c\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}=0. \tag{6}$$

Для дальнейшего изложения потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (2). Тогда существуют числа α_k, β_k при $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ такие, что имеют место тождества*

$$\int\limits_0^l\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\frac{(-1)^k}{2}\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2dx, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^l\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=(-1)^k\int\limits_0^l\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\,dx, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^l\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k}\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=(-1)^k\int\limits_0^l\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2dx, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\frac{(-1)^k}{2}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial t}\right)^2\Bigg|_{x=0}^{x=l}, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\frac{(-1)^k}{2}\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\right)^2dx, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^l\left(\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx=(-1)^{k+1}\int\limits_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t\partial x^k}\right)dx. \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства необходимо применить формулу интегрирования по частям к интегралам, стоящим слева от знака равенства в формулах (7)–(12), и учесть краевые условия (2) при соответствующих значениях α_k, β_k.

Далее поставим дополнительные ограничения на операторы $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$, $L_3^{2n}(\partial/\partial x)$, на которые существенно будем опираться в дальнейшем. Введём обозначения: $\Omega(\tau) := (x,t)\colon x \in (0,l),\ t \in (0,\tau)\}$, $\Omega := \Omega(T)$; $\widehat{W}^{2,2n}(\Omega(\tau))$ — множество функций, которые удовлетворяют краевым условиям (2), имеют производные до второго порядка по t и производные до порядка $2n$ по переменной x и интегрируемы с квадратом по области Ω.

Пусть операторы $L_j^{2n}(\partial/\partial x)$ симметричные при $j=\overline{1,3}$, т.е. для любых функций $v_1, v_2 \in \in \widehat{W}^{2,2n}(\Omega)$ имеет место тождество

$$\left(L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_1, v_2\right) = \left(v_1, L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_2\right), \tag{13}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, определяемое формулой $(v_1,v_2)=\int_0^l v_1 v_2 dx$. Также потребуем, чтобы эти операторы были положительно определены, т.е. потребуем выполнения неравенства

$$\left(L_j^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v_1, v_1\right) \geqslant C_j\,(v_1,v_1)\,, \tag{14}$$

где $C_j>0$, $j=\overline{1,3}$. Так, при $p_k\neq 0$ дифференциальный оператор

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \tag{15}$$

является примером симметричного положительного оператора на пространстве функций, удовлетворяющих краевым условиям (2).

В этой работе будем говорить о *слабых решениях задачи* (1)–(3), т.е. таких функциях $u(x,t)$, которые для любых $v(x)\in H_0^{2n}(0;l)$ и для любого $t\in[0;T]$ при $u(x,t)\in H_0^{2n}(0;l)$, $F(x,t)\in L^2(0;l)$ удовлетворяют тождеству

$$\left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, v\right) = (F(x,t), v(x)). \tag{16}$$

Стоит обратить внимание на вопрос существования решения таких задач. Так, например, следуя [5], с использованием метода Галёркина можно построить последовательность конечномерных приближений, которая в слабом смысле будет сходиться к решению, которое удовлетворяет тождеству (16).

Пусть оператор $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$ имеет вид (15), т.е.

$$p_{1,r} = \begin{cases} 0, & r=2k+1, \\ (-1)^k p_{2k}^2, & r=2k. \end{cases}$$

Далее введём на множестве $\widehat{W}^{2,2n}(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u,v] = \left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, v\right). \tag{17}$$

Формула (17) при $p_0\neq 0$ корректно определяет скалярное произведение в силу построения оператора $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$, симметричность следует из равенства (13), положительная определённость — из (14).

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\|w\|_2^2 \leqslant \sigma_l \|w\|^2_{L_1^{2n}},$$

где $\|w\|_2^2 = (w,w),$ $\|w\|^2_{L_1^{2n}} = [w,w],$ $\sigma_l = 1/(L_1^{2n}(1/l)).$

Доказательство. В силу формулы Ньютона–Лейбница, свойств интеграла и неравенства треугольника имеем

$$|w(x,t)| - |w(0,t)| \leqslant |w(x,t) - w(0,t)| = \left|\int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial x} dx\right| \leqslant \int\limits_0^x \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx. \tag{18}$$

После возведения в квадрат получаем соотношения

$$|w|^2 \leqslant \left(\int\limits_0^l \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx\right)^2 + 2|w(x,t)|\,|w(0,t)| \leqslant \left(\int\limits_0^l \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx\right)^2 + 2|w(0,t)| \max_{x\in[0,l]} |w(x,t)|,$$

и, применив неравенство Гёльдера,

$$|w|^2 \leqslant l C_w \int\limits_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{19}$$

где

$$C_w = 1 + 2|w(0,t)| \max_{x\in[0,l]} |w(x,t)| \Bigg/ \left(l \int\limits_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right).$$

С помощью леммы 1 и неравенства (19) оценим слагаемые в выражении нормы, порождённой оператором L_1^{2n}:

$$\|w\|^2_{L_1^{2n}} = \left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w, w\right) = \int\limits_0^l \sum_{k=0}^n p_{2k}^2 \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)^2 dx. \tag{20}$$

Заметим, что неравенство (19) можно применять для производных, тогда получим

$$\left|\frac{\partial^s w}{\partial x^s}\right|^2 \leqslant l C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial^{s+1} w}{\partial x^{s+1}}\right)^2 dx,$$

откуда следует, что для любых $s \in \{0,1,\ldots,2n-1\}$ выполняется оценка

$$\left\|\frac{\partial^s w}{\partial x^s}\right\|_2^2 \leqslant l^2 C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}} \left\|\frac{\partial^{s+1} w}{\partial x^{s+1}}\right\|_2^2. \tag{21}$$

Поменяем в (20) порядок интегрирования и суммирования и применим неравенство (21):

$$\|w\|^2_{L_1^{2n}} = \sum_{k=0}^n p_{2k}^2 \int\limits_0^l \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)^2 dx = \sum_{k=0}^n p_{2k}^2 \left\|\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right\|_2^2 \geqslant \|w\|_2^2 \sum_{k=0}^n \frac{p_{2k}^2}{l^{2k}} \left(\prod_{s=0}^k C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}}\right)^{-1}.$$

Так как $\min\limits_{s\in\{0,1,\ldots,n\}} C_{\frac{\partial^s w}{\partial x^s}} = 1$, то окончательно получим

$$\|w\|^2_{L_1^{2n}} \geqslant L_1^{2n}\left(\frac{1}{l}\right) \|w\|_2^2.$$

Полагая $\sigma_l = 1/(L_1^{2n}(1/l))$, завершаем доказательство леммы 2.

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями (2) и начальными условиями (3). Мы можем выбрать функцию $F(x,t)$ — правую часть уравнения (1). Пусть множество

$$\Phi := \left\{ F(x,t) : \int_0^T \int_0^l F^2(x,t)\,dx\,dt < +\infty \right\}.$$

Наша цель — определить функцию $f \in \Phi$, которая доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \|u(x,T,f) - y_0(x)\|_2^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\,dtdx, \tag{22}$$

где $y_0(x)$, $y_1(x)$ — заданные функции; ε, T — заданные положительные числа. Такой вид функционала рассматривается в работах [6, 10]. Другими словами, необходимо определить функцию f такую, что к заданному моменту времени T решение задачи (1)–(3) приблизится к функции $y_0(x)$, а производная решения по t — к $y_1(x)$. Заметим, что если $y_0(x) \equiv 0$, $y_1(x) \equiv 0$, то задача состоит в гашении колебаний к заданному моменту времени.

Вместо (22) можно рассмотреть функционал

$$J_{L_1^{2n}}(f) = \|u(x,T,f) - y_0(x)\|_{L_1^{2n}}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right\|_{L_1^{2n}}^2 + C_\varepsilon \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\,dtdx, \tag{23}$$

где $C_\varepsilon = 1/(\sigma_l \varepsilon^2)$.

Теорема 1 (об оценке функционала). *Имеет место неравенство*

$$J(f) \leqslant \sigma_l J_{L_1^{2n}}(f).$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 для первого и второго слагаемых в (22). Тогда, очевидно, получим

$$J(f) \leqslant \sigma_l \left(\|u(x,T,f) - y_0(x)\|_{L_1^{2n}}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right\|_{L_1^{2n}}^2 + \frac{1}{\sigma_l \varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\,dtdx \right).$$

Положив $C_\varepsilon = 1/(\sigma_l \varepsilon^2)$, завершим доказательство теоремы.

Отметим, что если $J_{L_1^{2n}}(f_m) \to 0$ при $m \to \infty$, то в силу неравенства из теоремы 1 получим $J(f_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Далее, если определим минимизирующую последовательность функций $f_m \in \Phi$ такую, что $\lim_{m\to\infty} J_{L_1^{2n}}(f_m) = J_{L_1^{2n}}(f^*)$ (здесь $f^* \in \Phi$ — функция, доставляющая минимум функционалу (23)), то будет найден не оптимальный, а квазиоптимальный режим.

Перепишем формулу (23) в более удобном виде:

$$J_{L_1^{2n}}(f) = \big(u(x,T,f) - y_0(x), u(x,T,f) - y_0(x)\big) +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x) \right) + C_\varepsilon(f,f).$$

Следующим стандартным шагом для получения необходимых условий оптимальности является вычисление вариации функционала $J_{L_1^{2n}}(f)$. Определим её как

$$\delta J_{L_1^{2n}} = J_{L_1^{2n}}(f+h) - J_{L_1^{2n}}(f),$$

где $h(x,t) \in \Phi$.

Получим выражение для вариации функционала:

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \big(u(x,T,f+h)-y_0(x), u(x,T,f+h)-y_0(x)\big)+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-y_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-y_1(x)\right)+C_\varepsilon(f+h,f+h)-$$
$$-\big(u(x,T,f)-y_0(x), u(x,T,f)-y_0(x)\big)-\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x)\right)-C_\varepsilon(f,f)=$$
$$=\big(u(x,T,f+h)+u(x,T,f), u(x,T,f+h)-u(x,T,f)\big)+$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)+\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f), \frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)\right)-$$
$$-2\left(\big(u(x,T,f+h)-u(x,T,f), y_0(x)\big)+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f+h)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f), y_1(x)\right)\right)+$$
$$+C_\varepsilon\int\limits_0^l\int\limits_0^T\big(2f(x,t)h(x,t)+h^2(x,t)\big)\,dtdx.$$

Пусть теперь $\delta u(x,t)=u(x,t,f+h)-u(x,t,f)$. Эта функция удовлетворяет исходному уравнению (1) с правой частью $F(x,t)=h(x,t)$, а именно

$$L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta u)+L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)+L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\delta u)=h(x,t), \tag{24}$$

краевым условиям (2) и нулевым начальным условиям

$$\delta u\big|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{25}$$

Тогда

$$\delta J_{L_1^{2n}}=(\delta u+2u(x,T,f),\delta u)+\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)-$$
$$-2\left((\delta u, y_0(x))+\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, y_1(x)\right)\right)+C_\varepsilon\int\limits_0^l\int\limits_0^T\big(2f(x,t)h(x,t)+h^2(x,t)\big)\,dt\,dx,$$

$$\delta J_{L_1^{2n}}=2\left(\big(u(x,T,f)-y_0(x),\delta u\big)+\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)+C_\varepsilon(f,h)\right)+R_h, \tag{26}$$

где

$$R_h=(\delta u,\delta u)+\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)+C_\varepsilon(h,h). \tag{27}$$

Далее определим сопряжённую функцию $\psi(x,t)$, которая является решением краевой задачи для сопряжённого уравнения. Начальные условия для сопряжённой функции определяются условиями

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=T}=-2\big(u(x,T,f)-y_0(x)\big), \quad \psi\big|_{t=T}=2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f)-y_1(x)\right). \tag{28}$$

С учётом условий (28) выражение для вариации (26) можно записать как

$$\delta J_{L_1^{2n}}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T),\delta u\right)+\left(\psi(x,T), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)+2C_\varepsilon(f,h)+R_h. \tag{29}$$

Запишем дифференциальное уравнение для $\psi(x,t)$. Из (29) временно отбросим величину R_h, тогда, изменив порядок дифференцирования под знаком интеграла и использовав симметричность оператора L_1^{2n}, получим

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int\limits_0^l \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,T)(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,T)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} + 2C_\varepsilon\int\limits_0^T f(x,t)h(x,t)\,dt\biggr)dx =$$

$$= \int\limits_0^l \biggl(-\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\Bigr)\Big|_{t=T}(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,T)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} + 2C_\varepsilon\int\limits_0^T f(x,t)h(x,t)\,dt\biggr)dx =$$

$$= \int\limits_0^l \biggl(\int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial t}\Bigl(-\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\Bigr)(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\Bigr)dt + 2C_\varepsilon\int\limits_0^T f(x,t)h(x,t)\,dt\biggr)dx =$$

$$= \int\limits_0^l\int\limits_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)(\delta u) + L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta u) + 2C_\varepsilon f(x,t)h(x,t)\biggr)dt\,dx.$$

Учитывая симметричность оператора $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$ (см. (13)), преобразуем последний интеграл:

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int\limits_0^l\int\limits_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)(\delta u) + \psi(x,t)\cdot L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta u) + 2C_\varepsilon f(x,t)h(x,t)\biggr)dt\,dx,$$

выражая из (24) слагаемое $L_1^{2n}(\partial/\partial x)(\partial^2(\delta u)/\partial t^2)$, получаем

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int\limits_0^l\int\limits_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)\cdot\delta u +$$

$$+\psi(x,t)\Bigl(h(x,t) - L_2^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} - L_3^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)(\delta u)\Bigr) + 2C_\varepsilon f(x,t)h(x,t)\biggr)\,dt\,dx.$$

Здесь после раскрытия скобок и группировки слагаемых с сомножителем $h(x,t)$ окончательно будем иметь

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int\limits_0^l\int\limits_0^T \biggl(-L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(\delta u) - \psi L_2^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} - \psi L_3^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)(\delta u) + \Bigl(\psi + 2C_\varepsilon f\Bigr)h\biggr)dt\,dx. \quad (30)$$

В формуле (30) для краткости не указываем аргументы (x,t).

Определим далее сопряжённое уравнение

$$\delta u\Bigl(L_1^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + L_3^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\psi\Bigr) + \psi L_2^{2n}\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} = 0. \quad (31)$$

Тогда из (30) с учётом (31) получаем окончательное выражение для вариации:

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int\limits_0^l\int\limits_0^T (\psi(x,t) + 2C_\varepsilon f(x,t))\,h(x,t)\,dt\,dx + R_h. \quad (32)$$

Формула (32) даёт представление приращения функционала (23), которое линейно относительно приращения управления $h(x,t)$. Если докажем, что R_h имеет более высокий порядок малости относительно приращения $h(x,t)$, то формула (32) даст явное выражение градиента функционала, что позволит использовать его для построения градиентных методов минимизации. Далее сформулируем вспомогательное утверждение.

Теорема 2 (энергетическое тождество). *Пусть $L_1^{2n}(\partial/\partial x)$, $L_3^{2n}(\partial/\partial x)$ — дифференциальные операторы, которые имеют вид*

$$L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_{1,2k}^2\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}, \quad L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_{3,2k}^2\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

а оператор $L_2^{2n}(\partial/\partial x)$ — оператор общего вида. Определим величину

$$E(\tau)=\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^l\sum_{k=0}^{n}\left(p_{1,2k}^2\left(\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^k\partial t}\right)^2+p_{3,2k}^2\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2\right)dx\right]\Bigg|_{t=\tau}, \tag{33}$$

где $u(x,t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и начальным условиям (3). Тогда для любого $\tau>0$ имеет место тождество

$$E(\tau)-E(0)+\int\limits_0^l\int\limits_0^\tau\left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx=\int\limits_0^l\int\limits_0^\tau F(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx. \tag{34}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $\partial u/\partial t$ и проинтегрируем по области $\Omega(\tau)$, а после использования леммы 1 немедленно получим утверждение теоремы.

Установленную теорему 2 можно применять для доказательства единственности решения краевых задач.

Следствие (единственность решения). *Пусть существует решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи (1)–(3) и выполняется равенство*

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^\tau\left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,dx=0.$$

Тогда это решение единственно.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$, $w(x,t)$ — различные (несовпадающие) решения начально-краевой задачи. Рассмотрим функцию $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$. Она является решением задачи (1), (2) при $F(x,t)=0$ и при нулевых начальных условиях (3). По теореме 2 для функции $v(x,t)$ имеем $E(\tau)-E(0)=0$ и $E(\tau)=0$. Тогда в силу (34) получаем $v(x,t)\equiv 0$, откуда $u(x,t)=w(x,t)$.

Теорема 3 (оценка остатка R_h). *Пусть*

$$\left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial t},\frac{\partial\delta u}{\partial t}\right)\geqslant 0$$

и выполнены условия теоремы 2. Тогда для величины R_h из (27) имеет место оценка

$$R_h=O\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T h^2(x,t)\,dtdx\right).$$

Доказательство. Рассмотрим первое и второе слагаемые в (27). Раскрыв скалярное произведение, с учётом леммы 1 будем иметь

$$\left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial t},\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right]=\int\limits_0^l\int\limits_0^T\left(L_1^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\,dt\,dx.$$

Следующим шагом уравнение (24) скалярно умножим на $\partial(\delta u)/\partial t$:

$$\left[\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial t^2}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right] + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) + \left(L_3^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\delta u), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) = \left(h(x,t), \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right).$$

Применив теорему 2 для функции δu, будем иметь $E(0)=0$, и тогда из (34) получим

$$E(\tau) + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) = \int_0^\tau\int_0^l h(x,t)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\,dx\,dt. \tag{35}$$

С помощью (33) оценим левую часть (35):

$$E(\tau) + \left(L_2^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \geqslant \left[\int_0^l \sum_{k=0}^n \frac{p_{1,2k}^2}{2}\left(\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dx\right]\bigg|_{t=\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right).$$

Теперь возьмём $\varepsilon>0$ и оценим в (35) правую часть, используя лемму 2:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \leqslant \int_0^\tau\int_0^l h(x,t)\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau\int_0^l\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt + \frac{\varepsilon\sigma_l}{2}\int_0^\tau\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)dt.$$

Далее, умножив на 2 и положив $\varepsilon=1/\sigma_l$, получим неравенство

$$\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \leqslant \sigma_l\int_0^\tau\int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt + \int_0^\tau\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right)dt,$$

к которому применим неравенство Гронуолла:

$$\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}, \frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\right) \leqslant e^T\sigma_l\int_0^T\int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt. \tag{36}$$

Выполним заключительную выкладку и будем иметь

$$(\delta u, \delta u) = \int_0^T\int_0^l \sum_{k=0}^n p_{1,2k}^2\left(\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dx\,dt.$$

Для $(\partial^k(\delta u)/\partial x^k)^2$ воспользуемся оценкой (19), но только через производную по t:

$$\left(\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 \leqslant C_k\int_0^\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dt,$$

и получим неравенство

$$(\delta u, \delta u) \leqslant T\max_k C_k\int_0^T\int_0^l\sum_{k=0}^n p_{1,2k}^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k(\delta u)}{\partial x^k}\right)^2 dx\,dt \leqslant \theta\int_0^T\int_0^l h^2(x,t)\,dx\,dt, \tag{37}$$

где $\theta=Te^T\sigma_l\max_k C_k$. Подставив в формулу (27) оценки (36) и (37), получим утверждение теоремы.

Теперь применим полученные результаты и выпишем градиенты и сопряжённые смешанные задачи для некоторых рассмотренных ранее примеров. Задачи в примерах 1–7 являются однородными, поэтому имеет место равенство

$$\delta J_{L_1^{2n}} = \int\limits_0^l \int\limits_0^\tau \psi(x,t)h(x,t)\,dt\,dx,$$

где $\psi(x,t)$ — решение сопряжённой начально-краевой задачи.

Для примеров 1–3 в силу формулы (31) уравнение для сопряжённой функции совпадет с исходным уравнением, краевые условия также совпадут, а начальные условия будут определяться формулами (28). Отметим, что данные факты согласуются с известными результатами [6].

Для примеров 5, 6 ситуация иная: краевые и начальные условия не меняются, но сопряжённое уравнение изменит свой вид. Отметим, что задачи управления колебаниями движущихся материалов рассматривались в работах разных исследователей, например, можно обратить внимание на обзор [11]. Для уравнения колебаний движущейся струны (4) имеем

$$\delta u\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \left(v_0^2 - c^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + 2v_0\psi\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x\partial t} = 0,$$

здесь функция $\delta u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (25) и уравнению (31):

$$\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial t^2} + 2v_0\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x\partial t} + (v_0^2 - c^2)\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2} = h(x,t).$$

Для уравнения колебаний движущегося полотна (5) имеем

$$\delta u\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + (v_0^2 - c^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{D}{m}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right) + 2v_0\psi\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x\partial t} = 0,$$

здесь функция $\delta u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (25) и уравнению (31):

$$\frac{\partial^2\delta u}{\partial t^2} + 2v_0\frac{\partial^2\delta u}{\partial x\partial t} + \left(v_0^2 - c^2\right)\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + \frac{D}{m}\frac{\partial^4\delta u}{\partial x^4} = h(x,t).$$

Замечание. Для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна (6) полученные результаты неприменимы, так как оператор $L_3^{2n}(\partial/\partial x)$ для этого уравнения не является симметричным.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars / I. Fedotov, J. Marais, M. Shatalovand, H.M. Tenkam // The Australian J. of Math. Anal. and Appl. — 2011. — V. 7, № 2. — P. 1–18.
2. Abdulazeez, S.T. Solutions of fractional order pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equations using finite difference method / S.T. Abdulazeez, M. Modanli // Alexandria Engineering J. — 2022. — V. 61, № 12. — P. 12443–12451.
3. Abdulazeez, S.T. Numerical scheme methods for solving nonlinear pseudo-hyperbolic partial differential equations / S.T. Abdulazeez, M. Modanli, A.M. Husien // J. of Appl. Math. and Comput. Mech. — 2022. — V. 4, № 21. — P. 5–15.

4. Zhao, Z. A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients / Z. Zhao, H. Li // J. of Math. Anal. and Appl. — 2019. — V. 473, № 2. — P. 1053–1072.
5. Эванс, Л.К. Уравнения с частными производными / Л.К. Эванс ; пер. с англ. — Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. — 560 с.
6. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации : учебное пособие / Ф.П. Васильев. — М. : МЦНМО, 2011. — 434 с.
7. Рудаков, И.А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами / И.А. Рудаков // Вестн. МГТУ имени Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2019. — № 3. — С. 4–21.
8. Керефов, М.А. Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщённых уравнений влагопереноса / М.А. Керефов, С.Х. Геккиева // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2021. — Т. 31, № 1. — С. 19–34.
9. Mechanics of Moving Materials / Banichuk N., Jeronen J., Neittaanäki P. [et al.]. — Springer, 2014.
10. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : URSS, 2020. — 784 с.
11. Hong, K.-S. Control of axially moving systems / K.-S. Hong, P.-T. Pham // A Review. Int. J. Control Autom. Syst. — 2019. — V. 17. — P. 2983–3008.

GRADIENT IN THE PROBLEM OF CONTROLLING PROCESSES DESCRIBED BY LINEAR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

A. M. Romanenkov

Moscow Avaition Institute, Moscow, Russia
Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia
e-mail: romanaleks@gmail.com

The paper considers the problem of controlling processes, the mathematical model of which is an initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic linear differential equation of high order in the spatial variable and second order in the time variable. The pseudohyperbolic equation is a generalization of the ordinary hyperbolic equation, which is typical in vibration theory. As examples, models of vibrations of moving elastic materials were considered. For model problems, an energy identity is established, and conditions for the uniqueness of a solution are formulated. As an optimization problem, we considered the problem of controlling the right side in order to minimize the quadratic integral functional, which evaluates the proximity of the solution to the objective function. From the original functional a transition was made to the majorant functional, for which the corresponding upper bound was established. An explicit expression for the gradient of this functional is obtained, and conjugate initial-boundary value problems are derived.

Keywords: pseudohyperbolic equation, gradient, optimal control.

REFERENCES

1. Hyperbolic models arising in the theory of longitudinal vibration of elastic bars / I. Fedotov, J. Marais, M. Shatalovand, H.M. Tenkam // The Australian J. of Math. Anal. and Appl. — 2011. — V. 7, № 2. — P. 1–18.
2. Abdulazeez, S.T. Solutions of fractional order pseudo-hyperbolic telegraph partial differential equations using finite difference method / S.T. Abdulazeez, M. Modanli // Alexandria Engineering J. — 2022. — V. 61, № 12. — P. 12443–12451.
3. Abdulazeez, S.T. Numerical scheme methods for solving nonlinear pseudo-hyperbolic partial differential equations / S.T. Abdulazeez, M. Modanli, A.M. Husien // J. of Appl. Math. and Comput. Mech. — 2022. — V. 4, № 21. — P. 5–15.
4. Zhao, Z. A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients / Z. Zhao, H. Li // J. of Math. Anal. and Appl. — 2019. — V. 473, № 2. — P. 1053–1072.
5. Evans, L.C. Partial Differential Equations / L.C. Evans. — Berkeley : American Mathematical Society, 2010.
6. Vasil'ev, F.P. Optimization Methods : a textbook / F.P. Vasil'ev. Moscow : MCCME, 2011. — 434 p. [in Russian]

7. Rudakov, I.A. Oscillation problem for an I-beam with fixed and hinged end supports / I.A. Rudakov // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. — 2019. — № 3. — P. 4–21. [in Russian]
8. Kerefov, M.A. Numerical-analytical method for solving boundary value problem for the generalized moisture transport equation / M.A. Kerefov, S.H. Gekkieva // Vestn. Udmurtskogo un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki. — 2021. — V. 31, № 2. — P. 19–34. [in Russian]
9. Mechanics of Moving Materials / Banichuk N., Jeronen J., Neittaanäki P. [et al.]. — Springer, 2014.
10. Samarskij, A.A. Vychislitel'naya teploperedacha / A.A. Samarskij, P.N. Vabishchevich. Moscow : URSS, 2020. — 784 p.
11. Hong, K.-S. Control of axially moving systems / K.-S. Hong, P.-T. Pham // A Review. Int. J. Control Autom. Syst. — 2019. — V. 17. — P. 2983–3008.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 237–259

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРОВА ТИПА С ОПЕРАТОРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В. И. Сумин[1], М. И. Сумин[2]

[1,2]Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
[1,2]Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
e-mail: [1]v_sumin@mail.ru; [2]m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 07.08.2023 г., после доработки 04.09.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в выпуклой задаче оптимального управлении с операторным ограничением-равенством и функциональными ограничениями-неравенствами. Управляемая система задаётся линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m, основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Минимизируемый функционал задачи является лишь выпуклым (возможно не сильно). Регуляризованные КУО получаются на основе метода двойственной регуляризации, при этом используются два параметра регуляризации, один из которых “отвечает” за регуляризацию двойственной задачи, а другой содержится в сильно выпуклой регуляризирующей тихоновской добавке к целевому функционалу исходной задачи, обеспечивая тем самым корректность задачи минимизации функции Лагранжа. Основное назначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование минимизирующих приближённых решений в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближённых решений с одновременным конструктивным представлением этих решений, выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина, “преодолевают” свойства некорректности КУО и дают регуляризирующие алгоритмы для решения оптимизационных задач. На основе метода возмущений достаточно подробно обсуждается важное свойство полученных в работе регуляризованных КУО, состоящее в том, что “в пределе” они приводят к своим классическим аналогам. В качестве приложения рассматривается конкретный пример задачи оптимального управления, связанной с интегро-дифференциальным уравнением типа уравнения переноса, частным случаем которой является некоторая задача финального наблюдения.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, операторное ограничение, функционально-операторное уравнение вольтеррова типа, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, некорректность, регуляризация, двойственность, минимизирующее приближённое решение, регуляризирующий оператор, метод возмущений.

DOI: 10.31857/S0374064124020074, EDN: QKMYJY

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимизационной теории, в основе которой лежат классические условия оптимальности, можно рассматривать с двух (в известном смысле принципиально разных) позиций. Если задача такова, что её исходные данные можно и нужно считать известными точно, то мы попадаем в “привычную сферу действия” теории КУО [1–4] (эта теория, будучи обязанной своим рождением прежде всего потребностям самых различных практических приложений, за прошедшие столетия со времён П. Ферма, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа получила фундаментальное развитие, её методы вошли в основной аппарат многих разделов современной математики, других естественных наук). Но оптимизационная задача может быть и такой, что предположение о точном задании её исходных данных находится в противоречии с её содержательным смыслом, и мы вынуждены учитывать возможную погрешность этих данных. Такие задачи часто встречаются в современном естествознании [5]. В этом случае неточность в задании их исходных данных, во-первых, резко диссонирует с основным предположением классической теории, требующим точного знания исходных данных оптимизационных задач при получении КУО, и, во-вторых, порождает необходимость учёта свойственной задачам условной оптимизации некорректности [6], влекущей, как следствие, некорректность самих КУО и потребность в их регуляризации (см., например, [7–10] и библиографию в этих работах).

Как известно, изучение различных связанных с КУО вопросов лежит в основе развития теории оптимизации распределённых систем. Многообразие, сложность и актуальность этих вопросов вот уже более шести десятков лет постоянно привлекают внимание исследователей [11–13]. Отличительной чертой данной работы, продолжающей линию работ [9, 10], является исследование вопросов регуляризации КУО — принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина*) — в выпуклых задачах оптимального управления с операторными ограничениями для линейных распределённых систем вольтеррова типа. Так мы называем управляемые системы, которые могут быть описаны линейными функциональными (иначе, функционально-операторными) уравнениями второго рода общего вида с квазинильпотентным основным линейным оператором правой части. Подобным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы**). Поэтому указанные уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова типа. К таким уравнениям естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными: гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных, систем таких уравнений, уравнений с запаздываниями разного рода и др. (см., например, конкретные примеры в [26, гл. 2], обзоры в [26, 28]). Это позволило в настоящей статье получить регуляризованные ПЛ и ПМП единообразно для широкого класса распределённых оптимизационных задач. При этом, как и в [9, 10], существенным образом используется предложенное нами ранее понятие равностепенной квазинильпотентности семейства операторов (историю вопроса см. в [28]). В качестве конкретного иллюстрирующего примера мы рассматриваем задачу оптимального управления, связанную с интегро-дифференциальным уравнением типа уравнения переноса, частным случаем которой является некоторая обратная задача финального наблюдения.

*) Здесь обратим внимание на монографию [13] (см. также библиографию в ней), посвящённую так называемому SQH-методу (Sequential Quadratic Hamiltonian Method) для решения задач оптимального управления. В его основе лежат связанные непосредственно с ПМП итерационные схемы, использующие числовые регуляризирующие добавки к гамильтонианам задач. Подчеркнём, что SQH-метод нацелен, прежде всего, на решение задач оптимального управления лишь с геометрическими ограничениями.

**) Начиная с известных работ L. Tonelli [14] и А. Н. Тихонова [15], название “вольтерровы операторы” (операторы типа Вольтерры) присваивалось разными авторами различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.); см., например, различные определения вольтерровых операторов в [16–20] (случай функциональных операторов), в [16, 21–25] (случай абстрактных операторов) и краткий обзор таких определений в [26, дополнение], а также в [27]. В случае линейных операторов эти определения так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [21, С. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение [18] функционального оператора “вольтеррова на системе множеств”, являющееся многомерным обобщением определения А.Н. Тихонова, и опирающийся на определение [18] цепочечный признак квазинильпотентности [27, теорема 2]).

Главное назначение получаемых в данной работе и выражаемых в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина регуляризованных КУО — устойчивое конструктивное генерирование в рассматриваемой задаче оптимального управления обобщённых минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближённых решений (МПР)*) в смысле Дж. Варги [29]. Регуляризованные КУО формулируются как теоремы существования в исходной задаче МПР, состоящих из минималей функции Лагранжа, двойственные переменные для которой генерируются в соответствии с процедурой регуляризации двойственной задачи. Ниже, как и в [9, 10], управляемая система вольтеррова типа задаётся линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m. При этом, как и в [9, 10], операторное ограничение-равенство задано в некотором гильбертовом пространстве, а для упрощения изложения и в соответствии с традициями теории оптимального управления множество допустимых управлений считаем ограниченным.

Данная работа является продолжением работ [9, 10]. Минимизируемый функционал в ней предполагается лишь выпуклым и не обязательно сильно выпуклым. Отметим, что регуляризация КУО в выпуклых задачах оптимального управления с не сильно выпуклыми целевыми функционалами рассматривалась нами в статье [30]. Покажем, в чём сходство и в чём существенное различие получаемых ниже и в [9, 10, 30] результатов.

В рассматриваемой ниже задаче, как и в [9, 10, 30], МПР конструируются из экстремалей (минималей) её функции Лагранжа, взятых при значениях двойственных переменных из некоторой последовательности, вырабатываемой соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. При этом, как и в [10, 30], в качестве процедуры регуляризации двойственной задачи (эта задача является вогнутой) используется тихоновская стабилизация (см., например, [6, гл. 9]). Отметим, что в [9] с этой целью применяется процедура так называемой итеративной регуляризации [31].

Говоря о различиях, подчеркнём прежде всего, что целевой функционал в данной работе является функционалом общего вида и предполагается лишь выпуклым, тогда как в [9, 10] минимизируемые функционалы являются сильно выпуклыми с аддитивно разделёнными управлением и "фазой". Далее, чтобы охарактеризовать отличие результатов данной статьи от результатов [30], целесообразно отметить сначала различие подходов [10] и [30]. В случае сильно выпуклого целевого функционала (как в [10]) сильно выпуклой по исходной переменной является и функция Лагранжа и, как следствие, однозначно и корректно определяются элементы МПР, соответствующие выбранной процедуре регуляризации двойственной задачи. В отсутствие же сильной выпуклости функционала качества (как в [30]) и, как следствие, в отсутствие сильной выпуклости функции Лагранжа по исходной переменной при ограниченном множестве допустимых элементов гарантируется лишь существование (но, вообще говоря, не единственность) элементов МПР (как элементов из множества минималей функции Лагранжа, взятых при соответствующих значениях двойственных переменных). В такой ситуации генерирование МПР в силу регуляризованных КУО в существенной степени теряет свою конструктивность. По этой причине ниже в преодоление указанного недостатка регуляризованных КУО в неитерационной форме [30], следуя методу работы [32], вместо одного используем два параметра регуляризации. Один из них, как и в [10, 30], "отвечает" за регуляризацию двойственной задачи, другой содержится в сильно выпуклой регуляризирующей тихоновской добавке к целевому функционалу исходной задачи, обеспечивая тем самым корректность задачи минимизации функции Лагранжа. Так, отказываясь от существенно используемого в [9, 10] условия сильной выпуклости функционала качества, мы "преодолева-

*) Широко используемое в оптимальном управлении понятие МПР органично сочетает в себе учёт как запросов строгой математической оптимизационной теории [29, гл. 4–8], так и потребностей инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближённых решений ненулевых зазоров и при выполнении ограничений задачи, и при приближении значений функционала цели к её (обобщённой) нижней грани [29, гл. 3].

ем” допускаемую в [30] некорректность задачи минимизации функции Лагранжа. Последняя является базовой задачей во всех формулируемых ниже регуляризованных КУО.

Авторы настоящей статьи считают, что к совокупности методов преодоления свойств некорректности КУО следует относиться как к отдельному разделу теории некорректных задач. Проверка КУО на корректность является самостоятельной сложной математической задачей. В то же время их регуляризация даёт новый класс регуляризирующих алгоритмов — регуляризованные КУО, обеспечивающие устойчивое генерирование МПР в оптимизационных задачах со сложными операторными ограничениями для целей практического решения большого числа актуальных естественнонаучных задач. Центральным при этом является введённое ранее в [32] и ориентированное на задачи условной оптимизации понятие МПР-образующего алгоритма (см. ниже определение 1)*). В своей основе эти новые регуляризирующие алгоритмы, формулируемые в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина, опираются прежде всего на методы теории регуляризации и теории КУО, являясь, таким образом, продуктами “взаимовыгодного пересечения” двух указанных направлений математической теории.

Выделим важные на наш взгляд особенности получаемых в работе регуляризованных КУО, подчеркивающие актуальность формулируемых ниже результатов (связанные с этим подробности и поясняющие комментарии можно найти в [7–10]). Регуляризованные КУО: 1) не связаны с “труднопроверяемыми” условиями, используемыми обычно для гарантии выполнимости и устойчивости их классических аналогов; 2) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов — своих предельных вариантов, сохраняют их общую структуру и могут трактоваться как условия оптимальности, выраженные в секвенциальной форме; 3) “хорошо сопрягаются” с методом возмущений (см., например, [1, п. 3.3.2]), позволяющим, используя для исследования оптимизационных задач аппарат выпуклого анализа, связать свойства сходимости регуляризованных КУО с субдифференциальными свойствами функций значений этих задач (подробнее в п. 5).

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbb{R}^n$ — пространство n-векторов-столбцов; $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ и $\|\cdot\|_n$ — евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $*$ — знак сопряжения и транспонирования; $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных, элементы которого обозначаем через $t\equiv\{t^1,\ldots,t^n\}$; $L_p(\Pi)$ — лебегово пространство со стандартной нормой $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$; $L_p^m\equiv L_p^m(\Pi)\equiv(L_p(\Pi))^m$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$; $\|\cdot\|_{p,m}$ — стандартная норма прямого произведения в L_p^m; $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,m}$ — стандартное скалярное произведение в L_2^m; $L_p^{m\times l}\equiv L_p^{m\times l}(\Pi)$ — пространство $m\times l$-матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m\times l}$ — стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m\times l}$; H — некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$; $\chi_{[\alpha,\beta]}(\xi)\equiv\{1,\ \xi\in[\alpha,\beta];\ 0,\ \xi\notin[\alpha,\beta]\}$, $\xi\in[0,1]$, — характеристическая функция подотрезка $[\alpha,\beta]$ отрезка $[0,1]$; $\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных чисел.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. БАЗОВАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Пусть заданы натуральные числа m, n, s; функция $c(t)$, $t\in\Pi$, из класса $L_2^m\equiv L_2^m(\Pi)$; линейный ограниченный оператор (ЛОО) $A:L_2^m\to L_2^m$ с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B:L_2^s\to L_2^m$. Рассмотрим линейное функциональное уравнение

$$z(t)=A[z](t)+B[u](t)+c(t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_2^m,\quad u\in L_2^s,\tag{1}$$

*) О взаимосвязи понятия МПР-образующего алгоритма и “более привычного” для задач условной оптимизации понятия регуляризирующего алгоритма [6, гл. 9] см. во введениях работ [9, 10].

считая $u(\cdot)$ управляющей функцией (управлением). Ввиду квазинильпотентности оператора A уравнение (1) имеет для каждого $u(\cdot)\in L_2^s$ единственное в L_2^m решение $z(t)$, $t\in\Pi$, причём

$$z(t)=S[B[u]+c](t),\quad t\in\Pi,\quad u\in L_2^s, \tag{2}$$

где $S:L_2^m\to L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана $S[y]\equiv\sum_{i=0}^{\infty}A^i[y]$, $y\in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение $z(\cdot)$ уравнения (1), задаваемое формулой (2), обозначаем $z_u(\cdot)$.

Чтобы поставить для управляемой системы (1) задачу оптимального управления, будем считать, что заданы ЛОО $\mathcal{A}:L_2^m\to H$, ЛОО $\mathcal{B}:L_2^s\to H$, элемент $\mathcal{C}\in H$ и выпуклые функционалы $\mathcal{J}_i[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,k})$. Используя (2) как формулу подстановки, зададим на L_2^s функционалы $J_i[u]\equiv\mathcal{J}_i[z_u,u]$ $(i=\overline{0,k})$ и оператор $\mathcal{G}[u]\equiv\mathcal{A}[z_u]+\mathcal{B}[u]$, $u\in L_2^s$. Функционалы $J_i[\cdot]$ $(i=\overline{0,k})$ выпуклые. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2^s. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1) с минимизируемым целевым функционалом $J_0[u]$ при ограничениях

$$\mathcal{G}[u]=\mathcal{C},\quad J_1[u]\leqslant 0,\quad \ldots,\quad J_k[u]\leqslant 0,\quad u\in L_2^s, \tag{3}$$

и множеством допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$J_0[u]\to\min,\quad (3),\quad u\in\mathcal{D}. \tag{4}$$

1.2. ТОЧНАЯ И ПРИБЛИЖЁННЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача (4) полностью определяется набором своих исходных данных

$$\mathsf{f}\equiv\{A,B,c,\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{J}_i\ \ (i=\overline{0,k})\}.$$

Предположим, что точные исходные данные $\mathsf{f}^0\equiv\{A^0,B^0,c^0,\mathcal{A}^0,\mathcal{B}^0,\mathcal{C}^0,\mathcal{J}_i^0\ \ (i=\overline{0,k})\}$ нам не известны, но мы можем оперировать с приближёнными исходными данными

$$\mathsf{f}^\delta\equiv\{A^\delta,B^\delta,c^\delta,\mathcal{A}^\delta,\mathcal{B}^\delta,\mathcal{C}^\delta,\mathcal{J}_i^\delta\ \ (i=\overline{0,k})\},$$

где δ — меняющийся в некотором фиксированном полуинтервале $(0,\delta_0]$ числовой параметр, характеризующий близость приближённых данных f^δ к точным данным f^0 в указанном ниже условиями Б и В смысле (положительным значениям параметра δ соответствует приближённая оптимизационная задача вида (4) с данными f^δ, а значению $\delta=0$ — точная оптимизационная задача вида (4) с данными f^0). Таким образом, считаем, что при каждом $\delta\in[0,\delta_0]$ существуют следующие объекты: квазинильпотентный ЛОО $A^\delta:L_2^m\to L_2^m$; ЛОО $B^\delta:L_2^s\to L_2^m$; функция $c^\delta(\cdot)\in L_2^m$; ЛОО $\mathcal{A}^\delta:L_2^m\to H$; ЛОО $\mathcal{B}^\delta:L_2^s\to H$; элемент $\mathcal{C}^\delta\in H$; выпуклые функционалы $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,k})$.

Предполагаем, что выполняется

Условие А. Функционалы $\mathcal{J}_i^\delta$, $i=\overline{0,k}$, $\delta\in[0,\delta_0]$, липшицевы на каждом ограниченном множестве пространства $L_2^m\times L_2^s$, причём липшицевость равномерна по параметру $\delta\in[0,\delta_0]$, т.е. соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta\in[0,\delta_0]$.

Считаем также, что приближённые исходные данные f^δ, $\delta\in(0,\delta_0]$, связаны с точными исходными данными f^0 приведёнными ниже условиями Б, В, Г.

Условие Б. Существует постоянная $C>0$ такая, что при любом $\delta\in(0,\delta_0]$ имеем

$$\begin{gathered}\|A^\delta-A^0\|\leqslant C\delta,\quad \|B^\delta-B^0\|\leqslant C\delta,\quad \|c^\delta-c^0\|_{2,m}\leqslant C\delta,\\ \|\mathcal{A}^\delta-\mathcal{A}^0\|\leqslant C\delta,\quad \|\mathcal{B}^\delta-\mathcal{B}^0\|\leqslant C\delta,\quad \|\mathcal{C}^\delta-\mathcal{C}^0\|_H\leqslant C\delta.\end{gathered} \tag{5}$$

Условие В. Существует неубывающая функция $N_1(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что для каждого $l>0$ и любого $\delta\in(0,\delta_0]$ при $\|z\|_{2,m}\leqslant l$, $u\in\mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$|\mathcal{J}_i^\delta[z,u]-\mathcal{J}_i^0[z,u]|\leqslant N_1(l)\delta,\quad i=\overline{0,k}. \tag{6}$$

Чтобы сформулировать следующее условие, воспользуемся введённым нами ранее (см., например, [28]) понятием равностепенной квазинильпотентности. Пусть $\mathbf{B}$ — банахово пространство, Ξ — некоторое множество, $\{G(\xi)[\cdot]:\mathbf{B}\to\mathbf{B}\}_{\xi\in\Xi}$ – семейство зависящих от параметра $\xi\in\Xi$ квазинильпотентных ЛОО (квазинильпотентность ЛОО $G(\xi)[\cdot]:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ означает, что $\sqrt[k]{\|\{G(\xi)\}^k\|}\to 0$ при $k\to\infty$). Назовём семейство операторов $\{G(\xi)\}_{\xi\in\Xi}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sup_{\xi\in\Xi}\sqrt[k]{\|\{G(\xi)\}^k\|}\to 0$ при $k\to\infty$.

Условие Г. Семейство $\{A^\delta:L_2^m\to L_2^m\}_{\delta\in[0,\delta_0]}$ равностепенно квазинильпотентно.

При любом $\delta\in[0,\delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t)=A^\delta[z](t)+B^\delta[u](t)+c^\delta(t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_2^m,\quad u\in L_2^s, \tag{7}$$

имеет для каждого $u\in L_2^s$ единственное в классе L_2^m решение $z(t)$, $t\in\Pi$, причём

$$z(t)=S^\delta[B^\delta[u]+c^\delta](t),\quad t\in\Pi,\quad u\in L_2^s, \tag{8}$$

где $S^\delta:L_2^m\to L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана $S^\delta[y]\equiv\sum_{i=0}^\infty (A^\delta)^i[y]$, $y\in L_2^m$. Отвечающее управлению $u\in L_2^s$ и задаваемое формулой (8) решение $z(\cdot)$ уравнения (7) будем обозначать $z_u^\delta(\cdot)$, $\delta\in[0,\delta_0]$. При любом $\delta\in[0,\delta_0]$ имеем набор ограничений

$$\mathcal{G}^\delta[u]=\mathcal{C}^\delta,\quad J_1^\delta[u]\leqslant 0,\quad \ldots,\quad J_k^\delta[u]\leqslant 0,\quad u\in L_2^s, \tag{9}$$

где $\mathcal{G}^\delta[u]\equiv\mathcal{A}^\delta[z_u^\delta]+\mathcal{B}^\delta[u]$, $J_i^\delta[u]\equiv\mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta,u]$ $(i=\overline{1,k})$, и задачу оптимального управления

$$J_0^\delta[u]\to\min,\quad (9),\quad u\in\mathcal{D}, \tag{OC^δ}$$

в которой $J_0^\delta[u]\equiv\mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta,u]$, $u\in L_2^s$. Задачу (OC^0) называем *точной* задачей, а задачи (OC^δ), $\delta\in(0,\delta_0]$, — *приближёнными* задачами оптимального управления. Обозначим множество всех решений задачи (OC^0), которое может быть и пустым, через U^0, а для его элементов будем использовать обозначение u^0.

1.3. МПР И МПР-ОБРАЗУЮЩИЙ ОПЕРАТОР

Для компактности записи введём обозначение $J^\delta[u]\equiv\{J_1^\delta[u],\ \ldots,\ J_k^\delta[u]\}$. Положим

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon}\equiv\{u\in\mathcal{D}\colon\ \|\mathcal{G}^\delta[u]-\mathcal{C}^\delta\|_H\leqslant\epsilon,\ \ J_i^\delta[u]\leqslant\epsilon\ \ (i=\overline{1,k})\},\quad \delta\in[0,\delta_0],\quad \epsilon\geqslant 0,$$

и пусть $\mathcal{D}^0\equiv\mathcal{D}^{0,0}$. Определим обобщённую нижнюю грань β задачи (OC^0) как предел $\beta\equiv\beta_{+0}\equiv\lim_{\epsilon\to+0}\beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon\equiv\inf_{u\in\mathcal{D}^{0,\epsilon}}J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon}\neq\emptyset$, и $\beta_\epsilon\equiv+\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon}=\emptyset$. Вообще говоря, имеет место очевидное неравенство $\beta\leqslant\beta_0$, где $\beta_0\equiv\inf_{u\in\mathcal{D}^0}J_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи (OC^0). Однако в данном случае $\beta=\beta_0$ (см. ниже замечание 1).

Напомним, что последовательность $u^k\in\mathcal{D}$, $k\in\mathbb{N}$, называется *МПР задачи* (OC^0), если $J_0^0[u^k]\to\beta$ при $k\to\infty$, причём $u^k\in\mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел ϵ^k, $k\in\mathbb{N}$. Введём ещё одно основное понятие работы — понятие МПР-образующего оператора (алгоритма) [32] в задаче (OC^0).

Определение 1. Пусть $\delta^k\in(0,\delta_0)$, $k\in\mathbb{N}$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k\in\mathbb{N}$, оператор $R(\cdot,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (5), (6) при $\delta=\delta^k$, элемент $R(\mathsf{f}^{\delta^k},\delta^k)\equiv u^{\delta^k}\in\mathcal{D}$, называется *МПР-образующим в задаче* (OC^0), если последовательность u^{δ^k}, $k\in\mathbb{N}$, есть МПР в этой задаче.

2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача оптимального управления (OC^δ) при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеет форму задачи выпуклого программирования в пространстве L_2^s. Перепишем её в несколько ином виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работ [7, 32], посвящённых регуляризации КУО в задачах выпуклого программирования и выпуклого оптимального управления в гильбертовом пространстве. Для этого выделим в операторе $\mathcal{G}^\delta[.]$ линейную часть — ЛОО $\mathbf{G}^\delta[\cdot] : L_2^s \to H$:

$$\mathcal{G}^\delta[u] \equiv \mathbf{G}^\delta[u] + \mathcal{A}^\delta S^\delta[c^\delta], \quad \mathbf{G}^\delta[u] \equiv \mathcal{A}^\delta[S^\delta B^\delta[u]] + \mathcal{B}^\delta[u], \quad u \in L_2^s, \quad \delta \in [0, \delta_0]. \tag{10}$$

Положим $e^\delta \equiv \mathcal{C}^\delta - \mathcal{A}^\delta S^\delta[c^\delta]$, $\delta \in [0, \delta_0]$. Очевидно, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача оптимального управления (OC^δ) эквивалентна задаче выпуклого программирования в L_2^s (совпадают множества решений и значения этих задач):

$$J_0^\delta[u] \to \min, \quad \mathbf{G}^\delta[u] = e^\delta, \quad J_i^\delta[u] \leqslant 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad u \in \mathcal{D}. \tag{P^δ}$$

Следствием условия А является равномерная по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевость функционалов J_i^δ $(i = \overline{0, k})$ на любом ограниченном множестве пространства L_2^s: существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ для любого $l > 0$

$$|J_i^\delta[u_1] - J_i^\delta[u_2]| \leqslant \mathbf{N}_2(l) \|u_1 - u_2\|_{2,s}, \quad u_1, u_2 \in L_2^s, \quad \|u_1\|_{2,s}, \|u_2\|_{2,s} \leqslant l, \quad i = \overline{0, k}.$$

Условия Б и Г дают такое свойство семейства операторов $\{A^\delta\}_{0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0}$ (см. [9, лемма 1]).

Лемма 1. *Существует число* $\mathcal{K} > 0$ *такое, что* $\|S^\delta - S^0\| \leqslant \mathcal{K} \|A^\delta - A^0\|$, $\delta \in [0, \delta_0]$.

Из условий Б, В и Г простыми выкладками, используя лемму 1, получаем следующую связь входных данных задачи (P^0) с входными данными задач (P^δ) при $\delta \in (0, \delta_0]$.

Лемма 2. *Существует постоянная* Γ, *зависящая лишь от операторов* A^0, B^0, *функционалов* $\mathcal{J}_i^0$ $(i = \overline{0, k})$, *функций* c^0, N_1, *чисел* C, $\mathcal{K}$, δ_0 *и множества* $\mathcal{D}$, *такая, что*

$$\|\mathbf{G}^\delta - \mathbf{G}^0\| \leqslant \Gamma \delta, \quad \|e^\delta - e^0\|_H \leqslant \Gamma \delta, \quad |J_i^\delta[u] - J_i^0[u]| \leqslant \Gamma \delta, \quad u \in \mathcal{D}, \quad i = \overline{0, k}, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \tag{11}$$

2.2. МПР И МПР-ОБРАЗУЮЩИЙ ОПЕРАТОР В ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Имеем $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} = \{u \in \mathcal{D}\colon \ \|\mathbf{G}^\delta[u] - e^\delta\|_H \leqslant \epsilon, \ J_i^\delta[u] \leqslant \epsilon \ (i = \overline{1, k})\}$, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\epsilon \geqslant 0$. Так как обобщённая нижняя грань задачи (P^0) определяется фактически той же самой формулой, что и обобщённая нижняя грань задачи (OC^0), и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней то же обозначение β. Имеем $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \neq \emptyset$; $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Как уже отмечалось, имеет место очевидное неравенство $\beta \leqslant \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи (P^0). Однако специфика задачи (P^0) такова, что $\beta = \beta_0$ (см. ниже замечание 1).

Определение 2. Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty$ элементов множества $\mathcal{D}$, для которой существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, что $u^j \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^j}$ $(j \in \mathbb{N})$ и $J_0^0[u^j] \to \beta = \inf_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ при $j \to \infty$, называется *минимизирующим приближённым решением* задачи (P^0).

Замечание 1. Так как ограниченное выпуклое замкнутое множество $\mathcal{D}$ в гильбертовом пространстве слабо компактно, а непрерывный выпуклый функционал на таком множестве слабо полунепрерывен снизу, то всякая слабая предельная точка любого МПР в задаче (P^0)

является её решением. Поэтому $\beta=\beta_0$ для задачи (P^0), а следовательно, и для эквивалетной задачи (OC^0). В случае сильной выпуклости непрерывного функционала J_0^0 каждое МПР как в задаче (OC^0), так и в задаче (P^0) сильно сходится к единственному в этом случае решению задачи (см., например, [6, гл. 8, § 2, теорема 10]).

Положим $J^\delta[u]\equiv\{J_1^\delta[u],\ldots,J_k^\delta[u]\}$. Введём для задачи (P^0) согласованное с понятием МПР понятие регуляризирующего оператора [32]. Набором исходных данных задачи (P^δ) является набор $\hat{\mathrm{f}}^\delta\equiv\{J_0^\delta,J^\delta,\mathbf{G}^\delta,e^\delta\}$.

Определение 3. Зависящий от $\delta\in(0,\delta_0)$ оператор $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{J_0^\delta,J^\delta,\mathbf{G}^\delta,e^\delta\}$, удовлетворяющих условиям (11), элемент $R(J_0^\delta,J^\delta,\mathbf{G}^\delta,e^\delta,\delta)=u^\delta\in\mathcal{D}$, называется *регуляризирующим* в задаче (P^0), если $u^\delta\in\mathcal{D}^{0,\epsilon(\delta)}$ при $\delta\in(0,\delta_0)$, $J_0^0[u^\delta]\to\beta$, $\epsilon(\delta)\to0$ при $\delta\to0$.

Введём понятие МПР-образующего оператора в задаче (P^0) как задаче выпуклого программирования (согласованное с одноименным понятием в задаче (OC^0)).

Определение 4. Пусть $\delta^k\in(0,\delta_0)$, $k\in\mathbb{N}$, — сходящаяся к нулю последовательность. Зависящий от δ^k, $k\in\mathbb{N}$, оператор $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{J_0^{\delta^k},J^{\delta^k},\mathbf{G}^{\delta^k},e^{\delta^k}\}$, удовлетворяющих условиям (11) при $\delta=\delta^k$, элемент $R(J_0^{\delta^k},J^{\delta^k},\mathbf{G}^{\delta^k},e^{\delta^k},\delta^k)=u^{\delta^k}\in\mathcal{D}$, называется *МПР-образующим* в задаче (P^0), если последовательность u^{δ^k}, $k\in\mathbb{N}$, есть МПР в этой задаче.

Наша задача (P^δ) является частным случаем задачи (P^δ) из [32]: набор исходных данных $\{J_0^\delta,J^\delta,\mathbf{G}^\delta,e^\delta\}$ данной работы соответствует набору исходных данных $\{f^\delta,g^\delta,A^\delta,h^\delta\}$ в [32], т.е. к нашей задаче (P^δ) могут быть применены следующие результаты работы [32]: 1) теорема сходимости метода двойственной регуляризации с дополнительным параметром регуляризации в функционале цели [32, теорема 2]; 2) регуляризованный принцип Лагранжа для задачи выпуклого программирования с выпуклым (вообще говоря, не сильно выпуклым) целевым функционалом [32, теорема 3]. Естественно, мы можем переформулировать указанные теоремы [32] в терминах нашей задачи (P^δ) и эквивалентной ей задачи (OC^δ); так как исходные данные этих наших задач связаны между собой простыми соотношениями (10) и $e^\delta\equiv\mathcal{C}^\delta-\mathcal{A}^\delta S^\delta[c^\delta]$, $\delta\in[0,\delta_0]$, сделаем это сразу в терминах задачи оптимального управления (OC^δ).

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СИСТЕМАМИ

Чтобы переформулировать указанные теоремы [32] в терминах нашей задачи (OC^δ), введём необходимые конструкции. Прежде всего запишем регуляризованные задачи (OC^δ)

$$J_0^\delta[u]+\varepsilon\|u\|_{2,s}^2\to\min,\quad \mathcal{G}^\delta[u]=\mathcal{C}^\delta,\quad J_i^\delta[u]\leqslant0,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D},\qquad (OC_\varepsilon^\delta)$$

с (дополнительным) параметром регуляризации ε в целевом функционале. Очевидно, в каждой из задач (OC_ε^δ) с $\varepsilon>0$ функционал качества $J_0^\delta[\cdot]+\varepsilon\|\cdot\|_{2,s}^2$ является непрерывным и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$ с постоянной сильной выпуклости $\varepsilon>0$. При некоторых конкретных $\varepsilon>0$, $\delta>0$ задача (OC_ε^δ) может не иметь решения из-за возможной пустоты множества допустимых элементов. В случае же непустоты этого множества решение задачи (OC_ε^δ) существует и единственно, будем обозначать его u_ε^δ. Примем при этом обозначение $u_0^0\equiv u^0$, напомнив, что через u^0 мы обозначаем элементы множества U^0 всех решений задачи (OC^0), которое может быть и пустым.

Введём регулярную функцию Лагранжа задачи (OC_ε^δ)

$$L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)\equiv J_0^\delta[u]+\varepsilon\|u\|_{2,s}^2+\langle\lambda,\mathcal{G}^\delta[u]-\mathcal{C}^\delta\rangle_H+\langle\mu,J^\delta[u]\rangle_k,\quad L^{0,0}(u,\lambda,\mu)\equiv L^0(u,\lambda,\mu),$$

где $u\in L_2^s$, $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}_+^k$, $J^\delta[u]\equiv\{J_1^\delta[u],\ldots,J_k^\delta[u]\}$. При любых $\varepsilon>0$, $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}_+^k$ и каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ функция $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$ сильно выпукла с постоянной сильной выпуклости ε и непрерывна как функция переменной u в L_2^s, а следовательно, достигает минимума при любых $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}_+^k$ на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве $\mathcal{D}$, причём в единственной точке, которую будем обозначать через $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ (см., например, [6, гл. 8, § 2, теорема 10]).

Двойственной к задаче оптимального управления (OC_ε^δ) является задача

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu)\equiv\min_{u\in\mathcal{D}}L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)\to\sup,\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}_+^k.$$

Соответственно задача

$$V^0(\lambda,\mu)\equiv V^{0,0}(\lambda,\mu)\equiv\min_{u\in\mathcal{D}}L^0(u,\lambda,\mu)\to\sup,\quad \{\lambda,\mu\}\in H\times\mathbb{R}_+^k,$$

является двойственной к задаче (OC^0). Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha,\varepsilon},\mu^{\delta,\alpha,\varepsilon})$ единственную точку, дающую на $H\times\mathbb{R}_+^k$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha,\varepsilon}(\lambda,\mu)\equiv V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu)-\alpha\|\lambda\|_H^2-\alpha\|\mu\|_k^2,\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}_+^k,\quad \alpha>0,\quad \varepsilon>0,\quad \delta\in(0,\delta_0].$$

Переформулируем теоремы 2 и 3 из [32] в терминах нашей задачи (OC^δ).

3.1. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть $\alpha(\cdot):(0,\delta_0]\to\mathbb{R}$ — некоторая положительнозначная функция такая, что

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)}\to 0,\quad \alpha(\delta)\to 0\quad \text{при }\ \delta\to 0. \tag{12}$$

Теорему 2 из [32] (теорему сходимости метода двойственной регуляризации с дополнительным параметром регуляризации ε в функционале цели) переформулируем следующим образом.

Теорема 1 (регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления). *Пусть выполняется условие согласования (12), $\delta^j\in(0,\delta_0)$, ε^j, $j\in\mathbb{N}$, — последовательности сходящихся к нулю положительных чисел. Тогда оператор $R(\cdot,\delta^j)$, ставящий в соответствие набору исходных данных f^{δ^j}, удовлетворяющих оценкам (5), (6) условий Б, В при $\delta=\delta^j$, управление $R(\mathsf{f}^{\delta^j},\delta^j)\equiv u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j}]$, является МПР-образующим в задаче оптимального управления (OC^0) в смысле определения 1.*

3.2. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теорема 3 из [32] (регуляризованный принцип Лагранжа для задачи выпуклого программирования с выпуклым (вообще говоря, не сильно выпуклым) целевым функционалом; подчеркнём, что его формулировка благодаря секвенциальному подходу учитывает одновременно как регулярный, так и нерегулярный случаи задачи) переформулируется так.

Теорема 2 (регуляризованный принцип Лагранжа для задачи (OC^0)). *Пусть $\{\varepsilon^j\}_{j=1}^\infty$ — произвольная фиксированная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. МПР в задаче (OC^0) существует тогда и только тогда, когда существуют стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ и последовательность пар векторов двойственных переменных $\{\lambda^j,\mu^j\}_{j=1}^\infty\subset H\times\mathbb{R}_+^k$ такие, что*

$$\delta^j\{\|\lambda^j\|_H+\|\mu^j\|_k\}\to 0\quad \textit{при }\ j\to\infty \tag{13}$$

и выполняются включения

$$u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]\in\mathcal{D}^{\delta^j,\gamma^j},\quad j\in\mathbb{N},\tag{14}$$

а также предельное соотношение

$$\big\langle\lambda^j,\mathcal{G}^{\delta^j}\big[u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]\big]-\mathcal{C}^{\delta^j}\big\rangle_H+\big\langle\mu^j,J^{\delta^j}\big[u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]\big]\big\rangle_k\to 0\quad \text{при } j\to\infty.\tag{15}$$

Если указанные последовательности $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\lambda^j,\mu^j\}_{j=1}^\infty$ существуют, то последовательность $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j\in\mathbb{N}$, является МПР задачи (OC^0), т.е. помимо (14) выполняется и предельное соотношение (здесь $u^0\in U^0$)

$$J_0^0\big[u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]\big]\to J_0^0[u^0]\quad \text{при } j\to\infty.$$

Как следствие соотношений (13)–(15) выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^j,\mu^j)\to\sup_{\{\lambda,\mu\}\in H\times\mathbb{R}^k_+}V^0(\lambda,\mu)=J_0^0[u^0]\quad \text{при } j\to\infty.$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\cdot,\delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathsf{f}^{\delta^j},\delta^j)=u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$ для каждого набора исходных данных f^{δ^j}, удовлетворяющих оценкам (5), (6) условий Б, В при $\delta=\delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 1, причём каждая слабая предельная точка последовательности $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j\in\mathbb{N}$, является решением задачи (OC^0).

В качестве конкретной последовательности $\{\lambda^j,\mu^j\}$, $j\in\mathbb{N}$, можно взять последовательность $\{\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j}\}$, $j\in\mathbb{N}$, о которой идет речь в теореме 1.)*

Замечание 2. Можно утверждать, что в случае сильной выпуклости функционала $J_0^0[u]$, $u\in\mathcal{D}$, генерируемая теоремой 2 последовательность $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j\in\mathbb{N}$, сильно сходится к единственному в этом случае решению задачи (OC^0) (см. замечание 1), при этом можно считать $\varepsilon^j=0$, $j\in\mathbb{N}$ (см., например, теоремы 4.1, 4.2 в [7]).

3.3. О МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближённого решения задачи (OC^0), а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимального управления, является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$, $\{\lambda,\mu\}\in H\times\mathbb{R}^k_+$, задачи ($OC^\delta_\varepsilon$)

$$L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)\to\min,\quad u\in\mathcal{D},\tag{16}$$

решение которой мы обозначили через $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$. От “качества” решения этой “простейшей” задачи напрямую зависит и “качество” решения исходной задачи (OC^0) на основе регуляризованных КУО. Для упрощения изложения предположим, что при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ функционалы $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,k})$ дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждых $\delta\in(0,\delta_0]$, $\varepsilon>0$ дифференцируемы по Фреше функционалы $J_i^\delta[u]:L_2^s\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,k})$ и функционал Лагранжа $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$. В этом случае решение $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ выпуклой задачи на минимум (16) удовлетворяет критерию минимума

$$L^{\delta,\varepsilon\,\prime}_{\ u}\big(u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu],\lambda,\mu\big)\big[u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]\big]\geqslant 0,\quad u\in\mathcal{D},\tag{17}$$

*) Заметим, что в силу ограниченности $\mathcal{D}$ условие (14) со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]\in\mathcal{D}^{0,\widetilde{\gamma}^j}$, $j\in\mathbb{N}$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{\widetilde{\gamma}^j\}_{j=1}^\infty$.

где ${L^{\delta,\varepsilon}}'_u(\bar u,\lambda,\mu)[\cdot]$ — производная Фреше функционала $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$ по переменной u в точке $\bar u\in L_2^s$ при фиксированных λ, μ. Пусть $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu](\cdot)\in L_2^s$ — функция Рисса линейного непрерывного функционала ${L^{\delta,\varepsilon}}'_u(\bar u,\lambda,\mu)[\cdot]\in(L_2^s)^*$. Критерий (17) можно записать в виде

$$\bigl\langle \Psi^{\delta,\varepsilon}[u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu],\lambda,\mu],u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]\bigr\rangle_{2,s}\geqslant 0,\quad u\in\mathcal{D}. \tag{18}$$

Найдём представление функции $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu](t)$, $t\in\Pi$, в терминах приближения (OC^δ), $\delta>0$, к точной задаче оптимального управления (OC^0), а точнее — в терминах уравнения (7), операторов $\mathcal{A}^\delta$, $\mathcal{B}^\delta$ и функционалов $\mathcal{J}_i^\delta$, $i=\overline{0,k}$, $\delta>0$.

Пусть $\Xi_i^\delta[\bar u](\cdot)\in L_2^s$, $\Omega_i^\delta[\bar u](\cdot)\in L_2^m$ — функции Рисса функционалов ${\mathcal{J}_i^\delta}'_u(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u)\in (L_2^s)^*$, ${\mathcal{J}_i^\delta}'_z(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u)\in(L_2^m)^*$ соответственно $(i=\overline{0,k})$. По аналогии с [9, разд. 3.2] получаем

$$\begin{gathered}\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu](t)=\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t)+2\varepsilon\bar u(t),\quad t\in\Pi,\\ \Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t)\equiv-(B^\delta)^*\bigl[\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\bigr](t)+\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t),\quad t\in\Pi,\end{gathered} \tag{19}$$

где $\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ — единственное в L_2^m решение уравнения

$$\psi(t)-(A^\delta)^*[\psi](t)=-\Omega_0^\delta[\bar u](t)-\sum_{i=1}^k\mu_i\Omega_i^\delta[\bar u](t)-(\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda](t),\quad t\in\Pi, \tag{20}$$

$\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ задаётся формулой

$$\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\equiv\Xi_0^\delta[\bar u]+\sum_{i=1}^k\mu_i\Xi_i^\delta[\bar u]+(\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda],\quad \bar u\in L_2^s. \tag{21}$$

3.4. СЛУЧАЙ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Рассмотрим задачу оптимального управления (OC^0) в ситуации, когда допустимые управления принимают значения из некоторого ограниченного замкнутого и выпуклого множества $U\subset\mathbb{R}^s$ (т.е. $\mathcal{D}\equiv\{u(\cdot)\in L_\infty^s: u(t)\in U,\ t\in\Pi\}$). В этом случае получаем из (18) критерий минимума функционала Лагранжа в виде следующего линеаризованного поточечного принципа максимума, который доказывается точно так же как лемма 5 в статье [9].

Лемма 3. *Функция $\bar u(\cdot)\in\mathcal{D}$ является решением задачи (16) тогда и только тогда, когда*

$$\langle\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu](t),\bar u(t)\rangle_s=\max_{w\in U}\langle\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu](t),w\rangle_s\quad \text{при почти всех}\quad t\in\Pi, \tag{22}$$

где $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu]$ задаётся формулой (19), в которой $\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ — решение сопряжённого уравнения (20), а $\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ определяется формулой (21).

Обозначим через $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости) принципу максимума леммы 3. Очевидно, что в нашем случае, благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ состоит из одного элемента, обозначим его через $u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$, и справедливо равенство $u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]=u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$. Поэтому непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 3 является регуляризованный ПМП для задачи (OC^0).

Теорема 3 (регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления (OC^0)). *При сформулированных дополнительных условиях дифференцируемости все утверждения теоремы 2 останутся справедливыми, если в них $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$ заменить на $u_m^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$.*

4. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ, СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Как отмечено во введении, одной из важных особенностей получаемых в работе регуляризованных КУО является то, что "в пределе" они приводят к своим классическим аналогам. Покажем это. Воспользуемся методом вомущений (см., например, [1, п. 3.3.2]), который позволяет установить жёсткую связь регуляризованных КУО с их классическими аналогами и обосновать новый секвенциальный способ получения КУО в выпуклых задачах на условный экстремум. Этот новый способ доказательства КУО, как необходимых условий оптимальности (доказательство начинается с предположения существования оптимального элемента), опирается на полученные ранее (см., например, [7, 8]) регуляризованные КУО в параметрических выпуклых задачах с сильно выпуклыми целевыми функционалами (до сих пор в настоящей работе рассматривались задачи без параметров). Для перехода к пределу в полученном регуляризованном ПЛ (см. теорему 2) с применением метода возмущений рассмотрим вместо задачи (OC^0) параметрическую (зависящую от параметров в ограничениях) задачу

$$J_0^0[u]\to\min,\quad \mathcal{G}^0[u]=\mathcal{C}^0+p,\quad J_i^0[u]\leqslant r_i,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D}, \qquad (OC^0_{p,r})$$

где $p\in H$, $r\in\mathbb{R}^k$ — параметры. Задача (OC^0) формально включается в задачу $(OC^0_{p,r})$ при $p=0$, $r\equiv\{r_1,\dots,r_k\}=0$; $(OC^0)=(OC^0_{0,0})$. Соответственно возмущённая параметрическая задача будет иметь вид

$$J_0^\delta[u]\to\min,\quad \mathcal{G}^\delta[u]=\mathcal{C}^\delta+p,\quad J_i^\delta[u]\leqslant r_i,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D}. \qquad (OC^\delta_{p,r})$$

Множество всех решений задачи $(OC^0_{p,r})$ обозначим через $U^0_{p,r}$. Введём также обозначения

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon}_{p,r}\equiv\bigl\{u\in\mathcal{D}: \|\mathcal{G}^\delta[u]-\mathcal{C}^\delta-p\|_H\leqslant\epsilon,\ J_i^\delta[u]\leqslant\epsilon+r_i,\ i=\overline{1,k}\bigr\},\quad \mathcal{D}^0_{p,r}\equiv\mathcal{D}^{0,0}_{p,r}.$$

Определим зависящее от параметров p, r значение задачи $(OC^0_{p,r})$ как величину $\beta(p,r)\equiv\equiv\beta_{+0}(p,r)\equiv\lim_{\epsilon\to+0}\beta_\epsilon(p,r)$, $\beta_\epsilon(p,r)\equiv\inf_{u\in\mathcal{D}^{0,\epsilon}_{p,r}}J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon}_{p,r}\neq\emptyset$; $\beta_\epsilon(p,r)\equiv+\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon}_{p,r}=\emptyset$. Как уже отмечалось, имеет место очевидное неравенство $\beta(p,r)\leqslant\beta_0(p,r)$, где $\beta_0(p,r)\equiv\equiv\inf_{u\in\mathcal{D}^0_{p,r}}J_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи $(OC^0_{p,r})$. Однако специфика задачи $(OC^0_{p,r})$ (задача является выпуклой с выпуклым функционалом цели и ограниченным $\mathcal{D}$, см. замечание 1) такова, что $\beta(p,r)=\beta_0(p,r)$, причём величина $\beta_0(p,r)$ достигается на любом оптимальном элементе $u^0_{p,r}\in U^0_{p,r}$, если $U^0_{p,r}$ не пусто.

Справедливы следующие две важные для применения метода возмущений леммы. Доказательство первой из них можно найти в работе [33, лемма 1.2], второй — в [34, теорема 4.3]. Перед их формулировкой напомним о стандартных обозначениях $\operatorname{dom}f\equiv\{z\in H: f(z)<+\infty\}$ и $\operatorname{epi}f\equiv\{(z,\alpha)\in H\times\mathbb{R}: f(z)\leqslant\alpha\}$ для соответственно эффективного множества и надграфика функции $f: H\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Лемма 4. *Функция значений $\beta: H\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ является полунепрерывной снизу и выпуклой.*

Лемма 5 (плотность субдифференцируемости). *Субдифференциал собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции $f: H\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, где H — гильбертово пространство, не пуст в точках плотного в $\operatorname{dom}f$ множества.*

Ниже используется обозначение $\partial^\infty f(z)$ для сингулярного (асимптотического) субдифференциала выпуклой полунепрерывной снизу функции $f: H\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ в точке z, H — гильбертово пространство (см., например, [35]), определяемого формулой $\partial^\infty f(z)\equiv\{\lambda\in H: \{\lambda,0\}\in N_{\operatorname{epi}f}(z,f(z))\}$, где $N_{\operatorname{epi}f}(z,f(z))$ — конус нормалей (в смысле выпуклого анализа) к $\operatorname{epi} f$ в точке $\{z, f(z)\}$, при этом, как известно, $\partial f(z) \equiv \{\lambda \in H : \{\lambda, -1\} \in N_{\operatorname{epi} f}(z, f(z))\}$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа.

Рассмотрим произвольную точку $\{p, r\} \in \operatorname{dom} \beta$ (например, $\{p, r\}$ может быть $\{0, 0\}$). В этой точке реализуется хотя бы один из следующих трёх случаев:

1) $\partial\beta(p, r) \neq \emptyset$;
2) $\partial\beta(p, r) = \emptyset$, $\partial^\infty\beta(p, r) \neq \{0\}$;
3) $\partial\beta(p, r) = \emptyset$, $\partial^\infty\beta(p, r) = \{0\}$.

Покажем, что в случаях 1) и 2) предельный переход в соотношениях регуляризованного ПЛ теоремы 2 приводит к классическому ПЛ в рассматриваемой задаче $(OC^0_{p,r})$. Случай 3) соответствует ситуации, когда классический ПЛ в задаче $(OC^0_{p,r})$ не выполняется (см. теорему 1.1 в [33]).

Заметим, прежде всего, что функционал $J^0_0[u]$, $u \in \mathcal{D}$, является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$ (это следует из [34, теорема 4.2], так как он определён и непрерывен в точках L^s_2). Зафиксируем произвольное управление $u^0_{p,r} \in U^0_{p,r}$, где $U^0_{p,r}$ — множество всех решений задачи $(OC^0_{p,r})$, которое считаем непустым. Рассмотрим вспомогательную задачу $((p', r') \in H \times \mathbb{R}^k)$

$$J^0_0[u] + \|u - u^0_{p,r}\|^2 \to \min, \quad \mathcal{G}^0[u] = \mathcal{C}^0 + p', \quad J^0_i[u] \leqslant r'_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad u \in \mathcal{D}, \qquad (\widetilde{OC}^0_{p',r'})$$

являющуюся задачей оптимального управления (и одновременно выпуклого программирования) с сильно выпуклым и субдифференцируемым целевым функционалом $J^0_0[u] + \|u - u^0_{p,r}\|^2$, $u \in \mathcal{D}$, с функцией значений $\widetilde{\beta}$, для которой имеют место те же свойства, что и для β. Решения этой задачи (единственные) $\widetilde{u}^0_{p',r'}$ существуют для любых $\{p', r'\} \in \operatorname{dom} \widetilde{\beta} = \operatorname{dom} \beta$, при этом, очевидно, $\widetilde{u}^0_{p,r} = u^0_{p,r}$. Её особенностью является то, что при всех $\{p', r'\} \in \operatorname{dom} \beta = \operatorname{dom} \widetilde{\beta}$ имеет место неравенство $\widetilde{\beta}(p', r') \geqslant \beta(p', r')$, а в точке $\{p, r\}$ — равенство $\widetilde{\beta}(p, r) = \beta(p, r)$. При этом $\operatorname{epi} \widetilde{\beta} \subset \operatorname{epi} \beta$ и, стало быть, любая нормаль (в смысле выпуклого анализа) к надграфику $\operatorname{epi} \beta$ в точке $\{p, r, \beta(p, r)\}$ будет одновременно нормалью (в том же смысле) в той же точке и к надграфику $\operatorname{epi} \widetilde{\beta}$.

Рассмотрим сначала случай 1), предположив, что $\partial\beta(p, r) \neq \emptyset$. По этой причине в задаче $(\widetilde{OC}^0_{p,r})$ с сильно выпуклым целевым функционалом имеет место $\partial\widetilde{\beta}(p, r) \neq \emptyset$, причём её единственным оптимальным элементом является $u^0_{p,r}$. В этой ситуации к задаче $(\widetilde{OC}^0_{p,r})$ может быть применён регуляризованный ПЛ теорем 4.1, 4.2 из [7], а также теоремы 2.4 в [8] (теорема 2 данной работы, а также теорема 2 из [10] сформулированы для непараметрических задач). Пусть

$$\widetilde{L}^\delta_{p',r'}(u, \lambda, \mu) \equiv J^\delta_0[u] + \|u - u^0_{p,r}\|^2_{2,s} + \langle \lambda, \mathcal{G}^\delta[u] - \mathcal{C}^\delta - p' \rangle_H + \langle \mu, J^\delta[u] - r' \rangle_k$$

— функционал Лагранжа задачи

$$J^\delta_0[u] + \|u - u^0_{p,r}\|^2 \to \min, \quad \mathcal{G}^\delta[u] = \mathcal{C}^\delta + p', \quad J^\delta_i[u] \leqslant r'_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad u \in \mathcal{D}, \qquad (\widetilde{OC}^\delta_{p',r'})$$

где $u \in L^s_2$, $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^k_+$, $p' \in H$, $r' \in \mathbb{R}^k$, $\delta \in [0, \delta_0]$. При любых $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^k_+$ и каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ функция $\widetilde{L}^\delta_{p',r'}(u, \lambda, \mu)$ сильно выпукла с постоянной сильной выпуклости, равной единице, и непрерывна как функция переменной u в L^s_2, а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L^s_2 множестве $\mathcal{D}$, причём в единственной точке (см., например, [6, гл. 8, § 2, теорема 10]), которую обозначим через $\widetilde{u}^\delta[\lambda, \mu]$.

Двойственной к задаче выпуклого программирования $(\widetilde{OC}^\delta_{p',r'})$ является задача

$$\widetilde{V}^\delta_{p',r'}(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} \widetilde{L}^\delta_{p',r'}(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}^k_+.$$

Обозначим через $\{\lambda^{\delta,\alpha}_{p',r'},\mu^{\delta,\alpha}_{p',r'}\}$ единственную точку, дающую на $H\times\mathbb{R}^k_+$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$\widetilde{R}^{\delta,\alpha}_{p',r'}(\lambda,\mu)\equiv\widetilde{V}^{\delta}_{p',r'}(\lambda,\mu)-\alpha\|\lambda\|^2_H-\alpha\|\mu\|^2_k,\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}^k_+,\quad \alpha\in\mathbb{R}_+,\quad \delta\in(0,\delta_0].$$

Итак, в случае разрешимости двойственной к $(\widetilde{OC}^{0}_{p',r'})$ задачи, т.е. в случае $\partial\widetilde{\beta}(p',r')\neq\emptyset$, в соответствии с утверждениями указанных теорем из-за сильной сходимости соответствующих МПР $\widetilde{u}^{\delta^j}\big[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}_{p',r'},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}_{p',r'}\big]$, $j\in\mathbb{N}$, $\big(\widetilde{u}^{\delta}[\lambda,\mu]\equiv\operatorname{argmin}\{\widetilde{L}^{\delta}_{p',r'}(u,\lambda,\mu),\,u\in\mathcal{D}\}\big)$ к оптимальному элементу $\widetilde{u}^0_{p',r'}$ задачи $(\widetilde{OC}^{0}_{p',r'})$, а последовательности двойственных переменных — к нормальному решению двойственной задачи

$$\big\{\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}_{p',r'},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}_{p',r'}\big\}\to\{\lambda^0_{p',r'},\mu^0_{p',r'}\},\quad j\to\infty, \tag{23}$$

получаем в пределе при $j\to\infty$ неравенство

$$\widetilde{L}^0_{p',r'}(\widetilde{u}^0_{p',r'},\lambda^0_{p',r'},\mu^0_{p',r'})\leqslant\widetilde{L}^0_{p',r'}(u,\lambda^0_{p',r'},\mu^0_{p',r'}),\quad u\in\mathcal{D}, \tag{24}$$

и условие дополняющей нежёсткости

$$\big\langle\mu^0_{p',r'},J^0[\widetilde{u}^0_{p',r'}]\big\rangle_k=0. \tag{25}$$

Таким образом, при $\{p',r'\}=\{p,r\}$, $\widetilde{u}^0_{p,r}=u^0_{p,r}$ получаем следующие соотношения классического регулярного ПЛ в задаче $(P^0_{p,r})$:

$$L^0_{p,r}(u^0_{p,r},\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r})\leqslant L^0_{p,r}(u,\lambda^0_{p,r},\mu^0_{p,r}),\quad u\in\mathcal{D};\quad \big\langle\mu^0_{p,r},J^0[u^0_{p,r}]\big\rangle_k=0.$$

Одновременно в каждой задаче $(\widetilde{P}^0_{p',r'})$ с $\partial\widetilde{\beta}(p',r')\neq\emptyset$ можно без ограничения общности считать последовательность двойственных переменных $\big\{\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}_{p',r'},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}_{p',r'}\big\}$, $j\in\mathbb{N}$, такой, что в предельном соотношении (23) элемент $\big\{\lambda^0_{p',r'},\mu^0_{p',r'}\big\}$ равен (см. замечание 2.4 и теорему 2.4 в [8]) любой точке, доставляющей максимальное значение в двойственной задаче $\widetilde{V}^{\delta}_{p',r'}(\lambda,\mu)\to\sup$, $\{\lambda,\mu\}\in H\times\mathbb{R}^j_+$. Другими словами, так как $-\partial\widetilde{\beta}(p',r')$ совпадает с множеством всех точек максимума этой двойственной задачи, то в предельном соотношении (23) элемент $\big\{\lambda^0_{p',r'},\mu^0_{p',r'}\big\}$ можно считать равным любому фиксированному наперёд выбранному элементу субдифференциала $\partial\widetilde{\beta}(p',r')$, взятому с обратным знаком. Используем это свойство предельного соотношения (23) при анализе случая 2).

Итак, рассматриваем случай 2), когда $\partial\beta(p,r)=\emptyset$, но $\partial^\infty\beta(p,r)\neq\{0\}$. Тогда в соответствии со сказанным выше можем также утверждать, что $\partial^\infty\widetilde{\beta}(p,r)\neq\{0\}$. В этом случае для перехода к пределу в соотношениях теорем 4.1, 4.2 из [7] поступаем несколько иначе. Воспользуемся двумя важными фактами, связанными со свойствами субдифференцируемости выпуклой полунепрерывной снизу функции значений $\widetilde{\beta}$. Первый из них заключается в том, что каждая такая функция в гильбертовом пространстве является субдифференцируемой на плотном подмножестве её эффективного множества (см. лемму 5). Второй же связан с известным представлением для асимптотического субдифференциала выпуклого полунепрерывного снизу функционала (см., например, [35, утверждение 4C2]), каковым и является функция значений $\widetilde{\beta}$ (см. лемму 4):

$$\partial^\infty\widetilde{\beta}(p,r)=w-\limsup_{\{p',r'\}\xrightarrow{\widetilde{\beta}}\{p,r\},\ t\downarrow 0}t\partial\widetilde{\beta}(p',r')\equiv\Big\{w-\lim_{j\to\infty}t_j\zeta_j\colon t_j\downarrow 0,\ \zeta_j\in\partial\widetilde{\beta}(p^j,r^j),\ \{p^j,r^j\}\xrightarrow{\widetilde{\beta}}\{p,r\}\Big\},$$

где символ $\{p',r'\}\xrightarrow{\widetilde{\beta}}\{p,r\}$ означает, что $\big\{\{p',r'\},\widetilde{\beta}(p',r')\big\}\to\big\{\{p,r\},\widetilde{\beta}(p,r)\big\}$, символ $t\downarrow 0$ означает сходимость к нулю справа, а символ $w-\lim_{j\to\infty}$ — слабый предельный переход.

Умножим неравенство (24) на $s>0$:

$$\widetilde{L}^0_{p',r'}(u^0_{p',r'}, s, s\lambda^0_{p',r'}, s\mu^0_{p',r'}) \leqslant \widetilde{L}^0_{p',r'}(u, s, s\lambda^0_{p',r'}, s\mu^0_{p',r'}),$$

$$\widetilde{L}^0_{p',r'}(u,s,\lambda,\mu) \equiv sJ^0_0[u] + \|u-u^0_{p,r}\|^2_{2,s} + \langle \lambda, \mathcal{G}^0[u]-\mathcal{C}^0-p'\rangle_H + \langle \mu, J^0[u]-r'\rangle_k. \qquad (26)$$

Для любой слабой предельной точки вида

$$\{\tilde{\lambda}_{p,r}, \tilde{\mu}_{p,r}\} = w - \lim_{j\to\infty,\ \{p',r'\}\xrightarrow{\widetilde{\beta}}\{p,r\},\ s_j\downarrow 0} s_j\{\lambda^0_{p^j,r^j}, \mu^0_{p^j,r^j}\}$$

с $\{\lambda^0_{p^j,r^j}, \mu^0_{p^j,r^j}\} \in (-\partial\widetilde{\beta}(p^j,r^j)) \neq \emptyset$ можем записать после очевидного предельного перехода в (26) при $\{p',r'\}=\{p^j,r^j\}$, $\{\lambda^0_{p',r'}, \mu^0_{p',r'}\} = \{\lambda^0_{p^j,r^j}, \mu^0_{p^j,r^j}\}$, $s=s_j\to 0$, $j\to\infty$, неравенство

$$L^0_{p,r}(u^0_{p,r}, 0, \tilde{\lambda}_{p,r}, \tilde{\mu}_{p,r}) \leqslant L^0_{p,r}(u, 0, \tilde{\lambda}_{p,r}, \tilde{\mu}_{p,r}). \qquad (27)$$

Заметим, что при этом предельном переходе применялось предельное соотношение $\widetilde{u}^0_{p^j,r^j} \to u^0_{p,r}$, $j\to\infty$, которое является следствием слабой сходимости $\widetilde{u}^0_{p^j,r^j}$ к $u^0_{p,r}$, числовой сходимости $\widetilde{\beta}(p^j,r^j) = J^0_0[\widetilde{u}^0_{p^j,r^j}] + \|\widetilde{u}^0_{p^j,r^j} - u^0_{p,r}\|^2_{2,s}$ к $\widetilde{\beta}(p,r) = J^0_0(u^0_{p,r})$ при $j\to\infty$, субдифференцируемости в точках $\mathcal{D}$ и сильной выпуклости функционала $J^0_0[\cdot] + \|\cdot - u^0_{p,r}\|^2$. Одновременно в силу условия дополняющей нежёсткости $\mu^0_{p^j,r^j,i}(J^0_i(\widetilde{u}^0_{p^j,r^j}) - r^j_i) = 0$, $i=\overline{1,k}$, (см. (25)) в результате предельного перехода в нём при $j\to\infty$ и уже применённого при получении (27) предельного соотношения $\widetilde{u}^0_{p^j,r^j} \to u^0_{p,r}$, $j\to\infty$ имеем $\tilde{\mu}_{p,r,i}(J^0_i(u^0_{p,r}) - r'_i) = 0$, $i=\overline{1,k}$, что в совокупности с (27) и означает выполнимость нерегулярного невырожденного принципа Лагранжа. При этом мы аппроксимировали решение $u^0_{p,r}$ задачи $(OC^0_{p,r})$ точками $\widetilde{u}^0_{p^j,r^j}$, доставляющими минимальное значение функциям Лагранжа $\widetilde{L}^0_{p^j,r^j}(u, \lambda^0_{p^j,r^j}, \mu^0_{p^j,r^j})$, $u\in\mathcal{D}$, и учли равенство нулю величины $\|u-u^0_{p,r}\|^2$ при $u=u^0_{p,r}$. Таким образом, при $\{p',r'\}=\{p,r\}$, $\widetilde{u}^0_{p,r} = u^0_{p,r}$ получаем соотношения классического нерегулярного ПЛ в задаче $(OC^0_{p,r})$.

И, наконец, пусть реализуется случай 3), когда $\partial\beta(p,r)=\emptyset$, $\partial^\infty\beta(p,r)=\{0\}$. Тогда классический ПЛ в задаче $(OC^0_{p,r})$ не выполняется (подробнее см. в [33, теорема 1.1], соответствующие примеры см. в [30]).

5. ПРИМЕР РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТИПА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению второго рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью функциональных уравнений вольтеррова типа, можно найти, например, в [26] (см. также обзор в [28]). Из огромного множества разных подобных начально-краевых задач мы для иллюстрации изложенной выше теории выбрали начально-краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения типа уравнения переноса. Выпишем основные конструкции, которые участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция, сопряжённое уравнение и др.). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО — конкретные реализации теорем 1, 2, 3 — уже будет не сложно.

Пусть $n=3$, $\Pi=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$. Рассмотрим на Π следующую краевую задачу для линейного интегро-дифференциального уравнения (краевая задача (28) подобна смешанной задаче для простейшего линейного нестационарного интегро-дифференциального уравнения переноса, см., например, [36–38]):

$$\begin{gathered}
\partial x/\partial t^1+t^3\partial x/\partial t^2=\alpha(t)x(t)+\beta(t)\int\limits_{-1}^{1}Y(\zeta;t)x(t^1,t^2,\zeta)\,d\zeta+\gamma(t)u(t),\quad t\in\Pi,\\
x(0,t^2,t^3)=\varphi(t^2,t^3),\quad 0\leqslant t^2\leqslant 1,\quad -1\leqslant t^3\leqslant 1,\\
x(t^1,0,t^3)=\psi_1(t^1,t^3),\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1,\quad 0\leqslant t^3\leqslant 1,\\
x(t^1,1,t^3)=\psi_2(t^1,t^3),\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1,\quad -1\leqslant t^3\leqslant 0,
\end{gathered}\tag{28}$$

где α, β, γ, φ, ψ_1, ψ_2, Y — фиксированные измеримые по совокупности переменных и ограниченные скалярные функции, $u(\cdot)\in L_2$ — управление. Левую часть уравнения в (28) понимаем как полную производную функции $x(\cdot)$ по переменной t^1 вдоль характеристики дифференциального выражения, стоящего в левой части. Такую производную от $x(\cdot)$ вдоль характеристик l будем обозначать $\partial x(\cdot)/\partial l$. Пусть W — класс всех функций $x(\cdot)$ из L_2, абсолютно непрерывных вдоль почти любой характеристики, и таких, что $\partial x(\cdot)/\partial l\in L_2$. Функцию $x(\cdot)$ из W назовём *решением задачи* (28), отвечающим управлению $u(\cdot)$, если она почти везде (по линейной мере) на почти каждой l в Π удовлетворяет уравнению в (28) и почти всюду удовлетворяет краевым условиям в (28). Характеристика $l=l(\bar t)$, проходящая через точку $\bar t=\{\bar t^1,\bar t^2,\bar t^3\}$, задаётся уравнениями $\{t^1=\xi,\ t^2=\bar t^2+\bar t^3(\xi-\bar t^1),\ t^3=\bar t^3\}$, где ξ — параметр. Она обязательно пересекает границу Π в одной из тех её частей, где или $t^1=0$, или $t^2=0$, $t^3>0$, или $t^2=1$, $t^3<0$; значение t^1 в соответствующей точке пересечения обозначим через $\nu(\bar t)$. Из краевых условий в задаче (28) следует, что $x\left(\nu(\bar t),\bar t^2+\bar t^3(\nu(\bar t)-\bar t^1),\bar t^3\right)=\theta(\bar t)$, где

$$\theta(\bar t)\equiv\begin{cases}\varphi(\bar t^2-\bar t^3\bar t^1,\bar t^3), & \text{если }\ \nu(\bar t)=0;\\ \psi_1(\bar t^1-\bar t^2/\bar t^3,\bar t^3), & \text{если }\ \nu(\bar t)>0,\ \ \bar t^3>0;\\ \psi_2(\bar t^1+(1-\bar t^2)/\bar t^3,\bar t^3), & \text{если }\ \nu(\bar t)>0,\ \ \bar t^3<0,\end{cases}\quad \bar t\in\Pi.\tag{29}$$

Формула

$$x(t)=\theta(t)+\Sigma_1[z](t)\equiv\theta(t)+\int\limits_{\nu(t)}^{t^1}z(\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),t^3)\,d\xi,\quad t\in\Pi,\tag{30}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом L_2 функций $z(\cdot)$ и классом удовлетворяющих краевым условиям в (28) функций $x(\cdot)$ из W. Задача (28) заменой (30) сводится к эквивалентному функциональному уравнению (1) (это и есть в данном случае процедура обращения главной части краевой задачи (28)), здесь $n=3$, $m=1$, $s=1$, $\Pi=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$; $B[u](t)\equiv\gamma(t)u(t)$, $u(\cdot)\in L_2$, $t\in\Pi$; $A[z](t)\equiv\alpha(t)\Sigma_1[z](t)+\beta(t)\Sigma_2[z](t)$,

$$\Sigma_2[z](t)\equiv\int\limits_{-1}^{1}\left\{Y(\zeta;t)\int\limits_{\nu(t^1,t^2,\zeta)}^{t^1}z(\xi,t^2+\zeta(\xi-t^1),\zeta)\,d\xi\right\}d\zeta,\quad z(\cdot)\in L_2,\quad t\in\Pi;$$

$$c(t)\equiv\alpha(t)\theta(t)+\beta(t)\int\limits_{-1}^{1}Y(\zeta;t)\theta(t^1,t^2,\zeta)\,d\zeta,\quad t\in\Pi.$$

Так как ЛОО $A[.]:L_2\to L_2$ квазинильпотентен (это простое следствие признака [27, теорема 2]), то указанное уравнение (1), а вместе с ним и краевая задача (28), имеют единственное решение для любого $u\in L_2$. Отвечающее управлению $u\in L_2$ решение x_u задачи (28) связано с соответствующим решением z_u уравнения (1) формулой (30).

Пусть $O\equiv\big\{\{t^2,t^3\}\colon\ 0\leqslant t^2\leqslant 1,\ -1\leqslant t^3\leqslant 1\big\}$ и заданы: выпуклые функции $G_0(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G_i(y,w):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,k}$; функции $P(.)\in L_\infty(O)$, $\pi(.)\in L_2(O)$. Формулами

$$F_0[x]\equiv G_0\bigg(\int\limits_\Pi x(t)\,dt\bigg),\quad F_i[x,u]\equiv G_i\bigg(\int\limits_\Pi x(t)\,dt,\int\limits_\Pi u(t)\,dt\bigg),\quad i=\overline{1,k},$$

для $x(\cdot)\in W$, $u(\cdot)\in L_2$ определены функционалы. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (28) с минимизируемым целевым функционалом $F_0[x]$ при ограничениях

$$P(t^2,t^3)x(1,t^2,t^3)=\pi(t^2,t^3),\quad \{t^2,t^3\}\in O,\quad F_1[x,u]\leqslant 0,\quad \ldots,\quad F_k[x,u]\leqslant 0$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u]\to\min,\quad P(t^2,t^3)x_u(1,t^2,t^3)=\pi(t^2,t^3),\quad \{t^2,t^3\}\in O,$$
$$F_i[x_u,u]\leqslant 0,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D}. \tag{31}$$

Сделав в задаче (31) замену (30), получим следующую эквивалентную задачу оптимизации соответствующей управляемой системы (1):

$$W_0[z_u]\to\min,\quad \mathcal{P}[z_u](t^2,t^3)=\pi(t^2,t^3)-P(t^2,t^3)\theta(1,t^2,t^3),\quad \{t^2,t^3\}\in O,$$
$$W_i[z_u,u]\leqslant 0,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D},$$

где приняты обозначения: $W_0[z]\equiv F_0[\theta+\Sigma_1[z]]$, $W_i[z,u]\equiv F_i[\theta+\Sigma_1[z],u]$ $(i=\overline{1,k})$, $\mathcal{P}[z](t^2,t^3)\equiv$ $\equiv P(t^2,t^3)\Sigma_1[z](1,t^2,t^3)$ $(\{t^2,t^3\}\in O)$. Это задача вида (4), здесь $J_0[u]\equiv\mathcal{J}_0[z_u,u]\equiv W_0[z_u]$, $J_i[u]\equiv\mathcal{J}_i[z_u,u]\equiv W_i[z_u,u]$ $(i=\overline{1,k})$, $H=L_2(O)$, $\mathcal{A}[z]\equiv\mathcal{P}[z]$ $(z\in L_2(\Pi))$, $\mathcal{C}\equiv\pi(t^2,t^3)-P(t^2,t^3)\times$ $\times\theta(1,t^2,t^3)$ $\big(\{t^2,t^3\}\in O\big)$, $\mathcal{B}[u]\equiv 0$ $(u\in L_2(\Pi))$.

Пусть $\mathsf{f}\equiv\big\{\alpha,\beta,\gamma,Y,\varphi,\psi_1,\psi_2;P,\pi;G_i\ \ (i=\overline{0,k})\big\}$ — набор входных данных задачи (31), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор

$$\mathsf{f}^0\equiv\big\{\alpha^0,\beta^0,\gamma^0,Y^0,\varphi^0,\psi_1^0,\psi_2^0;P^0,\pi^0;G_i^0\ \ (i=\overline{0,k})\big\}$$

нам не известен, но можно оперировать с приближёнными наборами

$$\mathsf{f}^\delta\equiv\big\{\alpha^\delta,\beta^\delta,\gamma^\delta,Y^\delta,\varphi^\delta,\psi_1^\delta,\psi_2^\delta;P^\delta,\pi^\delta;G_i^\delta\ \ (i=\overline{0,k})\big\},\quad \delta\in(0,\delta_0]$$

($\delta_0>0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями.

Условие 1. Функции $G_0^\delta(.):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $G_i^\delta(.,.):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{1,k})$ выпуклы при любом $\delta\in[0,\delta_0]$ и равномерно по $\delta\in[0,\delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

Условие 2. Существует число $\mathbf{C}>0$ такое, что величины $\|\alpha^\delta-\alpha^0\|_{\infty,1}$, $\|\beta^\delta-\beta^0\|_{\infty,1}$, $\|\gamma^\delta-\gamma^0\|_{\infty,1}$, $\|Y^\delta-Y^0\|_{\infty,1}$, $\|\varphi^\delta-\varphi^0\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,1])}$, $\|\pi^\delta-\pi^0\|_{L_2(O)}$, $\|\psi_1^\delta-\psi_1^0\|_{L_\infty([0,1]\times[0,1])}$, $\|\psi_2^\delta-\psi_2^0\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,0])}$, $\|P^\delta-P^0\|_{L_\infty(O)}$ при любом $\delta\in(0,\delta_0]$ не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$.

Условие 3. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(.):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что для каждого $\mathbf{l}>0$ и любого $\delta\in(0,\delta_0]$ величины $|G_0^\delta(y)-G_0^0(y)|$, $|G_i^\delta(y,w)-G_i^0(y,w)|$ $(i=\overline{1,k})$ при $|y|,|w|\leqslant\mathbf{l}$ не превосходят $\mathbf{N}_1(\mathbf{l})\delta$.

При любом $\delta\in[0,\delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\partial x/\partial t^1+t^3\partial x/\partial t^2=\alpha^\delta(t)x(t)+\beta^\delta(t)\int\limits_{-1}^{1}Y^\delta(\zeta;t)x(t^1,t^2,\zeta)\,d\zeta+\gamma^\delta(t)u(t),\quad t\in\Pi;$$
$$x(0,t^2,t^3)=\varphi^\delta(t^2,t^3),\quad 0\leqslant t^2\leqslant 1,\quad -1\leqslant t^3\leqslant 1,$$

$$x(t^1,0,t^3)=\psi_1^\delta(t^1,t^3),\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1,\quad 0\leqslant t^3\leqslant 1,$$
$$x(t^1,1,t^3)=\psi_2^\delta(t^1,t^3),\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1,\quad -1\leqslant t^3\leqslant 0 \tag{32}$$

(её решение, отвечающее управлению $u\in L_2$, обозначаем через x_u^δ), минимизируемый функционал $F_0^\delta[x]\equiv G_0^\delta(\int_\Pi x(t)\,dt)$, набор ограничений

$$P^\delta(t^2,t^3)x(1,t^2,t^3)=\pi^\delta(t^2,t^3),\quad \{t^2,t^3\}\in O,\quad F_1^\delta[x,u]\leqslant 0,\quad \ldots,\quad F_k^\delta[x,u]\leqslant 0,$$

где $F_i^\delta[x,u]\equiv G_i^\delta\left(\int_\Pi x(t)dt,\int_\Pi u(t)dt\right)$ $(i=\overline{1,k})$, и задачу оптимального управления

$$F_0^\delta[x_u^\delta]\to\min,\quad P^\delta(t^2,t^3)x_u^\delta(1,t^2,t^3)=\pi^\delta(t^2,t^3),\quad \{t^2,t^3\}\in O,$$
$$F_i^\delta[x_u^\delta,u]\leqslant 0,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D}. \tag{33}$$

Сделав в задаче (33) соответствующую обращению главной части краевой задачи (32) подстановку $x(t)=\theta^\delta(t)+\Sigma_1[z](t)$, $t\in\Pi$, где $\theta^\delta(\cdot)$ определяется формулой (29) с заменой φ, ψ_1, ψ_2 на φ^δ, ψ_1^δ, ψ_2^δ соответственно, получим эквивалентную задачу оптимизации системы (7), в которой $n=3$, $m=1$, $s=1$, $\Pi=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$; $B^\delta[u](t)\equiv\gamma^\delta(t)u(t)$, $u(\cdot)\in L_2$, $t\in\Pi$; $A^\delta[z](t)\equiv\alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t)+\beta^\delta(t)\Sigma_2^\delta[z](t)$,

$$\Sigma_2^\delta[z](t)\equiv\int\limits_{-1}^{1}\left\{Y^\delta(\zeta;t)\int\limits_{\nu(t^1,t^2,\zeta)}^{t^1}z(\xi,t^2+\zeta(\xi-t^1),\zeta)\,d\xi\right\}d\zeta,\quad z(\cdot)\in L_2,\quad t\in\Pi,$$
$$c^\delta(t)\equiv\alpha^\delta(t)\theta^\delta(t)+\beta^\delta(t)\int\limits_{-1}^{1}Y^\delta(\zeta;t)\theta^\delta(t^1,t^2,\zeta)\,d\zeta,\quad t\in\Pi.$$

Запишем её в виде

$$W_0^\delta[z_u^\delta]\to\min,\quad \mathcal{P}^\delta[z_u^\delta](t^2,t^3)=\pi^\delta(t^2,t^3)-P^\delta(t^2,t^3)\theta^\delta(1,t^2,t^3),\quad \{t^2,t^3\}\in O,$$
$$W_i^\delta[z_u^\delta,u]\leqslant 0,\quad i=\overline{1,k},\quad u\in\mathcal{D}, \tag{34}$$

где $\mathcal{P}^\delta[z](t^2,t^3)\equiv P^\delta(t^2,t^3)\Sigma_1[z](1,t^2,t^3)$, $\{t^2,t^3\}\in O$, $W_0^\delta[z]\equiv F_0^\delta[\theta^\delta+\Sigma_1[z]]$, $W_i^\delta[z,u]\equiv$ $\equiv F_i^\delta[\theta^\delta+\Sigma_1[z],u]$.

Задача (34) имеет вид (OC^δ), здесь $J_0^\delta[u]\equiv\mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta,u]\equiv W_0^\delta[z_u^\delta]$, $J_i^\delta[u]\equiv\mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta,u]\equiv W_i^\delta[z_u^\delta,u]$ $(i=\overline{1,k})$, $H=L_2(O)$, $\mathcal{A}^\delta[z]\equiv\mathcal{P}^\delta[z]$ $(z\in L_2(\Pi))$, $\mathcal{C}^\delta\equiv\pi^\delta(t^2,t^3)-P^\delta(t^2,t^3)\theta^\delta(1,t^2,t^3)$ $\big(\{t^2,t^3\}\in$ $\in O\big)$, $\mathcal{B}^\delta[u]\equiv 0$ $(u\in L_2(\Pi))$. Воспользовавшись выкладками [10, пример 2], находим, что при сделанных относительно семейства задач (33), $\delta\in[0,\delta_0]$, предположениях семейство задач (34), $\delta\in[0,\delta_0]$, удовлетворяет условиям А–Г.

Предположив дополнительно, что функции G_i^δ, $i=\overline{0,k}$, $\delta\in(0,\delta_0]$, гладкие, можем выписать для данного примера критерии (18) и (22) решения задачи (16). Операторы, сопряжённые к $\Sigma_1:L_2\to L_2$ и $\Sigma_2^\delta:L_2\to L_2$, имеют вид

$$\Sigma_1^*[z](t)=\int\limits_{t^1}^{\rho(t)}z(\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),t^3)\,d\xi,$$

$$(\Sigma_2^\delta)^*[z](t)=\int\limits_{-1}^{1}\left\{\int\limits_{t^1}^{\rho(t)} Y^\delta(t^3;\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),\zeta)z(\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),\zeta)\,d\xi\right\}d\zeta,\quad t\in\Pi,$$

здесь $\rho(\bar t)$ — значение t^1 в точке t пересечения характеристикой $l(\bar t)$ той части границы Π, где либо $t^1=1$, либо $t^2=0$, $t^3<0$, либо $t^2=1$, $t^3>0$. Положим: $\eta_\delta(\bar u)\equiv\int_\Pi x_{\bar u}^\delta(\zeta)d\zeta$; $\eta(\bar u)\equiv\int_\Pi \bar u(\zeta)d\zeta$; $\sigma(t^2,t^3)=0$ при $0\leqslant t^2\leqslant 1-t^3$, $t^3\geqslant 0$ и при $-t^3\leqslant t^2\leqslant 1$, $t^3\leqslant 0$; $\sigma(t^2,t^3)=1-(1-t^2)/t^3$ при $1-t^3\leqslant t^2\leqslant 1$, $t^3>0$; $\sigma(t^2,t^3)=1+t^2/t^3$ при $0\leqslant t^2\leqslant -t^3$, $t^3<0$. Непосредственно вычисляя, получаем $\Omega_0^\delta[\bar u](t)\equiv\Sigma_1^*\big[G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u))\big](t)$, $\Xi_0^\delta[\bar u](t)\equiv 0$;

$$\Omega_i^\delta[\bar u](t)\equiv\Sigma_1^*\big[G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u),\eta(\bar u))\big](t),\quad \Xi_i^\delta[\bar u](t)\equiv G_{iw}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u),\eta(\bar u)),\quad i=\overline{1,k},\quad t\in\Pi,$$

$$(\mathcal A^\delta)^*[\lambda](t)=\chi_{[\sigma(t^2,t^3),1]}(t^1)\,P^\delta(t^2+t^3(t^1-1),t^3)\,\lambda(t^2+t^3(t^1-1),t^3),\quad t\in\Pi,$$

т.е. сопряжённое уравнение (20) имеет вид

$$\psi(t)=\Sigma_1^*[\alpha^\delta\psi](t)+(\Sigma_2^\delta)^*[\beta^\delta\psi](t)-\Sigma_1^*\big[G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u))\big](t)-\Sigma_1^*\left[\sum_{i=1}^k\mu_i G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u),\eta(\bar u))\right](t)-$$
$$-\chi_{[\sigma(t^2,t^3),1]}(t^1)\,P^\delta(t^2+t^3(t^1-1),t^3)\lambda(t^2+t^3(t^1-1),t^3),\quad t\in\Pi. \tag{35}$$

Оно является функциональным (интегральным) уравнением вольтеррова типа, а функция $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$, формирующая критерии (18) и (22), которым удовлетворяет решение $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ задачи (16), задаётся формулой

$$\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t)\equiv\gamma^\delta(t)\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t)+\sum_{i=1}^k\mu_i G_{iw}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u),\eta(\bar u)),\quad t\in\Pi,$$

где $\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]$ — решение уравнения (35). Единственное в L_2 решение этого уравнения принадлежит классу W. Уравнение (35) эквивалентно краевой задаче

$$\partial\psi/\partial t^1+t^3\partial\psi/\partial t^2=-\alpha^\delta(t)\psi(t)-\int\limits_{-1}^{1}Y(t^3;t^1,t^2,\zeta)\,\beta^\delta(t^1,t^2,\zeta)\,\psi(t^1,t^2,\zeta)\,d\zeta+$$
$$+G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u))+\sum_{i=1}^k\mu_i G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u),\eta(\bar u)),\quad t\in\Pi,$$
$$\psi(1,t^2,t^3)=P^\delta(t^2,t^3)\lambda(t^2,t^3),\quad 0\leqslant t^2\leqslant 1,\quad -1\leqslant t^3\leqslant 1,$$
$$\psi(t^1,1,t^3)=0,\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1,\quad 0\leqslant t^3\leqslant 1,$$
$$\psi(t^1,0,t^3)=0,\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1,\quad -1\leqslant t^3\leqslant 0,$$

основное уравнение которой получается из (35) дифференцированием вдоль характеристик, а краевые условия — подстановками соответствующих значений независимых переменных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления для управляемой системы, задаваемой линейным функционально-операторнымуравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m (основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным), с выпуклым (не обязательно сильно) целевым функционалом и операторными ограничениями. Показано, что “в пределе” регуляризованные ПЛ и ПМП приводят к своим классическим аналогам. Указанные результаты “расшифрованы” применительно к конкретной задаче рассматриваемого класса, связанной с интегро-дифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Результаты исследований авторов, представленные в пп. 1–3, 5, получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-20020); результаты исследований, представленные в п. 4, получены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Тамбовской области (проект 2-ФП-2023).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1979. — 430 с.
2. Аваков, Е.Р. О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений / Е.Р. Аваков, Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, Вып. 3 (411). — С. 5–38.
3. Арутюнов, А.В. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения / А.В. Арутюнов, Г.Г. Магарил-Ильяев, В.М. Тихомиров. — М. : Факториал Пресс, 2006. — 144 с.
4. Гамкрелидзе, Р.В. История открытия принципа максимума Понтрягина / Р.В. Гамкрелидзе // Тр. мат. ин-та РАН. — 2019. — Т. 304. — С. 7–14.
5. Некорректные задачи естествознания : сб. ст. / Под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1987. — 303 с.
6. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации : в 2-х кн. / Ф.П. Васильев. — М. : МЦНМО, 2011. — 1056 с.
7. Сумин, М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве / М.И. Сумин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 9. — С. 1594–1615.
8. Сумин, М.И. О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа / М.И. Сумин // Вестн. рос. ун-тов. Математика. — 2022. — Т. 27, № 137. — С. 58–79.
9. Сумин, В.И. Об итеративной регуляризации принципа Лагранжа в выпуклых задачах оптимального управления распределенными системами вольтеррова типа с операторными ограничениями / В.И. Сумин, М.И. Сумин // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 6. — С. 795–812.
10. Сумин, В.И. О регуляризации принципа Лагранжа в задачах оптимизации линейных распределенных систем вольтеррова типа с операторными ограничениями / В.И. Сумин, М.И. Сумин // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. — 2022. — Т. 59. — С. 85-113.
11. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения: учеб. пособие для вузов / А.В. Фурсиков. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — 350 с.
12. Tröltzsch, F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications / F. Tröltzsch. — Providence; Rhode Island : Amer. Math. Soc., 2010. — 399 p.
13. Borzi, A. The Sequential Quadratic Hamiltonian Method. Solving Optimal Control Problems / A. Borzi. — Boca Raton : Chapman and Hall/CRC Press, 2023.
14. Tonelli, L. Sulle equazioni funzionali di Volterra / L. Tonelli // Bull. Calcutta Math. Soc. — 1929. — V. 20. — P. 31–48.
15. Тихонов, А.Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики / А.Н. Тихонов // Бюлл. Московского ун-та. Секция А. — 1938. — Т. 1, № 8. — С. 1–25.

16. Забрейко, П.П. Об интегральных операторах Вольтерра / П.П. Забрейко // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. 22, № 1. — С. 167–168.
17. Шрагин, И.В. Абстрактные операторы Немыцкого — локально определённые операторы / И.В. Шрагин // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 227, № 1. — С. 47–49.
18. Сумин, В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами / В.И. Сумин // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 305, № 5. — С. 1056–1059.
19. Жуковский, Е.С. К теории уравнений Вольтерра / Е.С. Жуковский // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 9. — С. 1599–1605.
20. Corduneanu, C. Integral Equations and Applications / C. Corduneanu. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 1991. — 376 p.
21. Гохберг, И.Ц. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 508 с.
22. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. — Новосибирск : Наука, 1983. — 207 с.
23. Гусаренко, С.А. Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора / С.А. Гусаренко // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 295, № 5. — С. 1046–1049.
24. Väth, M. Abstract Volterra equations of the second kind / M. Väth // J. Equat. Appl. — 1998. — V. 10, № 9. — P. 125–144.
25. Жуковский, Е.С. Абстрактные вольтерровы операторы / Е.С. Жуковский, М.Ж. Алвеш // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 3. — С. 3–17.
26. Сумин, В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами / В.И. Сумин. — Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та, 1992. — 110 с.
27. Сумин, В.И. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность / В.И. Сумин, А.В. Чернов // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1402–1411.
28. Сумин, В.И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений / В.И. Сумин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 262–278.
29. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. М. : Наука, 1977. — 623 с.
30. Сумин, М.И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач / М.И. Сумин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 25–49.
31. Бакушинский, А.Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. М. : Наука, 1989. — 126 с.
32. Сумин, М.И. О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления / М.И. Сумин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 2. — С. 252–269.
33. Сумин, М.И. Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа / М.И. Сумин // Вестн. рос. ун-тов. Математика. — 2020. — Т. 25, № 131. — С. 307–330.
34. Обен, Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж.-П. Обен: пер. с фр. — М. : Мир, 1988. — 264 с.
35. Loewen, P.D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis / P.D. Loewen. — Providence, Rhode Island, USA : Amer. Math. Soc., 1993. — 153 p.
36. Jorgens, K. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport / K. Jorgens // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — V. 11, № 2. — P. 219–242.
37. Морозов, С.Ф. Нестационарное интегродифференциальное уравнение переноса / С.Ф. Морозов // Изв. вузов. Математика. — 1969. — № 1. — С. 26–31.
38. Кузнецов, Ю.А. Корректность постановки смешанной задачи для нестационарного уравнения переноса / Ю.А. Кузнецов, С.Ф. Морозов // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 9. — С. 1639–1648.

ON REGULARIZATION OF THE CLASSICAL OPTIMALITY CONDITIONS IN THE CONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS FOR VOLTERRA-TYPE SYSTEMS WITH OPERATOR CONSTRAINTS

V. I. Sumin[1], M. I. Sumin[2]

[1,2]Derzhavin Tambov State University, Russia
[1,2]Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University, Russia
e-mail: [1]v_sumin@mail.ru; [2]m.sumin@mail.ru

We consider the regularization of classical optimality conditions (COCs) — the Lagrange principle (LP) and the Pontryagin maximum principle (PMP) — in a convex optimal control problem with an operator equality-constraint and functional inequality-constraints. The controlled system is specified by a linear functional-operator equation of the second kind of general form in the space L_2^m, the main operator on the right side of the equation is assumed to be quasinilpotent.The objective functional of the problem is only convex (perhaps not strongly convex). Obtaining regularized COCs is based on the dual regularization method. In this case, two regularization parameters are used, one of which is "responsible" for the regularization of the dual problem, the other is contained in the strongly convex regularizing Tikhonov addition to the target functional of the original problem, thereby ensuring the correctness of the problem of minimizing the Lagrange function. The main purpose of regularized LP and PMP is the stable generation of minimizing approximate solutions in the sense of J. Warga. Regularized COCs: 1) are formulated as existence theorems for minimizing approximate solutions in the original problem with a simultaneous constructive representation of these solutions; 2) expressed in terms of regular classical functions of Lagrange and Hamilton–Pontryagin; 3) "overcome" the properties of the ill-posedness of the COCs and provide regularizing algorithms for solving optimization problems. Based on the perturbation method, an important property of the regularized COCs obtained in the work is discussed in sufficient detail, namely that "in the limit" they lead to their classical analogues. As an application of the general results obtained in the paper, a specific example of an optimal control problem associated with an integro-differential equation of the transport equation type is considered, a special case of which is a certain final observation problem.

Keywords: convex optimal control, operator constraint, functional-operator equation of Volterra type, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, ill-posedness, regularization, duality, minimizing approximate solution, regularizing operator, perturbation method.

FUNDING

The results of sections 1–3, 5, were obtained with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020). The results of section 4 were obtained with financial support from the Ministry of Education and Science of the Tambov Region (project no. 2-FP-2023).

REFERENCES

1. Alekseev, V.M. Optimal Control / V.M. Alekseev, V.M. Tikhomirov, S.V. Fomin. — New York : Plenum Press, 1987.
2. Avakov, E.R. Lagrange's principle in extremum problems with constraints / E.R. Avakov, G.G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov // Russ. Math. Surveys. — 2013. — V. 68, № 3. — P. 401–433.
3. Arutyunov, A.V. Printsip maksimuma Pontryagina. Dokazatel'stvo i prilozheniya / A.V. Arutyunov, G.G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov. — Moscow : Faktorial Press, 2006. — 144 p. [in Russian]
4. Gamkrelidze, R.V. History of the discovery of the Pontryagin maximum principle / R.V. Gamkrelidze // Proc. Steklov Inst. Math. — 2019. — V. 304. — P. 1–7.
5. Il-posed problems in the natural science : coll. art. / By eds. A.N. Tikhonov, A.V. Goncharskii. Moscow : MSU Press, 1987. — 303 p. [in Russian]
6. Vasil'ev, F.P. Metody optimizatsii / F.P. Vasil'ev. — Moscow : MCCME, 2011. Vol. 1: 620 p.; Vol. 2: 433 p. [in Russian]
7. Sumin, M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space / M.I. Sumin // Comput. Math. Math. Phys. — 2011. — V. 51, № 9. — P. 1489–1509.
8. Sumin, M.I. On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles / M.I. Sumin // Russ. Universities Reports. Mathematics. — 2022. — V. 27, № 137. — P. 58–79. [in Russian]
9. Sumin, V.I. On the iterative regularization of the Lagrange principle in convex optimal control problems for distributed systems of the Volterra type with operator constraints / V.I. Sumin, M.I. Sumin // Differ. Equat. — 2022. — V. 58, № 6. — P. 791–809.

10. Sumin, V.I. On regularization of the Lagrange principle in the optimization problems for linear distributed Volterra type systems with operator constraints / V.I. Sumin, M.I. Sumin // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2022. — V. 59. — P. 85–113. [in Russian]
11. Fursikov, A.V. Optimal Control of Distributed Systems: Theory and Applications / A.V. Fursikov. — Providence : Amer. Math. Soc., 2000. — 305 p.
12. Tröltzsch, F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications / F. Tröltzsch. — Providence; Rhode Island : Amer. Math. Soc., 2010. — 399 p.
13. Borzi, A. The Sequential Quadratic Hamiltonian Method. Solving Optimal Control Problems / A. Borzi. — Boca Raton : Chapman and Hall/CRC Press, 2023.
14. Tonelli, L. Sulle equazioni funzionali di Volterra / L. Tonelli // Bull. Calcutta Math. Soc. — 1929. — V. 20. — P. 31–48.
15. Tikhonov, A.N. Functional Volterra-type equations and their applications to certain problems of mathematical physics / A.N. Tikhonov // Bull. Mosk. Gos. Univ. Sekt. A. — 1938. — V. 8, № 1. — P. 1–25. [in Russian]
16. Zabreiko, P.P. Integral Volterra operators / P.P. Zabreiko // Uspekhi Mat. Nauk. — 1967. — V. 22, № 1. — P. 167–168. [in Russian]
17. Shragin, I.V. Abstract Nemyckii operators are locally defined operators / I.V. Shragin // Sov. Math. Dokl. — 1976. — V. 17. — P. 354–357.
18. Sumin, V.I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems / V.I. Sumin // Sov. Math. Dokl. — 1989. — V. 39, № 2. — P. 374–378.
19. Zhukovskii, E.S. On the theory of Volterra equations / E.S. Zhukovskii // Differ. Equat. — 1989. — V. 25, № 9. — P. 1132–1137.
20. Corduneanu, C. Integral Equations and Applications / C. Corduneanu. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 1991. — 376 p.
21. Gohberg, I.C. Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space / I.C. Gohberg, M.G. Krein. — Amer. Math. Soc., 1970. — 378 p.
22. Bughgeim, A.L. Volterra Equations and Inverse Problems / A.L. Bughgeim. — Utrecht : VSP BV, 1999.
23. Gusarenko, S.A. On a generalization of the notion of Volterra operator / S.A. Gusarenko // Sov. Math. Dokl. — 1988. — V. 36, № 1. — P. 156–159.
24. Väth, M. Abstract Volterra equations of the second kind / M. Väth // J. Equat. Appl. — 1998. — V. 10, № 9. — P. 125–144.
25. Zhukovskii, E.S. Abstract Volterra operators / E.S. Zhukovskii, M.J. Alves // Russ. Mathematics. — 2008. — V. 52, № 3. — P. 1–14.
26. Sumin, V.I. Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems / V.I. Sumin. — Nizhnii Novgorod : Izd-vo Nizhegorodskogo gosuniversiteta, 1992. — 110 p. [in Russian]
27. Sumin, V.I. Operators in spaces of measurable functions: The Volterra property and quasinilpotency / V.I. Sumin, A.V. Chernov // Differ. Equat. — 1998. — V. 34, № 10. — P. 1403–1411.
28. Sumin, V.I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle / V.I. Sumin // Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. — 2019. — V. 25, № 1. — P. 262–278. [in Russian]
29. Warga, J. Optimal control of differential and functional equations / J. Warga. — New York : Acad. Press, 1972.
30. Sumin, M.I. Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems / M.I. Sumin // Comput. Math., Math. Phys. — 2014. — V. 54, № 1. — P. 22–44.
31. Bakushinskii, A.B. Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems / A.B. Bakushinskii, A.V. Goncharskii. — Moscow : Nauka, 1989. — 126 p. [in Russian]
32. Sumin, M.I. On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems / M.I. Sumin // Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. — 2020. — V. 26, № 2. — P. 252–269. [in Russian]
33. Sumin, M.I. Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis / M.I. Sumin // Russ. Universities Reports. Mathematics. — 2020. — V. 25, № 131. — P. 307–330. [in Russian]
34. Aubin, J.P. L'analyse non linéaire et ses motivations économiques / J.P. Aubin. — Paris : Masson, 1984. — 214 p.
35. Loewen, P.D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis / P.D. Loewen. — Providence, Rhode Island, USA : Amer. Math. Soc., 1993. — 153 p.
36. Jorgens, K. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport / K. Jorgens // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — V. 11, № 2. — P. 219–242.
37. Morozov, S.F. Non-stationary integro-differential transport equation / S.F. Morozov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika. — 1969. — № 1. — P. 26–31. [in Russian]
38. Kuznetsov, Yu.A. Correctness of the mixed problem statement for the nonstationary transport equation / Yu.A. Kuznetsov, S.F. Morozov // Differ. uravneniya. — 1972. — V. 8, № 9. — P. 1639–1648. [in Russian]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 260–272

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

КАСКАДНЫЙ СУПЕР-СКРУЧИВАЮЩИЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ БЕЗ КОММУНИКАЦИИ

В. В. Фомичев[1], А. И. Самарин[2]

[1]Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай

[1]Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, г. Москва

[1,2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: [1]fomichev@cs.msu.su, [2]samarin_aleksei@icloud.com

Поступила в редакцию 29.11.2023 г., после доработки 29.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассмотрена задача о консенсусе (т.е. о согласовании фазовых векторов) для мультиагентной системы, состоящей из однотипных линейных агентов. Изучен случай, когда между агентами нет коммуникации, т.е. нет обмена информацией, а управление агентами осуществляется за счёт собственных датчиков агентов, дающих неполную информацию о фазовых векторах агента и его соседей, при этом информация может быть зашумлена. Для решения задачи применён линейный протокол на основе данных от наблюдателей для систем в условиях неопределённости. В качестве таких наблюдателей предложено использовать каскадные наблюдатели на основе метода “super-twisting” (супер-скручивающий каскадный наблюдатель). Получены достаточные условия существования регулятора, при которых ошибка наблюдения стремится к нулю при ограниченных возмущениях. Приведён пример, иллюстрирующий предложенный подход.

Ключевые слова: мультиагентные системы, супер-скручивающий наблюдатель, консенсус, линейные агенты.

DOI: 10.31857/S0374064124020089, EDN: QFWROK

ВВЕДЕНИЕ

Мультиагентные системы, состоящие из агентов со своим входом, выходом и регулятором, находят широкое применение в роевой робототехнике, управлении электроэнергией, а также в описании транспортных систем [1]. Особый интерес представляют системы, в которых все агенты стандартизированы. Такие системы легко масштабировать, они демонстрируют высокую устойчивость к отказам отдельных агентов, при этом остаются экономически выгодными [2].

В контексте нашего исследования будем рассматривать агенты как линейные однородные SISO (Single-Input Single-Output) объекты, подвергаемые ограниченным возмущениям и обладающие информацией только об относительном выходе. Например, если динамика агентов описывается координатой и скоростью, то агенту известно только расстояние до соседей, в то время как относительная скорость остаётся неизвестной.

Основная задача исследования — децентрализованный консенсус, или синхронизация состояний между агентами, полагаясь только на информацию от непосредственных соседей [3–5].

Многие существующие протоколы [6] для достижения консенсуса требуют обмена дополнительной информацией между агентами. Но его, как было показано в статье [7], можно достичь и без коммуникации между агентами. Однако численное моделирование, выполненное нами, показывает, что этот подход уступает в точности при наличии внешних возмущений.

В работе [8] был предложен нелинейный наблюдатель для линейных систем, дающий асимптотически точную оценку. Возникает вопрос, возможно ли адаптировать этот наблюдатель для использования в протоколе [7], чтобы улучшить его точность? Хотя подобный подход уже был рассмотрен для агентов второго порядка [9], наша цель — обобщить его для агентов любого порядка.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Задача консенсуса состоит в синхронизации состояния агентов. Под агентами понимаются объекты одинаковой природы. В нашей работе *агенты* — линейные стационарные динамические системы. Уравнения агента имеют вид

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad y_i = \frac{1}{|N_i|} C \sum_{j\in N_i} (x_i - x_j), \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния i-го агента; $i \in \{1, \ldots, N\}$ — номер агента; N — число агентов; $u_i \in \mathbb{R}$ — управление; $y_i \in \mathbb{R}$ — измеряемый выход, равный среднему отклонению от соседей; N_i — множество соседей агента (если множество соседей пусто, то считаем, что $y_i \equiv 0$); A, B, C — одинаковые для всех агентов матрицы. Считаем, что множество соседей не изменяется с течением времени. В классической задаче консенсуса требуется в асимптотике достигнуть равенства состояния агентов:

$$\|x_i(t) - x_j(t)\| \to 0 \quad \text{для любых } i,\ j.$$

Мультиагентую систему можно описать в виде графа G, вершинами которого являются агенты. Направленные ребра означают, что один агент получает информацию о другом, например, агенту i из (1) соответствуют ребра $\{(j,i) : j \in N_i\}$.

Другим представлением информации о связях между агентами является матрица Лапласа — матрица размера $N \times N$ с элементами

$$L_{ii} = \begin{cases} 1, & |N_i| > 0, \\ 0, & |N_i| = 0, \end{cases} \qquad L_{ij} = \begin{cases} -1/|N_i|, & j \in N_i, \\ 0, & j \notin N_i. \end{cases}$$

Мы рассматриваем не меняющуюся во времени топологию агентов. Задачу консенсуса для всей системы имеет смысл рассматривать, когда в графе G существует остовное направленное дерево (для ненаправленного графа это требование означает, что граф является связным). В этом случае матрица Лапласа имеет ровно одно собственное значение, равное нулю, а у остальных собственных значений положительная вещественная часть.

1.1. ПРОТОКОЛ С КОММУНИКАЦИЕЙ

В работе [6] был предложен следующий распределённый протокол управления:

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKv_i, \quad \dot{v}_i = Av_i + BKv_i + F\left(C\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(v_i - v_j) - y_i\right), \quad y_i = \frac{1}{|N_i|} C \sum_{j\in N_i}(x_i - x_j), \tag{2}$$

где $u_i = Kv_i$, v_i — состояние регулятора. Расчёт v_i зависит от v_j, что требует передачи информации между агентами. В протоколе (2) F и K — это матрицы коэффициентов регулятора, одинаковые для всех агентов.

1.2. ПРОТОКОЛ БЕЗ КОММУНИКАЦИИ

В статье [7] был предложен протокол, в котором коммуникация не требуется, т.е. не требуется передача информации о внутреннем состоянии регулятора, как предусмотрено в протоколе (2). Но агентам доступна информация об относительном положении, которая содержится в y_i:

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = \frac{1}{|N_i|} C \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \tag{3}$$

где z_i — состояние регулятора, F и K — матрицы коэффициентов обратной связи. Заметим, что во втором уравнении (3), т.е. законе управления для i-го агента, содержатся переменные только с индексом i. Это означает, что агент не использует информацию от других агентов, поэтому коммуникация не требуется.

Теорема 1 [7]. *Пусть граф G содержит остовное направленное дерево. Протокол (3) решает задачу консенсуса тогда и только тогда, когда каждая из матриц*

$$\begin{bmatrix} A & BK \\ -\lambda_i FC & A + BK + FC \end{bmatrix} \tag{4}$$

гурвицева, где λ_i, $i = \overline{2, N}$, — ненулевые собственные значения матрицы Лапласа, соответствущей графу G.

1.3. КАСКАДНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + B\xi, \quad y = Cx, \tag{5}$$

где A — гурвицева матрица, тройка (A, B, C) в общем положении, т.е. управляемая и наблюдаемая; $|\xi(t)| \leqslant \xi_0$ — ограниченная помеха. Пусть тройка (A, B, C) определяет систему с устойчивой нулевой динамикой. Это означает устойчивость инвариантных нулей системы, которые определяются как значения s, при которых понижается ранг матрицы Розенброка

$$R(S) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

В работе [8] был предложен алгоритм построения каскадного наблюдателя на основе супер-скручивающего наблюдателя [10]. В [11] выведены необходимые и достаточные условия сходимости супер-скручивающего наблюдателя.

Теорема 2 [8]. *Пусть A — устойчивая матрица, (A, B, C) — SISO система с устойчивой нулевой динамикой, управляемая и наблюдаемая, $|\xi(t)| < \xi_0$ — ограниченная неизвестная помеха. Тогда можно построить каскадный наблюдатель, чтобы ошибка оценки вектора x стремилась к нулю.*

Для решения задачи оценивания фазового вектора система (5) приводится к нормальной форме, для которой часть подсистемы, соответствующая нулевой динамике, устойчива и может быть оценена экспоненциально точно, а оставшаяся часть порядка r (r — относительный порядок системы) имеет каноническую форму

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{A}\varepsilon + b_0\xi, \quad \tilde{y} = \varepsilon_1, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ -l_{r-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -l_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

для которой строится каскадный наблюдатель

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_i = -l_i\tilde{y} + \bar{\varepsilon}_{i+1} + k_i \operatorname{sgn}(\bar{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_i)|\bar{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_i|^{1/2}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{i+1} = -l_{i+1}\tilde{y} + \mu_i \operatorname{sgn}(\bar{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_i), \quad i = \overline{1, r-1}, \tag{7}$$

где $\bar{\varepsilon}_i(t)$ — оценка сигнала $\varepsilon_i(t)$, построенная на предыдущем шаге каскада; $\bar{\varepsilon}_{i+1}(t)$ — оценка сигнала $\varepsilon_{i+1}(t)$, вырабатываемая наблюдателем (7) на текущем шаге каскада. В качестве оценки $\bar{\varepsilon}_1$ используется выход $\tilde{y}$ системы (6).

Алгоритм поиска коэффициентов k_i, μ_i описан в работе [8].

2. СРАВНЕНИЕ ПРОТОКОЛОВ

Покажем, что протокол без коммуникации проигрывает в точности, когда на систему действуют ограниченные возмущения. Для этого рассмотрим задачу консенсуса (1), когда на агенты действуют два вида помехи — в управлении и в измерении:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + B\xi_i, \quad y_i = Cv_i + \omega_i, \quad v_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j),$$
$$\|\xi_i\| \leqslant \xi_0, \quad \|\omega_i\| \leqslant \omega_0,$$

где $\xi_i(t)$, $\omega_i(t)$ — неизвестные кусочно-непрерывные функции с известными мажорантами, одинаковыми для всех агентов.

Векторы v_i описывают локальную ошибку консенсуса. Будем обозначать через v, ξ, ω конкатенацию v_i, ξ_i, ω_i:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N}.$$

Рассмотрим две нормы H_∞, которые отражают зависимость ошибки консенсуса от возмущений ξ, ω: чем больше норма, тем хуже управление подавляет помеху. Для расчёта норм используют нулевые начальные условия для всех агентов:

$$\|x\|_{L_2} = \biggl(\int\limits_0^\infty \|x(t)\|^2 dt\biggr)^{1/2},$$
$$H_\infty(\xi\to v) = \max_{\xi\neq 0}\frac{\|v\|_{L_2}}{\|\xi\|_{L_2}}, \quad H_\infty(\omega\to v) = \max_{\omega\neq 0}\frac{\|v\|_{L_2}}{\|\omega\|_{L_2}}. \tag{8}$$

Сравним, насколько хорошо оба протокола могут подавлять помехи ξ, ω. Для анализа будем использовать следующий численный эксперимент.

1. Зафиксируем число агентов, связи между ними и уравнение динамики.

2. Сгенерируем 50 000 разных пар матриц (K, F), удовлетворяющих теореме 1.

3. Для каждой пары посчитаем нормы (8) для двух протоколов.

4. Для каждого протокола выберем множество оптимальных по Парето пар (K, F). *Пара оптимальна по Парето*, если не существует другой пары, для которой значение обеих норм было бы меньше.

5. Сравним полученные оптимальные пары двух протоколов.

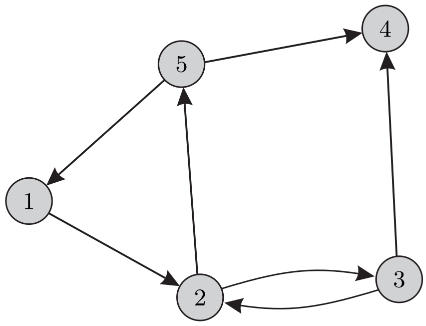


Рис. 1. Граф коммуникации.

Далее опишем один набор параметров эксперимента, так как при других параметрах результаты качественно не отличались. Для эксперимента выберем систему из пяти агентов третьего порядка. Граф коммуникации агентов представлен на рис. 1. Мы выбрали матрицы A, B, C минимального порядка, для которых имеет смысл рассматривать каскадный наблюдатель:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее мы сгенерировали 50 000 разных пар матриц (K, F), посчитали нормы (8), используя пакет ControlSystems.jl [12], затем выбрали множество оптимальных по Парето пар для каждого протокола. Каждой паре (K, F) соответствует пара норм $(H_\infty(\xi \to v), H_\infty(\omega \to v))$. Оптимальные пары показаны на рис. 2. Сравнив оптимальные пары для двух протоколов, получили ожидаемый результат: протокол без коммуникации менее устойчив к возмущениям, чем протокол с коммуникацией.

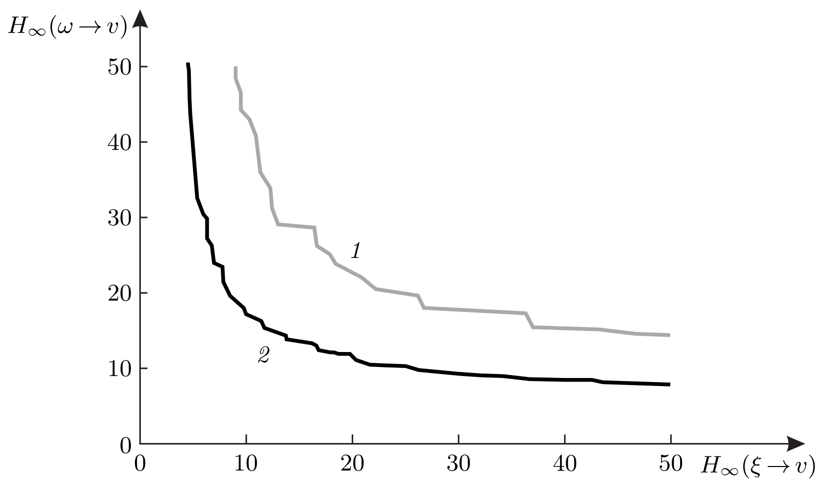


Рис. 2. Сравнение протоколов (линии соединяют точки, соответствующие оптимальным по Парето парам (K, F). Видно, что для каждой пары (K, F) протокола без коммуникации (*1*) существует пара (K, F) протокола с коммуникацией (*2*), которая лучше подавляет обе помехи.

Так как эксперимент численный, то нельзя с уверенностью утверждать, что протокол с коммуникацией всегда будет лучше. Однако результаты показывают, что такие системы существуют, следовательно, для них требуется улучшить протокол без коммуникации. Мы предлагаем сделать это путём добавления нелинейного наблюдателя, основанного на каскадном супер-скручивающемся наблюдателе.

3. ПЕРЕХОД К ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ

В п. 2 было показано, что протокол без коммуникации менее устойчив к возмущениям, чем протокол с коммуникацией. Ниже покажем, как неизвестное управление влияет на ошибку наблюдателя и как можно построить нелинейный наблюдатель, который даст асимптотически точную оценку.

Рассмотрим ошибку наблюдателя, возникающую из-за помехи ξ для протокола (3). Протокол (3) с добавлением помехи примет вид

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = Cv_i, \quad v_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j).$$

Будем считать z_i оценкой для v_i:

$$\dot{v}_i = Av_i + BK\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(z_i - z_j) + B\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(\xi_i - \xi_j) = Av_i + BKz_i - \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i} z_j + B\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(\xi_i - \xi_j),$$

$$\dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - Cv_i).$$

Рассмотрим ошибку оценки $e_i = v_i - z_i$:

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i - BK\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i} z_j + B\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(\xi_i - \xi_j). \tag{9}$$

Выделим два типа возмущений: внешнее возмущение ($\tilde{\xi}_i$) и неизвестное управление соседей (δ_i):

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + BK\delta_i + B\tilde{\xi}_i, \quad \delta_i = -\frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i} z_j, \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(\xi_i - \xi_j). \tag{10}$$

Обозначим суммарное возмущение как $f_i = K\delta_i + \tilde{\xi}_i$. Заметим, что мы знаем Ce_i. Таким образом, требуется рассмотреть асимптотические свойства следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + Bf_i, \quad y_i^e = Ce_i. \tag{11}$$

3.1. ЛОКАЛЬНЫЙ КАСКАДНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Система (11) повторяет структуру системы (5) из теоремы 2 о каскадном наблюдателе. Предположим, что выполняются другие условия теоремы, в частности устойчивость нулевой динамики и ограниченность входа f_i. Тогда можно построить каскадный наблюдатель типа (7), позволяющий получить асимптотически точную оценку e_i. Обозначим эту оценку как $\hat{e}_i$, а систему каскадных наблюдателей через оператор $S_{\sigma,\mu}$. Тогда $\hat{e}_i$ будет результатом применения оператора $S_{\sigma,\mu}$ к известному входу Ce_i:

$$\hat{e}_i = S_{\sigma,\mu}(Ce_i),$$

где $\sigma \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ — векторы коэффициентов каскадного наблюдателя, одинаковые для всех агентов. Оператор $S_{\sigma,\mu}$ состоит из $n-1$ систем (7) второго порядка, а также (если относительный порядок системы $r < n$) из наблюдателя для нулевой динамики порядка $(n-r)$.

3.2. ТЕОРЕМА О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим семейство систем достижения консенсуса с протоколом, при котором агенты не обмениваются информацией. Докажем теорему о достаточных условиях, когда можно построить локальный каскадный наблюдатель $S_{\sigma,\mu}$, чтобы оценить разницу между линейным наблюдателем z_i и средним отклонением от соседей v_i:

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = Cv_i,$$

$$v_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j), \quad e_i = v_i - z_i, \quad \hat{e}_i = S_{\sigma,\mu}(Ce_i). \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть для системы (12) выполнены предположения:*
1) для матриц F, K выполнено условие (4);
2) ξ_i — ограниченные помехи с общей для всех агентов мажорантой;
3) матрица $A+BK+FC$ гурвицева;
4) матрица $A+FC$ гурвицева;
5) система (A,B,C) обладает устойчивой нулевой динамикой.
Тогда существуют коэффициенты $\sigma\in\mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mu\in\mathbb{R}_+^{n-1}$, одинаковые для всех агентов, такие, что каскадный наблюдатель $\hat{e}_i$ даёт асимптотически точную оценку $e_i = v_i - z_i$.

Доказательство. Согласно классическому подходу к изучению устойчивости консенсуса необходимо выделить подсистему, отвечающую за ошибку консенсуса. Пусть $r^T\in\mathbb{R}^{1\times N}$ — левый собственный вектор матрицы Лапласа L и $r^T 1_N = 1$, где $1_N\in\mathbb{R}^N$ и состоит из единиц. Пусть $\Delta\in\mathbb{R}^{(N-1)\times N}$ — матрица полного ранга, ортогональная к 1_N. Тогда матрица T, составленная из r^T, Δ, является невырожденной. Можно показать, что обратная матрица будет состоять из 1_N, Δ^+, т.е.

$$T = \begin{bmatrix} r^T \\ \Delta \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1_N & \Delta^+ \end{bmatrix}.$$

Более того, известно, что можно выбрать матрицу Δ так, чтобы матрица $J = TLT^{-1}$ имела жорданову форму:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & * & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \Delta L \Delta^+.$$

Известно, что консенсус в системе достигается тогда и только тогда, когда

$$\bar{x} = (\Delta\otimes I_n)x = 0,$$

где $\bar{x}\in\mathbb{R}^{n(N-1)}$ описывает ошибку консенсуса, т.е. любой вектор v_i можно выразить через $\bar{x}$; с другой стороны, $\bar{x}$ можно выразить через $v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{pmatrix}$. Поэтому нам достаточно рассмотреть динамику $(\Delta\otimes I_n)x$.

Пусть x, z, ξ — конкатенация x_i, z_i, ξ_i. Перепишем систему (12) для x, z, ξ и матрицы Лапласа L:

$$\dot{x} = (I_N\otimes A)x + (I_N\otimes BK)z + (I_N\otimes B)\xi, \quad \dot{z} = (I_N\otimes(A+BK+FC))z - (L\otimes C)x.$$

Согласно [7] после ряда вычислений получим, что динамика $\bar{x} = (\Delta\otimes I_n)x$, $\bar{z} = (\Delta\otimes I_n)z$ замкнута относительно себя:

$$\dot{\bar{x}} = (I_{N-1}\otimes A)\bar{x} + (I_{N-1}\otimes BK)\bar{z} + (\Delta\otimes B)\xi, \quad \dot{\bar{z}} = (I_{N-1}\otimes(A+BK+FC))\bar{z} - (\Lambda\otimes C)\bar{x},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \bar{A}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \bar{B}\xi, \quad \bar{A} = \left(I_{N-1}\otimes\begin{bmatrix} A & BK \\ 0 & A+BK+FC \end{bmatrix}\right) + \left(\Lambda\otimes\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -FC & 0 \end{bmatrix}\right), \quad \bar{B} = \Delta\otimes\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если выполняются условия (4), то матрица $\bar{A}$ гурвицева. По условию теоремы ξ_i ограничены общей мажорантой. Это означает, что $\bar{x}$, $\bar{z}$ ограничены в установившемся режиме.

Ошибка линейного наблюдателя (9) зависит от z. Покажем, что вектор $\dot{z}$ тоже ограничен:

$$\dot{z} = (I_N \otimes (A + BK + FC))z - (L \otimes C)x. \tag{13}$$

Домножим L на $T^{-1}T$ и воспользуемся тем, что $L1_N = 0$:

$$L = LT^{-1}T = L\begin{bmatrix}1_N & \Delta^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r^T \\ \Delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & L\Delta^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r^T \\ \Delta\end{bmatrix} = L\Delta^+\Delta.$$

Используем полученное выражение для анализа $(L \otimes C)x$:

$$(L \otimes C)x = (L\Delta^+\Delta \otimes C)x = (L\Delta^+ \otimes C)(\Delta \otimes I_n)x = (L\Delta^+ \otimes C)\bar{x}.$$

Тогда (13) преобразуется в равенство

$$\dot{z} = (I_N \otimes (A + BK + FC))z - (L\Delta^+ \otimes C)\bar{x}. \tag{14}$$

Это означает, что z зависит не от всего вектора x, а только от ошибки консенсуса $\bar{x}$. А мы показали выше, что в установившемся режиме ошибка консенсуса ограничена. Матрица $A + BK + FC$ гурвицева по условию теоремы, поэтому согласно (14) вектор z тоже ограничен в установившемся режиме.

Вернёмся к ошибке линейного наблюдателя (10):

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + BK\delta_i + B\tilde{\xi}_i = (A + FC)e_i + Bf_i,$$

$$\delta_i = -\frac{1}{|N_i|}\sum_{j \in N_i} z_j, \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j \in N_i}(\xi_i - \xi_j).$$

Мы уже показали, что z_i ограничены в установившемся режиме, ξ_i ограничены по условию теоремы, поэтому δ_i, $\tilde{\xi}_i$ также ограничены, а значит, ограничена и помеха f_i в системе

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + Bf_i, \quad y_i^e = Ce_i.$$

По условию теоремы 3 матрица $A + FC$ гурвицева, а система (A, B, C) обладает устойчивой нулевой динамикой. Мы доказали, что, начиная с некоторого момента времени, f_i ограничена известной мажорантой, поэтому справедлива теорема 2 о супер-скручивающем наблюдателе. Значит, существуют параметры σ_i, μ_i, при которых каскадный наблюдатель $\hat{e}_i = S_{\sigma_i,\mu_i}(e_i)$ даёт асимптотически точную оценку e_i.

Если выбрать f_0 как максимальную мажоранту для f_i: $\|f_i\| \leqslant f_0$, то существуют параметры σ, μ, соответствующие f_0 и одинаковые для всех агентов, при которых $\hat{e}_i = S_{\sigma,\mu}(e_i)$ даёт асимптотически точную оценку e_i. Теорема доказана.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОВОЙ ОЦЕНКИ В УПРАВЛЕНИИ

Мы определили, при каких условиях можно построить наблюдатель, дающий асимптотически точную оценку. Обычно при построении наблюдателя стараются компенсировать управление, чтобы оно не влияло на оценку. Это невозможно, когда агент не знает управление соседей, поэтому использование оценки в управлении влияет на наблюдатель: управление становится новой помехой в наблюдателе. Далее покажем, когда можно использовать полученную оценку в управлении.

Рассмотрим систему (12), добавив новое управление g, которое учитывает новую оценку:

$$\dot{x}_i = Ax_i + B(Kz_i + g(z_i, \hat{e}_i)) + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = Cv_i,$$
$$v_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j), \quad e_i = v_i - z_i, \quad \hat{e}_i = S_{\sigma,\mu}(Ce_i). \tag{15}$$

Следствие. *Пусть для системы (15) выполняются условия теоремы 3. Пусть дополнительно функция g ограничена известной мажорантой. Тогда существуют коэффициенты $\sigma \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, одинаковые для всех агентов, такие, что каскадный наблюдатель $\hat{e}_i$ даёт асимптотически точную оценку $e_i = v_i - z_i$.*

Доказательство. Пусть функция g ограничена мажорантой g_0. Пусть помеха ξ_i ограничена мажорантой ξ_0. Тогда, если считать g новой помехой и соединить её с ξ, суммарная помеха не будет превышать $g_0 + \xi_0$. Далее нужно использовать теорему 3, заменив ξ на суммарную помеху. Так как условия теоремы 3 выполняются, то существуют коэффициенты наблюдателя, гарантирующие асимптотически точную оценку.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Покажем работу нового подхода на примере задачи из п. 3 про сравнение протоколов. Рассмотрим линейный протокол без коммуникации

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad v_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j), \quad y_i = Cv_i$$

и новый подход, где добавляется каскадный наблюдатель и ограниченное управление

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i + Bg(z_i, \hat{e}_i), \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i),$$
$$v_i = \frac{1}{|N_i|}\sum_{j\in N_i}(x_i - x_j), \quad y_i = Cv_i, \quad e_i = v_i - z_i, \quad \hat{e}_i = S_{\sigma,\mu}(Ce_i).$$

Чтобы сравнить прежний и новый подходы, проведём следующий численный эксперимент.

1. Зафиксируем число агентов, связи между ними (N_i) и уравнение динамики (A, B, C).
2. Выберем пару (K, F), одинаковую для двух подходов и удовлетворяющую теоремам 1 и 3.
3. Выберем вид помехи и ее мажоранту: $|\xi_i(t)| \leqslant \xi_0$ для любых i, t.
4. Выберем ограниченное управление g.
5. Выберем коэффициенты каскадного наблюдателя (σ, μ).
6. Сгенерируем 1000 траекторий системы при разных помехах на промежутке времени $[0, T]$ (в эксперименте $T = 100$).
7. Сравним ошибку консенсуса для линейного протокола и нового подхода.

5.1. ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ

Как и при сравнении протоколов в п. 3 рассмотрим систему из пяти агентов третьего порядка. Граф коммуникации агентов представлен на рис. 1. Матрицы агентов заданы в каноническом виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы A, B, C образуют систему с максимальным относительным порядком. Нулевая динамика отсутствует.

5.2. ВЫБОР МАТРИЦ K, F

Условия теоремы 3 включают в себя условия теоремы 1, поэтому можно выбрать одинаковые матрицы в обоих подходах. Мы зафиксировали одну пару матриц из множества пар, удовлетворяющих теоремам:

$$K = \begin{bmatrix} -18.292 & -47.217 & -35.483 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -50.009 & -32.640 & -45.849 \end{bmatrix}^T.$$

5.3. ВЫБОР ПОМЕХИ

Все помехи в эксперименте имеют мажоранту, равную единице. Рассматривались три вида помехи.

I. Сумма синусов и косинусов

$$\xi_i(t) = \sum_{n=0}^{5} a_{ni} \cos 2nt + \sum_{n=0}^{5} b_{ni} \sin(2n+1)t, \tag{16}$$

где коэффициенты a_{ni}, b_{ni} выбраны случайно для каждого эксперимента; ограничены сами коэффициенты $|a_{ni}| \leqslant 1$, $|b_{ni}| \leqslant 1$ и их сумма $\sum_{n=0}^{5} |a_{ni}| + \sum_{n=0}^{5} |b_{ni}| \leqslant 1$.

II. Синусы с разной частотой

$$\xi_i(t) = \sin(\omega_i t), \tag{17}$$

где ω_i выбраны случайно для каждого эксперимента из равномерного распределения $U(-1, 1)$.

III. Постоянный сигнал

$$\xi_i(t) = c_i = \mathrm{const}, \tag{18}$$

где c_i выбраны случайно для каждого эксперимента из равномерного распределения $U(-1, 1)$.

5.4. ВЫБОР ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

В качестве ограниченного управления g мы выбрали $g(z_i, \hat{e}_i) = \mathrm{sat}(K\hat{e}_i)$, где

$$\mathrm{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1, & x < -1. \end{cases}$$

Хотя сатурация не является идеальным способом получения ограниченного управления, она даёт уменьшение ошибки консенсуса и проста в реализации. Существуют более продвинутые методы синтеза ограниченного управления, но они в данной работе не рассматриваются.

5.5. КАСКАДНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Каскадный наблюдатель будет состоять из двух этапов:

$$y_e = y - Cz_i;$$
$$\varepsilon_1 = y_e - \hat{e}_{11}, \quad \dot{\hat{e}}_{11} = f_1 y_e + \hat{e}_{12} + k_1 \,\mathrm{sign}(\varepsilon_1)\sqrt{|\varepsilon_1|}, \quad \dot{\hat{e}}_{12} = f_2 y_e + \mu_1 \,\mathrm{sign}(\varepsilon_1);$$
$$\varepsilon_2 = \hat{e}_{12} - \hat{e}_{21}, \quad \dot{\hat{e}}_{21} = f_2 y_e + \hat{e}_{22} + k_2 \,\mathrm{sign}(\varepsilon_2)\sqrt{|\varepsilon_2|}, \quad \dot{\hat{e}}_{22} = f_3 y_e + \mu_2 \,\mathrm{sign}(\varepsilon_2).$$

Коэффициенты $k = 2$, $\mu = 3$ выбраны одинаковыми для всех агентов и этапов каскада.

5.6. ТРАЕКТОРИИ СИСТЕМЫ

Для каждого вида помехи из п. 5.3 мы рассчитали 1000 траекторий. Для каждой траектории выбрали нулевые начальные условия. Результат моделирования для одной траектории представлен на рис. 3, *а*. На рис. 3, *б* изображен пример помехи (16).

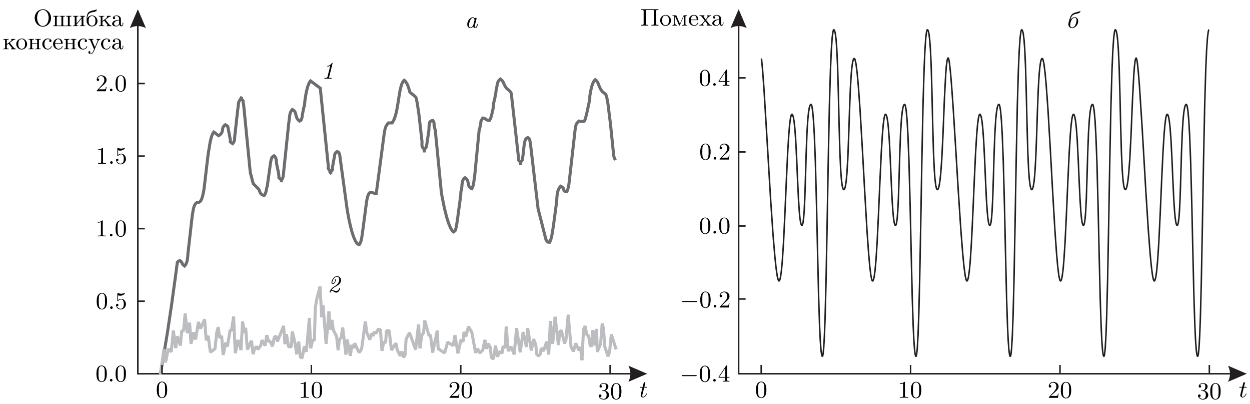


Рис. 3. Сравнение ошибки консенсуса при применении линейного протокола (*1*) и нового подхода (*2*) — *а*, и пример внешнего возмущения ξ_1 для одного агента — *б*.

5.7. СРАВНЕНИЕ ПОДХОДОВ

Для каждой траектории мы посчитали норму L_2 ошибки консенсуса v и помехи ξ:

$$\|x\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^{100} \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы определить, насколько хорошо управление подавляет помеху, среднее отношение нормы ошибки консенсуса к норме помехи взяли равным

$$\frac{1}{1000} \sum_{1}^{1000} \frac{\|v\|_{L_2}}{\|\xi\|_{L_2}}. \tag{19}$$

Результаты экспериментов приведены в таблице. Эксперименты отличаются коэффициентами помехи, которые выбираются случайным образом. Видно, что новый подход снизил среднюю ошибку консенсуса примерно в 10 раз.

Среднее отношение нормы ошибки консенсуса к норме помехи на основе 1000 экспериментов

Вид помехи	Линейный протокол	Новый подход
I (16)	3.04	0.33
II (17)	3.90	0.44
III (18)	3.93	0.35

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях действия ограниченных возмущений на мультиагентную систему линейный протокол консенсуса без коммуникации становится уязвимым из-за необходимости бóльших коэффициентов обратной связи для сокращения ошибки консенсуса. Для решения этой проблемы можно использовать нелинейные наблюдатели для каждого агента, оценивающие ошибку линейного наблюдателя. Мы выбрали каскадный наблюдатель на основе супер-скручивания, который эффективно оценивает устойчивые системы с ограниченной помехой.

Доказаны достаточные условия существования нелинейного наблюдателя и установлено, что его оценку возможно применять внутри ограниченного управления.

Моделирование показало, что наш подход позволяет снизить ошибку консенсуса для систем без коммуникации. Интересно, возможно ли полностью компенсировать помеху, используя более продвинутые методы ограниченного управления? Поиск ответа на этот вопрос может стать предметом будущих исследований.

В нашей работе мы рассматриваем агентов как SISO системы с устойчивой нулевой динамикой, поэтому другим возможным направлением продолжения исследований является расширение допустимого класса агентов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dorri, A. Multi-agent systems: a survey / A. Dorri, S.S. Kanhere, R. Jurdak // IEEE Access. — 2018. — V. 6. — P. 28573–28593.
2. Hamann, H. Swarm Robotics: A Formal Approach / H. Hamann. — Cham : Springer, 2018.
3. Saber, R.O. Consensus protocols for networks of dynamic agents / R.O. Saber, R.M. Murray // Proceed. of the 2003 American Control Conf. — Denver, Colorado, USA : IEEE, 2003. — V. 2. — P. 951–956.
4. Li, Z. Dynamic consensus of linear multi-agent systems / Z. Li, Z. Duan, G. Chen // IET Control Theory Appl. — 2011. — V. 5, № 1. — Art. 19.
5. Adaptive consensus control of linear multiagent systems with dynamic event-triggered strategies / W. He, D. Xu, Q.-L. Han, F. Qian // IEEE Trans. Cybern. — 2020. — V. 50, № 7. — P. 2996–3008.
6. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint / Z. Li, Z. Duan, G. Chen, L. Huang // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 2010. — V. 57, № 1. — P. 213–224.
7. A new observer-type consensus protocol for linear multi-agent dynamical systems / Y. Zhao, G. Wen, Z. Duan [et al.] // Asian J. Control. — 2013. — V. 15, № 2. — P. 571–582.
8. Фомичёв, В.В. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком / В.В. Фомичёв, А.О. Высоцкий // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 567–573.
9. Sliding mode fault tolerant consensus control for multi-agent systems based on super-twisting observer / P. Yang, X. Hu, Z. Wang, Z. Zhang // J. of Syst. Engineer. and Electron. — 2022. — V. 33, № 6. — P. 1309–1319.
10. Емельянов, С.В. Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка / С.В. Емельянов, С.К. Коровин, Л.В. Левантовский // Мат. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 89–100.
11. Seeber, R. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm / R. Seeber, M. Horn // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). Graz : IEEE, 2018. — P. 120–125.
12. Bagge Carlson, F. ControlSystems.jl: a control toolbox in Julia / F. Bagge Carlson, M. Fält, A. Heimerson, O. Troeng // 60th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). Austin, TX, USA : IEEE, 2021. — P. 4847–4853.

CASCADE SUPER-TWISTING OBSERVER FOR LINEAR MULTI-AGENT SYSTEMS WITHOUT COMMUNICATION

V. V. Fomichev[1], A. I. Samarin[2]

[1]*Department of Mahtematics, School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang, China*
[1]*Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia*
[1,2]*Lomonosov Moscow State University, Russia*
e-mail: [1]fomichev@cs.msu.su, [2]samarin_aleksei@icloud.com

The paper addresses the consensus problem (i.e., the agreement of phase vectors) for a multi-agent system consisting of identical linear agents. The study focuses on the case where there is no communication between agents, meaning there is no exchange of information, and agent control is achieved through the agents' own sensors, providing incomplete information about the phase vector of the agent and its neighbors, with the information possibly being noisy. To solve this problem, a linear protocol based on observer data for systems under uncertainty is proposed. Cascade observers based on the "super-twisting" method are suggested as such observers. Sufficient conditions for the existence of a controller are obtained, where the observation error converges to zero under limited disturbances. An example illustrating the proposed approach is provided.

Keywords: multiagent systems, super-twisting observer, consensus, linear agents.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00288).

REFERENCES

1. Dorri, A. Multi-agent systems: a survey / A. Dorri, S.S. Kanhere, R. Jurdak // IEEE Access. — 2018. — V. 6. — P. 28573–28593.
2. Hamann, H. Swarm Robotics: A Formal Approach / H. Hamann. — Cham : Springer, 2018.
3. Saber, R.O. Consensus protocols for networks of dynamic agents / R.O. Saber, R.M. Murray // Proceed. of the 2003 American Control Conf. — Denver, Colorado, USA : IEEE, 2003. — V. 2. — P. 951–956.
4. Li, Z. Dynamic consensus of linear multi-agent systems / Z. Li, Z. Duan, G. Chen // IET Control Theory Appl. — 2011. — V. 5, № 1. — Art. 19.
5. Adaptive consensus control of linear multiagent systems with dynamic event-triggered strategies / W. He, D. Xu, Q.-L. Han, F. Qian // IEEE Trans. Cybern. — 2020. — V. 50, № 7. — P. 2996–3008.
6. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint / Z. Li, Z. Duan, G. Chen, L. Huang // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 2010. — V. 57, № 1. — P. 213–224.
7. A new observer-type consensus protocol for linear multi-agent dynamical systems / Y. Zhao, G. Wen, Z. Duan [et al.] // Asian J. Control. — 2013. — V. 15, № 2. — P. 571–582.
8. Fomichev, V.V. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order / V.V. Fomichev, A.O. Vysotskii // Differ. Equat. — 2019. — V. 55, № 4. — P. 553–560.
9. Sliding mode fault tolerant consensus control for multi-agent systems based on super-twisting observer / P. Yang, X. Hu, Z. Wang, Z. Zhang // J. of Syst. Engineer. and Electron. — 2022. — V. 33, № 6. — P. 1309–1319.
10. Emelyanov, S.V. A new class of second-order sliding mode algorithms / S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, L.V. Levantovsky // Matematicheskoye modelirovaniye. — 1990. — V. 2, № 3. — P. 89–100. [in Russian]
11. Seeber, R. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm / R. Seeber, M. Horn // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). Graz : IEEE, 2018. — P. 120–125.
12. Bagge Carlson, F. ControlSystems.jl: a control toolbox in Julia / F. Bagge Carlson, M. Fält, A. Heimerson, O. Troeng // 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Austin, TX, USA: IEEE, 2021. — P. 4847–4853.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 273–279

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.54

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Я. Т. Султанаев[1], Н. Ф. Валеев[2], Э. А. Назирова[3]

[1]*Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, г. Уфа*
[1]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
[2]*Институт математики с вычислительным центром*
Уфимского федерального исследовательского центра РАН, г. Уфа
[3]*Уфимский университет науки и технологий*
e-mail: [1]sultanaevyt@gmail.com, [2]valeevnf@yandex.ru, [3]ellkid@gmail.com

Поступила в редакцию 13.08.2023 г., после доработки 03.12.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассмотрено развитие метода построения асимптотических формул при $x\to+\infty$ фундаментальной системы решений двучленных сингулярных симметрических дифференциальных уравнений нечётного порядка с коэффициентами из широкого класса функций, допускающих осцилляцию (с ослабленными условиями на регулярность, не удовлетворяющими классическим условиям регулярности Титчмарша–Левитана). На примере двучленного уравнения третьего порядка $(i/2)\big[(p(x)y')''+(p(x)y'')'\big]+q(x)y=\lambda y$ исследована асимптотика решений при различном поведении коэффициентов $q(x)$, $h(x)=-1+1/\sqrt{p(x)}$. Получены новые асимптотические формулы для случая, когда $h(x)\notin L_1[1,\infty)$.

Ключевые слова: асимптотический метод, осциллирующий коэффициент, сингулярное дифференциальное уравнение нечётного порядка, тождество Кэмпбелла, квазипроизводная, матрица Шина–Зеттла.

DOI: 10.31857/S0374064124020091, EDN: QFFECV

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений (ФСР) двучленного уравнения чётного порядка

$$(-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)}+q(x)y=\lambda y,\quad x\in[1,\infty),$$

где p — локально суммируемая функция, допускающая представление $p(x)=(1+r(x))^{-1}$, $r\in L_1[1,\infty)$; q — обобщённая функция, представимая при некотором фиксированном k, $0\leqslant k\leqslant n$, в виде $q=\sigma^{(k)}$ ($\sigma\in L_1[1,\infty)$, если $k<n$, $|\sigma|(1+|r|)(1+|\sigma|)\in L_1[1,\infty)$, если $k=n$).

В отличие от уравнений чётного порядка, уравнения нечётного порядка для классов нерегулярных в смысле Титчмарша–Левитана коэффициентов менее исследованы. Отметим, что в статьях [2–4] рассмотрена асимптотика решений уравнений нечётного порядка для некоторых классов коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$.

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $x\to+\infty$ ФСР для двучленных уравнений нечётного порядка вида

$$ly=\frac{i}{2}\big[(p(x)y^{(n)})^{(n+1)}+(p(x)y^{(n+1)})^{(n)}\big]+q(x)y=\lambda y,\quad x\geqslant 1.\qquad(1)$$

Ниже будем следовать подходу, предложенному в работах [3–6]. Он может быть реализован и для двучленного уравнения произвольного нечётного порядка с коэффициентом при старшей производной, отличным от постоянной.

Основная цель настоящей работы — исследовать асимптотику ФСР для случаев различного поведения коэффициентов $q(x)$, $h(x)=-1+1/\sqrt{p(x)}$ на примере уравнения третьего порядка

$$ly=\frac{i}{2}\big[(p(x)y')''+(p(x)y'')'\big]+q(x)y=\lambda y. \tag{2}$$

1. ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИПРОИЗВОДНЫХ

Запишем уравнение (2) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Для этого воспользуемся аппаратом квазипроизводных (см. подробнее в [2, 7]). Определим функцию $q_1(x)$ так, что $q_1'(x)=q(x)$, и введём в рассмотрение квазипроизводные по следующим формулам:

$$z_1=y,\quad z_2=\sqrt{p}y'=\sqrt{p}z_1',\quad z_3=\sqrt{p}(\sqrt{p}y')'-iq_1(x)y=\sqrt{p}z_2'-iq_1(x)z_1,$$

откуда найдём

$$z_3'=-\frac{iq_1(x)}{\sqrt{p(x)}}z_2+\lambda z_1.$$

Тогда уравнение (2) равносильно системе

$$\mathbf{z}'=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{p} & 0\\ iq_1/\sqrt{p} & 0 & 1/\sqrt{p}\\ -i\lambda & -iq_1/\sqrt{p} & 0\end{pmatrix}\mathbf{z},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

которую, учитывая, что $1/\sqrt{p(x)}=1+h(x)$, перепишем в виде

$$\mathbf{z}'=[L_0+h(x)L_1+iq_1(x)(1+h(x))L_2]\mathbf{z},$$

$$L_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -i\lambda & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

2. СЛУЧАЙ 1

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$h(x)\in L_1[1,\infty),\quad q_1(x)\in L_1[1,\infty).$$

Данные условия выполняются, например, для функций

$$h(x)=\frac{a}{x^{\gamma}},\quad \gamma>1;\quad q(x)=x^{\alpha}\sin x^{\beta},\quad \alpha>0,\quad \beta>\alpha+2.$$

Пусть постоянная матрица T приводит матрицу L_0 к диагональному виду. Сделаем замену

$$\mathbf{z}=T\mathbf{u},\quad T^{-1}L_0T=\Lambda,\quad \mu_i^3=-i\lambda,\quad i=1,2,3,$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2\end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3) запишем как

$$\mathbf{u}' = \left[\Lambda + h(x)T^{-1}L_1T + iq_1(x)(1+h(x))T^{-1}L_2T\right]\mathbf{u}. \tag{4}$$

Очевидно, что в силу наложенных условий система (4) удовлетворяет условиям леммы 1 из [8, с. 284] и является L-диагональной, а значит, мы можем выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для ФСР этой системы:

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = T\mathbf{u}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1,2,3,$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы.

Отметим, что аналогичные результаты для уравнений нечётного порядка были получены в работе [2].

3. СЛУЧАЙ 2

Положим $\tilde q_1(x) = q_1(x)(1+h(x))$. Пусть функция $\tilde q_2(x)$ такая, что $\tilde q_2'(x) = \tilde q_1(x)$. Предположим, что выполняются условия

$$h(x) \in L_1[1,\infty), \quad \tilde q_2 \in L_1[1,\infty),$$

например, для функций

$$h(x) = \frac{1}{x^\gamma}, \quad \gamma > 1; \quad q(x) = x^\alpha \sin x^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > \frac{\alpha+3}{2}.$$

Следуя подходу, изложенному в работах [3–6], замена

$$\mathbf{z} = e^{\tilde q_2(x)L_2}\mathbf{u} \tag{5}$$

переводит (3) в систему

$$\mathbf{u}' = e^{-\tilde q_2(x)L_2}(L_0 + h(x))L_1 e^{-\tilde q_2(x)L_2}\mathbf{u}. \tag{6}$$

Применим тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа для преобразования правой части (6):

$$e^{-\tilde q_2(x)L_2}L_0 e^{\tilde q_2(x)L_2} = L_0 - \tilde q_2(x)[L_2,L_0] + \frac{\tilde q_2(x)^2}{2!}[L_2,[L_2,L_0]] - \frac{\tilde q_2(x)_1^3}{3!}[L_2,[L_2,[L_2,L_0]]] + \ldots,$$

здесь $[A,B] = AB - BA$ — матричный коммутатор. Вычисляя последовательно коммутаторы в правой части последнего соотношения, получаем, что все слагаемые, начиная с пятого, равны нулю, а ненулевые слагаемые могут быть найдены:

$$[L_2,L_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [L_2,[L_2,L_0]] = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [L_2,[L_2,[L_2,L_0]]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные вычисления можно провести для правой части соотношения

$$e^{-\tilde q_2(x)L_2}L_1 e^{-\tilde q_2(x)L_2} = L_1 - \tilde q_2(x)[L_2,L_1] + \frac{\tilde q_2^2(x)}{2!}[L_2,[L_2,L_1]] - \frac{\tilde q_2^3(x)}{3!}[[L_2,[L_2,[L_2,L_1]]] + \ldots$$

Учитывая, что $[L_2,L_0] = [L_2,L_1]$, запишем систему (6) в виде

$$\mathbf{u}' = \left[L_0 + hL_1 - \tilde q_2(1+h)[L_2,L_1] + \frac{\tilde q_2^2(1+h)}{2!}[L_2[L_2,L_1]] - \frac{\tilde q_2^3(1+h)}{3!}\,[L_2,[L_2,[L_2,L_1]]]\right]\mathbf{u}.$$

В силу условий на функции $h(x)$ и $q(x)$ запишем последнюю систему как

$$\mathbf{u}' = (L_0 + D(x))\mathbf{u},$$

где $D(x)$ — матрица, элементы которой принадлежат пространству $L_1[1,\infty)$. Как и в случае 1, сделаем замену $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$, тогда

$$\mathbf{v}' = (\Lambda + T^{-1}D(x)T)\mathbf{v}. \tag{7}$$

Система (7) удовлетворяет условиями леммы 1 в [7, с. 288] и является L-диагональной, а значит, с учётом (5) мы можем выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для её ФСР:

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1,2,3.$$

4. СЛУЧАЙ 3

Рассмотрим далее ситуацию, когда функция $h(x)$ не суммируема. Отметим, что она может принадлежать одному из классов осциллирующих функций (подробнее см. в [6]).

Обозначим через $h_1(x)$ функцию, такую что $h_1' = h(x)$, и предположим

$$h_1(x) \in L_1[1,\infty), \quad \tilde{q}_1(x) \in L_1[1,\infty).$$

Данные условия выполняются, например, для функций

$$h(x) = \sin x^{\gamma}, \quad \gamma > 2; \quad q(x) = x^{\alpha}\sin x^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \gamma \neq \beta > \alpha + 2.$$

Замена

$$\mathbf{z} = e^{h_1 L_1}\mathbf{u}$$

приводит (5) к виду

$$\mathbf{u}' = e^{-h_1 L_1}(L_0 + i\tilde{q}_1(x))L_2 e^{-h_1 L_1}\mathbf{u}. \tag{8}$$

Как и случае 2, применим тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа для преобразования правой части системы (8):

$$e^{-h_1 L_1}L_0 e^{-h_1 L_1} = L_0 - h_1[L_1, L_0] + \frac{h_1^2}{2!}[L_1,[L_1,L_0]] - \frac{h_1^3}{3!}\big[L_1,[L_1,[L_1,L_0]]\big] + \ldots$$

Вычисляя последовательно коммутаторы в правой части последнего соотношения, получаем, что все слагаемые, начиная с шестого, равны нулю, а оставшиеся могут быть вычислены:

$$e^{-h_1 L_1}L_0 e^{-h_1 L_1} = L_0 - \lambda h_1 L_2 + \frac{\lambda h_1^2}{2!}[L_1,L_2] - \frac{\lambda h_1^3}{3!}[L_1,[L_1,L_2]] + \frac{\lambda h_1^4}{4!}\big[L_1,[L_1,[L_1,L_2]]\big],$$

$$[L_1,L_2] = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad [L_1,[L_1,L_2]] = \begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad [L_1,[L_1,[L_1,L_2]]] = \begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$e^{-h_1 L_1}L_2 e^{-h_1 L_1} = L_2 - h_1[L_1,L_2] + \frac{h_1^2}{2!}[L_1,[L_1,L_2]] - \frac{h_1^3}{3!}\big[L_1,[L_1,[L_1,L_2]]\big] + \ldots =$$

$$= L_2 - h_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{h_1^2}{2!}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \frac{h_1^3}{3!}\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

С учётом последних выкладок получим представление для системы (8):

$$\mathbf{u}' = \biggl(L_0 + (\tilde{q}_1 - \lambda h_1)L_2 - h_1\Bigl(\tilde{q}_1 - \frac{\lambda h_1}{2}\Bigr)[L_2, L_1] + \frac{h_1^2}{2!}\Bigl(\tilde{q}_1 - \frac{\lambda h_1}{3}\Bigr)[L_1, [L_1, L_2]] - \\ - \frac{h_1^3}{3!}\Bigl(\tilde{q}_1 - \frac{\lambda h_1}{3}\Bigr)\bigl[L_1, [L_1, [L_1, L_2]]\bigr]\biggr)\mathbf{u}.$$

В силу условий на функции $h(x)$, $q(x)$ эта система может быть записана в виде

$$\mathbf{u}' = (L_0 + C(x))\mathbf{u},$$

где $C(x)$ — матрица, элементы которой принадлежат $L_1[1,\infty)$. Аналогично случаям 1 и 2 сделаем замену $\mathbf{u} = T\mathbf{v}$ и получим

$$\mathbf{v}' = (\Lambda + T^{-1}C(x)T)\mathbf{v}. \tag{9}$$

Система (9) удовлетворяет условиями леммы 1 в [7, с. 288] и является L-диагональной, а значит, мы можем выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$ для её ФСР:

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1, 2, 3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов вытекает справедливость теоремы об асимптотическом поведении при $x \to +\infty$ фуднаментальной системы решений уравнения (3). Сформулируем её в терминах собственных значений и векторов матрицы L_0 и функций $h(x)$, $q_1(x)$.

Теорема. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

1) $h(x), q_1(x) \in L_1[1,\infty)$;

2) $h(x), \int_x^\infty q_1(\xi)(1 + h(\xi))\,d\xi \in L_1[1,\infty)$;

3) $\int_x^\infty h(\xi)\,d\xi, q_1(x)(1 + h(x)) \in L_1[1,\infty)$.

Тогда для решений системы уравнений (3) при $x \to +\infty$ *справедливо представление*

$$\mathbf{z}_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}T(\mathbf{e}_i + o(1)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Замечание 1. Элементами вектор-функции $\mathbf{z}_i(x,\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, являются решения уравнения (2) и их квазипроизводные. В частности, для ФСР уравнения (2) при $x \to +\infty$ справедливы следующие формулы:

$$y_i(x,\lambda) = e^{\mu_i x}(1 + o(1)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Замечание 2. Методы изучения решений сингулярных ОДУ с коэффициентами из классов осциллирующих функций, изложенные и реализованные в данной работе и в работах [3–5], могут быть применены к иследованию уравнений произвольного порядка, в том числе к уравнению (1).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Я.Т. Султанаева и Э.А. Назировой выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00580).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конечная, Н.Н. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами / Н.Н. Конечная, К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 2018. — Т. 104, № 2. — С. 231–242.
2. Мирзоев, К.А. Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечётного порядка / К.А. Мирзоев, Н.Н. Конечная // Вестн. Московского. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2020. — № 1. — С. 23–28.
3. Султанаев, Я.Т. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений нечётного порядка с осциллирующими коэффициентами / Я.Т. Султанаев, А.Р. Сагитова, Б.И. Марданов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 717–720.
4. Валеев, Н.Ф. Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечётного порядка с осциллирующими коэффициентами / Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Мат. заметки. — 2021. — Т. 109, № 6. — С. 938–943.
5. Валеев, Н.Ф. О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений / Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Уфимский мат. журн. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 9–15.
6. Валеева, Л.Н. Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами / Л.Н. Валеева, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев // Мат. заметки. — 2022. — Т. 112, № 6. — С. 1059–1064.
7. Everitt, W.N. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators / W.N. Everitt, L. Markus. — Amer. Math. Soc., 1999.
8. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 526 с.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THIRD-ORDER BINOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ya. T. Sultanaev[1], N. F. Valeev[2], E. A. Nazirova[3]

[1]Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia
[1]Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia
[2]Institute of Mathematics with Computing Centre-Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Ufa, Russia
[3]Ufa University of Science and Technology, Russia
e-mail: [1]sultanaevyt@gmail.com, [2]valeevnf@yandex.ru, [3]ellkid@gmail.com

The paper discusses the development of a method for constructing asymptotic formulas for $x\to\infty$ of a fundamental system of solutions of two-term singular symmetric differential equations of odd order with coefficients from a wide class of functions that allow oscillation (with weakened regularity conditions that do not satisfy the classical Titchmarsh–Levitan regularity conditions). Using the example of a third-order binomial equation $(i/2)\big[(p(x)y')''+(p(x)y'')'\big]+q(x)y=\lambda y$ the asymptotics of solutions in the case of different behavior of the coefficients $q(x)$ is studied, $h(x)=-1+1/\sqrt{p(x)}$. New asymptotic formulas are obtained for the case when $h(x)\notin L_1[1,\infty)$.

Keywords: asymptotic method, oscillating coefficient, singular differential equation of odd order, Campbell's identity, quasi-derivatives, Shin–Zettl matrix.

FUNDING

Research by Ya.T. Sultanaev and E.A. Nazirova was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00580).

REFERENCES

1. Konechnaja, N.N. On the asymptotic behavior of solutions to two-term differential equations with singular coefficients / N.N. Konechnaja, K.A. Mirzoev, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2018. — V. 104, № 2. — P. 244–252.
2. Mirzoev, K.A. Asymptotics of solutions to linear differential equations of odd order / K.A. Mirzoev, N.N. Konechnaja // Moscow Univ. Math. Bull. — 2020. — V. 75, № 1. — P. 22–26.
3. Sultanaev, Ya.T. On the asymptotic behavior of solutions of odd-order differential equations with oscillating coefficients / Ya.T. Sultanaev, A.R. Sagitova, B.I. Mardanov // Differ. Equat. — 2022. — V. 58, № 5. — P. 712–715.
4. Valeev, N.F. On a method for studying the asymptotics of solutions of odd-order differential equations with oscillating coefficients / N.F. Valeev, É.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev // Math. Notes. — 2021. — V. 109, № 6. — P. 980–985.
5. Valeev, N.F. On a new approach for studying asymptotic behavior of solutions to singular differential equations / N.F. Valeev, E.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev // Ufa Math. J. — 2015. — V. 7, № 3. — P. 9–14.
6. Valeeva, L.N. On a method for studying the asymptotics of solutions of Sturm–Liouville differential equations with rapidly oscillating coefficients / L.N. Valeeva, E.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev // Math. Notes. — 2022. — V. 112, № 6. — P. 1059–1064.
7. Everitt, W.N. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators / W.N. Everitt, L. Markus. — Amer. Math. Soc., 1999.
8. Naimark, M.A. Linear Differential Operators / M.A.Naimark. — Moscow : Nauka, 1969. — 526 p. [in Russian]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 280–288

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2023. Т. 59. № 8; за дополнительной информацией обращаться по адресу: deq@cs.msu.ru)**)

EDN: QDQAKH

А. В. Ильин, А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова (МГУ ВМК, Москва, Россия) "О задаче стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с соизмеримыми запаздываниями" (18.12.2023).

В настоящей работе исследуется задача цифровой стабилизации переключаемой интервальной линейной системы в случае, когда её режимы имеют различные запаздывания в управлении, а именно, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t)=[A_\sigma]x(t)+[b_\sigma]u(t-\theta_\sigma), \quad y(t)=[c_\sigma]x(t), \quad \sigma\in S_{0,\gamma}, \quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

где $\sigma:\mathbb{R}_+\to I=\{1,\ldots,m\}$ — полунепрерывная справа кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал); $S_{0,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ, точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, γ — некоторое положительное число, а $l=0,1,2,\ldots$; $x\in\mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $y\in\mathbb{R}$ — измеряемый скалярный выход; $u\in\mathbb{R}$ — управляющий вход; $[A_\sigma]=[A]\circ\sigma$ — композиция отображения $[A]:I\to\{[A_1],\ldots,[A_m]\}$ и переключающего сигнала σ; $[b_\sigma]=[b]\circ\sigma$, $[c_\sigma]=[c]\circ\sigma$ и $\theta_\sigma=\theta\circ\sigma$ — аналогичные композиции для отображений $[b]:I\to\{[b_1],\ldots,[b_m]\}$ и $[c]:I\to\{[c_1],\ldots,[c_m]\}$, $\theta:I\to\{\theta_1,\ldots,\theta_m\}$ ($[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$ $(i=\overline{1,m})$ — интервальные матрицы соответствующих размеров). Здесь $\theta_i>0$ — величины постоянных запаздываний, причём θ_i/θ_j — рациональное число для любой пары $i,j\in I$.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим переключаемой системы (1), описываемый интервальной линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t)=[A_i]x(t)+[b_i]u(t-\theta_i), \quad y(t)=[c_i]x(t).$$

Решением уравнения состояния системы (1) при фиксированных тройках (c_i,A_i,b_i) $(c_i\in\in[c_i],\ A_i\in[A_i],\ b_i\in[b_i],\ i=\overline{1,m})$, заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t)\equiv 0$ при $t\leqslant 0$), переключающем сигнале $\sigma\in S_{0,\gamma}$ и начальном условии $x(0)=x_0$ является решение соответствующей линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x}=A_{\sigma(t)}x+b_{\sigma(t)}u(t-\theta_{\sigma(t)}), \quad x(0)=x_0.$$

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Требуется для переключаемой линейной системы (1) с заданным числом $\gamma > 0$ и ненаблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in S_{0,\gamma}$ построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{[t/T]} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,T), \\ 0, & t \notin [0,T), \end{cases} \tag{2}$$

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \tag{3}$$

обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma]u(t-\theta_\sigma), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + q[c_\sigma]x[lT], \quad \sigma(t) \in S_{0,\gamma}, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$u(t-\theta_i) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{[t-\theta_i/T]} (Hv[lT] + h[c_\sigma]x[lT])S(t-\theta_i-jT), & \text{если } t \geqslant \theta_i, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant t < \theta_i. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы, $l = [t/T]$, т.е.

$$lT \leqslant t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$, существует $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\gamma = l_0 T$, и для любого i найдётся такое $l_i \in \mathbb{N}$, что $\theta_i = l_i T$), $[\cdot]$ — целая часть действительного числа, $Q \in R^{r\times r}$, $q \in R^{r\times 1}$, $H \in R^{1\times r}$, $h \in R$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определённые на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [1, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) называем *глобально равномерно асимптотически устойчивой*, а регулятор (2), (3) *стабилизирующим*, если при любых фиксированных тройках (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = \overline{1,m}$) для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty, \quad l = \left[\frac{t}{T}\right].$$

Для решения поставленной задачи предлагается применять подходы, разработанные в статьях [2–4], где исследовались проблемы цифровой стабилизации переключаемых интервальных линейных систем и переключаемых линейных систем с запаздыванием в управлении, одинаковом для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для решения первой проблемы в [3, 4] используется метод дискретизации переключаемой интервальной системы с дальнейшим поиском динамического дискретного регулятора на основе линейных матричных неравенств. В работе [2] предлагается подход для решения второй проблемы, включающий два основных шага — переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Модифицируя указанные подходы с учётом наличия соизмеримых запаздываний в режимах исходной переключаемой системы (1), разработана общая схема построения цифрового регулятора (2), (3), включающая следующие основные шаги:

1) переход от непрерывной системы (1) к её точной дискретной модели с учётом, что на её входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель фактически представляет собой семейство переключаемых дискретных систем с режимами, описывае-

мыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);

2) построение интервального расширения для полученной дискретной модели;

3) приведение режимов полученной переключаемой линейной интервальной дискретной системы к единому порядку на основе метода расширения динамического порядка [5, с. 205];

4) построение процедуры численного поиска стабилизирующего дискретного регулятора вида (3) с использованием достаточного условия устойчивости переключаемых интервальных дискретных систем на основе метода функций Ляпунова [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Литература. 1. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие / К.Ю. Поляков. — СПб. : СПбГМТУ, 2002. — 154 с. 2. Фурсов, А.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, В.С. Гусева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1132–1141. 3. Фурсов, А.С. Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы / А.С. Фурсов, С.И. Миняев, Ю.М. Мосолова // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1545–1559. 4. Фурсов, А.С. Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы / А.С. Фурсов, Ю.М. Мосолова, С.И. Миняев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1516–1527. 5. Фурсов, А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов / А.С. Фурсов. — М. : Аргамак-Медиа, 2016. — 238 с.

В. Е. Хартовский (ФИТМ ГрГУ имени Я. Купалы, Гродно, Беларусь) “К вопросу назначения конечного спектра линейной системе нейтрального типа” (16.10.2023).

Объект исследования — линейная автономная система нейтрального типа

$$\dot{x}(t)-D(\lambda_h)\dot{x}(t)=A(\lambda_h)x(t)+B(\lambda_h)u(t), \quad t>0, \tag{1}$$

$$y(t)=C(\lambda_h)x(t), \quad t\geqslant 0. \tag{2}$$

Здесь $x(t)\in\mathbb{R}^n$ — решение уравнения (1); $u(t)\in\mathbb{R}^l$ — управление, выбираемое из класса кусочно-непрерывных функций; $y(t)\in\mathbb{R}^r$ — наблюдаемый выход; λ_h — оператор сдвига, определяемый для заданного $h>0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t)=f(t-kh)$, $k\in\mathbb{N}$;

$$D(\lambda)=\sum_{i=1}^m \lambda^i D_i, \quad A(\lambda)=\sum_{i=0}^m \lambda^i A_i, \quad C(\lambda)=\sum_{i=0}^m \lambda^i C_i, \quad B(\lambda)=\sum_{i=0}^m \lambda^i B_i,$$

где $D_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i\in\mathbb{R}^{l\times n}$, $B_i\in\mathbb{R}^{n\times r}$.

Пусть $I_i\in\mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, $W(p)=p(I_n-D(e^{-ph}))-A(e^{-ph})$ — характеристическая матрица уравнения (1). Спектр (множество собственных значений) разомкнутой ($u\equiv 0$) системы (1) совпадает с множеством корней уравнения $\det W(p)=0$, которое в подробной записи имеет вид $\sum_{i=0}^n p^i g_i(e^{ph})=0$, где $g_i(\cdot)$ — некоторые полиномы, $g_n(0)=1$. Из этого уравнения видно, что спектр системы (1) состоит из бесконечного числа чисел.

Задача назначения конечного спектра заключается в построении регулятора с обратной связью такого, чтобы замкнутая система имела наперёд заданный конечный набор собственных значений, состоящий, как правило, из произвольных чисел с отрицательными действительными частями. Такая задача исследовалась многими авторами, наиболее важные результаты в этом направлении, а также решение более общей задачи модального управления (управления при помощи обратной связи коэффициентами характеристического уравнения) обсуждаются в работах [1, 2] (см. Введение). В статье [3] для систем запаздывающего типа с одним входом предложен алгебраический подход, позволяющий с единой позиции подойти к решению задач назначения конечного спектра и полной управляемости. При исследовании проблемы управления коэффициентами характеристического уравнения системы нейтрального типа (1) установлено [4], что в случае выполнения условия модальной управляемости исходную задачу можно свести к аналогичной задаче для системы запаздывающего типа с одним входом и дальнейшее исследование провести методами, описанными в [3]. Там же показано, что задача назначения конечного спектра разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача модальной управляемости. Систематизация подхода [4], а также исследование ослабленного варианта задачи модальной управляемости выполнены в статье [5, с. 321]. В настоящем сообщении методы [4, 5] обобщены на задачу назначения конечного спектра. Однако, в отличие от работ [4, 5], регулятор построен по неполным измерениям, определяемым наблюдаемым выходом (2). Основная идея заключена в модификации структуры регуляторов [4; 5, с. 321] посредством встраивания в их внутренний контур системы точной оценки решения, основанной на использовании конструкций финитных наблюдателей, разработанных в [5, 6]. Перейдём к постановке задачи.

Определим регулятор с обратной связью по выходу следующего вида:

$$u(t)=\mathfrak{R}_{01}[x_1(t)]+\mathfrak{R}_{00}[y(t)],\quad \dot{x}_1(t)=\mathfrak{R}_{11}[x_1(t)]+\mathfrak{R}_{10}[y(t)]. \tag{3}$$

Здесь $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ — вспомогательная переменная, операторы $\mathfrak{R}_{ij}[\cdot]$ определяются на множестве непрерывных функций $\varphi(t)$, имеющих кусочно-непрерывную производную, по правилу

$$\mathfrak{R}_{ij}[\varphi(t)]=R^0_{ij}(\lambda_h)\varphi(t)+\lambda_h R^1_{ij}(\lambda_h)\dot{\varphi}(t)+\int\limits_0^{h_0}\widehat{R}_{ij}(s)\varphi(t-s)ds, \tag{4}$$

где $R^0_{ij}(\lambda_h)$, $R^1_{ij}(\lambda_h)$ — заданные полиномиальные матрицы, $\widehat{R}_{ij}(s)$ — заданные кусочно-непрерывные матричные функции, $h_0>0$. Каждому оператору вида (4) поставим в соответствие матрицу

$$\mathcal{R}_{ij}(p)=R^0_{ij}(e^{-ph})+pe^{-ph}R^1_{ij}(e^{-ph})+\int\limits_0^{h_0}\widehat{R}_{ij}(s)e^{-ps}ds.$$

Выпишем характеристическую матрицу замкнутой системы (1)–(3):

$$W_1(p)=\begin{bmatrix} W(p)-B(e^{-ph})\mathcal{R}_{00}(p)C(e^{-ph}) & -B(e^{-ph})\mathcal{R}_{01}(p)\\ -\mathcal{R}_{10}(p)C(e^{-ph}) & pI_{n_1}-\mathcal{R}_{11}(p)\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Задача 1. Пусть задан произвольный полином $d(p)$ с вещественными коэффициентами. Требуется построить регулятор вида (3) такой, что определитель характеристической матрицы (5) замкнутой системы (1)–(3) совпадает с полиномом $d(p)$, т.е. $\det W_1(p)=d(p)$.

Получен критерий существования регулятора (3), обеспечивающего решение задачи 1.

Теорема 1. *Задача 1 разрешима для любого полинома $d(p)$, $\deg d(p)\geqslant 2n+r+4$, имеющего по крайней мере два вещественных корня (возможно, равных между собой), тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) $\operatorname{rank}[W(p),B(e^{-ph})]=n,\ p\in\mathbb{C}$;

2) $\operatorname{rank}[I_n-D(p),B(p)]=n,\ p\in\mathbb{C}$;

3) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix}$, $p\in\mathbb{C}$;

4) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(p) \\ C(p) \end{bmatrix}$, $p\in\mathbb{C}$.

Условия 1), 2) представляют собой критерий модальной управляемости системы (1). Условия 3), 4) необходимы и достаточны для существования финитного наблюдателя для системы (1), (2). Эти же условия определяют критерий финальной наблюдаемости системы (1), (2) — условия существования непрерывной операции восстановления "отрезка решения" $x(t)$, $t\in[t_0-mh, t_0]$, при некотором достаточно большом $t_0>0$, по результатам наблюдения $y(t)$, $t\in[0,t_0]$ (при известном управлении $u(t)$, $t>0$).

Литература. 1. Хартовский, В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей / В.Е. Хартовский. — Гродно : ГрГУ, 2022. — 500 с. 2. Зайцев, В.А. Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу / В.А. Зайцев, И.Г. Ким. — Ижевск : Изд. центр «Удмуртский университет», 2022. — 184 с. 3. Метельский, А.В. Алгебраический подход к стабилизации дифференциальной системы запаздывающего типа / А.В. Метельский // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 8. — С. 1119–1131. 4. Метельский, А.В. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1506–1521. 5. Метельский, А.В. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Автоматика и телемеханика. — 2019, № 12. — С. 80–102. 6. Метельский, А.В. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 265–285.

Е. И. Атамась (МГУ ВМК, Москва, Россия) "Один метод реализации интервальных систем" (20.11.2023).

Задача реализации управляемой линейной системы является классической и для стационарных систем давно имеет полное решение. Построение реализации тривиально в случае скалярных систем и немногим более сложно для векторных систем. В данном сообщении мы зададимся вопросом о методах построения реализации для интервальных передаточных матриц, т.е. матриц, элементами которых являются рациональные выражения с интервальными коэффициентами [1], например, в случае матриц размера 1×1 будем иметь

$$W(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}\ldots+a_1s+a_0},$$

где $b_i=[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$, $a_i=[\underline{a}_i,\overline{a}_i]$ — вещественные интервалы.

Из-за привлечения интервальных вычислений непосредственный перенос многих методов построения реализации, известных для систем с точечными параметрами, оказывается невозможен. В работе [2] был предложен подход для скалярных систем, основанный на использовании канонической формы управляемости/наблюдаемости. К сожалению, обобщить его на векторные системы крайне затруднительно: построение известных аналогов таких канонических форм сопряжено с заменами координат, что в интервальном случае практически невозможно.

Попробуем применить для решения поставленной задачи алгоритм реализации Гилберта. Суть его состоит в разложении передаточной матрицы в сумму элементарных дробей, после чего каждая из них реализуется отдельно тривиальным образом. Однако в интервальной арифметике классический способ разложения в элементарные дроби на основе метода неопределённых коэффициентов также оказывается малоприменим, поскольку приводит к решению интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Для получения более простого подхода сделаем следующие предположения о передаточной функции $W(s)$. Будем считать, что $W(s)$ физически реализуема, т.е. степень числителя каждого её элемента строго меньше степени знаменателя, а все полюсы системы простые и вещественные. В этом случае можно записать равенство

$$W(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{A_n}{s-p_n},$$

где p_i — интервальные корни многочлена $a(s)$. Сделанное нами предположение о простоте корней позволяет использовать относительно простые алгоритмы для их поиска (см., например, [3]), а также вычислять коэффициенты A_i, для этого применим хорошо известную формулу $A_i=b(p_i)/a_i(p_i)$, где $a_i(s)=a(s)/(s-p_i)$. Тогда нам потребуется лишь вычислить значения интервальных полиномов в интервальных точках, что является простой операцией. Так, каждой дроби вида $A_i/(s-p_i)$ будет соответствовать часть реализации

$$\dot{x}_i=p_iIx+A_iu, \;\; y_i=Ix_i,$$

где I — единичная матрица соответствующего размера.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет строить реализацию векторной интервальной системы при указанных ограничениях.

Литература. 1. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтэр; пер. с англ. С.И. Куликова. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. — 467 с. 2. Атамась, Е.И. О переходе между различными представлениями интервальных управляемых систем / Е.И. Атамась // Вестн. Московского ун-та. Серия 15: Вычислит. математика и кибернетика. — 2023. — № 4. — С. 3–8. 3. Hansen, E.R. Sharp bounds on interval polynomial roots / E.R. Hansen // Reliable Computing. — 2002. — № 8. — P. 115–122.

А. И. Астровский (БГЭУ, Минск, Беларусь) “Наблюдаемость линейных нестационарных систем с ограничением на выходную функцию” (11.12.2023).

В классической постановке задачи наблюдаемости [1] для линейных систем предполагалось, что выходная функция системы в момент t линейно связана с состоянием системы в этот же момент и её измерения всегда доступны наблюдателю. Вместе с тем в приложениях (например, в теории электрических цепей, в навигационной теории, в медицинских исследованиях и т.д.) есть задачи наблюдения для линейных систем, у которых выходная функция может быть измерена тогда и только тогда, когда фазовый вектор принадлежит некоторому заданному множеству из пространства $\mathbb{R}^n$. Задачи наблюдения такого типа относят к специальному нелинейному классу задач наблюдения и называют *задачами наблюдения с ограничениями на выходную функцию.* Задачи наблюдения с геометрически ограниченными наблюдениями исследовались, например, в [2–4] для стационарных систем при ограничениях на фазовый вектор в виде конусов в конечномерном пространстве.

Рассмотрим для линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений задачи наблюдаемости при условии, что выходная функция системы может быть измерена тогда и только тогда, когда она положительна:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t), \quad y^+(t)=y^+(t,x_0)=[c(t)x(t)]^+, \quad t\in T=[t_0,t_1]. \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — n-вектор-столбец состояния системы (1) в момент t; $n\times n$-матричная функция $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T; $[c(t)x(t)]^+=\max\{0,c(t)x(t)\}$ для каждого $t\in T$.

Говорят, что начальные состояния $x_0^1 = x_0^1(t_0)$ и $x_0^2 = x_0^2(t_0)$ из $\mathbb{R}^n$ системы (1) *положительно различимы*, если соответствующие им выходные функции $y_1^+(t) = y^+(t, x_0^1)$ и $y_2^+(t) = y^+(t, x_0^2)$ не совпадают тождественно на отрезке T, т.е. $y_1^+(t) \not\equiv y_2^+(t)$, $t \in T$. Система (1) *положительно наблюдаема*, если любые два начальные состояния из $\mathbb{R}^n$ положительно различимы.

Свойство положительной наблюдаемости накладывает довольно жёсткие требования на систему наблюдения. Например, при $n=1$ любая стационарная система вида (1) не является положительно наблюдаемой (хотя она наблюдаема при $c \neq 0$). Скалярная нестационарная система наблюдения со знакопеременной функцией $c(t)$, $t \in T$, служит примером положительно наблюдаемой системы.

Отождествим систему $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $y(t) = c(t)x(t)$, $t \in T$, с парой (A, c). Пусть $h_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, являются компонентами n-вектор-строки $h(t) = c(t)F(t, t_0)$, где $F(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы (1): $\dot{F}(t, t_0) = A(t)F(t, t_0)$, $t \in T$, $F(t_0, t_0) = E_n$.

Система (1) задаёт отображение “начальное состояние” $\to$ “выходная функция”, которое действует по правилу $\mathcal{O}_T(x_0) = ([h(t)x_0]^+,\ t \in T)$. Понятно, что система (1) положительно наблюдаема тогда и только тогда, когда отображение $\mathcal{O}_T$ инъективно. Очевидно, что наблюдаемость пары (A, c) является необходимым и достаточным условием положительной наблюдаемости системы (1).

Хорошо известно [1], что необходимым и достаточным условием наблюдаемости пары (A, c) является линейная независимость системы функций $\{h_1(t), \ldots, h_n(t)\}$ на T.

Говорят, что система функций $\{b_1(t), \ldots, b_n(t)\}$ *вполне линейно независима* на отрезке T, если любая нетривиальная линейная комбинация этих функций $g_1 b_1(t) + \cdots + g_n b_n(t)$ может быть равна нулю только на множестве меры ноль. Точку $\tau^* \in (t_0, t_1)$ называют *корнем-узлом* для непрерывной функции $\omega : T \to \mathbb{R}$, если $\omega(\tau^*) = 0$ и при переходе через эту точку τ^* значения функции меняют знак.

Система непрерывных функций $\{b_1(t), \ldots, b_n(t)\}$ на отрезке T называется [5, 6] *системой функций Чебышёва порядка* $n-1$, если любая нетривиальная линейная комбинация этих функций $\omega(g, t) = g_1 b_1(t) + \cdots + g_n b_n(t)$ имеет не более $n-1$ корней на T.

Непосредственно из определения положительной наблюдаемости следует

Лемма 1. *Для положительной наблюдаемости системы (1) необходимо, чтобы каждая нетривиальная линейная комбинация* $\omega(g, t) = g_1 h_1(t) + \cdots + g_n h_n(t)$ *по системе функций* $\{h_1(t), \ldots, h_n(t)\}$ *имела хотя бы один корень-узел на промежутке* (t_0, t_1).

Из определения положительной наблюдаемости и леммы 1 вытекает

Теорема 1. *Система (1) положительно наблюдаема на отрезке* T, *если для пары* (A, c) *функции* $h_1(t), \ \ldots, \ h_n(t)$ *вполне линейно независимы на* T *и у каждого нетривиального многочлена* $\omega(g, t)$ *по этим функциям существует хотя бы один корень-узел на интервале* (t_0, t_1).

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ систему наблюдения второго порядка: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = 0$, $y^+(t) = [\sin^3(t)x_1(t) + tx_2(t)]^+$. Для этой системы функции $h_1(t) = \sin^3(t)$, $h_2(t) = t\sin^3(t) + t$ вполне линейно независимы на отрезке $[-1, 1]$. Любой нетривиальный многочлен $\omega(g, t) = g_1 \sin^3(t) + g_2 t(\sin^3(t) + 1)$ по этим функциям имеет точку $t = 0$ в качестве корня-узла. Следовательно, данная система в силу теоремы 1 положительно наблюдаема на $[-1, 1]$.

Покажем, что ни одно из условий теоремы 1 нельзя опустить. Как следует из леммы 1, наличие хотя бы одного корня-узла у каждого многочлена $\omega(g, t)$, $t \in (t_0, t_1)$, является необходимым условием положительной наблюдаемости системы (1). Ниже приведём пример системы (1), для которой функции $h_1(t), \ \ldots, \ h_n(t)$ не вполне линейно независимы на T, у каждого нетривиального многочлена $\omega(g, t)$ существует по крайней мере один корень-узел на (t_0, t_1) и система (1) не является положительно наблюдаемой.

Пусть $n=2$ и $\dot{x}_1(t)=0$, $\dot{x}_2(t)=0$, $y(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)$, $t\in T=[-1,2]$, где непрерывные функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ имеют вид

$$c_1(t)=t,\quad t\in[-1,0);\quad c_1(t)=-t^2(t-1),\quad t\in[0,1);\quad c_1(t)=t-1,\quad t\in[1,2];$$
$$c_2(t)=t,\quad t\in[-1,0);\quad c_2(t)=-t(t-1),\quad t\in[0,1);\quad c_2(t)=1-t,\quad t\in[1,2].$$

Несложно заметить, что в приведённом примере $h_1(t)=c_1(t)$, $h_2(t)=c_2(t)$ и система функций $\{h_1(t),h_2(t)\}$ линейно независима, но не вполне линейно независима на T. Функции $\omega(g,t)$, $g=(g_1,g_2)$ можно представить в виде

$$\omega(g,t)=(g_1+g_2)t,\quad t\in[-1,0);\quad \omega(g,t)=-t(t-1)(g_1t+g_2),\quad t\in[0,1);$$
$$\omega(g,t)=(g_1-g_2)(t-1),\quad t\in[1,2].$$

Легко проверяется, что каждый нетривиальный многочлен $\omega(g,t)$ имеет корень-узел. Для начального момента времени $t_0=-1$ начальные состояния $(x_{01}^1,x_{02}^1)=(-1,-1)$ и $(x_{01}^2,x_{02}^2)=$ $=(-2,0)$ порождают выходные функции

$$y_1(t)=-2t,\quad t\in[-1,0);\quad y_1(t)=t(t^2-1),\quad t\in[0,1);\quad y_1(t)=0,\quad t\in[1,2];$$
$$y_2(t)=-2t,\quad t\in[-1,0);\quad y_2(t)=2t^2(t-1),\quad t\in[0,1);\quad y_2(t)=2(1-t),\quad t\in[1,2].$$

Понятно, что $y_1^+(t)=y_2^+(t)$, $t\in T$, т.е. начальные состояния $(x_{01}^1,x_{02}^1)\neq(x_{01}^2,x_{02}^2)$ порождают одну и ту же выходную функцию. Поэтому данная система положительно ненаблюдаема.

Простые примеры показывают, что только одно условие вполне линейной независимости системы функций $\{h_1(t),\dots,h_n(t)\}$ на отрезке T не гарантирует положительную наблюдаемость системы (1). Следовательно, положительная наблюдаемость и дифференциальная наблюдаемость [5–7] — существенно различные свойства систем наблюдения и одно из другого не следуют.

Лемма 2. *Для того чтобы у каждого нетривиального многочлена $\omega(g,t)$ по системе функций $\{h_1(t),\dots,h_n(t)\}$ существовал хотя бы один корень-узел на промежутке (t_0,t_1), необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два неравенства:*

$$\min_{||g||=1,\ g\in\mathbb{R}^n}\max_{t\in T}\omega(g,t)>0\quad \text{и}\quad \max_{||g||=1,\ g\in\mathbb{R}^n}\min_{t\in T}\omega(g,t)<0.$$

Доказательство леммы 2 следует из свойств непрерывных функций.

Теорема 2. *Если функции $h_1(t)$, ..., $h_n(t)$ образуют систему функций Чебышёва порядка $n-1$ на отрезке T, то система (1) не является положительно наблюдаемой.*

Доказательство теоремы 2 следует из того факта, что в линейной оболочке всякой системы функций Чебышёва существуют [8, 9] как строго положительные, так и строго отрицательные многочлены на T.

Исходя из теоремы 2, несложно привести примеры систем наблюдения, которые не являются положительно наблюдаемыми. Например, система (1) вида $\dot{x}_i(t)=x_{i+1}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\dot{x}_n(t)=0$, $y(t)=x_1(t)$ наблюдаема на любом отрезке $[t_0,t_1]$, $t_0\geqslant 0$, но она не является положительно наблюдаемой по выходу $y^+(t)=[x_1(t)]^+$ на отрезке $[t_0,t_1]$, так как соответствующие этой системе наблюдения функции $\{h_1(t),\dots,h_n(t)\}=\{1,t,\dots,t^{n-1}/(n-1)!\}$ образуют систему функций Чебышёва порядка $n-1$ на T.

Пусть $\mathcal{G}$ — множество всех невырожденных при каждом $t\in T$ квадратных $n\times n$-матриц $G(t)$ с непрерывно дифференцируемыми элементами. Действие группы $\mathcal{G}$ на паре (A,c) определим стандартным образом: $G*(A,c)=\big(G^{-1}(t)A(t)G(t)-G^{-1}(t)\dot{G}(t),c(t)G(t)\big)$, $G\in\mathcal{G}$.

Непосредственно из леммы 2.3 монографии [7] следует, что свойство положительной наблюдаемости инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}$ на множестве систем наблюдения (A,c) с непрерывными элементами.

Рассмотрим задачу положительной наблюдаемости для равномерно наблюдаемых [7] систем (A,c). Всякая равномерно наблюдаемая пара (A,c) является [7] дифференциально наблюдаемой, и поэтому система функций $\{h_1(t),\ldots,h_n(t)\}$ вполне линейно независима на T. Далее нам понадобится отображение, определённое по правилу

$$f(A,c)(t)=s_n(t)S^{-1}(t),\quad s_n(t)=s_{n-1}(t)A(t)+\dot s_{n-1}(t),\quad t\in T,$$

которое, как показано в [7], является полным инвариантом относительно действия группы $\mathcal{G}$ на множестве равномерно наблюдаемых систем. Обозначим через $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, компоненты n-вектор-функции $f(A,c)(t)$.

Теорема 3. *Пусть пара (A,c) равномерно наблюдаема на отрезке T. Система (1) положительно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда каждое нетривиальное решение скалярного дифференциального уравнения $\xi^{(n)}(t)=\beta_1(t)\xi(t)+\beta_2(t)\xi^{(1)}(t)+\cdots+\beta_n(t)\xi^{(n-1)}(t)$ имеет хотя бы один корень-узел на интервале (t_0,t_1).*

Доказательство теоремы 3 основано на возможности преобразования равномерно наблюдаемой пары (A,c) с помощью преобразования $z(t)=S(t)x(t)$, $t\in T$, к системе вида (1) с матрицей в форме Фробениуса [7] и вектором $c(t)S^{-1}(t)=(1,0,\ldots,0)$.

Теорема 4. *Пусть пара (A,c) равномерно наблюдаема на отрезке T и её полный инвариант $f(A,c)(t)=(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\mathrm{const}$, $t\in T$. Система (1) положительно наблюдаема тогда и только тогда, когда уравнение $\lambda^n-\lambda\beta_1-\cdots-\lambda^{n-1}\beta_n=0$ не имеет действительных корней.*

Доказательство теоремы 4 следует из соотношения $s_n(t)S^{-1}(t)=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Оказывается, что задача положительной наблюдаемости тесно связана с проблемой неосцилляции [10].

Теорема 5. *Если пара (A,c) равномерно наблюдаема на отрезке T и дифференциальное уравнение $\xi^{(n)}(t)=\beta_1(t)\xi(t)+\beta_2(t)\xi^{(1)}(t)+\cdots+\beta_n(t)\xi^{(n-1)}(t)$ неосцилляционно, то система (1) не является положительно наблюдаемой системой.*

Доказательство теоремы 5 следует из теорем 1, 3 и свойств неосцилляции [10].

Литература. 1. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с. 2. Brammer, R.F. Geometrically constrained observability / R.F. Brammer // SIAM J. Control. — 1974. — V. 12, № 3. — P. 449–459. 3. Sontag, E.D. Mathematical Control Theory / E.D. Sontag. — Berlin : Springer-Verlag, 1990. 4. Астровский, А.И. Положительная наблюдаемость линейных нестационарных систем / А.И. Астровский // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 1999. — № 2. — С. 33–39. 5. Weiss, L. The concepts of differential controllability and differential observability / L. Weiss // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — № 10. — P. 442–449. 6. Silverman, L.M. Controllability and observability in time-variable linear systems / L.M. Silverman , H.E. Meadows // SIAM J. Control. — 1967. — V. 5, № 1. — P. 64–73. 7. Астровский, А.И. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А.И. Астровский, И.В. Гайшун. — Минск : Беларус. навука, 2013. — 214 с. 8. Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден; пер. с англ. под ред. С.М. Ермолова. — М. : Наука, 1976. — 568 с. 9. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. — М. : Наука, 1973. — 551 с. 10. Левин, А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)x=0$ / А.Ю. Левин // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24. Вып. 2 (146). — С. 43–96.