

Том 60, Номер 6

ISSN 0374-0641

Июнь 2024



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 6, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Существование и единственность сильных решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями с индексами Херста $H > 1/4$
М. М. Васьковский, П. П. Стрюк 723
- Уточнённое глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с предельным циклом системы Рэлея
Ю. Ли, А. А. Гринь, А. В. Кузьмич 736
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа–Ампера магнитной гидродинамики
А. В. Аксенов, А. Д. Полянин 750
- Существование ренормализованного решения квазилинейного эллиптического уравнения без условия знака на младший член
Л. М. Кожеевникова 764
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

- Существование оптимальных множеств для линейных вариационных уравнений и неравенств
В. Г. Замураев 786
- Решение задачи размещения спектра для линейной системы управления, замкнутой обратной связью
С. П. Зубова, Е. В. Расцкая 798
-

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Явно-неявные схемы расчёта динамики упруговязкопластических сред с разупрочнением
В. И. Голубев, И. С. Никитин, А. В. Шевченко, И. Б. Петров 817
- Применение операторных неравенств к исследованию устойчивости разностных схем для нелинейных краевых задач с нелинейностями неограниченного роста
П. П. Матус 830
-

ХРОНИКА

О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова

844

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ С ИНДЕКСАМИ ХЕРСТА $H > 1/4$ © М. М. Васьковский¹, П. П. Стрюк²^{1,2}Белорусский государственный университет, г. Минскe-mail: ¹vaskovskii@bsu.by, ²pavel.stryouk@gmail.com

Поступила в редакцию 07.02.2024 г., после доработки 23.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Исследована проблема однозначной разрешимости задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения смешанного типа, управляемого стандартными и дробными броуновскими движениями с показателем Херста $H > 1/4$. Доказана теорема существования и единственности сильных решений таких уравнений.

Ключевые слова: броуновское движение, грубая траектория, стохастическое дифференциальное уравнение, задача Коши, сильное решение.

DOI: 10.31857/S0374064124060017, EDN: KWWAAK

ВВЕДЕНИЕ

На заданном полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)dt + h(X_t)dW_t + \sigma(X_t)dB_t^H, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — детерминированные функции; W_t и B_t^H — независимые n -мерные стандартное броуновское движение и дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in (1/4, 1)$.

Так как траектории процессов W_t , B_t^H с вероятностью, равной единице, нигде не дифференцируемы, то для придания смысла уравнению (1) необходимо перейти к соответствующему интегральному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t h(X_s) dW_s + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s^H,$$

где третье слагаемое в правой части — интеграл Ито, а четвёртое — некоторый потраекторный интеграл, при этом соответствующее уравнение (1) называют *стохастическим дифференциальным уравнением смешанного типа*. Если интеграл Ито понимается в смысле Стратоновича, то соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение называют *уравнением Стратоновича*.

Отметим, что стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа, управляемые одновременно стандартными и дробными броуновскими движениями, вызывают повышенный интерес, поскольку охватывают как стохастические дифференциальные уравнения

Ито, так и классы стохастических уравнений, подверженных воздействию фрактальных шумов. Тем самым уравнение (1) представляет гибкий инструмент для моделирования физических и химических явлений, финансово-экономических процессов [1, 2].

К настоящему времени построена достаточно обширная теория стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых персистентными дробными броуновскими движениями, т.е. имеющими показатели Херста большие $1/2$ [3–10]. Для таких уравнений интеграл по B_t^H понимается как потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса.

Если уравнение (1) управляется антиперсистентными дробными броуновскими движениями, что соответствует случаю $H < 1/2$, то отсутствие достаточной гладкости не позволяет использовать теорию, основанную на потраекторных интегралах Римана–Стилтьеса. Однако такие уравнения могут исследоваться в контексте теории грубых траекторий, разработанной авторами [11–13] и др.

Оригинальная теория грубых траекторий, разработанная Т. Лайонсом [11], основана на теории аппроксимаций (аналог теоремы Вонга–Закаи) и позволяет рассматривать лишь уравнения (1) типа Стратоновича. Стоит отметить, что исследование стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с показателями Херста большими $1/3$ стало возможным благодаря тому, что М. Губинелли предложил альтернативный аналог теории грубых траекторий [12] на основе введённой им *производной Губинелли*, который позволил исследовать негеометрические грубые траектории и стохастические дифференциальные уравнения, отличные от уравнений Стратоновича. С использованием методов теории грубых траекторий М. Губинелли была построена общая теория стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями с показателем Херста $H > 1/3$ [14, 15].

Несмотря на то, что связь между стохастическими дифференциальными уравнениями Ито и Стратоновича хорошо известна в случае когда $H > 1/3$ (см., например, [13, с. 59]), установление аналогичной связи при $H > 1/4$ значительно усложняется из-за необходимости перестраивать все компоненты грубой траектории, соответствующей уравнению Стратоновича.

До настоящего времени исследования уравнений (1) смешанного типа с показателями Херста меньшими $1/3$ не обнаружены в литературе, хотя аналогичные уравнения Стратоновича с показателями Херста $H > 1/4$ исследовались в статье [16] на основе теории грубых траекторий Т. Лайонса [11]. Кроме того, известны недавние работы [17–19], в которых исследовались одномерные уравнения (1), управляемые одномерными геометрическими грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера.

Также стоит отметить, что понятия решения уравнения (1), вообще говоря, различаются в зависимости от того применяется теория Лайонса или теория Губинелли, что связано с различиями в определении потраекторных интегралов и функциональных пространств для решений.

Настоящая статья посвящена исследованию проблемы существования и единственности сильного решения задачи Коши уравнения (1) смешанного типа, управляемого дробными броуновскими движениями с показателями Херста $H > 1/4$. Данная задача решается в два этапа. На первом этапе мы доказываем, что решение уравнения (1) Стратоновича с достаточно гладкими коэффициентами является сильным, при этом решение понимается в смысле Губинелли. Существование и единственность сильного решения в смысле Лайонса уравнения Стратоновича немедленно вытекает из теоремы Лайонса (предложение 2). Основная сложность состоит в доказательстве того, что построенное решение является элементом пространства слабо управляемых грубых траекторий D_B^α , определённого в п. 1, и в последующем предельном переходе под знаком потраекторного интеграла Губинелли, из чего,

в свою очередь, следует, что найденное решение является решением в смысле Губинелли. Для доказательства данного факта используется метод из [13, гл. 7], а также оценки слабо управляемых грубых траекторий, полученных в [20, гл. 3, 4].

Казалось бы, более естественный и простой способ заключается в использовании результатов работы [20, гл. 5], в которой доказывается существование и единственность решений в смысле Губинелли уравнения (1) Стратоновича. Однако методы работы [20] не позволяют доказать, что построенное решение является неупреждающим функционалом от процессов W_t , B_t^H , и, следовательно, такое решение может не являться сильным.

Второй этап заключается в перестроении грубой траектории, соответствующей уравнению (1) Стратоновича, таким образом, чтобы полученная грубая траектория соответствовала уравнению смешанного типа и при этом решение в смысле Губинелли уравнения смешанного типа являлось решением в смысле Губинелли соответствующего уравнения Стратоновича. Отметим, что полученная грубая траектория не является геометрической в случае когда функция h отлична от нуля, а следовательно, к таким грубым траекториям неприменимы методы работ [11, 13, 20], что определяет новизну основного результата настоящей статьи, сформулированного в теореме 1.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Пусть $d = 1 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Определим d -мерный случайный процесс $B_t = (t, W_t, B_t^H)$, обозначив через H_i показатели Херста его компонент $B_t^{(i)}$, т.е. $H_1 = 1$, $H_2 = \dots = H_{n+1} = 1/2$, $H_{n+2} = \dots = H_d = H$.

Полагая $f = \text{col}(b, h, \sigma)$, рассмотрим уравнение

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, 1]. \quad (2)$$

Далее будем придерживаться обозначений, введённых в [16].

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Зафиксируем произвольные $T > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$. Через $C^\alpha([0, T], V)$ и $C_2^\alpha([0, T], V)$, где V — конечномерное евклидово пространство, обозначим соответственно множества функций $f: [0, T] \rightarrow V$, $g: [0, T]^2 \rightarrow V$ таких, что гёльдеровские полунормы

$$\|f\|_\alpha := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|f_t - f_s|}{|t - s|^\alpha}, \quad \|g\|_{\alpha, 2} := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|g_{s, t}|}{|t - s|^\alpha}$$

конечны. Далее для функции двух переменных $g_{s, t}$ будем писать $\|g\|_\alpha$ вместо $\|g\|_{\alpha, 2}$. Для функции одной переменной f_t через $f_{s, t}$ будем обозначать приращение $f_t - f_s$.

Через $C_b^k(V, W)$, где V , W — конечномерные евклидовы пространства, обозначим множество функций $h: V \rightarrow W$ таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^k \|D^i h\|_\infty$$

конечна, $\|D^i h\|_\infty = \sup_{X \in V} |D^i h(X)|$.

Положим $n = [1/\alpha]$. Обозначим через $\mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ множество α -непрерывных по Гёльдеру грубых траекторий, т.е. множество элементов $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ таких, что $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0, T], V^{\otimes i})$ для любого $i = \overline{1, n}$ и для любых $s, u, t \in [0, T]$ выполняется следующее тождество Чена:

$$\mathbf{X}_{s, t} = \mathbf{X}_{s, u} \boxplus \mathbf{X}_{u, t},$$

где

$$(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^i \mathbf{X}_{s,u}^j \otimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}.$$

Здесь $\boxplus$ задаёт умножение на тензорной алгебре $T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^n V^{\otimes i}$, где $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Таким образом, элемент $\mathbf{X}: [0, T]^2 \rightarrow T^{(n)}(V)$ однозначно определяется значениями $\mathbf{X}_{0,t}$, $t \in [0, T]$, так как $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0,t}$. Далее будем писать $\mathbf{X}_t$ вместо $\mathbf{X}_{0,t}$.

Грубая траектория $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ называется *геометрической*, если

$$\text{Sym}(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!} (\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\otimes i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Множество геометрических грубых траекторий будем обозначать через $\mathcal{C}_g^\alpha([0, T], V)$.

Будем говорить, что элемент $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ является грубой траекторией над $X \in C^\alpha([0, T], V)$, если $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$ для любых $t \in [0, T]$.

Если отображение X_t липшицево, то можно определить каноническую геометрическую грубую траекторию $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^n)$ над X следующим образом:

$$\mathbf{X}_{s,t}^i = \int_{s < t_1 < \dots < t_i < t} dX_{t_1} \otimes \dots \otimes dX_{t_i}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

где интегралы в правой части понимаются как интегралы Римана–Стилтьеса. В дальнейшем для липшицевых отображений X_t будем рассматривать только канонические геометрические грубые траектории.

Пусть $p = 1/\alpha$. Обозначим через $\Omega_p^\infty(\mathbb{R}^d)$ множество грубых траекторий $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^d)$, таких что $\mathbf{X}_{0,t}^1$ — липшицево отображение, с метрикой

$$d_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sup_{1 \leq k \leq [p]} \left(\sup_D \sum_l |\mathbf{X}_{t_{l-1}, t_l}^k - \mathbf{Y}_{t_{l-1}, t_l}^k|^{p/k} \right)^{k/p} + \sup_{t \in [0, 1]} |\mathbf{X}_{0,t}^1 - \mathbf{Y}_{0,t}^1|,$$

где супремум берётся по всем конечным разбиениям D точками t_l отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $\Omega_p(\mathbb{R}^d)$ замыкание множества $\Omega_p^\infty(\mathbb{R}^d)$ относительно метрики d_p .

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБО УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Пусть $X \in C^\alpha([0, T], V)$, а $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)$ — грубая траектория над X . Пусть W — конечномерное евклидово пространство. Будем говорить, что функция $Y_t \in C^\alpha([0, T], W)$ слабо управляется грубой траекторией $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$, если существуют функции $Y^{(1)}: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $\dots$, $Y^{(n-1)}: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes(n-1)}, W)$ такие, что

$$\begin{aligned} Y_{s,t} &= Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-1} + R_{s,t}^{Y,n}, & Y_{s,t}^{(1)} &= Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + \dots + Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^{n-2} + R_{s,t}^{Y,n-1}, & \dots \\ \dots, & & Y_{s,t}^{(n-2)} &= Y_s^{(n-1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}, & Y_{s,t}^{(n-1)} &= R_{s,t}^{Y,1}, \end{aligned}$$

а каждый из остаточных членов $R^{Y,i}$ имеет конечную гёльдеровскую полунорму $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$, $i = \overline{1, n}$. Функцию $Y^{(i)}$ будем называть *производной Губинелли* порядка i от Y .

Определим банахово пространство

$$\mathcal{D}_\mathbf{X}^\alpha([0, T], W) = \left\{ (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}): Y \in C^\alpha([0, T], W), \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}} := \sum_{i=0}^{n-1} |Y_0^{(i)}| + \sum_{i=1}^n \|R^{Y,i}\|_{i\alpha},$$

где $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], W)$, $Y_t^{(0)} = Y_t$.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ГРУБЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Пусть V, W — некоторые конечномерные евклидовы пространства, $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$, $Y \in C^{\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$, $(Y, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n-1)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$. Возьмём некоторые $s, t \in [0, T]$, $s < t$, через $\mathcal{P}$ обозначим произвольное конечное разбиение отрезка $[s, t]$ точками.

Потраекторным интегралом $\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$ будем называть следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[s, t]$ точками):

$$\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим кусочно-линейные аппроксимации процесса B_t соотношением

$$B_{m,t} = B_{t_{l-1}^m} + (t - t_{l-1}^m) B_{t_{l-1}^m, t_l^m}, \quad t \in [t_{l-1}^m, t_l^m), \quad l = \overline{1, 2^m}, \quad t_l^m = l/2^m.$$

Для каждого $i = 1, 2, 3$ определим так называемый процесс порядка i над $B_{m,t}$ следующим образом:

$$\mathbf{B}_{m;s,t}^i = \int_{s < t_1 < \dots < t_i < t} dB_{m,t_1} \otimes \dots \otimes dB_{m,t_i}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

пусть $\mathbf{B}_{m;s,t} = (1, \mathbf{B}_{m;s,t}^1, \mathbf{B}_{m;s,t}^2, \mathbf{B}_{m;s,t}^3)$.

Так как существуют постоянные $C > 0$ и $\rho > 1/4$ такие, что для любых $s, t \in [0, 1]$, $\tau > 0$ выполняются неравенства

$$\mathbb{E}(|B_t - B_s|^2) \leq C|t - s|^{2\rho}, \quad \mathbb{E}((B_t - B_s)(B_{t+\tau} - B_{s+\tau})) \leq C\tau^{2\rho} \left| \frac{t-s}{\tau} \right|^2, \quad |t-s| \leq \tau,$$

то согласно теореме 2 из [16] для любого $p > 1/H$ существует п.н. предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_p(\mathbf{B}_m, \mathbf{B}) = 0$$

для некоторого процесса $\mathbf{B}_{s,t} = (1, \mathbf{B}_{s,t}^1, \mathbf{B}_{s,t}^2, \mathbf{B}_{s,t}^3)$ со значениями в $T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathbf{B}_{0,t}^1 = B_t$.

В силу теоремы 2 из [16] процесс $\mathbf{B}$ удовлетворяет тождеству Чена

$$\mathbf{B}_{s,u} \boxplus \mathbf{B}_{u,t} = \mathbf{B}_{s,t}, \quad s \leq u \leq t.$$

Возьмём некоторое значение $\alpha \in (1/4, H)$ и зафиксируем его. Так как для любого $p > 1/H$ сглаженные грубые траектории $\mathbf{B}_m = (1, \mathbf{B}_m^1, \mathbf{B}_m^2, \mathbf{B}_m^3)$ сходятся п.н. по метрике p -вариации к $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_m \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ п.н., то $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ п.н.

Определим процесс $\tilde{\mathbf{B}}_{s,t} = (1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^2, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^3)$ следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^1 = \mathbf{B}_{s,t}^1, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^2 = \mathbf{B}_{s,t}^2 + A_{s,t}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^3 = \mathbf{B}_{s,t}^3 + \int_s^t A_{s,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_s^t B_{s,r} \otimes dA_r,$$

где A_t — диагональная $d \times d$ -матрица с ненулевыми элементами $A_t^{(i,i)} = -1/2t$, $i = \overline{2, n+1}$.

Предложение 1. $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^d)$ п.н.

Доказательство. Достаточно проверить тождество Чена для $\tilde{\mathbf{B}}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{s,u} \boxplus \tilde{\mathbf{B}}_{u,t} &= (1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^1 + \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^2 + \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^2 + \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^1 \otimes \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^3 + \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^3 + \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^1 \otimes \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^2 + \tilde{\mathbf{B}}_{s,u}^2 \otimes \tilde{\mathbf{B}}_{u,t}^1) = \\ &= \left(1, \mathbf{B}_{s,t}^1, \mathbf{B}_{s,u}^2 + \mathbf{B}_{u,t}^2 + A_{s,t} + \mathbf{B}_{s,u}^1 \otimes \mathbf{B}_{u,t}^1, \mathbf{B}_{s,u}^3 + \mathbf{B}_{u,t}^3 + \int_s^u A_{s,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_s^u B_{s,r} \otimes dA_r + \right. \\ &\quad \left. + \int_u^t A_{u,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_u^t B_{u,r} \otimes dA_r + \mathbf{B}_{s,u}^1 \otimes \mathbf{B}_{u,t}^2 + \mathbf{B}_{s,u}^2 \otimes \mathbf{B}_{u,t}^1 + \mathbf{B}_{s,u}^1 \otimes A_{u,t} + A_{s,u} \otimes \mathbf{B}_{u,t}^1 \right) = \\ &= \left(1, \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}^1, \mathbf{B}_{s,t}^2 + A_{s,t}, \mathbf{B}_{s,t}^3 + \int_s^t A_{s,r} \otimes d\mathbf{B}_r + \int_s^t B_{s,r} \otimes dA_r \right) = \tilde{\mathbf{B}}_{s,t}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим следующие уравнения в грубых траекториях:

$$dX_t = f(X_t)d\tilde{\mathbf{B}}_t, \quad t \in [0, 1], \quad (3)$$

$$dX_t = \tilde{f}(X_t)d\mathbf{B}_t, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

где

$$\tilde{f} = \text{col}(\tilde{b}, h, \sigma), \quad \tilde{b}_j = b_j - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial h_{ji}}{\partial X_k} h_{ki}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Определение 1. Решением уравнения (4) будем называть случайный процесс X_t , заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такой, что п.н. выполняются условия:

- 1) $X \in C^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^n)$;
- 2) процессы X_t , $f(X_t)$ слабо управляются грубой траекторией $\mathbf{B}$;
- 3) для любого $t \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s,$$

где интеграл в правой части — потраекторный интеграл, при этом $X'_t = \tilde{f}(X_t)$, $X''_t = (\tilde{f}(X_t))' = D\tilde{f}(X_t)X'_t$, $(\tilde{f}(X_t))'' = D\tilde{f}(X_t)X''_t + D^2\tilde{f}(X_t)(X'_t)^{\otimes 2}$. Пусть $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина. Решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = \xi$ называется *единственным*, если для любого решения Y_t уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(X_t = Y_t, t \in [0, 1]) = 1$. Решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = \xi$ будем называть *сильным*, если процесс X_t согласован с потоком σ -алгебр, порождённым случайной величиной ξ и процессом B_t .

Определение 2. Сильным решением уравнения (1) будем называть случайный процесс X_t , заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и согласованный с потоком σ -алгебр, порождённым начальным условием X_0 и процессом B_t , такой, что п.н. выполняются условия:

- 1) $X \in C^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^n)$;
- 2) процессы X_t , $f(X_t)$ слабо управляются грубой траекторией $\tilde{\mathbf{B}}$;

3) для любого $t \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) d\tilde{\mathbf{B}}_s.$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 2 [11, с. 298]. Пусть $p \geq 1$; $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ — функция, имеющая непрерывные и ограниченные частные производные любого порядка k , $k = 0, [p] + 1$; $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $F: \Omega_p^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \Omega_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ отображение Ито, действующее по правилу: $F(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y}$ — грубая траектория над единственным решением Y_t дифференциального уравнения $dY_t = f(t, Y_t) dX_t$, $t \in [0, 1]$, управляемого липшицевым отображением $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$, с начальным условием $Y_0 = x$. Тогда отображение F является непрерывным и существует единственное продолжение $\hat{F}$ отображения F на $(\Omega_p(\mathbb{R}^d), d_p)$, которое также является непрерывным.

Предложение 3. Пусть $\tilde{f} \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times d})$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное сильное решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$.

Доказательство. В доказательстве этого предложения все соотношения, содержащие случайные процессы, понимаются в смысле п.н. Так как процессы $B_{m,t}$ кусочно-линейные, то для любого натурального m уравнение

$$dX_t = \tilde{f}(X_t) d\mathbf{B}_{m,t}, \quad t \in [0, 1],$$

имеет единственное сильное решение $X_{m,t}$ с начальным условием $X_{m,0} = x_0$, которое совпадает с единственным сильным решением интегрального уравнения

$$X_t = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_s) dB_{m,s}, \quad t \in [0, 1].$$

По предложению 2 существует непрерывное детерминированное отображение $G: \Omega_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \Omega_p(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$\mathbf{X}_m = G(\mathbf{B}_m),$$

где $\mathbf{X}_m = (1, \mathbf{X}_m^1, \mathbf{X}_m^2, \mathbf{X}_m^3)$ — каноническая геометрическая грубая траектория над X_m .

Так как для любого $p' > 1/H$ последовательность грубых траекторий $\mathbf{B}_m$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к $\mathbf{B}$ в $(\Omega_{p'}(\mathbb{R}^d), d_{p'})$, то согласно предложению 2 последовательность $\mathbf{X}_m$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к некоторой грубой траектории $\mathbf{X}$ в $(\Omega_{p'}(\mathbb{R}^n), d_{p'})$.

Докажем, что $X_t = \mathbf{X}_{0,t}^1$ является сильным решением уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$.

Для любого натурального m имеем

$$X_{m,t} = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_{m,s}) d\mathbf{B}_{m,s}, \quad t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Обозначим $Y_{m,s} = \tilde{f}(X_{m,s})$, $Y_s = \tilde{f}(X_s)$. Покажем, что (X_m, X'_m, X''_m) , $(Y_m, Y'_m, Y''_m) \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^\alpha$, (X, X', X'') , $(Y, Y', Y'') \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^\alpha$, где $X'_m = \tilde{f}(X_m)$, $X''_m = D\tilde{f}(X_m)X'_m$, и аналогично определяются Y'_m , Y''_m , X' , X'' , Y' , Y'' .

Докажем, что $\mathbf{X}_m = (X_m, X'_m, X''_m) \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^\alpha$. Очевидно, что $\|R^{X_m,1}\|_\alpha = \|X''_m\|_\alpha \leq C$ для любых m . Оценим

$$\|R^{X_m,2}\|_{2\alpha} = \sup_{s < t} \frac{|X'_{m,s,t} - X''_{m,s} \mathbf{B}_{m,s,t}^1|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \|X'_m\|_{2\alpha} + \|X''_m\|_\infty \|\mathbf{B}_m^1\|_{2\alpha} \leq C_m,$$

$$\begin{aligned} \|R^{X_m,3}\|_{3\alpha} &= \sup_{s < t} \frac{|X_{m,s,t} - X'_{m,s} \mathbf{B}_{s,t}^1 - X''_{m,s} \mathbf{B}_{s,t}^2|}{|t-s|^{3\alpha}} \leq \\ &\leq \|X_m\|_{3\alpha} + \|X'_m\|_{\infty} \|\mathbf{B}_m^1\|_{3\alpha} + \|X''_m\|_{\infty} \|\mathbf{B}_m^2\|_{3\alpha} \leq C_m. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{X}_m = (X_m, X'_m, X''_m) \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}^m}^{\alpha}$ для любого m .

Покажем, что $\mathbf{X} = (X, X', X'') \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$. Согласно [11] существует единственная грубая траектория $\hat{\mathbf{X}} = (1, \hat{\mathbf{X}}^1, \hat{\mathbf{X}}^2, \hat{\mathbf{X}}^3) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\hat{\mathbf{X}}_t^1 = \hat{\mathbf{X}}_0^1 + \int_0^t F(\hat{\mathbf{X}}_s^1) d\hat{\mathbf{X}}_s, \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

где $F: \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n)$ определена следующим образом:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \tilde{f}(y) & 0 \end{pmatrix},$$

проекция $\hat{\mathbf{X}}$ на $\mathcal{C}^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ совпадает с $\mathbf{B}$, а проекция $\hat{\mathbf{X}}$ на $\mathcal{C}^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ совпадает с $\mathbf{X}$, интеграл в правой части соотношения (6) понимается в смысле определения интеграла по грубым траекториям настоящей статьи, при этом $(F(\hat{\mathbf{X}}^1))^{(i)} = D^i F(\hat{\mathbf{X}}^1)$. Отсюда вытекает [13, с. 145], что $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$.

Так как $\tilde{f} \in C_b^4$, $\mathbf{X}_m \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^{\alpha}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$, $\mathbf{B}_m \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, $\mathbf{B} \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, то согласно теореме 4.1 [20] $Y_m \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^{\alpha}$, $Y \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^{\alpha}$.

Пусть

$$Z_m = \int_0^{\cdot} Y_{m,s} d\mathbf{B}_{m,s}, \quad Z = \int_0^{\cdot} Y_s d\mathbf{B}_s,$$

докажем, что для любого $t \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{m,t} = Z_t. \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} Z_t &= (\mathcal{I}\Xi)_{0,t} - \Xi_{0,t} + Y_0 \mathbf{B}_{0,t}^1 + Y'_0 \mathbf{B}_{0,t}^2 + Y''_0 \mathbf{B}_{0,t}^3, \\ Z_{m,t} &= (\mathcal{I}\Xi_m)_{0,t} - \Xi_{m,0,t} + Y_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^1 + Y'_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^2 + Y''_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^3, \end{aligned}$$

где

$$\Xi_{0,t} = Y_0 \mathbf{B}_{0,t}^1 + Y'_0 \mathbf{B}_{0,t}^2 + Y''_0 \mathbf{B}_{0,t}^3, \quad \Xi_{m,0,t} = Y_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^1 + Y'_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^2 + Y''_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^3,$$

а $\mathcal{I}$ — единственное непрерывное линейное отображение из $C_2^{\alpha,4\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ в $C^{\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ такое, что $(\mathcal{I}\Theta)_0 = 0$ и $|(\mathcal{I}\Theta)_{s,t} - \Theta_{s,t}| \leq C|t-s|^{4\alpha}$, здесь $C_2^{\alpha,4\alpha}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ — пространство функций Θ от переменных $s, t \in [0, 1]$, $s \leq t$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|\Theta\|_{\alpha,4\alpha} = \sup_{s < \tau} \frac{|\Theta_{s,\tau}|}{|\tau-s|^{\alpha}} + \sup_{s < u < \tau} \frac{|\Theta_{s,\tau} - \Theta_{s,u} - \Theta_{u,\tau}|}{|\tau-s|^{4\alpha}} < \infty.$$

Существование и единственность такого отображения доказана в [13, лемма 4.2].

Положим $\Delta_m = \Xi - \Xi_m$, тогда

$$|Z_t - Z_{m,t}| \leq |(\mathcal{I}\Delta_m)_{0,t} - \Delta_{m,0,t}| + |Y_0 \mathbf{B}_{0,t}^1 - Y_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^1| + |Y'_0 \mathbf{B}_{0,t}^2 - Y'_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^2| + |Y''_0 \mathbf{B}_{0,t}^3 - Y''_{m,0} \mathbf{B}_{m,0,t}^3|.$$

Так как $Y_0 = Y_{m,0}$, $Y'_0 = Y'_{m,0}$, $Y''_0 = Y''_{m,0}$, то для доказательства соотношения (7) достаточно показать, что для любого $t \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [(\mathcal{I}\Delta_m)_{0,t} - \Delta_{m,0,t}] = 0.$$

Используя соотношение (4.11) из доказательства леммы 4.2 [13] при $\beta = 4\alpha$ и соотношение (2) из доказательства предложения 1 [17], мы получаем

$$|(\mathcal{I}\Delta_m)_{0,t} - \Delta_{m,0,t}| \leq C \|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} t^{4\alpha},$$

где

$$\delta\Delta_{m,s,u,\tau} = - \sum_{i=1}^3 R_{s,u}^{Y,i} \mathbf{B}_{u,\tau}^{4-i} + \sum_{i=1}^3 R_{s,u}^{Y_m,i} \mathbf{B}_{m,u,\tau}^{4-i}, \quad \|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} = \sup_{s < u < \tau} \frac{|\delta\Delta_{m,s,u,\tau}|}{|\tau - s|^{4\alpha}},$$

C — некоторая универсальная постоянная, не зависящая от m , ω , t .

Имеем

$$\|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} \leq \sum_{i=1}^3 \sup_{s < u < \tau} \left(\frac{|R_{s,u}^{Y,i}|}{|\tau - s|^{i\alpha}} \frac{|\mathbf{B}_{u,\tau}^{4-i} - \mathbf{B}_{m,u,\tau}^{4-i}|}{|\tau - s|^{(4-i)\alpha}} + \frac{|R_{s,u}^{Y_m,i} - R_{s,u}^{Y,i}|}{|\tau - s|^{i\alpha}} \frac{|\mathbf{B}_{m,u,\tau}^{4-i}|}{|\tau - s|^{(4-i)\alpha}} \right). \quad (8)$$

Так как $\tilde{f} \in C_b^4$, $\mathbf{Y}_m \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}_m}^\alpha$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\mathbf{B}}^\alpha$, то согласно лемме 4.2 [20] получим

$$\sum_{i=1}^3 \|R^{Y_m,i} - R^{Y,i}\|_{i\alpha} \leq C \left(d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_m, \mathbf{B}) + \sum_{i=1}^3 \|R^{X_m,i} - R^{X,i}\|_{i\alpha} \right). \quad (9)$$

Из соотношения (5) и теоремы 5.3 [20] заключаем, что для любых натуральных m_1, m_2 выполняются оценки

$$\sum_{i=1}^3 \|R^{X_{m_1},i} - R^{X_{m_2},i}\|_{i\alpha} \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_{m_1}, \mathbf{B}_{m_2}),$$

откуда следует, что для любых $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$, $s, \tau \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|R_{s,\tau}^{X_{m_1},i} - R_{s,\tau}^{X_{m_2},i}| \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_{m_1}, \mathbf{B}_{m_2}) |\tau - s|^{i\alpha}.$$

Переходя к пределу в данном неравенстве при $m_2 \rightarrow \infty$ при фиксированных s, τ, m_1, i , получаем

$$|R_{s,\tau}^{X_{m_1},i} - R_{s,\tau}^{X,i}| \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_{m_1}, \mathbf{B}) |\tau - s|^{i\alpha}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{i=1}^3 \|R^{X_m,i} - R^{X,i}\|_{i\alpha} \leq C d_{1/\alpha}(\mathbf{B}_m, \mathbf{B}). \quad (10)$$

Из соотношений (8)–(10) вытекает, что $\|\delta\Delta_m\|_{4\alpha} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ и, как следствие, требуемое соотношение (7). Переход к пределу в равенстве (5) даёт

$$X_t = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s, \quad t \in [0, 1].$$

Из определения кусочно-линейных аппроксимаций $B_{m,t}$ следует, что при каждом натуральном m процесс $X_{m,t}$ является $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -согласованным, где $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+1/2^m}$. В силу непрерывности справа семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_t$ заключаем, что при каждом $t \in [0, 1]$ случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$ -измеримой. Таким образом, процесс X_t является сильным решением уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$.

Докажем единственность сильного решения уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$. Предположим, что существует другое сильное решение $\tilde{X}_t$ рассматриваемой задачи Коши. Пусть $\tilde{\mathbf{X}}$ — соответствующая грубая траектория над $\tilde{X}$ (в смысле определения 1). Согласно [13, с. 145] $\tilde{\mathbf{X}}$ является проекцией на $\mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^n)$ грубой траектории $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, 1], \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^n)$. Но тогда $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$ и, следовательно, $X_t = \tilde{X}_t$ для любого $t \in [0, 1]$. Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть X_t — сильное решение уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$. Тогда

$$\int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s = \int_0^t f(X_s) d\tilde{\mathbf{B}}_s,$$

т.е. сильное решение уравнения (4) является сильным решением уравнения (3), где

$$(f(X_s))' = (\tilde{f}(X_s))', \quad (f(X_s))'' = (\tilde{f}(X_s))''.$$

Доказательство. Пусть X_t — сильное решение уравнения (4) с начальным условием $X_0 = x_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X_s) d\tilde{\mathbf{B}}_s &= \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (f(X_u) \tilde{\mathbf{B}}_{u,v}^1 + (f(X_u))' \tilde{\mathbf{B}}_{u,v}^2 + (f(X_u))'' \tilde{\mathbf{B}}_{u,v}^3) = \\ &= \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (f(X_u) \mathbf{B}_{u,v}^1 + (f(X_u))' (\mathbf{B}_{u,v}^2 + A_{u,v}) + (f(X_u))'' \mathbf{B}_{u,v}^3) = \\ &= \int_0^t f(X_s) d\mathbf{B}_s + \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (f(X_u))' A_{u,v} = \int_0^t f(X_s) d\mathbf{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial h_{ji}(X_s)}{\partial X_k} h_{ki}(X_s) e_j ds = \\ &= \int_0^t f(X_s) d\mathbf{B}_s - \int_0^t (b(X_s) - \tilde{b}(X_s)) ds = \int_0^t \tilde{f}(X_s) d\mathbf{B}_s, \end{aligned}$$

где $\{e_j\}_{j=1}^n$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что в последнем равенстве мы воспользовались тем, что функция $t \rightarrow t$ непрерывна по Гёльдеру с показателем 1, и следовательно, определение производных Губинелли $(f(X_s))' := (\tilde{f}(X_s))'$, $(f(X_s))'' := (\tilde{f}(X_s))''$ корректно. Предложение доказано.

Замечание 1. Если $\sigma = 0$, то предложение 4 является известным фактом, связывающим решения соответствующих уравнений Ито и Стратоновича [9, гл. 4].

Из предложений 3 и 4 вытекает следующая

Теорема. Пусть $b \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $h \in C_b^5(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\sigma \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$. Тогда для любой случайной величины $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ уравнение (1) с начальным условием $X_0 = \xi$ имеет единственное сильное решение.

Замечание 2. В уравнении (1) отрезок $[0, 1]$ может быть заменён на любой отрезок вида $[0, T]$. Если в сформулированной теореме отказаться от условия ограниченности функций b , h , σ и их частных производных, то решение уравнения (1) будет существовать лишь при $t \in [0, \tau)$, где τ — некоторая случайная величина со значениями из промежутка $(0, 1]$.

Замечание 3. Условие $H > 1/4$ является существенным в рамках подхода, основанного на теории грубых траекторий, поскольку согласно работе [16] последовательность $\mathbf{B}_m^2$, $m \in \mathbb{N}$, не содержит сходящихся по вероятности подпоследовательностей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications / F. Biagini, Y. Hu, B. Oksendal, T. Zhang. — London : Springer-Verlag, 2008.
2. Mishura, Yu.S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Yu.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
3. Guerra, J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Anal. Appl. — 2008. — V. 26, № 5. — P. 1053–1075.
4. Mishura, Y.S. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$ / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // Communications in Statistics. Theory and Methods. — 2011. — V. 40, № 19–20. — P. 3492–3508.
5. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.
6. Леваков, А.А. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.
7. Леваков, А.А. Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.
8. Васьковский, М.М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.
9. Леваков, А.А. Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск : БГУ, 2019.
10. Nualart, D. Differential equations driven by fractional Brownian motion / D. Nualart, A. Rascanu // Collectanea Mathematica. — 2002. — V. 53, № 1. — P. 55–81.
11. Lyons, T. Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // Revista Matematica Iberoamericana. — 1998. — V. 14, № 2. — P. 215–310.
12. Gubinelli, M. Controlling rough paths / M. Gubinelli // J. Funct. Anal. — 2004. — V. 216, № 1. — P. 86–140.
13. Friz, P. A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer, 2014.
14. Vaskouski, M. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than $1/3$ / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Anal. Appl. — 2018. — V. 36, № 6. — P. 909–931.
15. Васьковский, М.М. О конечности моментов решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, А.А. Карпович // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 162–168.
16. Coutin, L. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // Probability Theory Related Fields. — 2002. — V. 122, № 1. — P. 108–140.
17. Васьковский, М.М. Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 10. — С. 1305–1317.

18. Васьковский, М.М. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1443–1449.
19. Васьковский, М.М. Аналог уравнений Колмогорова для одномерных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробным броуновским движением с показателем Херста $H \in (0, 1)$ / М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 1. — С. 11–16.
20. Harang, F.A. On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance : dissertation ... master of mathematics / F.A. Harang. — Oslo, 2015. — 83 p.

**EXISTENCE AND UNIQUENESS OF STRONG SOLUTIONS
TO MIXED-TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN
BY THE FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS WITH HURST INDICES $H > 1/4$**

M. M. Vaskouski¹, P. P. Stryuk²

^{1,2}Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: ¹vaskovskii@bsu.by, ²pavel.stryouk@gmail.com

In this paper there is investigated the problem of unique solvability of the Cauchy problem for the mixed type stochastic differential equation driven by the standard Brownian motion and fractional Brownian motions with Hurst indices $H > 1/4$. We prove a theorem on the existence and uniqueness of strong solutions to the mentioned mixed type stochastic differential equations.

Keywords: fractional Brownian motion, rough path, stochastic differential equation, Cauchy problem, strong solution.

REFERENCES

1. Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B., and Zhang, T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, London: Springer-Verlag, 2008.
2. Mishura, Y.S., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
3. Guerra, J. and Nualart, D., Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion, *Stochastic Anal. Appl.*, 2008, vol. 26, no. 5, pp. 1053–1075.
4. Mishura, Y.S. and Shevchenko, G.M., Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index $H > 1/2$, *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 2011, vol. 40, no. 19–20, pp. 3492–3508.
5. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions and with discontinuous coefficients, *Differ. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 189–202.
6. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., Existence of solutions of stochastic differential inclusions with standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 991–997.
7. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., Properties of solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 972–980.
8. Vas'kovskii, M.M., Stability and attraction of solutions of nonlinear stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 157–170.
9. Levakov, A.A. and Vas'kovskii, M.M., *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i vklucheniya* (Stochastic Differential Equations and Inclusions), Minsk: Bel. Gos. Univ., 2019.
10. Nualart, D. and Rascanu, A., Differential equations driven by fractional Brownian motion, *Collectanea Mathematica*, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 55–81.
11. Lyons, T., Differential equations driven by rough signals, *Revista Matematica Iberoamericana*, 1998, vol. 14, no. 2, pp. 215–310.
12. Gubinelli, M., Controlling rough paths, *J. Funct. Anal.*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140.
13. Friz, P. and Hairer, M., *A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures*, Cham: Springer, 2014.

14. Vaskouski, M. and Kachan, I., Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than $1/3$, *Stochastic Anal. Appl.*, 2018, vol. 36, no. 6, pp. 909–931.
15. Vas'kovskii, M.M. and Karpovich, A.A., Finiteness of moments of solutions to mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 148–154.
16. Coutin, L. and Qian, Z., Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions, *Probability Theory Related Fields*, 2002, vol. 122, no. 1, pp. 108–140.
17. Vas'kovskii, M.M., Existence and uniqueness of solutions of differential equations weakly controlled by rough paths with an arbitrary positive Holder exponent, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 10, pp. 1279–1291.
18. Vas'kovskii, M.M., Stability of solutions of stochastic differential equations weakly controlled by rough paths with arbitrary positive Holder exponent, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1419–1425.
19. Vas'kovskii, M.M., Analog of the Kolmogorov equations for one-dimensional stochastic differential equations controlled by fractional Brownian motion with Hurst exponent $H \in (0, 1)$, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 9–14.
20. Harang, F.A., On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance: dissertation ... master of mathematics. Oslo, 2015.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

УТОЧНЁННОЕ ГЛОБАЛЬНОЕ КОЛЬЦО
ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА С ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ
СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ© Ю. Ли¹, А. А. Гринь², А. В. Кузьмич³¹Ланьчжоуский городской университет, Китай^{2,3}Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусьe-mail: ¹li_liyong120@163.com, ²grin@grsu.by, ³kuzmich_av@grsu.by

Поступила в редакцию 21.02.2024 г., после доработки 21.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для системы Рэля разработаны новые способы построения двух функций Дюлака–Черкаса, с помощью которых находится лучшая в зависимости от параметра $\lambda > 0$ внутренняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$. Предложена процедура непосредственного нахождения многочлена, множество нулевого уровня которого содержит трансверсальный овал, используемый в качестве внешней границы $A(\lambda)$. Указан промежуток для λ , при котором лучшей внешней границей кольца $A(\lambda)$ является замкнутый контур, составленный из двух дуг построенного овала и двух дуг незамкнутых кривых множества нулевого уровня одной из функций Дюлака–Черкаса. Таким образом, представлено уточнённое глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона для предельного цикла системы Рэля.

Ключевые слова: кольцо Пуанкаре–Бендиксона, система Рэля, предельный цикл, функция Дюлака–Черкаса, топологически эквивалентные системы.

DOI: 10.31857/S0374064124060023, EDN: KWOKWN

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предельные циклы играют центральную роль при описании фазового портрета всех траекторий автономных систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

а также при моделировании с их помощью автоколебаний в различных областях естествознания. Существование предельных циклов можно установить как с помощью теории бифуркаций, так и применяя метод Дюлака или теорему Пуанкаре–Бендиксона [1, с. 113; 2, с. 405; 3, с. 244; 4, с. 64]. Общий подход к доказательству существования хотя бы одного предельного цикла системы (1) с помощью теоремы Пуанкаре–Бендиксона состоит в построении на фазовой плоскости кольца (кольцеобразной области) A , не содержащего состояний равновесия, границы которого представляют собой простые замкнутые кривые (далее называемые овалами), такие что в любой их точке касательный вектор и вектор поля X системы не коллинеарны. Их принято называть *трансверсальными кривыми* [3, с. 212; 5, с. 172] или *кривыми без контакта* (прикосновения) [1, с. 40; 2, с. 406].

Ключевая проблема в этом подходе заключается в отсутствии общей процедуры построения трансверсальных овалов, так как их вид существенно зависит от рассматриваемой системы (1). Ранее кольца Пуанкаре–Бендиксона были найдены специально для систем типа Лъенара, в которых трансверсальные овалы состоят из кусочно-гладких кривых, построен-

ных сложным образом (см., например, [3, с. 255; 4, с. 129; 5, с. 233; 6; 7]). В работах [8, 9], посвящённых построению гладких трансверсальных овалов как границ кольца Пуанкаре–Бендиксона для полиномиальных систем (1), каждый такой овал строится с помощью аппроксимации траекторий системы (1). В статье [8] для построения внутренней и внешней границ A требуется аппроксимация двух разных траекторий; в [9] нужна аппроксимация только одной траектории, но предполагается, что эта траектория является предельным циклом.

В работе [10] для системы Ван дер Поля

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x - \lambda(x^2 - 1)y \quad (2)$$

и линейно топологически эквивалентных ей систем был разработан чисто аналитический подход к построению трансверсальных овалов, зависящих от параметра λ и образующих глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$, который не требует аппроксимации какой-либо траектории. Особенности этого подхода заключаются в следующем: внутренняя и внешняя границы кольца Пуанкаре–Бендиксона состоят из алгебраических замкнутых кривых на фазовой плоскости, обладающих тем свойством, что любая траектория системы (2) сразу после попадания в некоторый момент времени на границу кольца A входит в него либо при увеличении, либо при уменьшении времени t . В этом случае они представляют собой трансверсальные кривые в более общем смысле, чем было сказано ранее. Таким свойством трансверсальности обладают кривые из множества нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса [11], способы построения которых уже разработаны для некоторых классов системы (1) [12]. Поэтому в работе [10] внутренняя граница кольца A состоит из овала множества нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса для системы Ван дер Поля. Это свойство означает, что система Ван дер Поля имеет не более одного предельного цикла $\Gamma(\lambda)$, и если $\Gamma(\lambda)$ существует, то он является грубым. Также в [10] предложена процедура нахождения многочлена, множество нулевого уровня которого содержит трансверсальный овал, используемый в качестве внешней границы. Полученное таким образом кольцо A представляет собой глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона, поскольку при его построении не накладываются никакие ограничения на значения параметра λ и локализацию содержащегося в нём предельного цикла, а его границы являются алгебраическими кривыми.

Затем в работе [13] для системы (2) был предложен способ построения второй полиномиальной функции Дюлака–Черкаса, зависящей от параметра λ , множество нулевого уровня которой состоит из овала и двух незамкнутых кривых. Используя полученные трансверсальные кривые вместе с результатами предыдущей статьи [10], авторы построили в фазовой плоскости системы (2) более узкое глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для предельного цикла.

Далее в работе [14] подход из статей [10, 13] частично был применён к системе Рэлея [1, с. 109; 15]

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y - \lambda \frac{y^3}{3}, \quad (3)$$

что позволило найти глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$ для её предельного цикла. Здесь был предложен способ построения функции Дюлака–Черкаса, зависящей от параметра λ , множество нулевого уровня которой содержит овал, используемый в качестве внутренней границы. Овал же внешней границы построен с помощью внешнего овала для системы Ван дер Поля из работы [10], учитывая топологическую эквивалентность систем (2) и (3).

В настоящей работе, развивая результаты статей [10, 13, 14], предложены новые способы построения трансверсальных кривых, ограничивающих кольцо Пуанкаре–Бендиксона

$A(\lambda)$ для системы Рэля (3). Построенные границы составлены из алгебраических кривых, имеющих конечное число точек, в которых траектории системы могут их касаться. Затем, используя полученные трансверсальные кривые вместе с результатами статьи [14], находится уточнённое, т.е. более узкое на фазовой плоскости по сравнению с найденным в [14], глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона без ограничений на значения параметра λ и локализацию содержащегося в нём предельного цикла системы Рэля (3).

Статья структурирована следующим образом: в п. 2 содержатся необходимые в дальнейшем сведения о системе Рэля и функции Дюлака–Черкаса; в п. 3 приводятся способы построения двух функций Дюлака–Черкаса, с помощью которых в п. 4 находится наилучшая в зависимости от параметра $\lambda > 0$ внутренняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$; в п. 5 для системы Рэля описывается способ построения внешней границы кольца $A(\lambda)$ в виде алгебраического овала.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ И ФУНКЦИИ ДЮЛАКА–ЧЕРКАСА

Британский физик и лауреат Нобелевской премии Дж.В. Струтт, более известный как лорд Рэлей, в своей монографии [16] использовал линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + n^2x = 0$$

для описания звуковых колебаний кларнета. Нелинейная модификация этого уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \left[\frac{1}{3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 - 1 \right] \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

где λ — вещественный параметр, известна как *уравнение Рэля*. Соответствующая ему система (3) инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow -t$, $y \rightarrow -y$, $\lambda \rightarrow -\lambda$ и с помощью различных методов изучалась во многих работах [1, 17–22], где, в частности, доказано существование и единственность предельного цикла. Однако границы областей локализации цикла на фазовой плоскости в таких работах указываются приближённо или только для значений параметра, близких к бифуркационному. Поэтому задача установления наиболее узкой двусвязной области локализации предельного цикла с точными границами является по-прежнему актуальной для системы Рэля (3).

Наш подход для построения внутренней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (3) основан на использовании функции Дюлака–Черкаса, поэтому напомним основные факты о ней, необходимые для такого построения.

Рассмотрим дифференциальную систему на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \lambda) \quad (4)$$

в предположении, что выполняется следующее

Условие А. Пусть G — открытое подмножество множества $\mathbb{R}^2$, Λ — некоторый открытый интервал, а $P, Q \in C_{(x,y)}^1 \stackrel{0}{\lambda}(G \times \Lambda, \mathbb{R})$.

Обозначим через $X(\lambda)$ векторное поле системы (4).

Определение 1. Пусть условие А верно. Функция $B \in C_{(x,y)}^1 \stackrel{0}{\lambda}(G \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака* системы (4) в области G для $\lambda \in \Lambda$, если выражение

$$\operatorname{div}(BX) \equiv \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \equiv (\operatorname{grad} B, X) + B \operatorname{div} X$$

не меняет знак в области G и может принимать значение нуль лишь на множестве $N_\lambda \subset G$ меры нуль для $\lambda \in \Lambda$.

Класс функций Дюлака был обобщён Л.А. Черкасом в работе [11]. Соответствующая обобщённая функция Дюлака, называемая сегодня функцией Дюлака–Черкаса, определяется следующим образом.

Определение 2. Пусть условие А верно. Функция $\Psi \in C^1_{(x,y)}{}^0(G \times \Lambda, \mathbb{R})$ называется *функцией Дюлака–Черкаса* системы (4) в области G для $\lambda \in \Lambda$, если существует действительное число $\kappa \neq 0$ такое, что

$$\Phi := (\text{grad } \Psi, X) + \kappa \Psi \text{div } X > 0 \quad (< 0) \quad \text{в } G \quad \text{для } \lambda \in \Lambda. \quad (5)$$

Замечание 1. Условие (5) может быть ослаблено, если предположить, что Φ может принимать нулевое значение в области G на множестве N_λ меры нуль, а также что ни один овал этого множества не является предельным циклом.

Замечание 2. Если $\kappa = 1$, то Ψ является функцией Дюлака.

Введём подмножество W_λ области G как множество нулевого уровня функции Дюлака–Черкаса

$$W_\lambda := \{(x, y) \in G : \Psi(x, y, \lambda) = 0\}.$$

Из определения 1 сразу вытекает

Лемма 1. Пусть условие А верно и Ψ — функция Дюлака–Черкаса для системы (4) в G для $\lambda \in \Lambda$. Тогда любой овал W_λ , имеющий только конечное число точек, в которых $(\text{grad } \Psi, X)$ обращается в нуль, является трансверсальным овалом для траекторий системы (4) и может использоваться как граница кольца Пуанкаре–Бендиксона.

Следующая теорема является частным случаем более общего результата, установленного в статье [23].

Теорема 1. Пусть условие А верно и Ψ — функция Дюлака–Черкаса системы (4) в односвязной области G для $\lambda \in \Lambda$ такая, что W_λ содержит только один овал I_λ в G . Тогда при $\kappa < 0$ система (4) имеет не более одного предельного цикла в области G при $\lambda \in \Lambda$, и если он существует, то окружает I_λ и является грубым.

В условиях теоремы 1 овал I_λ удобно использовать в качестве внутренней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона системы (4).

3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЮЛАКА–ЧЕРКАСА ДЛЯ СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ (3)

Теперь представим три способа построения функции Дюлака–Черкаса во всей фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ системы Рэля (3) при всех значениях $\lambda > 0$.

1 способ. Будем искать функцию Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \Psi_0(y, \lambda) + \Psi_1(y, \lambda)x + \Psi_2(y, \lambda)x^2 \quad (6)$$

в предположении, что для всех $\lambda > 0$ функция Ψ_2 не обращается тождественно в нуль.

Используя (6), получаем вспомогательную функцию Φ из (5) в виде

$$\Phi(x, y, \lambda, \kappa) = \sum_{k=0}^3 \Phi_k(y, \lambda, \kappa)x^k, \quad (7)$$

где функции Φ_k определяются как

$$\Phi_0 := -\Psi_1 y + \Psi'_0 \lambda (y - y^3/3) + \kappa \lambda \Psi_0 (1 - y^2), \quad (8)$$

$$\Phi_1 := -2\Psi_2 y + \Psi'_0 + \Psi'_1 \lambda (y - y^3/3) + \kappa \lambda \Psi_1 (1 - y^2), \quad (9)$$

$$\Phi_2 := \Psi'_1 + \Psi'_2 \lambda (y - y^3/3) + \kappa \lambda \Psi_2 (1 - y^2), \quad (10)$$

$$\Phi_3 := \Psi'_2, \quad (11)$$

здесь штрих означает производную по переменной y . Один из способов гарантировать знакоопределённость функции Φ в $\mathbb{R}^2$ для $\lambda > 0$ заключается в требовании, чтобы функции Φ_k , $k = \overline{1, 3}$, были тождественно равны нулю, а Φ_0 была знакоопределённой. Применив этот подход, получим из (11) линейное дифференциальное уравнение

$$\Psi'_2 = 0 \quad (12)$$

с решением

$$\Psi_2(y, \lambda, \kappa) \equiv c_2 \neq 0. \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в (10), получим уравнение

$$\Psi'_1 + \kappa c_2 \lambda (1 - y^2) = 0, \quad (14)$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_1(y, \lambda) = -\kappa c_2 \lambda (y - y^3/3) + c_1. \quad (15)$$

Подставляя (13)–(15) в (9), будем иметь

$$\Psi'_0 = 2c_2 y + (1 + \kappa) \kappa c_2 \lambda^2 (1 - y^2) (y - y^3/3) - \kappa c_1 \lambda (1 - y^2). \quad (16)$$

Выбирая значения

$$\kappa = -1, \quad c_1 = 0, \quad (17)$$

из (15) находим

$$\Psi_1(y, \lambda) = c_2 \lambda (y - y^3/3), \quad (18)$$

а дифференциальное уравнение (16) запишем в виде

$$\Psi'_0 = 2c_2 y, \quad (19)$$

его решение определим по формуле

$$\Psi_0(y, \lambda) = c_2 y^2 + c_0. \quad (20)$$

Используя (17)–(20), из (8) получаем

$$\Phi_0(y, \lambda, -1) = \frac{2}{3} \lambda c_2 \left(y^4 + \frac{3c_0}{2c_2} y^2 - \frac{3c_0}{2c_2} \right).$$

Теперь необходимо подобрать c_0 и c_2 так, чтобы функция $\Phi_0(y, \lambda, -1)$ была знакоопределённой и соответствующая функция Дюлака–Черкаса Ψ обладала следующим свойством: её множество нулевого уровня W_λ содержит овал, окружающий начало координат.

Выбрав $c_0 = -8c_2/3$, которое согласно (13) отлично от нуля, получим функцию $\Phi_0(y, \lambda, -1)$ в виде

$$\Phi_0(y, \lambda, -1) = \frac{2}{3} \lambda c_2 (y^2 - 2)^2,$$

она не меняет знак при $\lambda > 0$ и при всех y , а принимает нулевое значение лишь при $y = \pm\sqrt{2}$. Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Полином*

$$\Psi(x, y, \lambda) := c_2 (x^2 + y^2 - 8/3 + \lambda x (y - y^3/3)) \quad (21)$$

является функцией Дюлака–Черкаса для системы (3) в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$.

2 способ. Будем искать функцию Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \Psi_0(y, \lambda) + \Psi_1(y, \lambda)x + \Psi_2(y, \lambda)x^2,$$

где предполагаем, что для всех $\lambda > 0$ функция Ψ_2 не обращается тождественно в нуль, и выполняем все шаги с (7) по (16). Но далее вместо значений (17) выберем

$$\kappa = -2, \quad c_1 = 0, \quad (22)$$

тогда из (15) получим

$$\Psi_1(y, \lambda) = 2c_2\lambda(y - y^3/3). \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение (16) запишется в виде

$$\Psi'_0 = 2c_2y + 2c_2\lambda^2(1 - y^2)(y - y^3/3), \quad (24)$$

а его решение определяется по формуле

$$\Psi_0(y, \lambda) = c_2(y^2 + \lambda^2(y^2 - 2y^4/3 + 1/9y^6)) + c_0. \quad (25)$$

Используя (22)–(25), из (8) находим

$$\Phi_0(y, \lambda, -2) = -2\lambda c_2 \left(\left(1 - \frac{c_0}{c_2} \right) y^2 - y^4 + \frac{c_0}{c_2} \right).$$

Добиться знакоопределённости функции $\Phi_0(y, \lambda, -2)$, а также существования овала, окружающего начало координат и содержащегося в множестве нулевого уровня W_λ соответствующей функции Дюлака–Черкаса Ψ , можно за счёт выбора $c_0 = -c_2$. Тогда имеем функцию

$$\Phi_0(y, \lambda, -2) = 2\lambda c_2(y^2 - 1)^2, \quad (26)$$

она не меняет знак при $\lambda > 0$ и при всех y , а принимает нулевое значение лишь при $y = \pm 1$. Таким образом, имеет место

Лемма 3. *Полином*

$$\Psi(x, y, \lambda) := c_2((x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2 - 1) \quad (27)$$

является функцией Дюлака–Черкаса для системы (3) в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$.

3 способ. Теперь будем искать функцию Дюлака–Черкаса в виде

$$\Psi(x, y, \lambda) := \Psi_0(y, \lambda) + \Psi_1(y, \lambda)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \Psi_2(y, \lambda)(x + \lambda(y - y^3/3))^2, \quad (28)$$

по-прежнему предполагая, что для всех $\lambda > 0$ функция Ψ_2 не обращается тождественно в нуль.

Используя (28), получаем вспомогательную функцию Φ из (5):

$$\Phi(x, y, \lambda, \kappa) = \sum_{k=0}^3 \Phi_k(y, \lambda, \kappa)(x + \lambda(y - y^3/3))^k,$$

где функции Φ_k имеют вид

$$\Phi_0 := -\Psi_1 y + \kappa \lambda \Psi_0(1 - y^2), \quad (29)$$

$$\Phi_1 := -2\Psi_2 y + \Psi'_0 + \kappa \lambda \Psi_1(1 - y^2) + \lambda \Psi_1(1 - y^2), \quad (30)$$

$$\Phi_2 := \Psi'_1 + \kappa \lambda \Psi_2(1 - y^2) + 2\lambda \Psi_2(1 - y^2), \quad (31)$$

$$\Phi_3 := \Psi'_2, \quad (32)$$

здесь штрих снова означает производную по переменной y . Как и ранее, для знакоопределённости функции Φ в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$ будем требовать, чтобы функции Φ_k , $k = \overline{1, 3}$, были тождественно равны нулю, а Φ_0 была знакоопределённой. Тогда из (32) получим линейное дифференциальное уравнение

$$\Psi'_2 = 0$$

с решением

$$\Psi_2(y, \lambda, \kappa) \equiv c_2 \neq 0. \quad (33)$$

Подставив (33) в (31), получим уравнение

$$\Psi'_1 + \kappa c_2 \lambda (1 - y^2) + 2c_2 \lambda (1 - y^2) = 0. \quad (34)$$

Выбирая

$$\kappa = -2, \quad (35)$$

найдем решение уравнения (34):

$$\Psi_1(y, \lambda) = c_1. \quad (36)$$

Подставляя (33), (35) и (36) в (30), будем иметь

$$\Psi'_0 = 2c_2 y - c_1 \lambda (1 - y^2). \quad (37)$$

Выбирая $c_1 = 0$, из (36) получаем

$$\Psi_1(y, \lambda) = 0, \quad (38)$$

и дифференциальное уравнение (37) записывается в виде

$$\Psi'_0 = 2c_2 y,$$

а его решение определяется формулой

$$\Psi_0(y, \lambda) = c_2 y^2 + c_0. \quad (39)$$

Используя (35), (38) и (39), из (29) имеем

$$\Phi_0(y, \lambda, -2) = -2\lambda(c_2 y^2 + c_0)(1 - y^2).$$

Выбрав $c_0 = -c_2$, получим знакоопределённую функцию $\Phi_0(y, \lambda, -2)$ вида (26) и функцию Дюлака–Черкаса вида (27).

Отметим, что только первый из предложенных способов уже применялся в работе [1].

4. ПОСТРОЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЫ КОЛЬЦА ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА СИСТЕМЫ (3)

Рассмотрим множества W_λ и $\widetilde{W}_\lambda$ функций Дюлака–Черкаса Ψ , представленных формулами (21) и (27) соответственно. Множество W_λ функций Дюлака–Черкаса Ψ из (21) определяется равенством

$$W_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 - 8/3 + \lambda x(y - y^3/3) = 0\} \quad (40)$$

и представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 8/3$ при $\lambda = 0$. Из (40) вытекает, что для всех $\lambda > 0$ множество W_λ симметрично относительно начала координат и не пересекается с прямыми $y = \pm\sqrt{3}$. Обозначая через $S_{2\sqrt{3}}$ полосу в фазовой плоскости, ограниченную этими прямыми, в работе [14] получен следующий результат.

Лемма 4. Множество W_λ , определённое в (40), состоит в $\mathbb{R}^2$ при $\lambda > 0$ из трёх различных компонент: овал I_λ , окружающий начало координат и расположенный в полосе $S_{2\sqrt{3}}$; неограниченная ветвь W_λ^1 , расположенная в первом квадранте в области $y > \sqrt{3}$; симметричная ей ветвь W_λ^3 в третьем квадранте в области $y < -\sqrt{3}$.

Поэтому в [14] овал I_λ представлял собой внутреннюю границу кольца Пуанкаре–Бендиксона системы (3) при $\lambda > 0$.

Теперь проанализируем множество

$$\widetilde{W}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

второй функции Дюлака–Черкаса. Для всех $\lambda > 0$ это множество симметрично относительно начала координат и состоит из единственной компоненты в виде овала, окружающего начало координат и расположенного в полосе между прямыми $y = \pm 1$. Поэтому овал $\widetilde{W}_\lambda$ также может использоваться как внутренняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэля. При $\lambda = 0$ этот овал представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 1$, очевидно, что при достаточно малых значениях λ овал I_λ окружает овал $\widetilde{W}_\lambda$ и является лучшей внутренней границей кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (3), чем $\widetilde{W}_\lambda$. На рис. 1 показано взаимное расположение овалов I_λ , $\widetilde{W}_\lambda$ и предельного цикла LC системы (3), а также кривых W_λ^1 и W_λ^3 при $\lambda = 1$. При возрастании λ у овалов I_λ и $\widetilde{W}_\lambda$ появляются общие точки. Задача их нахождения эквивалентна существованию корней уравнения $f(y) = -5/(3\lambda)$ при $y \in (0, 1)$, где $f(y) = (y - y^3/3)\sqrt{1 - y^2}$. Поскольку функция f принимает максимум при $y \in (0, 1)$ в точке $y_m = \sqrt{(9 - \sqrt{33})/8}$, получаем, что овалы I_λ и $\widetilde{W}_\lambda$ касаются друг друга при $\lambda = 5/(3f(y_m)) = \lambda_1 \approx 3.925$ в двух точках, симметричных друг другу относительно начала координат. При $\lambda > \lambda_1$ эти овалы пересекаются в четырех точках A_1, A_2 и B_1, B_2 . Таким образом, при $0 < \lambda \leq \lambda_1$ овал I_λ является лучшей внутренней границей кольца Пуанкаре–Бендиксона, чем овал $\widetilde{W}_\lambda$. При $\lambda > \lambda_1$ лучшей внутренней границей кольца Пуанкаре–Бендиксона будет замкнутый контур $A_1A_2B_1B_2$, составленный из дуг A_1A_2, B_1B_2 овала $\widetilde{W}_\lambda$ и дуг A_2B_1, B_2A_1 овала I_λ . На рис. 2 показано взаимное расположение контура $A_1A_2B_1B_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 10$.

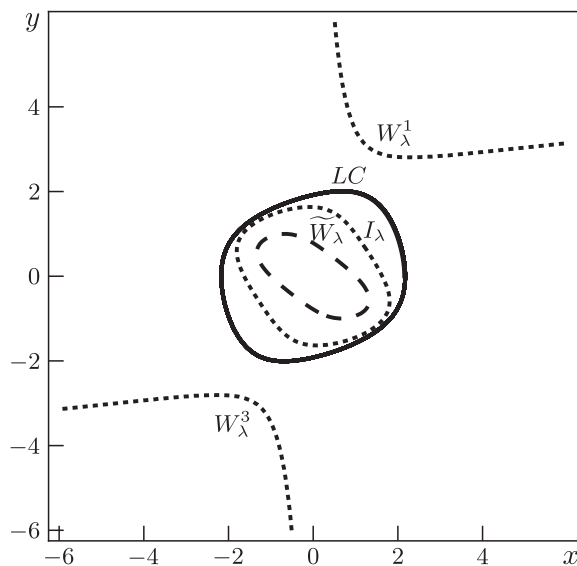


Рис. 1. Расположение кривых I_λ , $\widetilde{W}_\lambda$, W_λ^1 , W_λ^3 и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 1$.

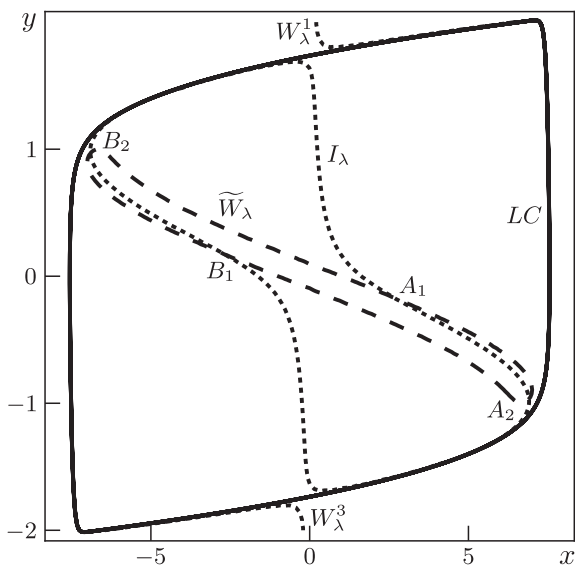


Рис. 2. Расположение контура $A_1A_2B_1B_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 10$.

5. ПОСТРОЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ КОЛЬЦА ПУАНКАРЕ–БЕНДИКСОНА СИСТЕМЫ (3)

В работе [10] для системы Ван дер Поля (2) был предложен подход к нахождению внешней границы на основе построения функции $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) множество H_λ , на котором производная функции $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в силу системы (2) принимает нулевые значения и меняет знак, состоит из овала C_λ ;
- 2) множество нулевого уровня многочлена $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ содержит при всех $\lambda > 0$ овал O_λ , окружающий как овал C_λ , так и уже найденную внутреннюю границу I_λ .

Учитывая полиномиальный вид системы (2), требуемая функция $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в указанной работе была построена в виде полинома второй степени по переменной y , коэффициенты которого зависят от x и λ . Для системы же Рэля (3) построить таким образом $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в виде аналогичного полинома не удалось, поэтому с учётом её правых частей наш способ заключается в построении многочлена $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ вида

$$\tilde{\Psi}(x, y, \lambda) = \tilde{\Psi}_2(y)(x + \lambda(y - y^3/3))^2 + \tilde{\Psi}_1(y)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \tilde{\Psi}_0(y).$$

Дифференцируя $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)$ в силу системы (3), получаем

$$\left. \frac{d\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)}{dt} \right|_{(3)} = \sum_{i=0}^3 \tilde{\Phi}_i(y)(x + \lambda(y - y^3/3))^i,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(y) &= \tilde{\Psi}_2'(y), \\ \tilde{\Phi}_2(y) &= \tilde{\Psi}_1'(y) + 2\lambda\tilde{\Psi}_2(y)(1 - y^2), \\ \tilde{\Phi}_1(y) &= -2y\tilde{\Psi}_2(y) + \tilde{\Psi}_0'(y) + \lambda\tilde{\Psi}_1(y)(1 - y^2), \\ \tilde{\Phi}_0(y) &= -y\tilde{\Psi}_1(y). \end{aligned}$$

Для того чтобы множество H_λ в фазовой плоскости содержало овал C_λ , на котором производная меняет знак, потребуем выполнения условий

$$\tilde{\Psi}_2'(y) = 0, \tag{41}$$

$$\tilde{\Psi}_1'(y) + 2\lambda\tilde{\Psi}_2(y)(1 - y^2) = -\lambda\tilde{\Psi}_2(y)y^2, \tag{42}$$

$$-2y\tilde{\Psi}_2(y) + \tilde{\Psi}_0'(y) + \lambda\tilde{\Psi}_1(y)(1 - y^2) = 0. \tag{43}$$

Из соотношения (41) получаем

$$\tilde{\Psi}_2(y) = \tilde{c}_2. \tag{44}$$

С учётом (44) из соотношения (42) найдём

$$\tilde{\Psi}_1'(y) = -2\lambda\tilde{c}_2 + \lambda\tilde{c}_2y^2,$$

откуда имеем

$$\tilde{\Psi}_1(y) = -2\lambda\tilde{c}_2y + \lambda\tilde{c}_2y^3/3. \tag{45}$$

Из соотношения (43) с учётом (44) и (45) получим

$$\tilde{\Psi}_0'(y) = 2\tilde{c}_2y + \lambda^2\tilde{c}_2(2y - 7y^3/3 + y^5/3),$$

откуда

$$\tilde{\Psi}_0(y) = \tilde{c}_2 y^2 + \lambda^2 \tilde{c}_2 \left(y^2 - \frac{7}{12} y^4 + \frac{y^6}{18} \right) + \tilde{c}_0. \quad (46)$$

В результате имеем

$$\left. \frac{d\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)}{dt} \right|_{(3)} = -\lambda \tilde{c}_2 y^2 ((x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2/3 - 2).$$

Таким образом, доказана

Лемма 5. Производная $d\tilde{\Psi}(x, y, \lambda)/dt$ с учётом системы (3) при $\lambda > 0$ меняет знак только на овале

$$C_\lambda = \{(x, y) \in R^2 : (x + \lambda(y - y^3/3))^2 + y^2/3 = 2\}.$$

С учётом выражений (44)–(46) получаем представление

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(x, y, \lambda) = & \tilde{c}_2(x + \lambda(y - y^3/3))^2 - \lambda \tilde{c}_2(2y - y^3/3)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \\ & + \tilde{c}_2 y^2(1 + \lambda^2) - 7\lambda^2 \tilde{c}_2 y^4/12 + \lambda^2 \tilde{c}_2 y^6/18 + \tilde{c}_0. \end{aligned}$$

Справедливость следующего утверждения доказывается аналогично лемме 7 из работы [10].

Лемма 6. При

$$\tilde{c}_0 = -8\tilde{c}_2 - 3\lambda\tilde{c}_2 - 18\lambda^2\tilde{c}_2$$

уравнение $\tilde{\Psi}(x, y, \lambda) = 0$ с учётом условия $\tilde{c}_2 \neq 0$ определяет овал

$$\begin{aligned} O_\lambda = \{(x, y) \in R^2 : & (x + \lambda(y - y^3/3))^2 - \lambda(2y - y^3/3)(x + \lambda(y - y^3/3)) + \\ & + y^2(1 + \lambda^2) - 7\lambda^2 y^4/12 + \lambda^2 y^6/18 - 8 - 3\lambda - 18\lambda^2 = 0\}, \end{aligned} \quad (47)$$

который является центрально симметричным и окружает овал C_λ .

Таким образом, овал O_λ может использоваться как внешняя граница кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы (3). Взаимное расположение овалов O_λ , C_λ , I_λ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 4.1$ показано на рис. 3.

Овал O_λ был построен в работе [1] с помощью овала внешней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля из статьи [10] с использованием диффеоморфизма, отображающего систему (2) на систему (3).

Далее покажем, что внешняя граница O_λ при $\lambda > 0$ может быть улучшена с помощью трансверсальных кривых W_λ^1 и W_λ^3 , принадлежащих множеству нулевого уровня W_λ функции Дюлака–Черкаса $\Psi(x, y, \lambda)$. Для этого рассмотрим взаимное расположение овала O_λ и кривых W_λ^1 , W_λ^3 . Из соотношений (47) и (40) следует, что при достаточно малых значениях λ у этих кривых нет общих точек. Если λ увеличивается, то существует единственное значение $\lambda_2 \approx 0.6012$, при котором кривая W_λ^1 касается овала O_λ в одной точке C первой координатной четверти, а кривая W_λ^3 касается овала O_λ в точке D третьей координатной четверти. Далее при $\lambda > \lambda_2$ каждая из кривых W_λ^1 и W_λ^3 пересекает овал O_λ в двух точках C_1 , C_2 и D_1 , D_2 соответственно. Дугу C_1C_2 кривой W_λ^1 и дугу D_1D_2 кривой W_λ^3 можно использовать для улучшения овала O_λ в качестве внешней границы кольца Пуанкаре–Бендиксона для системы Рэлея, а именно из указанных дуг вместе с дугами C_2D_1 и D_2C_1 овала O_λ можно составить контур $C_1C_2D_1D_2$, который при $\lambda > \lambda_2$ является лучшей внешней границей кольца

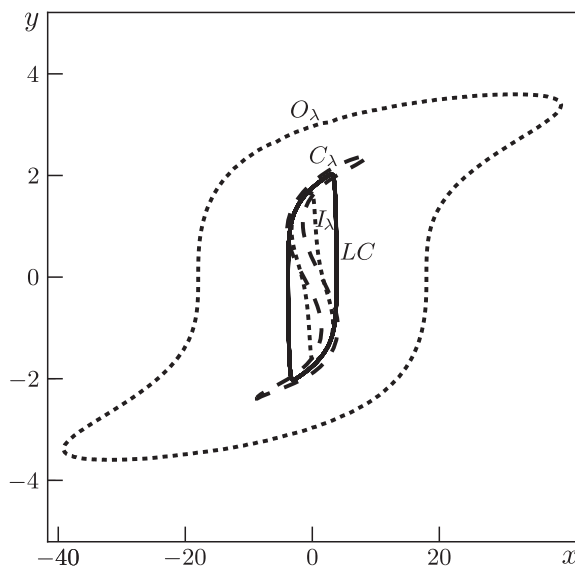


Рис. 3. Расположение овалов O_λ , C_λ , I_λ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 4.1$.

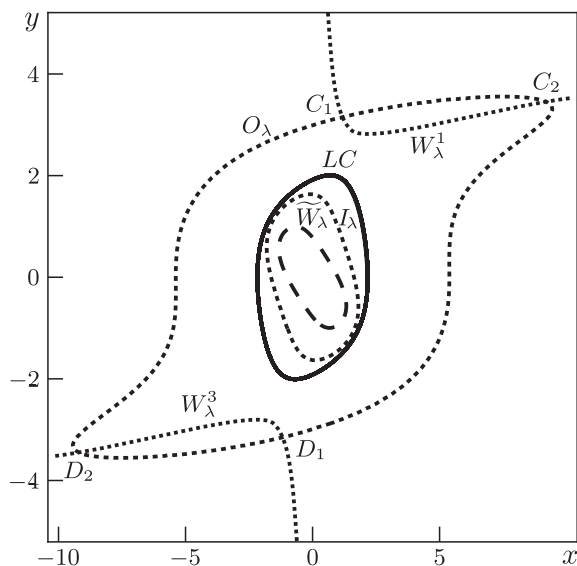


Рис. 4. Расположение контура $C_1C_2D_1D_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 1$.

Пуанкаре–Бендиксона, чем овал O_λ . На рис. 4 показано взаимное расположение контура $C_1C_2D_1D_2$ и предельного цикла LC системы (3) при $\lambda = 1$.

Таким образом, нами получен следующий основной результат.

Теорема 2. Единственный предельный цикл системы Рэлея (3) на фазовой плоскости расположен в кольце Пуанкаре–Бендиксона $A(\lambda)$, внутренней и внешней границами которого соответственно являются:

- 1) овалы I_λ и O_λ при $0 < \lambda < \lambda_2$,
- 2) овал I_λ и контур $C_1C_2D_1D_2$ при $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$,
- 3) контуры $A_1A_2B_1B_2$ и $C_1C_2D_1D_2$ при $\lambda > \lambda_1$.

Для более детального изучения предельного цикла при $\lambda \rightarrow \infty$ систему Рэлея (3) с помощью линейного диффеоморфизма $u = x$, $v = \lambda y$, $\tau = t/\lambda$ удобно преобразовать к топологически эквивалентной системе

$$\frac{du}{d\tau} = -v, \quad \varepsilon \frac{dv}{d\tau} = u + v - \frac{v^3}{3}, \quad (48)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda^2$. При малых значениях параметра ε система (48) является сингулярно возмущённой, а её единственный предельный цикл $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ представляет собой релаксационные колебания. В работе [14] были построены алгебраические овалы

$$\hat{I}_\varepsilon := \{(u, v) \in S_{2\sqrt{3}} : u^2 + \varepsilon v^2 + uv(1 - v^2/3) - 8\varepsilon/3 = 0\}$$

и

$$\hat{O}_\varepsilon := \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \left(-u + v \left(\frac{v^2}{3} - 1 \right) \right) (-u + v) + (1 + \varepsilon)v^2 - \frac{7}{12}v^4 + \frac{1}{18}v^6 - 8\varepsilon - 3\sqrt{\varepsilon} - 18 = 0 \right\},$$

которые образуют соответственно внутреннюю и внешнюю границы глобального алгебраического кольца Пуанкаре–Бендиксона $\hat{A}_\varepsilon$, содержащего единственный предельный цикл $\hat{\Gamma}_\varepsilon$ системы (48). Уточнение границ кольца $\hat{A}_\varepsilon$ проводится аналогично кольцу $A(\lambda)$ системы (3).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Ли Ю. выполнено при поддержке Ланьчжоуского городского университета (проект по конструированию дисциплин). Исследование Гриня А.А. и Кузьмича А.В. выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23У-008).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин, Н.П. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.П. Баутин, Е.А. Леонтович. — 2-е изд., доп. — М. : Букинист, 1990. — 488 с.
2. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1959. — 915 с.
3. Perko, L. Differential Equations and Dynamical Systems / L. Perko. — New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer, 2001. — 555 p.
4. Рейссиг, Г. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Г. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти. — М. : Наука, 1974. — 319 с.
5. Lynch, S. Dynamical systems with Applications using Mathematica / S. Lynch. — Boston : Birkhäuser, 2007. — 585 p.
6. Flanders, D.A. The limit case of relaxation oscillations / D.A. Flanders, J.J. Stoker // Studies in Nonlinear Vibration Theory ; ed. Howard J. Eckweiler. — New York : New York University, 1946. — P. 51–64.
7. Schneider, K.R. New approach to study the Van der Pol equation for large damping / K.R. Schneider // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. — 2018. — V. 8. — P. 1–10.
8. Gasull, A. Effective construction of Poincaré–Bendixson regions / A. Gasull, H. Giacomini, M. Grau // J. Appl. Anal. Comp. — 2017. — V. 7. — P. 1549–1569.
9. Giacomini, H. Transversal conics and the existence of limit cycles / H. Giacomini, M. Grau // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — V. 428. — P. 563–586.
10. Гринь, А.А. Глобальное алгебраическое кольцо Пуанкаре–Бендиксона для системы Ван дер Поля / А.А. Гринь, К.Р. Шнайдер. — Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 3. — С. 291–300.
11. Черкас, Л.А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости // Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 5. — С. 689–699.
12. Черкас, Л.А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л.А. Черкас, А.А. Гринь, В.И. Булгаков. — Гродно : Гроднен. гос. ун-т им. Янки Купалы, 2013. — 489 с.
13. Grin, A.A. Location of the limit cycle for a class of Lienard systems by means of Dulac–Cherkas functions / A.A. Grin, K.R. Schneider // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys. — 2023. — V. 90. — P. 1–11.
14. Grin, A.A. Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Rayleigh equation / A.A. Grin, K.R. Schneider // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat. — 2023. — V. 35. — P. 1–12.
15. Birkhoff, G. Ordinary Differential Equations / G. Birkhoff, G.-C. Rota. — New York : John Wiley & Sons, 1989. — 416 p.
16. Rayleigh, J. The Theory of Sound / J. Rayleigh. — New York, 1945. — 520 p.
17. Georgescu, A. Approximate limit cycles for the Rayleigh model / A. Georgescu, P. Bazavan, M. Sterpu // ROMAI J. — 2008. — V. 4, № 2. — P. 73–80.
18. Ghaffari, A. On Rayleigh’s nonlinear vibration equation / A. Ghaffari // Proc. Int. Sympos. Non-linear Vibrations. Kiev, 1963. — V. 2. — P. 131–133.
19. Lopez, M.A. A note on the generalized Rayleigh equation: limit cycles and stability / M.A. Lopez, R. Martinez // J. Math. Chem. — 2013. — V. 51. — P. 1164–1169.

20. Palit, A. Comparative study of homotopy analysis and renormalization group methods on Rayleigh and Van der Pol equations / A. Palit, D.P. Datta // *Differ. Equat. Dynan. Syst.* — 2016. — V. 24. — P. 417–443.
21. Saha, S. Systematic designing of bi-rhythmic and tri-rhythmic models in families of Van der Pol and Rayleigh oscillators / S. Saha, G. Gangopadhyay, R.D. Shankar // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* — 2020. — V. 85. — P. 12.
22. Тлячев, В.Б. О периодических решениях уравнения Рэлея / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика.* — 2021. — Т. 21, № 2. — С. 173–181.
23. Grin, A.A. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems / A.A. Grin, K.R. Schneider // *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.* — 2007. — V. 14. — P. 641–656.

SPECIFIED GLOBAL POINCARÉ–BENDIXSON ANNULUS WITH THE LIMIT CYCLE OF THE RAYLEIGH SYSTEM

Y. Li¹, A. A. Grin², A. V. Kuzmich³

¹*Lanzhou City University, China*

^{2,3}*Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus*

e-mail: ¹li_liyong120@163.com, ²grin@grsu.by, ³kuzmich_av@grsu.by

In the work of A. Grin and K. Schneider [1] two algebraic transversal ovals, which form the Poincaré–Bendixson annulus $A(\lambda)$, are analytically constructed. This annulus contains the unique limit cycle of the Rayleigh equation $\ddot{x} + \lambda(\dot{x}^2/3 - 1)\dot{x} + x = 0$ for all values of the parameter $\lambda > 0$. In the constructed annulus $A(\lambda)$ inner boundary consists of zero-level set of the Dulac–Cherkas function and outer boundary represents the diffeomorphic image corresponding boundary of such an annulus for the van der Pol system. In this paper new methods of construction two Dulac–Cherkas functions are worked out. With help of these functions a better inner boundary of the Poincaré–Bendixson annulus $A(\lambda)$ depending on the parameter is found. Also, for the Rayleigh system, a procedure for direct finding a polynomial whose zero-level set contains a transversal oval used as the outer boundary $A(\lambda)$ is proposed. Then we determine the interval for λ where the better outer boundary of the annulus is a closed contour, which composed from two arcs of the constructed oval and two arcs of non-closed curves belonging to zero-level set of one from Dulac–Cherkas functions. Thus, finally the specified global Poincaré–Bendixson annulus for the limit cycle of the Rayleigh system is presented.

Keywords: Poincaré–Bendixson annulus, Rayleigh system, limit cycle, Dulac–Cherkas function, topologically equivalent systems.

FUNDING

The first author was supported by the discipline construction project of Lanzhou City University. The work by the second and third authors was carried out with financial support of the Belarusian Republican Foundation for Basic Research (project no. F23U-008).

REFERENCES

1. Bautin, N.P. and Leontovich, E.A., *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniia dinamicheskikh sistem na ploskosti* (Methods and techniques for qualitative research of dynamic systems on a plane), Moscow: Bukinist, 1990.
2. Andronov, A.A., Vitt, A.A., and Hajkin, S.E., *Teoriia kolebanií* (Oscillation theory), Moscow: Fizmatgiz, 1959.
3. Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2001.
4. Rejssig, R., Sansone, G., and Conti, R., *Non-Linear Differential Equations of Higher Order*, Dordrecht: Springer, 1974.
5. Lynch, S., *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*, Boston: Birkhäuser, 2007.
6. Flanders, D.A. and Stoker, J.J., The limit case of relaxation oscillations, in *Studies in Nonlinear Vibration Theory*, New York: New York University, 1946, pp. 51–64.

7. Schneider, K.R., New approach to study the Van der Pol equation for large damping, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat.*, 2018, vol. 8, pp. 1–10.
8. Gasull, A., Giacomini, H., and Grau, M., Effective construction of Poincaré–Bendixson regions, *J. Appl. Anal. Comp.*, 2017, vol. 7, pp. 1549–1569.
9. Giacomini, H. and Grau, M., Transversal conics and the existence of limit cycles, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 428, pp. 563–586.
10. Grin, A.A. and Schneider, K.R., Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Van der Pol equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 285–295.
11. Cherkas, L.A., Dulac function for polynomial autonomous systems on a plane, *Differ. Equat.*, 1997, vol. 33, pp. 692–701.
12. Cherkas, L.A., Grin, A.A., and Bulgakov, V.I., *Konstruktivnye metody issledovaniia predel'nykh tsiklov avtonomnykh sistem vtorogo poriadka (chislenno-algebraicheskii podkhod)* (Constructive methods for studying limit cycles of second-order autonomous systems (numerical-algebraic approach)), Grodno: Grodnen. gos. un-t im. Yanki Kupaly, 2013.
13. Grin, A.A. and Schneider, K.R., Location of the limit cycle for a class of Lienard systems by means of Dulac–Cherkas functions, *Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys.*, 2023, vol. 90, pp. 1–11.
14. Grin, A.A. and Schneider, K.R., Global algebraic Poincaré–Bendixson annulus for the Rayleigh equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat.*, 2023, vol. 35, pp. 1–12.
15. Birkhoff, G. and Rota, G.-C., *Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, 1989.
16. Rayleigh, J., *The Theory of Sound*, New York, 1945.
17. Georgescu, A., Bazavan, P., and Sterpu, M., Approximate limit cycles for the Rayleigh model, *ROMAI J.*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 73–80.
18. Ghaffari, A., On Rayleigh’s nonlinear vibration equation, *Proc. Int. Sympos. Non-linear Vibrations. Kiev*, 1963, vol. 2, pp. 131–133.
19. Lopez, M.A. and Martinez, R., A note on the generalized Rayleigh equation: limit cycles and stability, *J. Math. Chem.*, 2013, vol. 51, pp. 1164–1169.
20. Palit, A. and Datta, D.P., Comparative study of homotopy analysis and renormalization group methods on Rayleigh and Van der Pol equations, *Differ. Equat. Dynam. Syst.*, 2016, vol. 24, pp. 417–443.
21. Saha, S., Gangopadhyay, G. and Shankar, R.D., Systematic designing of bi-rhythmic and tri-rhythmic models in families of Van der Pol and Rayleigh oscillators, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2020, vol. 85, pp. 12.
22. Tliachev, V.B., Usho, A.D., and Usho, D.S., On periodic solutions of the Rayleigh equation, *Izvestiia Saratovskogo universiteta. Novaia seriia. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 173–181.
23. Grin, A.A. and Schneider, K.R., On some classes of limit cycles of planar dynamical systems, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.*, 2007, vol. 14, pp. 641–656.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.958

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ, РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

© А. В. Аксенов¹, А. Д. Полянин²¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова²Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлinskого РАН, г. Москваe-mail: ¹aksenov@mech.math.msu.su, ²polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 04.12.2023 г., после доработки 16.01.2024 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Исследовано уравнение Монжа–Ампера с тремя независимыми переменными, встречающееся в электронной магнитной гидродинамике. Проведён групповой анализ этого сильно нелинейного уравнения с частными производными. Найдено одиннадцатипараметрическое преобразование, сохраняющее вид уравнения. Получена формула, дающая возможность строить многопараметрические семейства решений исходя из более простых решений. Рассмотрены двумерные редукции, приводящие к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными. Описаны одномерные редукции, позволяющие получать автомодельные и другие инвариантные решения, которые удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям. Построены точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщённым разделением переменных, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. Полученные результаты и точные решения могут быть использованы для оценки точности и анализа адекватности численных методов решения начально-краевых задач, описываемых сильно нелинейными уравнениями с частными производными.

Ключевые слова: уравнение Монжа–Ампера, групповой анализ, редукция, точное решение.

DOI: 10.31857/S0374064124060032, EDN: KWLDDX

ВВЕДЕНИЕ

В плазменной электронной магнитной гидродинамике разработан подход, в котором электронная составляющая плазмы представлена в виде набора случайных или регулярно распределённых точечных электронных вихрей. Локальные нестационарные движения в соответствующей двумерной вихревой системе описываются нелинейным уравнением [1, 2]

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \quad (1)$$

в правой части которого опущен несущественный постоянный множитель.

Впервые нестационарные уравнения с нелинейностью типа Монжа–Ампера по пространственным переменным появились в работе [3], в которой, в частности, было приведено уравнение

$$u_t = \det H - f(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $H = (u_{x_i x_j})$ — матрица вторых производных Гессе.

В случае двух пространственных переменных $x_1 = x$ и $x_2 = y$ в уравнении (2) следует положить $\mathbf{x} = (x, y)$ и $\det H = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$. При $n = 2$ и $f \equiv 0$ уравнение (2) переходит в уравнение (1).

Уравнения (1) и (2) и более сложные родственные нелинейные уравнения, содержащие первую производную по времени u_t и комбинацию вторых производных по пространственным координатам вида $\det H$, называются авторами статей [4–8] *параболическими уравнениями Монжа–Ампера*. В указанных работах в основном исследовались вопросы существования и единственности решений различных внутренних и внешних начально-краевых задач для таких уравнений, а также обсуждались геометрические приложения.

В случае двух пространственных переменных параболические уравнения Монжа–Ампера имеют вид

$$u_t = F(x, y, t, u, u_x, u_y, u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2). \quad (3)$$

При $u_t = F_t = 0$ уравнения вида (3) сводятся к стационарным уравнениям Монжа–Ампера, которые принято записывать в разрешённом относительно комбинации старших производных виде

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \Phi(x, y, u, u_x, u_y). \quad (4)$$

Весьма полную информацию о стационарных уравнениях Монжа–Ампера, часто встречающихся в дифференциальной геометрии, можно найти в книге [9, гл. 8]. В частных случаях, при $\Phi = 0$ (однородное уравнение Монжа–Ампера) и $\Phi = a = \text{const} < 0$, общее решение уравнения (4) можно представить в параметрической форме [10, с. 776]. Различные преобразования и обширный список точных решений уравнений вида (4) приведены в работах [10, с. 774–793; 11].

Уравнение (4) является сильно нелинейным (квадратичным относительно старших производных) и имеет свойства, необычные для квазилинейных уравнений — линейных относительно старших производных. В частности, даже для простейшей правой части $\Phi = a = \text{const}$ качественные особенности этого уравнения зависят от знака постоянной a , поскольку при $a > 0$ уравнение (4) является уравнением “эллиптического типа”, а при $a < 0$ — уравнением “гиперболического типа” [10, с. 1393].

Указанные выше качественные особенности стационарных уравнений Монжа–Ампера значительно усложняют процедуру их численного интегрирования. Поэтому для численного решения стационарных уравнений Монжа–Ампера (4) применяются различные модификации метода установления по времени с использованием параболического уравнения Монжа–Ампера, которое получается добавлением нестационарной первой производной u_t в правую часть (4). Указанный подход с привлечением параболических уравнений Монжа–Ампера (1) и (2) использовался в [12, 13] для численного интегрирования краевых задач, описываемых соответствующими стационарными уравнениями Монжа–Ампера.

В статьях [14, 15] с помощью метода разделения переменных были получены точные решения уравнения (1) в виде произведения и суммы функций разных аргументов.

В данной работе под *точными решениями* нелинейных уравнений с частными производными понимаются решения, которые выражаются:

- с помощью элементарных функций и неопределённых интегралов;
- через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем ОДУ;
- через решения линейных уравнений математической физики.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными играют важную роль стандартных “математических эталонов”, широко используемых для оценки точности, верификации и разработки различных численных, асимптотических и приближённых аналитических методов.

Редукциями рассматриваемого уравнения называют уравнения с меньшим числом независимых переменных или уравнения более низкого порядка, все решения которых являются решениями данного уравнения. Редукции играют ключевую роль для построения точных решений дифференциальных уравнений. Наиболее важными для нелинейных уравнений с частными производными являются одномерные редукции, используя которые удаётся представить их решения в терминах решений гораздо более простых ОДУ.

Отметим характерную качественную особенность уравнения (1), отличающую его от подавляющего большинства других уравнений математической физики, не зависящих явно от независимых переменных — оно не имеет простых решений типа бегущей волны $u = U(ax + by + ct)$ и более сложных решений вида $u = V(ax + by, t)$, где a, b, c — некоторые постоянные, $U' \neq 0$ и $V_t \neq 0$.

В данной работе для поиска точных решений нелинейного уравнения магнитной гидродинамики (1) использованы различные модификации метода обобщённого разделения переменных [10, гл. 29; 16, гл. 1], а также приведённые в [10, гл. 11] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Такие решения удобно использовать в качестве тестовых задач для оценки точности и проверки адекватности численных методов решения сильно нелинейных уравнений с частными производными.

1. СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА (1)

Операторы симметрии уравнения (1) ищем в виде

$$X = \xi^1(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Применяя критерий инвариантности [17, гл. 2], получаем следующую переопределённую линейную однородную систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_t^1 &= 0, & \xi_u^1 &= 0, & \xi_t^2 &= 0, & \xi_u^2 &= 0, & \xi_x^3 &= 0, & \xi_y^3 &= 0, & \xi_u^3 &= 0, \\ \eta_t &= 0, & \eta_u - 2\xi_x^1 - 2\xi_y^2 + \xi_t^3 &= 0, & \xi_{xx}^1 &= 0, & \xi_{xy}^1 &= 0, & \xi_{yy}^1 &= 0, \\ \xi_{xx}^2 &= 0, & \xi_{xy}^2 &= 0, & \xi_{yy}^2 &= 0, & \xi_{tt}^3 &= 0, & \eta_{xx} &= 0, & \eta_{xy} &= 0, & \eta_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что совместное решение переопределённой системы уравнений (5) даётся формулами

$$\xi^1 = c_1 x + c_2 y + c_3, \quad \xi^2 = c_4 x + c_5 y + c_6, \quad \xi^3 = c_7 t + c_8, \quad \eta = (2c_1 + 2c_5 - c_7)u + c_9 x + c_{10} y + c_{11},$$

где c_j ($j = \overline{1, 11}$) — произвольные постоянные. Отсюда следуют два утверждения.

Предложение 1. *Базис алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1) имеет вид*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial u}, & X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= x \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_7 &= x \frac{\partial}{\partial u}, & X_8 &= y \frac{\partial}{\partial u}, & X_9 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{10} &= y \frac{\partial}{\partial y} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{11} &= t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Предложение 2. *Преобразование*

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1 x + b_1 y + c_1, & \bar{y} &= a_2 x + b_2 y + c_2, & \bar{t} &= d_1 t + d_2, \\ \bar{u} &= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{d_1} u + a_3 x + b_3 y + c_3 & (a_1 b_2 - a_2 b_1 &\neq 0, \quad d_1 \neq 0) \end{aligned} \quad (6)$$

переводит любое решение $u = \varphi(x, y, t)$ уравнения (1) в одиннадцатипараметрическое семейство решений

$$u = \frac{d_1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} [\varphi(a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2, d_1 t + d_2) - a_3 x - b_3 y - c_3], \quad (7)$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$ — произвольные постоянные.

Важно отметить, что в формуле (7) свободные параметры могут быть комплексными числами, если полученное таким способом решение будет действительным (подробности см. в [18]). В п. 3 статьи приведён конкретный пример использования такого подхода.

Замечание 1. Преобразование (6) оставляет инвариантным вид уравнения (1). Формула (7) даёт возможность получать многопараметрические семейства решений исходя из более простых решений.

2. ДВУМЕРНЫЕ СИММЕТРИЙНЫЕ РЕДУКЦИИ

Регулярная процедура построения двумерных симметричных редукций уравнений с частными производными описана в книге [17, гл. 5]. В данной работе мы ограничимся наиболее содержательными примерами построения двумерных редукций уравнения Монжа–Ампера (1) на основе использования симметрий, описанных выше.

1°. Переходя в уравнении (1) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi, \eta), \quad \xi = x - a_1 t, \quad \eta = y - a_2 t, \quad (8)$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 + a_1 U_{\xi} + a_2 U_{\eta} = 0. \quad (9)$$

Решение вида (8) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + X_3 = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Уравнение (9) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида

$$U_1 = f_1(\xi)\eta^2 + g_1(\xi)\eta + h_1(\xi), \quad U_2 = f_2(\eta)\xi^2 + g_2(\eta)\xi + h_2(\eta), \quad (10)$$

где функции f_i, g_i, h_i ($i = 1, 2$) описываются соответствующими системами ОДУ второго порядка, которые здесь не приводятся.

Замечание 2. Решения аналогичные (10), квадратичные по одной или нескольким переменным, нередко используются для построения точных решений нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа (см., например, [10, 17–19]).

2°. Переходя в уравнении (1) к автомодельным переменным

$$u = t^{-2\alpha-2\beta-1}U(\xi, \eta), \quad \xi = xt^{\alpha}, \quad \eta = yt^{\beta}, \quad (11)$$

где α и β — произвольные постоянные, получаем двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 - \alpha\xi U_{\xi} - \beta\eta U_{\eta} + (2\alpha + 2\beta + 1)U = 0. \quad (12)$$

Решение вида (11) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \alpha X_9 + \beta X_{10} - X_{11} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} + (2\alpha + 2\beta + 1)u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (13)$$

Уравнение (12) допускает квадратичные по любой независимой переменной точные решения вида (10). Значениям $\alpha = \beta = 0$ в (11) соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

Замечание 3. Эквивалентную форму представления решения вида (11) можно получить, взяв вместо второго аргумента комбинацию обоих аргументов $\zeta = \xi^{-\beta} \eta^\alpha = x^{-\beta} y^\alpha$, что приведёт к решению вида

$$u = t^{-2\alpha-2\beta-1} V(\xi, \zeta), \quad \xi = xt^\alpha, \quad \zeta = x^{-\beta} y^\alpha. \quad (14)$$

Решение вида (14) также является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии (13). Уравнение на функцию $V(\xi, \zeta)$ (или двумерная редукция) здесь не приводится ввиду его громоздкости.

3°. Переходя в уравнении (1) к инвариантным переменным

$$u = e^{-2(\alpha+\beta)t} U(\xi, \eta), \quad \xi = xe^{\alpha t}, \quad \eta = ye^{\beta t}, \quad (15)$$

где α и β — произвольные постоянные, получаем другое двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 - \alpha\xi U_\xi - \beta\eta U_\eta + 2(\alpha + \beta)U = 0. \quad (16)$$

Решение вида (15) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \alpha X_9 + \beta X_{10} - X_3 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} + 2(\alpha + \beta)u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Уравнение (16) допускает квадратичные по любой независимой переменной точные решения вида (10).

4°. Переходя в уравнении (1) к инвариантным переменным

$$u = \frac{1}{t} U(\xi, \eta), \quad \xi = x + \lambda_1 \ln t, \quad \eta = y + \lambda_2 \ln t, \quad (17)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные, получаем двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 - \lambda_1 U_\xi - \lambda_2 U_\eta + U = 0. \quad (18)$$

Решение вида (17) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 - X_{11} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Уравнение (18) допускает точные решения типа бегущей волны, а также квадратичные по любой независимой переменной решения вида (10). Значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ в (17) соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

5°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = x^2 U(\xi, \eta), \quad \xi = t + \alpha \ln x, \quad \eta = y + \beta \ln x, \quad (19)$$

где α и β — произвольные постоянные, редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается. Значениям $\alpha = \beta = 0$ в (19) соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

Решение вида (19) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = -\beta X_2 - \alpha X_3 + X_9 = x \frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial y} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} + 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

6°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{-2\alpha x} U(\xi, \eta), \quad \xi = x + \beta t, \quad \eta = ye^{\alpha x} \quad (20)$$

редуцируется к двумерному уравнению типа Монжа–Ампера, которое здесь опускается.

Решение вида (20) является решением, инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \beta X_1 - X_3 - \alpha \beta X_{10} + X_9 = \beta \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} - 2\alpha \beta u \frac{\partial}{\partial u}.$$

7°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{(\alpha-2\beta)x} U(\xi, \eta), \quad \xi = te^{\alpha x}, \quad \eta = ye^{\beta x} \quad (21)$$

сводится к двумерному уравнению, которое здесь опускается.

Решение вида (21) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = X_1 - \beta X_{10} - \alpha X_{11} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \alpha t \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 2\beta)u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Замечание 4. Более сложные двумерные симметричные редукции уравнения (1) можно получить, применив к решениям (8), (11), (14), (15), (17), (19)–(21) формулу разложения решений (7).

3. ОДНОМЕРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Регулярная процедура построения одномерных редукций уравнений с частными производными описана в [17, гл. 5]. В данной работе мы ограничимся характерными примерами построения одномерных редукций и инвариантных точных решений путём использования симметрий параболического уравнения Монжа–Ампера (1).

1°. Простейшим инвариантным решением уравнения (1), допускающим преобразование масштабирования, является решение в виде произведения соответствующих степеней независимых переменных

$$u = \frac{x^2 y^2}{12t}. \quad (22)$$

Ниже рассмотрено несколько инвариантных решений, которые обобщают решение (22) и могут быть получены с помощью простых методов, описанных в статье [20].

Решение (22) является частным случаем более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u = \frac{x^2}{t} f(z), \quad z = y + \beta \ln t, \quad (23)$$

где β — произвольная постоянная, а функция $f = f(z)$ описывается нелинейным ОДУ

$$2f f''_{zz} - 4(f'_z)^2 = -f + \beta f'_z.$$

Решение (22) является частным случаем и другого, более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u = \frac{x^2}{t} g(\xi), \quad \xi = y + \lambda \ln x, \quad (24)$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $g = g(z)$ удовлетворяет ОДУ

$$\lambda g'_\xi g''_{\xi\xi} - 2g g''_{\xi\xi} + 4(g'_\xi)^2 = g.$$

Решение (22) также является частным случаем другого, более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u = x^2 y^2 \varphi(\eta), \quad \eta = t + \gamma \ln y, \quad (25)$$

где γ — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(\eta)$ удовлетворяет ОДУ

$$2\gamma^2 \varphi \varphi''_{\eta\eta} - 4\gamma^2 (\varphi'_\eta)^2 - 10\gamma \varphi \varphi'_\eta - 12\varphi^2 = \varphi'_\eta.$$

В решениях (23)–(25) пространственные переменные x и y можно поменять местами или воспользоваться формулой (7).

Применив формулу (7) при $a_1 = a_2 = b_2 = d_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = d_2 = 0$ к решению (22), получим решение более сложного вида

$$u = \frac{(x^2 - y^2)^2}{48t}. \quad (26)$$

Уравнение (1) не изменится, если сделать преобразование $\bar{u} = -u$, $\bar{x} = ix$, где $i^2 = -1$ (это эквивалентно выбору комплексного параметра $a_1 = i$ в формуле (7)). Сделав аналогичное преобразование в (26), приходим к простому решению с осевой симметрией

$$u = -\frac{(x^2 + y^2)^2}{48t}.$$

2°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = x^{2-2\beta} t^{-2\alpha-1} V(\zeta), \quad \zeta = x^\beta t^\alpha y \quad (27)$$

редуцируется к нелинейному ОДУ второго порядка

$$[\beta(\beta+1)\zeta V'_\zeta - 2(\beta-1)(2\beta-1)V]V''_{\zeta\zeta} + (\beta-2)^2(V'_\zeta)^2 + \alpha\zeta V'_\zeta - (2\alpha+1)V = 0.$$

Решение вида (27) является инвариантным решением относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = \alpha X_9 - \beta X_{11} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \beta t \frac{\partial}{\partial t} + (2\alpha + \beta) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = \alpha X_{10} - X_{11} = \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} + (2\alpha + 1) u \frac{\partial}{\partial u}.$$

3°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{-2\alpha t} x^{2-2\beta} V(\zeta), \quad \zeta = e^{\alpha t} x^{\beta} y \quad (28)$$

редуцируется к ОДУ второго порядка

$$[\beta(\beta+1)\zeta V_{\zeta}' - 2(\beta-1)(2\beta-1)V] V_{\zeta\zeta}'' + (\beta-2)^2 (V_{\zeta}')^2 + \alpha\zeta V_{\zeta}' - 2\alpha V = 0.$$

Решение вида (28) инвариантно относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = -X_3 + \alpha X_{10} = \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = X_9 - \beta X_{10} = x \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} - 2(\beta-1)u \frac{\partial}{\partial u}.$$

4°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = t^{-2\alpha-1} e^{-2\beta x} V(\zeta), \quad \zeta = t^{\alpha} e^{\beta x} y \quad (29)$$

сводится к ОДУ второго порядка

$$\beta^2 (\zeta V_{\zeta}' - 4V) V_{\zeta\zeta}'' + \beta^2 (V_{\zeta}')^2 + \alpha\zeta V_{\zeta}' - (2\alpha+1)V = 0.$$

Решение вида (29) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_1 - \beta X_{10} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} - 2\beta u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = \alpha X_{10} - X_{11} = \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} + (2\alpha+1)u \frac{\partial}{\partial u}.$$

5°. Уравнение (1) с использованием инвариантных переменных

$$u = e^{-2\alpha t - 2\beta x} V(\zeta), \quad \zeta = e^{\alpha t + \beta x} y \quad (30)$$

редуцируется к ОДУ второго порядка

$$\beta^2 (\zeta V_{\zeta}' - 4V) V_{\zeta\zeta}'' + \beta^2 (V_{\zeta}')^2 + \alpha\zeta V_{\zeta}' - 2\alpha V = 0.$$

Решение вида (30) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_1 - \beta X_{10} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} - 2\beta u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = X_3 - \alpha X_{10} = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} - 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Замечание 5. Более сложные одномерные симметричные редукции уравнения (1) можно получить, применив к решениям (24), (25), (27)–(30) формулу разложения решений (7).

4. РЕДУКЦИИ С ОБОБЩЁННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕОДНОРОДНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА–АМПЕРА

1°. Уравнение (1) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = -At + w(x, y), \quad (31)$$

где A — произвольная постоянная, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с постоянной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = -A. \quad (32)$$

2°. Нетрудно проверить, что уравнение (1) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (31), которое выражается в элементарных функциях

$$u = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + (4C_1 C_3 - C_2^2)t + C_6,$$

где C_i ($i = \overline{1, 6}$) — произвольные постоянные.

3°. Используя результаты [10], можно получить, например, следующие точные решения вида (31) уравнения (1):

$$\begin{aligned} u &= -At \pm \frac{\sqrt{A}}{C_2} x(C_1 x + C_2 y) + \varphi(C_1 x + C_2 y) + C_3 x + C_4 y + C_5, \\ u &= -At + \frac{1}{x + C_1} \left(C_2 y^2 + C_3 y + \frac{C_3^2}{4C_2} \right) - \frac{A}{12C_2} (x^3 + 3C_1 x^2) + C_4 y + C_5 x + C_6, \\ u &= -At \pm \frac{2\sqrt{A}}{3C_1 C_2} (C_1 x - C_2^2 y^2 + C_3)^{3/2} + C_4 x + C_5 y + C_6, \end{aligned}$$

где C_i ($i = \overline{1, 6}$) — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

Замечание 6. При $A > 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа–Ампера (32) можно представить в параметрическом виде [10].

4°. Уравнение (1) допускает более сложные, чем (31), решения с обобщённым разделением переменных вида

$$u = -(ax + by + c)t + w(x, y),$$

где a, b, c — произвольные постоянные, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с переменной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = -ax - by - c. \quad (33)$$

При $b = c = 0$ уравнение (33) имеет, например, следующие точные решения с обобщённым разделением переменных:

$$\begin{aligned} w &= \pm \frac{2}{3a} y(ax)^{3/2} + C_1 y + \varphi(x), \quad w = C_1 y^2 + C_2 xy + C_3 y - \frac{a}{12C_1} x^3 + \frac{C_2^2}{4C_1} x^2 + C_4 x + C_5, \\ w &= C_1 \frac{y^2}{x} + C_2 y - \frac{a}{24C_1} x^4 + C_3 x + C_4, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_i ($i = \overline{1, 5}$) — произвольные постоянные.

5. РЕДУКЦИИ С ОБОБЩЁННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1°. Уравнение (1) допускает решения с обобщённым разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2} ax^2 + bxy + \frac{1}{2} cy^2 + dy + (ac - b^2)t + U(x, t), \quad (34)$$

где c, b, c, d — произвольные постоянные, функция $U = U(x, t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$U_t = cU_{xx}. \quad (35)$$

2°. Приведём несколько простых решений уравнения (35), которые содержат экспоненциальные и тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} U &= C_1 \exp\{c\mu^2 t \pm \mu x\} + C_2, & U &= C_1 \exp\{-c\mu^2 t\} \cos(\mu x) + C_2, \\ U &= C_1 \exp\{-c\mu^2 t\} \sin(\mu x) + C_2, & U &= C_1 \exp\{-\mu x\} \cos(\mu x - 2c\mu^2 t) + C_2, \\ U &= C_1 \exp\{-\mu x\} \sin(\mu x - 2c\mu^2 t) + C_2, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, μ — произвольные постоянные.

3°. Решение (34) является частным случаем решения с обобщённым разделением переменных, квадратичного относительно пространственной переменной y , вида

$$u = y^2 f(x, t) + yg(x, t) + h(x, t),$$

где функции $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$, $h = h(x, t)$ описываются системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными:

$$f_t = 2ff_{xx} - 4f_x^2, \quad g_t = 2fg_{xx} - 4f_x g_x, \quad h_t = 2fh_{xx} - g_x^2. \quad (36)$$

Здесь первое уравнение для f нелинейно и не зависит от других уравнений, а два последних уравнения линейны относительно искомых функций g и h и имеют очевидное решение $g = C_1$, $h = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

6. РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

1°. В полярных координатах r, φ , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, исходное уравнение принимает вид

$$u_t = r^{-2} u_{rr} (u_{\varphi\varphi} + r u_r) - [(r^{-1} u_{\varphi})_r]^2, \quad (37)$$

который будет использован далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

2°. В эллиптических координатах r, φ , где $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ (a и b — положительные константы), уравнение (1) записывается как

$$u_t = (ab)^{-2} \{ r^{-2} u_{rr} (u_{\varphi\varphi} + r u_r) - [(r^{-1} u_{\varphi})_r]^2 \}.$$

С помощью элементарной замены $t = (ab)^2 \tau$ оно сводится к уравнению (37).

3°. Уравнение (37) допускает не зависящие от угловой переменной радиально-симметричные решения, которые описываются двумерным уравнением

$$u_t = r^{-1} u_r u_{rr}. \quad (38)$$

4°. Уравнение (38) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \frac{1}{2} C_1 C_2^2 t + C_2 \int \sqrt{C_1 r^2 + C_3} dr + C_4,$$

где C_i ($i = \overline{1, 4}$) — произвольные постоянные (при различных знаках константы C_1 интеграл в правой части выражается через разные элементарные функции).

5°. Уравнение (38) допускает автомодельное решение

$$u = t^{-4\beta-1} F(z), \quad z = r t^{\beta},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается ОДУ

$$-(4\beta + 1)F + \beta z F'_z = z^{-1} F'_z F''_{zz}. \quad (39)$$

Общим решением уравнения (39) при $\beta = -1/4$ является многочлен

$$F = -\frac{1}{48}z^4 + C_1 z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6°. Уравнение (37) имеет также точные решения с разделением переменных вида

$$u = r^4 v(\varphi, t),$$

где функция $v = v(\varphi, t)$ описывается двумерным уравнением

$$v_t = 12v(v_{\varphi\varphi} + 4v) - 9v_{\varphi}^2. \quad (40)$$

7°. Так как уравнение (40) не зависит явно от независимых переменных, то оно имеет решение типа бегущей волны

$$v = v(Z), \quad Z = \varphi - \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, функция $v = v(Z)$ описывается автономным ОДУ

$$12v(v''_{ZZ} + 4v) - 9(v'_Z)^2 + \lambda v'_Z = 0.$$

8°. Уравнение (40) допускает также решение с простым разделением переменных вида

$$v = (t + C)^{-1} V(\varphi),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $V = V(\varphi)$ описывается автономным ОДУ

$$12V(V''_{\varphi\varphi} + 4V) - 9(V'_{\varphi})^2 + V = 0.$$

9°. Уравнение (37), записанное в полярных координатах r и φ , допускает точные решения с неполным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{t + C} W(r, \varphi),$$

где функция W описывается двумерным уравнением

$$r^{-2} W_{rr} (W_{\varphi\varphi} + r W_r) - [(r^{-1} W_{\varphi})_r]^2 + W = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными вида $u_t = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2$, которое описывает локальные нестационарные движения плазмы в электронной магнитной гидродинамике. Рассмотрены инвариантные многопараметрические преобразования, сохраняющие вид этого уравнения. Описаны двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа–Ампера и линейным или нелинейным нестационарным уравнениям теплопроводности) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получен ряд решений с обобщённым разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях, а также некоторые другие точные решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ 124012500440-9).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smirnov, V.V. "Phonons" in two-dimensional vortex lattices / V.V. Smirnov, K.V. Chukbar // J. Experiment. Theor. Phys. — 2001. — V. 93, № 1. — P. 126–135.
2. Zaburdaev, V.Yu. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices / V.Yu Zaburdaev, V.V. Smirnov, K.V. Chukbar // Plasma Physics Reports. — 2014. — V. 30, № 3. — P. 214–217.
3. Крылов Н.В. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения / Н.В. Крылов // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 2. — С. 290–303.
4. Chen, L. Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge–Ampère equation / L. Chen, G. Wang, S. Lian // J. Differ. Equat. — 2002. — V. 186, № 2. — P. 558–571.
5. Xiong, J. On Jorgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge–Ampère equations / J. Xiong, J. Bao // J. Differ. Equat. — 2011. — V. 250, № 1. — P. 367–385.
6. Tang, L. Regularity results on the parabolic Monge–Ampère equation with VMO type data / L. Tang // J. Differ. Equat. — 2013. — V. 255, № 7. — P. 1646–1656.
7. Dai, L. Exterior problems for a parabolic Monge–Ampère equation / L. Dai // Nonlin. Anal. Theory, Methods & Appl. — 2014. — V. 100. — P. 99–110.
8. Tang, L. Boundary regularity on the parabolic Monge–Ampère equation / L. Tang // J. Differ. Equat. — 2015. — V. 259. — P. 6399–6431.
9. Погорелов, А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей / А.В. Погорелов. — М. : Наука, 1969. — 760 с.
10. Polyanin, A.D. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — 2nd ed. — Boca Raton : CRC Press, 2012. — 1876 p.
11. Хабиров, С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа–Ампера / С.В. Хабиров // Мат. сб. — 1990. — Т. 181, № 12. — С. 1607–1622.
12. Sulman, M.M. An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampère equation / M.M. Sulman, J.F. Williams, R.D. Russell // Appl. Numer. Math. — 2011. — V. 61, № 3. — P. 298–307.
13. Feng, X. Nonstandard local discontinuous Galerkin methods for fully nonlinear second order elliptic and parabolic equations in high dimensions / X. Feng, T. Lewis // J. Scient. Comput. — 2018. — V. 77, № 3. — P. 1534–1565.
14. Dubinov, A.E. New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics / A.E. Dubinov, I.N. Kitayev // Magnetohydrodynamics. — 2020. — V. 56, № 4. — P. 369–375.
15. Рахмелевич, И.В. Неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа–Ампера с двумя пространственными переменными / И.В. Рахмелевич // Изв. вузов. Математика. — 2023. — № 2. — С. 66–80.
16. Polyanin, A.D. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs / A.D. Polyanin, A.I. Zhurov. — Boca Raton ; London : CRC Press, 2022. — 401 p.
17. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
18. Косов, А.А. Метод редукции и новые точные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 2. — С. 185–191.

19. Косов, А.А. О точных решениях обобщённого уравнения Ричардса со степенными нелинейностями / А.А. Косов, Э.И. Семенов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 9. — С. 1153–1163.
20. Аксенов, А.В. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений / А.В. Аксенов, А.Д. Полянин // Теор. мат. физика. — 2022. — Т. 211, № 2. — С. 567–594.

GROUP ANALYSES, REDUCTIONS AND EXACT SOLUTIONS OF MONGE–AMPÈRE EQUATION OF MAGNETIC HYDRODYNAMICS

A. V. Aksenov¹, A. D. Polyinin²

¹*Lomonosov Moscow State University, Russia*

²*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

e-mail: ¹*aksenov@mech.math.msu.su*, ²*polyanin@ipmnet.ru*

We study the Monge–Ampère equation with three independent variables which occurs in electron magnetohydrodynamics. A group analysis of this strongly nonlinear partial derivative equation is carried out. An eleven-parameter transformation preserving the form of the equation is found. A formula is obtained that makes it possible to construct multiparametric families of solutions based on simpler solutions. Two-dimensional reductions leading to simpler partial differential equations with two independent variables. One-dimensional reductions are described, which make it possible to obtain self-similar and other invariant solutions that satisfy ordinary differential equations. Exact solutions with additive, multiplicative and generalized separation of variables are constructed, many of which admit representation in elementary functions. The obtained results and exact solutions can be used to evaluate the accuracy and analyze the adequacy of numerical methods for solving initial boundary value problems described by strongly nonlinear partial differential equations.

Keywords: Monge–Ampère equation, group analysis, reduction, exact solution.

FUNDING

The work was carried out on the topic of the state assignment (state registration no. 124012500440-9).

REFERENCES

1. Smirnov, V.V. and Chukbar, K.V., “Phonons” in two-dimensional vortex lattices, *J. Experiment. Theor. Phys.*, 2001, vol. 93, no. 1, pp. 126–135.
2. Zaburdaev, V.Yu., Smirnov, V.V., and Chukbar, K.V., Nonlinear dynamics of electron vortex lattices, *Plasma Physics Reports*, 2014, vol. 30, no. 3, pp. 214–217.
3. Krylov, N.V., Sequences of convex functions, and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation, *Siberian Math. J.*, 1976, vol. 17, no. 2, pp. 226–236.
4. Chen, L., Wang, G., and Lian, S., Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge–Ampère equation, *J. Differ. Equat.*, 2002, vol. 186, no. 2, pp. 558–571.
5. Xiong, J. and Bao, J., On Jorgens, Calabi, and Pogorelov type theorem and isolated singularities of parabolic Monge–Ampère equations, *J. Differ. Equat.*, 2011, vol. 250, no. 1, pp. 367–385.
6. Tang, L., Regularity results on the parabolic Monge–Ampère equation with VMO type data, *J. Differ. Equat.*, 2013, vol. 255, no. 7, pp. 1646–1656.
7. Dai, L., Exterior problems for a parabolic Monge–Ampère equation, *Nonlin. Anal. Theory, Methods & Appl.*, 2014, vol. 100, pp. 99–110.
8. Tang, L., Boundary regularity on the parabolic Monge–Ampère equation, *J. Differ. Equat.*, 2015, vol. 259, pp. 6399–6431.
9. Pogorelov, A.V., *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Amer. Math. Soc., 1973.
10. Polyinin, A.D. and Zaitsev, V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., Boca Raton: CRC Press, 2012.

11. Khabirov, S.V., Nonisentropic one-dimensional gas motions constructed by means of the contact group of the nonhomogeneous Monge–Ampère equation, *Math. USSR-Sb.*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 447–462.
12. Sulman, M.M., Williams, J.F., and Russell, R.D., An efficient approach for the numerical solution of the Monge–Ampère equation, *Appl. Numer. Math.*, 2011, vol. 61, no. 3, pp. 298–307.
13. Feng, X. and Lewis, T., Nonstandard local discontinuous Galerkin methods for fully nonlinear second order elliptic and parabolic equations in high dimensions, *J. Scient. Comput.*, 2018, vol. 77, no. 3, pp. 1534–1565.
14. Dubinov, A.E. and Kitayev, I.N., New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics, *Magnetohydrodynamics*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 369–375.
15. Rakhmelevich, I.V., Non-autonomous evolutionary equation of Monge–Ampère type with two space variables, *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 2, pp. 52–64.
16. Polyanin, A.D. and Zhurov, A.I., *Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs*, Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
17. Ovsiannikov, L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, New York: Academic Press, 1982.
18. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., Reduction method and new exact solutions of the multidimensional nonlinear heat equation, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 187–194.
19. Kosov, A.A. and Semenov, E.I., Exact solutions of the generalized Richards equation with power-law nonlinearities, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 9, pp. 1119–1129.
20. Aksenov, A.V. and Polyanin, A.D., Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions, *Theor. Math. Phys.*, 2022, vol. 211, no. 2, pp. 567–594.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.25

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ
КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
БЕЗ УСЛОВИЯ ЗНАКА НА МЛАДШИЙ ЧЛЕН

© Л. М. Кожевникова

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, г. Стерлитамак
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга
e-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2024 г., после доработки 11.01.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с суммируемой правой частью. Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщённой N -функции. В отличие от предыдущих работ автора, отсутствует условие знака на младший член уравнения. В нерексивных пространствах Музилака–Орлича–Соболева в произвольной неограниченной строго липшицевой области доказывается существование ренормализованного решения задачи Дирихле для данного уравнения.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, неограниченная область, пространство Музилака–Орлича, ренормализованное решение, существование решения.

DOI: 10.31857/S0374064124060043, EDN: KWHVAO

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + M(x, u)/u + b(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с, возможно, бесконечной мерой Лебега, $\partial\Omega$ — её граница. Здесь функции $a(x, s_0, s) = (a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$, $b(x, s_0, s)$ имеют рост, определяемый функцией Музилака–Орлича $M(x, z)$. При этом на функцию M и сопряжённую к ней функцию $\bar{M}$ не требуются дополнительные ограничения по переменной z (обычно это Δ_2 -условие). Предполагается, что по переменной $x \in \Omega$ функция M подчиняется условию лог-гёльдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерексивного пространства Музилака–Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$. В работе [1] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

с неоднородной анизотропной функцией Музилака–Орлича.

Авторы работ [2, 3] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) + c(u)) + a_0(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

с функцией $c \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

В статье [4] доказаны существование и единственность в пространствах Музилака–Орлича энтропийных и ренормализованных решений задачи (3), (2), установлена их эквивалентность. Все перечисленные результаты получены для ограниченных областей Ω .

Трудность исследования задач в областях с бесконечной мерой состоит в том, что оказываются неприменимыми теоремы вложения и аналог неравенства типа Фридрихса, поэтому установить ключевое соотношение (см. (17)) весьма затруднительно. Автор решает эту проблему включением в уравнение (1) слагаемого $M(x, u)/u$. Кроме того, важную роль в полученных результатах имеет теорема об аппроксимации элементов нерелексивного пространства Музилака–Орлича–Соболева гладкими функциями (см. лемму 1). В работе [5] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле (1), (2) в нерелексивных пространствах Музилака–Орлича–Соболева, при этом на младший член $b(x, s_0, s)$ уравнения (1) накладывается условие знакоопределённости по переменной $s_0 \in \mathbb{R}$:

$$b(x, s_0, s)s_0 \geq 0. \quad (4)$$

Другим способом в работе [6] установлено существование энтропийного решения задачи Дирихле в неограниченных областях для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с сингулярным мерозначным потенциалом, при этом на сопряжённую функцию $\bar{M}$ накладывается Δ_2 -условие и младший член уравнения удовлетворяет условию знака. Следует отметить, что впервые в неограниченных областях, допускающих бесконечную меру, для функции $M(x, z) = |z|^{p(x)}$ существование энтропийного и ренормализованного решений уравнения (1) в анизотропных пространствах с переменными показателями нелинейностей было установлено в работах [7–9]. Более подробный обзор результатов см. в [10].

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических задач без условия (4) исследовались в работах [11, 12] и др. В настоящей статье впервые без ограничений на меру строго липшицевой области Ω и без условия знакоопределённости (4) доказано существование ренормализованного решения задачи (1), (2) в нерелексивных пространствах Музилака–Орлича–Соболева.

1. ПРОСТРАНСТВА МУЗИЛАКА–ОРЛИЧА–СОБОЛЕВА

Приведём необходимые сведения из теории обобщённых N -функций и пространств Музилака–Орлича (см. [13]).

Определение 1. Пусть функция $M(x, z): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(x, \cdot)$ — N -функция по $z \in \mathbb{R}$, т.е. она является выпуклой вниз, неубывающей при $z \in \mathbb{R}_+$, чётной, непрерывной, $M(x, 0) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и

$$\operatorname{vrai} \inf_{x \in \Omega} M(x, z) > 0 \quad \text{для всех } z \neq 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{vrai} \sup_{x \in \Omega} \frac{M(x, z)}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{vrai} \inf_{x \in \Omega} \frac{M(x, z)}{z} = \infty;$$

2) $M(\cdot, z)$ — измеримая функция по $x \in \Omega$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(x, z)$ называется *функцией Музилака–Орлича* или *обобщённой N -функцией*.

Сопряжённая функция $\overline{M}(x, \cdot)$ к функции Музилака–Орлича $M(x, \cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $x \in \Omega$ и любых $z \geq 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(x, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(x, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга

$$|zy| \leq M(x, z) + \overline{M}(x, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Следует отметить, что $\overline{M}$ также является N -функцией (см. [13, §§ 13.4, 13.6]).

Если для каждой положительной константы l

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \Omega} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \Omega} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0, \quad (6)$$

то будем обозначать $P \prec\prec M$ и говорить, что “ P растёт медленнее, чем M в нуле или на бесконечности”.

Функция Музилака–Орлича N удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют константы $c > 0$, $z_0 \geq 0$ и функция $H \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и любых $|z| \geq z_0$ справедливо неравенство

$$N(x, 2z) \leq cN(x, z) + H(x).$$

В настоящей работе не предполагается, что N -функция M и её сопряжённая функция $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2 -условию.

Существуют три класса Музилака–Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\Omega)$ — обобщённый класс Музилака–Орлича, состоящий из измеримых функций $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\varrho_{M, \Omega}(v) = \int_{\Omega} M(x, v(x)) \, dx < \infty;$$

2) $L_M(\Omega)$ — обобщённое пространство Музилака–Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{M, \Omega} = \inf \{ \lambda > 0 : \varrho_{M, \Omega}(v/\lambda) \leq 1 \};$$

3) $E_M(\Omega)$ — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе $\mathcal{L}_M(\Omega)$.

Очевидно, $E_M(\Omega) \subset \mathcal{L}_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$. Заметим, что для любого $v \in E_M(\Omega)$ и любого $\mu > 0$ справедливо неравенство $\varrho_{M, \Omega}(v/\mu) < \infty$. Кроме того, для любого $v \in L_M(\Omega)$ найдётся $\lambda > 0$ такое, что $\varrho_{M, \Omega}(v/\lambda) < \infty$ [13, теорема 7.4].

Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M, Q}$, $\varrho_{M, Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1, Q}$, $\|\cdot\|_{\infty, Q}$ будем опускать индекс Q , если $Q = \Omega$.

Далее рассмотрим следующие условия на функцию Музилака–Орлича $M(x, z)$.

Условие (M1,loc). Функция $M(x, z)$ локально интегрируема, т.е.

$$\varrho_{M, Q}(z) = \int_Q M(x, z) \, dx < \infty, \quad z \in \mathbb{R},$$

для любого измеримого множества $Q \subset \Omega$ такого, что $\operatorname{meas} Q < \infty$.

Условие (M2). Функция $M(x, z)$ удовлетворяет $\log$ -гёльдеровской непрерывности по x , а именно: существуют константы $c > 0$, $b \geq 1$ такие, что для всех $x, y \in \overline{\Omega}$, $|x - y| \leq 1/2$, $z \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$M(x, z) \leq \max \{ |z|^{-c/\log|x-y|}, b^{-c/\log|x-y|} \} M(y, z).$$

Заметим, что из условия (M2) следует непрерывность функции $M(\cdot, z)$ по $x \in \overline{\Omega}$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Пусть функции M и $\bar{M}$ подчиняются условию (M1,loc). Тогда пространство $E_M(\Omega)$ является замыканием по норме $\|\cdot\|_M$ простых интегрируемых функций (см. [13, теорема 7.6]). Пространство $E_M(\Omega)$ сепарабельное и $(E_M(\Omega))^* = L_{\bar{M}}(\Omega)$. Если M удовлетворяет Δ_2 -условию, то $E_M(\Omega) = \mathcal{L}_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ сепарабельное. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака–Орлича M и $\bar{M}$ удовлетворяют Δ_2 -условию.

Для $v \in L_M(\Omega)$ справедливо неравенство $\|v\|_M \leq \varrho_M(v) + 1$.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in L_M(\Omega)$:

$$v^j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{M} v,$$

если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M((v^j - v)/\lambda) = 0.$$

Если M удовлетворяет Δ_2 -условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича M и $\bar{M}$ верно: если $u \in L_M(\Omega)$ и $v \in L_{\bar{M}}(\Omega)$, то выполняется неравенство Гёльдера

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq 2\|u\|_M\|v\|_{\bar{M}}.$$

Определим пространство Музилака–Орлича–Соболева $W^1 L_M(\Omega) = \{v \in L_M(\Omega) : |\nabla v| \in L_M(\Omega)\}$ с нормой $\|v\|_M^1 = \|v\|_M + \|\nabla v\|_M$. Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $W^1 L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in W^1 L_M(\Omega)$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M((v^j - v)/\lambda) = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M(|\nabla v^j - \nabla v|/\lambda) = 0.$$

Для краткости записи введём обозначения $(L_M(\Omega))^n = \mathbf{L}_M(\Omega)$, $(L_M(\Omega))^{n+1} = \mathbf{L}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^n = \mathbf{E}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^{n+1} = \mathbf{E}_M(\Omega)$. Пространство $W^1 L_M(\Omega)$ отождествляется с подпространством произведения $\mathbf{L}_M(\Omega)$ и является замкнутым по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_{\bar{M}})$. Пространство $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_{\bar{M}})$ в $W^1 L_M(\Omega)$. Пространство $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$ банахово (см. [13, теорема 10.2]).

Определение 2. Область Ω подчиняется сегментному свойству, если существует открытое покрытие $\{\Theta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества $\bar{\Omega}$ и соответствующие ненулевые векторы $z_i \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(\bar{\Omega} \cap \Theta_i) + tz_i \subset \Omega$ для любых $t \in (0, 1)$ и $i \in \mathbb{N}$.

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака–Орлича–Соболева (см. [15, теорема 3]).

Лемма 1. Предположим, что область Ω удовлетворяет сегментному свойству, а N -функция M удовлетворяет условию (M2), и пусть $\bar{M}$ удовлетворяет условию (M1,loc). Тогда для любого $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ существует последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$v^j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{M} v \quad \text{модулярно в } \dot{W}^1 L_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty.$$

Примеры функций Музилака–Орлича M , удовлетворяющих условиям леммы 1:

1. N -функция $M(x, z) = M(z)$;
2. $M_1(x, z) = |z|^{p(x)}$, $M_2(x, z) = |z|^{p(x)} \log(1 + |z|)$, $M_3(x, z) = |z| \log^{p(x)}(1 + |z|)$, $M_4(x, z) = e^{|z|^{p(x)}} - 1$, где $p: \Omega \rightarrow [p^-, p^+]$, $p^- = \inf_{x \in \Omega} p(x) > 1$, $p^+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < \infty$, и существует константа $c > 0$ такая, что для всех $x, y \in \bar{\Omega}$, $|x - y| \leq 1/2$, выполняется неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leq -c / \log |x - y|.$$

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Предполагается, что функции

$$a(x, s_0, s): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(x, s_0, s): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), измеримы по $x \in \Omega$ для $s = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $x \in \Omega$ и выполнено

Условие (М). Существуют неотрицательные функции $\psi \in E_{\bar{M}}(\Omega)$, $\phi \in L_1(\Omega)$ и положительные константы $\hat{a}$, $\bar{a}$, $\bar{d}$, $\hat{d}$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и для любых $s_0 \in \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s \neq t$, справедливы неравенства

$$a(x, s_0, s) \cdot s \geq \bar{a}M(x, \bar{d}|s|) - \phi(x), \quad (7)$$

$$|a(x, s_0, s)| \leq \psi(x) + \hat{a}\bar{M}^{-1}(x, M(x, \hat{d}|s|)) + \hat{a}\bar{M}^{-1}(x, P(x, s_0)), \quad (8)$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0. \quad (9)$$

Здесь функция Музилака–Орлича $M(x, z)$ подчиняется условию (М2), сопряжённая к M функция $\bar{M}(x, z)$ удовлетворяет условию (М1,loc). Функция Музилака–Орлича $P(x, z)$ такая, что $P \prec\prec M$ в окрестности нуля и на бесконечности, $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|s| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существуют неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$ и непрерывная положительная функция $\hat{b}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\hat{b} \in L_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$ для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|b(x, s_0, s)| \leq \hat{b}(|s_0|) \left(M(x, \tilde{d}|s|) + \Phi_0(x) \right), \quad \tilde{d} \leq \bar{d}. \quad (10)$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max\{-k, \min(k, r)\}$. Через $\dot{T}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$. Для любой функции $u \in \dot{T}_M^1(\Omega)$ и любого $k > 0$ имеем $\nabla T_k(u) = \chi_{\{|u| < k\}} \nabla u \in L_M(\Omega)$, где χ_Q — характеристическая функция измеримого множества Q и ∇u — обобщённый градиент u . Введём обозначение $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u \, dx$.

Определение 3. Ренормализованным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \dot{T}_M^1(\Omega)$ такая, что при всех $k > 0$ выполнены условия

- 1) $b(x, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$;
- 2) $T_k(u)M(x, u)/u \in L_1(\Omega)$;
- 3) $a(x, u, \nabla u)\chi_{\{|u| < k\}} \in L_{\bar{M}}(\Omega)$;
- 4) $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: h \leq |u| < h+1\}} M(x, \bar{d}|\nabla u|) \, dx = 0$,

и для любых функций $S \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\langle (b(x, u, \nabla u) + M(x, u)/u - f)S(u)\xi \rangle + \langle a(x, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) \rangle = 0. \quad (11)$$

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть область Ω строго липшицева и выполнено условие (М), тогда существует ренормализованное решение задачи (1), (2).

Следует отметить, что в работе [16] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω при тех же требованиях на функцию M для уравнения

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + M(x, u)/u + b(x, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

при условии монотонности функции $b(\cdot, s_0)$ установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле и доказана их единственность.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Предположим, что область Ω строго липшицева и выполнено условие (М). Заметим, что из условия строгой липшицевости следует сегментное свойство. Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [17, гл. III, § 6, теорема 15]).

Лемма 2. Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций из $L_1(\Omega)$ такая, что

$$v^j \rightarrow v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Для сходимости

$$v^j \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ имела равномерно абсолютно непрерывные интегралы: для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и измеримое множество $Q_\varepsilon \subset \Omega$, $\text{meas } Q_\varepsilon < \infty$, такие, что

$$(i) \int_Q |v^j(x)| dx < \varepsilon \quad \text{для любого } Q \subset \Omega, \text{ meas } Q < \delta, j \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \int_{\Omega \setminus Q_\varepsilon} |v^j(x)| dx < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Очевидно, что в случае $\text{meas } \Omega < \infty$ условие (ii) вытекает из условия (i).

Пользуясь выпуклостью функции $\bar{M}$, из (8) выводим оценку

$$3\bar{M}\left(x, \frac{|a(x, s_0, s)|}{3\hat{a}}\right) \leq M(x, \hat{d}|s|) + \bar{M}\left(x, \frac{\psi}{\hat{a}}\right) + P(x, s_0) = M(x, \hat{d}|s|) + \Psi(x) + P(x, s_0) \quad (13)$$

с функцией $\Psi \in L_1(\Omega)$. Применяя (5), (13), для $s^1, s^2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\mu > 0$ устанавливаем неравенства

$$\begin{aligned} |a(x, s_0, s^1)| |s^2| &\leq 3\hat{a}\mu \left(\bar{M}\left(x, \frac{|a(x, s_0, s^1)|}{3\hat{a}}\right) + M\left(x, \frac{|s^2|}{\mu}\right) \right) \leq \\ &\leq \hat{a}\mu \left(M(x, \hat{d}|s^1|) + P(x, s_0) + 3M\left(x, \frac{|s^2|}{\mu}\right) + \Psi(x) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что ввиду $P \prec M$, согласно (6), для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $C(\varepsilon)$ такое, что для п.в. $x \in \Omega$ и $z \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$P(x, z) \leq C(\varepsilon)M(x, \varepsilon z). \quad (15)$$

Предложение 1 (см. [5, предложение 1]). Пусть $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что при всех $k \geq 1$ $T_k(v) \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ и выполняется неравенство

$$\int_{\{\Omega: |v| \geq k\}} \frac{M(x, v)}{|v|} dx \leq C_1, \quad (16)$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $k_0(C_1, M, \varepsilon)$ такое, что справедливо неравенство

$$\text{meas}\{\Omega: |v| \geq k\} < \varepsilon, \quad k \geq k_0. \quad (17)$$

Лемма 3 (см. [14, лемма 2]). Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_M(\Omega)$ такая, что имеет место сходимость (12), тогда $v \in L_M(\Omega)$ и $v^j \rightarrow v$, $j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_M, E_{\bar{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.

Следствием теоремы Витали является

Лемма 4 (см. [15, лемма 2]). Пусть $v, \{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — функции из $L_M(\Omega)$ и

$$v^j \xrightarrow{M} v \quad \text{модулярно в } L_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда $v^j \rightarrow v, j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.

Лемма 5. Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность функций из $L_\infty(\Omega)$ такая, что имеет место сходимость (12), тогда $v \in L_\infty(\Omega)$, $v^j \rightarrow v, j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$ пространства $L_\infty(\Omega)$.

Если, кроме того, $g \in L_M(\Omega)(E_M(\Omega))$, то

$$v^j g \rightarrow vg \quad \text{модулярно (сильно) в } L_M(\Omega)(E_M(\Omega)), \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 5 следует из теоремы Лебега.

Замечание 2. Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}, v$ — измеримые в области Ω функции такие, что имеет место сходимость (12). Тогда

$$\chi_{\{\Omega: |v^j| \leq k\}} \rightarrow \chi_{\{\Omega: |v| \leq k\}} \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad j \rightarrow \infty,$$

для k таких, что

$$\text{meas}\{\Omega: |v| = k\} = 0. \quad (18)$$

Таких k , для которых условие (18) не выполнено, может быть не более чем счётное множество. Положительные числа k , для которых выполнено условие (18), будем называть “правильными” для функции v (см. [18, лемма 9]).

Лемма 6 (см. [13, определение 9.1, лемма 9.2]). Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций из $E_M(\Omega)$. Для сходимости

$$v^j \rightarrow 0 \quad \text{в } E_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого измеримого множества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\text{meas } \tilde{\Omega} < \infty$,

$$v^j \rightarrow 0 \quad \text{по мере в } \tilde{\Omega}, \quad j \rightarrow \infty,$$

и семейство функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ имело равностепенно абсолютно непрерывные нормы: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $Q_\varepsilon \subset \Omega$, $\text{meas } Q_\varepsilon < \infty$, и $\delta > 0$ такие, что

(iii) $\|v^j \chi_Q\|_M < \varepsilon$ для любого $Q \subset Q_\varepsilon$, $\text{meas } Q < \delta$, $j \in \mathbb{N}$;

(iv) $\|v^j \chi_{Q_\varepsilon}\|_M < \varepsilon$, $j \in \mathbb{N}$.

Лемма 7. Пусть функция M подчиняется условию $(M1, \text{loc})$, тогда для любой функции $v \in E_M(Q)$, $\text{meas}(Q) < \infty$, её норма абсолютно непрерывна, т.е. выполнены условия (iii), (iv).

Доказательство следует из [13, лемма 13.16] и плотности ограниченных функций в $E_M(Q)$.

Лемма 8. Пусть $g^j, j \in \mathbb{N}$, g — такие функции из пространства $L_1(\Omega)$, что $g^j \geq 0$ п.в. в Ω ,

$$g^j \rightarrow g \quad \text{сильно в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

и пусть $v^j, j \in \mathbb{N}$, v — измеримые функции в Ω такие, что имеет место сходимость (12) и

$$|v^j| \leq g^j \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle v^j - v \rangle = 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ

4.1. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Положим

$$f^m(x) = T_m f(x) \chi_{\Omega(m)}, \quad \Omega(m) = \{x \in \Omega: |x| < m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что

$$f^m \rightarrow f \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (19)$$

и при этом

$$|f^m(x)| \leq |f(x)|, \quad |f^m(x)| \leq m \chi_{\Omega(m)}, \quad x \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Рассмотрим уравнения

$$-\operatorname{div} a^m(x, u, \nabla u) + a_0^m(x, u, \nabla u) = f^m(x), \quad x \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

с функциями

$$a^m(x, s_0, s) = a(x, T_m(s_0), s), \quad a_0^m(x, s_0, s) = b^m(x, s_0, s) + M(x, s_0)/s_0,$$

где $a^m(x, s_0, s) = (a_1^m(x, s_0, s), \dots, a_n^m(x, s_0, s))$, $b^m(x, s_0, s) = T_m b(x, s_0, s) \chi_{\Omega(m)}$. Очевидно, что

$$|b^m(x, s_0, s)| \leq |b(x, s_0, s)|, \quad |b^m(x, s_0, s)| \leq m \chi_{\Omega(m)}, \quad x \in \Omega, \quad (s_0, s) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (22)$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует обобщённое решение $u^m \in \dot{W}^1 L_M(\Omega(m))$ уравнения (21) [19, теорема 13]. Продолжим u^m нулём на $\Omega \setminus \Omega(m)$, тогда для любой функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega(l)) \cap L_\infty(\Omega(l))$, $l \leq m$, выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + M(x, u^m)/u^m - f^m(x))v \rangle + \langle a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla v \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

4.2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ

Установим априорные оценки для последовательности $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Пусть

$$\widehat{B}(s_0) = \frac{1}{\bar{a}} \int_0^{s_0} \widehat{b}(|z|) dz,$$

тогда $0 \leq \widehat{B}(s_0) \leq \widehat{B}(+\infty) = \bar{a}^{-1} \int_0^\infty \widehat{b}(|z|) dz = C_0 < \infty$, $s_0 \in \mathbb{R}^+$. Очевидно, что функция $\widehat{b}$ ограничена на $\mathbb{R}^+$, следовательно, справедлива оценка $\widehat{b}(|s_0|) \leq \widehat{C}$, $s_0 \in \mathbb{R}$.

Положив в (23) $v = T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} = T_k(u^m - T_h(u^m)) e^{2\widehat{B}(|u^m|)}$, $h, k > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & + \int_{\{h \leq |u^m|\}} (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + M(x, u^m)/u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & + \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq k \int_{\{|u^m| \geq h\}} |f^m| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \end{aligned}$$

Далее выводим

$$\begin{aligned}
& \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\{h \leq |u^m|\}} \frac{M(x, u^m)}{u^m} T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
& + \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq \\
& \leq k \int_{\{|u^m| \geq h\}} |f| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\{h \leq |u^m|\}} |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| |T_{k,h}(u^m)| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \quad (24)
\end{aligned}$$

С учётом (7) и (10) оценим третий интеграл в левой части неравенства (24):

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\
& \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) - \frac{\phi}{\bar{a}} \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\
& \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{b}(|u^m|) \left(\frac{\phi}{\bar{a}} + \Phi_0 \right) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\
& \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{C} \left(\frac{\phi}{\bar{a}} + \Phi_0 \right) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| dx. \quad (25)
\end{aligned}$$

Объединяя оценки (24), (25), выводим неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\
& + \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left(\frac{M(x, u^m)}{|u^m|} + |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| \right) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx, \quad (26)
\end{aligned}$$

где ϕ_1 — положительная функция из пространства $L_1(\Omega)$. Отсюда следует соотношение

$$\begin{aligned}
& \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k+h\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq \\
& \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx \leq C_5 k + C_6, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (27)
\end{aligned}$$

В частности, полагая в (26) $h = 0$, устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{\{|u^m| < k\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) + \phi) dx + \\
& + \int_{\Omega} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) |T_k(u^m)| dx \leq C_5 k + C_6, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Отсюда, применяя (7), выводим

$$\begin{aligned} & \bar{a} \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq \\ & \leq \bar{a} \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + \int_{\Omega} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) |T_k(u^m)| dx \leq \\ & \leq C_6 + C_5 k, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из неравенства (28) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} M(x, T_k(u^m)) dx = \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, u^m) dx + \int_{\{|u^m| \geq k\}} M(x, k) dx \leq \\ & \leq \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, u^m) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k\}} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} dx = \int_{\Omega} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} T_k(u^m) dx \leq \\ & \leq C_5 k + C_6, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (30)$$

Кроме того, из (29) следует оценка

$$\int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx = \int_{\Omega} M(x, \bar{d}|\nabla T_k(u^m)|) dx \leq C_7(k), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Из (28), (10), (31) в частности, имеем

$$\|b^m(x, u^m, \nabla u^m)\|_1 \leq C_8(k), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

а из оценок (30), (31) выводим

$$\|T_k(u^m)\|_M + \|\nabla T_k(u^m)\|_M \leq C_9(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

4.3. СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ

Из оценки (29), согласно предложению 1, имеем

$$\text{meas}\{|u^m| \geq \rho\} \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Из (27) при $k=1$ для любого $h>0$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < 1+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h+1\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq \\ & \leq C_4 \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} (\phi_1 + \phi) dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $\phi_1, \phi \in L_1(\Omega)$ и интеграл в правой части последнего неравенства абсолютно непрерывен для любого $\varepsilon > 0$, учитывая (33), можно выбрать достаточно большое $\tilde{h}(\varepsilon) > 1$ такое, что для $h \geq \tilde{h}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\{h-1 \leq |u^m| < h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{\Omega: |u^m| \geq h\}} \left(|b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (34)$$

Так же как и в работе [5], устанавливаются сходимость по подпоследовательности

$$u^m \rightarrow u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (35)$$

и для любого $k > 0$ сходимости

$$T_k(u^m) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, E_{\bar{M}}) \text{ в } \dot{W}^1 L_M(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$T_k(u^m) \rightarrow T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Выполняя предельный переход в (30), заключаем, что $M(x, T_k(u))$, $(M(x, u)/u)T_k(u) \in L_1(\Omega)$. Таким образом, условие 2) определения 3 выполнено.

Далее докажем, что для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ имеет место сходимость

$$\frac{M(x, u^m)}{u^m} S(u^m) \rightarrow \frac{M(x, u)}{u} S(u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Учитывая сходимость (35), имеем

$$\frac{M(x, u^m)}{u^m} S(u^m) \rightarrow \frac{M(x, u)}{u} S(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Пусть Q — произвольное измеримое подмножество в области Ω , функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } S \subset [-L, L]$ для $L > 0$ и $|S(r)| \leq L_1$ для любого $r \in \mathbb{R}$. С учётом монотонности функции $M(x, s_0)/s_0$ по переменной s_0 получаем следующие соотношения:

$$\int_Q \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} |S(u^m)| dx = \int_Q \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} |S(u^m)| \chi_{\{\Omega: |u^m| < L\}} dx \leq \frac{L_1}{L} \int_Q M(x, L) dx.$$

Отсюда, ввиду принадлежности $M(x, L) \in L_{1, \text{loc}}(\Omega)$, заключаем равномерную интегрируемость последовательности $\{(M(x, u^m)/|u^m|)|S(u^m)|\}_{m \in \mathbb{N}}$ для любого $Q \subset \Omega: \text{meas } Q < \infty$. Учитывая сходимость (39) и применяя лемму 2, устанавливаем сходимость (38).

4.4. МОДУЛЯРНАЯ СХОДИМОСТЬ ГРАДИЕНТОВ ОТ СРЕЗОК

Докажем сходимости

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в } L_{M, \text{loc}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (40)$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Повторяя рассуждения [10, шаг 5], при любом $k > 0$ устанавливаем

$$\|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\|_{\bar{M}} \leq C_{10}(k), \quad m \geq k. \quad (42)$$

Из оценки (42) следует сходимость по подпоследовательности

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \tilde{a}_k \quad \text{по топологии } \sigma(L_{\bar{M}}, E_M) \text{ в } L_{\bar{M}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Для положительных вещественных чисел m, j, s обозначим через $\omega(m, j, s)$ любую величину такую, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \omega(m, j, s) = 0.$$

Пусть h и k такие, что $h-1 > k > 0$. Согласно лемме 1 существует последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ из $C_0^\infty(\Omega)$:

$$v^j \rightarrow T_k(u) \quad \text{модулярно в } \dot{W}^1 L_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

тогда

$$T_k(v^j) \rightarrow T_k(u) \quad \text{модулярно в } \dot{W}^1 L_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Отсюда, согласно лемме 2, следует, что найдётся $\lambda > 0$ такое, что для последовательностей

$$\left\{ M\left(x, \frac{|T_k(u) - T_k(v^j)|}{\lambda}\right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ M\left(x, \frac{|\nabla(T_k(u) - T_k(v^j))|}{\lambda}\right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}$$

выполнены условия (i), (ii) (45)

и справедлива сходимость по некоторой подпоследовательности $J \subset \mathbb{N}$ (см. [13, замечание 7.9]):

$$T_k(v^j) \rightarrow T_k(u), \quad \nabla T_k(v^j) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Замечание 3. Пользуясь выпуклостью функции $M(x, \cdot)$ и принадлежностью $T_k(u) \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$, несложно установить эквивалентность (45) условию

$$\left\{ M\left(x, \frac{|T_k(v^j)|}{\lambda_1}\right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ M\left(x, \frac{|\nabla T_k(v^j)|}{\lambda_1}\right) \right\}_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{подчиняются условиям (i), (ii)}$$

с некоторым $\lambda_1 > 0$.

Кроме того, согласно лемме 4 имеем

$$\nabla T_k(v^j) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, L_{\bar{M}}), \quad j \rightarrow \infty.$$

Полагаем

$$z^{mj} = T_k(u^m) - T_k(v^j), \quad z^j = T_k(u) - T_k(v^j), \quad m, j \in \mathbb{N},$$

$\varphi_k(\rho) = \rho \exp\{\gamma^2 \rho^2\}$, где $\gamma = \widehat{b}_k/\bar{a}$, $\widehat{b}_k = \max\{\widehat{b}(|s|) : |s| \leq k\}$. Очевидно, что

$$\psi_k(\rho) = \varphi'_k(\rho) - 2\gamma|\varphi_k(\rho)| \geq 1/2, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$1/2 \leq \psi_k(z^{mj}) \leq \max_{[-2k, 2k]} \psi_k(\rho) = C_{11}(k), \quad m, j \in \mathbb{N}. \quad (47)$$

Ввиду (37), (46) имеем

$$\varphi_k(z^{mj}) \rightarrow \varphi_k(z^j), \quad \varphi'_k(z^{mj}) \rightarrow \varphi'_k(z^j), \quad \psi_k(z^{mj}) \rightarrow \psi_k(z^j) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (48)$$

$$\varphi_k(z^j) \rightarrow \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi'_k(z^j) \rightarrow \varphi'_k(0) = 1, \quad \psi_k(z^j) \rightarrow \psi_k(0) = 1 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty, \quad (49)$$

а также

$$|\varphi_k(z^{mj})| \leq \varphi_k(2k), \quad 1 \leq \varphi'_k(z^{mj}) \leq \varphi'_k(2k), \quad m, j \in \mathbb{N}, \quad (50)$$

$$|\varphi_k(z^j)| \leq \varphi_k(2k), \quad 1 \leq \varphi'_k(z^j) \leq \varphi'_k(2k), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Применяя (48)–(51), по лемме 5 устанавливаем сходимости

$$|\varphi_k(z^{mj})| \rightarrow |\varphi_k(z^j)| \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \text{ пространства } L_\infty(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (52)$$

$$|\varphi_k(z^j)| \rightarrow 0 \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \text{ пространства } L_\infty(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (53)$$

Кроме того, для любой функции $g \in E_M(\Omega)$, применяя лемму 5, устанавливаем сходимости

$$\varphi_k(z^{mj})g \rightarrow \varphi_k(z^j)g \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (54)$$

$$\varphi_k(z^j)g \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Введём обозначения: χ_s^j , χ_s , ${}_k\chi^m$, ${}_k\chi$ — характеристические функции множеств $\{x \in \Omega: |\nabla T_k(v^j)| \leq s\}$, $\{x \in \Omega: |\nabla T_k(u)| \leq s\}$, $\{x \in \Omega: |u^m| \geq k\}$, $\{x \in \Omega: |u| \geq k\}$, соответственно. Будем рассматривать “правильные” k , s , для которых $\text{meas}\{\Omega: |u| = k\} = 0$ и $\text{meas}\{\Omega: |\nabla T_k(u)| = s\} = 0$.

Положим $\eta_h(r) = \min\{1, \max\{0, h-r+1\}\}$, $r \in \mathbb{R}$. Для краткости записи будем использовать обозначения

$$\zeta_{h-1}^m = \eta_{h-1}(|u^m|), \quad \zeta_{h-1} = \eta_{h-1}(|u|), \quad \eta_R = \eta_R(|x|).$$

Из (35), (46) для правильных k , s следуют сходимости

$$\zeta_{h-1}^m \rightarrow \zeta_{h-1} \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (56)$$

$$\chi_s^j \rightarrow \chi_s \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty, \quad (57)$$

$${}_k\chi^m \rightarrow {}_k\chi \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (58)$$

Принимая в качестве тестовой функции в (23) $\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, T_m(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla \left(\varphi_k(z^{mj})\eta_R \zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} \right) dx + \\ & + \int_{\Omega} b^m(x, u^m, \nabla u^m) \varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\Omega} \frac{M(x, u^m)}{u^m} \varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ & - \int_{\Omega} f^m \varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \sum_{i=1}^4 I_i = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (59)$$

Оценим интегралы $I_2 - I_4$. Ввиду

$$\frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \zeta_{h-1}^m \eta_R \leq \frac{M(x, h)}{h} \eta_R \in L_1(\Omega)$$

и сходимостей (52), (53) имеем

$$|I_3| \leq \int_{\Omega} \frac{M(x, h)}{h} \eta_R |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx \leq \omega_{h,R}(m) + e^{C_0} \int_{\Omega} \frac{M(x, h)}{h} \eta_R |\varphi_k(z^j)| dx = \omega_{h,R}(m, j). \quad (60)$$

Аналогично ввиду (20) и $f \in L_1(\Omega)$ находим

$$|I_4| \leq \int_{\Omega} |f| |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx \leq \omega(m) + e^{C_0} \int_{\Omega} |f| |\varphi_k(z^j)| dx = \omega(m, j). \quad (61)$$

Применяя (22), (10), оценим интеграл

$$\begin{aligned} -I_2 &\leq \int_{\Omega} |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \widehat{b}(|u^m|) (M(x, \bar{d} |\nabla T_h(u^m)|) + \Phi_0(x)) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Используя (7), выводим

$$\begin{aligned} -I_2 &\leq \frac{1}{\bar{a}} \int_{\Omega} (\bar{a} \Phi_0(x) + \phi(x)) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} |a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\{|u^m| > k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx = \sum_{i=1}^3 I_{2i}. \end{aligned} \quad (62)$$

Учитывая, что $z^{mj} u^m \geq 0$ при $|u^m| \geq k$, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi'_k(z^{mj}) \nabla z^{mj} \eta_R \xi_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\{\Omega: h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla u^m |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi_k(z^{mj}) \nabla \eta_R \xi_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\Omega} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} |a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\{|u^m| > k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx = \\ &= I_{11} - I_{12} + I_{13} - I_{14} + I_{15}, \quad m \geq h. \end{aligned} \quad (63)$$

Теперь, используя равенства $I_{15} = I_{23}$, $I_{22} = I_{14}$ и оценки интегралов (60)–(63), из (59) выводим неравенства

$$I_{11} - 2I_{22} \leq \omega_{h,R}(m, j) + I_{21} + I_{12} - I_{13}, \quad m \geq h. \quad (64)$$

Далее, учитывая (7), получаем

$$\begin{aligned} &I_{12} + I_{21} + 2I_{22} \leq \\ &\leq \varphi_k(2k) e^{C_0} \int_{\{\Omega: h-1 \leq |u^m| < h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + C_{11} \int_{\Omega} (\Phi_0(x) + \phi(x)) |\varphi_k(z^{mj})| dx + \\ &+ \frac{2\widehat{b}_k}{\bar{a}} \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \eta_R dx = I_{121} + I_{211} + I_{221}. \end{aligned} \quad (65)$$

Ввиду (52), (53) имеем

$$I_{211} = \omega(m, j), \quad (66)$$

а благодаря (34) заключаем, что

$$I_{121} \leq \omega(h). \quad (67)$$

Применяя оценку (42) и сходимости (54), (55) с $g = \chi_{\Omega(R+1)}$, устанавливаем соотношения

$$\begin{aligned} |I_{13}| &\leq C_{12} \int_{\Omega(R+1)} |a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))| |\varphi_k(z^{mj})| dx \leq \\ &\leq C_{13}(h) \|\varphi_k(z^{mj})\|_{M, \Omega(R+1)} = \omega_{h,R}(m, j), \quad m \geq h. \end{aligned} \quad (68)$$

Объединяя (64)–(68), получаем

$$I_5 = I_{11} - I_{221} \leq \omega(h) + \omega_{h,R}(m, j), \quad m \geq h. \quad (69)$$

С помощью элементарных преобразований выводим равенства для I_5 :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \varphi'_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \frac{\widehat{2b}_k}{\bar{a}} \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \chi_s^j \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx. \end{aligned}$$

Очевидно равенство

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \frac{\widehat{2b}_k}{\bar{a}} \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left(a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \zeta_{h-1}^m a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \right) \cdot \nabla T_k(v^j)_k \chi^m \chi_s^j \varphi'_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
& + \int_{\Omega} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \sum_{i=1}^4 I_{5i}, \quad m \geq h. \quad (70)
\end{aligned}$$

Оценим интегралы $I_{52} - I_{54}$. Применяя (35), (48), (50), лемму 5 с $g = \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \eta_R \in E_M(\Omega)$, получаем

$$\eta_R \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \eta_R \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^j)| e^{\widehat{B}(|u|)} \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (43), устанавливаем

$$I_{52} = -\frac{2\widehat{b}_k}{a} \int_{\Omega} \widetilde{a}_k \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^j)| \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Применяя (46), (49), (51), (57), по теореме Лебега получаем

$$I_{52} = \omega_R(m, j). \quad (71)$$

С учётом (35), (48), (50), (58), леммы 5 с $g = \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \eta_R \in E_M(\Omega)$ имеем

$$\nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^{mj})_k \chi^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^j)_k \chi \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимостей (43), (56), устанавливаем

$$I_{53} = \int_{\Omega} (\widetilde{a}_k - \zeta_{h-1} \widetilde{a}_h) \cdot \nabla T_k(v^j)_k \chi \chi_s^j \varphi'_k(z^j) \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Далее, применяя (46), (49), (51), (57), по теореме Лебега заключаем

$$I_{53} = \int_{\Omega} (\widetilde{a}_k - \zeta_{h-1} \widetilde{a}_h) \cdot \nabla T_k(u)_k \chi \chi_s \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j) = \omega_R(m, j). \quad (72)$$

Наконец, применив (48), (50), (56), лемму 5 с $g = \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \eta_R \in E_M(\Omega)$, получим

$$\nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \zeta_{h-1} \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} \\ \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (43), устанавливаем

$$I_{54} = \int_{\Omega} \widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \zeta_{h-1} \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Применяя (49), (51), (57), (44) и лемму 2 (см. замечание 3), получаем

$$\nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \eta_R \rightarrow \nabla T_k(u) (\chi_s - 1) \eta_R \quad \text{модулярно в } L_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду принадлежности $\widetilde{a}_h \zeta_{h-1} e^{\widehat{B}(|u|)} \in L_{\overline{M}}(\Omega)$, имеем

$$I_{54} = \int_{\Omega} \widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(u) (\chi_s - 1) \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j).$$

В силу того, что $\tilde{a}_h \cdot \nabla T_k(u) e^{\hat{B}(|u|)} \in L_1(\Omega)$, находим

$$I_{54} = \omega_R(m, j, s). \quad (73)$$

Из (69)–(73) следует, что

$$I_{51} \leq \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h). \quad (74)$$

Оценим теперь интеграл I_6 :

$$\begin{aligned} 0 \leq I_6 &= \int_{\Omega} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j)) \times \\ &\quad \times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\hat{B}(|u^m|)} dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\hat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\hat{B}(|u^m|)} dx = I_{51} - I_{61}. \end{aligned} \quad (75)$$

Из (35), (37) следует сходимость

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) e^{\hat{B}(|u^m|)} \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) e^{\hat{B}(|u|)} \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty,$$

а из (8), (15) имеем оценки

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j)| \leq \hat{a} \bar{M}^{-1}(x, M(x, \hat{d}s)) + \hat{a} \bar{M}^{-1}(x, CM(x, k)) + \psi(x), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь ограниченностью функции $M(\cdot, z)$ по $x \in \Omega(R+1)$ для любых $z \in \mathbb{R}$, устанавливаем оценку

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j)| \eta_R \leq \psi(x) + C_{14} \eta_R \in E_{\bar{M}}(\Omega), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая (47), (48), из лемм 6, 7 получаем сходимость

$$\begin{aligned} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) e^{\hat{B}(|u^m|)} \eta_R &\rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^j) e^{\hat{B}(|u|)} \eta_R \\ &\text{сильно в } E_{\bar{M}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (76)$$

Применяя (76), (36), выводим

$$I_{61} = \int_{\Omega} a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^j) \eta_R e^{\hat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m), \quad j \in \mathbb{N}.$$

С учётом оценки (14) и сходимостей (46), (49), (57) по теореме Лебега устанавливаем

$$I_{61} = \int_{\Omega} a(x, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u) (1 - \chi_s) \eta_R e^{\hat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j).$$

Наконец, благодаря $a(x, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u) e^{\hat{B}(|u|)} \eta_R \in L_1(\Omega)$ (см. (14)), получаем

$$I_{61} = \omega_R(m, j, s). \quad (77)$$

Объединяя (75), (77), (74) и применяя (47), выводим

$$\begin{aligned} I_7 = & \int_{\Omega} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)) \times \\ & \times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \eta_R dx \leq 2I_6 \leq \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h). \end{aligned} \quad (78)$$

Используя обозначение

$$q_s^m(x) = (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s),$$

имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\Omega(R)} q_s^m(x) dx & \leq I_7 + \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(v^j)\chi_s^j - \nabla T_k(u)\chi_s) \eta_R dx - \\ & - \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s) \eta_R dx + \\ & + \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \eta_R dx = I_7 + I_{71} + I_{72} + I_{73}. \end{aligned} \quad (79)$$

Для интегралов $I_{71} - I_{73}$ справедливы оценки (см. [5])

$$I_{71} = \omega_R(m, j), \quad I_{72} = \omega_R(m, s), \quad I_{73} = \omega_R(m, j, s). \quad (80)$$

Из (78)–(80) получаем

$$\int_{\Omega(R)} q_s^m(x) dx \leq \omega_{R,h}(m, j, s) + \omega(h).$$

Ввиду того, что левая часть последнего неравенства не зависит от j, h , переходя последовательно к пределам по $m \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$, устанавливаем соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega(R)} q_s^m(x) dx \leq \omega(h).$$

Выполняя предельный переход при $h \rightarrow \infty$, выводим равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega(R)} q_s^m(x) dx = 0.$$

По утверждению 1 из [5] ($Q = \Omega(R)$), ввиду произвольности $R > 0$, имеем сходимости (40), (41) и сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (81)$$

Далее, так же как и в работе [7], устанавливается сходимость по подпоследовательности

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (82)$$

4.5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Используя оценку (42) и сходимости (37), (81), по лемме 3 устанавливаем слабую сходимость

$$\begin{aligned} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) & \rightharpoonup a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \\ \text{в топологии } \sigma(L_{\overline{M}}, E_M) & \text{ пространства } L_{\overline{M}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (83)$$

Из непрерывности $b(x, s_0, s)$ по (s_0, s) и сходимостей (35), (82) следует, что

$$b^m(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (84)$$

Из оценки (32), ввиду (84), согласно лемме Фату заключаем, что $b(x, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$. Таким образом, условия 1), 3) определения 3 выполнены.

Далее сходимость

$$b^m(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{в } L_{1,\text{loc}}(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (85)$$

устанавливается аналогично [10, шаг 6].

Докажем, что u является ренормализованным решением задачи (1), (2). Сначала докажем условие 4) определения 3. Применяя (7), из неравенства (27) получаем

$$\int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} \bar{a}M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k+h\}} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостями (82), (35), применив теорему Лебега и лемму Фату, выполним предельный переход при $m \rightarrow \infty$ для правильных h и получим неравенство

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \bar{a}M(x, \bar{d}|\nabla u|) dx + k \int_{\{|u| \geq k+h\}} \frac{M(x, u)}{|u|} dx \leq C_4 \int_{\{|u| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx. \quad (86)$$

Из (86), в частности, справедлива оценка вида (16). Тогда согласно предложению 1 имеем

$$\text{meas}\{\Omega: |u| \geq h\} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty. \quad (87)$$

Выполняя предельный переход в (86), пользуясь (87), устанавливаем соотношение 4) определения 3.

Докажем равенство (11). Пусть $\xi \in C_0^1(\Omega)$, $\text{supp } \xi \subset \Omega(l)$, $l \geq l_0$, и функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } S \subset [-L, L]$, $L > 0$. Пусть $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательных слабых решений уравнения (21). Взяв $S(u^m)\xi \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ в качестве тестовой функции в (23), выводим

$$\begin{aligned} & \langle a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) \rangle + \\ & + \langle (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + M(x, u^m)/u^m - f^m(x))S(u^m)\xi \rangle = I^m + J^m = 0, \quad m \geq l_0. \end{aligned} \quad (88)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} I^m &= \int_{\Omega} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, T_L(u^m), \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, T_L(u^m), \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) dx = I_1^m + I_2^m, \quad m \geq \max\{L, l_0\}. \end{aligned} \quad (89)$$

Ввиду сходимостей (35), (41), применяя лемму 8, устанавливаем

$$I_1^m = \int_{\Omega} a(x, T_L(u), \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)\xi dx + \omega(m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (90)$$

Из сходимости (35) по лемме 5 получаем

$$S(u^m)\nabla\xi\rightarrow S(u)\nabla\xi \quad \text{сильно в } E_M(\Omega), \quad m\rightarrow\infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (83), выводим

$$I_2^m = \int_{\Omega} a(x, T_L(u), \nabla T_L(u)) \cdot \nabla \xi S(u) \, dx + \omega(m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (91)$$

Объединив (89)–(91), будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{m\rightarrow\infty} I^m &= \int_{\Omega} a(x, T_L(u), \nabla T_L(u)) \cdot (S'(u)\xi \nabla T_L(u) + S(u)\nabla\xi) \, dx = \\ &= \int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla\xi) \, dx. \end{aligned} \quad (92)$$

По лемме 5 заключаем, что

$$S(u^m)\xi \rightharpoonup S(u)\xi \quad \text{в топологии } \sigma(L_{\infty}, L_1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (19), (38), (85), устанавливаем соотношение

$$\lim_{m\rightarrow\infty} J^m = \int_{\Omega} (b(x, u, \nabla u) + M(x, u)/u - f) S(u)\xi \, dx. \quad (93)$$

Комбинируя (88), (92), (93), получаем равенство (11). Таким образом, приходим к выводу, что u является ренормализованным решением задачи (1), (2).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gwiazda, P. Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space / P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, A. Zatorska-Goldstein // J. Differ. Equat. — 2018. — V. 264. — P. 341–377.
2. Ait Khellou, M. Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces / M. Ait Khellou, A. Benkirane // Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series. — 2016. — V. 43, № 2. — P. 164–187.
3. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data / M.S.B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, A. Benkirane // Bol. Soc. Paran. Mat. — 2018. — V. 36, suppl. 1. — P. 125–150.
4. Ying, Li. Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces / Li Ying, Y. Fengping, Zh. Shulin // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2021. — V. 61. — P. 1–20.
5. Кожевникова, Л.М. Существование энтропийного решения нелинейной эллиптической задачи в неограниченной области / Л.М. Кожевникова // Теор. мат. физика. — 2024. — Т. 218, № 1. — С. 124–148.
6. Вильданова, В.Ф. Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве / В.Ф. Вильданова, Ф.Х. Мукминов // Мат. сб. — 2023. — Т. 214, № 11. — С. 37–62.

7. Кожевникова, Л.М. Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей / Л.М. Кожевникова // Мат. сб. — 2019. — Т. 210, № 3. — С. 131–161.
8. Kozhevnikova, L.M. On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data / L.M. Kozhevnikova // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2020. — V. 65, № 3. — P. 337–367.
9. Kozhevnikova, L.M. On Solutions of Elliptic Equations with Variable Exponents and Measure Data in R^n / L.M. Kozhevnikova // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Dedicated to the Memory of Boris Sternin ; eds. V.M. Manuilov, A.S. Mishchenko, V.E. Nazaikinskii, B.-W. Schulze, W. Zhang. — Cham : Birkhäuser, 2021. — P. 221–239.
10. Кожевникова, Л.М. Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака–Орлича / Л.М. Кожевникова, А.П. Кашникова // Мат. сб. — 2022. — Т. 213, № 4. — С. 38–73.
11. Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces / S.M. Douiri, A. Benkirane, M. Ait Khellou, Y. El Hadfi // Analysis and Mathematical Physics. — 2021. — V. 11, suppl. 66. — P. 1–26.
12. Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 / T. Ahmdatt, M.S.B. Elemine Vall, A. Benkirane, A. Touzani // Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series. — 2017. — V. 44, suppl. 2. — P. 190–213.
13. Musielak, J. Orlicz Spaces and Modular Spaces / J. Musielak. — Berlin : Springer-Verlag, 1983. — 222 p.
14. Benkirane, A. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces / A. Benkirane, M. Sidi El Vally // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2013. — V. 20, № 1. — P. 57–75.
15. Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces / Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, A. Youssfi // J. Funct. Anal. — 2018. — V. 275, suppl. 9. — P. 2538–2571.
16. Kozhevnikova, L.M. On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1 -data in unbounded domains / L.M. Kozhevnikova // Lobachevskii J. Math. — 2023. — V. 44, № 5. — P. 1879–1901.
17. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц ; пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина ; под. ред. А.Г. Костюченко — М. : ИЛ, 1962. — 895 с.
18. Chlebicka, I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth / I. Chlebicka // Proc. of the Royal Society of Edinburgh. Sect. A. — 2023. — V. 153, № 2. — P. 588–618.
19. Benkirane, A. Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces / A. Benkirane, M. Sidi El Vally // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2014. — V. 21, № 5. — P. 787–811.

**EXISTENCE OF A RENORMALIZED SOLUTION
OF A QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATION
WITHOUT THE SIGN CONDITION ON THE LOWEST TERM**

L. M. Kozhevnikova

*Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
Elabuga Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Elabuga, Russia
e-mail: kosul@mail.ru*

The paper considers a second-order quasilinear elliptic equation with an integrable right-hand side. Restrictions on the structure of the equation are formulated in terms of the generalized N -function. Unlike the author’s previous works, there is no sign condition for the low-order term of the equation. In non-reflexive Musielak–Orlicz–Sobolev spaces in an arbitrary unbounded strictly Lipschitz domain, the existence of a renormalized solution to the Dirichlet problem of this equation is proven.

Keywords: quasi-linear elliptic equation, unbounded domain, Musielak–Orlicz space, renormalized solution, existence of a solution.

REFERENCES

1. Gwiazda, P., Skrzypczaka, I., and Zatorska-Goldstein, A., Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space, *J. Differ. Equat.*, 2018, vol. 264, pp. 341–377.
2. Ait Khellou, M. and Benkirane, A., Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 2016, vol. 43, no. 2, pp. 164–187.
3. Elemine Vall, M.S.B., Ahmedatt, T., Touzani, A., and Benkirane, A. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 2018, vol. 36, suppl. 1, pp. 125–150.
4. Ying, Li., Fengping, Y., and Shulin, Zh., Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2021, vol. 61, pp. 1–20.
5. Kozhevnikova, L.M., Existence of an entropic solution of a nonlinear elliptic problem in an unbounded domain, *Theor. Math. Phys.*, 2024, vol. 218, no. 1, pp. 106–128.
6. Vil’danova, V.F. and Mukminov, F.Kh., Entropy solution for an equation with measure-valued potential in a hyperbolic space, *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 11, pp. 1534–1559.
7. Kozhevnikova, L.M., Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents, *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 3, pp. 417–446.
8. Kozhevnikova, L.M., On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020, vol. 65, no. 3, pp. 37–367.
9. Kozhevnikova, L.M., On Solutions of Elliptic Equations with Variable Exponents and Measure Data in R^n , in *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Dedicated to the Memory of Boris Sternin*, Cham: Birkhäuser, 2021, pp. 221–239.
10. Kashnikova, A.P., Kozhevnikova, L.M., Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces, *Sb. Math.*, 2022, vol. 213, no. 4, pp. 476–511.
11. Douiri, S.M., Benkirane, A., Ait Khellou, M., and El Hadfi, Y., Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces, *Analysis and Mathematical Physics*, 2021, vol. 11, suppl. 66, pp. 1–26.
12. Ahmdatt, T., Elemine Vall, M.S.B., Benkirane, A., and Touzani, A., Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 , *Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series*, 2017, vol. 44, suppl. 2, pp. 190–213.
13. Musielak, J., *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 1983.
14. Benkirane, A. and Sidi El Vally, M., An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 57–75.
15. Ahmida, Y., Chlebicka, I., Gwiazda, P., and Youssfi, A., Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *J. Funct. Anal.*, 2018, vol. 275, suppl. 9, pp. 2538–2571.
16. Kozhevnikova, L.M., On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1 -data in unbounded domains, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 5, pp. 1879–1901.
17. Dunford, N. and Schwartz, J.T., *Linear Operators, V. I: General Theory*, New York, London: Interscience Publishers, 1958.
18. Chlebicka, I., Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh. Sect. A.*, 2023, vol. 153, no. 2, pp. 588–618.
19. Benkirane, A. and Sidi El Vally, M., Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 787–811.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ
И НЕРАВЕНСТВ

© В. Г. Замураев

*Белорусско-Российский университет, г. Могилёв, Беларусь**e-mail: vhz@tut.by**Поступила в редакцию 01.02.2024 г., после доработки 28.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Рассмотрена задача оптимального управления, управляемый процесс в которой описывается линейным функциональным уравнением в гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства. Получены достаточные условия существования решения задачи. Результаты обобщены на случай, когда управляемый процесс описывается линейным вариационным неравенством.

Ключевые слова: задача оптимального управления, оптимальное множество, уравнение с частными производными, вариационное неравенство, гильбертово пространство.

DOI: 10.31857/S0374064124060055, EDN: KWFSVZ

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая в настоящей работе задача оптимального управления возникла как обобщение широкого класса задач оптимизации области и в подобной постановке была впервые предложена автором в статье [1]. Задачи оптимизации области — класс задач оптимального управления системами с распределёнными параметрами, в которых управляющим воздействием является изменение области определения управляемого процесса. Систематическое изучение таких задач началось с работ Ж.-Л. Лионса [2], Д. Бежи и Р. Гловинского [3], Д. Шенэ [4] и других авторов. Существуют различные как постановки этих задач, так и подходы к их решению. Для широких классов задач оптимизации области получены условия существования решения, условия оптимальности, численными методами найдены решения [5–9]. В большинстве работ управляемый процесс описывается некоторой краевой задачей для уравнения эллиптического типа.

Цель настоящей статьи — получить реально проверяемые на практике достаточные условия существования решения задачи, более общей, чем задача оптимизации области. В рассматриваемой задаче управляемый процесс описывается линейным функциональным уравнением в абстрактном гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением (u, u) и нормой $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Пусть A — действующий в пространстве H линейный симметричный положительно определённый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H : $(Au, v) = (u, Av)$ для любых $u, v \in D(A)$; $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, $u \in D(A)$, где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная. Выражения $(Au, v) = [u, v]_A$ и $(Au, u)^{1/2} = [u, u]_A^{1/2} = |u|_A$ определяют

на множестве $D(A)$ скалярное произведение и норму. Энергетическое пространство H_A оператора A определяется как пополнение множества $D(A)$ в норме $|u|_A$. При этом имеет место непрерывное вложение пространства H_A в пространство H : $H_A \subset H$,

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_A. \quad (1)$$

Пусть f — произвольный элемент пространства H . Обобщённое решение уравнения $Au = f$ определяется как элемент $u \in H_A$, удовлетворяющий уравнению

$$[u, v]_A = (f, v), \quad v \in H_A. \quad (2)$$

При любом $f \in H$ существует единственное решение u_0 уравнения (2), которое совпадает с единственным элементом, реализующим в пространстве H_A минимум функционала энергии

$$F(u) = \frac{1}{2} |u|_A^2 - (f, u). \quad (3)$$

Рассмотрим метрическое пространство C — множество управлений. Каждому управлению $c \in C$ поставим в соответствие некоторое замкнутое подпространство $H_A(c)$ пространства H_A . Пусть $u_0(c)$ — решение уравнения

$$u \in H_A(c), \quad [u, v]_A = (f, v), \quad v \in H_A(c), \quad (4)$$

равносильного задаче минимизации функционала (3) на подпространстве $H_A(c)$.

Пусть u_d — некоторый фиксированный элемент пространства H . Рассматриваемая задача оптимизации состоит в отыскании управления $c = c^*$, доставляющего минимальное значение функционалу $j(c) = \|u_0(c) - u_d\|$ на множестве управлений C . Всякое решение c^* данной задачи будем называть *оптимальным управлением*, а соответствующее этому решению подпространство $H_A(c^*)$ — *оптимальным пространством*.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Введём следующие условия:

1) если

$$c_n \rightarrow c \in C, \quad (5)$$

$u_n \in H_A(c_n)$, $u_n \xrightarrow{w} u$ слабо в H_A , то $u \in H_A(c)$;

2) из (5) следует, что для произвольного $u \in H_A(c)$ найдётся элемент $u_n \in H_A(c_n)$ такой, что $u_n \rightarrow u$ сильно в H_A .

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда если $c_n \rightarrow c \in C$, то последовательность $\{u_0(c_n)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в пространстве H_A к $u_0(c)$.

Доказательство. Полагая в уравнении (4) $c = c_n$, $u = v = u_0(c_n)$, используя неравенство Коши–Шварца и оценку (1), получаем

$$|u_0(c_n)|_A^2 = (f, u_0(c_n)) = |(f, u_0(c_n))| \leq \|f\| \|u_0(c_n)\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| |u_0(c_n)|_A,$$

откуда имеем

$$|u^0(c_n)|_A \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|, \quad (6)$$

т.е. последовательность $\{u_0(c_n)\}$ ограничена. В силу слабой компактности замкнутого шара в гильбертовом пространстве H_A из последовательности $\{u_0(c_n)\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в H_A к некоторому элементу $\bar{u}$, которую снова обозначим через $\{u_0(c_n)\}$. Таким образом, учитывая, что любая подпоследовательность сходящейся

последовательности $\{c_n\}$ сходится к тому же пределу, имеем: $c_n \rightarrow c \in C$, $u_0(c_n) \in H_A(c_n)$, $u_0(c_n) \xrightarrow{w} \bar{u}$ слабо в H_A . По условию 1) тогда $\bar{u} \in H_A(c)$.

Для произвольного $v \in H_A(c)$ найдём элемент $v_n \in H_A(c_n)$ такой, что $v_n \rightarrow v$ в H_A . При таком выборе v_n , используя оценку (6), получаем

$$\begin{aligned} |[u_0(c_n), v_n]_A - [\bar{u}, v]_A| &= |[u_0(c_n), v_n - v]_A + [u_0(c_n) - \bar{u}, v]_A| \leqslant \\ &\leqslant |u_0(c_n)|_A |v_n - v|_A + |[u_0(c_n) - \bar{u}, v]_A| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|f\| |v_n - v|_A + |[u_0(c_n) - \bar{u}, v]_A|. \end{aligned}$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} [u_0(c_n), v_n]_A = [\bar{u}, v]_A$.

Учитывая непрерывность вложения H_A в H , также находим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, v_n) = (f, v)$. Таким образом, $[\bar{u}, v]_A = (f, v)$ для любого $v \in H_A(c)$. В совокупности с условием $\bar{u} \in H_A(c)$ это означает, что $\bar{u} = u_0(c)$.

Для доказательства сильной сходимости последовательности $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$ докажем сходимость норм: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n)|_A = |u_0(c)|_A$.

Так как $|u_0(c_n)|_A^2 = (f, u_0(c_n)) = [u_0, u_0(c_n)]_A$ и $u_0(c_n) \xrightarrow{w} u_0(c)$ слабо в H_A , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n)|_A^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_0, u_0(c_n)]_A = [u_0, u_0(c)]_A = (f, u_0(c)) = |u_0(c)|_A^2,$$

т.е. $\{u_0(c_n)\}$ сходится к $u_0(c)$ сильно в H_A . Лемма доказана.

Приведём кратко необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории многозначных отображений [10, гл. 2].

Пусть X — некоторое множество, направленное отношением частичного порядка “ $\geqslant$ ”. Подмножество A множества X называется *терминальным*, если существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $x \in A$ для любого $x \geqslant x_0$; и *конфинальным*, если для любого $x \in X$ существует $a \in A$ такой, что $a \geqslant x$.

Пусть C — топологическое пространство. *Направленностью* $(c_x) \subset C$ называется функция из X в C . Точка $c \in C$ называется *пределом направленности* (c_x) , если для любой окрестности V точки c существует терминальное подмножество A множества X такое, что $(c_x) \subset V$ при $x \in A$. Если пространство C хаусдорфово, то любая сходящаяся направленность имеет единственный предел.

Пусть T — топологическое пространство. *Направленностью множеств* $(S_x) \subset T$ называется функция, ставящая в соответствие каждому $x \in X$ некоторое множество $S_x \subset T$. Определим множества $\lim \inf_x S_x$ и $\lim \sup_x S_x$ следующим образом: $u \in \lim \inf_x S_x$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности U точки u $U \cap S_x \neq \emptyset$ для любого x из некоторого терминального подмножества множества X ; $u \in \lim \sup_x S_x$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U(u)$ $U \cap S_x \neq \emptyset$ для любого x из некоторого конфинального подмножества множества X .

Пусть C и T — хаусдорфовы топологические пространства и пусть F — многозначное отображение C в T , $F: c \mapsto F(c) \subset T$, $G(F) = \{(c, u) \in C \times T: u \in F(c)\}$ — график отображения F . Отображение F называется *полунепрерывным изнутри* на пространстве C , если для любой точки $c \in C$ и любой направленности $(c_x) \subset C$, сходящейся к c , $F(c) \subset \lim \inf_x F(c_x)$. Отображение F называется *полунепрерывным извне* на C , если для любой точки $c \in C$ из сходимости направленности (c_x) к c следует, что $\lim \sup_x F(c_x) \subset F(c)$.

Если пространства C и T удовлетворяют первой аксиоме счётности, то полунепрерывность многозначного отображения F в точке c изнутри равносильна тому, что для любых $u \in F(c)$ и для любой последовательности $\{c_n\} \subset C$, сходящейся к c , существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in F(c_n)$, сходящаяся к u . Полунепрерывность отображения F извне равносильна

замкнутости графика $G(F)$. В случае пространств с первой аксиомой счётности это означает, что из сходимости последовательности $\{(c_n, u_n)\} \subset G(F)$ к $(c, u) \in C \times T$ следует, что $u \in F(c)$.

Вернёмся к поставленной задаче оптимизации и рассмотрим многозначное отображение $H_A: C \rightarrow H_A$, $H_A: c \mapsto H_A(c)$.

Условие 2) равносильно полунепрерывности изнутри отображения H_A на множестве C . Учитывая, что слабая топология в H_A может не удовлетворять первой аксиоме счётности, в общем случае нельзя утверждать, что условие 1) равносильно слабой полунепрерывности извне отображения H_A на множестве C . Условие 1) назовём *секвенциальной слабой полунепрерывностью извне* отображения H_A на множестве C .

Теорема 1. Пусть метрическое пространство C — компакт и пусть многозначное отображение H_A секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на пространстве C . Тогда рассматриваемая задача оптимизации имеет решение.

Доказательство. Функционал $j(c) = \|u_0(c) - u_d\|$ ограничен снизу на C , значит существует последовательность управлений $\{c_n\}$, минимизирующая этот функционал на C . Метрическое пространство C — компакт, следовательно, последовательность $\{c_n\}$ содержит подпоследовательность, которую снова обозначим через $\{c_n\}$, сходящуюся в C к некоторому управлению c^* .

Рассмотрим последовательность решений $\{u_0(c_n)\}$ уравнения (4), соответствующую этой сходящейся последовательности $\{c_n\}$. По лемме 1 последовательность $\{u_0(c_n)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к $u_0(c^*)$ в H_A , а значит, и в H . Учитывая тот факт, что всякая подпоследовательность минимизирующей последовательности $\{c_n\}$ также будет минимизирующей последовательностью для рассматриваемого функционала на C , находим

$$\inf_{c \in C} \|u_0(c) - u_d\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0(c_n) - u_d\| = \|u_0(c^*) - u_d\| = \min_{c \in C} \|u_0(c) - u_d\|,$$

т.е. c^* — оптимальное управление. Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть $D(c)$ — некоторое множество, плотное в $H_A(c)$, и пусть из условия $c_n \rightarrow c \in C$ следует, что для произвольного $\varphi \in D(c)$ найдётся элемент $u_n \in H_A(c_n)$ такой, что $u_n \rightarrow \varphi$ сильно в H_A . Тогда из условия $c_n \rightarrow c \in C$ следует, что для произвольного $u \in H_A(c)$ и для любой окрестности $O(u)$ найдётся натуральное число N такое, что пересечение $O(u) \cap H_A(c_n) \neq \emptyset$ для любого $n \geq N$.

Доказательство. Множество $D(c)$ плотно в пространстве $H_A(c)$. Следовательно, для любого $u \in H_A(c)$ найдётся последовательность $\varphi_m \in D(c)$, сходящаяся в H_A к u , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что $|\varphi_m - u|_A < \varepsilon/2$ для любого $m \geq M$. В частности, $|\varphi_M - u|_A < \varepsilon/2$. Пусть $c_n \rightarrow c \in C$. По условию для $\varphi_M \in D(c)$ найдутся элемент $v_{Mn} \in H_A(c_n)$ и натуральное число N такие, что $|v_{Mn} - \varphi_M|_A < \varepsilon/2$ при $n \geq N$. Тогда

$$|v_{Mn} - u|_A \leq |v_{Mn} - \varphi_M|_A + |\varphi_M - u|_A < \varepsilon,$$

т.е. при $n \geq N$ элементы $v_{Mn} \in H_A(c_n)$ содержатся в произвольной ε -окрестности точки $u \in H_A(c)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть из условия $c_n \rightarrow c \in C$ следует, что для произвольного элемента $u \in H_A(c)$ и для любой окрестности $O(u)$ найдётся натуральное число N такое, что пересечение $O(u) \cap H_A(c_n) \neq \emptyset$ при $n \geq N$. Тогда существует натуральное число N_{n_0} и последовательность $u_n \in H_A(c_n)$, $n \geq N_{n_0}$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Доказательство. Рассмотрим семейство вложенных окрестностей точки u :

$$O_{m+1}(u) \subset O_m(u).$$

По условию найдётся число N_m такое, что $O_m(u) \cap H_A(c_n) \neq \emptyset$, $n \geq N_m$. Поскольку окрестности рассматриваемого семейства вложены друг в друга, можно считать, что $N_{m+1} > N_m$.

Зафиксируем некоторое натуральное число n_0 и рассмотрим число N_{n_0} . Для каждого $n \geq N_{n_0}$ выберем некоторый элемент $v_{nm} \in O_m(u) \cap H_A(c_n)$. Для любого $n \geq N_{n_0}$ существует N_m такое, что $N_m \leq n < N_{m+1}$. Определим последовательность $u_n = v_{nm}$ для любых $n \geq N_{n_0}$ таких, что $N_m \leq n < N_{m+1}$.

Зафиксируем окрестность $O(u)$ и возьмём k так, чтобы $O_k(u) \subset O(u)$. Тогда из определения u_n и из вложенности окрестностей рассматриваемого семейства следует, что $u_n \in O_k(u)$ для любых $n \geq N_k$. Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ при $n \geq N_{n_0}$ сходится к u . Лемма доказана.

Замечание. Из утверждений лемм 2 и 3 следует, что в приложениях можно проверять выполнение условия 2) лишь для элементов некоторого множества $D(c)$, плотного в пространстве $H_A(c)$. Заметим также, что если потребовать выполнения условия 2) лишь для элементов $D(c)$, то в доказательстве леммы 1 мы получаем: $\bar{u} \in H_A(c)$, $[\bar{u}, v]_A = (f, v)$ для всех $v \in D(c)$, откуда следует, что $\bar{u} = u_0(c)$.

Следующая теорема устанавливает связь между решениями u_0 и $u_0(c)$ уравнений (2) и (4) соответственно.

Теорема 2. Решение $u_0(c)$ уравнения (4) является проекцией в энергетическом пространстве H_A на подпространство $H_A(c)$ решения u_0 уравнения (2):

$$u_0(c) = P(c)u_0,$$

где $P(c)$ — оператор проектирования пространства H_A на подпространство $H_A(c)$.

Доказательство. Для произвольного элемента $v \in H_A(c)$

$$[u_0(c), v]_A = (f, v) = [u_0, v]_A,$$

т.е.

$$[u_0 - u_0(c), v]_A = 0, \quad v \in H_A(c).$$

Тогда

$$|u_0(c) - u_0|_A^2 - |v - u_0|_A^2 = 2[u_0 - u_0(c), v - u_0(c)]_A - |u_0(c) - v|_A^2 \leq 0,$$

откуда следует, что

$$|u_0(c) - u_0|_A = \min_{v \in H_A(c)} |v - u_0|_A = \text{dist}(u_0, H_A(c)),$$

а значит, $u_0(c) = P(c)u_0$. Теорема доказана.

Оператор проектирования $P(c)$ является линейным непрерывным симметричным оператором, удовлетворяющим условию $P^2(c) = P(c)$. Кроме того, решения u_0 и $u_0(c)$ уравнений (2) и (4) связаны соотношением

$$|2u_0(c) - u_0|_A^2 = |u_0|_A^2. \quad (7)$$

Действительно, из уравнений (4) и (2) при $v = u_0(c)$ получаем

$$[u_0(c)]_A^2 = (f, u_0(c)) = [u_0, u_0(c)]_A,$$

$$|u_0(c)|_A^2 - 2[u_0(c), u_0/2]_A + |u_0|_A^2/4 = |u_0|_A^2/4,$$

откуда следует (7).

Если решение u_0 уравнения (2) соответствует некоторому управлению, то рассматриваемая задача оптимизации имеет содержательный смысл в том случае, когда минимальное значение функционала $j(c)$ меньше $\|u_0 - u_d\|$. Заметим, что это возможно. Взяв, например, в качестве u_d некоторое конкретное $u_0(c) = P(c)u_0 \neq u_0$, имеем

$$0 = \|u_0(c) - u_d\| < \|u_0 - u_d\| \neq 0.$$

3. ПРИМЕР

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для эллиптического уравнения с однородным краевым условием (см., например, [11, гл. 14, §§ 1–4])

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x_1, x_2)u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (8)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

где $u = u(x_1, x_2)$, $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, Γ — граница области Ω , $A_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $A_{12}(x_1, x_2) = A_{21}(x_1, x_2)$, $C \in C(\bar{\Omega})$, $C(x_1, x_2) \geq 0$ для всех точек $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Дифференциальное выражение в левой части уравнения (8) будем считать эллиптическим и невырожденным на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$, т.е. имеет место соотношение

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) t_i t_j \geq \mu_0 \sum_{k=1}^2 t_k^2,$$

где t_1, t_2 — произвольные действительные числа, μ_0 — положительная постоянная, ограничивающая снизу собственные числа $\lambda_1(x_1, x_2)$ и $\lambda_2(x_1, x_2)$ матрицы старших коэффициентов ($A_{ij}(x_1, x_2)$) в замкнутой области $\bar{\Omega}$, являющиеся положительными и непрерывными в $\bar{\Omega}$ функциями. Считаем, что функция $f \in L_2(\Omega)$.

Порождаемый задачей (8), (9) линейный неограниченный оператор

$$Au = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x_1, x_2)u$$

является симметричным и положительно определённым на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве

$$D(A) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\Gamma} = 0\},$$

содержащем в себе множество $D(\Omega)$ финитных в области Ω функций. Энергетическое пространство H_A оператора A (пространство Соболева) состоит из функций, которые в Ω квадратично суммируемы, имеют квадратично суммируемые обобщённые первые производные и удовлетворяют краевому условию (9) в следующем смысле: если $u \in H_A$, то существует последовательность функций $u_n \in D(A)$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n - u)^2 d\Omega = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega = 0.$$

Энергетическое произведение и норма в пространстве H_A определяются формулами

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C(x_1, x_2)uv \right) d\Omega,$$

$$|u|_A = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x_1, x_2)u^2 \right) d\Omega \right)^{1/2},$$

обобщённое решение $u_0 \in H_A$ задачи (8), (9) находится из уравнения

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C(x_1, x_2) uv \right) d\Omega = \int_{\Omega} f(x_1, x_2) v d\Omega, \quad v \in H_A.$$

Пусть $\Omega(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 0 < x_1 < c(x_2), 0 < x_2 < 1\}$, где функция $c(x_2)$ принадлежит множеству

$$C = \left\{ c \in C^{0,1}[0, 1]: 0 < \alpha \leq c(x_2) \leq \beta < 1, |c'(x_2)| \leq k_1, \int_0^1 c(x_2) dx_2 = k_2 \right\};$$

здесь $C^{0,1}[0, 1]$ — множество функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[0, 1]$, α, β, k_1, k_2 — некоторые постоянные. Множество $\bar{\Omega}(c) \subset \bar{\Omega}$. Границу области $\Omega(c)$ обозначим через $\Gamma(c)$. Рассмотрим задачу (8), (9) в замкнутой области $\bar{\Omega}(c)$:

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x_1, x_2) u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega(c), \quad (10)$$

$$u|_{\Gamma(c)} = 0,$$

обобщённое решение $u_0(c) \in H_{A(c)}$ которой находится из уравнения

$$\int_{\Omega(c)} \left(\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + C(x_1, x_2) uv \right) d\Omega = \int_{\Omega(c)} f(x_1, x_2) v d\Omega, \quad v \in H_{A(c)}.$$

Каждую функцию $\varphi \in D(\Omega(c))$ продолжим нулём вне $\Omega(c)$ на всю область Ω . Полученная таким образом функция $\tilde{\varphi}$ является финитной на Ω , и её норма $|\tilde{\varphi}|_A = |\varphi|_{A(c)}$. Учитывая, что множество финитных в $\Omega(c)$ функций плотно в пространстве $H_{A(c)}$, распространим построенный оператор продолжения по непрерывности на всё пространство $H_{A(c)}$: если $u \in H_{A(c)}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = u$, то $\tilde{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_n$, $|\tilde{u}|_A = |u|_{A(c)}$.

Образ пространства $H_{A(c)}$ при указанном продолжении является замкнутым подпространством пространства H_A , представляющим собой множество функций из H_A , равных нулю почти всюду в $\Omega \setminus \Omega(c)$. Обозначим это подпространство через $H_{A(c)}$. Учитывая взаимную однозначность указанного оператора продолжения, отождествим пространство $H_{A(c)}$ с пространством $H_A(c)$.

Пусть $u_d = u_d(x_1, x_2)$, $u_d \in L_2(\Omega)$. Рассматриваемая задача оптимизации состоит в минимизации функционала

$$j(c) = \left(\iint_{\Omega} (u_0(c) - u_d)^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

на множестве управлений C .

Условие $\int_0^1 c(x_2) dx_2 = k_2$ означает, что при изменении области $\Omega(c)$ её площадь остаётся постоянной, т.е. рассматриваемая задача относится к классу задач оптимизации формы области. Близкая задача для частного случая уравнения (10) — неоднородного уравнения Лапласа — с однородным краевым условием на правой части границы области $\Omega(c)$ рассматривалась в работе [3], где было доказано существование решения, установлены необходимые условия оптимальности, для модельных задач с конкретными значениями параметров численными методами были найдены оптимальные области и соответствующие им значения минимизируемых функционалов; отмечено также, что в общем случае решение задачи не единственно.

Проверим выполнение условий 1) и 2). Пусть $c_n \rightarrow c \in C$, $u(c_n) \in H_A(c_n)$, $u(c_n) \xrightarrow{w} u$ слабо в H_A . Так как любой линейный непрерывный функционал на пространстве $L_2(\Omega)$ непрерывен также на пространстве H_A , последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к u в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} u_n v \, d\Omega = \iint_{\Omega} uv \, d\Omega, \quad v \in L_2(\Omega).$$

При $v = u \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} u_n u \, d\Omega = \iint_{\Omega} u^2 \, d\Omega. \quad (11)$$

Полагая $v = \chi_{\Omega(c)} u$, где $\chi_{\Omega(c)}(x_1, x_2)$ — характеристическая функция множества $\Omega(c)$, $v \in L_2(\Omega)$, получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega(c)} u_n u \, d\Omega = \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega. \quad (12)$$

Пусть $\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)$ — симметрическая разность множеств $\Omega(c_n)$ и $\Omega(c)$, мера которой

$$\mu(\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)) = \iint_{\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)} d\Omega = \int_0^1 |c_n(x_2) - c(x_2)| \, dx_2 \leq \max_{x_2 \in [0,1]} |c_n(x_2) - c(x_2)|. \quad (13)$$

Оценим теперь абсолютную величину следующей разности:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega} u_n u \, d\Omega - \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega \right| &= \left| \iint_{\Omega(c_n)} u_n u \, d\Omega - \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega \right| \leq \left| \iint_{\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)} u_n u \, d\Omega \right| + \left| \iint_{\Omega(c)} (u_n - u) u \, d\Omega \right| \leq \\ &\leq \left(\iint_{\Omega} u_n^2 \, d\Omega \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega(c_n) \Delta \Omega(c)} u^2 \, d\Omega \right)^{1/2} + \left| \iint_{\Omega(c)} (u_n - u) u \, d\Omega \right|. \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность в $L_2(\Omega)$ слабо сходящейся последовательности $\{u_n\}$, сходимость $c_n \rightarrow c$ в $C[0, 1]$, оценку (13), абсолютную непрерывность интеграла Лебега, равенства (11) и (12), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} u_n u \, d\Omega = \iint_{\Omega(c)} u^2 \, d\Omega = \iint_{\Omega} u^2 \, d\Omega,$$

откуда следует, что $u(x_1, x_2) = 0$ почти всюду в $\Omega \setminus \Omega(c)$. В совокупности с условием $u \in H_A$ это означает, что $u \in H_A(c)$.

В соответствии с замечанием к лемме 3 выполнение условия 2) проверим лишь для элементов плотного в $H_A(c)$ множества финитных в Ω функций с носителем в $\Omega(c)$. Пусть $c_n \rightarrow c \in C$ в метрике пространства $C[0, 1]$ и пусть $\tilde{\varphi}(x_1, x_2)$ — финитная в Ω функция, носитель которой лежит в $\Omega(c)$. Функция $\tilde{\varphi}$ обращается в нуль в некоторой пограничной полосе

$$\Omega_{\varepsilon}(c) = \{(x_1, x_2) \in \Omega(c) : \rho((x_1, x_2), \Gamma) < \varepsilon\}$$

области $\Omega(c)$, в частности, и на множестве $\{(x_1, x_2) \in \Omega(c) : |x_1 - c(x_2)| < \varepsilon, 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

Сходимость последовательности $\{c_n\}$ к управлению c означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $x_2 \in [0, 1]$

$$|c_n(x_2) - c(x_2)| \leq \max_{x_2 \in [0,1]} |c_n(x_2) - c(x_2)| < \varepsilon$$

при $n \geq N$, т.е. при таких значениях n функция $\varphi \in D(\Omega(c_n)) \subset H_A(c_n)$. Последовательность $\varphi_n = \varphi$ для $n \geq N$.

Множество управлений C замкнуто в пространстве $C[0, 1]$. Кроме того, семейство управлений равномерно ограничено и в силу условия $|c'(x_2)| \leq k_1$ равномерно непрерывно на отрезке $[0, 1]$. По теореме Арцела метрическое пространство управлений C компактно.

Таким образом, в данном примере все условия теоремы 1 выполнены и, следовательно, рассматриваемая задача оптимизации имеет решение.

4. СЛУЧАЙ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА

Пусть S — некоторое непустое замкнутое выпуклое множество в пространстве H_A . Задача минимизации функционала (3) на множестве S равносильна решению вариационного неравенства

$$[u, v - u]_A \geq (f, v - u), \quad u, v \in S. \quad (14)$$

По теореме Стампаккья [12, с. 138] для любой функции $f \in H$ существует единственное решение u_0 неравенства (14). Каждому управлению $c \in C$ поставим в соответствие некоторое непустое замкнутое выпуклое множество $S(c)$ в пространстве H_A . Пусть $u_0(c)$ — решение неравенства

$$[u, v - u]_A \geq (f, v - u), \quad u, v \in S(c). \quad (15)$$

Лемма 4. Пусть многозначное отображение $S: C \rightarrow H_A$ ($S: c \mapsto S(c)$), секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на пространстве C . Тогда если $c_n \rightarrow c \in C$, то последовательность $\{u_0(c_n)\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в H_A к $u_0(c)$.

Доказательство. Для доказательства ограниченности последовательности $\{u_0(c_n)\}$ найдём для произвольного фиксированного $v \in S(c)$ элемент $v_n \in S(c_n)$ такой, что $v_n \rightarrow v$ в H_A . Положим $c = c_n$, $u = u_0(c_n)$, $v = v_n$ в неравенстве (15):

$$[u_0(c_n), v_n - u_0(c_n)]_A \geq (f, v_n - u_0(c_n)),$$

откуда получим

$$|u_0(c_n)|_A^2 \leq [u_0(c_n), v_n]_A - (f, v_n - u_0(c_n)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |u_0(c_n)|_A^2 &\leq |[u_0(c_n), v_n]_A| + |(f, v_n - u_0(c_n))| \leq |u_0(c_n)|_A |v_n|_A + \|f\| \|v_n - u_0(c_n)\| \leq \\ &\leq |u_0(c_n)|_A |v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| \|v_n - u_0(c_n)\|_A \leq |u_0(c_n)|_A |v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| (|v_n|_A + |u_0(c_n)|_A). \end{aligned}$$

Из найденных соотношений следует, что

$$|u_0(c_n)|_A \leq \frac{1}{2} \left(|v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| + \sqrt{\left(|v_n|_A + \frac{1}{\gamma} \|f\| \right)^2 + \frac{4}{\gamma} \|f\| |v_n|_A} \right).$$

Рассуждая аналогично как при доказательстве леммы 1, для подпоследовательностей будем иметь: $c_n \rightarrow c \in C$, $u_0(c_n) \in S(c_n)$, $u_0(c_n) \xrightarrow{w} \bar{u}$ слабо в H_A . Тогда в силу секвенциальной слабой полунепрерывности отображения S извне $\bar{u} \in S(c)$. Из оценки

$$|[u_0(c_n), v_n]_A| = |[u_0(c_n), v + v_n - v]_A| \leq |[u_0(c_n), v]_A| + |u_0(c_n)|_A |v_n - v|_A$$

следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [u_0(c_n), v_n]_A = [\bar{u}, v]_A. \quad (16)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} |(f, v_n - u_0(c_n))| &= |(f, v_n - v + v - u_0(c_n))| \leq |(f, v_n - v)| + |(f, v - u_0(c_n))| \leq \\ &\leq \|f\| \|v_n - v\| + |(f, v) - (f, u_0(c_n))| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\| |v_n - v|_A + |(f, v) - (f, u_0(c_n))|, \end{aligned}$$

учитывая, что последовательность $u_0(c_n)$, слабо сходящаяся к $\bar{u}$ в энергетическом пространстве H_A , будет также слабо сходиться к $\bar{u}$ в пространстве H , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, v_n - u_0(c_n)) = (f, v - \bar{u}). \quad (17)$$

Кроме того, из полунепрерывности нормы относительно слабой сходимости следует, что

$$|\bar{u}|_A^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n)|_A^2. \quad (18)$$

Из (16)–(18) находим

$$|\bar{u}|_A^2 \leq [\bar{u}, v]_A - (f, v - \bar{u}),$$

т.е.

$$[\bar{u}, v - \bar{u}]_A \geq (f, v - \bar{u}), \quad v \in S(c).$$

В совокупности с условием $\bar{u} \in S(c)$ это означает, что $\bar{u} = u_0(c)$.

Для доказательства сильной сходимости последовательности $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$ введём элемент $u_n \in S(c_n)$, для которого $u_n \rightarrow u_0(c)$. Полагая в неравенстве (15) $c = c_n$, $u = u_0(c_n)$, $v = u_n$, получаем

$$[u_0(c_n), u_n - u_0(c_n)]_A \geq (f, u_n - u_0(c_n)),$$

откуда

$$|u_0(c_n)|_A^2 \leq [u_0(c_n), u_n]_A - (f, u_n - u_0(c_n)).$$

Тогда

$$|u_0(c_n) - u_n|_A^2 = |u_0(c_n)|_A^2 - 2[u_0(c_n), u_n]_A + |u_n|_A^2 \leq |u_n|_A^2 - [u_0(c_n), u_n]_A - (f, u_n) + (f, u_0(c_n)).$$

Из сильной сходимости $\{u_n\}$ к $u_0(c)$ и слабой сходимости $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$ в пространствах H_A и H следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_0(c_n) - u_n|_A^2 = 0.$$

Учитывая неравенство

$$|u_0(c_n) - u_0(c)| \leq |u_0(c_n) - u_n| + |u_n - u_0(c)|,$$

получаем сильную сходимость последовательности $\{u_0(c_n)\}$ к $u_0(c)$. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть метрическое пространство C — компакт и пусть многозначное отображение S секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри на пространстве C . Тогда рассматриваемая задача минимизации имеет решение.

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 4. Решение $u_0(c)$ неравенства (15) является проекцией в энергетическом пространстве H_A на множество $S(c)$ решения u_0 уравнения (2): $u_0(c) = P(c)(u_0)$, где $P(c)$ — оператор проектирования пространства H_A на множество $S(c)$.

Доказательство. Для произвольного элемента $v \in S(c)$ имеют место соотношения

$$[u_0(c), v - u_0(c)]_A \geq (f, v - u_0(c)) = [u_0, v - u_0(c)]_A,$$

т.е.

$$[u_0 - u_0(c), v - u_0(c)]_A \leq 0, \quad v \in S(c).$$

Тогда

$$|u_0(c) - u_0|_A^2 - |v - u_0|_A^2 = 2[u_0 - u_0(c), v - u_0(c)]_A - |u_0(c) - v|_A^2 \leq 0,$$

откуда следует, что

$$|u_0(c) - u_0|_A = \min_{v \in S(c)} |v - u_0| = \text{dist}(u_0, H_A(c)),$$

а, значит,

$$u_0(c) = P(c)(u_0).$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, в которой управляемый процесс описывается линейным функциональным уравнением в абстрактном гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства. Рассмотрен пример, показывающий, что задача оптимизации формы области, в которой управляемый процесс описывается задачей Дирихле для эллиптического уравнения с однородным краевым условием, является частным случаем рассматриваемой задачи оптимизации, и подробно иллюстрирующий проверку достаточных условий разрешимости в этом частном случае. Полученные результаты обобщены на случай, когда управляемый процесс описывается линейным вариационным неравенством.

Теорема существования решения — первый шаг в исследовании рассматриваемой задачи. Требуют изучения условия на исходные данные, обеспечивающие уменьшение значения минимизируемого функционала; необходимо получить условия оптимальности, а также разработать алгоритмы, порождающие минимизирующие последовательности. Перспективным направлением исследований является изучение задачи, в которой управляемый процесс описывается операторным уравнением с непотенциальным оператором, с применением полученных в этом случае результатов к исследованию задач оптимизации.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замураев, В.Г. Существование оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений / В.Г. Замураев // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 7. — С. 982–985.
2. Лионс, Ж.-Л. Об оптимальном управлении распределенными системами / Ж.-Л. Лионс // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, № 4. — С. 15–46.
3. Begis, D. Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés / D. Begis, R. Glowinski // Appl. Math. and Optim. — 1975. — V. 2, № 2. — P. 130–169.
4. Chenais, D. On the existence of a solution in a domain identification problem / D. Chenais // J. Math. Anal. Appl. — 1975. — № 52. — P. 189–219.
5. Hlaváček, I. Optimization of the domain in elliptic unilateral boundary value problems by finite element method / I. Hlaváček, J. Nečas // Analyse Numérique. — 1982. — V. 16, № 4. — P. 351–373.

6. Осипов, Ю.С. Об одной задаче Ж.-Л. Лионса / Ю.С. Осипов, А.П. Суетов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 2. — С. 288–291.
7. Pironneau, O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems / O. Pironneau. — New York : Springer-Verlag, 1984. — 168 p.
8. Haslinger, J. Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation / J. Haslinger, R.A.E. Mäkinen. — Philadelphia : SIAM, 2003. — 273 p.
9. Neittaanmaki, P. Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications / P. Neittaanmaki, J. Sprekels, D. Tiba. — New York : Springer, 2006. — 507 p.
10. Burachik, R.S. Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators / R.S. Burachik, A.N. Iusem. — New York : Springer, 2008. — 293 p.
11. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. — М. : Наука, 1968. — 576 с.
12. Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations / H. Brezis. — New York : Springer, 2011. — 599 p.

THE EXISTENCE OF OPTIMAL SETS FOR LINEAR VARIATIONAL EQUATIONS AND INEQUALITIES

V. G. Zamuraev

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus
e-mail: vhz@tut.by

This paper considers an optimal control problem in which the controlled process is described by a linear functional equation in a Hilbert space, and the control action is a change of space. Sufficient conditions for the existence of a solution are obtained. The results are generalized to the case when the controlled process is described by a linear variational inequality.

Keywords: problem of optimal control, optimal set, partial differential equation, variational inequality, Hilbert space.

REFERENCES

1. Zamuraev, V.G., The existence of optimal spaces for linear functional equations, *Differ. Equat.*, 2002, vol. 38, no. 7, pp. 1046–1049.
2. Lions, J., The optimal control of distributed systems, *Russ. Math. Surv.*, 1973, vol. 28, no. 4, pp. 13–46.
3. Begis, D. and Glowinski, R., Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés, *Appl. Math. and Optim.*, 1975, vol. 2, no. 2, pp. 130–169.
4. Chenaïs, D., On the existence of a solution in a domain identification problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 1975, no. 52, pp. 189–219.
5. Hlaváček, I. and Nečas, J., Optimization of the domain in elliptic unilateral boundary value problems by finite element method, *Analyse Numérique*, 1982, vol. 16, no. 4, pp. 351–373.
6. Osipov, Yu.S. and Suetov, A.P., A problem of J.-L. Lions, *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 276, no. 2, pp. 288–291.
7. Pironneau, O., *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, New York: Springer-Verlag, 1984.
8. Haslinger, J. and Mäkinen, R.A.E., *Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation*, Philadelphia: SIAM, 2003.
9. Neittaanmaki, P., Sprekels, J., and Tiba, D., *Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications*, New York: Springer, 2006.
10. Burachik, R.S. and Iusem, A.N., *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*, New York: Springer, 2008.
11. Mikhlin, S.G., *Kurs matematicheskoy fiziki* (Mathematical Physics Course), Moscow: Nauka, 1968.
12. Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ СПЕКТРА
ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ,
ЗАМКНУТОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ© С. П. Зубова¹, Е. В. Раецкая²¹Воронежский государственный университет²Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозоваe-mail: ¹spzubova@mail.ru, ²raetskaya@inbox.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024 г., после доработки 18.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для линейной динамической системы приведён метод каскадной декомпозиции построения матрицы обратной связи для решения задачи размещения спектра (управления спектром, назначения полюсов), в процессе реализации которого сформировано новое доказательство известной теоремы о связи полной управляемости динамической системы с существованием матрицы обратной связи. Выявлена вся совокупность произвольных элементов, влияющих на неединственность матрицы. Приведены примеры построения матрицы обратной связи в случаях действительного спектра и при наличии комплексно-сопряжённых собственных чисел, а также в случае кратных собственных значений. Исследована устойчивость заданного спектра при малых возмущениях параметров системы с фиксированной матрицей обратной связи.

Ключевые слова: динамическая система управления, размещение спектра, метод каскадной декомпозиции, матрица обратной связи, устойчивость спектра.

DOI: 10.31857/S0374064124060065, EDN: KWCWHQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор входа (управление); $t \in [t_0, t_k]$.

Задача размещения собственных значений состоит в следующем. На комплексной плоскости задаются произвольно числа μ_j , $j = \overline{1, n}$, замкнутые относительно операции сопряжения. Требуется замкнуть систему (1) обратной связью

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

такой, чтобы спектр $\{\lambda_j\}$ матрицы $A + BK$, т.е. $\sigma(A + BK)$, совпадал с набором $\{\mu_j\}$:

$$\sigma(A + BK) = \{\mu_j\}_{j=1}^n. \quad (3)$$

Эту задачу называют также задачей размещения полюсов, задачей управления спектром [1].

Частным случаем задачи размещения спектра является задача стабилизации программного движения, что особенно актуально при решении практических задач. Задача стабилизации программного движения возникает, например, если для динамической системы рассчитано

программное управление $u_{np}(t)$, под воздействием которого программное состояние $x_{np}(t)$ будет обладать определёнными свойствами $\mathfrak{M}$: двухточечными ($x(t_0) = x_0$, $x(t_k) = x_k$), или многоточечными ($x(t_i) = x_i$), или какими-либо другими свойствами. Однако реальная динамическая система в силу каких-либо обстоятельств не может иметь в момент времени t_0 состояние x_0 . Тогда начальное состояние — это x^* . В таком случае бывает выгоднее рассчитывать не новое управление, а стабилизированное управление $u_{cm}(t)$ для получения стабилизированного состояния $x_{cm}(t)$, удовлетворяющего условию $x_{cm}(t_0) = x^*$ и обладающего свойством

$$\|x_{np}(t) - x_{cm}(t)\| \rightarrow 0 \quad (4)$$

с ростом t . Для системы (1), (2) задача стабилизации состоит в построении управления $v(t) = u_{np}(t) - u_{cm}(t)$, при наличии которого в системе

$$\dot{y} = Ay(t) + Bv(t), \quad (5)$$

$$v(t) = Ky(t) \quad (6)$$

вектор-функция $y(t) = x_{np}(t) - x_{cm}(t)$ с условием

$$y(0) = x_0 - x^* \quad (7)$$

стремится к нулю с ростом t .

Задача (5)–(7) имеет решение $y(t) = e^{t(A+BK)}(x_0 - x^*)$, и если спектр матрицы $A+BK$: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ лежит в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости, то

$$\|y(t)\| = \|x_{np}(t) - x_{cm}(t)\| \leq ce^{-\omega t}, \quad \omega > 0.$$

Скорость сходимости в (4) зависит от назначения $\mu_j = \lambda_j$ в (3).

Задачам назначения спектра и задачам стабилизации движения посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных авторов (см. обзор в [1]).

Приведём следующий результат.

Теорема 1 [2, 3]. *Для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы пара (A, B) была управляемой.*

А именно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n.$$

В статье [1] изложена история доказательств этой теоремы некоторыми авторами.

Практически матрица обратной связи в случае $m=1$ построена с применением формул Басса–Гура и Акерманна и с решением уравнения

$$\det(A+BK-\lambda I) = p_n(\lambda),$$

где $p_n(\lambda)$ — заданный многочлен n -й степени (см., например, [4]).

Численная реализация задачи (1)–(3) в компьютерной среде MATLAB, основанная на методе полного размещения полюсов [5], приведена в [6].

В работе [7] описан метод построения множества матриц обратной связи для заданных A и B в случае, когда $\dim \text{Ker } B = \{0\}$ и пара (A, B) управляемая, для чего использовались жордановы наборы векторов матрицы $(A - \lambda I \ B)$ для каждого $\lambda_j = \mu_j$ и вводились параметризующие матрицы.

Цель настоящей работы — решить поставленную задачу методом каскадной декомпозиции, разработанным в [8–12] для решения широкого круга задач. Преимущество данного

метода состоит в том, что он даёт возможность детального исследования динамической системы, выявления компонент исходных данных, влияющих на свойства изучаемого объекта.

Метод каскадной декомпозиции не требует предварительного установления управляемости динамической системы — управляемость или неуправляемость устанавливаются в процессе декомпозиции. В связи с этим здесь не используется теорема 1, она доказывается в процессе исследования динамической системы при построении матрицы обратной связи.

В отличие от методов в указанных выше работах метод каскадной декомпозиции позволяет выявить *полный* набор свободных и не совсем свободных (удовлетворяющих некоторому условию) постоянных, от которых зависит вид матрицы обратной связи, без каких-либо условий на коэффициент B . Это приводит к построению *полного* множества матриц для конкретной задачи, что весьма важно для построения матрицы обратной связи, например, с меньшим количеством ненулевых компонент или меньшей по норме.

По сравнению с методом, предложенным в [7], решение поставленной задачи методом каскадной декомпозиции проводится с меньшим объёмом вычислительных действий.

В данной работе рассматриваются случаи простого спектра и кратного, действительно и при наличии комплексно-сопряжённых собственных значений. Выявляются условия, при выполнении которых вид матрицы K неединственный или единственный. Приводятся примеры построения K в названных случаях. Исследуется устойчивость назначенного спектра при малых возмущениях параметров динамической системы с фиксированной матрицей обратной связи.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРА

Используется свойство нётеровости [13] отображения $G: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^k$ (отображения и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково):

$$\mathbb{R}^s = \text{Coim } G \dot{+} \text{Ker } G, \quad \mathbb{R}^k = \text{Im } G \dot{+} \text{Coker } G, \quad (8)$$

где $\text{Ker } G$ — ядро (нуль-пространство) G ; $\text{Coker } G$ — дефектное подпространство; $\text{Coim } G$ — прямое дополнение к $\text{Ker } G$ в $\mathbb{R}^s$, $\dot{+}$ — знак прямой суммы.

Сужение $\tilde{G}$ оператора G на $\text{Coim } G$ имеет обратный $\tilde{G}^{-1}: \text{Im } G \rightarrow \text{Coim } G$.

Вводятся проекторы P и Q на $\text{Ker } G$ и $\text{Coker } G$ соответственно.

Оператор $\tilde{G}^{-1}(I - Q)$ называется *полуобратным* [14, с. 164] и обозначается G^- . Здесь и далее I — единичный оператор в соответствующем пространстве.

Далее применяется следующая

Лемма 1 [10–12]. *Соотношение*

$$G\varphi = \psi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^s, \quad \psi \in \mathbb{R}^k, \quad (9)$$

эквивалентно системе

$$Q\psi = 0, \quad (10)$$

$$\varphi = G^-\psi + z, \quad z \in \text{Ker } G. \quad (11)$$

При этом $P\varphi = z$. Условие $Q\psi = 0$ — условие корректности равенства (9).

Заметим, что разложения (8), как и проекторы на подпространства и полуобратный оператор, могут быть записаны в различных формах, однако при этом выражения (10), (11) будут эквивалентными.

Далее исследуется уравнение

$$(A + BK)v = \lambda v \quad (12)$$

относительно вектора $v = v(\lambda)$ и матрицы $K = K(\lambda)$.

Применение леммы 1 к уравнению (12), записанному в виде

$$BKv = (\lambda I - A)v, \quad (13)$$

приводит к эквивалентной системе

$$Q(\lambda I - A)v = 0, \quad (14)$$

$$Kv = B^-(\lambda I - A)v + z^0, \quad z^0 \in \text{Ker } B, \quad (15)$$

где Q — проектор на $\text{Coker } B$.

Преимущество системы (14), (15) по сравнению с уравнением (12) в том, что в (12) неизвестны K и v , в уравнении (14) неизвестен только v , а в (15) — только K , если v найдено из (14).

Задача назначения спектра формулируется так: с помощью уравнения (14) найти n линейно независимых векторов $v_j = v(\lambda_j)$, $j = \overline{1, n}$, отвечающих произвольно заданным значениям $\lambda_j = \mu_j$, и затем с помощью (15) построить матрицу обратной связи K .

3. ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРА $v = v(\lambda)$.

Обозначим $n_0 = \dim \text{Coker } B$.

Возможны три следующих случая.

Случай 0.1. $n = n_0$. Тогда $Q = I$, $B = (0)$, значения λ в (13) не могут быть произвольно заданными при $v \neq 0$, задача назначения спектра не имеет решения. Одновременно и система (1), т.е. $\dot{x} = Ax(t)$, не является управляемой.

Случай 0.2. $n > n_0 = 0$, т.е. $Q = (0)$, B — сюръекция. Условие (14) отсутствует, в качестве v_j можно взять n любых линейно независимых векторов и, подставив их в (15) с $\lambda = \lambda_j = \mu_j$, найти компоненты матрицы K , решив полученную систему.

Одновременно с этим система (1) с сюръективной матрицей B полностью управляемая, поскольку $u(t)$ можно найти непосредственно из (1), подставив в неё произвольную вектор-функцию $x(t)$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую заданным условиям $\mathfrak{M}$. Заметим, что в этом случае

$$\text{rank}(B) = n.$$

Случай 0.3. $n > n_0 > 0$. Здесь исследуем уравнение (14) *методом каскадной декомпозиции*.

1-й шаг декомпозиции. Обозначим Q через Q_0 и представим v в виде $v = (I - Q_0)v + Q_0v$, а Q_0A — в виде $Q_0A = Q_0A(I - Q_0) + Q_0AQ_0$. Введём обозначения

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad A_1 = Q_0A_0Q_0, \quad B_1 = Q_0A_0(I - Q_0), \quad v^1 = (I - Q_0)v, \quad w^1 = Q_0v.$$

Теперь уравнение (14) эквивалентно системе

$$v = v^1 + w^1, \quad (16)$$

$$B_1v^1 = (\lambda I - A_1)w^1, \quad (17)$$

где $B_1: \text{Im } B_0 \rightarrow \text{Coker } B_0$. Из (8) следует

$$\text{Im } B_0 = \text{Coim } B_1 \dot{+} \text{Ker } B_1, \quad \text{Coker } B_0 = \text{Im } B_1 \dot{+} \text{Coker } B_1. \quad (18)$$

Проекторы на $\text{Ker } B_1$ и $\text{Coker } B_1$, отвечающие разложениям (18), обозначим как P_1 и Q_1 соответственно. Введём полуобратный оператор $B_1^- = \tilde{B}_1^{-1}(I - Q_1)$ (здесь I — единичный оператор в $\text{Coker } B_0$, т.е. $I = Q$).

В силу леммы 1 соотношение (17) эквивалентно системе

$$Q_1(\lambda I - A_1)w^1 = 0, \quad (19)$$

$$v^1 = B_1^-(\lambda I - A_1)w^1 + z^1, \quad z^1 \in \text{Ker } B_1. \quad (20)$$

Пусть $n_1 = \dim \text{Coker } B_1$. Возможны три следующих случая.

Случай 1.1. $n > n_0 = n_1$, т.е. $Q_1 = I$, $B_1 = (0)$. Из (17) следует, что $A_1 w^1 = \lambda w^1$. Значения λ не могут быть равными произвольным значениям μ_j при $w^1 \neq 0$ и задача назначения спектра неразрешима.

Система (1) в этом случае не является полностью управляемой [9–11].

Случай 1.2. $n > n_0 > n_1 = 0$, т.е. $Q_1 = (0)$, B_1 — сюръекция. Условие (19) отсутствует, для построения вектора v можно взять произвольно $w^1 = w^1(\lambda) \in \text{Coker } B_1$, $z^1 = z^1(\lambda) \in \text{Ker } B_1$ и по формуле (20) определить $v^1 = v^1(\lambda)$, далее по формуле (16) найти $v = v(\lambda)$. Затем следует перейти к п. 4.

Заметим, что система (1) в случае сюръективности B_1 является полностью управляемой, причём [10–12]

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = n.$$

Случай 1.3. $n > n_0 > n_1 \neq 0$. Применяем метод каскадной декомпозиции далее.

2-й шаг декомпозиции. В равенстве (19) представим w^1 в виде $w^1 = (I - Q_1)w^1 + Q_1 w^1$, $Q_1 A_1$ — в виде $Q_1 A_1 = Q_1 A_1 (I - Q_1) + Q_1 A_1 Q_1$ и обозначим $(I - Q_1)w^1 = v^2$, $Q_1 w^1 = w^2$, $Q_1 A_1 (I - Q_1) = B_2$, $Q_1 A_1 Q_1 = A_2$.

Тогда уравнение (14) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} v &= v^1 + w^1, \\ w^1 &= v^2 + w^2, \\ B_2 v^2 &= (\lambda I - A_2)w^2, \end{aligned}$$

где $B_2: \text{Im } B_1 \rightarrow \text{Coker } B_1$.

В дальнейших исследованиях используется свойство (8) отображения B_2 (см. 1-й шаг декомпозиции).

q-й шаг декомпозиции. Введём операторы

$$B_i = Q_{i-1} A_{i-1} (I - Q_{i-1}), \quad A_i = Q_{i-1} A_{i-1} Q_{i-1}, \quad (21)$$

P_{i-1} и Q_{i-1} — проекторы на $\text{Ker } B_{i-1}$ и $\text{Coker } B_{i-1}$ соответственно, отвечающие разложениям

$$\text{Im } B_{i-2} = \text{Coim } B_{i-1} \dot{+} \text{Ker } B_{i-1}, \quad \text{Coker } B_{i-2} = \text{Im } B_{i-1} \dot{+} \text{Coker } B_{i-1}, \quad (22)$$

и элементы $v^i = (I - Q_{i-1})w^{i-1}$, $w^i = Q_{i-1}w^{i-1}$, $i = \overline{1, q}$.

Пусть $\dim \text{Coker } B_{i-1} = n_{i-1}$, $n > n_0 > n_1 > \dots > n_{q-1} \neq 0$. Равенство (14) эквивалентно системе

$$v = v^1 + w^1, \quad (23)$$

$$w^i = v^{i+1} + w^{i+1}, \quad (24)$$

$$v^{i+1} = B_{i+1}^-(\lambda I - A_{i+1})w^{i+1} + z^{i+1}, \quad z^{i+1} \in \text{Ker } B_{i+1}, \quad i = \overline{0, q-2}, \quad (25)$$

$$B_q v^q = (\lambda I - A_q)w^q. \quad (26)$$

Далее возможны лишь два следующих случая.

Случай q.1. Существует $q \in \mathbb{N}$ такое, что $n > n_0 > \dots > n_{q-1} = n_q > 0$. Имеем $B_q = (0)$, равенство (26) невыполнимо при $\lambda = \lambda_j$, равным n произвольно заданным значениям μ_j , если $w^q \neq 9$. Задача назначения спектра неразрешима. Система (1) при $B_q = (0)$ не является полностью управляемой [10–12].

Случай q.2. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n > n_0 > \dots > n_{p-1} > n_p = 0$. Отображение B_p — сюръекция, и из (26) с $q = p$ для любого $w^p \in \text{Coker } B_{p-1}$ находится v^p с точностью до произвольного слагаемого $z^p \in \text{Ker } B_p$ (формула (25) с $i = p - 1$). Далее по формуле (24) с $i = p - 1$ строится w^{p-1} . Затем по формуле (25) с $i = p - 2$ находится v^{p-1} . Формула (24) с $i = p - 2$ даёт w^{p-2} и так далее. Наконец, из (23) определяется вектор $v = v(\lambda)$, являющийся решением уравнения (14).

4. ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Для решения уравнения (15) относительно неизвестных компонентов матрицы K , т.е. для построения матрицы обратной связи, достаточно иметь n линейно независимых векторов $v_j = v(\lambda_j)$ с λ_j , равными произвольно заданным значениям μ_j .

Случай q.1. Как показано в п. 3, вектор $v(\lambda)$, удовлетворяющий уравнению (12), имеет нулевую часть $w^q(\lambda) \in \text{Coker } B_{q-1}$, т.е. $v(\lambda)$ принадлежит подпространству $\mathbb{R}^n \setminus \text{Coker } B_{q-1}$, при этом $\dim(\mathbb{R}^n \setminus \text{Coker } B_{q-1}) = n - n_{q-1} < n$, и в этом подпространстве может быть не более $n - n_{q-1}$ линейно независимых векторов $v(\lambda)$.

Случай q.2. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюръекция.

Покажем, что для любого набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ существует вектор $v(\lambda) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий уравнению (12), такой, что векторы $v(\lambda_j)$ линейно независимы при $\lambda_j = \mu_j$, $j = \overline{1, n}$.

Для упрощения рассмотрим случай $p = 2$. Тогда $\mathbb{R}^n = \text{Im } B \dot{+} \text{Im } B_1 \dot{+} \text{Coker } B_1$,

$$v(\lambda) = v^1(\lambda) + w^1(\lambda) = v^1(\lambda) + v^2(\lambda) + w^2(\lambda),$$

где $v^1(\lambda) \in \text{Im } B$, $v^2(\lambda) \in \text{Im } B_1$, $w^2(\lambda) \in \text{Coker } B_1$ и $\dim \text{Im } B = n - n_0$, $\dim \text{Im } B_1 = n_0 - n_1$, $\dim \text{Coker } B_1 = n_1$.

Рассмотрим равенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v(\lambda_j) = 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad (27)$$

эквивалентное системе

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v^1(\lambda_j) = 0, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v^2(\lambda_j) = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j w^2(\lambda_j) = 0. \quad (30)$$

Здесь $w^2(\lambda_j)$ — произвольно выбираемые элементы. Покажем, как их можно выбрать, чтобы векторы v_j были линейно независимыми.

Равенство (28) преобразуем с помощью формулы (25) с $i = 1$:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j B_2^-(\lambda_j I - A_2) w^2(\lambda_j) + \sum_{j=1}^n \alpha_j z^2(\lambda_j) = 0, \quad z^2 \in \text{Ker } B_2,$$

откуда имеем

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j z^2(\lambda_j) = 0, \quad (31)$$

$$B_2^- \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j w^2(\lambda_j) - B_2^- A_2 \sum_{j=1}^n \alpha_j w^2(\lambda_j) = 0. \quad (32)$$

Второе слагаемое в (32) равно нулю в силу (30) и тогда

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j w^2(\lambda_j) = 0. \quad (33)$$

Запишем (29) в виде

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \left(B_1^-(\lambda_j I - A_1) w^2(\lambda_j) + z^1(\lambda_j) + B_1^-(\lambda_j I - A_1) (B_2^-(\lambda_j I - A_2) w^2(\lambda_j) + \tau^2(\lambda_j)) \right) = 0$$

с произвольными $z^1(\lambda_j) \in \text{Ker } B_1$, $\tau^2(\lambda_j) \in \text{Ker } B_2$, откуда и из (30), (31), (33) получим

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j z^1(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau^2(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^2 w^2(\lambda_j) = 0.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k w^2(\lambda_j) &= 0, \quad k = 0, 1, 2; \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j z^1(\lambda_j) = 0; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j z^2(\lambda_j) &= 0, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau^2(\lambda_j) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь n скалярных равенств, поскольку вектор $w^2(\lambda_j)$ имеет размерность n_1 , $z^1(\lambda_j)$ — размерность $n - 2n_0 + n_1$, $z^2(\lambda_j)$ и $\tau^2(\lambda_j)$ — размерность $n_0 - 2n_1$. Можно взять $w^2(\lambda_j)$, $z^1(\lambda_j)$, $z^2(\lambda_j)$ и $\tau^2(\lambda_j)$ такими, что определитель при λ_j в системе (34) будет определителем Вандермонда $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, например, компоненты названных векторов положить равными λ_j в соответствующих степенях. Тогда $\alpha_j = 0$, $j = \bar{1}, \bar{n}$, и из (27) следует линейная независимость векторов $v(\lambda_j)$.

Аналогично получается линейная независимость $v(\lambda_j)$ в случае $p > 2$, если $v(\lambda)$ — решение уравнения (12), $\lambda_j \in \mathbb{C}$ — произвольно заданные не кратные числа.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 2. Для произвольного набора простых чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ существует n линейно независимых векторов $v(\lambda_j)$, удовлетворяющих уравнению (14) с $\lambda_j = \mu_j$, тогда и только тогда, когда существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюръекция.

5. ФОРМИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ ЧИСЕЛ $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Пусть, например, μ_1 имеет кратность k , остальные числа $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_n$ простые. Вектор $v = v(\lambda)$ формируется так, чтобы $v(\lambda_j), j = 1, k+1, \dots, n$, были линейно независимыми (как это описано в п. 4), а векторы $\tilde{v}_j, j = 2, \overline{k}$, находятся из уравнения

$$Q((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) = 0, \quad j = \overline{2, k}. \quad (35)$$

Равенство (35) преобразуется с помощью формул (21) и замены $(I - Q)\tilde{v}_j = \tilde{v}_j^1, Q\tilde{v}_j = \tilde{w}_j^1$ в систему

$$\tilde{v}_j = \tilde{v}_j^1 + \tilde{w}_j^1, \quad B_1 \tilde{v}_j^1 = (\lambda_1 I - A_1)\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_{j-1}^1,$$

откуда $\tilde{v}_j^1 = B_1^-((\lambda_1 I - A_1)\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_{j-1}^1) + r_j^1, r_j^1 \in \text{Ker } B_1$, и в силу леммы 1

$$Q_1((\lambda_1 I - A_1)\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_{j-1}^1) = 0.$$

Последнее равенство распадается на соотношения в подпространствах, как это описано в п. 3, и в результате каскадной декомпозиции соотношения (35) приходим к эквивалентной ему системе

$$\tilde{v}_j = \tilde{v}_j^1 + \tilde{w}_j^1, \quad (36)$$

$$\tilde{w}_j^i = \tilde{v}_j^{i+1} + \tilde{w}_j^{i+1}, \quad (37)$$

$$\tilde{v}_j^{i+1} = B_{i+1}^-((\lambda_1 I - A_{i+1})\tilde{w}_j^{i+1} + \tilde{w}_{j-1}^{i+1}) + r_j^{i+1}, \quad r_j^{i+1} \in \text{Ker } B_{i+1}, \quad i = \overline{0, q-2}, \quad (38)$$

$$B_q \tilde{v}_j^q = (\lambda_1 I - A_q)\tilde{w}_j^q + \tilde{w}_{j-1}^q. \quad (39)$$

Случай q.1. Из результатов п. 4 при $B_q = (0)$ следует $\tilde{w}_1^q = 0$. Тогда из (39) с $i = 2$ получаем $\tilde{w}_2^q = 0$, далее из (39) с $i = 3$ имеем $\tilde{w}_3^q = 0$ и т.д., т.е. в этом случае все векторы $\tilde{v}_j, j = \overline{2, k}$, и $v(\lambda_j), j = 1, k+1, \dots, n$, лежат в подпространстве $\mathbb{R}^n \setminus \text{Coker } B_{q-1}$, размерность которого меньше n , и не существует системы из n линейно независимых векторов $v(\lambda)$, удовлетворяющих соотношениям (35) и (14).

Случай q.2. По формулам (23)–(25) строятся векторы $v(\lambda_1), v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$, а по (36)–(38) — векторы $\tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \dots, \tilde{v}_k$ в силу представления

$$\mathbb{R}^n = \text{Coim } B_1 \dot{+} \text{Ker } B_1 \dot{+} \text{Coim } B_2 \dot{+} \text{Ker } B_2 \dot{+} \dots \dot{+} \text{Coim } B_p \dot{+} \text{Ker } B_p \dot{+} \text{Coker } B_{p-1}, \quad (40)$$

которое следует из (18) и (22).

Произвольные линейно независимые элементы w^p подпространства $\text{Coker } B_{p-1}$ распределяются между векторами $\tilde{v}_1 = v(\lambda_1), v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$ так, что хотя бы один элемент $\tilde{w}_1^p$ участвует в формуле для построения $\tilde{v}_1$, и полагаем $\tilde{w}_2^p = \tilde{w}_3^p = \dots = \tilde{w}_k^p = 0$.

Линейно независимые элементы $r_j^i, i = \overline{1, p}, j = \overline{2, k}$, берём равными нулю, а линейно независимые элементы z^i для $v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$ следует распределить так, чтобы каждый вектор $v(\lambda_{k+1}), \dots, v(\lambda_n)$ содержал хотя бы один элемент из $\text{Ker } B_i$ для некоторого i , или элемент w^p из $\text{Coker } B_{p-1}$. Соотношение

$$\alpha_1 v(\lambda_1) + \sum_{j=2}^k \alpha_j \tilde{v}_j + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j v(\lambda_j) = 0, \quad (41)$$

где α_1, α_j — векторные неопределённые коэффициенты, рассматривается в подпространствах разложения (40).

В подпространстве $\text{Coker } B_{p-1}$ — это линейная комбинация линейно независимых векторов w^p , поэтому соответствующие коэффициенты при них равны нулю. В (41) остаются векторы $\tilde{v}_j$, $j = \overline{2, k}$, и те $v(\lambda_j)$, в которых элемент из $\text{Coker } B_{p-1}$ нулевой.

В подпространствах $\text{Ker } B_i$ $i = \overline{1, p}$, все векторы взяты линейно независимыми, следовательно, соответствующие компоненты векторов α_j равны нулю.

В $\text{Coim } B_p$ в левой части соотношения (41) стоят лишь элементы $\tilde{v}_2^p = B_p^- w_1^p$ с неопределёнными коэффициентами, которые равны нулю в силу линейной независимости элементов, входящих в w_1^p .

В $\text{Coim } B_{p-1}$ в левой части соотношения (41) лишь линейная комбинация линейно независимых векторов $\tilde{v}_3^{p-1} = B_{p-1}^- B_p^- w_1^p$ и т.д.

В $\text{Coim } B_{p-k+2}$ лишь линейная комбинация элементов $\tilde{v}_k^{p-k+2} = B_{p-k+2}^- B_{p-k+3}^- \dots B_p^- w_1^p$, следовательно, все $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, и построенная система векторов является линейно независимой.

На основании результатов пп. 3–5 справедлива

Лемма 3. Для произвольного набора чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ существует n линейно независимых векторов $v(\lambda)$, удовлетворяющих уравнению (12) с $\lambda = \mu_j$ в случае простых чисел μ_j или уравнениям $Q(\lambda_s \tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1} - A \tilde{v}_j) = 0$, $j = \overline{s+1, s+r}$, если $\lambda_s = \mu_s$ с кратностью r , в том и только в том случае, когда существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюръекция.

6. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

6.1. СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В НАБОРЕ $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Для построения матрицы $K = (k_{ij}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в уравнение (15) подставляются векторы $v = v(\lambda_j)$ с $\lambda_j = \mu_j$, построенные в п. 4, и значения $\lambda = \lambda_j = \mu_j$ для каждого $j = \overline{1, n}$. В полученной системе выделяются подсистемы для определения элементов каждой из строк матрицы K :

$$V k_i = F_i + r_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (42)$$

где

$$V = (v_{js}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

v_{js} — компоненты векторов $v(\lambda_j) = (v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jn})$; $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in})$, k_{is} — компоненты i -й строки матрицы K .

Обозначив

$$B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) = (f_1(\lambda_j), f_2(\lambda_j), \dots, f_m(\lambda_j)), \quad j = \overline{1, n},$$

будем иметь

$$F_i = (f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), \dots, f_i(\lambda_n)).$$

Векторы r_i формируются следующим образом: берутся произвольные векторы $z_j \in \text{Ker } B$, $z_j = (z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{js})$, $s = m - n + n_0$, $j = \overline{1, n}$, тогда $r_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{si})$.

Случай q.1. Векторы $v(\lambda_j)$ имеют размерность меньше n (см. случай q.1 в п. 5), поэтому $\det V = 0$, следовательно, уравнение (42) имеет решение k_i в том и только в том случае, когда $\tilde{Q}(F_i + r_i) = 0$, где $\tilde{Q}$ — проектор на $\text{Coker } V$ (лемма 1). Но $\tilde{Q}(F_i + r_i) = 0$ при каждом i — это определённая функциональная зависимость между значениями λ_j , что противоречит произвольности значений μ_j в задаваемом наборе $\{\mu_j\}_{j=1}^n$. В этом случае матрица обратной связи построена быть не может.

Случай q.2. Матрица V в (42) состоит из компонентов линейно независимых векторов $v(\lambda_j)$, $j = \overline{1, n}$, построенных в п. 4, следовательно, $\det V \neq 0$ и из (42) находятся компоненты матрицы K . При этом совокупность соотношений (14) и (15), используемых для построения

$v(\lambda_j)$ и нахождения компонентов матрицы K , эквивалентна в силу леммы 1 равенству (12). Таким образом, построенная матрица K и есть матрица обратной связи, такая что спектр матрицы $A+BK$ совпадает с произвольно заданным набором простых чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^n$, т.е. справедлива следующая

Лемма 4. Для произвольного набора простых чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ задача (1)–(3) имеет решение тогда и только тогда, когда существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюръекция.

6.2. СЛУЧАЙ НАЛИЧИЯ КРАТНЫХ ЧИСЕЛ В $\{\mu_j\}_{j=1}^n$

Пусть μ_1 имеет кратность k , остальные $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_n$ простые. Значения $\lambda = \lambda_j = \mu_j$ и $v = v(\lambda_j)$ с $\lambda_j = \mu_j$ при $j = 1, k+1, \dots, n$ и $v = \tilde{v}_j$ с $\lambda_j = \mu_j$ при $j = \overline{2, k}$, построенные в п. 5, подставим в соотношения (15) и (35):

$$\begin{aligned} Kv(\lambda_j) &= B^-(\lambda_1 I - A)v(\lambda_j) + z_j^0, \quad z_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = 1, k+1, \dots, n, \\ K\tilde{v}_j &= B^-((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) + r_j^0, \quad r_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = \overline{2, k}. \end{aligned} \quad (43)$$

Полученные соотношения представляют собой m систем вида

$$Vk_i = \Phi_i + r_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где V , k_i и r_i описаны в п. 6.1. Далее

$$\begin{aligned} B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) &= (f_1(\lambda_j), f_2(\lambda_j), \dots, f_m(\lambda_j)), \quad j = 1, k+1, \dots, n, \\ B^-((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) &= (\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \dots, \varphi_{jm}), \quad j = \overline{2, k}, \\ \Phi_i &= (f_i(\lambda_1), \varphi_{2i}(\lambda_1), \varphi_{3i}(\lambda_1), \dots, \varphi_{ki}(\lambda_1), f_i(\lambda_{k+1}), f_i(\lambda_{k+2}), \dots, f_i(\lambda_n)). \end{aligned}$$

Случай q.1. Система векторов, построенная в случае q.1 в п. 5, не может быть линейно независимой, следовательно, $\det V = 0$ и уравнение (42) имеет решение k_i в том и только том случае, когда есть определённая функциональная зависимость между значениями λ_j , что противоречит произвольности значений μ_j в задаваемом наборе $\{\mu_j\}_{j=1}^n$. В этом случае матрица обратной связи построена быть не может.

Случай q.2. Система векторов, построенная в случае q.2 в п. 5, линейно независимая, следовательно, $\det V \neq 0$ и уравнение (42) имеет решение k_i , тем самым определяя компоненты матрицы K . При этом $v(\lambda_j)$ и K удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1 I - A)v(\lambda_j) &= 0, \quad j = 1, k+1, \dots, n, \\ Q((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) &= 0, \quad j = \overline{2, k}, \\ Kv(\lambda_j) &= B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) + r_j^0, \quad r_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = 1, k+1, \dots, n, \\ K\tilde{v}_j &= B^-((\lambda_1 I - A)\tilde{v}_j + \tilde{v}_{j-1}) + r_j^0, \quad r_j^0 \in \text{Ker } B, \quad j = \overline{2, k}. \end{aligned}$$

Совокупность этих соотношений эквивалентна в силу леммы 1 равенствам

$$\begin{aligned} (A+BK)v(\lambda_j) &= \lambda_j v(\lambda_j), \quad j = 1, k+1, \dots, n, \\ (A+BK - \lambda_1 I)\tilde{v}_j &= \tilde{v}_{j-1}, \quad j = \overline{2, k}, \end{aligned}$$

т.е. K является матрицей обратной связи такой, что спектр матрицы $A+BK$ совпадает с заданным набором произвольных чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^n$, где μ_1 имеет кратность k , остальные μ_j — простые; векторы $v(\lambda_j)$, $j = 1, k+1, \dots, n$, — собственные элементы матрицы $A+BK$, отвечающие этим числам, $\tilde{v}_j$, $j = \overline{2, k}$, — присоединённые к $v(\lambda_1)$ элементы.

Тем самым доказана

Теорема 2. Задача (1)–(3) имеет решение тогда и только тогда, когда существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюръекция.

Известен следующий результат.

Теорема 3 [10–12]. Система (1) является полностью управляемой в том и только в том случае, когда существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюръекция.

При этом

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^p B \end{pmatrix} = n. \quad (44)$$

Из теорем 2, 3 следует справедливость теоремы 1. Таким образом, получено новое доказательство теоремы 1.

7. О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Если хотя бы одно из множеств $\text{Ker } B_i$, $i = \overline{0, p}$, состоит не только из нулевого элемента, то векторы v_j определяются неединственным образом, и, следовательно, вид матрицы K в этом случае не единственен. Ниже приведены подтверждающие это примеры. Неединственность может быть и за счёт выбора произвольного элемента $w^p \in \text{Coker } B_{p-1}$ (пример 1).

Однако матрица K может быть и единственной, например, если $\dim \text{Coker } B_{p-1} = 1$ и $\text{Ker } B_i = 0$, $i = \overline{0, p}$ (пример 2). Заметим, чем выше кратность заданного μ_j , тем больше произвольных параметров, входящих в компоненты матрицы K , что подтверждает пример 3.

Пример 1. В книге [15, с. 170] приведены динамическая модель и схема работы многокамерной нагревательной печи. Рассмотрим случай двух печей и трёх камер, т.е. систему (1), где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u = (u_1, u_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}, \quad 0 < a < \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для произвольно заданных чисел μ_1, μ_2, μ_3 требуется построить матрицу K такую, чтобы спектр $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $A + BK$ совпадал со значениями μ_1, μ_2, μ_3 , для чего уравнение $(A + BK)v = \lambda v$ расщепляется на два уравнения (14) и (15):

$$Q(\lambda I - A)v = 0, \quad (45)$$

$$Kv = B^-(\lambda I - A)v, \quad (46)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^- = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(матрицы Q и B^- можно записать и иначе, однако соотношения (45), (46) будут эквивалентными при любых видах записей).

В (46) отсутствует элемент $z^0 \in \text{Ker } B$, поскольку в этом примере $\text{Ker } B = \{0\}$.

Построим вектор $v = v(\lambda)$. Имеем

$$v^1 = (I - Q)v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}, \quad w^1 = Qv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = QA(I - Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 2a & -2a \end{pmatrix}, \quad A_1 = QAQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & 4a & -2a \end{pmatrix}.$$

Уравнение (17) представим в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -av_1 + 2av_2 + 2av_1 - 4av_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2a & -4a & 2a + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 \end{pmatrix},$$

тогда из последней строки следует равенство

$$av_1 - 2av_2 = (2a + \lambda)(v_1 - 2v_2 + v_3). \quad (47)$$

Поскольку $\text{rank}(B \ AB) = 3$, то $p = 1$, следовательно, оператор B_1 в (17) сюръективен, $Q_1 = 0$. В формуле (20) предлагалось взять произвольные элементы w^1 и $z^1 \in \text{Ker } B_1$ и построить v^1 , затем найти v как сумму $v^1 + w^1$.

Однако элемент w^1 — это сомножитель при λ в (20), сомножитель при λ в (47) — это $v_1 - 2v_2 + v_3$, поэтому полагаем

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = c, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (48)$$

Тогда из (47) следует

$$av_1 - 2av_2 = (2a + \lambda)c. \quad (49)$$

В системе (48), (49) можно взять произвольно $v_1 = d$, $d \in \mathbb{C}$, тогда $v_2 = d/2 - c - \lambda c/(2a)$, $v_3 = -\lambda c/a - c$. Чтобы векторы $v(\lambda_1)$, $v(\lambda_2)$, $v(\lambda_3)$ были линейно независимыми при разных λ_1 , λ_2 , λ_3 , полагаем $d = 2\lambda^2$, $c = -2a$, тогда

$$v(\lambda) = (2\lambda^2, 2a + \lambda + \lambda^2, 2a + 2\lambda). \quad (50)$$

Построим вектор $v = v(\lambda)$ теперь в соответствии с теорией. Разложения (18) следуют из равенств

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 1/2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2) \in \text{Im } B$, $(0, -1/2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2) \in \text{Coim } B_1$, $(x_1, 1/2x_1, 0) \in \text{Ker } B_1$, $(0, 0, y) \in \text{Im } B_1$, $\{(0, 0, 0)\} = \text{Coker } B_1$.

Отсюда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2a \\ 0 & 0 & -1/a \end{pmatrix}.$$

Равенство (20) можно записать как

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2a(\lambda(v_1 - 2v_2 + v_3) + 2a(v_1 - 2v_2 + v_3)) \\ -1/a(\lambda(v_1 - 2v_2 + v_3) + 2a(v_1 - 2v_2 + v_3)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ 1/2v_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где v_1 — произвольная компонента. Далее берутся произвольно $w^1 = v_1 - 2v_2 + v_3 = c$, $v_1 = d$, $c, d \in \mathbb{C}$, и из третьей строки получаем те же значения v_1 , v_2 , v_3 , что и в (50).

В случае различных μ_j при $\lambda_j = \mu_j$ получаем три линейно независимых вектора $v(\lambda_1)$, $v(\lambda_2)$, $v(\lambda_3)$, где $v(\lambda)$ имеет вид (50).

В случае кратных значений $\{\mu_j\}_{j=1}^3$ пусть $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$. Векторы $v(\lambda_1)$ и $v(\lambda_3)$ построены выше, а присоединённый к $v(\lambda_1)$ вектор $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ находится из уравнения (35):

$$Q((\lambda_1 I - A)\tilde{v} + v(\lambda_1)) = 0,$$

т.е. из уравнения

$$a\tilde{v}_1 - 2a\tilde{v}_2 + 2a\tilde{v}_3 = -\lambda(\tilde{v}_1 - 2\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_3) - 2a.$$

Полагаем

$$\tilde{v}_1 - 2\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_3 = c, \quad \tilde{v}_1 = d, \quad c, d \in \mathbb{C},$$

тогда

$$a(\tilde{v}_1 - 2\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_3 + 2) = -\lambda c.$$

Из последних двух соотношений при тех же значениях c и d , что и при построении $v(\lambda)$, получаем

$$\tilde{v} = \tilde{v}(\lambda_1) = (2\lambda_1^2, 1 + 2a + \lambda_1 + \lambda_1^2, 2 + 2a + 2\lambda_1).$$

Векторы $v(\lambda_1)$, $\tilde{v}(\lambda_1)$, $v(\lambda_3)$ линейно независимые.

Построим матрицу $K = K(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

В случае различных μ_j из (50) имеем три линейно независимых вектора $v(\lambda_j)$ с компонентами $v_1(\lambda_j) = 2\lambda_j^2$, $v_2(\lambda_j) = 2a + \lambda_j + \lambda_j^2$, $v_3(\lambda_j) = 2a + 2\lambda_j$, $j = 1, 2, 3$. Подставляем $\lambda = \lambda_j$ и $v_i(\lambda_j)$ в (46) для каждого j :

$$\begin{aligned} k_{11}v_1(\lambda_j) + k_{12}v_2(\lambda_j) + k_{13}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)v_1(\lambda_j), \\ k_{21}v_1(\lambda_j) + k_{22}v_2(\lambda_j) + k_{23}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)(-v_1(\lambda_j) + v_2(\lambda_j)). \end{aligned} \quad (51)$$

Система, составленная из первых строк в (51) при каждом j и $\lambda_j = \mu_j$

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_1)k_{11} + v_2(\lambda_1)k_{12} + v_3(\lambda_1)k_{13} &= 3(\lambda_1 + a)v_1(\lambda_1), \\ v_1(\lambda_2)k_{11} + v_2(\lambda_2)k_{12} + v_3(\lambda_2)k_{13} &= 3(\lambda_2 + a)v_1(\lambda_2), \\ v_1(\lambda_3)k_{11} + v_2(\lambda_3)k_{12} + v_3(\lambda_3)k_{13} &= 3(\lambda_3 + a)v_1(\lambda_3), \end{aligned}$$

даёт значения k_{1s} , $s = 1, 2, 3$.

Аналогично система, составленная из вторых строк в (51) при $j = 1, 2, 3$, даёт значения k_{2s} . Таким образом находятся все компоненты матрицы K .

В случае $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$ подставим $v(\lambda_1)$ и $v(\lambda_3)$ в (51), а $\tilde{v}(\lambda_1)$ — в (44), в результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} k_{11}v_1(\lambda_j) + k_{12}v_2(\lambda_j) + k_{13}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)v_1(\lambda_j), \\ k_{21}v_1(\lambda_j) + k_{22}v_2(\lambda_j) + k_{23}v_3(\lambda_j) &= 3(\lambda_j + a)(-v_1(\lambda_j) + v_2(\lambda_j)), \quad j = 1, 3, \\ k_{11}\tilde{v}_1(\lambda_1) + k_{12}\tilde{v}_2(\lambda_1) + k_{13}\tilde{v}_3(\lambda_1) &= 3(\lambda_1 + a)\tilde{v}_1(\lambda_1) + v_1(\lambda_1), \\ k_{21}\tilde{v}_1(\lambda_1) + k_{22}\tilde{v}_2(\lambda_1) + k_{23}\tilde{v}_3(\lambda_1) &= 3(\lambda_1 + a)(-\tilde{v}_1(\lambda_1) + \tilde{v}_2(\lambda_1) - v_1(\lambda_1) + v_2(\lambda_1)). \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь первые соотношения с $j = 1, 3$ и третьи образуют систему

$$\begin{aligned} k_{11}v_1(\lambda_1) + k_{12}v_2(\lambda_1) + k_{13}v_3(\lambda_1) &= 3(\lambda_1 + a)v_1(\lambda_1), \\ k_{11}v_1(\lambda_3) + k_{12}v_2(\lambda_3) + k_{13}v_3(\lambda_3) &= 3(\lambda_3 + a)v_1(\lambda_3), \\ k_{11}\tilde{v}_1(\lambda_1) + k_{12}\tilde{v}_2(\lambda_1) + k_{13}\tilde{v}_3(\lambda_1) &= 3((\lambda_1 + a)\tilde{v}_1(\lambda_1) + v_1(\lambda_1)), \end{aligned}$$

откуда находятся компоненты k_{11} , k_{12} , k_{11} матрицы K . Решение остальных уравнений в (52) даёт компоненты k_{21} , k_{22} , k_{21} .

Возможны частные случаи.

1. Если $\{\mu_j\}_{j=1}^3 = \{-1, -1+i, -1-i\}$ и $v(\lambda) = (2\lambda^2, 2a + \lambda + \lambda^2, 2a + 2\lambda)$, то матрица K , построенная с помощью (51), имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} -21+3a+6/a & 24-12/a & -24+6/a \\ 12-3/a & -3a-12+6/a & 6a+12-3/a \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что $\det(A+BK-\lambda I) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$.

2. Если при тех же значениях μ_j взять в системе (48), (49) значения $v_1 = d = 2a$, $c = 2a\lambda$, то $v(\lambda) = (2a, a - 2a\lambda - \lambda^2, -2a\lambda - 2\lambda^2)$ и

$$K = \begin{pmatrix} 3+3a & -6 & 3 \\ -6+9/a & 12-3a-12/a & -21/2+6a+6/a \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что $\det(A+BK-\lambda I) = (\lambda+1)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$.

Случаи 1 и 2 подтверждают неединственность вида матрицы обратной связи K за счёт выбора элементов $z^1 \in \text{Ker } B_1$ и $w^1 \in \text{Coker } B$.

3. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = -1$, $\mu_3 = -2$. Если $v(\lambda_j) = (2\lambda_j^2, 2a + \lambda_j + \lambda_j^2, 2a + 2\lambda_j)$, $j = 1, 3$, то присоединённый к $v(\lambda_1)$ вектор $\tilde{v}(\lambda_1) = (2\lambda_1^2, 1 + 2a + \lambda_1 + \lambda_1^2, 2 + 2a + 2\lambda_1)$ и

$$K = \begin{pmatrix} -3+3a-6/a & -6+12/a & 6-6/a \\ -1+5/a & 9-3a-10/a & -9+6a+5/a \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если формально положить $a = 1$, то $\{-1, -1, -2\}$ — это спектр матрицы A , и $K = (0)$ — ещё один вид матрицы K .

Пример 2. Случай единственности матрицы K . Если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$, и поскольку $\text{rank}(B \ AB \ A^2B) = 3$, то $p = 2$. Запишем (15) как

$$k_1 v_1(\lambda) + k_2 v_2(\lambda) + k_3 v_3(\lambda) = (\lambda+1)v_1(\lambda). \quad (53)$$

Формулы (20) и (25) при $q = 2$ примут вид

$$v_1(\lambda) = \lambda(v_1(\lambda) - v_2(\lambda)/2) + 2v_1(\lambda) - v_2(\lambda), \quad (54)$$

$$2v_1(\lambda) - v_2(\lambda) = \lambda(v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda)) + 3(v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda)). \quad (55)$$

Элемент $w^2(\lambda) = v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda)$ — произвольный. Полагаем

$$v_1(\lambda) - v_2(\lambda) + v_3(\lambda) = c, \quad (56)$$

тогда из (55) следует равенство

$$2v_1(\lambda) - v_2(\lambda) = c(\lambda+3), \quad (57)$$

из (54) —

$$v_1(\lambda) = \frac{c}{2}(\lambda+2)(\lambda+3),$$

из (57) —

$$v_2(\lambda) = c(\lambda+1)(\lambda+3),$$

из (56) —

$$v_3(\lambda) = \frac{c}{2}(\lambda+1)(\lambda+2).$$

Таким образом, нашли вектор

$$v(\lambda) = \frac{c}{2}((\lambda+2)(\lambda+3), 2(\lambda+1)(\lambda+3), (\lambda+1)(\lambda+2)).$$

При заданных значениях $\lambda_j = \mu_j$, $j = 1, 2, 3$, где μ_j различны, компоненты матрицы K находятся из (53) единственным образом.

Пример 3. В работе [6] для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и 4-кратного $\lambda = -1$ построена матрица K одного вида такая, что $\det(A - BK + I) = 0$.

Рассмотренным в настоящей статье методом для этой задачи строится матрица $K = K(c_1, c_2, \dots, c_8)$, зависящая от восьми произвольных параметров, связанных лишь условием

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_5 & c_6 & c_3 & c_4 \\ c_7 & c_8 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (58)$$

Для этого из (14) и (35) находятся векторы $v(\lambda) = \tilde{v}_1(\lambda)$ и $\tilde{v}_j(\lambda)$:

$$\tilde{v}_j(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{2j-1} \\ c_{2j} \\ c_{2j-3} + \lambda c_{2j-1} \\ c_{2j-2} + \lambda c_{2j} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 4}$$

($c_k = 0$ при $k \leq 0$). При выполнении условия (58) эти векторы линейно независимы.

В уравнениях (43) относительно компонент матрицы K формируются две системы:

$$V \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5c_2 + \lambda^2 c_1 \\ 5c_4 + 2\lambda c_1 + \lambda^2 c_3 \\ c_1 + 5c_6 + 2\lambda c_3 + \lambda^2 c_5 \\ c_3 + 5c_8 + 2\lambda c_5 + \lambda^2 c_7 \end{pmatrix},$$

$$V \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7c_1 + \lambda^2 c_2 \\ 7c_3 + 2\lambda c_2 + \lambda^2 c_4 \\ c_2 + 7c_5 + 2\lambda c_4 + \lambda^2 c_6 \\ c_4 + 7c_7 + 2\lambda c_5 + 2\lambda^2 c_6 + \lambda^2 c_8 \end{pmatrix}.$$

Матрица V составлена из компонент векторов $\tilde{v}_j(\lambda)$, её определитель Δ приведён в (58).

Таким образом строится $K = (k_{ij})$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 4}$.

Векторы $\tilde{v}_j(\lambda)$ при $j = \overline{1, 4}$ образуют для $A + BK$ жорданову цепочку, отвечающую собственному числу -1 .

В частности, если c_i таковы: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, $c_6 = -1$, $c_7 = 1$, $c_8 = 0$, то

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для сравнения: если λ_j — различные (не кратные), то вектор $v(\lambda)$, найденный из (14), таков: $v(\lambda) = (c_1, c_2, \lambda c_1, \lambda c_2)$, и если $c_1 = a$, $c_2 = b\lambda^2$, то $v(\lambda_j)$ линейно независимые, $j = \overline{1, 4}$. Определитель Δ матрицы V , составленной из компонент векторов $v(\lambda_j)$, равен $a^2 b^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, где $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ — определитель Вандермонда.

Компоненты матрицы K находятся из уравнений

$$V \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \end{pmatrix} = (a + 5b) \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_4^2 \end{pmatrix}, \quad V \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + b\lambda_1^4 \\ 7a + b\lambda_2^4 \\ 7a + b\lambda_3^4 \\ 7a + b\lambda_4^4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом построенная матрица K зависит от двух параметров a и b , однако есть возможность варьировать параметры c_1 и c_2 так, чтобы $v(\lambda_1)$, $v(\lambda_2)$, $v(\lambda_3)$, $v(\lambda_4)$ были линейно независимыми.

В этом примере при 4-кратном λ матрица обратной связи содержит восемь почти произвольных (связанных условием (58)) параметров, а при различных λ лишь четыре.

8. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СПЕКТРА ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ФИКСИРОВАННОЙ МАТРИЦЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Пусть для динамической системы (1) и заданного набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ построена матрица обратной связи K , т.е. существуют векторы $v_j = v_j(\lambda_j) \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$(A + BK)v_j = \lambda_j v_j, \quad \lambda_j = \mu_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Матрицы A и B возмущаются с помощью матриц εC и εG соответственно, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, и система (1) принимает вид

$$\dot{\tilde{x}} = (A + \varepsilon C)\tilde{x} + (B + \varepsilon G)\tilde{u},$$

$\tilde{x} = \tilde{x}(t, \varepsilon)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(t, \varepsilon)$. Вводится обратная связь $\tilde{u} = K\tilde{x}$, теперь

$$((A + \varepsilon C) + (B + \varepsilon G)K)\tilde{v}_j = \tilde{\lambda}_j \tilde{v}_j, \quad (59)$$

$$\tilde{v}_j = \tilde{v}_j(\lambda_j, \varepsilon), \quad \tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j(\varepsilon).$$

Исследуем поведение $\tilde{v}_j$ и $\tilde{\lambda}_j$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Равенство (59) запишем в виде

$$((A + BK) + \varepsilon(C + GK))\tilde{v}_j = \tilde{\lambda}_j \tilde{v}_j. \quad (60)$$

Из результатов теории ветвления собственных значений и собственных элементов фредгольмовских операторов [16, гл. IX, § 32] в силу фредгольмовости $A + BK$ и ограниченности

$C + GK$ следует, что при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ существует ровно n (с учётом кратности) непрерывных по ε собственных значений

$$\tilde{\lambda}_j(\varepsilon) = \tilde{\lambda}_j(0) + \alpha_j(\varepsilon) \quad (61)$$

оператора $A + BK + \varepsilon(C + GK)$ таких, что $\tilde{\lambda}_j(0) = \lambda_j$ и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням ε . Каждому $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\tilde{v}_j(\lambda_j, \varepsilon)$, представимый сходящимся рядом по тем же степеням ε , что и $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon)$.

Величины $\alpha_j(\varepsilon)$ удобно определять с помощью диаграммы Ньютона, построенной с помощью равенства

$$\det(A + BK + \varepsilon(C + GK) - \lambda_j I - \alpha_j(\varepsilon)I) = 0, \quad (62)$$

вытекающего из (60) и (61).

В прямоугольной системе координат отмечаются точки (i, j) , соответствующие слагаемому с множителем $\varepsilon^j \alpha^i$ в (62). Крайняя левая нижняя и крайняя правая отмеченные точки соединяются выпуклой вниз ломаной линией с изломами в отмеченных точках (диаграмма Ньютона). С помощью отрезков ломаной устанавливаются главные части величин $\alpha_j(\varepsilon)$ такие, что $\alpha_j(\varepsilon) = a_j \varepsilon^r + o(\varepsilon^r)$, где r — тангенс угла наклона отрезка от оси абсцисс в отрицательном направлении. Числа a_j также определяются с помощью отрезков.

Пример 4. Пусть в системе, рассмотренной в примере 3 с заданным 4-кратным спектром $\lambda_j = -1$ и с построенной матрицей обратной связи

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

возникло возмущение $C = (c_{ij})$, $c_{13} = 1$, остальные $c_{ij} = 0$, и $G = (g_{ij})$, $g_{31} = 1$, остальные $g_{ij} = 0$.

Равенство (62) примет вид

$$\alpha_j^4 + 3\varepsilon \alpha_j^3 + (-3\varepsilon + \varepsilon^2) \alpha_j^2 + (-3\varepsilon - \varepsilon^2) \alpha_j + 5\varepsilon + \varepsilon^2 = 0.$$

Диаграмма Ньютона состоит из одного отрезка, соединяющего точки $(0, 1)$ и $(4, 0)$. Главная часть $\alpha_j(\varepsilon)$ определяется из уравнения $\alpha_j^4 + 5\varepsilon = 0$, откуда $\alpha_j = a_j \varepsilon^{1/4} + o(\varepsilon^{1/4})$, где a_j — решение уравнения $a_j^4 = -5\varepsilon$.

Таким образом, в этом примере $\tilde{\lambda}_j(\varepsilon) = -1 + a_j \varepsilon^{1/4} + o(\varepsilon^{1/4})$, где $|a_j| = 5^{1/4}$, $j = \overline{1, 4}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод построения матрицы обратной связи для линейной динамической системы управления в случае многомерного управляющего вектора. Метод основан на свойстве нётеровости конечномерного отображения с матрицей, стоящей при управляющем векторе, благодаря чему исходная система управления расщепляется на две подсистемы: одна из них даёт возможность построения некоторых линейно независимых векторов, из второй с помощью этих векторов находятся компоненты матрицы обратной связи. Для нахождения векторов к первой системе применяется метод каскадной декомпозиции, состоящий в поэтапном расщеплении названной системы на подсистемы. Одна из подсистем служит для нахождения некоторых частей искомых векторов, а вторая подсистема приводится к виду, аналогичному виду подсистемы предыдущего шага, но с меньшим количеством скалярных уравнений. Благодаря конечномерности исходной системы управления процесс декомпозиции заканчивается за конечное число шагов, на последнем шаге устанавливается полная управляемость (или неуправляемость) исходной системы (если это не было установлено заранее)

и выявляются элементы искоемых векторов, которым можно придавать произвольные значения. Определив значения этих элементов, строится система линейно независимых векторов, с помощью которых вычисляются компоненты матрицы обратной связи. Количество шагов декомпозиции можно узнать предварительно: число шагов p фигурирует в уточнённом условии Калмана (формула (44)).

Результаты получены без использования теоремы 1 и являются её новым доказательством с описанием построения матрицы обратной связи и установлением свойств, влекущих неединственность вида матрицы.

Построение множества матриц обратной связи для конкретных систем иллюстрируется на примерах.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шумафов, М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор / М.М. Шумафов // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6 (64), вып. 4. — С. 564–591.
2. Зубов, В.И. Теория оптимального управления / В.И. Зубов. — Л. : Судпромгиз, 1966. — 352 с.
3. Wonham, W.M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems / W.M. Wonham // IEEE Trans. Aut. Contr. — 1967. — V. AC-12, № 6. — P. 660–665.
4. Леонов, Г.А. Методы стабилизации линейных управляемых систем / Г.А. Леонов, М.М. Шумафов. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. — 421 с.
5. Зубов, Н.Е. Матричные методы в теории и практике автоматического управления летательных аппаратов / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, В.Н. Рябченко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. — 67 с.
6. Лапин, А.В. Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и по выходу / А.В. Лапин, Н.Е. Зубов // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2020. — Вып. 1. — С. 1–16.
7. A unified method arbitrary pole placement / R. Schmid, L. Ntogramatzidis, T. Nguyen, A. Pandey // Automatika. — 2014. — V. 50. — P. 2150–2154.
8. Zubova, S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Math. Methods in the Appl. Sci. — 2021. — V. 44, № 15. — P. 11998–12009.
9. Зубова, С.П. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 7. — С. 22–38.
10. Зубова, С.П. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом / С.П. Зубова // Докл. РАН. — 2012. — Т. 447, № 6. — С. 599–602.
11. Зубова С.П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами / С.П. Зубова // Мат. заметки. — 2010. — Т. 88, № 6. — С. 884–895.
12. Зубова, С.П. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Ле Хай Чунг // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 41–47.
13. Аткинсон, Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф.В. Аткинсон // Мат. сб. — 1951. — Т. 28 (70), № 1. — С. 3–14.
14. Бортакровский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортакровский, А.В. Пантелеев. — М. : НИЦ ИНФРА-М, 2005. — 592 с.
15. Андреев, Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 424 с.
16. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Трепогин. — М. : Наука, 1969. — 527 с.

SOLUTION OF THE SPECTRUM ALLOCATION PROBLEM FOR A LINEAR CONTROL SYSTEM WITH CLOSED FEEDBACK

S. P. Zubova¹, E. V. Raetskaya²

¹Voronezh State University, Russia

²Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov, Russia

e-mail: ¹spzubova@mail.ru, ²raetskaya@inbox.ru

The method for constructing a feedback matrix to solve the problem spectrum allocation (spectrum control, pole assignment) for linear dynamic system is given. A new proof of the well-known theorem about the connection between the complete controllability of a dynamic system with existence of the feedback matrix is formed in the process of construction by the cascade decomposition method. The entire set of arbitrary elements that influence the non-uniqueness of the matrix is identified. Examples of constructing a feedback matrix in the case of a real spectrum and in the presence of complex conjugate eigenvalues, as well as for the case of multiple eigenvalues, are given. The stability of the specified spectrum under small perturbations of the system parameters with a fixed feedback matrix is studied.

Keywords: dynamic control system, spectrum placement, cascade decomposition method, feedback matrix, spectrum stability.

REFERENCES

1. Shumafov, M.M., Stabilization of linear control systems. The problem of pole assignment. Review, *Vestnik SPbGU. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2019, vol. 6 (64), no. 4, pp. 564–591.
2. Zubov, V.I., *Teoriya optimal'nogo upravleniya* (Optimal Control Theory), Leningrad: Sudpromgiz, 1966.
3. Wonham, W.M., On pole assignment in multi-input controllable linear systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Leonov, G.A. and Shumafov, M.M. *Metodu stabilizacii lineinuh upravlaemuh sistem* (Methods for Stabilization of Linear Controlled Systems), SPb.: SPbSU Press, 2005.
5. Zubov, N.E., Mikrin, E.A. and Rjabchen, V.N., *Matrichnye metody v teorii i praktike avtomaticheskogo upravleniya letatelnykh apparatov* (Matrix Methods in the Theory and Practice of Automatic Control of Aircrafts), Moscow: Izd-vo MGTU im. Baamana (Bauman Press), 2016.
6. Lapin, A.V. and Zubov, N.E., Implementation in the MATLAB environment of analytical algorithms for modal control by state and by exit, *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii* (Engineering Journal: Science and Innovation), 2020, vol. 1, pp. 1–16.
7. Schmid, R., Ntogramatzidis, L., Nguyen, T., and Pandey, A., A unified method arbitrary pole placement, *Automatika*, 2014, vol. 501, pp. 2150–2154.
8. Zubova, S.P. and Raetskaya, E.V., Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives, *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 2021, vol. 44, no. 15, pp. 11998–12009.
9. Zubova, S.P. and Raetskaya, E.V., Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1189–1202.
10. Zubova, S.P., Solution of inverse problems for linear dynamical systems by the cascade method, *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 846–849.
11. Zubova, S.P., Solution of the control problem for linear descriptor system with rectangular coefficient matrix, *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5–6, pp. 844–854.
12. Zubova, S.P., Trung, L.H., and Raetskaya, E.V., On polynomial solutions of the linear stationary control system, *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 11, pp. 1852–1858.
13. Atkinson, F.V., Normal solvability of linear equations in normed spaces, *Mat. Sbornik*, 1951, vol. 28 (70), no. 1, pp. 3–14.
14. Bortakovsky, A.S. and Panteleev, A.V., *Lineinaja algebra v primerah i zadachach* (Linear Algebra in Examples and Problems), Moscow, 2005.
15. Andreev, U.N., *Ypravlenie konechnomernymi lineinymi objektami* (Control of Finite-Dimensional Linear Objects), Moscow: Nauka, 1976.
16. Vainberg, M.M. and Trenogin, V.A., *Teoriya vetvleniya reshenij nelineinuh yavnenij* (Branching Theory for Solutions to Nonlinear Equations), Moscow: Nauka, 1969.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ЯВНО-НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЁТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

© В. И. Голубев¹, И. С. Никитин², А. В. Шевченко³, И. Б. Петров⁴^{1,3,4}Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный

^{1,2,3}Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москваe-mail: ¹golubev.vi@mipt.ru, ²i_nikitin@list.ru, ³alexshevchenko@phystech.edu, ⁴petrov@mipt.ru

Поступила в редакцию 08.02.2024 г., после доработки 08.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Исследовано динамическое поведение упруговязкопластических сред под действием внешней нагрузки. Для случая линейной функции вязкости и нелинейной функции разупрочнения построена явно- неявная расчётная схема, позволяющая получать численное решение исходной полулинейной гиперболической задачи. Данный подход не предполагает использование метода расщепления по физическим процессам, несмотря на это был получен явный вычислительный алгоритм, допускающий эффективную реализацию в современных вычислительных системах.

Ключевые слова: математическое моделирование, упруговязкопластическая среда, полулинейная гиперболическая система, явно- неявная схема.

DOI: 10.31857/S0374064124060076, EDN: KWBOSN

ВВЕДЕНИЕ

Для описания быстропротекающих процессов в твёрдых деформируемых средах используют классическую модель изотропной упруговязкопластической (УВП) среды Соколовского–Малверна. Система уравнений в многомерном случае была сформулирована в работах [1, 2].

В нестационарных (и тем более в квазистатических) процессах с характерным временем много большим, чем τ (характерное время релаксации), упруговязкопластические среды ведут себя как упругопластические (УП), и при $\tau \rightarrow 0$ УВП системы уравнений переходят в системы типа Прандтля–Рейса [3–6]. Ещё одним достоинством УВП теории по сравнению с УП теорией является дивергентность системы уравнений, что обеспечивает консервативность при расчёте разрывных решений.

Численные методы решения УП и УВП динамических систем уравнений описаны в работах [7–9]. Как правило, эти методы основаны на идее проектирования соответствующих компонент напряжений (девиаторов напряжений) [10, 11] на достаточно произвольные выпуклые поверхности текучести, в том числе для моделей с изотропным кинематическим или трансляционным упрочнением. Фактически в численных методах реализуется идея расщепления алгоритма на упругий шаг расчёта и последующую корректировку компонент напряжений в соответствии с выбранным типом поверхности текучести и упрочнения [12]. Подробные описания УВП моделей и явных численных алгоритмов решения даны в статьях [13–17].

В работах [18–20] предложен явно- неявный численный метод решения УВП динамической системы уравнений, в том числе повышенного порядка, для общего вида степенных

функций вязкости за пределом текучести. В результате аналитического решения неявной аппроксимации уравнений для девиаторов с малым параметром времени релаксации получены корректировочные формулы для идеальной и упрочняющейся упруговязкопластической среды. Эти разностные формулы допускают непосредственный предельный переход при $\tau \rightarrow 0$, что соответствует переходу к решению УП системы уравнений. Таким образом, достоинством УВП систем уравнений и полученных на их основе явно-неявных численных схем является то, что они, с одной стороны, отражают физику динамических процессов деформирования, а с другой — обеспечивают регуляризацию неединичных УП систем уравнений типа Прандтля–Рейса.

Однако при учёте разупрочнения операторы УП теории на шаге по времени теряют свойство положительной определённости, критерий Адамара корректности краевых задач нарушается и пошаговые алгоритмы численного решения становятся неработоспособными [21]. Операторы УВП теории свободны от этого недостатка.

Для преодоления этих трудностей предложены модели с дополнительной переменной, называемой *повреждаемостью* (условной плотностью микродефектов — микропор, микротрещин и т.п.), рост которой описывается дополнительным кинетическим уравнением [22]. Разупрочнение, или (в более общем смысле) разрушение, выражается в уменьшении значений модулей упругости и/или предела текучести из-за роста числа микродефектов в единице объёма. Вариантом такого подхода для описания явления разупрочнения является регуляризация уравнений УП среды с помощью перехода к уравнениям УВП среды.

В данной работе исследуется классическая УВП система, дифференциальная часть которой совпадает с системой уравнений динамической теории упругости. УВП система является полулинейной гиперболической. Свободные недифференциальные члены, связанные с вязкопластическими скоростями деформаций, отличны от нуля вне поверхности текучести и задаются нелинейной функцией вязкости, как правило, степенного вида. Разупрочнение описывается с помощью динамического уравнения для соответствующего параметра, который растёт с увеличением интенсивности вязкопластических деформаций. Предел текучести при этом падает по заданному нелинейному закону в зависимости от параметра разупрочнения. Постановка начально-краевой задачи для такой системы уравнений является корректной. Для её аппроксимации используется ранее предложенный явно-неявный метод [19]. В результате аналитического решения алгебраических уравнений неявной аппроксимации получены формулы для корректировки девиаторов напряжений и параметра разупрочнения после упругого шага расчёта. Приведены численные решения ряда задач с развитием ярко выраженных полос скольжения (локализации деформаций).

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) система уравнений изотропной УВП среды с разупрочнением при малых деформациях имеет вид [4, 9]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = 2\mu e'_{ij} - 2\mu \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s(k)} - 1 \right) \right\rangle, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \sqrt{e_{kl}^{vp} e_{kl}^{vp}}, \quad \sigma_s(\kappa) = \sigma_0 f(\kappa), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ e_{ij}^{vp} &= \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{kk}}{3}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь v_i — компоненты вектора скорости; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; σ — среднее напряжение; e_{ij} — компоненты тензора скорости деформации; e'_{ij} — компоненты девиатора скорости деформации; $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ — второй инвариант девиатора напряжений; $\sigma_s(\kappa)$ — переменный предел текучести, зависящий от параметра разупрочнения κ ; σ_0 — начальное значение предела текучести (до начала процесса разупрочнения); $F(\sqrt{s_{kl}s_{kl}}/\sigma_s(\kappa)-1)$ — в общем случае нелинейная функция вязкости, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(F)$; $H(F)$ — функция Хэвисайда; $f(\kappa)$ — функция разупрочнения, $f(0) = 1$, $f'(\kappa) < 0$; τ — характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести; ρ — плотность среды; λ и μ — модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Чтобы избежать терминологического недоразумения, отметим, что хотя величина κ является одной из функций в системе уравнений (1), подлежащих определению, традиционно за ней сохраним достаточно распространённое название “параметр разупрочнения”.

С учётом выражения для девиатора e'_{ij} эволюционное уравнение для разупрочнения примет вид

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle.$$

Особый интерес представляют схемы расчёта части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром τ , а также уравнения для разупрочнения с аналогичными особенностями правой части. Что касается остальных уравнений системы (1) — линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнения для среднего напряжения, то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого порядка аппроксимации не вызывает затруднений. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учётом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЯВНО-НЕЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

Построим неявную аппроксимацию первого порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы с разупрочнением (1) и уравнения для разупрочнения путём аппроксимации правой части полулинейных уравнений на верхнем слое по времени:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = 2\mu e'_{ij}{}^{n+1} - \frac{2\mu}{\tau} \frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_0 f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle, \quad \frac{\kappa^{n+1} - \kappa^n}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1}s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_0 f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle.$$

Индексами n и $n+1$ отмечены значения искомых величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt — шаг по времени. Эту нелинейную систему уравнений для s_{ij}^{n+1} и κ^{n+1} можно записать в виде

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta_2} \frac{\bar{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle, \quad \kappa^{n+1} - \kappa^n = \frac{1}{\beta} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1}\bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle.$$

Здесь введены безразмерные компоненты $\bar{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1}/\sigma_0$, $\bar{s}_{ij}^n = s_{ij}^n/\sigma_0$, $\bar{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1}/\sigma_0$, где $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^n + 2\mu e'_{ij}{}^{n+1}\Delta t$ — компоненты девиатора после упругого шага по времени, $\delta_2 = \tau\sigma_0/(2\Delta t\mu)$ — безразмерный (возможно, малый) параметр системы уравнений, $\beta = \tau/\Delta t$ — ещё один безразмерный (возможно, малый) параметр этой системы. В данном построении,

за исключением особо оговоренных случаев, мы не будем устанавливать ограничений на величины δ_2 и β .

Отметим, что с учётом проведённого ранее расчёта значений компонент скорости на верхнем временном слое компоненты “упругого” девиатора $\bar{s}_{ije}^{n+1}$ также можно считать известными, как и значения $\bar{s}_{ij}^n$ на n -м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора напряжений $\bar{s}_{ij}^{n+1}$ и параметра разупрочнения κ^{n+1} на верхнем слое, можно записать как

$$\begin{aligned}\bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta_2 + \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle \right) (\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1})^{-1/2} &= \delta_2 \bar{s}_{ije}^{n+1}, \\ \beta \kappa^{n+1} - \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle &= \beta \kappa^n.\end{aligned}$$

Свернём уравнение для девиаторов напряжений сначала с $\bar{s}_{ij}^{n+1}$, а затем с $\bar{s}_{ije}^{n+1}$. Введём обозначения

$$X = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Z = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\bar{s}_{kle}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}$$

и получим следующую алгебраическую систему для неизвестных X , Z и κ^{n+1} :

$$\begin{aligned}X^2 \left(\delta_2 + \frac{\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle}{X} \right) &= \delta_2 Z^2, \quad Z^2 \left(\delta_2 + \frac{\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle}{X} \right) = \delta_2 \Sigma^2, \\ \beta \kappa^{n+1} - \left\langle F \left(\frac{X}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle &= \beta \kappa^n.\end{aligned}$$

Исключив из неё Z , получим

$$\delta_2 X + \left\langle F \left(\frac{X}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle = \delta_2 \Sigma, \quad \beta \kappa^{n+1} - \left\langle F \left(\frac{X}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle = \beta \kappa^n. \quad (2)$$

С учётом того что $\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle = \delta_2(\Sigma - X)$, итоговые выражения будут следующими:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} X, \quad \kappa^{n+1} = \frac{1}{\beta} \delta_2 (\Sigma - X) + \kappa^n. \quad (3)$$

Отыскав инвариант X из системы (2), можно будет найти компоненты девиатора напряжений и параметра разупрочнения из системы (3).

3. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ВЯЗКОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

Для того чтобы решить нелинейную алгебраическую систему (2) и получить явные выражения для неизвестных величин $\bar{s}_{ij}^{n+1}$ и κ^{n+1} , необходимо конкретизировать функцию вязкости $F(x)$ и функцию разупрочнения $f(\kappa)$.

Для УВП среды при отсутствии разупрочнения аналитическое решение системы (2) можно получить в случае степенной функции вязкости $F(x) = x^q$, $q > 0$ [18]. Однако в системе с разупрочнением для получения аналитического решения примем более простую линейную зависимость $F(x) = x$. При этом не будем ограничивать диапазон значений безразмерных параметров $\beta \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$.

Также ограничимся рассмотрением функции разупрочнения определённого вида

$$f(\kappa) = \frac{1}{1 + \alpha\kappa},$$

где величина параметра $\alpha \geq 0$ регулирует режим и скорость изменения предела текучести.

Предложение 1. Для выбранного вида функций $F(x) = x$ и $f(\kappa) = 1/(1 + \alpha\kappa)$ система уравнений (2) имеет аналитическое решение.

Доказательство. В выбранных обозначениях система (2) примет вид

$$\delta_2 X + \langle X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) - 1 \rangle = \delta_2 \Sigma, \quad \beta\kappa^{n+1} - \langle X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) - 1 \rangle = \beta\kappa^n. \quad (4)$$

В случае $X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) < 1$ имеет место упругий режим деформирования и численное решение всей системы сводится к упругому шагу. Далее рассмотрим нетривиальный случай — УВП режим, когда $X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) \geq 1$.

Сложение уравнений из системы (4) приводит к системе

$$X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) = 1 + \delta_2(\Sigma - X), \quad \kappa^{n+1} = \frac{\delta_2}{\beta}(\Sigma - X) + \kappa^n. \quad (5)$$

Исключив из неё значение κ^{n+1} , получим уравнение для X :

$$X \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \delta_2 (\Sigma - X) + \alpha\kappa^n \right) = 1 + \delta_2 (\Sigma - X).$$

Для упрощения дальнейших выкладок введём величины $\zeta = \Sigma - X$ и $\gamma = \alpha/\beta$. Уравнение для ζ тогда запишем как

$$\gamma\delta_2\zeta^2 + (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))\zeta - (\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1) = 0.$$

Его точное решение, удовлетворяющее условию $\zeta > 0$, определяется по формуле

$$\zeta = \frac{1}{2\gamma\delta_2} \left[\sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} - (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \right],$$

следовательно,

$$X = \Sigma - \frac{1}{2\gamma\delta_2} \left[\sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} - (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \right].$$

Формулы для девиатора и параметра разупрочнения на верхнем слое по времени примут вид

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij}^{n+1} &= \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} \left(\Sigma - \frac{1}{2\gamma\delta_2} \sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} \right) - \\ &\quad - \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} \frac{1}{2\gamma\delta_2} (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)), \end{aligned}$$

$$\kappa^{n+1} = \kappa^n + \frac{1}{2\gamma\beta\delta_2} \left[\sqrt{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2 + 4\gamma\delta_2(\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1)} - (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \right].$$

Утверждение доказано.

Формулы в доказательстве предложения 1 носят труднообозримый характер. Их можно упростить и сделать гораздо более наглядными, если предположить, что коэффициент

разупрочнения α мал, точнее, комбинированный параметр $\gamma \ll 1$. В этом случае выражение для ζ будет иметь вид

$$\zeta = \frac{1}{2\gamma\delta_2} (1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)) \left(\sqrt{1 + 4\gamma\delta_2 \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{(1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma))^2}} - 1 \right).$$

При малых значениях γ получим

$$\zeta \approx \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)}.$$

Формулы для инварианта, девиаторов и параметра разупрочнения на верхнем слое примут компактный вид

$$\begin{aligned} X &\approx \Sigma - \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)}, \\ \bar{s}_{ij}^{n+1} &\approx \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma} \left(\Sigma - \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} \right), \\ \kappa^{n+1} &\approx \frac{\delta_2}{\beta} \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} + \kappa^n = \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} + \kappa^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь было учтено, что $\delta_2/\beta = \sigma_0/(2\mu)$.

Предложение 2. *Формулы (6) могут быть использованы для описания динамического поведения среды и при отсутствии вязкости.*

Доказательство. Предельный переход $\delta_2 \rightarrow 0$, соответствующий модели упругопластической среды, приводит к выражениям

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\bar{s}_{ije}^{n+1}}{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n)}, \quad \kappa^{n+1} \approx \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n} + \kappa^n.$$

Утверждение доказано.

Осталось проверить условие реализации УВП режима $X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) \geq 1$. Из уравнения (5) имеем

$$X(1 + \alpha\kappa^{n+1}) = 1 + \delta_2(\Sigma - X) \geq 1$$

или

$$\Sigma - X \approx \frac{\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1}{1 + \alpha\kappa^n + \delta_2(1 - \gamma\Sigma)} \geq 0.$$

Отсюда получаем условие $\Sigma(1 + \alpha\kappa^n) - 1 \geq 0$.

4. СХЕМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ЗАДАЧИ

В выбранных обозначениях уравнения теории линейной изотропной упругости в отсутствии внешних сил имеют вид

$$\mathbf{u}_t + A_{x_1}(\rho, \lambda, \mu)\mathbf{u}_{x_1} + A_{x_2}(\rho, \lambda, \mu)\mathbf{u}_{x_2} + A_{x_3}(\rho, \lambda, \mu)\mathbf{u}_{x_3} = \mathbf{0}.$$

Здесь вектор $\mathbf{u}$ содержит три компоненты скорости смещения и шесть независимых компонент тензора напряжений, а λ , μ и ρ определяются свойствами описываемой среды. Исполь-

зуемый в работе метод основан на последовательном решении одномерных систем уравнений [23]

$$\mathbf{u}_t + A_{x_i} \mathbf{u}_{x_i} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что матрица A_{x_i} является гиперболической, т.е. может быть диагонализирована преобразованием

$$\Lambda_{x_i} = T_{x_i} A_{x_i} T_{x_i}^{-1},$$

где матрицы T_{x_i} и $T_{x_i}^{-1}$ вычисляются аналитически, как и диагональная матрица Λ_{x_i} , состоящая из собственных значений матрицы A_{x_i} . Далее будем опускать нижний индекс у матриц, чтобы упростить вид итоговых формул.

Замена $\boldsymbol{\theta} = T\mathbf{u}$ приводит к системе независимых одномерных линейных уравнений переноса

$$\boldsymbol{\theta}_t + \Lambda \boldsymbol{\theta}_{x_i} = \mathbf{0}.$$

Для каждой компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ справедливы соотношения

$$\theta_j(t + \Delta t, x_i, x_k, x_l) = \theta_j(t, x_i - \lambda_j \Delta t, x_k, x_l).$$

Значение правой части данного выражения аппроксимируется значением полинома третьей степени $P_3(x_i - \lambda_j \Delta t)$, построенного на фиксированном наборе пространственных узлов $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$. Здесь нижний индекс m означает номер узла в равномерной пространственной сетке вдоль координаты x_i с шагом h .

Итоговое выражение для компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ на следующем временном слое $n+1$ в m -м узле имеет вид

$$\theta_m^{n+1} = \theta_m^n - \frac{\sigma}{2}(\theta_{m+1}^n - \theta_{m-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(\theta_{m-1}^n - 2\theta_m^n + \theta_{m+1}^n) + \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{6}(\theta_{m-2}^n - 3\theta_{m-1}^n + 3\theta_m^n - \theta_{m+1}^n),$$

где $\sigma = \lambda_j \Delta t / h$ — число Куранта. Вычисление новых значений вектора $\mathbf{u}$ проводится путём обратного преобразования $\mathbf{u}^{n+1} = T^{-1} \boldsymbol{\theta}^{n+1}$. Шаг по времени данного алгоритма: $\sigma < 1$.

5. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ

Был проведён расчёт процесса нагружения изотропной упруговязкопластической среды с разупрочнением. Рассматривался параллелепипед размера $50 \times 50 \times 10\,000$ м³. Он покрывался кубической расчётной сеткой с шагом 5 м. Задавались следующие значения параметров рассматриваемой среды: скорость продольных волн $C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500$ м/с, скорость поперечных волн $C_s = \sqrt{\mu/\rho} = 2250$ м/с, плотность $\rho = 2500$ кг/м³, $\sigma_0 = 112\,500$ Па. Условие устойчивости выполнялось при $\Delta t = 1$ мс. На всех границах расчётной области, кроме нижней, ставилось условие нулевых пространственных производных.

На первом этапе была решена задача о мгновенном приложении к нижней части области равномерно по всей поверхности постоянного внешнего давления в 337 500 Па. Аналитическим решением данной задачи для упругой среды является распространение продольной упругой волны со скоростью C_p , для упругопластической среды без упрочнения — продольной волны со скоростью C_p и пластической волны со скоростью $C_f = \sqrt{(\lambda + 2\mu/3)/\rho} \approx 3674$ м/с. При этом наличие вязкости в такой среде должно приводить к размыванию фронта пластической волны. На рис. 1 представлены результаты численных решений, полученные по разработанной расчётной схеме для случаев с разупрочнением и без него. Было задано значение $\delta_2 = 1/2$. Анализ полученных результатов подтверждает корректное воспроизведение

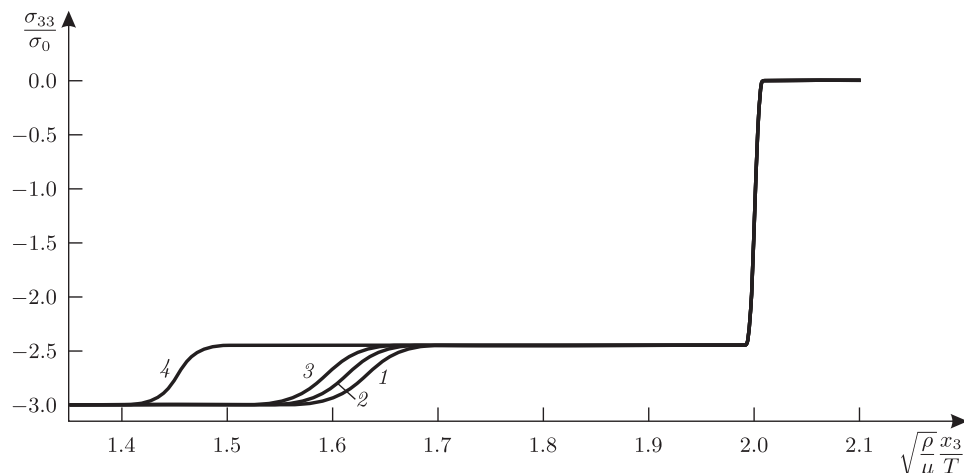


Рис. 1. Пространственные распределения вертикальной компоненты тензора напряжений σ_{33} при нормальном нагружении в момент времени $T_s = 2$ с: 1 — $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 1 \cdot 10^4$; 3 — $\alpha = 2 \cdot 10^4$; 4 — $\alpha = 8 \cdot 10^4$.

пластической волны и волны упругого предвестника, при этом учёт эффекта разупрочнения приводит к изменению скорости распространения пластической волны.

На втором этапе была решена задача о смешанной нормальной σ_n и тангенциальной σ_τ нагрузках. Скорость поперечных волн составляла $C_s = 2598$ м/с, остальные параметры расчёта оставались неизменными. Задавались значения $\sigma_n = 246\,603$ Па, $\sigma_\tau = 71\,594$ Па. На рис. 2 представлены численные решения, полученные при различных значениях параметра α .

На третьем этапе была решена задача о нагружении неоднородного полупространства нормальной нагрузкой. Рассматривалась трёхмерная область размера $2000 \times 50 \times 1700$ м³, покрытая равномерной расчётной сеткой с шагом 5 м. В центральной подобласти $x \in [600, 1400]$ м, $z \in [600, 1100]$ м для всех y было задано прямоугольное включение с параметрами $C_p = 300$ м/с, $C_s = 150$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м³, в остальной области $C_p = 4800$ м/с, $C_s = 2400$ м/с, $\rho = 3125$ кг/м³. К граничной плоскости $z = 0$ прикладывалась нормальная нагрузка 250 000 Па. Таким образом, решение задачи не зависит от координаты y . Были вычислены поля напряжений через

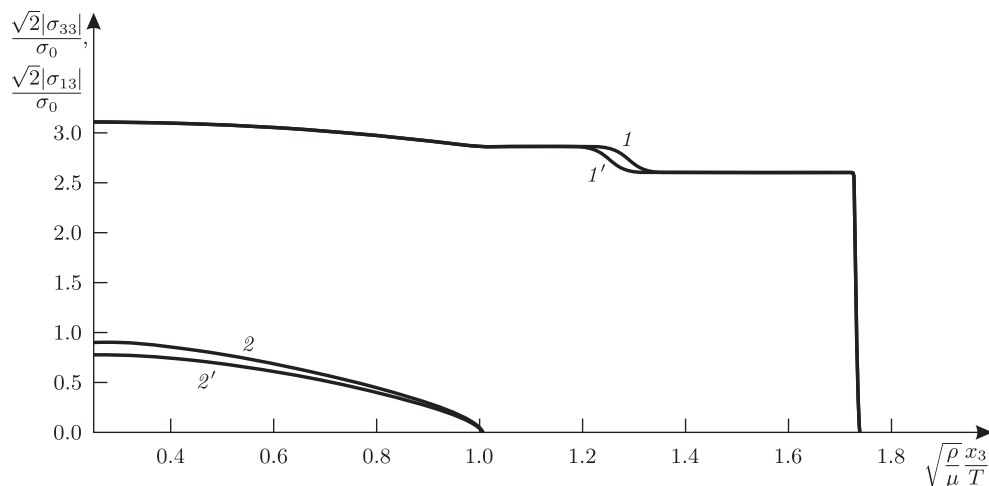


Рис. 2. Пространственные распределения компонент тензора напряжений σ_{33} (1, 1') и σ_{13} (2, 2') при смешанном нагружении в момент времени $T_s = 2$ с: 1, 2 — $\alpha = 0$; 1', 2' — $\alpha = 2 \cdot 10^4$.

$T_s = 0.9$ с от начала приложения нагрузки. Шаг по времени $\Delta t = 1$ мс. Рассматривались две постановки задачи: без разупрочнения и с разупрочнением с коэффициентом $\alpha = 10^4$. Следующие параметры постоянны во всей области и совпадают с предыдущими численными расчётами: $\sigma_0 = 112\,500$ Па, $\tau = 112.5$. На рис. 3 представлены пространственные распределе-

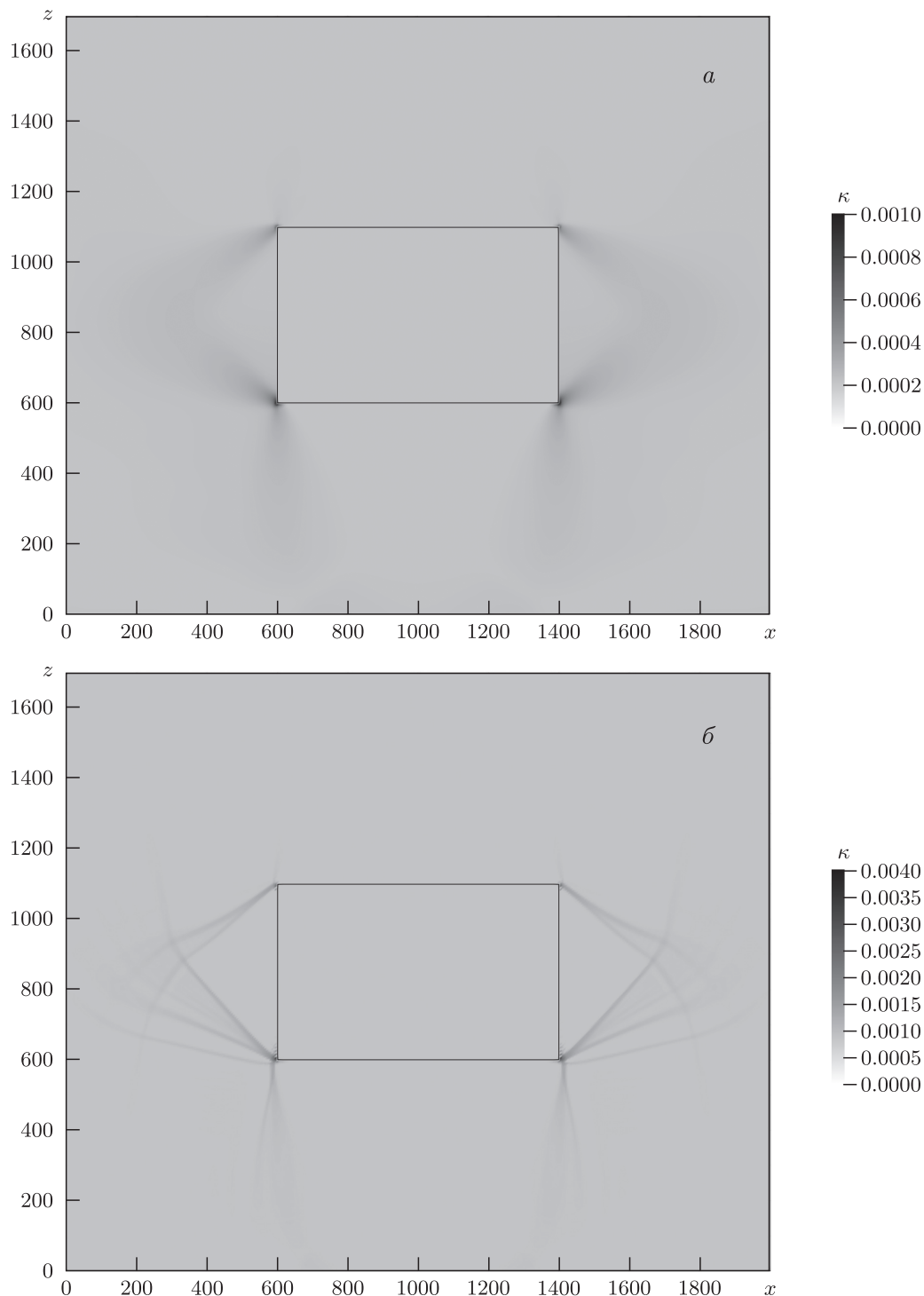


Рис. 3. Пространственное распределение параметра разупрочнения κ на момент окончания расчёта: *a* — $\alpha = 0$; *б* — $\alpha = 10^4$.

ния параметра разупрочнения κ на момент окончания расчёта. Отметим, что измельчение расчётной сетки не приводит к изменению установившейся картины разупрочнения в среде (рис. 4), но делает возникающие линии скольжения (локализации деформации) более чёткими и ярко выраженными.

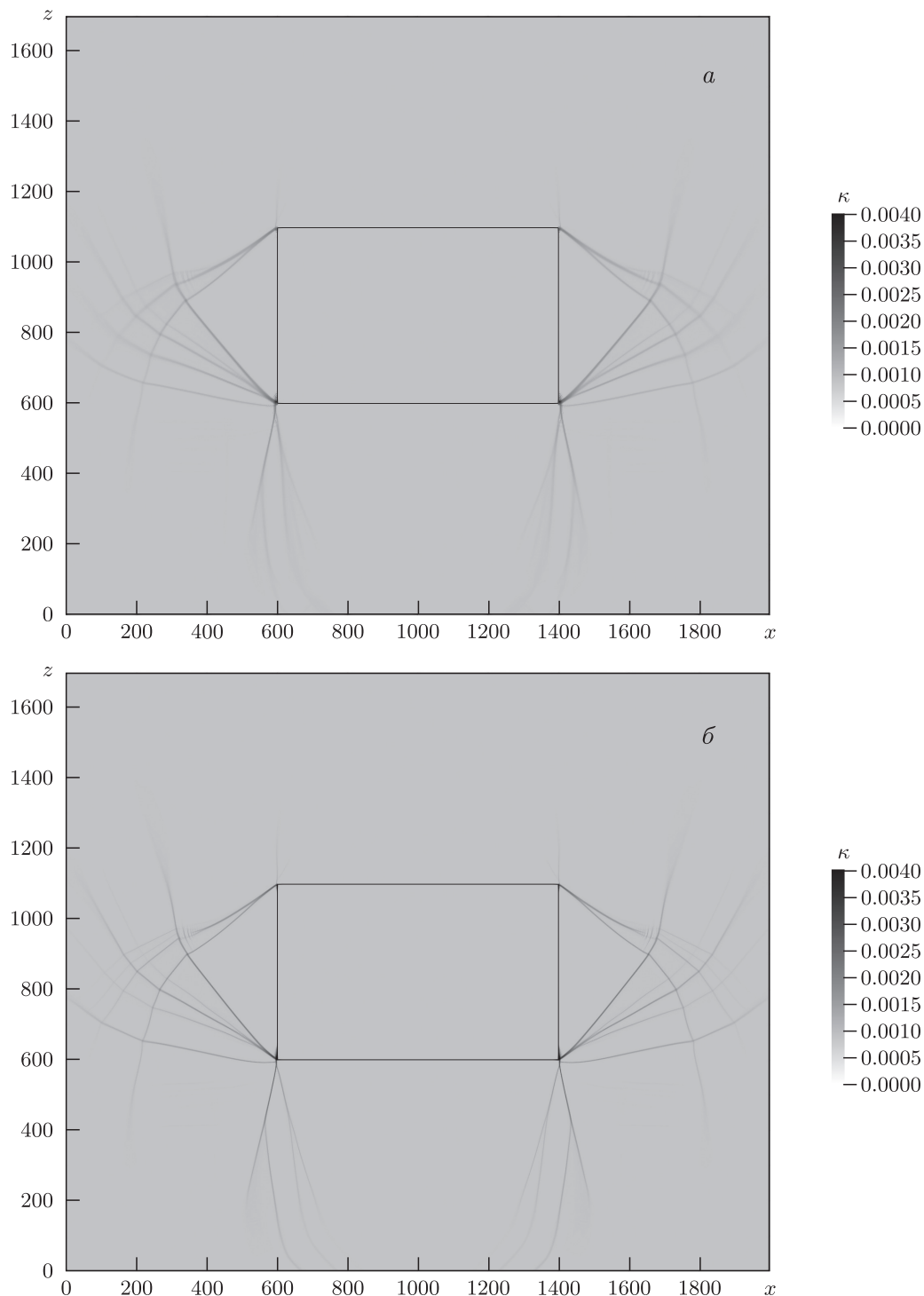


Рис. 4. Пространственное распределение параметра разупрочнения κ на момент окончания расчёта: *a* — сетка измельчена в 2 раза; *б* — в 4 раза. $\alpha = 10^4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для устойчивого численного решения определяющей системы уравнений упруговязко-пластической модели сплошной среды с разупрочнением предложена явно- неявная схема с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов. Для общего случая нелинейных функций вязкости и разупрочнения получена нелинейная алгебраическая система уравнений на значения девиатора и параметра разупрочнения. В общем случае найти её аналитическое решение не представляется возможным. Однако для частного случая линейной функции вязкости и нелинейной функции разупрочнения было найдено аналитическое решение, что позволило предложить полностью явный алгоритм решения задачи нагружения упруговязкопластической среды с разупрочнением.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института автоматизации проектирования РАН (№ 124022400174-3).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер ; пер. с англ. А.И. Смирнова ; под ред. Э.И. Григолюка. — М. : Физматгиз, 1962. — 431 с.
2. Perzyna, P. Fundamental problems in viscoplasticity / P. Perzyna // Adv. Appl. Mech. — 1966. — V. 9. — P. 243–377.
3. Коларов, Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. — М. : Наука, 1979. — 302 с.
4. Новацкий, В.К. Волновые задачи теории пластичности / В.К. Новацкий. — М. : Наука, 1978. — 310 с.
5. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс ; пер. с фр. С.Ю. Прищепионка, Т.Н. Рожковской ; под ред. С.К. Годунова. — М. : Наука, 1980. — 384 с.
6. Садовский, В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред / В.М. Садовский. — М. : Наука, 1997. — 208 с.
7. Ortiz, M. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations / M. Ortiz, J.C. Simo // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 1986. — V. 23, № 3. — P. 353–366.
8. Simo, J.C. Elastoplasticity and Viscoplasticity-Computational Aspects / J.C. Simo, T.J. Hughes. — New-York : Springer, 1988.
9. Кукуджанов, В.Н. Вычислительная механика сплошных сред / В.Н. Кукуджанов. — М. : Наука, 2008. — 320 с.
10. Уилкинс, М.Л. Расчет упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике / Ред. Б. Олдер, С. Фернбах и М. Ротенберг ; пер. с англ. В.П. Коробейникова и П.И. Чушкина ; под ред. С.С. Григоряна и Ю.Д. Шмыглевского. — М. : Мир, 1967. — С. 212–263.
11. Wilkins, M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena / M.L. Wilkins. — Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 1999. — 264 p.
12. Кукуджанов, В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений / В.Н. Кукуджанов // Механика твёрдого тела. — 2004. — № 1. — С. 98–108.

13. Failure mechanism, existing constitutive models and numerical modeling of landslides in sensitive clay: a review / Z.A. Urmi, A. Saeidi, R. Chavali, A. Yerro // *Geoenvironmental Disasters*. — 2023. — V. 10. — Art. 14
14. Lagrangian modelling of large deformation induced by progressive failure of sensitive clays with elastoviscoplasticity / X. Zhang, D. Sheng, S.W. Sloan, J. Bleyer // *Int. J. Numer. Methods Eng.* — 2017. — V. 112. — P. 963–989.
15. Hinchberger, S.D. Viscoplastic constitutive approach for rate-sensitive structured clays / S.D. Hinchberger, G. Qu // *Canad. Geotech. J.* — 2009. — V. 46, № 6. — P. 609–626.
16. Кукуджанов, В.Н. Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида / В.Н. Кукуджанов // *Механика твердого тела*. — 2001. — № 5. — С. 96–111.
17. Кукуджанов, В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций / В.Н. Кукуджанов // *Механика твердого тела*. — 1999. — № 5. — С. 72–87.
18. Явно-неявные схемы расчёта динамики упруговязкопластических сред с малым временем релаксации / В.И. Голубев, И.С. Никитин, Н.Г. Бурого, Ю.А. Голубева // *Дифференц. уравнения*. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 803–813.
19. Голубев, В.И. Уточненные схемы расчета динамики упруговязкопластических сред / В.И. Голубев, И.С. Никитин // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. — 2023. — Т. 63, № 10. — С. 1674–1686.
20. Golubev, V.I. Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media / V.I. Golubev, I.S. Nikitin, X. Mi // *Журн. Сиб. федерал. ун-та. Математика и физика*. — 2024. — Т. 17, № 1. — С. 8–17.
21. Бурого, Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел / Н.Г. Бурого // *Вычислит. механика сплошных сред*. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 5–20.
22. Бурого, Н.Г. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения / Н.Г. Бурого, И.С. Никитин // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 645–666.
23. Голубев, В.И. Повышение порядка точности сеточно-характеристического метода для задач двумерной линейной упругости с помощью схем операторного расщепления / В.И. Голубев, А.В. Шевченко, И.Б. Петров // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 899–910.

EXPLICIT-IMPLICIT SCHEMES FOR CALCULATING DYNAMICS OF ELASTOVISCOPLASTIC MEDIA WITH SOFTENING

V. I. Golubev¹, I. S. Nikitin², A. V. Shevchenko³, I. B. Petrov⁴

^{1,3,4}*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

^{1,2,3}*Institute of Computer Aided Design of the RAS, Moscow, Russia*

e-mail: ¹*golubev.vi@mipt.ru*, ²*i_nikitin@list.ru*, ³*alexshevchenko@phystech.edu*, ⁴*petrov@mipt.ru*

The paper examines the dynamic behavior of elastoviscoplastic media under the action of an external load. For the case of a linear viscosity function and a nonlinear softening function, an explicit-implicit calculation scheme has been constructed that makes it possible to obtain a numerical solution to the original semilinear hyperbolic problem. This approach does not involve the use of the method of splitting into physical processes. Despite this, an explicit computational algorithm was obtained that can be effectively implemented on modern computing systems.

Keywords: mathematical modeling, elastoviscoplastic media, semilinear hyperbolic system, explicit-implicit scheme.

FUNDING

This work was carried out within the state assignment at the Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (state registration no. 124022400174-3).

REFERENCES

1. Freudenthal, A. and Geiringer, H., The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, in *Encyclopedia of Physics*, S. Flugge, ed., Vol. VI. *Elasticity and Plasticity*, Springer-Verlag, 1958, pp. 229–433.
2. Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity, *Adv. Appl. Mech.*, 1966, vol. 9, pp. 243–377.
3. Kolarov, D., Baltov, A., and Boncheva, N., *Mehanika plasticheskikh sred* (Mechanics of Plastic Media), Moscow: Nauka, 1979.
4. Novatskii, V.K., *Volnovie zadachi teorii plastichnosti* (Wave Problems of Plasticity Theory), Moscow: Nauka, 1978.
5. Duvaut, G. and Lions, J.-L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Paris: Dunod, 1972.
6. Sadovskii, V.M. *Razrivnie resheniya v zadachah dinamiki uprugoplasticheskikh sred* (Discontinuous Solutions in Problems of Dynamics of Elastoplastic Media), Moscow: Nauka, 1997.
7. Ortiz, M. and Simo, J.C., An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1986, vol. 23, no. 3, pp. 353–366.
8. Simo, J.C. and Hughes, T.J., *Elastoplasticity and Viscoplasticity-Computational Aspects*, New-York: Springer, 1988.
9. Kukudzhnikov, V.N., *Vichislitel'naya mehanika sploshnykh sred* (Numerical Mechanics of Continuum Media), Moscow: Nauka, 2008.
10. Wilkins, M.L., Calculation of elastic-plastic flow, in *Methods in Computational Physics. Advances in Research and Applications. Vol. 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics*, B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg, eds., New York; London: Academic Press, 1967, pp. 211–264.
11. Wilkins, M.L., *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1999.
12. Kukudzhnikov, V.N., Metod raschepleniya uprugoplasticheskikh uravnenij (Method for splitting elastoplastic equations), *Mehanika Tverdogo Tela* (Mechanics of Solid Body), 2004, no. 1, pp. 98–108.
13. Urmi, Z.A., Saeidi, A., Chavali, R., and Yerro, A., Failure mechanism, existing constitutive models and numerical modeling of landslides in sensitive clay: a review, *Geoenvironmental Disasters*, 2023, vol. 10, art. 14.
14. Zhang, X., Sheng, D., Sloan, S.W., and Bleyer, J., Lagrangian modelling of large deformation induced by progressive failure of sensitive clays with elastoviscoplasticity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2017, vol. 112, pp. 963–989.
15. Hinchberger, S.D. and Qu, G., Viscoplastic constitutive approach for rate-sensitive structured clays, *Canad. Geotech. J.*, 2009, vol. 46, no. 6, pp. 609–626.
16. Kukudzhnikov, V.N., Rasprostraneniye voln v uprugoplasticheskikh materialakh s diagrammoy obshchego vida (Wave propagation in elastoviscoplastic materials with a general diagram), *Mehanika Tverdogo Tela* (Mechanics of Solid Body), 2001, no. 5, pp. 96–111.
17. Kukudzhnikov, V.N., Mikromekhanicheskaya model razrusheniya neuprugogo materiala i ee primeneniye k issledovaniyu lokalizatsii deformatsii (Micromechanical model of fracture of an inelastic material and its application to the study of strain localization), *Mehanika Tverdogo Tela* (Mechanics of Solid Body), 1999, no. 5, pp. 72–87.
18. Golubev, V.I., Nikitin, I.S., Burago, N.G., and Golubeva, Yu.A., Explicit–implicit schemes for calculating the dynamics of elastoviscoplastic media with a short relaxation time, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 822–832.
19. Golubev, V.I. and Nikitin, I.S., Refined schemes for computing the dynamics of elastoviscoplastic media, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 10, pp. 1874–1885.
20. Golubev, V.I., Nikitin, I.S., Mi, X., Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media, *J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys.*, 2024, vol. 17, no. 1, pp. 8–17.
21. Burago, N.G., Modelirovaniye razrusheniya uprugoplasticheskikh tel (Simulation of destruction of elastoplastic bodies), *Vichislitel'naya Mehanika Sploshnykh Sred* (Numerical Mechanics of Continuum Media), 2008, vol. 1, no. 4, pp. 5–20.
22. Burago, N.G. and Nikitin, I.S., Algorithms of through calculation for damage processes, *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 645–666.
23. Golubev, V.I., Shevchenko, A.V., and Petrov, I.B., Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting, *Computer Research and Modeling*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. e899–e910.

УДК 519.63+517.957

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ НЕРАВЕНСТВ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА

© П. П. Матус

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь

e-mail: piotr.p.matus@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2024 г., после доработки 20.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

К операторным неравенствам и к нелинейным нестационарным начально-краевым задачам математической физики с нелинейностями неограниченного роста применена теория устойчивости линейных операторных схем. На основе достаточных условий устойчивости двухслойных и трёхслойных разностных схем А.А. Самарского получены соответствующие априорные оценки для операторных неравенств при условии критичности рассматриваемых разностных схем, т.е. когда разностное решение и его первая временная производная неотрицательны во всех узлах сеточной области. Полученные результаты использованы для анализа устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения Фишера и Клейна–Гордона с нелинейной правой частью.

Ключевые слова: устойчивость, операторное неравенство, разностная схема, уравнение Фишера.

DOI: 10.31857/S0374064124060088, EDN: KVXBUY

ВВЕДЕНИЕ

Для приближённого решения линейных нестационарных задач математической физики при дискретизации по времени часто используются двухслойные и трёхслойные разностные схемы, которые могут быть записаны в канонической форме операторно-разностных уравнений с операторами, действующими в конечномерном гильбертовом пространстве. А.А. Самарским [1], А.В. Гулиным [2], П.Н. Вабищевичем [3] и другими учениками А.А. Самарского разработана общая теория устойчивости таких операторно-разностных схем, достаточные и необходимые условия устойчивости сформулированы в виде операторных неравенств.

Тем не менее многие прикладные задачи современного естествознания описываются нелинейными уравнениями математической физики. Для вычислительных методов, аппроксимирующих такие нелинейные задачи, в настоящее время отсутствует общая теория устойчивости. Некоторые частные результаты получены в работах [4–9]; приведённые результаты основывались на развитии техники принципа максимума [1, с. 44; 10] для нелинейных задач и применении сеточного аналога леммы Бихари [11, 12].

Оказывается, что некоторые разностные схемы, аппроксимирующие нелинейные нестационарные уравнения математической физики, могут быть записаны в каноническом виде линейных операторно-разностных неравенств, к которым уже можно применять общую теорию устойчивости А.А. Самарского [1]. Отметим, что с помощью линейных операторных неравенств можно получить предварительные оценки разностного решения в сильной

норме пространств L_∞ или C на основе известных теорем вложения. После этого задача исследования устойчивости нелинейных разностных схем становится линейной и для оценки возмущения разностного решения снова можно применить общую теорию устойчивости линейных операторно-разностных уравнений.

В настоящей работе теория устойчивости линейных операторно-разностных схем переносится на операторные неравенства. На основе достаточных условий устойчивости двухслойных и трёхслойных операторно-разностных схем получены соответствующие априорные оценки для операторных неравенств. Эти оценки применяются к анализу устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнения Фишера [13–17] и Клейна–Гордона [18] с нелинейной правой частью произвольного вида.

При рассмотрении операторно-разностных неравенств предполагается, что разностные схемы являются критическими, т.е. когда разностное решение и его первая производная по времени неотрицательны во всех узлах сеточной области [19, 20]. В указанных статьях установлены условия существования специальных поточечных оценок разностных решений — так называемые условия критичности, и на их основе доказаны теоремы сравнения решений неявных разностных схем для различных нелинейных параболических уравнений, т.е. определены условия, при которых одно решение мажорируется другим во всех узлах пространственно-временной сетки. Полученные результаты свидетельствуют о том, что решения неявных схем проявляют некоторые важные свойства “монотонности”, присущие дифференциальным задачам для нелинейных параболических уравнений.

1. ДВУХСЛОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Пусть задано евклидово пространство H и сетка по времени $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}; N_0\tau = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. Обозначим через $A, B: H \rightarrow H$ линейные операторы, заданные в H и не зависящие от τ, t_n . Рассмотрим задачу Коши для двухслойной операторно-разностной схемы [1, с. 357]

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y_0 = u_0, \quad (1)$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция, а входные данные $\varphi_n, u_0 \in H$ заданы.

Здесь и далее используются стандартные безындексные обозначения из [1, 21]: $y = y_n, \hat{y} = y_{n+1}, \check{y} = y_{n-1}, y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau, y_t = (\hat{y} - y)/\tau, y_{\bar{t}} = (\hat{y} - \check{y})/2\tau, y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1 - \sigma)y, y_{\bar{t}t} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2$. Через H_A , где $A = A^* > 0$, будем обозначать пространство со скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A^2 = (Ay, y)$.

Пусть в разностной схеме (1) $B = E + \tau A$, E — единичный оператор. Тогда её можно переписать в виде

$$y_t + A\hat{y} = \varphi, \quad 0 < t < \omega_\tau, \quad y_0 = u_0. \quad (2)$$

Лемма 1. Для решения разностной схемы (2) при произвольном $\tau > 0$ имеет место оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + 2\tau\|\varphi_n\|, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}. \quad (3)$$

Доказательство. Умножив (2) скалярно в пространстве H на $2\tau\hat{y} = 2\tau(y^{(0.5)} + 0.5\tau y_t)$, получим неравенство

$$\tau(\|y\|^2)_t + \tau^2\|y_t\|^2 \leq 2\tau\|\varphi\| \|\hat{y}\|,$$

из которого непосредственно следует оценка

$$(\|\hat{y}\| - \|y\|)(\|\hat{y}\| + \|y\|) \leq 2\tau\|\varphi_n\|(\|\hat{y}\| + \|y\|).$$

Лемма доказана.

Пусть в разностной схеме (2) $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. Для решения разностной схемы (2) при произвольном $\tau > 0$ имеет место оценка

$$\|y_{n+1}\|^2 + \tau \|y_{n+1}\|_A^2 + I(y_{n+1}) \leq \|y_n\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\varphi_1\|^2 + 2\tau \|\varphi_2\|_{A^{-1}}^2, \quad (4)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — действительное число, определяемое из условия $I(y_{n+1}) \geq 0$,

$$I(y_{n+1}) = \frac{\tau}{2} (\|y_{n+1}\|_A^2 - 4\varepsilon_1 \|y_{n+1}\|^2). \quad (5)$$

Доказательство. Умножая уравнение (2) скалярно в H на $2\tau\hat{y} = 2\tau(y^{(0.5)} + 0.5\tau y_t)$, будем иметь

$$\tau(\|y\|^2)_t + \tau^2 \|y_t\|^2 + 2\tau \|y\|_A^2 \leq 2\tau(\hat{y}, \varphi). \quad (6)$$

Применяя к правой части (6) неравенство Коши с ε , обобщённое неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\begin{aligned} 2\tau(\hat{y}, \varphi_1) &\leq 2\tau\varepsilon \|\hat{y}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_1\|^2, \\ 2\tau(\hat{y}, \varphi_2) &\leq 2\tau \|\hat{y}\|_A \|\varphi_2\|_{A^{-1}} \leq \frac{\tau}{2} \|\hat{y}\|_A^2 + 2\tau \|\varphi_2\|_{A^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в (6), приходим к требуемому соотношению (4). Лемма доказана.

2. ДВУХСЛОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В этом пункте рассмотрим лишь критические разностные схемы. Дадим необходимые определения в соответствии с работами [19, 20].

Определение 1. Разностная схема (1) называется *критической*, если при критических входных данных её решение является критическим.

Определение 2. Входные данные и решение разностной задачи называются *критическими*, если при всех $t \in \omega_\tau$ выполняется неравенство

$$y(t+\tau) - y(t) \geq 0. \quad (7)$$

Фактически будут рассматриваться лишь такие разностные схемы, у которых разностная производная по времени y_t неотрицательна при определённых (критических) входных данных. В свою очередь, доказательство поточечного выполнения (7) для конкретной нелинейной разностной схемы является нетривиальной задачей.

Вместо разностной задачи (1) рассмотрим соответствующее операторно-разностное неравенство

$$By_t + Ay \leq \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y_0 = u_0, \quad (8)$$

в котором постоянные линейные операторы A и B удовлетворяют (обычным) условиям

$$B > 0 \quad A = A^* > 0.$$

Отметим, что операторные неравенства вида (8) могут возникнуть, если в разностных схемах отбрасываются нелинейные отрицательные слагаемые в правой части уравнения, а условие критичности (7) необходимо для применения метода энергетических неравенств в сильных соболевских нормах.

Лемма 3. Пусть

$$R = B - 0.5\tau A \geq \varepsilon E,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число. Тогда для решения задачи (8) имеет место оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|y_n\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_n\|^2. \quad (9)$$

Доказательство леммы при условии (7) проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения для операторно-разностной схемы (1) [1, с. 371].

3. УРАВНЕНИЕ ФИШЕРА

Уравнение Фишера, также известное как уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова [13], названо в честь статистика и биолога Рональда Фишера, предложившего его для описания процессов популяционной динамики [14]. В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ поставим для этого уравнения начальную граничную задачу с краевыми условиями Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1 - u), \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (11)$$

В дальнейшем будем предполагать неотрицательность входных данных

$$0 \leq u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t) \leq m, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T,$$

где $m = \text{const} > 0$, $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, T — конечное число.

Отметим, что при неоднородных краевых условиях задача (10), (11) теряет свойство самосопряжённости эллиптического оператора. Здесь и далее предполагаем, что решение рассматриваемой дифференциальной задачи существует, единственно и обладает в $\bar{Q}_T$ всеми необходимыми непрерывными производными.

На равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$, $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{1, N-1}, hN = l\}$ задачу (10), (11) аппроксимируем разностной схемой

$$y_t = \hat{y}_{xx} + \lambda y(1 - y), \quad (12)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1}. \quad (13)$$

3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ В $L_2(\omega_h)$

Схему (12), (13) запишем в каноническом виде [1, с. 243]:

$$C_i y_i^{n+1} = A_i y_{i-1}^{n+1} + B_i y_{i+1}^{n+1} + F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1},$$

где

$$A_i = B_i = \gamma, \quad \gamma = \tau/h^2, \quad C_i = 1 + 2\gamma, \quad F_i^n = (1 + \lambda\tau(1 - y_i^n))y_i^n.$$

Будем также использовать (обычные) равномерные сеточные нормы

$$\|v\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |v(x)|, \quad \|v\|_C = \max_{x \in \omega_h} |v(x)|.$$

Прежде чем исследовать устойчивость решения разностной схемы в нелинейном случае, получим априорную оценку решения в равномерной C -норме [5]. Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. При достаточно малом временном шаге

$$\tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{\lambda m_2}, \quad (14)$$

решение разностной задачи для всех $(x, t) \in \bar{\omega}$ неотрицательно и ограничено:

$$0 \leq y(x, t) \leq m_2, \quad m_2 = e^{\lambda T} \max \left\{ \max_{t \in \omega_\tau} \{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, \|u_0\|_{\bar{C}} \right\}. \quad (15)$$

Доказательство. Воспользуемся нестандартным принципом максимума [22] и методом индукции. Пусть на j -м временном слое имеет место априорная оценка

$$0 \leq y_i^j \leq m_2^j, \quad m_2^j = \max \{ \max \{ \mu_1^j, \mu_2^j \}, e^{\lambda \tau} \|y^{j-1}\|_C \}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Докажем, что эта же оценка имеет место и при $j = n + 1$, т.е. на $(n + 1)$ -м временном слое. Так как выполнены условия положительности коэффициентов

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i = 1 > 0,$$

то на основании леммы [17] для сеточной функции y_i^{n+1} справедлива двусторонняя оценка

$$m_1^n \leq y_i^{n+1} \leq \bar{m}_2^n,$$

в которой

$$m_1^n = \min \left\{ \min_{x \in \gamma_h} \mu(x), \min_{x \in \omega_h} \frac{F(x)}{D(x)} \right\} = \min \left\{ \min \{ \mu_1^n, \mu_2^n \}, \min_{x \in \omega_h} (1 + \lambda \tau (1 - y_i^n)) y_i^n \right\}.$$

В силу условия (10) и предположения индукции заключаем, что

$$\begin{aligned} m_1^n &= \min \left\{ \min \{ \mu_1^n, \mu_2^n \}, \min_{x \in \omega_h} (1 - \lambda \tau y_i^n) y_i^n \right\} \geq 0, \\ \bar{m}_2^n &= \max \left\{ \max_{x \in \gamma_h} \mu(x), \max_{x \in \omega_h} (1 + \lambda \tau (1 - y_i^n)) y_i^n \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \max \{ \mu_1^n, \mu_2^n \}, \max_{x \in \omega_h} (1 + \lambda \tau) y_i^n \right\} \leq \max \left\{ \max \{ \mu_1^n, \mu_2^n \}, e^{\lambda \tau} y_i^n \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Итак, неравенства (15) для $j = n + 1$ доказаны в силу произвольности $n = \overline{0, N_0 - 1}$, и из (16) следует требуемая оценка (15). Лемма доказана.

Следствие. При выполнении условий леммы 4 для решения разностной задачи (12), (13) имеет место оценка

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_{\bar{C}} \leq m_2.$$

Доказательство. Для доказательства устойчивости рассматриваемой разностной схемы по начальным данным необходимо также рассмотреть задачу с возмущённым начальным условием

$$\tilde{y}_t = \hat{\tilde{y}}_{\bar{x}x} + \lambda \tilde{y} - \lambda \tilde{y}^2, \quad (17)$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \tilde{y}_0^{n+1} = \mu_1^{n+1} \geq 0, \quad \tilde{y}_N^{n+1} = \mu_2^{n+1} \geq 0. \quad (18)$$

Как и для решения разностной задачи (12), (13), при $\tau \leq \tilde{\tau}_0$, $\tau_0 = 1/(\lambda \tilde{m}_2)$, $\tilde{m}_2 = e^{\lambda T} \max \{ \max_{t \in \omega_\tau} \{ \mu_1(t), \mu_2(t) \}, \|\tilde{u}_0\|_{\bar{C}} \}$ аналогично можно получить оценку

$$0 < \tilde{y}(x, t) \leq \tilde{m}_2, \quad (x, t) \in \bar{\omega}.$$

Вычитая из (17), (18) соответствующие уравнения (12), (13), получаем задачу для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ с однородными граничными условиями:

$$\bar{y}_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \lambda \bar{y}(1 - (y + \tilde{y})), \quad (19)$$

$$\bar{y}(x, 0) = \bar{u}_0(x) = \tilde{u}_0(x) - u_0(x), \quad \bar{y}_0^{n+1} = \bar{y}_N^{n+1} = 0. \quad (20)$$

Разностная задача (19), (20) может быть записана в виде (2), если положить $y_n = (y_1^n, \dots, y_{N-1}^n)^T$, $\varphi_n = (\varphi_1^n, \dots, \varphi_{N-1}^n)^T$, оператор $A: H \rightarrow H$, где линейное пространство $H = H_h$ состоит из множества векторов вида $(v(x_1), \dots, v(x_{N-1}))^T$, скалярное произведение и норма в котором задаются формулами

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i v_i, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)},$$

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_0 = y_N = 0, \quad A = A^* \geq \delta E, \quad \delta = 8/e^2.$$

Для решения задачи (19), (20) воспользуемся априорной оценкой (3):

$$\|\bar{y}_{n+1}\| \leq \|\bar{y}_n\| + 2\tau\lambda(1 + \|y\|_C + \|\tilde{y}\|_C)\|\bar{y}_n\| \leq (1 + \tau c)\|\bar{y}_n\| \leq e^{c t_{n+1}}\|\bar{u}_0\|,$$

где $c = 2\lambda(1 + m_2 + \tilde{m}_2)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Разностная схема (12), (13) абсолютно ρ -устойчива в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ по начальным данным и имеет место априорная оценка

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq c \|\tilde{u}_0 - u_0\|. \quad (21)$$

Тем самым мы доказали классическую устойчивость, опираясь на предварительные оценки разностного решения в сильной равномерной норме, на основе теории устойчивости двухслойных операторно-разностных схем [1].

3.2. СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим задачу для погрешности метода $z = y - u$. Подставляя $y = z + u$ в уравнения (12), (13), получаем задачу для z с однородными граничными и начальными условиями:

$$z_t = \hat{z}_{\bar{x}x} + \lambda(1 - 2u)z + \psi, \quad (22)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_0^{n+1} = z_N^{n+1}.$$

Запишем эту задачу в операторном виде (2):

$$z_t + A\hat{z} = \varphi_1 + \varphi_2, \quad z_0 = 0,$$

где по-прежнему $(Az)_i = -z_{\bar{x}x,i}$, $i = \overline{1, N-1}$, $z_0 = z_N = 0$, $A = A^* > 0$, $\varphi_1 = \lambda(1 - 2u)z + \psi$, $\psi = -u_t + \hat{u}_{\bar{x}x} + \lambda u(1 - u)$ — погрешность аппроксимации схемы на решении.

Для анализа скорости сходимости схемы (12), (13) применим априорную оценку (4). Прежде всего заметим, что, используя вложение $8\|z\|^2 \leq l^2\|z\|_A^2$ и выбирая ε из условия $1 - \varepsilon l^2/2 \geq 0$, можем убедиться в выполнении неравенства $I(z_{n+1}) \geq 0$. Следовательно, на основании априорной оценки (4) заключаем, что

$$\|z_{n+1}\|^2 + \tau\|z_{n+1}\|_A^2 \leq \|z_n\|^2 + \frac{\tau\lambda^2}{2\varepsilon}\|1 - 2u\|_C^2\|z_n\|^2 + 2\tau\|z_{n+1}\|_{A^{-1}}^2,$$

откуда следует оценка

$$\|z_{n+1}\|^2 + \sum_{k=0}^n \tau \|z_k\|^2 \leq c_2 \sum_{k=1}^n \tau_k \|\psi^k\|_{A^{-1}}^2 \leq c_3 (h^2 + \tau)^2,$$

выражающая скорость сходимости как в сеточной норме L_2 , так и в интегральной по времени норме $\|z\|_{L_2(\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau)}$. Оценки скорости сходимости в негативных нормах по правой части обычно используются при анализе точности решения на обобщённых решениях дифференциальной задачи (5).

3.3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В H_A

Для получения априорных оценок в более сильных энергетических нормах на основе теории операторно-разностных неравенств нам нужно сначала доказать, что схема (12), (13) является критической, т.е. что $y_t \geq 0$ при всех $(x, t) \in \bar{\omega}$.

Вычитая из уравнения (12) это же уравнение, записанное на $(n-1)$ -м временном слое, получаем задачу для $v = y_t$:

$$\begin{aligned} v_t &= \hat{v}_{xx} + \lambda(1 - (y + \tilde{y}))v, \\ v(x, 0) &= v_0, \quad x \in \omega_h, \quad v_0^{n+1} = \mu_1, \quad v_N^{n+1} = \mu_2, \end{aligned} \quad (23)$$

где сеточная функция $v_0(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, является решением разностной задачи

$$v_{0i} + \tau v_{0\bar{x}x,i} = u_{0\bar{x}x,i} + \lambda u_{0i}(1 - u_{0i}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (24)$$

$$v_{00} = \mu_{1t}(0), \quad v_{0N} = \mu_{2t}(0), \quad \mu_1(0) = u_0(0), \quad \mu_2(0) = u_0(l). \quad (25)$$

Разностная задача (24), (25) является следствием разностной схемы и условия согласованности входных данных дифференциальной задачи. В свою очередь, схему (23), (24) можно рассматривать как аппроксимацию дифференциального уравнения Фишера, записанного в момент времени $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_0''(x) + \lambda(1 - u_0)u_0,$$

где $u_0(x)$ — начальная функция, удовлетворяющая уравнению (11). Далее предполагаем неотрицательность всех входных данных:

$$v_0(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \mu_k(t) \geq 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad k = 1, 2.$$

Кроме того, будем предполагать, что временной шаг τ является достаточно малым:

$$\tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{\lambda m_3}, \quad m_3 = 2m_2.$$

Тогда на основании леммы 4 имеем неравенство

$$v_i^{n+1} \geq \min \left\{ \min_{k=1,2} \mu_{kt}, \min_{x \in \omega_h} (1 + \lambda \tau (1 - (y + \tilde{y}))) v_i^n \right\} \geq 0$$

при достаточно малом $\tau \leq \tau_0$. Так как $y, v \geq 0$ при всех $(x, t) \in \bar{\omega}$, то в предположении однородности граничных условий разностную задачу (12), (13) можно записать в виде уже линейного операторно-разностного неравенства (8):

$$By_t + Ay \leq \varphi(t), \quad v(0) = v_0,$$

в котором $B = E + \tau A$, $A = A^* > 0$, $\varphi(t) = \lambda y$.

Воспользуемся теперь леммой 3, в условии которой неравенство

$$R = B - 0.5\tau A = E + 0.5\tau A \geq \varepsilon E$$

выполнено для любого $0 < \varepsilon \leq 1$. Кроме того, в силу вложения $8\|y_{n+1}\|^2 \leq l^2\|y_{n+1}\|_A^2$ неравенство

$$I(y_{n+1}) \geq \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{l}{2}\varepsilon_1\right) \|y_{n+1}\|_A^2 \geq 0$$

выполнено для любого $0 < \varepsilon_1 \leq 2/l$. Следовательно, на основании оценки (9) заключаем, что

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|y_n\|_A^2 + \frac{\tau\lambda^2}{2\varepsilon_1} \|y_n\|^2 \leq (1 + \tau c_4) \|y_n\|_A^2 \leq \dots \leq e^{c_4 t_n + 1} \|v_0\|_A^2.$$

Здесь $c_4 = \lambda^2 l^2 / (16\varepsilon_1)$. Итак, доказана

Теорема 2. Пусть $\mu_{1t} = \mu_{2t} = 0$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2/l$, $\tau \leq \tau_0$, $\tau_0 = 1/(\lambda m_3)$. Тогда при положительности всех входных данных разностных задач (12), (13), (21), (22) для сеточной функции y имеет место в H_A априорная оценка

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_A \leq e^{\frac{c_4 T}{2}} \|u_0\|_A.$$

Замечание. Все полученные выше результаты остаются справедливыми и для разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные уравнения с нелинейностями неограниченного роста [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad u \in D_u,$$

$$0 < k_1 \leq k(u) < k_2, \quad k'_u \leq 0, \quad |k'(u)| \leq k_3, \quad u \in \bar{D}_u, \quad u' \in \bar{D}_{\tilde{u}},$$

где $\bar{D}_u$ и $\bar{D}_{\tilde{u}}$ — области значений точного и возмущённого решений:

$$\bar{D}_u = \{u(x, t) : m_1 \leq u(x, t) \leq m_2, (x, t) \in \bar{Q}_T\},$$

$$\bar{D}_{\tilde{u}} = \{u(x, t) : \tilde{m}_1 \leq \tilde{u}(x, t) \leq \tilde{m}_2, (x, t) \in \bar{Q}_T\}.$$

4. ТРЁХСЛОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим задачу Коши для операторно-разностного неравенства

$$Dy_{\bar{t}t} + Ay \leq \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad (26)$$

$$y_0 = u_0, \quad y_{t,0} = u_{01},$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция, а $\varphi_n = \varphi(t_n)$ и $u_0, u_{01} \in H$ заданы. Далее будем использовать следующие очевидные тождества:

$$2\tau y_{\bar{t}t} = \tau(y_{\bar{t}} + y_t) = y^{(0.5)} - \tilde{y}^{(0.5)}, \quad (27)$$

$$y = \frac{1}{4}(y^{(0.5)} + \tilde{y}^{(0.5)}) - \frac{\tau^2}{4} y_{\bar{t}t}. \quad (28)$$

Определим пространство H^2 как множество векторов

$$Y = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}\}, \quad Y^{(\alpha)} \in H, \quad \alpha = 1, 2,$$

в котором сложение и умножение на число проводятся покомпонентно:

$$Y + V = \{Y^{(1)} + V^{(1)}, Y^{(2)} + V^{(2)}\}, \quad \alpha Y = \{\alpha Y^{(1)}, \alpha Y^{(2)}\}.$$

Если в пространстве H введено скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, то в пространстве H^2 также можно ввести скалярное произведение

$$(Y, V) = \sum_{\alpha}^2 (Y^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}).$$

В H^2 определим норму

$$\|Y_{n+1}\| = \{\|y_t\|_R^2 + \|y^{(0.5)}\|_A^2\}^{1/2}.$$

Всюду ниже предполагаем, что все рассматриваемые разностные схемы являются критическими, т.е. существуют такие неотрицательные входные данные, при которых решение y и производная y_t являются неотрицательными сеточными функциями при всех $(x, t) \in \bar{\omega}$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть постоянные операторы A, D удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} A &= A^* > 0, \quad D = D^* > 0, \\ R &= D - \frac{\tau^2}{4} A > E, \quad R = R^*, \quad R^{-1} < E, \\ D &\geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A. \end{aligned} \tag{29}$$

Тогда имеют место следующие априорные оценки:

$$\begin{aligned} \|Y_{n+1}\| &\leq \|Y_n\| + \tau \|\varphi(t_n)\|, \\ \|y_{n+1}\|_A &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\|y_0\|_A + \|y_{t,0}\|_D + \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_k\| \right). \end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство. Используя тождество (28), перепишем неравенство (26) в виде

$$Ry_{\bar{t}t} + \frac{1}{2}(y^{(0.5)} + y^{(0.5)}) \leq \varphi_n. \tag{31}$$

Умножая неравенство (31) скалярно в H на $2\tau y_{\bar{t}}$ и учитывая тождество (27), получаем энергетическое выражение

$$\|Y_{n+1}\|^2 - \|Y_n\|^2 \leq \tau(y_t + y_{\bar{t}}, \varphi). \tag{32}$$

Правую часть в (31) оценим следующим образом:

$$\tau(y_t + y_{\bar{t}}, \varphi) \leq \tau(\|y_t\|_R + \|y_{\bar{t}}\|_R) \|\varphi\|_{R^{-1}} \leq \tau(\|Y_{n+1}\| + \|Y_n\|) \|\varphi\|.$$

Подставляя последнюю оценку в (32), приходим к первому неравенству (30). Второе неравенство следует из двусторонней оценки [1, с. 399]

$$\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|y\|_A \leq \|Y\| \leq \|\check{y}\|_A + \|y_{\bar{t}}\|_D$$

и неравенства

$$\|Y_{n+1}\| \leq \|Y_1\| + \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi(t_k)\|,$$

которое непосредственно вытекает из выражения (29). Теорема доказана.

4.1. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Уравнение Клейна–Гордона играет важную роль в математической физике, в частности, используется при изучении солитонов в физике конденсированного вещества [18]. В области Q_T рассмотрим для этого уравнения следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(u) + f_2(x, t), \quad (33)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_{01}(x), \quad (34)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (35)$$

Наряду с задачей (33)–(35) будем рассматривать и задачу с возмущёнными входными данными

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f_1(\tilde{u}) + \tilde{f}_2(x, t),$$

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = \tilde{u}_{01}(x),$$

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \tilde{u}(l, t) = 0.$$

Как обычно в задачах с неограниченной нелинейностью предполагаем выполнение следующих условий, накладываемых на функции, зависящие от точного решения:

$$f_1(u) \leq 0, \quad f_1(\tilde{u}) \leq 0, \quad |f(\tilde{u}) - f(u)| \leq L|\tilde{u} - u|, \quad u \in \bar{D}_u, \quad \tilde{u} \in \bar{D}_{\tilde{u}}, \quad L = \text{const} > 0,$$

лишь в области значений точного решения.

На равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ дифференциальные задачи заменим разностными:

$$y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} + f_1(y) + f_2, \quad (36)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \omega_h, \quad \hat{y}|_{\gamma_h} = 0; \quad (37)$$

$$\tilde{y}_{\bar{t}t} = \tilde{y}_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} + f_1(\tilde{y}) + \tilde{f}_2, \quad (38)$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \tilde{y}_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad x \in \omega_h, \quad \hat{\tilde{y}}|_{\gamma_h} = 0, \quad (39)$$

где, как обычно,

$$y^{(\sigma, \sigma)} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}, \quad (40)$$

$$u_1(x) = u_{01} + \frac{\tau}{2} (u_0''(x) + f_1(u_0) + f_2(x, 0)), \quad x \in \omega_h,$$

$$\tilde{u}_1(x) = \tilde{u}_{01} + \frac{\tau}{2} (\tilde{u}_0''(x) + f_1(\tilde{u}_0) + \tilde{f}_2(x, 0)), \quad x \in \omega_h.$$

Пусть $y^n \in \bar{D}_u$ и, следовательно, $f_1(y^n) \leq 0$. Тогда из (36) имеем неравенство

$$y_{\bar{t}t} \leq y_{\bar{x}x}^{(\sigma, \sigma)} + f_2. \quad (41)$$

Учитывая тождество (40), разностную схему (41), (37) запишем в каноническом виде (26):

$$Dy_{\bar{t}t} + Ay \leq f_2(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad (42)$$

здесь $D = E + \sigma\tau^2 A$, $R = E + \tau^2(\sigma - 1/4)A$.

Пусть

$$\frac{1+\varepsilon}{4} \leq \sigma \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 3. \quad (43)$$

Тогда $R \geq E$ и выполнено условие (41). На основании теоремы 3 заключаем, что

$$\|y_{n+1}\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{n+1}\|_A \leq M \left(\|u_0\|_A + \|u_1\|_D + \sum_{k=1}^{N_0-1} \tau \|f_{2k}\| \right) \leq m_3, \quad m_3 e^{cT} \leq m_2, \quad (44)$$

где

$$M = \frac{\sqrt{l}}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad c = \frac{Ll}{2\sqrt{2}}.$$

Аналогично и для возмущённой разностной схемы (38), (39)

$$\|\tilde{y}_{n+1}\|_{L_\infty} = \|\tilde{y}_{n+1}\|_C \leq \tilde{m}_3, \quad \tilde{m}_3 e^{cT} \leq \tilde{m}_2. \quad (45)$$

Следовательно, $y^{n+1} \in \bar{D}_u$, $\bar{y}^{n+1} \in \bar{D}_{\tilde{u}}$. Итак, доказана

Теорема 4. Пусть в разностной схеме (26), (37) вес σ удовлетворяет неравенству (43). Тогда для решений разностных схем $y_n \in \bar{D}_u$, $\tilde{y}_n \in \bar{D}_{\tilde{u}}$ для всех $n = \overline{0, N_0}$ имеют место оценки

$$\|y_n\|_C \leq \bar{m}_3, \quad \|\tilde{y}_n\|_C \leq \bar{m}_3, \quad \bar{m}_3 = \max\{m_3, \tilde{m}_3\},$$

причём постоянные m_3 , $\tilde{m}_3$ зависят лишь от ε и входных данных задачи и удовлетворяют условиям (44), (45).

4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Вычитая из возмущённой задачи (38), (39) соответствующие уравнения (36), (37), с учётом сделанных выше предположений получаем разностное неравенство

$$\begin{aligned} \bar{y}_{\bar{t}\bar{t}} &\leq \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma, \sigma)} + L\bar{y} + \bar{f}_2, \\ \bar{y}_0 &= \tilde{u}_0 - u_0, \quad \bar{y}_{t,0} = \tilde{u}_1 - u_1. \end{aligned}$$

При выполнении условий (43) можем воспользоваться априорной оценкой (30):

$$\|\bar{Y}_{n+1}\| \leq \|Y\|_n + \tau L \|\bar{y}\| + \tau \|\bar{f}_2\|.$$

Так как

$$\|y_n\| \leq \frac{l}{2\sqrt{2}} \|y_n\|_A \leq \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|Y_n\|,$$

то из последнего неравенства находим оценки

$$\|\tilde{y}_n - y_n\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|\bar{Y}_n\| \leq M e^{cT} \left(\|\tilde{u}_0 - u_0\|_A + \|\tilde{u}_1 - u_1\|_D + \sum_{k=1}^{N_0-1} \tau \|\tilde{f}_{2k} - f_{2k}\| \right), \quad (46)$$

выражающие абсолютную устойчивость решения разностной схемы (26), (46) в равномерной норме пространств L_∞ или C при единственном ограничении на вес (43).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция—2025” (проект 2021025).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 657 с.
2. Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М. : Наука, 1973. — 415 с.
3. Вабищевич, П.Н. Аддитивные операторно-разностные схемы / П.Н. Вабищевич. — М. : Красанд, 2019. — 464 с.
4. Matus, P. Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. — 2003. — V. 3, № 2. — P. 313–329.
5. Matus, P. On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equation with generalized solutions / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. — 2014. — V. 14, № 3. — P. 361–371.
6. Матус, П.П. Исследование устойчивости и сходимости разностных схем для политропного газа с дозвуковыми течениями / П.П. Матус, М.М. Чуйко // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 7. — С. 1053–1064.
7. Matus, P. Nonlinear stability for equations of isentropic gas dynamics / P. Matus, A. Kolodynska // Comput. Meth. Appl. Math. — 2008. — V. 8, № 2. — P. 155–170.
8. Матус, П.П. Устойчивость по начальным данным и монотонность неявной разностной схемы для однородного уравнения пористой среды с квадратичной нелинейностью / П.П. Матус // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1011–1021.
9. Матус, П.П. О корректности разностных схем для полулинейного уравнения с обобщёнными решениями / П.П. Матус // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2155–2175.
10. Matus, P. The maximum principle and same its applications / P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. — 2002. — V. 2, № 1. — P. 50–91.
11. Лемешевский, С.В. Лемма Бихари и её применение к исследованию устойчивости нелинейных разностных схем / С.В. Лемешевский, Е.К. Макаров, П.П. Матус // Докл. НАН Беларуси. — 2010. — Т. 54, № 1. — С. 5–9.
12. Демидович, В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений / В.Б. Демидович // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 7. — С. 1247–1255.
13. Колмогоров, А.Н. Исследования уравнения диффузии, соединённой с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секция А. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–25.
14. Fisher, R.A. The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Hum. Genetic. — 1937. — V. 7, № 4. — P. 353–369.
15. Murray, J.D. Mathematical Biology: an Introduce / J.D. Murray. — Berlin, 2001. — 551 p.
16. Матус, П.П. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Мат. моделирование. — 2021. — Т. 33, № 4. — С. 60–78.
17. Матус, П.П. Глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера / П.П. Матус, Д. Пылак // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 960–967.
18. Caudrey, P.J. The sine-Gordon as a model classical field theory / P.J. Caudrey // Nuovo Cimento. — 1975. — V. 25, № 2. — P. 497–511.
19. О сравнении решений параболических уравнений / В.А. Галиктионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, А.А. Самарский // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 3. — С. 586–589.
20. Галиктионов, В.А. Условия критичности и теоремы сравнения разностных решений нелинейных параболических уравнений / В.А. Галиктионов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1983. — Т. 23, № 1. — С. 109–118.
21. Samarskii, A.A. Difference schemes with operator factors / A.A. Samarskii, P.P. Matus, P.N. Vabishchevich. — Dordrech : Kluwer, 2002. — 384 p.
22. Matus, P. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations / P. Matus, L.M. Hieu, L.G. Vulkov // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — V. 310. — P. 186–199.

USING OPERATOR INEQUALITIES IN STABILITY RESEARCH OF DIFFERENCE SCHEMES FOR NONLINEAR BOUNDARY PROBLEMS WITH NONLINEARITY OF UNLIMITED GROWTH

P. P. Matus

Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: *piotr.p.matus@gmail.com*

The article develops the theory of stability of linear operator schemes for operator inequalities and nonlinear nonstationary initial-boundary value problems of mathematical physics with nonlinearities of unlimited growth. Based on sufficient conditions for the stability of A.A. Samarsky's two-layer and three-layer difference schemes, the corresponding a priori estimates for operator inequalities are obtained under the condition of the criticality of the difference schemes under consideration, i.e. when the difference solution and its first time derivative are non-negative at all nodes of the grid region. The results obtained are applied to the analysis of the stability of difference schemes that approximate the Fisher and Klein-Gordon equation with a nonlinear right-hand side.

Keywords: stability, operator inequality, difference scheme, Fisher equation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the state scientific research program "Convergence—2025" (project no. 2021025).

REFERENCES

1. Samarskij, A.A., *Teoriya raznostnyh skhem* (Theory of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1977.
2. Samarskij, A.A. and Gulin, A.A., *Ustojchivost' raznostnyh skhem* (Stability of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1973.
3. Vabishchevich, P.N., *Additivnye operatorno-raznostnye skhemy* (Additive Operator-Difference Schemes), Moscow: Krasand, 2019.
4. Matus, P.P., Stability of difference schemes for nonlinear time-dependent problems, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2003, vol. 3, pp. 313–329.
5. Matus, P., On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equation with generalized solutions, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 361–371.
6. Matus, P.P. and Chujko, M.M., Issledovanie ustojchivosti i skhodimosti raznostnyh skhem dlya politropnogo gaza s dozvukovymi techeniyami, *Differ. Uravn.*, 2009, vol. 45, no. 7, pp. 1053–1064.
7. Matus, P.P. and Kolodynska, A., Nonlinear stability for equations of isentropic gas dynamics, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2008, vol. 8, no. 2, pp. 155–170.
8. Matus, P.P., Ustojchivost' po nachal'nym dannym i monotonnost' neyavnoj raznostnoj skhemy dlya odnorodnogo uravneniya poristoj sredy s kvadrachnoy nelinejnost'yu, *Differ. Uravn.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1011–1021.
9. Matus, P.P., O korrektnosti raznostnyh skhem dlya polulinejnogo uravneniya s obobshchennymi resheniyami, *Zhurn. Vychislit. Matem. i Matem. Fiz.*, 2010, vol. 50, no. 12, pp. 2155–2175.
10. Matus, P.P., The maximum principle and same its applications, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 2002, vol. 2, no. 1, p. 50–91.
11. Lemeshevskij, S.V., Makarov, E.K., and Matus, P.P., Lemma Bihari i ee primenenie k issledovaniyu ustojchivosti nelinejnyh raznostnyh skhem, *Dokl. NAN Belarusi*, 2010, vol. 54, no. 1, pp. 5–9.
12. Demidovich, V.B., Ob odnom priznake ustojchivosti raznostnyh uravnenij, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255.
13. Kolmogorov, A.N., Petrovskij, I.G., and Piskunov, N.S., Issledovaniya uravneniya diffuzii, soedinyonnoj s vozrastaniem kolichestva veshchestva i ego primenenie k odnoj biologicheskoy probleme, *Bull. Mosk. Gos. Un-ta. Sekciya A*, 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–25.
14. Fisher, R.A., The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Hum. Genetic*, 1937, vol. 7, no. 4, pp. 353–369.
15. Murray, J.D., *Mathematical Biology: an Introduce*, Berlin, 2001.
16. Matus, P.P. and Utebaev, B.D., Kompaktnye i monotonnnye raznostnye skhemy dlya parabolicheskikh uravnenij, *Mat. Modelirovanie*, 2021, vol. 33, no. 4, pp. 60–78.

17. Matus, P.P. and Pylak, D., Globally stable difference schemes for the Fisher equation, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 962–969.
18. Caudrey, P.J., The sine-Gordon as a model classical field theory, *Nuovo Cimento*, 1975, vol. 25, pp. 497–511.
19. Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Mihajlov, A.P., and Samarskij, A.A., O sravnenii reshenij parabolicheskikh uravnenij, *Dokl. AN SSSR*, 1979, vol. 248, no. 3, pp. 586–589.
20. Galaktionov, V.A., Usloviya kritichnosti i teoremy sravneniya raznostnykh reshenij nelinejnykh parabolicheskikh uravnenij, *Zhurn. Vychisl. Matem. i Matem. Fiz.*, 1983, vol. 23, no. 1. pp. 109–118.
21. Samarskii, A.A., Matus, P.P., and Vabishchevich, P.N., *Difference Schemes with Operator Factors*, Dordrech: Kluwer, 2002.
22. Matus, P., Hieu, L.M., Vulkov, L.G., Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 310, pp. 186–199.

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференциальные уравнения”. 2023. Т. 59. № 11).**

Р. Г. Алимуратов, Н. Л. Марголина, К. Е. Ширяев (Кострома) “О соотношении старшего ляпуновского и дискретным способом определяемых центрального и особого верхних показателей” (16 февраля 2024 г.).

Для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A(t) \in C(\mathbb{R}^+, \text{End } \mathbb{R}^n) \quad (1)$$

старший показатель Ляпунова (см. [1, гл. 3, § 4]) задаётся формулой

$$\lambda_1(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \|X_A(t, 0)\|,$$

а верхние центральный и особый показатели определяются дискретным способом (см. [2, гл. 3, § 8]) соответственно как

$$\Omega(A) = \inf_{T>0} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^k \ln \|X_A(jT, (j-1)T)\|, \quad (2)$$

$$\Omega^0(A) = \inf_{T>0} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{T} \ln \|X_A(kT, (k-1)T)\|, \quad (3)$$

где X_A — оператор Коши системы (1). Из формул (2) и (3) сразу следует, что $\Omega(A) \leq \Omega^0(A)$. Кроме того [2, гл. 3, §§ 7, 8], для систем с ограниченными коэффициентами справедливы неравенства

$$\lambda_1(A) \leq \Omega(A) \leq \Omega^0(A),$$

в которых любая комбинация равенств и строгих неравенств реализуется на некоторой ограниченной системе (1).

В статьях [3, 4] указано, что каждой из двух цепочек соотношений

$$\Omega(A) < \Omega^0(A) < \lambda_1(A), \quad \Omega(A) < \lambda_1(A) < \Omega^0(A) \quad (4)$$

удовлетворяют показатели некоторой неограниченной системы (1).

* Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллиончиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара — И.Н. Сергеев, И.В. Астахова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара — В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

** Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Теорема. При любом $n \in \mathbb{N}$ для каждой цепочки неравенств (4), в которой какое-либо одно или сразу оба неравенства заменены равенствами, существует система вида (1), показатели которой удовлетворяют именно этой цепочке.

Литература. 1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с. 2. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с. 3. Троскина, А.Е. О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы / А.Е. Троскина // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 863–864. 4. Об отношении порядка между ляпуновским старшим, центральным и особым верхними показателями неограниченной системы / Р.Г. Алимуратов, Н.Л. Марголина, А.Е. Троскина, К.Е. Ширяев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 864.

А. А. Бондарев (Москва) “О совпадении классов обеспечения асимптотической и частной неустойчивостей” (16 февраля 2024 г.).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и фазовой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, содержащей точку нуль, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с правой частью $f: \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а значит, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех *непродолжаемых ненулевых* решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ — его подмножество, состоящее из тех решений x , которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Скажем, что для системы (1) имеет место *перроновская* или, соответственно, *верхнепредельная*:

1) *асимптотическая устойчивость*, если для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0; \quad (2)$$

2) *асимптотическая неустойчивость*, если асимптотическая устойчивость соответствующего типа не имеет места, т.е. для каждого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет условию (2);

3) *глобальная устойчивость*, если любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяет условию (2);

4) *частная неустойчивость*, если глобальная устойчивость соответствующего типа не имеет места, т.е. хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет условию (2).

Определение 2 [1, 2]. Будем говорить, что для системы (1) имеет место *ляпуновская*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| < \varepsilon; \quad (3)$$

2) *неустойчивость*, если ляпуновская устойчивость не имеет места, т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ и каждого $\delta > 0$ хотя бы одно решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет условию (3);

3) *асимптотическая устойчивость*, если система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

4) *асимптотическая неустойчивость*, если ляпуновская асимптотическая устойчивость не имеет места, т.е. система обладает ляпуновской неустойчивостью или верхнепредельной асимптотической неустойчивостью;

5) *глобальная устойчивость*, если система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной глобальной устойчивостью;

6) *частная неустойчивость*, если ляпуновская глобальная устойчивость не имеет места, т.е. система обладает ляпуновской неустойчивостью или верхнепредельной частной неустойчивостью.

Далее приведём следующее

Определение 3 [3, 4]. Система (1) имеет *линейное приближение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad A \in C(\mathbb{R}_+, \text{End } \mathbb{R}^n), \quad (4)$$

если выполнено требование *равномерной малости* возмущения

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - A(t)x| = o(x), \quad G \ni x \rightarrow 0,$$

откуда следует, что $A(\cdot) \equiv f'_x(\cdot, 0)$. Также будем говорить, что линейное приближение (4):

- *обеспечивает* данное свойство из определений 1 и 2, если им обладает всякая система (1) с этим линейным приближением;
- *допускает* данное свойство из определений 1 и 2, если им обладает хотя бы одна система (1) с этим линейным приближением,

а множество всех линейных приближений, обеспечивающих или допускающих конкретное свойство из определений 1 и 2, будем называть *классом обеспечения* или, соответственно, *классом допущения* этого свойства.

Для введённых в определении 3 классов обеспечения или допущения ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. При $n > 1$ совпадают классы обеспечения свойств в следующих парах:

- ляпуновской асимптотической и ляпуновской частной неустойчивостей;
- перроновской асимптотической и перроновской частной неустойчивостей;
- верхнепредельной асимптотической и верхнепредельной частной неустойчивостей.

Теорема 2. При $n > 1$ совпадают классы допущения свойств в следующих парах:

- ляпуновской асимптотической и ляпуновской глобальной устойчивостей;
- перроновской асимптотической и перроновской глобальной устойчивостей;
- верхнепредельной асимптотической и верхнепредельной глобальной устойчивостей.

Исследование выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 855–856. 2. Сергеев, И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1556–1557. 3. Сергеев, И.Н. Классы линейных приближений, обеспечивающих различные виды устойчивости или неустойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2023. — № 4. — С. 8–15. 4. Сергеев, И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2023. — Т. 33. — С. 353–423.

И. Р. Камаров, А. В. Филиновский (Москва) “Убывание при больших значениях времени решений смешанной задачи для волнового уравнения с линейной диссипацией” (1 марта 2024 г.).

Для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ исследуется поведение при больших значениях времени t решения смешанной задачи для волнового уравнения с диссипативным слагаемым

$$u_{tt} - \Delta u + b(x)u_t = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_1(x), \quad u_t(x, 0) = u_2(x), \quad x \in \Omega, \quad u_1 \in \dot{W}_2^1(\Omega), \quad u_2 \in L_2(\Omega), \quad (2)$$

где $b \in C^1(\bar{\Omega})$ — коэффициент диссипации, причём $0 \leq b(x) \leq b_1$ при некотором $b_1 > 0$. Для энергии $E(t) \equiv \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2) dx$ решения u задачи (1), (2) имеет место энергетическое соотношение

$$E(t) + 2 \int_0^t \int_{\Omega} b(x) u_t^2(x, \tau) dx d\tau = E(0) = \int_{\Omega} (u_2^2(x) + |\nabla u_1(x)|^2) dx, \quad (3)$$

поэтому функция $E(t)$ убывает.

Определение 1. Функция $u \in C([0, +\infty), \dot{W}_2^1(\Omega))$ называется *решением задачи* (1), (2) из энергетического класса, если $u_t \in C([0, +\infty), L_2(\Omega))$ и выполнены условия (2), (3), а для любого $T > 0$ при всех $w \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $w|_{\Gamma \times (0, T)} = 0$ и $w|_{t=T} = 0$, выполнено интегральное тождество

$$\int_{Q_T} ((\nabla u, \nabla w) - u_t(w_t - bw)) dt dx = \int_{\Omega} u_2(x) w(x, 0) dx, \quad Q_T = \Omega \times (0, T).$$

Определение 2. Поверхность Γ называется *звёздной* относительно начала координат, если при всех $x \in \Gamma$ выполнено неравенство $(\nu, x) \leq 0$, где ν — единичный вектор внешней по отношению к области Ω нормали к Γ .

Для ограниченной области в работах [1–4] изучалось убывание энергии решений волновых уравнений с линейной диссипацией. Для неограниченных областей со звёздными границами и коэффициентом b , убывающим на бесконечности и удовлетворяющим двусторонним логарифмическим оценкам, в статьях [5, 6] при $n \geq 3$ получены логарифмические оценки скорости убывания функции $E(t)$. В [7, 8] было рассмотрено волновое уравнение с граничным условием диссипативного типа. Обзор этих результатов см. в [9].

Далее предполагается, что начало координат не принадлежит замыканию области Ω , а функции u_1, u_2 имеют ограниченный носитель.

Теорема 1. Если $n \geq 2$, а граница Γ является звёздной относительно начала координат и $b(x) \leq C_1/r^2$, $r \equiv |x|$, для некоторой константы $C_1 > 0$, то для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\int_{\Omega} ((t+r)^2(u_t + u_r)^2 + (t-r)^2(u_t - u_r)^2 + |\nabla u|^2 - u_r^2 + tb(x)u^2) dx \leq C_2(t+1) \int_{\Omega} (u_1^2 + |\nabla u_1|^2 + u_2^2) dx,$$

где константа C_2 зависит от диаметров носителей u_1 и u_2 .

Для решения задачи (1), (2) получены оценки скорости убывания при $t \rightarrow +\infty$ локальной энергии

$$E_R(t) \equiv \int_{\Omega_R} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx, \quad \Omega_R = \Omega \cap \{r < R\}.$$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то для решения задачи (1), (2) справедлива оценка $E_R(t) \leq C_3/t$, где константа C_3 зависит от диаметров носителей u_1, u_2 .

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Dafermos, C.M. Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations / C.M. Dafermos // Nonlinear Evolution Equations ; ed. by M.G. Crandall. — New York : Academic Press, 1978. — P. 103–123. 2. Haraux, A. Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations / A. Haraux // J. Differ. Equat. — 1985. — V. 59, № 2. — P. 145–154. 3. Nakao, M. Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation / M. Nakao // Israel J. Math. — 1996. — V. 95, № 1. — P. 25–42. 4. Cortes, L. About decay of solution of the wave equation with dissipation / L. Cortes, Y. Santiago // Proyecciones. — 2007. — V. 26, № 1. — P. 37–71. 5. Mochizuki, K. Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation / K. Mochizuki, H. Nakazawa // Publications RIMS Kyoto Univ. — 1996. — V. 32, № 3. — P. 401–414. 6. Mochizuki, K. Energy decay of solutions to the wave equations with linear dissipation localized near infinity / K. Mochizuki, H. Nakazawa // Publications RIMS Kyoto Univ. — 2001. — V. 37, № 3. — P. 441–458. 7. Muravei, L.A. Wave equation and Helmholtz equation in domains with perturbed star-shaped boundary / L.A. Muravei, A.V. Filinovski // Russian J. Math. Phys. — 1997. — V. 5, № 4. — P. 503–520. 8. Муравей, Л.А. Оценки скорости убывания решения импедансной смешанной задачи для волнового уравнения в области с некомпактной границей / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 3. — С. 393–400. 9. Филиновский, А.В. Стабилизация и спектр в задачах распространения волн / А.В. Филиновский // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа ; под ред. И.В. Астаховой. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 289–463.

Н. А. Лобода, А. Х. Сташ (Майкоп) “Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем” (15 марта 2024 г.).

Для заданного натурального n обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы, принадлежащих $\mathcal{M}^n$, и положим $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–3]. Для момента $t > 0$ и функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ — число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ — число точек её *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ — число её *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ — число её *корней* (т.е. нулей с учётом их кратности) на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, t)$ — число её *гиперкорней* на промежутке $(0, t]$: при его подсчёте каждый некрatный корень берётся ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз;

$\nu^\alpha(x, m, t) \equiv \nu^\alpha(y, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$, $m \in \mathbb{R}_*^n \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $y \equiv (x, m)$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}_*^n$.

Определение 3 [2–4]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами*

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) & \left(\check{\nu}_{\bullet}^{\alpha}(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) & \left(\check{\nu}_{\circ}^{\alpha}(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^{\alpha}(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

Определение 4 [4]. Для функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ условимся о следующем:

1) если значение некоторого верхнего (с обозначением $\hat{}$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого нижнего (с обозначением $\check{}$) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без символов $\hat{}$ и $\check{}$;

2) если значение некоторого слабого (с нижним индексом $\circ$) показателя колеблемости совпадает со значением одноимённого сильного (с нижним индексом $\bullet$) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без символов $\circ$ и $\bullet$.

Определение 5 [5, 6]. Множество всех значений показателя $\kappa: \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовём *спектром* этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, причём значение $a \in \kappa(\mathcal{S}_*(A))$ назовём *существенным*, если подмножество $\{x(0): x \in \mathcal{S}_*(A), \kappa(x) = a\} \subset \mathbb{R}^n$ имеет положительную меру и заполняет некоторое открытое множество, возможно, с точностью до множества *первой категории Бэра* (т.е. счётного объединения нигде не плотных подмножеств). Через $\text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A))$ обозначим множество всех *существенных значений* показателя κ для системы A и назовём его *существенным спектром* системы A .

В работе [7] доказано существование линейной однородной дифференциальной двумерной системы, спектры всех показателей колеблемости которой содержат любое наперёд заданное число или счётное множество существенных значений. В случае конечного спектра этот результат был усилен для показателей колеблемости гиперкорней в [8]: для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой все значения спектров показателей колеблемости гиперкорней являются существенными и совпадают с этим множеством. Если все эти числа соизмеримы, то систему можно выбрать периодической. Эти свойства переносятся и на остальные показатели колеблемости, как показывает

Теорема 1. *Для любого конечного множества неотрицательных чисел S , содержащего нуль, существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$ (периодичная, если все элементы множества S попарно соизмеримы), что справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \nu^-(x) &= \nu^{\sim}(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \\ \kappa(\mathcal{S}_*(A)) &= \text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A)) = S, \quad \kappa = \nu^-, \nu^{\sim}, \nu^0, \nu^+, \nu^*. \end{aligned}$$

В работе [9] для любого замкнутого ограниченного счётного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой построена двумерная линейная ограниченная система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причём все значения существенны.

Обозначим через $\mathcal{I}$ класс всех счётных ограниченных подмножеств $X \subset (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел), у каждого из которых нуль — единственная предельная точка. Возможность управления счётными из класса $\mathcal{I}$ спектрами показателей колеблемости дифференциальной системы гарантирует следующая

Теорема 2. Для любого множества $X \in \mathcal{I}$ существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$, для которой справедливы равенства

$$\begin{aligned}\nu^-(x) &= \nu^\sim(x) = \nu^0(x) = \nu^+(x) = \nu^*(x), \quad x \in \mathcal{S}_*(A), \\ \kappa(\mathcal{S}_*(A)) &= \text{ess } \kappa(\mathcal{S}_*(A)) = X \cup \{0\}, \quad \kappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*.\end{aligned}$$

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294. 2. Сергеев, И.Н. Определение полных частот решений линейной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 908. 3. Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138. 4. Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2016. — Вып. 31. — С. 177–219. 5. Сергеев, И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1661–1662. 6. Сергеев, И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1567–1568. 7. Сташ, А.Х. О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы / А.Х. Сташ // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 2. — С. 157–171. 8. Лобода, Н.А. Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем / Н.А. Лобода, А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 862–863. 9. Шишлянников, Е.М. Примеры дифференциальных систем с различными спектрами показателя блуждаемости / Е.М. Шишлянников // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1586–1587.

А. Х. Сташ (Майкоп) “Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений высокого порядка” (15 марта 2024 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными матричными функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой), а через $\mathcal{S}_*(A)$ — множество всех ненулевых решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$. В множестве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ естественным образом выделим также подмножество $\mathcal{E}^n$ систем с матрицами вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям n -го порядка ($n > 2$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

каждое из которых задаётся своей непрерывной ограниченной функцией $a \equiv (a_1, \dots, a_n)$ и, преобразуясь в систему A стандартным переходом от скалярной переменной y к векторной

$x = \psi^n y \equiv (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, отождествляется с этой системой. Множество всех ненулевых решений $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n = \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n = \bigcup_{a \in \mathcal{E}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

В докладе [1] приведены формулы, задающие показатели колеблемости. Важным свойством асимптотических характеристик функций из множества $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n$, позволяющим облегчить их исследование, является остаточность [2], т.е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном участке полуоси времени.

Определение [2]. Назовём функционал $\varkappa: \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *остаточным*, если для любой пары функций $x, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$, совпадающих на всей полуоси $t \in \mathbb{R}_+$, кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, выполнено равенство $\varkappa(x) = \varkappa(y)$.

Свойство остаточности на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений произвольного порядка для характеристических частот строгих знаков и нулей было установлено в статье [3]. Слабые показатели колеблемости гиперкорней любых решений, как оказалось [4], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Из результатов работ [5–7] следует, что на множестве решений автономных систем все показатели колеблемости обладают свойством остаточности. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения попросту не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) характеристики колеблемости (характеристические частоты и показатели колеблемости) равны между собой [7]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех характеристик колеблемости.

Отсутствие свойства остаточности у всех сильных показателей колеблемости на множестве $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n$ при любом $n > 1$ доказано в работах [8, 9]. Оказалось, что при любом $n > 2$ сильные показатели колеблемости на подмножестве $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \subset \tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{M}}^n$ также не обладают свойством остаточности, как показывает следующая

Теорема. При любом $n > 2$ ни один из функционалов

$$\hat{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \check{\nu}_{\bullet}^{\sim}, \hat{\nu}_{\bullet}^0, \check{\nu}_{\bullet}^0, \hat{\nu}_{\bullet}^+, \check{\nu}_{\bullet}^+, \hat{\nu}_{\bullet}^*, \check{\nu}_{\bullet}^*: \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

не является остаточным.

Следствие. При любом $n > 2$ существует вектор-функция $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$, удовлетворяющая соотношениям

$$\nu_{\circ}^{\sim}(y) = \nu_{\circ}^0(y) = \nu_{\circ}^+(y) = \nu_{\circ}^*(y) < \nu_{\bullet}^{\sim}(y) = \nu_{\bullet}^0(y) = \nu_{\bullet}^+(y) = \nu_{\bullet}^*(y).$$

Литература. 1. Лобода, Н.А. Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем / Н.А. Лобода, А.Х. Сташ // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 848–850. 2. Сергеев, И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 1983. — Вып. 9. — С. 111–166. 3. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294. 4. Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138. 5. Бурлаков, Д.С. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы / Д.С. Бурлаков, С.В. Цой // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93. 6. Сташ, А.Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Механ. Компьютер. науки. — 2019. — Т. 29, вып. 4. — С. 558–568. 7. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв.

РАН. Сер. математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172. 8. Сташ, А.Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы / А.Х. Сташ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2019. — № 5. — С. 48–51. 9. Сташ, А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем / А.Х. Сташ // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2021. — Т. 31, вып. 1. — С. 59–69.

И. Н. Сергеев (Москва) “О реализуемости контрастных сочетаний мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (22 марта 2024 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

а также её конкретные частные случаи: автономную систему (с независимой от t правой частью) и линейную однородную систему, для которой

$$f(t, x) \equiv A(t)x, \quad G \equiv \mathbb{R}^n, \quad A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Определение (см. [1–4] и ср. с [5]). *Ляпуновскую, перроновскую и верхнепределную меры устойчивости* (или *неустойчивости*) системы (1) зададим соответственно при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ формулами

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta} \quad \left(\text{или } \mu_{\bar{\varkappa}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta} \right), \quad (3)$$

где $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| < \delta\}$, $x(\cdot, x_0)$ — непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$, mes — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)$ (или $M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta)$) — множество всех значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих (или не удовлетворяющих — в частности, когда решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче $\mathbb{R}_+$) соответствующему условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon.$$

Иными словами, мера устойчивости системы (1) — это такое наибольшее число $\mu_\varkappa(f)$, что при любых $\mu < \mu_\varkappa(f)$, $\varepsilon > 0$ и некотором $\delta(\mu, \varepsilon) > 0$ для любого $\delta \in (0, \delta(\mu, \varepsilon))$ верна оценка $\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta) \geq \mu \text{mes } B_\delta$, а мера неустойчивости — это такое наибольшее число $\mu_{\bar{\varkappa}}(f)$, что при любом $\mu < \mu_{\bar{\varkappa}}(f)$ и некоторых $\varepsilon > 0$ (отметим, что в [2] в этом месте у ε стоит не тот квантор), $\delta(\mu, \varepsilon) > 0$ для любого $\delta \in (0, \delta(\mu, \varepsilon))$ верна оценка $\text{mes } M_{\bar{\varkappa}}(f, \varepsilon, \delta) \geq \mu \text{mes } B_\delta$.

Введённые меры (3) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \mu_\lambda(f) \leq \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f) \leq 1, \quad 0 \leq \mu_{\bar{\pi}}(f) \leq \mu_{\bar{\sigma}}(f) \leq \mu_{\bar{\lambda}}(f) \leq 1,$$

а ситуация, в которой выполнены все равенства

$$\mu(f) \equiv \mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \bar{\mu}(f) \equiv \mu_{\bar{\lambda}}(f) = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = \mu_{\bar{\pi}}(f), \quad \mu(f) + \bar{\mu}(f) = 1, \quad (4)$$

реализуется при произвольном $n \in \mathbb{N}$, к примеру, уже на простейших линейных автономных системах (1): $\dot{x} = x$ или $\dot{x} = -x$, для которых $\mu(f) = 0$ или $\mu(f) = 1$ соответственно. Нас будут интересовать, наоборот, две следующие, наиболее контрастные (для мер) ситуации:

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \mu_\pi(f), \quad \mu_{\bar{\lambda}}(f) = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = 1 > 0 = \mu_{\bar{\pi}}(f), \quad (5)$$

$$\mu_\lambda(f) = 0 < 1 = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \mu_{\bar{\lambda}}(f) = 1 > 0 = \mu_{\bar{\sigma}}(f) = \mu_{\bar{\pi}}(f). \quad (6)$$

В линейном и в одномерном случаях из указанных двух контрастных ситуаций реализуема только первая, что и подтверждают

Теорема 1 [3]. При каждом $n \in \mathbb{N}$ для линейной системы (1) имеются ровно две возможности:

- 1) либо $\mu_\lambda(f) = 1$, при этом реализуема только ситуация (4);
- 2) либо $\mu_\lambda(f) = 0$, при этом заведомо реализуемы (причём даже на ограниченных функциях A вида (2)) как ситуация (4), так и ситуация (5), но не реализуема ситуация (6).

Теорема 2 [3]. При $n = 1$ для системы (1) из двух контрастных ситуаций (5) и (6) реализуема только ситуация (5).

В автономном же одномерном случае ни одна из указанных двух контрастных ситуаций уже не реализуема вовсе, о чём и говорит

Теорема 3 [3, 4]. При $n = 1$ для любой автономной системы (1) имеет место ситуация (4), в которой реализуемы каждое из трёх значений $\mu(f) = 0, 1/2, 1$ и только они.

Известны примеры двумерных автономных нелинейных систем (1), в которых имеют место:

- а) контрастная ситуация (5) (см. теорему 11 в [3]);
- б) ситуация, отличающаяся от контрастной ситуации (6) только значениями мер ляпуновской устойчивости и неустойчивости: $\mu_\lambda(f) = \mu_{\bar{\lambda}}(f) = 1/2$ (см. [6, п. 6.3] или [7, § 18]).

На неодномерные автономные системы произвольной размерности оба этих примера распространяет, к тому же полностью реализуя контрастную ситуацию (6), следующая

Теорема 4 [4]. При каждом целом $n > 1$ существуют такие две автономные системы (1), что для одной из них имеет место ситуация (5), а для другой — ситуация (6).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 851–852. 2. Сергеев, И.Н. Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1577–1579. 3. Сергеев, И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 895–904. 4. Сергеев, И.Н. Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2024. — № 1. — С. 50–54. 5. Денисов, Н.В. Определение и свойства примитивной меры устойчивости нулевого решения дифференциальной системы / Н.В. Денисов, В.Д. Васильев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1579–1580. 6. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с. 7. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.

И. Н. Сергеев (Москва) “О возможной зависимости мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы от начального момента” (22 марта 2024 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

с правой частью f и временным лучом $\mathbb{R}_+$: замкнутым $[0, +\infty)$ или открытым $(0, +\infty)$.

В докладе [1] для системы (1) с замкнутым временным лучом определены *ляпуновские*, *перроновские* и *верхнепредельные меры устойчивости* $\mu_x(f)$ и *неустойчивости* $\mu_{\bar{x}}(f)$ при

$\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно. Ниже эти меры для каждой системы (1) рассматриваются ещё и как функции от начального момента t_0 .

Определение [2]. При $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовём *ляпуновской*, *перроновской* и, соответственно, *верхнепредельной мерой устойчивости* $\mu_\varkappa(f, t_0)$ (*неустойчивости* $\mu_\varkappa(f, t_0)$) системы (1) с начальным моментом $t_0 \in \mathbb{R}_+$ одноимённую меру устойчивости $\mu_\varkappa(f_{t_0})$ (*неустойчивости* $\mu_\varkappa(f_{t_0})$) системы, правая часть f_{t_0} которой является сдвигом на t_0 правой части системы (1):

$$f_{t_0}(t, x) \equiv f(t + t_0, x), \quad t \geq 0, \quad x \in G.$$

С одной стороны, в некоторых случаях меры устойчивости и неустойчивости не зависят от выбора начального момента, как показывают следующие утверждения.

Теорема 1. Если система (1) одномерна или автономна, то все её меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.

Теорема 2. Если система (1) линейна, то её ляпуновские и верхнепредельные меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.

Теорема 3. Если какая-либо из мер устойчивости или неустойчивости системы (1) хотя бы с одним начальным моментом принимает какое-либо из крайних значений 0 или 1, то она не зависит от начального момента.

С другой стороны, для некоторых систем меры устойчивости и неустойчивости существенно зависят от начального момента и, более того, принимают все свои потенциально возможные значения, о чём и говорят

Теорема 4. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с открытым временным лучом, у которой меры устойчивости трёх типов совпадают, а с ростом начального момента возрастают, пробегая весь интервал $(0, 1)$ и составляя 1 в сумме с мерой неустойчивости.

Теорема 5. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с открытым временным лучом, у которой меры устойчивости трёх типов совпадают, а с ростом начального момента убывают, пробегая весь интервал $(0, 1)$ и составляя 1 в сумме с мерой неустойчивости.

Замечание. Усилить непосредственно утверждения теорем 4 и 5, замкнув в них временной луч и/или добавив к интервалу $(0, 1)$ значений мер устойчивости или неустойчивости соответствующее их крайнее значение, не представляется возможным (в силу теоремы 3).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. О реализуемости контрастных сочетаний мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 852–853. 2. Сергеев, И.Н. Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2024. — Т. 34, вып. 1. — С. 80–90.

В. В. Быков (Москва) “Условные показатели линейной системы” (29 марта 2024 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными оператор-функциями A (которые отождествляем с задаваемыми ими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из систем с ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ функциями. Множества $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ и $\mathcal{M}^n$ наделим *компактно-открытой* топологией.

Приводимая ниже конструкция обобщает построение в [1] и позволяет рассматривать некоторые известные характеристики асимптотического поведения решений линейных систем с единой точки зрения.

Скажем, что системы $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ слабо ляпуновски эквивалентны, если для некоторых их фундаментальных матриц X, Y матричная функция $L(t) \equiv X(t)Y^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условию [2, гл. IV, § 2.1]

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} (|L(t)| + |L^{-1}(t)|) < \infty.$$

Введённое отношение является отношением эквивалентности. В отличие от классической ляпуновской эквивалентности [3, § 18.2], здесь не требуется ограниченности на полуоси производной функции $L(\cdot)$, однако на множестве $\mathcal{M}^n$ эти отношения совпадают. Функционал, принимающий одинаковые значения на любых слабо ляпуновски эквивалентных системах, будем называть *слабо ляпуновским инвариантом*.

Определение 1. Сужением системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ (здесь и всюду ниже — ненулевое) будем называть всякую систему $\widehat{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\dim L}$, обладающую свойством: существует такой линейный изоморфизм $V: L \rightarrow \mathbb{R}^{\dim L}$, что для любых $\xi \in L$ и $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$|X_A(t, 0)\xi| = |X_{\widehat{A}}(t, 0)V\xi|,$$

где $X_B(\cdot, \cdot)$ — оператор Коши системы B .

Подчеркнём, что мы не требуем здесь инвариантности подпространства L относительно всех операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Следующее утверждение, вытекающее из теоремы Перрона о триангулируемости [3, гл. VII, § 20.1], показывает, что сужение системы на заданное подпространство всегда существует и определено с точностью до ортогонального преобразования.

Теорема 1. Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ существует её сужение $\widehat{A}$ на L , причём если $A \in \mathcal{M}^n$, то можно выбрать $\widehat{A} \in \mathcal{M}^{\dim L}$, а, кроме того, система $\widehat{A} \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\dim L}$ является сужением системы A на L тогда и только тогда, когда существует такая ортогональная при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оператор-функция $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{\dim L}$, что

$$X_{\widehat{A}}(t, 0) = U(t)X_A(t, 0)U^{-1}(0), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определение 2. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ и функционал $\varphi: \widetilde{\mathcal{M}}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ (или $\varphi: \mathcal{M}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) является слабым ляпуновским инвариантом. Тогда будем называть k -м *условным φ -показателем* системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ (или $A \in \mathcal{M}^n$) величину $\varphi_{(n,k)}(A) \equiv \inf_{L \in G_k(\mathbb{R}^n)} \varphi(A|_L)$, где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — множество k -мерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, а $\varphi(A|_L)$ — значение функционала φ на каком-либо сужении системы A на подпространство L . Если функционал φ определён только на множестве $\mathcal{M}^k$, то потребуем дополнительно, чтобы указанное сужение имело ограниченные коэффициенты. Набор $(\varphi_{(n,1)}(A), \dots, \varphi_{(n,n)}(A))$ условимся называть *спектром функционала φ системы A* .

Обозначим через $\Lambda(A)$ старший показатель Ляпунова системы (1), а через $\Omega^0(A)$ — её верхний генеральный показатель [2, гл. III, § 4.2]. Тогда k -й условный Λ -показатель системы (1) есть её k -й (в порядке нестрогого возрастания) показатель Ляпунова, а k -й условный Ω^0 -показатель есть k -й условный показатель Боля [4].

Определение 3 [5]. Будем называть функцию $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, заданную на метрическом пространстве M , *верхнепредельной*, если существует такая последовательность непрерывных функций $f_k: M \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, что

$$f(\mu) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(\mu), \quad \mu \in M.$$

Теорема 2. Для любых числа $k \in \{1, \dots, n\}$ и верхнепредельного слабо ляпуновского инварианта $\varphi: \widetilde{\mathcal{M}}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (или $\varphi: \mathcal{M}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) k -й условный φ -показатель $\varphi_{(n,k)}: \widetilde{\mathcal{M}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (или $\varphi_{(n,k)}: \mathcal{M}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) также является верхнепредельным слабо ляпуновским инвариантом.

Отметим, что из теоремы 2 вытекают результаты [4; 6, теорема 1].

Определение 4. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ назовём k -м *условным коэффициентом неправильности* Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^n$ величину

$$\sigma_{\text{Л}}^k(A) \equiv \inf_{(x_1, \dots, x_k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda[x_i] - \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \Gamma_{1\dots k}(t) \right),$$

где $\Gamma_{1\dots k}(t)$ — грамов объём векторов $x_1(t), \dots, x_k(t)$, а $\lambda[f] \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln |f(t)|$ — характеристический показатель функции f , причём точная нижняя грань берётся по всевозможным линейно независимым наборам $x_1, \dots, x_k$ решений системы A .

Следствие. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ функционал $\sigma_{\text{Л}}^k: \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является верхнепредельным.

Литература. 1. Миллионщиков, В.М. Классификация по Бэру относительных мажорант показателей Ляпунова / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 1088–1089. 2. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с. 3. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с. 4. Миллионщиков, В.М. Показатель Боля линейной системы, коэффициенты которой могут быть неограниченными / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 8. — С. 1461–1462. 5. Быков, В.В. Некоторые свойства мажорант показателей Ляпунова систем с неограниченными коэффициентами / В.В. Быков // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1291–1301. 6. Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Мат. сб. — 1988. — Т. 137, № 3. — С. 364–380.

В. А. Похачевский (Москва) “О бэровской классификации слабых показателей колеблемости корней линейной системы” (29 марта 2024 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (которые мы отождествляем с задаваемыми ими системами) и метрикой

$$\rho(A, B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t+1)^{-1}\}, \quad A, B \in \mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n.$$

Определение 1 [1, 2]. Верхним и нижним слабыми показателями колеблемости корней ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{\nu}_\circ^+(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_+^*} \frac{\pi}{t} \nu^+((x, m), t), \quad \check{\nu}_\circ^+(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_+^*} \frac{\pi}{t} \nu^+((x, m), t),$$

где $\nu^+(y, t)$ — количество корней (т.е. нулей с учётом кратности) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(0, t]$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, а нижним индексом $*$ помечаем выкалывание нуля.

Введённые показатели являются, вообще говоря, точками расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, которую мы наделяем стандартными порядком и топологией.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — некоторые классы подмножеств метрического пространства M . Будем говорить [3, с. 223–224], что функция $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathcal{M}, *)$ (или классу

$(*, \mathcal{N})$), если для всякого $r \in \mathbb{R}$ верно условие $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathcal{M}$ (или, соответственно, условие $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathcal{N}$). Далее, F_σ — класс, состоящий из всевозможных счётных объединений замкнутых множеств, а $F_{\sigma\delta}$ — класс, состоящий из всевозможных счётных пересечений множеств из класса F_σ . Кроме того, через $X_A(\cdot, \cdot)$ обозначаем оператор Коши системы A .

Теорема. Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:

- 1) функция $C^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $(A, \xi) \mapsto \check{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(F_\sigma, *)$ и второму классу Бэра;
- 2) функция $C^\infty \mathcal{M}^n \times \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу $(A, \xi) \mapsto \hat{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(*, F_{\sigma\delta})$ и третьему классу Бэра.

Следствие. Для любой системы $A \in C^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n$ спектры слабых показателей колеблемости корней системы A , т.е. множества $\{\check{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}_*^n\}$ и $\{\hat{\nu}_o^+(X_A(\cdot, 0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}_*^n\}$, являются суслинскими подмножествами расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 149–172. 2. Сергеев, И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. — 2015. — Вып. 2 (46). — С. 171–183. 3. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф; пер. с нем. Н.Б. Веденисова, под ред. и с доп. П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова. — М.–Л. : ОНТИ, 1937. — 304 с.

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра” (5 апреля 2024 г.).

Напомним определение топологической энтропии для неавтономных динамических систем [1]. Пусть X — компактное метрическое пространство, $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X . Наряду с исходной метрикой d , определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{oi}(x), f^{oi}(y)), \quad (f^{oi} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1, f^{o0} \equiv \text{id}_X), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N(f, \varepsilon, n)$ максимальное число точек в X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше ε . Тогда топологической энтропией неавтономной динамической системы (X, f) назовём величину

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N(f, \varepsilon, n). \quad (1)$$

Отметим, что топологическая энтропия не зависит от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому определение (1) корректно.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad (2)$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(f(\mu, \cdot)). \quad (3)$$

Для произвольных $\mathcal{M}$, X и любой последовательности отображений (2) функция (3) принадлежит третьему бэровскому классу [2].

Теорема 1. Если $X = [0, 1]$ и пространство $\mathcal{M}$ содержит множество $\mathcal{E}$ типа $F_{\sigma\delta}$, не являющееся множеством типа $G_{\delta\sigma}$, то найдётся такая последовательность отображений (2), что функция (3) совпадает с характеристической функцией множества $\mathcal{E}$, а следовательно, не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.

Доказательство теоремы 1 конструктивно, но для нахождения последовательности (2) используется структура множества $\mathcal{E}$, поэтому построение последовательности отображений (2) достаточно громоздко. Дополним эту теорему конструктивными примерами метрических пространств $\mathcal{M}$ и семейств неавтономных динамических систем, для которых справедливо утверждение теоремы 1.

Для множества $\mathcal{M} \subset [0, 1]$ по непрерывной функции $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ построим последовательность функций $\alpha_i(\mu) = \alpha^{[\log_2(\log_2(i+4))]}(\mu)$ ($[\cdot]$ — целая часть), $i \in \mathbb{N}$, и последовательность отображений из $\mathcal{M} \times [0, 1]$ в $[0, 1]$:

$$f \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i(\mu, x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 - \alpha_i(\mu); \\ 1 - \frac{(2x - 2 + \alpha_i(\mu))^2}{\alpha_i(\mu)}, & 1 - \alpha_i(\mu) < x \leq 1 \quad (\alpha_i(\mu) \neq 0) \end{cases} \quad (4)$$

(в силу этого определения все функции f_i непрерывны).

В статье [3] установлена

Теорема 2. Если $\mathcal{M}$ — множество иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и $\alpha(\mu) = \{1/\mu\}$ ($\{\cdot\}$ — дробная часть числа), то для последовательности (4) функция (3) не принадлежит второму бэровскому классу на $\mathcal{M}$.

Из результатов [4, с. 114] выводятся следующие утверждения.

Теорема 3. Если $\mathcal{M} = [0, 1]$ и

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0; \\ \frac{\mu}{2} \left(1 - \sin \frac{1}{\mu} \right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

то для последовательности (4) функция (3) принадлежит второму и не принадлежит первому классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Теорема 4. Если $\mathcal{M} = [0, 1]$ и

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0; \\ \mu \left(1 - \sin \frac{1}{\mu} \right), & 0 < \mu \leq 1, \end{cases}$$

то для последовательности (4) функция (3) не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Литература. 1. Kolyada, S. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems / S. Kolyada, L. Snoha // Random & Computational Dynamics. — 1996. — V. 4, № 2. — P. 205–233. 2. Ветохин, А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем / А.Н. Ветохин // Мат. заметки. — 2019. — Т. 106, № 3. — С. 333–340. 3. Ветохин, А.Н. О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра / А.Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 1. — С. 133–136. 4. Шарковский, А.Н. Аттракторы траекторий и их бассейны / А.Н. Шарковский. — Киев : Наукова думка, 2013. — 319 с.

И. В. Астапова, Ю. Н. Морозов, А. В. Филиновский, Г. А. Чечкин, Т. И. Шабатина (Москва) “О математическом моделировании криохимического синтеза лекарственных наночастиц” (12 апреля 2024 г.).

Исследуется математическая модель криохимического синтеза наночастиц фармацевтических субстанций. Их терапевтическая эффективность во многом зависит от размера и морфологии частиц. Уменьшение размера частиц фармацевтических веществ до наноразмеров позволяет получать высокоэффективные лекарственные средства, что даёт возможность использовать меньшие дозы лекарств, снижая таким образом вызываемые побочные эффекты и токсичность. Криохимический синтез — один из самых мощных методов получения наночастиц лекарственных средств. Этот совершенно новый метод основан на сублимации или испарении исходной фармацевтической субстанции в условиях высокого вакуума и введении образующихся паров в поток газа-носителя с последующей низкотемпературной конденсацией потока молекул субстанции из газовой фазы на охлаждаемую поверхность.

Первым шагом математического моделирования процессов криохимического синтеза является расчёт температурного поля в потоке газа-носителя, взаимодействующего с охлаждаемой поверхностью, с использованием стационарного уравнения теплопроводности с массопереносом в одномерном случае.

Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = v \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho C_V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где T — абсолютная температура, ρ , μ , λ — плотность, молекулярная масса и теплопроводность газа-носителя соответственно, C_V — молярная теплоёмкость газа-носителя при постоянном объёме, а v — линейная скорость фронта потока газа-носителя.

В стационарном режиме имеем $\partial T / \partial t = 0$ и уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{dx} - \frac{\mu}{\rho v C_V} \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (2)$$

Найдены в аналитической форме решения уравнения, изучены существование и единственность решений с граничными условиями Дирихле, Неймана и Робена. Заметим, что для рассматриваемой физико-химической задачи интерес представляют строго убывающие решения.

Регулируемый поток газа-носителя, проходя через нагретый медный экран цилиндрической формы, нагревается до определённой температуры, улавливает пары исходного вещества и выносит их в вакуумируемое пространство. Если площадь сопла (формирователя смешанного молекулярного потока) равна S , то молярный расход газа-носителя равен $\dot{N} = \rho v S / \mu$, а его отношение к площади сопла (плотность потока газа-носителя) равно $\dot{n} = \dot{N} / S = \rho v / \mu$. Теперь уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{C_V \dot{n}} \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3)$$

и решить, учитывая зависимость теплопроводности λ газа-носителя от температуры. Эта зависимость для многих газов (таких как азот, гелий, аргон и т.д.) выражается приближённой формулой

$$\lambda = \frac{ik}{3\pi^{3/2}d^2} \sqrt{RT/\mu} \equiv \alpha \sqrt{T}, \quad (4)$$

где i — сумма поступательных и вращательных степеней свободы молекул, k — постоянная Больцмана, d — эффективный диаметр молекул, R — универсальная газовая постоянная. Представив (4) в виде $\lambda = \alpha\sqrt{T}$ с соответствующим коэффициентом α , получим

$$\frac{\lambda}{C_V \dot{n}} = \frac{\alpha\sqrt{T}}{C_V \dot{n}} = b\sqrt{T}, \quad \text{где } b \equiv \frac{\alpha}{C_V \dot{n}}.$$

Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(T - b\sqrt{T} \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (5)$$

Теорема 1. Каждое положительное решение T уравнения (5) либо постоянно, либо строго монотонно, причём любое его строго убывающее решение имеет вид

$$T(x) = c^2 \Theta \left(\frac{x - x^*}{bc} \right)^2, \quad (6)$$

где $x^*, c > 0$ — произвольные константы, $\Theta: (-\infty, 0) \rightarrow (0, 1)$ — убывающая функция, неявно задаваемая формулой

$$x = 2\Theta(x) + \ln \frac{1 - \Theta(x)}{1 + \Theta(x)},$$

а выражение в скобках в уравнении (5) (не зависящее от x) для решения (6) равно c^2 . Если же T — непродолжаемое решение уравнения (5), то оно определено на полуоси $(-\infty, x^*)$ и удовлетворяет условиям

$$T(x) \rightarrow c^2, \quad T'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad T(x) \rightarrow 0, \quad T'(x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow x^*.$$

Теорема 2. Для любых констант $x_0 < x_1$, $T_0 > T_1 > 0$, $U_1 < 0$ и каждой из следующих пар условий:

- 1) $T(x_0) = T_0$, $T(x_1) = T_1$ (задача Дирихле);
- 2) $T(x_0) = T_0$, $T'(x_1) = U_1$ (задача Неймана);
- 3) $T(x_0) = T_0$, $T'(x_1) = U_1 T(x_1)$ (задача Робена)

существует единственное решение T уравнения (5), определённое на отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее именно этой паре условий.

Теорема 3. Если $b > 0$, $T_0 > T_1 > 0$ и $U_1 < 0$, то неравенство

$$b|U_1|\sqrt{T_1} > T_0 - T_1$$

эквивалентно существованию на некотором отрезке $[x_0, x_1]$ строго убывающего решения T уравнения (5), удовлетворяющего условиям

$$T(x_0) = T_0, \quad T(x_1) = T_1, \quad T'(x_1) = U_1.$$

Замечание. Физико-химическое описание задачи приводится в статьях [1, 2]. Доказательства части приведённых результатов изложены в [1]. Другие результаты авторов, связанные с математическим моделированием физических и биологических процессов, можно найти в [3–6], в частности, процессов, в основе модели которых лежит параболическое уравнение, — в [3, 4].

Работа выполнена в рамках программы развития МГУ имени М.В. Ломоносова (проект 23-НШ05-26).

Литература. 1. Mathematical modeling of cryochemical formation of medicinal substances in nanoforms. The role of temperature and dimensional parameters / I.V. Astashova, G.A. Chechkin, A.V. Filinovsky [et al.] // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2023. — V. 20. — P. 213–221. 2. Cryochemical production of drug nanoforms: particle size and crystal phase control of the antibacterial medication 2,3-quinoxalinedimethanol-1,4-dioxide (dioxidine) / T.I. Shabatina, Y.N. Morosov, A.V. Soloviev [et al.] // Nanomaterials. — 2021. — V. 11, № 6. — P. 1–17. 3. Astashova, I.V. Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovsky // J. Math. Sci. — 2020. — V. 244, № 2. — P. 148–157. 4. On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems / G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva, A. Meidell, L.E. Persson // Russ. J. Math. Phys. — 2009. — V. 16, № 1. — P. 1–16. 5. Astashova, I.V. On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model / I.V. Astashova, K.N. Belikova // Funct. Differ. Equat. — 2022. — № 3–4. — P. 7–15. 6. Astashova, I. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PhaPl / I. Astashova, V. Chebotaeva, A. Cherepanov // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2018. — V. 15, № 12. — P. 112–118.

Е. В. Коробко (Москва) “Дискретный аналог уравнения типа Эмдена–Фаулера и его решения, эквивалентные степенным функциям” (19 апреля 2024 г.).

Рассмотрим дискретное уравнение

$$\Delta^2 u(k) \pm k^\alpha u^m(k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}(k_0) \equiv \{k_0, k_0 + 1, \dots\}, \quad \alpha, m \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad m \neq 0, 1, \quad (1)$$

где $\Delta u(k) \equiv u(k+1) - u(k)$ и $\Delta^2 u(k) \equiv \Delta(\Delta u(k)) = u(k+2) - 2u(k+1) + u(k)$ — первая и вторая разности искомой функции $u: \mathbb{N}(k_0)(0, +\infty)$. Уравнение (1) является дискретным аналогом нелинейного уравнения второго порядка типа Эмдена–Фаулера [1, гл. 7]

$$y''(x) \pm x^\alpha y^m(x) = 0.$$

Определение. Функцию $u_{app}: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow (0, +\infty)$ назовём *приближённым решением* уравнения (1) *порядка* $g: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$, если

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\Delta^2 u_{app}(k) \pm k^\alpha u_{app}^m(k))g(k) = 0,$$

а если g — степенная функция, то скажем, что это приближённое решение *степенного вида*.

В работе [2] сформулирован и доказан результат, для формулировки которого рассмотрим систему

$$\Delta Y(k) = F(k, Y(k)), \quad F(k, \cdot) \in C(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}(k_0), \quad (2)$$

где $Y \equiv (Y_0, \dots, Y_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ и $F(k, Y) \equiv (F_1(k, Y), \dots, F_n(k, Y))^T: \mathbb{N}(k_0) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Решение системы (2) с начальным условием

$$Y(k_0) = Y^0 \equiv (Y_0^0, \dots, Y_{n-1}^0)^T \in \mathbb{R}^n$$

единственно. При всех $i = \overline{1, n}$ для заданных функций $b_i, c_i: \mathbb{N}(k_0) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $b_i(k) < c_i(k)$, $k \in \mathbb{N}(k_0)$, и заданного вектора $Y \in \mathbb{R}^n$ определим функции

$$B_i(k, Y) \equiv -Y_{i-1} + b_i(k), \quad C_i(k, Y) \equiv Y_{i-1} - c_i(k), \quad k \in \mathbb{N}(k_0),$$

И МНОЖЕСТВА

$$\Omega_B^i \equiv \{(k, Y) : k \in \mathbb{N}(k_0), B_i(k, Y) = 0, B_j(k, Y) \leq 0, C_l(k, Y) \leq 0, j, l = \overline{1, n}, j \neq i\},$$

$$\Omega_C^i \equiv \{(k, Y) : k \in \mathbb{N}(k_0), C_i(k, Y) = 0, B_j(k, Y) \leq 0, C_l(k, Y) \leq 0, j, l = \overline{1, n}, l \neq i\}.$$

Теорема 1 [2]. Если для системы (2) при $i = \overline{1, n}$, выполнены неравенства

$$F_i(k, Y) < \Delta b_i(k), \quad (k, Y) \in \Omega_B^i; \quad F_i(k, Y) > \Delta c_i(k), \quad (k, Y) \in \Omega_C^i,$$

то она имеет решение Y , удовлетворяющее условиям

$$b_i(k) < Y_{i-1}(k) < c_i(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{N}(k_0).$$

Теорема 2. Для уравнения (1) функция

$$u_{app}(k) = \frac{a}{k^s} + \frac{b}{k^{s+1}}, \quad k \in \mathbb{N}(k_0),$$

где

$$s = \frac{\alpha + 2}{m - 1}, \quad a = (\mp s(s+1))^{1/(m-1)}, \quad b = \frac{as(s+1)}{s+2-ms},$$

является приближённым решением (степенного вида) порядка $g(k) = k^{s+3}$.

Теорема 3. Если существуют такие числа $\gamma \in (0, 1)$, $s \neq -1, -2$ и $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что при $P \equiv (\gamma + s + 1)/(s + 1)$ и $Q \equiv (\gamma + s + 2)/(ms)$ выполняется хотя бы одно из следующих четырёх условий:

- 1) $ms > 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$;
- 2) $ms < 0$, $s > -1$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 P$, $\varepsilon_4 < \varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 3) $ms < 0$, $s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_2 < -\varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_1 < -\varepsilon_4 Q$;
- 4) $ms > 0$, $s < -1$, $\varepsilon_4 < -\varepsilon_1 P$, $\varepsilon_3 < -\varepsilon_2 P$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_3 Q$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_4 Q$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее для всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ оценкам

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_1}{k^\gamma} &< \left(u(k) - \frac{a}{k^s} - \frac{b}{k^{s+1}}\right) \left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)^{-1} < \frac{\varepsilon_2}{k^\gamma}, \\ -\frac{\varepsilon_3}{k^\gamma} &< \left(\Delta u(k) - \Delta\left(\frac{a}{k^s}\right) - \Delta\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)\right) \left(\Delta\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)\right)^{-1} < \frac{\varepsilon_4}{k^\gamma}, \\ -\frac{\varepsilon_1}{k^\gamma} + O\left(\frac{1}{k}\right) &< \left(\Delta^2 u(k) - \Delta^2\left(\frac{a}{k^s}\right) - \Delta^2\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right)\right) \left(\Delta^2\left(\frac{b}{k^{s+1}}\right) \frac{ms}{s+2}\right)^{-1} < \frac{\varepsilon_2}{k^\gamma} + O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Теорема 4. Если существуют такие числа $s > -1$ и $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что при $R \equiv ms/(s+2)$ выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) $ms > 0$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_4$, $\varepsilon_3 > \varepsilon_1 R$, $\varepsilon_4 > \varepsilon_2 R$;
- 2) $ms < 0$, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_4$, $\varepsilon_3 > -\varepsilon_2 R$, $\varepsilon_4 > -\varepsilon_1 R$,

то для некоторого K при каждом $k_0 > K$ существует решение $u(k)$ уравнения (1), удовлетворяющее для всех $k \in \mathbb{N}(k_0)$ всем оценкам теоремы 3 при $\gamma = 0$.

Теорема 5. Если имеет место хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $m > 1$, $-2 < \alpha < 0$;
- 2) $m < 0$, $-2 < \alpha < \min\{0, -(m+1)\}$;
- 3) $0 < m < 1$, $\alpha < -2$;
- 4) $\alpha > -(m+1)$, $\alpha < -2$, $\alpha > -4m/(m+1)$;
- 5) $-1 < m < 0$, $\alpha < -2$, $\alpha < -4m/(m+1)$;

6) $m < -1$, $\alpha < -2$, $\alpha > -4m/(m+1)$;

7) $m > 0$, $\alpha > -2$, $\alpha < -4m/(m+1)$, $\alpha < -(m+1)$,

то хотя бы одно из условий 1) и 2) теоремы 4 выполнено.

Доказательства некоторых из приведённых результатов изложены в работах [3–5].

Литература. 1. Белман, Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Белман. — М. : ИЛ, 1954. — 216 с. 2. Diblik, J. Discrete retract principle for systems of discrete equations / J. Diblik // Comput. Math. Appl. — 2001. — № 42. — P. 515–528. 3. Astashova, I. Existence of a solution of discrete Emden–Fowler equation caused by continuous equation / I. Astashova, J. Diblik, E. Korobko // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. — 2021. — V. 14, № 12. — P. 4159–4178. 4. Diblik, J. Asymptotic behavior of solutions of a second-order nonlinear discrete equation of Emden–Fowler type / J. Diblik, E. Korobko // Adv. Nonlin. Anal. — 2023. — V. 12, № 1. — P. 1–23. 5. Korobko, E. Asymptotic characterization of solutions of Emden–Fowler type difference equation / E. Korobko // Proc. II of the Conf. Student EEICT. — Brno, 2021. — P. 250–254.

А. В. Тюленев (Москва) “Вычислимость решений начальной задачи для уравнений с запаздыванием” (26 апреля 2024 г.).

Определение 1. Следующие объекты называются *вычислимыми* (см., например, [1, § 12, п. 3; 2, гл. 0, пп. 1–5]):

1) функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, если существует алгоритм (например, машина Тьюринга), который останавливается на тех и только тех $n \in \mathbb{N}$, для которых f определена, и выдаёт $f(n)$;

2) последовательность (r_n) рациональных чисел, если существуют такие всюду определённые вычислимые функции $a, b, s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$r_n = (-1)^{s(n)} \frac{a(n)}{b(n)+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(определение распространяется и на кратные последовательности);

3) последовательность (x_k) действительных чисел, если существует такая вычислимая последовательность (r_{kn}) рациональных чисел, что

$$|x_k - r_{kn}| \leq 2^{-n}, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

(число $x \in \mathbb{R}$ *вычислимо*, если вычислима стационарная последовательность (x));

4) промежуток $I \subset \mathbb{R}$, если как верхняя, так и нижняя его границы являются вычислимыми (определение распространяется и на параллелепипеды в $\mathbb{R}^q$);

5) функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, где I — вычислимый промежуток, если:

i) для любой вычислимой последовательности $(x_k) \subset I$ последовательность $(f(x_k))$ вычислима;

ii) существует такая вычислимая функция $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$|x - y| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}, \quad x, y \in I, \quad n \in \mathbb{N}$$

(определение распространяется и на функции $f: I^p \rightarrow \mathbb{R}^q$).

Для заданных вычислимых положительных чисел σ, r , а рассмотрим банахово пространство $\mathfrak{C} \equiv C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ с нормой $\|x\| \equiv \max_{\tau \in [-r, 0]} |x(\tau)|$, а каждой функции $x \in C([\sigma - r, \sigma + a], \mathbb{R}^n)$ и каждому $t \in [\sigma, \sigma + a]$ поставим в соответствие функцию $x_t \in \mathfrak{C}$, $x_t(\tau) \equiv x(t + \tau)$, $\tau \in [-r, 0]$.

Определение 2. Для заданной выпуклой ограниченной области $D \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ назовём функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ *вычислимой*, если:

1) для любой вычислимой последовательности $((t_k, \varphi_k))$ последовательность $(f(t_k, \varphi_k))$ вычислима;

2) существует такая вычислимая функция $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$|t-s| + \|\varphi-\psi\| \leq \gamma^{-1}(k) \Rightarrow |f(t, \varphi) - f(s, \psi)| \leq 2^{-k}, \quad (t, \varphi), (s, \psi) \in D, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Определение 3. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

назовём *уравнением с запаздыванием*. Функцию $x \in C([\sigma-r, \sigma+a], \mathbb{R}^n)$ назовём *решением* уравнения (1) на отрезке $[\sigma-r, \sigma+a]$, если для всех $t \in [\sigma-r, \sigma+a]$ верны условие $(t, x_t) \in D$ и равенство (1) (в граничных точках производная односторонняя), а если при этом $x_\sigma = \varphi \in \mathfrak{C}$, то $x(\sigma, \varphi)$ — решение, *начинающееся в точке* (σ, φ) .

В [3, гл. 2] доказываются (неконструктивно) локальное существование и единственность такого решения, а также существование непродолжаемого решения. Имеет место конструктивный аналог этого факта.

Теорема 1. Если $D \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ — выпуклая ограниченная область, а функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ вычислима и липшицева по x , то для любой вычислимой пары $(\sigma, \varphi) \in D$, удовлетворяющей условию $(\sigma-r, \varphi) \in D$, найдётся такое вычислимое $a > 0$, что на отрезке $[\sigma-r, \sigma+a]$ существует единственное вычислимое решение (1), начинающееся в точке (σ, φ) .

Определение 4. Интервал $I \subset \mathbb{R}$ называется *перечислимо открытым*, если он представим в виде объединения вычислимых интервалов I_n , $n \in \mathbb{N}$ (см. [4, п. 2]). Полуинтервал $[a, b)$ назовём *перечислимо открытым справа*, если интервал (a, b) перечислимо открыт.

В [4] доказано, что непродолжаемое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения является вычислимым, а промежуток, на котором оно определено, — перечислимо открытым. Оказывается, аналогичные утверждения справедливы и для уравнений с запаздыванием.

Теорема 2. Если $D \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ — выпуклая перечислимо открытая (возможно, неограниченная) область, а функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ вычислима и локально липшицева по x , то для любой вычислимой пары $(\sigma_0, \varphi_0) \in D$, удовлетворяющей условию $(\sigma_0-r, \varphi_0) \in D$, существует единственное непродолжаемое вычислимое решение уравнения (1), начинающееся в точке (σ_0, φ_0) , причём промежуток, на котором определено это непродолжаемое решение, является перечислимо открытым справа.

Литература. 1. Успенский, В.А. Лекции о вычислимых функциях / В.А. Успенский. — М. : Физматгиз, 1960. — 492 с. 2. Pour-El, M.B. Computability in Analysis and Physics / M.B. Pour-El, J.I. Richards. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1989. — 206 p. 3. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл ; пер. с англ. С.Н. Шиманова. — М. : Мир, 1984. — 421 с. 4. Graça, D. Computability, noncomputability and undecidability of maximum intervals of IVPs / D. Graça, N. Zhong, J. Buescu // Transactions of the American Mathematical Society. — 2009. — V. 361, № 6. — P. 2913–2927.