

Том 60, Номер 7

ISSN 0374-0641

Июль 2024



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 7, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Распределение спектра оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого дельта-взаимодействием
А. С. Печенцов 867
-

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Схемы расщепления для эволюционных уравнений с факторизованным оператором
П. Н. Вабищевич 876
- Оптимальный по порядку прямой метод решения особых интегро-дифференциальных уравнений
Н. С. Габбасов 886
- Задача о падении ленты лайнера на наклонную опору
М. П. Галанин, А. С. Родин 897
- Геометрическая консервативность разностных методов решения задачи Стефана на подвижных и фиксированных сетках
А. О. Гусев, О. С. Мажорова 911
- Приближённое решение обратной граничной задачи для сингулярно возмущённой системы уравнений с частными производными
А. М. Денисов, С. И. Соловьева 928
- Применение разностной схемы с хорошо контролируемой диссипацией для решения уравнений модели Капилы
Р. Р. Полехина, Е. Б. Савенков 937
- Методы параметрической идентификации дробно-дифференциальных уравнений
Ю. В. Сластушенский, Д. Л. Ревизников, С. А. Семенов 954
- Вычисление ведущего собственного значения и соответствующего собственного элемента задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра
П. С. Соловьев, С. И. Соловьев 967
- Об одной модели для описания турбулентных течений
Б. Н. Четверушкин, А. Е. Луцкий, Е. В. Шильников 990
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Разностная схема для разрывных решений уравнений Узаделя

М. М. Хапаев, М. Ю. Куприянов

1001



ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.44

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА
ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ, ВОЗМУЩЁННОГО
ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© А. С. Печенцов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: pechentsovas@rambler.ru

Поступила в редакцию 11.02.2024 г., после доработки 11.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Посвящается 85-летию моего учителя
академика Виктора Антоновича Садовниченко

В гильбертовом пространстве $L^2[0, +\infty)$ рассмотрено возмущение оператора Штурма–Лиувилля дельта-функцией Дирака. Гладкий потенциал, растущий на бесконечности, обеспечивает дискретность спектра невозмущённого оператора. Найдено распределение собственных значений возмущения и установлена асимптотика собственных значений в зависимости от параметров возмущения.

Ключевые слова: самосопряжённый оператор, дискретный спектр, собственное значение, асимптотика.

DOI: 10.31857/S0374064124070019, EDN: KONKUF

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в пространстве $L^2[0, +\infty)$ оператор $\mathcal{H}$, порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + a\delta(x-b)$$

и краевым условием Дирихле $y(0) = 0$, где δ — дельта-функция Дирака, $a > 0$, $b > 0$, вещественнозначная функция (потенциал) $q(x) \in C^2[0, +\infty)$ монотонно стремится к $+\infty$, причём $q'(x) > 0$, $q''(x) \geq 0$ при $x > 0$. Невозмущённый оператор $\mathcal{H}_0$, соответствующий значению $a = 0$, обладает дискретным спектром $\{\lambda_n^0\}_{n=0}^\infty$ таким, что $\lambda_{n+1}^0 > \lambda_n^0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_n^0 \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$. Собственная функция (с. ф.) $\phi_n(x)$, соответствующая собственному значению (с. з.) λ_n^0 , имеет n положительных нулей [1, § 5.12]. Следуя работам [2, 3], зададим оператор $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H}y = l_{a,b}[y]$$

с областью определения $\text{Dom } \mathcal{H}_{a,b} := \{y \in L^2[0, +\infty) : y(x) \in AC[0, +\infty), y'(x) \in AC([0, +\infty) \setminus \{b\}), y'(b+) - y'(b-) = ay(b), y(0) = 0, l_{a,b}[y] \in L^2[0, +\infty)\}$. Оператор $\mathcal{H}$ является самосопряжённым полуограниченным снизу с дискретным спектром $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ [4].

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $q(x)$ трижды дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, причём $q'(x) > 0$, $q''(x) \geq 0$ при $x > 0$ и $q^{(k)}(x)/q^{(k-1)}(x) = O(x^{-1})$, $x \rightarrow +\infty$, $k = 1, 2, 3$. Тогда собственные значения λ_n оператора $\mathcal{H}$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_0^0 < \lambda_0 < \lambda_1^0, \quad \lambda_n^0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}^0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. Если $q(x) = cx^k$, $k \geq 1$, $c > 0$, то собственные значения λ_n оператора $\mathcal{H}$ при $n \rightarrow \infty$ имеют асимптотику

$$\lambda_n = \alpha(k) n^{\frac{2k}{k+2}} \left(1 - \frac{k}{2(k+2)n} - \frac{2ka}{\pi(k+2)\sqrt{\alpha(k)}} n^{-\frac{2k+2}{k+2}} \sin \left(\int_0^b \sqrt{\lambda_n - q(t)} dt \right) \sin(\sqrt{\lambda_n} b) + o \left(n^{-\frac{2k+2}{k+2}} \right) \right),$$

где

$$\alpha(k) = \left(\frac{\pi k c^{1/k} \Gamma(3/2 + 1/k)}{\Gamma(3/2) \Gamma(1/k)} \right)^{2k/(k+2)},$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ В $L^2[0, +\infty)$

Для построения решения $y(x, \lambda) \in L^2[0, +\infty)$ уравнения

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \quad (1)$$

применим метод эталонных решений [5, 6]. В силу возрастания функции $q(x)$ уравнение $g(x) = \lambda$ при $\lambda > q(0)$ имеет единственное решение $p(\lambda)$, называемое *точкой поворота*, и эта точка поворота простая, т.е. $g'(p(\lambda)) \neq 0$. Сделаем замену переменной

$$\zeta = \zeta(x, \lambda) = \operatorname{sgn}(x - p(\lambda)) \left(\frac{3}{2} \int_x^{p(\lambda)} \sqrt{|(\lambda - q(t))|} dt \right)^{2/3}.$$

В качестве эталонных решений возьмём функции

$$u = u(x, \lambda) = B(x, \lambda) \operatorname{Ai}(\zeta), \quad v = v(x, \lambda) = B(x, \lambda) \operatorname{Bi}(\zeta),$$

где $B(x, \lambda) = (\zeta'(x, \lambda))^{-1/2}$, $\operatorname{Ai}(z)$, $\operatorname{Bi}(z)$ — функции Эйри, причём вронскиан $W[\operatorname{Ai}(z), \operatorname{Bi}(z)] = 1/\pi$ [7, гл. 11, § 1],

$$-u'' + (q - \lambda)u = K(x, \lambda)u,$$

$$K(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{5}{36} \frac{\lambda - q}{Q_1^2(x, \lambda)} - \frac{1}{4} \frac{q''}{\lambda - q} - \frac{5}{16} \left(\frac{q'}{\lambda - q} \right)^2, & Q_1(x, \lambda) = \int_x^{p(\lambda)} \sqrt{\lambda - q(t)} dt, \quad 0 \leq x < p(\lambda), \\ \frac{5}{36} \frac{q - \lambda}{Q_2^2(x, \lambda)} + \frac{1}{4} \frac{q''}{q - \lambda} - \frac{5}{16} \left(\frac{q'}{\lambda - q} \right)^2, & Q_2(x, \lambda) = \int_{p(\lambda)}^x \sqrt{q(t) - \lambda} dt, \quad p(\lambda) \leq x. \end{cases}$$

Следовательно, решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) формально удовлетворяет интегральному уравнению [8]

$$y(x, \lambda) = u(x, \lambda) - \int_x^{+\infty} G(x, s, \lambda) K(s, \lambda) y(s, \lambda) ds, \quad (2)$$

где

$$G(x, s, \lambda) = u(x, \lambda)v(s, \lambda) - u(s, \lambda)v(x, \lambda).$$

Если потенциал $q(x)$ трижды дифференцируем на полуоси $[0, +\infty)$ и при $x \rightarrow +\infty$ удовлетворяет условиям

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = O(x^{-1}), \quad \frac{q''(x)}{q'(x)} = O(x^{-1}), \quad \frac{q'''(x)}{q''(x)} = O(x^{-1}),$$

то при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедлива оценка [9, гл. 22, лемма 22.27(1)]

$$J(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{|K(s, \lambda)|}{\sqrt{|\lambda - q(s)|}} ds = O\left(\frac{1}{p(\lambda)\sqrt{\lambda}}\right).$$

Следовательно, метод итераций для решения интегрального уравнения (2) приводит к решению $y_1(x, \lambda)$ уравнения (1), имеющему представление

$$y_1(x, \lambda) = u(x, \lambda) + r_1(x, \lambda), \quad (3)$$

в котором при $\lambda \rightarrow +\infty$ выполняется равномерная по x оценка

$$|r_1(x, \lambda)| = O\left(\frac{1}{p(\lambda)\sqrt{\lambda}}\right) \quad (4)$$

на всей полуоси $x \geq 0$. При фиксированном λ и $x \rightarrow +\infty$ справедливо представление [9, гл. 22, лемма 22.27(2)]

$$y_1(x, \lambda) = u(x, \lambda) \left(1 + O\left(\frac{1}{x\sqrt{q(x)}}\right)\right) = B(x, \lambda) \text{Ai}(\zeta) \left(1 + O\left(\frac{1}{x\sqrt{q(x)}}\right)\right). \quad (5)$$

Для функции Эйри при $x \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотика [7, гл. 11, § 1]

$$\text{Ai}(x) = \frac{\exp\{-2x^{3/2}/3\}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}(1 + O(x^{-3/2})),$$

при $x > p(\lambda)$ —

$$B(x, \lambda) = \left(3/2 \int_{p(\lambda)}^x \sqrt{q(t) - \lambda} dt\right)^{1/6} (g(x) - \lambda)^{-1/4},$$

поэтому

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(q(x) - \lambda)^{1/4}} \exp\left\{-\int_{p(\lambda)}^x \sqrt{q(t) - \lambda} dt\right\} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

принадлежит пространству $L^2[0, +\infty)$, и в силу (3), (4) решение $y_1(x, \lambda) \in L^2[0, +\infty)$.

3. УРАВНЕНИЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}$

Рассмотрим второе решение $y_2(x, \lambda)$ уравнения (1) с условиями в точке b :

$$y_2(b, \lambda) = 0, \quad y_2'(b, \lambda) = 1,$$

которое удовлетворяет интегральному уравнению [4, гл. 1, лемма 1.7(1)]

$$y_2(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-b))}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_b^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-s)) q(s) y_2(s, \lambda) ds.$$

Собственная функция $\psi(x, \lambda)$ оператора $\mathcal{H}$ на луче $x \in [b, +\infty)$ пропорциональна функции $y_1(x, \lambda)$, а на отрезке $0 \leq x \leq b$ допускает представление

$$\psi(x, \lambda) = C_1(\lambda) y_1(x, \lambda) + C_2(\lambda) y_2(x, \lambda),$$

где коэффициенты $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ определяются из условий

$$\psi(x, \lambda) \in C[0, +\infty) \quad \text{и} \quad \psi'(b+, \lambda) - \psi'(b-, \lambda) = a\psi(b, \lambda).$$

Из системы линейных уравнений

$$C_1(\lambda)y_1(b, \lambda) + C_2(\lambda)y_2(b, \lambda) = y_1(b, \lambda), \quad C_1(\lambda)y_1'(b, \lambda) + C_2(\lambda)y_2'(b, \lambda) = y_1'(b, \lambda) - ay_1(b, \lambda)$$

находим

$$C_1(\lambda) = 1, \quad C_2(\lambda) = -ay_1(b, \lambda).$$

Таким образом,

$$\psi(x, \lambda) = \begin{cases} y_1(x, \lambda) - ay_1(b, \lambda)y_2(x, \lambda), & 0 \leq x \leq b, \\ y_1(x, \lambda), & x > b. \end{cases}$$

С учётом граничного условия $y(0) = 0$ заключаем, что спектр оператора $\mathcal{H}$ совпадает с множеством корней целой функции

$$\Delta(\lambda) := \psi(0, \lambda) = y_1(0, \lambda) - ay_1(b, \lambda)y_2(0, \lambda) = 0. \quad (6)$$

Собственные значения $\{\lambda_n^0\}_{n=0}^\infty$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ представляют собой нули функции $y_1(0, \lambda)$, занумерованные в порядке возрастания, а функции $\phi_n(x) = y_1(x, \lambda_n^0)$ являются собственными функциями оператора $\mathcal{H}_0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 базируется на следующих трёх леммах.

Лемма 1. На луче $(-\infty, \lambda_0^0]$ оператор $\mathcal{H}$ не имеет собственных значений.

Доказательство. Поскольку при $-\infty < \lambda < \lambda_0^0$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)} \right) = \frac{W[y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)]}{y_1^2(x, \lambda)} = \frac{y_1(b, \lambda)}{y_1^2(x, \lambda)},$$

то по теореме Лагранжа существует точка ξ_b , $0 < \xi_b < b$, такая, что

$$\frac{y_2(b, \lambda)}{y_1(b, \lambda)} - \frac{y_2(0, \lambda)}{y_1(0, \lambda)} = \frac{y_1(b, \lambda)b}{y_1^2(\xi_b, \lambda)}$$

и, следовательно,

$$\frac{\psi(0, \lambda)}{y_1(0, \lambda)} = 1 + a \frac{y_1^2(b, \lambda)b}{y_1^2(\xi_b, \lambda)} > 0,$$

поэтому $\psi(0, \lambda)$ не обращается в нуль на интервале $(-\infty, \lambda_1^0)$. Собственная функция $\phi_0(x) = y_1(x, \lambda_0^0)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ не имеет нулей при $x > 0$ и в силу (5) является положительной при $x > 0$, и тогда $y_1'(0, \lambda_0^0) > 0$. Из равенства

$$W[y_1(0, \lambda), y_2(0, \lambda)] = W[y_1(b, \lambda), y_2(b, \lambda)] \quad (7)$$

получаем $y_1(b, \lambda_0^0) = -y_1'(0, \lambda_0^0)y_2(0, \lambda_0^0)$. Следовательно, $y_2(0, \lambda_0^0) < 0$, поэтому

$$\Delta(\lambda_0^0) := \psi(0, \lambda_0^0) = ay_1'(0, \lambda_0^0)y_2^2(0, \lambda_0^0) > 0.$$

Таким образом, λ_0^0 не является собственным значением оператора $\mathcal{H}$. Лемма доказана.

Лемма 2. На интервале $(\lambda_0^0, \lambda_1^0)$ оператор $\mathcal{H}$ имеет только одно собственное значение λ_0 .

Доказательство. Найдём значение функции $\Delta(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_1^0$:

$$\Delta(\lambda_1^0) = \psi(0, \lambda_1^0) = -ay_1(b, \lambda_1^0)y_2(0, \lambda_1^0).$$

В силу (7) имеем $y_2(0, \lambda_1^0) = -y_1(b, \lambda_1^0)/y_1'(0, \lambda_1^0)$. Поэтому $\psi(0, \lambda_1^0) = ay_1^2(b, \lambda_1^0)/y_1'(0, \lambda_1^0)$, причём $y_1'(0, \lambda_1^0) < 0$ (собственная функция $\phi_1(x) = y_1(x, \lambda_1^0)$ оператора $\mathcal{H}_0$ имеет один положительный нуль x_1^0 , в котором $y_1'(x_1^0, \lambda_1^0) > 0$, следовательно, $y_1'(0, \lambda_1^0) < 0$). Если b не является нулём с. ф. $\phi_1(x) = y_1(x, \lambda_1^0)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$, то $\Delta(\lambda_1^0) < 0$. Тогда на концах отрезка $[\lambda_0^0, \lambda_1^0]$ непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ принимает значения разных знаков, следовательно, на интервале $(\lambda_0^0, \lambda_1^0)$ существует нуль этой функции, обозначим его λ_0 . Если b является нулём с. ф. $\phi_1(x) = y_1(x, \lambda_1^0)$, то $\Delta(\lambda_1^0) = 0$ и λ_1^0 является с. з. оператора $\mathcal{H}$. В этом случае возьмём $\tilde{\lambda}$ из достаточно малой левой полуокрестности точки λ_1^0 , в которой $\Delta(\tilde{\lambda}) < 0$. Тогда на концах отрезка $[\lambda_0^0, \tilde{\lambda}]$ непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ принимает значения разных знаков и на интервале $(\lambda_0^0, \tilde{\lambda})$ существует нуль этой функции. Покажем, что λ_0 является единственным нулём функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(\lambda_0^0, \lambda_1^0)$.

Предположим, что существует ещё один нуль функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(\lambda_0^0, \lambda_1^0)$, обозначим его $\tilde{\lambda}$ и для определённости будем считать, что $\lambda_0 < \tilde{\lambda}$. Нули решения уравнения (1) являются непрерывными функциями от λ [10, гл. 3, лемма 3.1] и при увеличении λ каждый нуль x_λ передвигается вправо [10, гл. 3, теорема 3.2]. Поэтому функция $\psi(x, \tilde{\lambda})$ имеет положительный нуль $\tilde{x}_{1, \tilde{\lambda}}$ — результат сдвига вправо нуля $\tilde{x}_{1, \lambda_0} = 0$ при увеличении λ от λ_0 до $\tilde{\lambda}$. Решение $\phi_1(x) = y_1(x, \lambda_1^0)$ уравнения (1) при $\lambda = \lambda_1^0$ имеет только один положительный нуль $x_{1, \lambda_1^0}^0$ — результат сдвига вправо нуля $x_{1, \lambda_0}^0 = 0$ решения $y_1(x, \lambda_0^0)$ при увеличении λ от λ_0^0 до λ_1^0 , причём $\tilde{x}_{1, \tilde{\lambda}} \leq x_{1, \lambda_1^0}^0$. По теореме Штурма [10, гл. 3, теорема 3.1] между двумя нулями $\tilde{x}_{2, \tilde{\lambda}} = 0 < \tilde{x}_{1, \tilde{\lambda}}$ решения $\psi(x, \tilde{\lambda})$ уравнения (1) при $\lambda = \tilde{\lambda} < \lambda_1^0$ заключён по крайней мере один нуль решения $\phi_1(x) = y_1(x, \lambda_1^0)$ уравнения (1) при $\lambda = \lambda_1^0$. Полученное противоречие доказывает единственность нуля функции $\Delta(\lambda)$ на интервале $(\lambda_0^0, \lambda_1^0)$, а следовательно, единственность с. з. λ_0 оператора $\mathcal{H}$ на интервале $(\lambda_0^0, \lambda_1^0)$. Лемма доказана.

Лемма 3. На промежутке $[\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0)$ оператор $\mathcal{H}$ имеет только одно собственное значение λ_n , $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Delta(\lambda)$ на отрезке $[\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0]$, $n \in \mathbb{N}$. Из равенства (7) следует, что

$$\Delta(\lambda_n^0)\Delta(\lambda_{n+1}^0) = a^2 \frac{y_1^2(b, \lambda_n^0)y_1^2(b, \lambda_{n+1}^0)}{y_1'(0, \lambda_n^0)y_1'(0, \lambda_{n+1}^0)} = a^2 \frac{y_1^2(b, \lambda_n^0)y_1^2(b, \lambda_{n+1}^0)}{\phi_n'(0)\phi_{n+1}'(0)}.$$

Так как $\phi_n'(0)\phi_{n+1}'(0) < 0$, то $\Delta(\lambda_n^0)\Delta(\lambda_{n+1}^0) < 0$, если b не является нулём с. ф. $\phi_n(x), \phi_{n+1}(x)$. В этом случае непрерывная функция $\Delta(\lambda)$ на концах отрезка $[\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, принимает значения с разными знаками. Следовательно, существует нуль $\lambda_n \in (\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0)$ функции $\Delta(\lambda)$. Если b является нулём с. ф. $\phi_n(x)$, то $\Delta(\lambda_n^0) = 0$ и λ_n^0 является с. з. оператора $\mathcal{H}$. Доказательство единственности с. з. λ_n на промежутке $[\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0)$ проведём по индукции. При $n = 0$ справедливость этого утверждения доказана в лемме 2. Предположим, что на промежутке $[\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0)$, $n \in \mathbb{N}$, оператор $\mathcal{H}$ имеет только одно с. з. λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что с. ф. $\phi_{n+1}(x)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ имеет $n+1$ положительных нулей [1, § 5.12] $0 = x_{n+1,0}^0 < x_{n+1,1}^0 < x_{n+1,2}^0 < \dots < x_{n+1,n+1}^0$, а с. ф. $\psi_n(x) = \psi(x, \lambda_n)$ оператора $\mathcal{H}$ имеет n положительных нулей $0 = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$. При переходе на следующий промежуток $[\lambda_{n+1}^0, \lambda_{n+2}^0)$ с. ф. $\phi_{n+2}(x)$ невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ будет иметь $n+2$ положительных нулей: $0 = x_{n+2,0}^0 < x_{n+2,1}^0 < x_{n+2,2}^0 < \dots < x_{n+2,n+2}^0$, а с. ф. $\psi_{n+1}(x) = \psi(x, \lambda_{n+1})$ оператора $\mathcal{H}$ будет иметь $n+1$ положительных нулей: $0 = x_{n+1,0} < x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n+1,n+1}$. Допустим, что на промежутке $[\lambda_{n+1}^0, \lambda_{n+2}^0)$ существует ещё с. з. $\tilde{\lambda}$ (помимо λ_{n+1}) оператора $\mathcal{H}$, для определённости считаем, что $\lambda_{n+1} < \tilde{\lambda}$. Тогда с. ф. $\tilde{\psi}(x) = \psi(x, \tilde{\lambda})$, отвечающая с. з. $\tilde{\lambda}$, будет иметь $n+2$ положительных нулей: $0 = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{n+2}$ (результат сдвига вправо

нулей $0 = x_{n+1,0} < x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n+1,n+1}$ при увеличении λ от λ_{n+1} до $\tilde{\lambda}$. По теореме Штурма [10, гл. 3, теорема 3.1] между этими двумя нулями решения $\tilde{\psi}(x)$ уравнения (1) при $\lambda = \tilde{\lambda} < \lambda_{n+2}^0$ заключён по крайней мере один нуль решения $\phi_{n+2}(x) = y_1(x, \lambda_{n+2}^0)$ того же уравнения при $\lambda = \lambda_{n+2}^0$. Следовательно, с. ф. $\phi_{n+2}(x)$ должна иметь не менее $n+3$ положительных нулей. Полученное противоречие доказывает единственность с. з. на промежутке $[\lambda_n^0, \lambda_{n+1}^0)$, $n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

5. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}$

Из доказанной теоремы 1 следует, что с. з. λ_n имеют представление $\lambda_n = \lambda_n^0 + \epsilon_n$, $0 \leq \epsilon_n < \lambda_{n+1}^0 - \lambda_n^0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для нахождения асимптотики λ_n^0 при $n \rightarrow \infty$ потребуются наложить дополнительные ограничения на “правильность” роста потенциала $q(x)$. Если $q''(x) = o((q'(x))^{4/3})$ при $x \rightarrow +\infty$, то [1, § 7.3]

$$n \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{p(\lambda_n^0)} \sqrt{\lambda_n^0 - q(t)} dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, при $q(x) = cx^k$, $k \geq 1$, $c > 0$, вычисляя

$$I(\lambda_n^0) = \int_0^{p(\lambda_n^0)} \sqrt{\lambda_n^0 - ct^k} dt = \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(1/k)}{kc^{1/k} \Gamma(3/2 + 1/k)} (\lambda_n^0)^{\frac{k+2}{2k}}, \quad (8)$$

получаем при $n \rightarrow \infty$ эквивалентность

$$\lambda_n^0 \sim \alpha(k) n^{\frac{2k}{k+2}}, \quad \alpha(k) = \left(\frac{\pi k c^{1/k} \Gamma(3/2 + 1/k)}{\Gamma(3/2) \Gamma(1/k)} \right)^{\frac{2k}{k+2}}. \quad (9)$$

Пример 1 [11, 12]. Если $q(x) = x$, то

$$\lambda_n^0 = \left(\frac{3}{2} \pi n \right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{6n} + \left(\frac{5}{108\pi^2} - \frac{1}{144} \right) \frac{1}{n^2} + O(n^{-3}) \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = \left(\frac{3}{2} \pi n \right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{a \sin^2(b(3\pi n/2)^{1/3})}{(3\pi n/2)^{4/3}} + O(n^{-5/3}) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Пример 2 [13]. Если $q(x) = (x^2 - 2)/4$, то $\lambda_n^0 = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = 2n - 1 + \sqrt{2} a \pi^{-3/2} \frac{\sin^2(b\sqrt{2n})}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для потенциалов $q(x) = cx^k$, $k \geq 1$, $c > 0$, уточним асимптотику (9) для λ_n^0 при $n \rightarrow \infty$. Из (3), (4) следует, что λ_n^0 являются корнями уравнения

$$B(0, \lambda_n^0) \text{Ai}(\zeta(0, \lambda_n^0)) + O((\lambda_n^0)^{-\frac{k+2}{2k}}) = 0.$$

При $x < p(\lambda)$

$$B(x, \lambda) = \left(\frac{3}{2} \int_x^{p(\lambda)} \sqrt{\lambda - ct^k} dt \right)^{1/6} (\lambda - q(x))^{-1/4}, \quad (10)$$

поэтому в силу (8)

$$B(0, \lambda_n^0) = \frac{(3I(\lambda_n^0)/2)^{1/6}}{(\lambda_n^0)^{1/4}} = O((\lambda_n^0)^{\frac{1-k}{6k}})$$

и, следовательно, λ_n^0 являются корнями уравнения

$$\text{Ai}(\zeta(0, \lambda_n^0)) = O((\lambda_n^0)^{-\frac{2k+7}{6k}}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Корни последнего уравнения лежат вблизи нулей функции Эйри $\text{Ai}(x)$ при $\lambda_n^0 \rightarrow +\infty$ и имеют вид

$$\zeta(0, \lambda_n^0) = a_n + \epsilon_n, \quad \text{Ai}(a_n) = 0, \quad \epsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Для нулей функции Эйри известно полное асимптотическое разложение по степеням n при $n \rightarrow \infty$ [7, с. 388]

$$a_n \sim -\left(\frac{3}{8}\pi(4n-1)\right)^{2/3}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как

$$\zeta(0, \lambda_n^0) = -\left(\frac{3}{2}I(\lambda_n^0)\right)^{2/3} = -\left(\frac{3}{2}\alpha_k\right)^{2/3}(\lambda_n^0)^{\frac{k+2}{3k}},$$

то в силу (11)

$$\lambda_n^0 \sim \alpha(k)\left(n - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2k}{k+2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 2. Требуется найти асимптотику при $\lambda \rightarrow +\infty$ корней уравнения (6), в котором для решения $y_1(x, \lambda)$ справедливо представление (3) с оценкой (4), а для решения $y_2(x, \lambda)$ справедливо представление [1, § 1.7, лемма 1.7(2)]

$$y_2(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-b))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}),$$

причём оценки выполняются равномерно по x . Функция Эйри $\text{Ai}(-x)$ имеет следующее асимптотическое представление при $x \rightarrow +\infty$ [7, с. 377]:

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x^{1/4}}} \left\{ \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3}) \right\}.$$

Тогда, в силу (10), получаем асимптотическое представление при $\lambda \rightarrow +\infty$ эталонного решения

$$u(x, \lambda) = B(x, \lambda)\text{Ai}(\zeta(x, \lambda)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\lambda - q(x))^{1/4}} \left\{ \cos\left(\frac{2}{3}(-\zeta(x, \lambda))^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O((- \zeta)^{-3}) \right\},$$

а уравнение на собственные значения оператора $\mathcal{H}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ можем записать как

$$\cos\left(\frac{2}{3}(-\zeta(0, \lambda))^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{a}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{2}{3}(-\zeta(b, \lambda))^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin(\sqrt{\lambda}b) = O(\lambda^{-\frac{k+2}{2k}}). \quad (12)$$

Корни уравнения (12) лежат вблизи нулей функции $\cos(2(-\zeta(0, \lambda))^{3/2}/3 - \pi/4)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и имеют вид

$$\frac{2}{3}(-\zeta(0, \lambda_n))^{3/2} - \frac{\pi}{4} = \pi n - \frac{\pi}{2} + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как

$$\frac{2}{3}(-\zeta(0, \lambda_n))^{3/2} = I(\lambda_n) = \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(1/k)}{k c^{1/k} \Gamma(3/2 + 1/k)} (\lambda_n)^{\frac{k+2}{2k}},$$

то асимптотика собственных значений будет следующей:

$$\lambda_n = \alpha(k) n^{\frac{2k}{k+2}} \left(1 - \frac{k}{2(k+2)n} + \frac{2k}{\pi(k+2)} \frac{\epsilon_n}{n} + O(n^{-2}) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Учитывая равенство

$$\frac{2}{3}(-\zeta(b, \lambda_n))^{3/2} = \frac{2}{3}(-\zeta(0, \lambda_n))^{3/2} - \int_0^b \sqrt{\lambda_n - q(t)} dt$$

и асимптотики $\sin \varepsilon_n = \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^3)$, $\cos \varepsilon_n = 1 + O(\varepsilon_n^2)$ при $n \rightarrow \infty$, из (12) получаем оценку для ε_n :

$$\varepsilon_n = -a \sin \left(\int_0^b \sqrt{\lambda_n - q(t)} dt \right) \sin(\sqrt{\lambda_n} b) (\alpha(k))^{-1/2} n^{-\frac{k}{k+2}} + o(n^{-\frac{k}{k+2}}).$$

Ввиду (13) получаем

$$\lambda_n = \alpha(k) n^{\frac{2k}{k+2}} \left(1 - \frac{k}{2(k+2)n} - \frac{2ka}{\pi(k+2)\sqrt{\alpha(k)}} n^{-\frac{2k+2}{k+2}} \sin \left(\int_0^b \sqrt{\lambda_n - q(t)} dt \right) \sin(\sqrt{\lambda_n} b) + o(n^{-\frac{2k+2}{k+2}}) \right).$$

Теорема 2 доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш, Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э.Ч. Титчмарш ; пер. с англ. В.Б. Лидского ; под ред. Б.М. Левитана. — М. : ИЛ, 1960. — Т. 1. — 278 с.
2. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 1. — С. 897–912.
3. Савчук, А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.
4. Albeverio, S. Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set / S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud // J. Math. Phys. — 2010. — V. 51, — Art. 102102.
5. Аленицын, А.Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля в случае предельного круга / А.Г. Аленицын // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 3. — С. 428–437.
6. Муртазин, Х.Х. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля / Х.Х. Муртазин, Т.Г. Амангильдин // Мат. сб. — 1979. — Т. 110 (151), № 1 (9). — С. 135–139.
7. Олвер, Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер ; пер. с англ. Ю.А. Брычкова ; под ред. А.П. Прудникова. — М. : Наука, 1990. — 528 с.
8. Giertz, M. On the solutions in $L^2[-\infty, +\infty)$ of $y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0$ when q is rapidly increasing / M. Giertz // Proc. London Math. Soc. — 1964. — Ser. 3, № 14. — P. 53–73.
9. Титчмарш, Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Э.Ч. Титчмарш ; пер. с англ. В.Б. Лидского ; под ред. Б.М. Левитана. — М. : ИЛ, 1961. — Т. 2. — 550 с.

10. Левитан, Б.М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
11. Печенцов, А.С. Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого δ -функцией Дирака / А.С. Печенцов // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 8. — С. 1058–1063.
12. Печенцов, А.С. Распределение спектра одного сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого δ -функцией Дирака / А.С. Печенцов, А.Ю. Попов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 168–179.
13. Печенцов, А.С. Распределение спектра оператора Вебера, возмущённого δ -функцией Дирака / А.С. Печенцов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1032–1038.

DISTRIBUTION OF SPECTRUM OF STURM–LIOUVILLE OPERATOR PERTURBED BY DELTA INTERACTION

A. S. Pechentsov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: pechentsovas@rambler.ru

We consider singular Sturm–Liouville operator, perturbed by Dirac delta function. The smooth potential grows at infinity and ensures the discreteness of the spectrum of the unperturbed operator. We study the distribution of the perturbed operator and establish asymptotic behavior of the eigenvalues depending on the parameters of the perturbation.

Keywords: self-adjoint operator, discrete spectrum, eigenvalue, asymptotic.

REFERENCES

1. Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations*, Oxford: Clarendon Press, 1946, vol. 1.
2. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with singular potentials, *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753.
3. Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A., Sturm–Liouville operators with distribution potentials, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2003, vol. 64, pp. 143–192.
4. Albeverio, S., Kostenko, A., Malamud, M. Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interaction on a discrete set, *J. Math. Phys.*, 2010, vol. 51, art. 102102.
5. Alenizin, A.G., Asimptotika spektra operatora Sturma–Liouville v sluchae predelnogo kruga (Asymptotic behavior of the spectrum of a Sturm–Liouville operator in the case of a limit circle), *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 428–437.
6. Murtazin, Kh.Kh. and Amangil'din T.G., The asymptotic expansion of the spectrum of a Sturm–Liouville operator, *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 38, no. 1, pp. 127–141.
7. Olver, F.W.J., *Asymptotics and Special Functions*, New York: Academic Press, 1974.
8. Gieritz, M., On the solutions in $L^2[-\infty, +\infty)$ of $y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0$ when q is rapidly increasing, *Proc. London Math. Soc.*, 1964, ser. 3, no. 14, pp. 53–73.
9. Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations*, Oxford: Clarendon Press, 1946, vol. 2.
10. Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., *Sturm–Liouville and Dirac Operators*, Dordrecht: Kluwer, 1991.
11. Pechentsov, A.S., Distribution of the spectrum of a singular positive Sturm–Liouville operator perturbed by the Dirac delta function, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 8, pp. 1029–1034.
12. Pechentsov, A.S. and Popov, A.Yu., Distribution of the spectrum of a singular Sturm–Liouville operator perturbed by the Dirac delta function, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 169–180.
13. Pechentsov, A.S., Spectral distribution of the Weber operator perturbed by the Dirac delta function, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1003–1009.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.622

СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ
УРАВНЕНИЙ С ФАКТОРИЗОВАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© П. Н. Вабищевич

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь**e-mail: vab@cs.msu.ru, vabishchevich@gmail.com**Поступила в редакцию 10.01.2024 г., после доработки 10.01.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

При приближённом решении задачи Коши для эволюционных уравнений оператор задачи часто можно представить в виде суммы более простых операторов. Это даёт возможность строить операторно-разностные схемы расщепления, когда переход на новый слой по времени обеспечивается решением задач для отдельных операторных слагаемых. В статье рассмотрены нестационарные задачи, основная особенность которых связана с представлением оператора задачи в виде произведения оператора A и его сопряжённого оператора A^* . На основе трансформации исходного уравнения к системе двух уравнений строятся аппроксимации по времени для эволюционных уравнений второго порядка, когда аддитивное представление имеет место для оператора A . Предложены безусловно устойчивые схемы расщепления, исследования которых выполнены с привлечением общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем в гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, факторизованный оператор, трёхслойная схема, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0374064124070024, EDN: KOFBCW

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих прикладных задач необходимо приближённо решить задачу Коши для эволюционных уравнений первого и второго порядков и их систем. Можно выделить класс нестационарных задач, характерной особенностью которых является то, что основная часть оператора задачи представляется произведением двух операторов. В качестве примера можно привести задачи с квадратом эллиптического оператора второго порядка, в частности, эволюционные уравнения второго порядка с бигармоническим оператором являются типичными для механики тонких тел [1, гл. 1; 2, гл. 13].

При аппроксимации по времени основное внимание уделяется безусловно устойчивым неявным схемам [3, гл. 6; 4, гл. 9]. В теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [5, гл. 2, 3; 6, гл. 2, 4] получены не улучшаемые результаты по устойчивости двух- и трёхслойных схем в конечномерных гильбертовых пространствах. Основные недостатки неявных схем связаны со сложностью нахождения приближённого решения на новом слое по времени. Вычислительная сложность решения нестационарных задач может быть уменьшена при переходе к решению последовательности более простых задач.

Упрощение задачи на новом слое по времени наиболее просто реализуется для эволюционных задач, когда оператор задачи представляется в виде суммы простых операторов. Для таких задач строятся аддитивные операторно-разностные схемы, которые связаны с той

или иной неоднородной аппроксимацией по времени для отдельных слагаемых оператора задачи. Традиционный подход основан на явно- неявных аппроксимациях [7; 8, гл. 4], когда одна часть оператора задачи берётся с нижнего слоя по времени (явная аппроксимация), а другая — с верхнего (неявная аппроксимация). Наиболее последовательно эта идея аппроксимации по времени реализуется при построении схем расщепления [9; 10, гл. 3, 4], в этом случае переход на новый слой во времени осуществляется решением эволюционных задач для отдельных операторных членов.

Можно выделить эволюционные задачи, в которых оператор представлен как произведение двух или более операторов. В качестве примера отметим нестационарные задачи с переменными весовыми множителями, которые рассмотрены в работе [6, гл. 3, 5]. Для упрощения задач с произведением операторов на новом слое по времени строятся специальные временные аппроксимации, например, в статье [11] построены схемы, основанные на решении дискретной задачи на новом временном уровне с одним операторным коэффициентом. В работе [12] рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения второго порядка, в которой оператор задачи включает в себя произведение оператора A на его сопряжённый оператор A^* , построены безусловно устойчивые схемы, вычислительная реализация которых обеспечивается раздельным решением задач для операторов A и A^* и их отдельных операторных слагаемых.

В настоящей работе строятся схемы расщепления на основе аддитивного представления для отдельных операторных множителей A и A^* , когда $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$. Переход на новый слой по времени обеспечивается решением более простых задач для $A_\alpha^* A_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. За счёт введения новых искомым величин выполняется трансформация от эволюционного уравнения второго порядка к системе эволюционных уравнений первого порядка с аддитивным представлением операторной матрицы. Схемы расщепления для системы уравнений строятся и исследуются на основе теории аддитивных операторно-разностных схем.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения второго порядка в конечномерном гильбертовом пространстве H (для упрощения ограничимся однородным уравнением):

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + B \frac{dw}{dt} + A^* A w = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$w(0) = w^0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = \tilde{w}^0. \quad (2)$$

Будем считать, что операторы A и B в (1) постоянны (не зависят от t) и являются положительным и неотрицательным соответственно:

$$A > 0, \quad B \geq 0. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) возникает, например, после дискретизации по пространственным переменным при численном решении начально-краевых задач для гиперболических уравнений. Ключевая особенность рассматриваемой задачи связана с тем, что оператор A входит в уравнение (1) как произведение $A^* A$. Типичным примером частного случая $A = A^*$ является бигармонический оператор.

Для функций $u, v \in H$ определено скалярное произведение (u, v) и норма $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. С самосопряжённым положительно определённым оператором S свяжем гильбертово пространство H_S со скалярным произведением $(u, v)_S = (Su, v)$ и нормой $\|u\|_S = (u, v)_S^{1/2}$.

Предметом настоящего исследования является аппроксимация по времени для уравнения (1). Интересны, прежде всего, безусловно устойчивые схемы для приближённого решения задачи (1)–(3), которые удобны для вычислительной реализации. При получении соответствующих оценок устойчивости приближённого решения сопоставим их с априорными оценками для дифференциальной задачи.

Умножим уравнение (1) скалярно в H на dw/dt и получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{dw}{dt} \right\|^2 + \|Aw\|^2 \right) + \left(B \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) = 0.$$

С учётом (2), (3) из этого равенства следует оценка

$$\left\| \frac{dw}{dt} \right\|^2 + \|Aw\|^2 \leq \|\tilde{w}^0\| + \|Aw^0\|, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

обеспечивающая устойчивость решения задачи (1)–(3) по начальным данным.

Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом τ и обозначим $u^n = u(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, \dots, N$, $N\tau = T$. В качестве базовой схемы для численного решения задачи (1)–(3) будем применять трёхслойную схему с весом σ ($\sigma = \text{const}$):

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + B \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + A^* A (\sigma u^{n+1} + (1 - 2\sigma)u^n + \sigma u^{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

при начальных условиях

$$u^0 = w^0, \quad u^1 = \bar{w}^1. \quad (6)$$

Задание второго начального условия (6) требует отдельного обсуждения. На решениях задачи (1), (2) имеем

$$w(\tau) = w(0) + \tau \frac{dw}{dt}(0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 w}{dt^2}(\tau) + \mathcal{O}(\tau^3) = w^0 + \tau \tilde{w}^0 - \frac{\tau^2}{2} B \frac{dw}{dt}(\tau) - \frac{\tau^2}{2} A^* A w(\tau) + \mathcal{O}(\tau^3).$$

Простейшие явные аппроксимации дают значения

$$\bar{w}^1 = \left(I - \frac{\tau^2}{2} A^* A \right) w^0 + \tau \left(I - \frac{\tau}{2} B \right) \tilde{w}^0,$$

где I — единичный оператор в H . При их использовании нужно обеспечить повышенные требования к гладкости начальных условий (3). В силу этого будем ориентироваться на неявные аппроксимации

$$\left(I + \frac{\tau}{2} B + \frac{\tau^2}{2} A^* A \right) \bar{w}^1 = \left(I + \frac{\tau}{2} B \right) w^0 + \tau \tilde{w}^0$$

при нахождении решения на момент времени $t = \tau$.

Разностная схема (5), (6) аппроксимирует задачу (1), (2) со вторым порядком по τ . Сформулируем условия безусловной устойчивости этой схемы.

Теорема 1. *Трёхслойная операторно-разностная схема (5), (6) для приближённого решения задачи (1)–(3) безусловно устойчива при $\sigma \geq 1/4$, причём для решения выполнена оценка*

$$\left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right\|_C^2 + \left\| A \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right\|^2 \leq \left\| \frac{\bar{w}^1 - w^0}{\tau} \right\|_C^2 + \left\| A \frac{\bar{w}^1 + w^0}{2} \right\|^2 \quad (7)$$

для всех $n = 1, \dots, N-1$ при

$$C = I + (\sigma - 1/4) A^* A.$$

Доказательство. Принимая во внимание равенство

$$u^n = \frac{u^{n+1} + 2u^n + u^{n-1}}{4} - \frac{\tau^2}{4} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2},$$

перепишем (5) в виде

$$C \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + B \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + A^* A \frac{u^{n+1} + 2u^n + u^{n-1}}{4} = 0. \quad (8)$$

При использовании переменных

$$s^n = \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, \quad r^n = \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$$

уравнение (8) даёт соотношение

$$C \frac{r^{n+1} - r^n}{\tau} + B \frac{r^{n+1} + r^n}{2} + A^* A \frac{s^{n+1} + s^n}{2} = 0,$$

домножив которое на

$$2(s^{n+1} - s^n) = \tau(r^{n+1} + r^n),$$

получим

$$(Cr^{n+1}, r^{n+1}) + (A^* As^{n+1}, s^{n+1}) \leq (Cr^n, r^n) + (A^* As^n, s^n).$$

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая, что $C > 0$ при $\sigma \geq 1/4$, получаем искомую оценку (7). Теорема доказана.

Априорная оценка (7) выступает дискретным аналогом оценки (4). На новом $(n+1)$ -м слое по времени для схемы (5), (6) решается задача

$$(I + \tau B/2 + \sigma \tau^2 A^* A)u^{n+1} = \varphi^n \quad (9)$$

с известной правой частью

$$\varphi^n = (2 + (2\sigma - 1)\tau^2 A^* A)u^n - (1 - \tau B/2 + \sigma \tau^2 A^* A)u^{n-1}.$$

Вычислительные трудности решения этой дискретной задачи обусловлены не только сложностью операторов A , B , но и необходимостью работать с факторизованным оператором A^*A . Схемы расщепления базируются на аддитивном представлении операторов уравнения и использовании явно-неявных аппроксимаций по времени для упрощения задачи на новом слое.

Рассмотрим новый класс задач, сложность которых на новом слое по времени обусловлена прежде всего факторизованным оператором A^*A . Будем считать, что для операторов A и B имеет место аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha, \quad B = \sum_{\alpha=1}^p B_\alpha, \quad B_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (10)$$

Построим аддитивные операторно-разностные схемы и вместо задачи (9) решим p более простых задач

$$(I + \sigma_B \tau B_\alpha \tau + \sigma_A \tau^2 A_\alpha^* A_\alpha)v_\alpha^{n+1} = \varphi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

для нахождения приближённого решения u^{n+1} .

2. ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Схемы расщепления для задачи (1), (2), (10) будем строить на основе перехода от уравнения (1) к системе двух уравнений:

$$\frac{dw}{dt} + Bw + A^*y = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} - Aw = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (12)$$

Удобно записать систему (11), (12) в виде векторного уравнения первого порядка. Для нахождения вектора $\mathbf{w} = \{w, y\}$ получим задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{w} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (13)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}^0, \quad (14)$$

где $\mathbf{w}^0 = \{w^0, y^0\}$. С учётом (2), (3) начальное условие для уравнения (12) следует из уравнения (11):

$$A^*y^0 = -Bw^0 - \tilde{w}^0.$$

Для операторной матрицы $\mathbf{A}$ имеем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} B & A^* \\ -A & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Будем рассматривать задачу (13)–(15) на прямой сумме пространств $\mathbf{H} = H \oplus H$, когда для $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{H}$ скалярное произведение и норма определяются как

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (w_1, w_2) + (y_1, y_2), \quad \|\mathbf{w}\| = (\mathbf{w}, \mathbf{w})^{1/2}.$$

Принимая во внимание (3), получаем

$$\mathbf{A} \geq 0. \quad (16)$$

Неотрицательность оператора $\mathbf{A}$ позволяет нам рассчитывать на априорные оценки для решений $\mathbf{w}$ задачи (13)–(15). Домножив уравнение (13) скалярно в $\mathbf{H}$ на $\mathbf{w}$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + (\mathbf{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0.$$

Отсюда с учётом (16) имеем априорную оценку

$$\|\mathbf{w}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{w}^0\|^2, \quad (17)$$

которую можно записать в виде неравенства

$$\|w(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 \leq \|w^0\|^2 + \|y^0\|^2$$

при рассмотрении решения задачи Коши для системы уравнений (11), (12).

3. СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Для численного решения задачи Коши (13)–(15) будем использовать двухслойные схемы с весами. Приближённое решение $\mathbf{u}^n = \{u^n, v^n\}$ на новом слое по времени находится из задачи

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + \mathbf{A}(\sigma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \sigma)\mathbf{u}^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (18)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{w}^0. \quad (19)$$

Для этой схемы при стандартных ограничениях $\sigma \geq 1/2$ имеем дискретный аналог априорной оценки (17):

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \leq \|\mathbf{w}^0\|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (20)$$

Вычислительная реализация схемы (18), (19) связана с формулированием отдельных задач для нахождения компонент решения на новом слое по времени. Уравнение (18) даёт

$$\begin{aligned} (I + \sigma\tau B) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \sigma\tau A^* \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + Bu^n + A^*v^n &= 0, \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \sigma\tau A \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - Au^n &= 0. \end{aligned}$$

Подставив выражение $v^{n+1} - v^n$ из второго уравнения в первое, получим

$$(I + \sigma\tau B + \sigma^2\tau^2 A^* A) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (B + \sigma\tau A^* A)u^n + A^*v^n = 0. \quad (21)$$

Аналогичная задача решается при использовании трёхслойной схемы (5) при аппроксимации исходного эволюционного уравнения второго порядка (1). После решения задачи для нахождения u^{n+1} рассчитывается v^{n+1} :

$$v^{n+1} = v^n + \sigma\tau A(u^{n+1} - u^n) + \tau Au^n. \quad (22)$$

Можно строить схемы расщепления для приближённого решения задачи Коши (13)–(15), которые связываются с аддитивным расщеплением оператора [9; 10, гл. 3]. Принимая во внимание (10) и (15), для операторной матрицы $\mathbf{A}$ имеем аддитивное представление

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^p \mathbf{A}_\alpha, \quad \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (23)$$

в котором

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} B_\alpha & A_\alpha^* \\ -A_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (24)$$

После расщепления (23), (24) можно использовать различные аддитивные операторно-разностные схемы для приближённого решения задачи (13)–(15). Особо выделим случай двухкомпонентного расщепления ($p=2$), когда применяются операторные аналогии классических схем переменных направлений [3, гл. 9; 10, гл. 4], среди которых отметим факторизованные схемы. При большем числе операторных слагаемых ($p \geq 2$) используются схемы покомпонентного расщепления первого и второго порядков аппроксимации по времени [9; 10, гл. 5], которые базируются на понятии суммарной аппроксимации [3, гл. 9]. Среди схем полной аппроксимации выделим регуляризованные (аддитивно-усреднённые) схемы [10, гл. 6]

и векторные аддитивные схемы [10, гл. 8]. Рассмотрим возможности построения обычных схем покомпонентного расщепления для приближённого решения задачи (13)–(15), (23), (24).

При использовании схемы покомпонентного расщепления приближённое решение на новом слое по времени определяется последовательным решением p задач:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \mathbf{A}_\alpha(\sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (25)$$

Сформулируем основной результат об устойчивости по начальным данным рассматриваемой схемы расщепления.

Теорема 2. Аддитивная операторно-разностная схема (19), (25) для приближённого решения задачи (13)–(15) безусловно устойчива при расщеплении (23), (24) и $\sigma \geq 1/2$ с выполнением оценки (20).

Доказательство. Домножим скалярно в $\mathbf{H}$ уравнение (25) на $\sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}$. Принимая во внимание (23), получаем

$$(\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}, \sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}) \leq 0. \quad (26)$$

С учётом того что

$$\sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p} = (\mathbf{u}^{n+\alpha/p} + \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p})/2 + (\sigma - 1/2)(\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}),$$

при ограничениях на вес $\sigma \geq 1/2$ для левой части (26) имеем

$$2(\mathbf{u}^{n+\alpha/p} - \mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}, \sigma \mathbf{u}^{n+\alpha/p} + (1-\sigma)\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}) \geq \|\mathbf{u}^{n+\alpha/p}\|^2 - \|\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}\|^2.$$

Приходим к неравенствам

$$\|\mathbf{u}^{n+\alpha/p}\|^2 \leq \|\mathbf{u}^{n+(\alpha-1)/p}\|^2, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

из которых следует искомая оценка устойчивости (20). Теорема доказана.

Вычислительная реализация рассматриваемой схемы покомпонентного расщепления базируется на использовании системы уравнений

$$\begin{aligned} (I + \sigma\tau B_\alpha) \frac{u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \sigma\tau A_\alpha^* \frac{v^{n+\alpha/p} - v^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + B_\alpha u^{n+(\alpha-1)/p} + A_\alpha^* v^{n+(\alpha-1)/p} &= 0, \\ \frac{v^{n+\alpha/p} - v^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \sigma\tau A_\alpha \frac{u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} - A_\alpha u^{n+(\alpha-1)/p} &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Аналогично (21), (22) последовательно определяются отдельные компоненты решения $\mathbf{u}^{n+\alpha/p} = \{u^{n+\alpha/p}, v^{n+\alpha/p}\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$: сначала находится $u^{n+\alpha/p}$ из решения задачи

$$(I + \sigma\tau B_\alpha + \sigma^2\tau^2 A_\alpha^* A_\alpha) \frac{u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + (B_\alpha + \sigma\tau A_\alpha^* A_\alpha) u^{n+(\alpha-1)/p} + A_\alpha^* v^{n+(\alpha-1)/p} = 0,$$

а затем возможно рассчитать $w^{n+\alpha/p}$ по формуле

$$v^{n+\alpha/p} = v^{n+(\alpha-1)/p} + \sigma\tau A_\alpha (u^{n+\alpha/p} - u^{n+(\alpha-1)/p}) + \tau A_\alpha u^{n+(\alpha-1)/p}.$$

Технически громоздкое исследование сходимости приближённого решения к точному проводится стандартным образом, базируясь на полученных оценках устойчивости. Для используемой схемы покомпонентного расщепления (19), (23)–(25) имеет место (см., например, [3, гл. 9; 10, гл. 5]) сходимость с первым порядком по τ . Для повышения точности до второго порядка вычисления организованы по схеме

$$\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_p \rightarrow \mathbf{A}_p \rightarrow \mathbf{A}_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_1$$

при выборе $\sigma = 1/2$.

4. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Отметим принципиальную возможность применения предложенного подхода при построении схем расщепления для уравнений первого порядка с факторизованным оператором. Рассматривается задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + A^*Aw + Bw = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (27)$$

$$w(0) = w^0 \quad (28)$$

при ограничениях (3). Для решения этой задачи имеет место оценка устойчивости по начальным данным

$$\|w(t)\| \leq \|w^0\|, \quad 0 < t \leq T. \quad (29)$$

Построение схем расщепления для приближённого решения задачи (27)–(29) проводится с помощью перехода к системе уравнений

$$\frac{dw}{dt} + A^*y + Bw = 0, \quad (30)$$

$$y - Aw = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (31)$$

Система и условия (30), (31) записываются в виде векторного уравнения первого порядка

$$B \frac{d\mathbf{w}}{dt} + A\mathbf{w} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (32)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}^0, \quad (33)$$

где $\mathbf{w}^0 = \{w^0, 0\}$. Для операторных матриц B и A справедливо представление

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B & A^* \\ -A & I \end{pmatrix}. \quad (34)$$

В пространстве H получим

$$B = B^* \geq 0, \quad A \geq 0. \quad (35)$$

Неотрицательность оператора B не позволяет нам рассчитывать на априорные оценки для решений $\mathbf{w}$ задачи (32)–(34), мы можем ограничиться оценками для отдельных компонент вектора $\mathbf{w}$. Домножив уравнение (32) скалярно в H на $\mathbf{w}$, придём к оценке (29).

В условиях (3), (10) используется аддитивное представление (23), в котором

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} B_\alpha & A_\alpha^* \\ -A_\alpha & p^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (36)$$

Схемы расщепления строятся просто при положительности оператора B , что наблюдалось при рассмотрении эволюционного уравнения второго порядка (1). При предположении только о неотрицательности самосопряжённого оператора B , как в случае (35), устанавливается устойчивость соответствующих схем расщепления. Как можно легко убедиться, сходимость приближённого решения для схем суммарной аппроксимации уже не имеет места, поэтому при построении схем расщепления для задачи (32)–(36) мы должны ориентироваться на аддитивные операторно-разностные схемы полной аппроксимации.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Северо-Кавказского центра математических исследований по соглашению № 075-02-2022-892 и при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-00058).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dautray, K. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 1. Physical Origins and Classical Methods / K. Dautray, J.-L. Lions. — Berlin : Springer, 2000. — 722 p.
2. Fung, Y.C. Classical and Computational Solid Mechanics / Y.C. Fung, P. Tong, X. Chen. — New Jersey : World Scientific Publishing Company, 2017. — 860 p.
3. Samarskii, A.A. The Theory of Difference Schemes / A.A. Samarskii. — New York : Marcel Dekker, 2001. — 786 p.
4. LeVeque, R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems / R.J. LeVeque. — Philadelphia : SIAM, 2007. — 328 p.
5. Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М. : Наука, 1973. — 415 с.
6. Samarskii, A.A. Difference Schemes with Operator Factors / A.A. Samarskii, P.P. Matus, P.N. Vabishchevich. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. — 384 p.
7. Ascher, U.M. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations / U.M. Ascher, S.J. Ruuth, B.T.R. Wetton // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — V. 32, № 3. — P. 797–823.
8. Hundsdorfer, W.H. Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations / W.H. Hundsdorfer, J.G. Verwer. — Berlin : Springer, 2003. — 471 p.
9. Marchuk, G.I. Splitting and alternating direction methods / G.I. Marchuk // Handbook of Numerical Analysis / Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions. — North-Holland, 1990. — Vol. I. — P. 197–462.
10. Vabishchevich, P.N. Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes / P.N. Vabishchevich. — Berlin : De Gruyter, 2013. — 354 p.
11. Vabishchevich P.N. Operator-difference scheme with a factorized operator / P.N. Vabishchevich // Large-Scale Scientific Computing 10th Int. Conf. — Sozopol, Bulgaria, June 8–12, 2015. — P. 72–79.
12. Vabishchevich P.N. Splitting schemes for some second-order evolutionary equations / P.N. Vabishchevich // Int. J. Numer. Anal. Model. — 2022. — V. 19, № 1. — P. 19–32.

SPLITTING SCHEMES FOR EVOLUTION EQUATIONS WITH FACTORIZED OPERATOR

P. N. Vabishchevich

*Lomonosov Moscow State University, Russia
North-Caucasus Federal University, Stavropol, Russia
e-mail: vab@cs.msu.ru, vabishchevich@gmail.com*

In the approximate solution of the Cauchy problem for evolution equations, the problem operator can often be represented as a sum of simpler operators. This makes it possible to construct operator-difference splitting schemes, when the transition to a new level in time is provided by solving problems for separate operator summands. We consider nonstationary problems, the main feature of which is related to the representation of the problem operator as a product of the operator A by its conjugate operator A^* . Based on the transformation of the original equation to a system of two equations, we construct time approximations for second-order evolutionary equations when the additive representation

holds for the operator A . Unconditional stable splitting schemes are proposed, the study of which is carried out with the help of general results of the theory of stability (correctness) of operator-difference schemes in Hilbert spaces.

Keywords: evolution equation, factorized operator, three-level scheme, stability.

FUNDING

The work was carried out with support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the North Caucasus Center for Mathematical Research under agreement no. 075-02-2022-892, and with financial support from the Russian Science Foundation (project 24-11-00058).

REFERENCES

1. Dautray, K. and Lions, J.-L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 1. Physical Origins and Classical Methods*, Berlin: Springer, 2000.
2. Fung, Y.C., Tong, P., and Chen, X., *Classical and Computational Solid Mechanics*, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2017.
3. Samarskii, A.A., *The Theory of Difference Schemes*, New York: Marcel Dekker, 2001.
4. LeVeque, R.J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, Philadelphia: SIAM, 2007.
5. Samarskii, A.A. and Gulin, A.V., *Ustojchivost' raznostnykh skhem* (Stability of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1973.
6. Samarskii, A.A., Matus, P.P., and Vabishchevich, P.N., *Difference Schemes with Operator Factors*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
7. Ascher, U.M., Ruuth, S.J., and Wetton, B.T.R., Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, vol. 32, no. 3, pp. 797–823.
8. Hundsdorfer, W.H. and Verwer, J.G., *Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations*, Berlin: Springer, 2003.
9. Marchuk, G.I., Splitting and alternating direction methods, *Handbook of Numerical Analysis*, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, 1990, vol. I, pp. 197–462.
10. Vabishchevich, P.N., *Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes*, Berlin: De Gruyter, 2013.
11. Vabishchevich, P.N., Operator-difference scheme with a factorized operator, *Large-Scale Scientific Computing 10th Int. Conf.*, Sozopol, Bulgaria, June 8–12, 2015, pp. 72–79.
12. Vabishchevich P.N., Splitting schemes for some second-order evolutionary equations, *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 19–32.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642.2

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО ПОРЯДКУ ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Н. С. Габбасов

*Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета**e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru**Поступила в редакцию 28.12.2023 г., после доработки 28.12.2023 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Найдено приближённое решение линейного интегро-дифференциального уравнения с особым дифференциальным оператором в главной части в пространстве обобщённых функций. Предложен обобщённый сплайн-метод и установлена его оптимальность по порядку точности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, приближённое решение, прямой метод.

DOI: 10.31857/S0374064124070036, EDN: KOELLS

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Работа посвящена поиску приближённого решения линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t,s)x(s) ds = y(t), \quad (1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, q}$, и $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ фиксированные; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами гладкости точечного характера, а x — искомая функция.

Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной, поэтому важно построить основные пространства, которые обеспечат корректность данной задачи. При этом следует учитывать, что в случае $p = 0$ ИДУ (1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (ИУТР) (так что в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что ИУТР находят все более широкое применение в приложениях, в частности, встречаются в ряде задач теорий упругости, переноса нейтронов, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и приведённую в них библиографию), в теории уравнений смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. Как правило, естественными классами решений ИУТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщённых функций, построенных с помощью дельта-функции Дирака (соответственно с помощью конечной части интеграла по Адамару). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по ИУТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1) и

ИУТР соответствующие идеи и результаты для ИУТР можно успешно использовать для корректной постановки задачи (1), разработки и теоретического обоснования приближённых методов решения ИДУ (1) в пространствах обобщённых функций типа D и V .

ИДУ (1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], где с использованием известных результатов по ИУТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D . В статье [8] построена полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с соответствующим теоретическим обоснованием. В работах [8–11] предложены и обоснованы прямые проекционные методы приближённого решения ИДУ вида (1), основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов.

В настоящей статье для приближённого решения ИДУ (1) в пространстве типа D предложен новый вариант обобщённого метода коллокации, основанный на использовании кубических сплайнов минимального дефекта. Проведено теоретическое обоснование разработанного метода в смысле [12, гл. 1, §§ 1–5] и установлено, что он оптимален по порядку точности на некотором классе F гладких функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве обобщённых функций.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ — банахово пространство всех непрерывных на отрезке I функций с обычной тах-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ семейство всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [13]). Назовём его *классом точечно-гладких функций* (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим теперь *основное* пространство

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \{y \in C\{m; 0\} : y^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\}$$

(число $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяет неравенству $p < m$), снабдив его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2)$$

где $T: Y \rightarrow C$ — *характеристический оператор* пространства Y , определённый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t).$$

Лемма 1 [8]. Включение $y \in Y$ означает, что

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (3)$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$, $i = \overline{p, m-1}$.

Пространство Y по норме (2) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций и введём в нём специальную норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)|, \quad z \in C^{(p)}, \quad Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C. \quad (4)$$

Лемма 2 [8]. Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C .

Следствие. Традиционная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в пространстве $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C$.

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0, i = \overline{0, p-1}\}$ — банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad (5)$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно, дельта-функция Дирака и её “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций согласно следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0), \quad y \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}. \quad (6)$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \quad (7)$$

2.2. СПЛАЙНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вопрос о приближении элементов основного пространства $Y \equiv C\{m, p; 0\}$ с использованием кубических сплайнов.

Зададим на отрезке I равномерную сетку

$$\Delta_n: -1 \equiv s_0 < s_1 < \dots < s_n \equiv 1, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где $s_k \equiv -1 + 2k/n$, $k = \overline{0, n}$, и на ней рассмотрим кубический сплайн

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t), \quad c_i \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющий краевым условиям

$$z_n^{(3)}(s_j - 0) = z_n^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1. \quad (9)$$

Здесь базисные функции $B_i(t)$ — В-сплайны с носителем (s_{i-2}, s_{i+2}) (см., например, [14, гл. 3, § 8]). Для определения всех функций $B_i(t)$ сетку (8) дополним равномерно расположенными узлами: $s_{-3} < s_{-2} < s_{-1} < s_0 \equiv -1$, $1 \equiv s_n < s_{n+1} < s_{n+2} < s_{n+3}$. Обозначим через S_n^3 пространство всех кубических сплайнов $z_n(t)$ на сетке Δ_n , обладающих свойством (9), с нормой $\|z_n\|_C$. Далее, пусть $P_n: C \rightarrow S_n^3$ — оператор, который всякой функции $f \in C$ ставит в соответствие её интерполяционный кубический сплайн $P_nf \in S_n^3$ с условием (9) такой, что $(P_nf)(s_i) = f(s_i)$, $i = \overline{0, n}$. В книге [14, гл. 3, теорема 3.1] доказаны существование и единственность интерполяционного кубического сплайна при различных краевых условиях и приведён алгоритм построения таких сплайнов, а также особо отмечено [14, гл. 3, § 5], что при приближении кубическими сплайнами выбор краевых условий (9) является наиболее удачным.

Из теорем 9, 10, 13 в [15, гл. 2, § 4] и леммы 2 в [16] как следствие вытекает

Лемма 3. Пусть $r = \overline{1, 4}$ и $f \in C^{(r)} \equiv C^{(r)}(I)$. Тогда

$$\|P_nf - f\|_C = O(n^{-r}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Обозначим через $Y_n \equiv U(S_n^3) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1}$ $(n+m-p+3)$ -мерное подпространство пространства Y , где $(Ug)(t) \equiv t^m g(t)$. Введём в рассмотрение оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p+3}: Y \rightarrow Y_n$, относящий к любой функции $y \in Y$ обобщённый сплайн $\Gamma_n y \in Y_n$, определяемый условиями

$$\begin{aligned} (T\Gamma_n y - Ty)(s_k) &= 0, \quad (\Gamma_n y - y)^{\{i\}}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{p, m-1}, \\ (T\Gamma_n y)^{(3)}(s_j - 0) &= (T\Gamma_n y)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и в [5, гл. 1, с. 29–30], несложно получить представление

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p+3}(y; t) = (UP_n Ty)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}. \quad (11)$$

Лемма 4. Γ_n — проектор в пространстве Y .

Данное свойство сразу следует из (11), равенства $P_n^2 = P_n$ и леммы 1.5.1 [5, с. 28].

Далее будем использовать обозначение $YC^{(r)} \equiv \{y \in Y: Ty \in C^{(r)}\}$, где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём $YC^{(0)} \equiv Y \equiv C\{m, p; 0\}$.

Следующее утверждение характеризует скорость сходимости обобщённых интерполяционных сплайнов к интерполируемой функции.

Лемма 5. Если $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$, то

$$\|\Gamma_n y - y\|_Y = O(n^{-r}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Доказательство. В силу (2), (3), (11) и леммы 3 последовательно находим

$$\|\Gamma_n y - y\|_Y = \|U(P_n Ty - Ty)\|_Y \equiv \|P_n Ty - Ty\|_C = O(n^{-r}).$$

Замечание 1. Очевидно, что из оценки (12) и хорошо известной теоремы Банаха–Штейнгауза следует равномерная ограниченность норм операторов Γ_n : $\|\Gamma_n\| = O(1)$, $n \rightarrow \infty$.

2.3. ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ С КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать, что в ИДУ (1) $q=1$, $t_1=0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I, \quad (13)$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds,$$

где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $p < m$, $y \in Y$, ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, \quad K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}, \quad (14)$$

$x \in X$ — искомый элемент. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A: X \rightarrow Y$ установлены в работе [8], там же указан метод отыскания точного решения ИДУ (1) в классе X .

Приближённое решение ИДУ (13) строим в виде агрегата

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n+2} \delta^{\{i\}}(t), \quad (15)$$

$$g_n \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s) ds;$$

при этом $J: C \rightarrow C^{(p)}$, $(Jz)^{(i)} = J_{p-i-1}z$, $i = \overline{0, p-1}$, $DJz = z$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{-1, n+m-p+1}$, найдём из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p+3)$ -го порядка

$$(T\rho_n)(s_k) = 0, \quad k = \overline{0, n}; \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1};$$

$$(DTUx_n)^{(3)}(s_j - 0) = (DTUx_n)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = 1, n-1, \quad (17)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближённого решения, а $\{s_k\}_0^n$ — использованная выше система узлов коллокации, порождающая сетку (8).

Следуя работе [17], примем соглашения, полезные при оформлении результатов по обоснованию приближённых методов. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, СЛАУ (17) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (13) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (15)–(17) обоснованно применим к уравнению (13)”. Во-вторых, для погрешности приближённого решения введём специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$, оценка этой величины определяет скорость сходимости приближённых решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (13).

Относительно обоснования вычислительного алгоритма (13)–(17) справедлива

Теорема 1. Пусть однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в пространстве X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 из [8]), а исходные данные таковы, что $K \in YC^{(r)}$ (по t), $\psi_i \in YC^{(r)}$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$. Тогда прямой метод (15)–(17) обоснованно применим к уравнению (13), причём

$$\Delta x_n^* = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1, 4}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Доказательство. Очевидно, что в условиях данной теоремы ИДУ (13) представимо в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y, \quad (19)$$

в котором оператор $A: X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (15)–(17) требуется записать также в операторной форме. Для этого построим конечномерные подпространства основных пространств

$$X \supset X_n \equiv J(S_n^3) \oplus \text{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_{0}^{m-p-1}, \quad Y \supset Y_n \equiv U(S_n^3) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1}.$$

Тогда, используя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 4.3.1 в [5, с. 123–124], несложно показать, что вычислительная схема (15)–(17) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n, \quad (20)$$

где $\Gamma_n: Y \rightarrow Y_n$ — сплайновый оператор, введённый в п. 2.2.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (20).

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (20). Поскольку в силу леммы 4 $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, имеем $\Gamma_n V x_n = V x_n \in Y_n$ при любом элементе $x_n \in X_n$. Следовательно, вычислительный алгоритм (15)–(17) равносильен линейному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv V x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n. \quad (21)$$

Покажем теперь “близость” операторов A и A_n на подпространстве X_n в условиях (14). Используя уравнения (19) и (21), представления (3) и (11), норму (2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y = \|TKx_n - P_n TKx_n\|_C. \quad (22)$$

На основании (5), (6), (13) и (14) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно, в силу (15) справедливо равенство

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+2} \psi_i(t),$$

откуда вытекает, что

$$(TKx_n)(t) = \int_{-1}^1 h(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+2} f_i(t), \quad (23)$$

где $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T \psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$.

В силу равенства (23), соотношения (10), леммы 2 и определения (7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\begin{aligned} \|TKx_n - P_n TKx_n\|_C &\equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - P_n^t h)(t, s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n+2} (f_i - P_n f_i)(t) \right| \leq \\ &\leq 2 \|g_n\|_C d_1 n^{-r} + \sum_i |c_{i+n+2}| d_1 n^{-r} \leq 2 \|g_n\|_{(p)} d_1 n^{-r} + \|x_n\|_X d_1 n^{-r} \leq d_2 n^{-r} \|x_n\|_X, \end{aligned} \quad (24)$$

где $d_2 \equiv 2d_1$, а d_1 — постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$. Из равенств (22) и (24) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq d_2 n^{-r}, \quad r = \overline{1, 4}. \quad (25)$$

На основании оценок (12) и (25) из теоремы 7 работы [12, с. 19] вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (18).

В дальнейшем при оптимизации прямых проекционных методов решения ИДУ (13) существенную роль будет играть

Теорема 2. Пусть ИДУ (13) имеет решение вида

$$x^*(t) \equiv z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t), \quad Dz^* = DTUx^* \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 4}, \quad (26)$$

при данном $y \in Y$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в обобщённом методе коллокации с кубическими сплайнами (ОМККС) непрерывно обратим. Тогда погрешность приближённого решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $\Gamma_n y \in Y_n$ представима в виде

$$\Delta x_n^* = O(\|Dz^* - P_n Dz^*\|_C) = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1, 4}. \quad (27)$$

Доказательство. В силу теоремы 6 из работы [12, с. 17] и структуры приближённого уравнения (21) имеем

$$\Delta x_n^* = O(\|\Gamma_n\| \|x^* - x_n\|_X), \quad (28)$$

где $x_n \in X_n$ — пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) \equiv (JP_n DTUx^*)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t), \quad (29)$$

где P_n — интерполяционный сплайновый оператор с аппроксимативным свойством (10). Тогда требуемая оценка (27) следует из (4), (7), (10), (26), (28), (29) с учётом замечания 1:

$$\Delta x_n^* \leq d_3 \|JDz^* - JP_n Dz^*\|_X \equiv d_3 \|JDz^* - JP_n Dz^*\|_{(p)} \equiv d_3 \|Dz^* - P_n Dz^*\|_C \leq d_4 n^{-r}, \quad r = \overline{1, 4}.$$

2.4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУ

Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, причём $N \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n , отображающих

Y на Y_n . Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y; \quad (30)$$

$$\lambda_n Ax_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ — решения уравнений (30) и (31) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ — класс известных коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (30), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [12, с. 40], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \quad (32)$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F} V(f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовём *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов $\lambda_n \in \Lambda_n$ решения уравнения (30) в классе F .

Определение [12, с. 40]. Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X$, $Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0: Y \rightarrow Y_n^0$, $\lambda_n^0 \in \Lambda_n$, такие, что выполняется условие

$$V_N(F) \asymp V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0), \quad N \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где символ $\asymp$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (30), (31) при $X_n = X_n^0$, $Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* в классе F среди всех прямых проекционных методов $\lambda_n \in \Lambda_n$ решения уравнений (30).

Рассмотрим теперь оптимизацию по порядку точности в классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) ИДУ (13) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $YC^{(r)}$, т.е. при $K \in YC^{(r)}$ (по t), $\psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in YC^{(r)}$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$. Тогда в силу теоремы 2 [8] имеем

$$X^* \equiv \{x^* \in X: Ax^* = y; K, \psi_i, y \in YC^{(r)}\} = XC^{(r)},$$

где $XC^{(r)} \equiv \{x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}: DTUx \in C^{(r)}\}$. Далее пусть

$$X_n^0 \equiv J(S_n^3) \oplus \text{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-p-1}, \quad Y_n^0 \equiv U(S_n^3) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1},$$

а $\Lambda_n^0 \equiv \{\lambda_n^0\}$ — семейство всех линейных операторов $\lambda_n^0: Y \rightarrow Y_n^0$.

Теорема 3. Пусть $F = YC^{(r)}$, $\Lambda_n = \Lambda_n^0$. Тогда

$$V_N(F) \asymp N^{-r}, \quad N = n + m - p + 3, \quad r = \overline{1, 4}, \quad (34)$$

и этот оптимальный по точности порядок реализует ОМККС.

Доказательство. Пусть $\Pi_l \equiv \text{span}\{t^i\}_0^l$ — класс всех алгебраических полиномов степени не выше l и

$$L_n \equiv \Pi_{n+m-p-1}^\delta \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \text{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-p-1}$$

— $(n+m-p)$ -мерное подпространство пространства X . Согласно формуле (7) введём величину

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) \equiv \inf_{x_n \in L_n} \|x - x_n\|_X, \quad x \in X, \quad (35)$$

называемую *наилучшим приближением* обобщённой функции $x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ элементами из пространства L_n . На основании доказательства теоремы 1.5.14 из [5, с. 35] имеем, что (35) выражается через наилучшее равномерное приближение

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) = E_{n-1}(DTUx), \quad (36)$$

где $E_l(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ полиномами из Π_l , $l = 0, 1, 2, \dots$. Далее заметим, что из определения N -го колмогоровского поперечника $d_N(L, X)$ множества L в нормированном пространстве $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ (см., например, [18, с. 11]) и соотношения (36) следует равенство

$$d_N(L, X) = d_{N-m+p}(DTU(L), C), \quad N > m - p,$$

откуда, с учётом $d_l(C^{(r)}, C) \asymp l^{-r}$, $l \in \mathbb{N}$ (см. [18, с. 90]), вытекает слабая эквивалентность

$$d_N(XC^{(r)}, C) \asymp N^{-r}. \quad (37)$$

Известно [12, с. 163], что $V_N(F) \geq d_N(X^*, X)$, следовательно, из (37) имеем

$$V_N(F) \geq d_N(XC^{(r)}, X) \asymp N^{-r}. \quad (38)$$

С другой стороны, в силу определения $V_N(F)$ (32) и теорем 1 и 2 находим верхнюю оценку

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in XC^{(r)}} \|x^* - x_n^*\|_X = O(N^{-r}), \quad x_n^* = A_n^{-1} \Gamma_n y.$$

Отсюда и из соотношений (33), (38) получаем утверждение теоремы с оценкой (34).

Замечание 2. В силу определения нормы (7) в $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности $\{x_n^*\}$ приближённых решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 3. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теоремы 1, а именно: из неё вытекает простое следствие — если исходные данные K (по t), ψ_i и y уравнения (13) принадлежат классу $YC^{(r)}$, $r = \overline{1, 4}$, то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r})$, $r = \overline{1, 4}$.

Замечание 4. Если $p = m = 0$, то ИДУ (13) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C , а предложенный вычислительный алгоритм (15)–(17) — в соответствующий метод коллокации с кубическими сплайнами для уравнения второго рода, причём $Ty \equiv y$, $h \equiv K$. Поэтому теорема 1 содержит соответствующие результаты по обоснованию данного варианта метода коллокации для приближённого решения уравнений второго рода в классе C , при этом погрешность характеризуется оценкой $\|x_n^* - x^*\|_C = O(n^{-r})$, $r = \overline{1, 4}$.

Замечание 5. Так как в условиях теоремы 1 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1}: Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_1,$$

то ясно (см. [12, с. 23–24]), что предложенный в настоящей работе прямой метод для ИДУ (13) устойчив относительно малых возмущений исходных данных, а это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперёд заданной точностью. Более того, если ИДУ (13) хорошо обусловлено (см., например, [12, с. 24]), то хорошо обусловленной является также СЛАУ (17).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bart, G.R. Linear integral equations of the third-kind / G.R. Bart, R.L. Warnock // SIAM J. Math. Anal. — 1973. — V. 4, № 4. — P. 609–622.
2. Кейз, К.М. Линейная теория переноса / К.М. Кейз, П.Ф. Цвайфель. — М. : Мир, 1972. — 384 с.
3. Бжихатлов, Х.Г. Об одной краевой задаче со смещением / Х.Г. Бжихатлов // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 1. — С. 162–165.
4. Расламбеков, С.Н. Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщённых функций / С.Н. Расламбеков // Изв. вузов. Математика. — 1983. — № 10. — С. 51–56.
5. Габбасов, Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций / Н.С. Габбасов. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. — 176 с.
6. Замалиев, Р.Р. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями ядра : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Р.Р. Замалиев. — Казань, 2012. — 114 с.
7. Абдурахман. Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Абдурахман. — Ростов-на-Дону, 2003. — 142 с.
8. Габбасов, Н.С. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае / Н.С. Габбасов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 7. — С. 889–899.
9. Габбасов, Н.С. Коллокационные методы для одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений / Н.С. Габбасов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 9. — С. 1234–1241.
10. Габбасов, Н.С. К приближённому решению одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений / Н.С. Габбасов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 2. — С. 263–272.
11. Габбасов, Н.С. Специальный вариант метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений / Н.С. Габбасов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 512–519.
12. Габдулхаев, Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. — 232 с.
13. Прессдорф, З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек / З. Прессдорф // Мат. исследования. — 1972. — Т. 7, № 1. — С. 116–132.
14. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 352 с.
15. Стечкин, С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. — М. : Наука, 1976. — 248 с.
16. Педас, А. Метод кубической сплайн-коллокации для решения слабо сингулярных интегральных уравнений / А. Педас, Э. Тимак // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 10. — С. 1415–1424.
17. Габбасов Н.С. К численному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений в особом случае / Н.С. Габбасов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2020. — Т. 60, № 10. — С. 1721–1733.
18. Даугавет, И.К. Введение в теорию приближения функций / И.К. Даугавет. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1977. — 184 с.

ORDER-OPTIMAL DIRECT METHOD FOR SOLVING OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N. S. Gabbasov

Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University, Russia
e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

A linear integro-differential equation with a singular differential operator in the principal part is studied. For its approximate solution in the space of generalized functions, special generalized version of spline method are proposed and justified. The optimality in the order of accuracy of the method constructed is established.

Keywords: integro-differential equation, approximate solution, direct method.

REFERENCES

1. Bart, G.R. and Warnock, R.L., Linear integral equations of the third kind, *SIAM J. Math. Anal.*, 1973, vol. 4, no. 4, pp. 609–622.
2. Case, K.M. and Zweifel, P.W., *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, 1967.
3. Bzhikhatlov, Kh.G., On one boundary value problem with a shift, *Differ. Uravn.*, 1973, vol. 9, no. 1, pp. 162–165.
4. Raslambekov, S.N., A singular integral equation of the first kind in the exceptional case in classes of generalized functions, *Izv.VUZov. Mat.*, 1983, no. 10, pp. 51–56.
5. Gabbasov, N.S., *Metody resheniya integral'nykh uravnenii Fredgol'ma v prostranstvakh obobshchennykh funktsii* (Methods for Solving Fredholm Integral Equations in Spaces of Generalized Functions), Kazan: Izd. Kazan. Univ., 2006.
6. Zamaliev, R.R., *O pryamykh metodakh resheniya integral'nykh uravneniy tret'yego roda s osobennostyami yadra* (On direct methods for solving integral equations of the third kind with singularities in the kernel), Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Kazan, 2012.
7. Abdurakhman, *Integral'noye uravneniye tret'yego roda s osobym differentsial'nyim operatorom v glavnoy chasti* (An integral equation of the third kind with a singular differential operator in the principal part), Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Rostov-on-Don, 2003.
8. Gabbasov, N.S., On a class of integro-differential equations in the singular case, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 857–867.
9. Gabbasov, N.S., Collocation methods for a class of singular integro-differential equations, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 9, pp. 1225–1232.
10. Gabbasov, N.S., On numerical solution of one class of singular integro-differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 2, pp. 231–240.
11. Gabbasov, N.S., A special version of the collocation method for one class of integro-differential equations, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 521–528.
12. Gabdul Khaev, B.G., *Optimal'nye approksimatsii reshenii lineinykh zadach* (Optimal Approximations of Solutions to Linear Problems), Kazan: Izd. Kazan. Univ., 1980.
13. Pressdorf, S., Singular integral equation with symbol vanishing at finitely many points, *Mat. Issled.*, 1972, vol. 7, no. 1, pp. 116–132.
14. Zav'yalov, Yu.S., Kvasov, B.I., and Miroshnichenko, V.L., *Metody splayn-funktsiy* (Methods of Spline Functions), Moscow: Nauka, 1980.
15. Stechkin, S.B. and Subbotin, Yu.N., *Splayny v vychislitel'noy matematike* (Splines in Computational Mathematics), Moscow: Nauka, 1976.
16. Pedas, A. and Timak, E., The cubic spline-collocation method for weakly singular integral equations, *Differ. Equat.*, 2001, vol. 37, no. 10, pp. 1491–1500.
17. Gabbasov, N.S., On numerical solution of one class of integro-differential equations in a special case, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1666–1678.
18. Daugavet, I.K., *Vvedeniye v teoriyu priblizheniya funktsiy* (Introduction to the Theory of Function Approximation), Leningrad: Leningr. Gos. Univ., 1977.

УДК 519.633

ЗАДАЧА О ПАДЕНИИ ЛЕНТЫ ЛАЙНЕРА НА НАКЛОННУЮ ОПОРУ

© М. П. Галанин¹, А. С. Родин²

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

e-mail: ¹galan@keldysh.ru, ²ral@bk.ru

Поступила в редакцию 20.02.2024 г., после доработки 06.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассмотрена задача численного моделирования контактного взаимодействия металлической пластины, движущейся со скоростью около 0.5 км/с, с закреплённой наклонной опорой за время порядка 100 мкс. Для описания пластины и опоры применена модель упругопластического тела для больших деформаций. Для учёта граничных условий на контактирующих поверхностях в расчётах использован итерационный алгоритм, относящийся к методам типа Неймана–Дирихле. Для пространственной дискретизации применён метод конечных элементов. Приведены результаты расчётов. Рассмотрены модельные одномерные задачи, позволяющие качественно оценить результаты расчётов, полученные в двумерном случае.

Ключевые слова: упругопластическое тело, контактная задача, метод конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064124070041, EDN: KNQBKE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии металлической пластины (лайнера), имеющей скорость около 0.5 км/с, с закреплённой наклонной поверхностью. Подобные задачи возникают, например, в магнитном компрессоре, в котором алюминиевый лайнер, ускоренный электромагнитными силами, сжимает магнитное поле в пространстве между пластинами лайнера [1]. В торцах компрессора расположены опоры с наклонными призмами, на которые налетает лайнер при движении, необходимые для предотвращения преждевременного обрыва лайнера и сохранения параллельности движущихся участков ленты.

Приведём математическую модель данной механической задачи с использованием приближения упругопластического тела для произвольных деформаций [2, с. 62] — задачу для уравнения движения тела в момент времени t , записанного в текущих лагранжевых координатах a_j (в дальнейшем будем использовать обозначение UL-координаты) [2]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_a \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_S} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_u} &= \mathbf{u}^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее $\mathbf{u} = (u_x \ u_y)^T$ — вектор перемещения, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ — вектор скорости, $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ — вектор ускорения, ρ — текущая плотность вещества, $\nabla_a = \partial \mathbf{k}_j / \partial a_j$ — оператор дифференцирования по UL-координатам, $\mathbf{k}_j$ — орты декартовой системы координат,

$\mathbf{S}$ — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа [2, с. 51], Γ_S — часть границы, на которой задан вектор поверхностных сил $\mathbf{f}$ (в задаче с магнитным компрессором это давление магнитного поля), Γ_u — часть границы, на которой заданы кинематические условия. В работе применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Если использовать непрерывное изменение отсчётной конфигурации для UL-подхода, то в каждый фиксированный момент времени t текущие лагранжевы координаты a_j совпадают с эйлеровыми координатами x_j . Разница между UL- и эйлеровым подходами проявляется в использовании разных определений скоростей величин. На практике отсчётная конфигурация пересчитывается для дискретных значений времени, поэтому обычно при переходе к новому моменту времени t уравнение движения (1) записывается относительно известных материальных координат, которые относятся к моменту $t - \Delta t$. Другими словами, материальная частица, положение которой в момент времени $t - \Delta t$ характеризуется радиус-вектором $\mathbf{a} = a_j \mathbf{k}_j$, в момент t примет пространственное положение, характеризуемое радиус-вектором $\mathbf{x} = x_j \mathbf{k}_j$. При описании данной материальной частицы в момент времени t будем использовать UL-координаты a_j или эйлеровы координаты x_j .

Насколько известно авторам, не существует одной общепризнанной модели больших пластических деформаций, позволяющей описывать поведение различных материалов при различных сценариях термомеханического нагружения. Различные модели строят на основе определяющих соотношений для гиперупругого или гипопругого материала [2, с. 72]. В работе выбрана модель, относящаяся ко второй группе. Основные соотношения теории пластического течения для данной модели сформулированы следующим образом [2, с. 102]:

— тензор скорости деформации $\mathbf{d}$ можно представить в виде суммы упругой $\mathbf{d}^e$ и пластической $\mathbf{d}^p$ составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p; \quad (3)$$

— определяющее соотношение задано формулой

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p); \quad (4)$$

— пластическая составляющая тензора скорости деформации определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\mathbf{d}^p = \mu \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \mu \boldsymbol{\sigma}'. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{C}^E$ — стандартный тензор коэффициентов упругости, μ — параметр модели, аналогичный множителю Лагранжа, $f_y(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\varepsilon}^p) = 3J_2(\boldsymbol{\sigma}') - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^p)$ — функция текучести Мизеса для материала с изотропным упрочнением, $\boldsymbol{\sigma}'$ — девиатор тензора напряжений Коши, $J_2(\boldsymbol{\sigma}') = 0.5\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений, σ_y — предел текучести материала, $\bar{\varepsilon}^p$ — эффективная пластическая деформация.

Компоненты тензора скорости деформации заданы равенствами

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

В качестве производной тензора напряжений в определяющем соотношении (4) в разных моделях фигурируют различные конвективные производные (Яуманна, Олдройда, Коттер–Ривлина и т.д.). В данной работе использована производная Трусделла [2]

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{d}), \quad (7)$$

где $\mathbf{l}$ — тензор градиента скоростей ($l_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$), $\mathbf{l}^T$ — транспонированный тензор, $\operatorname{tr}(\mathbf{d}) = d_{kk}$.

Отметим, что в применённой модели функция текучести не зависит от первого инварианта тензора напряжений, поэтому первый инвариант тензора скорости деформации d_{kk} , определяющий изменение объёмной деформации, состоит только из упругой составляющей ($d_{kk}^p = 0$).

На потенциально контактных поверхностях опоры ($\Gamma_{c,1}$) и лайнера ($\Gamma_{c,2}$) в случае контактных условий скольжения без трения должны быть выполнены следующие условия [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \sigma_n(\mathbf{x}, t) &= \sigma_n(\bar{\mathbf{x}}, t) \leq 0, \\ u_n(\mathbf{x}, t) + u_n(\bar{\mathbf{x}}, t) &\leq \delta_{0n}(\mathbf{x}, t), \\ \sigma_n(\mathbf{x}, t)[u_n(\mathbf{x}, t) + u_n(\bar{\mathbf{x}}, t) - \delta_{0n}(\mathbf{x}, t)] &= 0,\end{aligned}\tag{8}$$

где $\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_{c,2}$ — сходственная (ближайшая) точка для $\mathbf{x} \in \Gamma_{c,1}$, $\delta_{0n}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ — функция, задающая начальный зазор (участки поверхностей в начальный момент могут не соприкасаться друг с другом), $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали в рассматриваемой точке, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$.

В приведённой модели уравнение движения (1) и часть граничных условий (2), заданных на поверхностях Γ_u и Γ_S , записаны в UL-координатах. В то же время определяющее соотношение (4), (7), закон пластического течения (5) и условия на контактных поверхностях (8) записаны с использованием эйлеровых координат, потому что данные соотношения принципиально относятся к актуальной конфигурации тела в текущий момент времени t . Для UL-подхода справедливы формулы ($\mathbf{E}$ — тензор деформаций Грина–Лагранжа) [2, с. 53]

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{a}) = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\sigma}^{Tr}(\mathbf{x}),$$

позволяющие связать производные различных величин в разных системах координат и построить эффективную численную модель.

2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Задача (1)–(8) является нелинейной, так как нелинейным является определяющее уравнение (4), (7), а также имеется геометрическая нелинейность, связанная с учётом больших деформаций и неопределённости конфигурации контактирующих поверхностей на каждом шаге по времени.

Для решения нелинейной контактной задачи обычно применяются различные итерационные численные методы, наиболее популярными из которых являются метод множителей Лагранжа, метод штрафных функций или их комбинация [3, с. 117].

Постановка контактной задачи во многом аналогична постановке задачи для одного тела, разбитого на подобласти, при использовании варианта метода декомпозиции области (МДО) без перекрытия. Благодаря подобному сходству для решения контактных задач (с различными условиями на контактах) применяются модифицированные варианты МДО без перекрытия [4, с. 5]. Суть методов заключается в том, что в рамках одной итерации для каждого тела на контактных поверхностях ставится условие либо кинематическое (условие Дирихле), либо силовое (условие Неймана). Затем полученные на границах значения перемещений или напряжений корректируются с помощью специальных процедур (при необходимости корректируется и конфигурация находящихся в контакте поверхностей). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока оба условия (Дирихле и Неймана) не будут выполнены с достаточной точностью [5]. В частности, в методе Неймана–Дирихле на поверхности $\Gamma_{c,1}$ всегда ставится условие Неймана, а на противолежащей поверхности $\Gamma_{c,2}$ всегда ставится условие Дирихле (таким образом, чтобы поле перемещений обеспечивало выполнение кинематической части условий (8)).

Опишем применение метода Неймана–Дирихле для решения контактной задачи (1)–(8). Будем считать, что опора занимает область G_1 , а лайнер — область G_2 . Для решения задачи на каждом шаге времени t нужно проводить итерационный цикл, перед первой итерацией которого задаётся начальное приближение для нормальных распределённых контактных сил $p_{1n}(\mathbf{x}, t)$ на поверхности $\Gamma_{c,1}$. На каждой итерации m ($m \in \mathbb{N}$) последовательно решается отдельная задача для первого тела (опоры):

$$\begin{aligned} Lu_1^m(\mathbf{a}, t) &= 0, \quad \mathbf{a} \in G_1, \\ \mathbf{u}_1^m(\mathbf{a}, t) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{1u}, \\ (\mathbf{S}^m + \mathbf{S}^m \cdot \nabla_a \mathbf{u}_1^m(\mathbf{a}, t)) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{1S}, \\ \boldsymbol{\sigma}^m \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{p}_1^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{c,1}, \end{aligned} \quad (9)$$

а затем отдельная задача для второго тела (лайнера):

$$\begin{aligned} Lu_2^m(\mathbf{a}, t) &= 0, \quad \mathbf{a} \in G_2, \\ \mathbf{u}_2^m(\mathbf{a}, t) \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{2u}, \\ (\mathbf{S}^m + \mathbf{S}^m \cdot \nabla_a \mathbf{u}_2^m(\mathbf{a}, t)) \cdot \mathbf{n}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{a}, t), \quad \mathbf{a} \in \Gamma_{2S}, \\ u_{2n}^m(\mathbf{x}, t) &= \delta_{0n}(\mathbf{x}, t) - u_{1n}^m(\bar{\mathbf{x}}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{c,2}^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Lu_i^m &= \rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i^m - \nabla_a \cdot (\mathbf{S}^m + \mathbf{S}^m \cdot \nabla_a \mathbf{u}_i^m), \\ \mathbf{p}_1^m &= (p_{1x}^m, p_{1y}^m)^T = (p_{1\tau}^m, p_{1n}^m)^T \end{aligned}$$

— вектор распределённых контактных сил ($p_{1\tau}^m = 0$), $\Gamma_{c,2}^m$ — участок потенциально контактной поверхности $\Gamma_{c,2}$, который на данной итерации непосредственно находится в контакте (при решении задачи для второго тела величина $u_{1n}^m(\bar{\mathbf{x}}, t)$ уже является известной). После этого вычисляются новые приближения для значений нормальных распределённых контактных сил на границе $\Gamma_{c,1}$ [4]:

$$p_{1n}^{m+1}(\mathbf{x}, t) = \theta(t) \sigma_n^m(\bar{\mathbf{x}}, t) + (1 - \theta(t)) p_{1n}^m(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{c,1}, \quad \bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_{c,2}, \quad (11)$$

где $\theta(t)$ — некоторый итерационный параметр, влияющий на сходимость итерационного процесса.

Используя соответствующие функциональные пространства, можно сформулировать слабую постановку для локальных задач (9), (10). В работе [6] представлена подобная постановка для статической задачи контакта двух тел и доказана сходимость предложенного алгоритма при наличии трения (по закону Кулона) для подходящего диапазона значений итерационного параметра θ .

Построим в расчётной области сетку из конечных элементов. Выполнив пространственную дискретизацию задачи в слабой постановке с помощью стандартных процедур метода конечных элементов (МКЭ) [2], можно свести решение задач (9), (10) в каждом теле к решению системы линейных уравнений вида

$$[M_i^{m-1}] \{\ddot{U}_i^m\} + [K_i^{m-1}] \{\Delta U_i^m\} = \{R_i^m\} + \{R_i^{c,m}\}.$$

Здесь $\{\Delta U_i^m\}$ — вектор приращений узловых перемещений в теле G_i на m -й итерации. Для узлов сетки, не относящихся к поверхностям Γ_u и $\Gamma_{c,2}^m$, строки матриц $[M_i^{m-1}]$ и

$[K_i^{m-1}]$ соответствуют строкам стандартных матрицы масс и матрицы жесткости (с учётом геометрической нелинейности) для МКЭ [2]. Компоненты вектора узловых контактных сил $\{R_i^{c,m}\}$ отличны от нуля только для узлов, относящихся к поверхности $\Gamma_{c,1}$, и задаются равенством

$$\{R_1^{c,m}\} = \int_{\Gamma_{c,1}} [N_S]^T p_1^m(x) dS. \quad (12)$$

Для дискретизации по времени используется неявная схема, для величины $\ddot{U}_i^m$ применяется стандартная конечно-разностная аппроксимация.

Для учёта нелинейности, связанной с пластической деформацией, применяется метод простой итерации. Вектор приращений пластической деформации с предыдущей итерации $\{\Delta d_i^{p,m}\}$ даёт вклад в вектор узловых сил $\{R_i^m\}$ наряду с вектором объёмных сил.

В конце m -й итерации нужно вычислить новое приближение вектора узловых контактных сил $\{R_i^{c,m+1}\}$. При использовании согласованных сеток на контактирующих поверхностях можно использовать формулу, аналогичную (11):

$$\{R_1^{c,m+1}\} = \theta \{\bar{R}^{c,m}\} + (1 - \theta) \{R_1^{c,m}\}, \quad (13)$$

где $\{\bar{R}^{c,m}\}$ — вектор узловых контактных сил на противоположащей поверхности $\Gamma_{c,2}$ (для согласованных сеток $\{\bar{R}^{c,m}\} = \{R_2^{c,m}\}$).

На поверхности $\Gamma_{c,2}^m$ ставится условие Дирихле, поэтому используется предположение, что для любого кинематического ограничения, накладываемого на участок поверхности, существует такая силовая нагрузка, которая оказывает на тело эквивалентное воздействие. Тогда получим следующую формулу для вектора $\{R_2^{c,m}\}$ (отличны от нуля только компоненты, соответствующие узлам на поверхности $\Gamma_{c,2}^m$):

$$\{R_2^{c,m}\} = [M_2] \{\ddot{U}_2^m\} + [K_2] \{\Delta U_2^m\} - \{R_2^m\}. \quad (14)$$

Отметим, что для согласованных сеток достаточно вычислять узловые контактные силы по формулам (13), (14), а значения нормальных распределённых контактных сил определять необязательно. Но для случая несогласованных сеток применение (13) может привести к существенным погрешностям, поскольку участки поверхности, по которым происходит интегрирование в (12), для узлов, расположенных на разных контактных поверхностях, больше не совпадают.

В этом случае для вычисления узловых контактных сил используем следующий алгоритм.

1. Выбираем для нормальных распределённых контактных сил $\mathbf{p}_1^m(\mathbf{x})$ на поверхности $\Gamma_{c,1}$ (аналогично для $\mathbf{p}_2^m(\mathbf{x})$ на поверхности $\Gamma_{c,2}$) аппроксимацию, основанную на использовании базисных функций χ_S , относящихся к поверхностной сетке, но не обязательно совпадающих с базисными функциями N_S :

$$\mathbf{p}_1^m(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^{L_1} \mathbf{p}_{1,l}^m \chi_{S,l} = [\chi_S] \{p_1^m\},$$

где L_1 — количество введенных базисных функций (L_2 — для $\Gamma_{c,2}$). Считаем, что дискретизированная контактная поверхность $\Gamma_{c,1}$ состоит из L_1 непересекающихся участков: $\Gamma_{c,1} = \bigcup_{l=1}^{L_1} \Gamma_l$.

2. Для поверхности $\Gamma_{c,2}$ находим значения компонент вектора узловых сил $\{R_2^{c,m}\}$ по формуле (14).

3. Вычисляем вектор нормальных распределённых контактных сил $\{p_2^m\}$, решая систему уравнений

$$\int_{\Gamma_{c,2}} [N_S]^T [\chi_S] dS \{p_2^m\} = \{R_2^{c,m}\}.$$

4. Вычисляем вектор контактных сил $\{P_1^m\}$, компоненты которого соответствуют интегралам по участкам Γ_l :

$$\{P_1^m\}_l = \int_{\Gamma_l} [\chi_S] dS \{p_1^m\}.$$

5. Вычисляем векторы контактных сил $\{P_1^{m+1}\}$ по формуле, аналогичной (11):

$$\{P_1^{m+1}\} = \theta \{\bar{P}_2^m\} + (1 - \theta) \{P_1^m\},$$

где $\{\bar{P}_2^m\}$ — контактная сила на участке поверхности $\Gamma_{c,2}$, расположенном напротив участка Γ_l .

6. Вычисляем вектор контактных давлений $\{p_1^{m+1}\}$, решая систему уравнений

$$\int_{\Gamma_l} [\chi_S] dS \{p_1^{m+1}\} = \{P_1^{m+1}\}_l, \quad l = \overline{1, L_1}.$$

7. Вычисляем вектор узловых контактных сил

$$\{R_1^{c,m+1}\} = \int_{\Gamma_{c,1}} [N_S]^T [\chi_S] dS \{p_1^{m+1}\}.$$

Далее в работе рассмотрен случай, когда в качестве участков Γ_l выбраны ячейки Дирихле для соответствующих поверхностных узлов, а в качестве базисных функций χ_S — кусочно-постоянные на данных ячейках функции.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

С использованием описанной модели смоделировано контактное взаимодействие плоского алюминиевого лайнера толщиной 1 мм со стальной опорой, расположенной под углом 25 градусов к плоскости лайнера. Моделирование выполнено в двумерном приближении для половины продольного сечения устройства, поэтому на правой стороне лайнера поставлено условие симметрии. На нижней поверхности опоры поставлено условие закрепления (равенство нулю обеих компонент вектора перемещения). Толщина опоры — 2 мм, у опоры с левой стороны имеется горизонтальный участок длиной 5 мм, после которого расположен наклонный участок. Длина лайнера (половины) — 100 мм, в начальный момент времени вся нижняя поверхность лайнера имеет координату $y = 50$ мм. Принималось, что на верхнюю поверхность лайнера действует равномерное давление. Считалось, что материал лайнера (алюминий) имеет параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$, плотность $\rho = 2700$ кг/м³; опора выполнена из железа с параметрами: $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.308$, $\rho = 7874$ кг/м³. Применялось плоскодеформированное приближение.

Расчёты проводились для конечных элементов 1-го порядка на четырёхугольной сетке. Шаг пространственной сетки для обоих тел равен 0.2 мм. Шаг по времени брался равным

$0.9\tau_{curant}$ (относительно скорости распространения волны возмущения по материалу). Считалось, что давление задано формулой $f(t) = f_0(1 - (1 - t/t_1)^2)$, где $t_1 = 2.5 \cdot 10^{-5}$ с (25 мкс), $f_0 = 489 \cdot 10^8$ Н/м². После момента времени $t = 2t_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ с (50 мкс) давление равно нулю.

Далее представлены результаты двух расчётов до момента времени $t = 78$ мкс: в расчёте 1 использовалась модель упругого тела и учитывался выход из контакта участков тел, на которых возникали растягивающие контактные силы; в расчёте 2 использовалась модель упругопластического тела с линейным упрочнением, при этом не учитывался выход из контакта по силовому критерию.

В расчёте 1 под действием приложенного давления лента лайнера начинает двигаться вниз, при этом на первом этапе ускорения в контакте остаётся только левая часть ленты, лежащая на горизонтальном участке опоры. В момент времени $t = 29$ мкс участок ленты, соответствующий координате $x = 12$ мм, ударяется о наклонную часть опоры, после этого до момента времени $t = 50$ мкс передний край зоны контакта опоры и лайнера сдвигается вправо по мере движения ленты вниз. Средняя скорость движения участка ленты лайнера, расположенного правее зоны контакта, достигает 600 м/с, по данному участку распространяются заметные волны возмущения (рис. 1, а). Когда внешнее давление становится равным нулю, то на всей поверхности лайнера, расположенной на наклонной поверхности опоры, достаточно быстро возникают растягивающие силы и она выходит из контакта. В дальнейшем под действием упругих сил лайнер начинает замедляться, к моменту времени $t = 78$ мкс его средняя скорость уменьшается до 150 м/с.

В расчёте 2 в процессе движения левая часть ленты последовательно ложилась на наклонную поверхность опоры, а центральная часть лайнера двигалась параллельно своему начальному положению. Средняя скорость участка лайнера, не вступившего в контакт, в момент времени $t = 50$ мкс достигает почти 600 м/с и в дальнейшем остаётся практически неизменной (внешние силы равны нулю и лайнер летит по инерции). Экспериментальные данные, приведённые в статье [1], качественно соответствуют результатам, полученным для упругопластической модели.

На рис. 1 показаны распределения вертикальной компоненты скорости (нормирована на 1 м/с) на участке расчётной области вблизи движущейся границы контакта в момент времени $t = 47$ мкс для обоих расчётов.

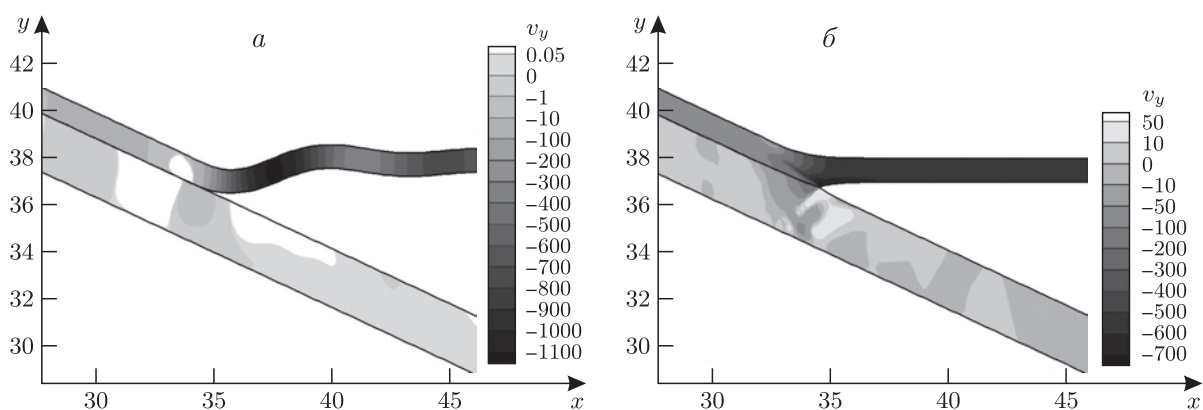


Рис. 1. Распределение скорости v_y на участке расчётной области ($t = 47$ мкс): а — расчёт 1; б — расчёт 2.

На рис. 2, а приведены графики распределения нормальной компоненты вектора перемещений u_n (в мм) в узлах на поверхности опоры (кривая 1) и распределения величины $u_n - \delta_{0n}$ (с учётом начального зазора) в узлах на поверхности лайнера (кривая 2) в момент

времени $t = 47$ мкс для расчёта 1. На рис. 2, б показан график распределения нормальных перемещений на поверхности опоры с правой стороны от границы зоны контакта. В рассматриваемый момент времени зона контакта соответствует участку опоры от $x = 13$ мм до $x = 35$ мм, исключая небольшую область вблизи точки $x = 33$, которая вышла из контакта по силовому критерию (возникли растягивающие силы). На графиках перемещений заметны волны возмущений, которые распространяются по опоре в обе стороны от движущейся границы контакта опоры с лайнером. График распределённых контактных сил также носит волнообразный характер.

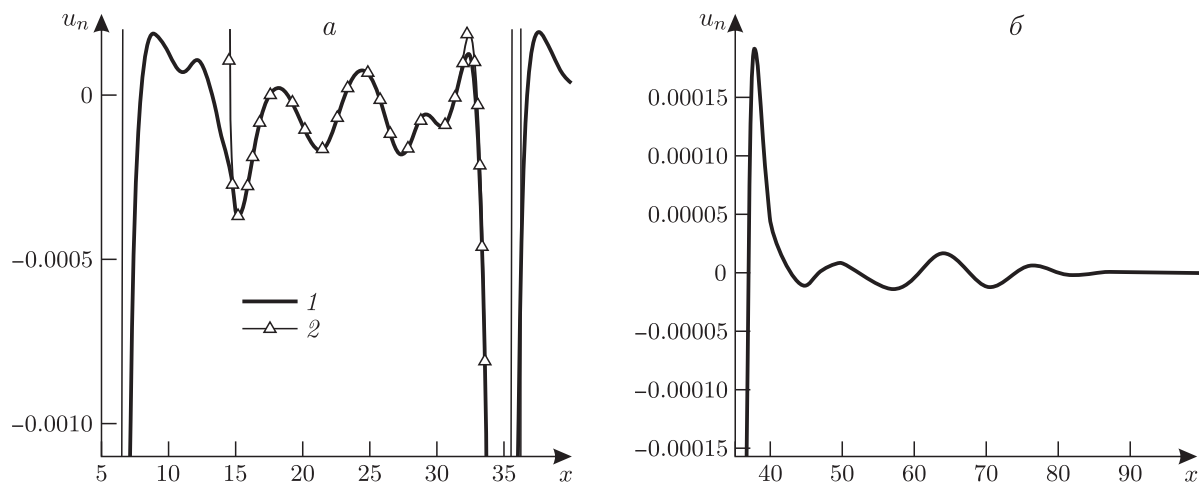


Рис. 2. Распределение нормальных перемещений (расчёт 1, $t = 47$ мкс) с левой (а) и с правой (б) сторон от границы контакта.

На рис. 3 приведены графики распределения нормальной компоненты вектора перемещений u_n (в мм) в узлах на поверхности опоры (кривая 1) и графики распределения величины $u_n - \delta_{0n}$ (с учётом начального зазора) в узлах на поверхности лайнера (кривая 2); а также графики распределённых контактных сил p (в МПа) на поверхности опоры (кривая 1) и на поверхности лайнера (кривая 2) в момент времени $t = 78$ мкс для расчёта 2.

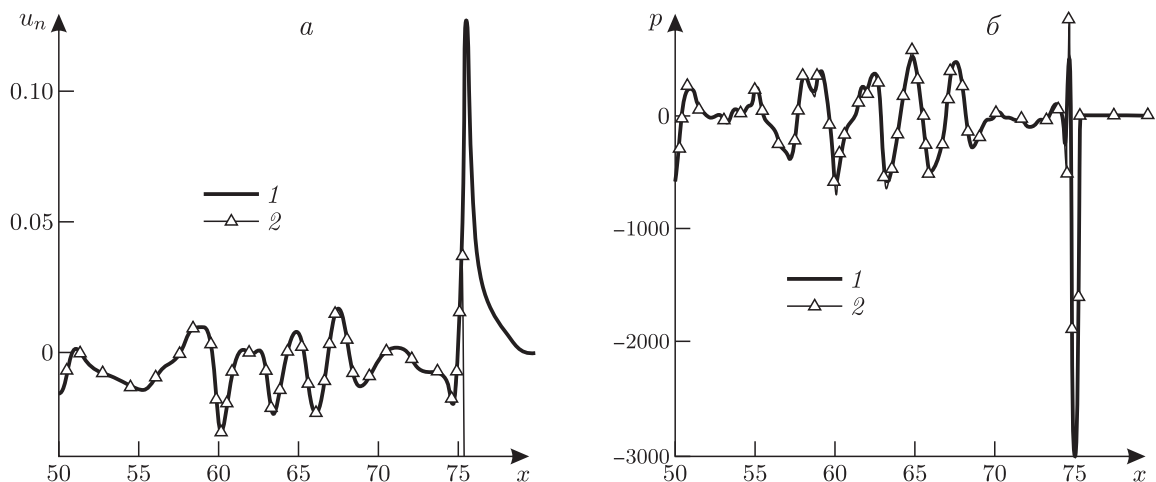


Рис. 3. Распределение нормальных перемещений (а) и распределённых контактных сил (б) в опоре и в лайнере (расчёт 2, $t = 78$ мкс).

В расчёте 2 в окрестности движущейся границы контакта лайнера с опорой в лайнере образуется зона перегиба, в которой происходит активное пластическое деформирование ленты. В результате взаимодействия с лентой лайнера в опоре возникает горб (складка), движущийся перед границей контактной зоны, при этом величина нормального перемещения в горбе достигает 0.12 мм (больше десятой части толщины лайнера). Пластическое деформирование в опоре происходит в основном в окрестности этого горба.

Графики контактных давлений показывают, что наибольшие контактные силы (как в расчёте 1, так и в расчёте 2) сосредоточены в движущейся зоне, примыкающей к границе контактной поверхности, протяженностью 1–2 мм. В данной зоне контактные давления (пиковые значения) достигают нескольких ГПа, за её пределами контактные давления на порядок меньше. В результате контактного взаимодействия с лентой перемещения на поверхности опоры приобретают близкий к волнообразному характер с чередованием впадин и выступов и амплитудой около 0.02 мм. Сравнение рис. 3, а с рис. 2, а показывает, что учёт пластических деформаций приводит к увеличению значений перемещений на два порядка. На графике контактного давления (рис. 3, б) также отчетливо видна волнообразная структура, при этом на некоторых участках контактные напряжения являются растягивающими.

4. МОДЕЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Для интерпретации результатов расчётов рассмотрим упрощённые модельные задачи.

Задача 1. Одномерная задача о падении одной упругой среды на другую:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{k_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & -L < x < 0, & \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) &= 0, \\ u_1(-L, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{k_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & 0 < x < l, & \quad t > 0, \\ u_2(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) &= v_0, \\ k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t) &= f, \\ u_1(0, t) &= u_2(0, t), \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) &= k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t). \end{aligned} \tag{15}$$

Далее участок $x \in (-L, 0)$ будем называть *областью 1* (опора), а участок $x \in (0, l)$ — *областью 2* (лайнер). Все параметры сред (ρ_i , k_i , $i = 1, 2$) будем считать постоянными. Для упрощения величины v_0 , f (начальную скорость и внешнюю ускоряющую силу) также будем считать постоянными. Введём (квадраты) скорости распространения сигналов $a_i^2 = k_i/\rho_i$, $i = 1, 2$.

Решение задачи (15) для произвольных начальных данных может быть получено методом Фурье [7, с. 82] в виде бесконечных рядов по системе собственных функций, который также называется методом собственных функций (методом Гринберга) [8, с. 118; 9, с. 169].

Записывается это решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \nu_n(x),$$

где $\nu_n(x)$ — собственные функции соответствующего пространственного оператора (решения задачи Штурма–Лиувилля), $w_n(t)$ — временные амплитуды. Функция $u(x, t) = u_1(x, t)$ — решение задачи в области 1, $u(x, t) = u_2(x, t)$ — в области 2.

Уравнение для определения амплитуд $w_n(t)$ выписывается в результате скалярного умножения уравнений задачи (15) на собственную функцию $\nu_n(x)$. Соответствующее скалярное произведение, относительно которого пространственный оператор задачи является самосопряжённым, определяется по формуле

$$(p, q) = \int_{-L}^0 \rho_1 p q \, dx + \int_0^l \rho_2 p q \, dx.$$

В области 1 (области 2) собственные функции имеют вид

$$\nu_n(x) = A_n \frac{\sin(\lambda_n(L+x)/a_1)}{\sin(\lambda_n L/a_1)} \quad \left(\nu_n(x) = A_n \frac{\cos(\lambda_n(l-x)/a_2)}{\cos(\lambda_n l/a_2)} \right). \quad (16)$$

Знаменатели выражений считаем отличными от нуля. Функции (16) непрерывны в нуле в соответствии с условиями задачи. Постоянная A_n определяется из условия равенства нормы собственной функции единице. Собственные значения λ_n являются решениями трансцендентного уравнения, следующего из условия (15) равенства сил в точке контакта:

$$k_1 \frac{\lambda_n}{a_1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda_n}{a_1} L \right) = k_2 \frac{\lambda_n}{a_2} \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda_n}{a_2} l \right). \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что $\lambda_n = 0$ не является собственным значением (так что (17) можно на λ_n сократить), а знаменатели выражений (16) в соответствии с (17) отличны от нуля. Исключение составляют специфические параметры задачи, которые здесь не рассматриваются.

Элементарные соображения о свойствах тригонометрических функций показывают, что уравнение (17) имеет бесконечное счётное множество решений.

Предложение 1. Для первого собственного значения справедлива оценка

$$\lambda_1 < \frac{\pi}{2} \min \left\{ \frac{a_1}{L}, \frac{a_2}{l} \right\}. \quad (18)$$

Данное значение соответствует временной частоте, порождённой отражениями сигнала, возникшего вследствие ненулевой начальной скорости в области 2, от границ областей 1 и 2. Как известно [7], от границы $x = -L$ сигнал отражается нечётным образом, а от $x = l$ — чётным. Результатом прохождения сигналов является возникновение сил, действующих на границе контакта $x = 0$.

Задача 2. Рассматриваемое в данной работе падение ленты лайнера происходит так, что лента постепенно приходит в контакт с подложкой. Длина участка контакта увеличивается со скоростью, определяемой внешними условиями ускорения лайнера (силой f). Имеет место точка, движущаяся по опоре и лайнеру, в которой наблюдается динамический контакт тел. В ней решение уравнений механики твёрдого тела содержит сингулярность [10, с. 305]. Эта сингулярность хорошо видна и на рисунках, иллюстрирующих результаты моделирования.

Описанное явление позволяет рассмотреть задачу о генерации возмущений сосредоточенной силой, движущейся по поверхности упругого тела (в нашем случае — подложкой, опорой) с заданной скоростью.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < v_0 t, \quad v_0 t < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_2(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_1(v_0 t, t) &= u_2(v_0 t, t), \\ k \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(v_0 t, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(v_0 t, t) \right) &= -F(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначения в (19) отличаются от обозначений из задачи (15): в (19) возмущения распространяются в одной среде (имитирует опору) источником сосредоточенной силы $F(t)$, движущейся с заданной скоростью v_0 , и решение слева от точки $x = v_0 t$ обозначается через $u_1(x, t)$, а справа — через $u_2(x, t)$. Считаем, что скорость распространения возмущений в упругой среде (19) больше скорости движения точки приложения силы $v_0 < a$ (здесь $a^2 = k/\rho$).

Решение задачи (19) [11, с. 208] определяется как

$$u(x, t) = \frac{a^2 - v_0^2}{2ak} \begin{cases} \int_0^{(at+x)/(a+v_0)} F(\xi) d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ \int_0^{(at-x)/(a-v_0)} F(\xi) d\xi, & v_0 t < x < at. \end{cases} \quad (20)$$

Вне зоны $-at < x < at$ решение нулевое.

Из (20) вытекают утверждения.

Предложение 2. Гармоническая вынуждающая сила генерирует гармонические колебания.

Предложение 3. Слева от точки приложения силы смещение $u_1(x, t)$ выражается через интеграл с верхним пределом $t - (v_0 t - x)/(a + v_0)$, а справа смещение $u_2(x, t)$ — через интеграл с верхним пределом $t - (x - v_0 t)/(a - v_0)$. Тем самым для, например, положительной вынуждающей силы возмущение от точки $x_0 = v_0 t$ справа будет меньше, чем слева (при равных $|x - x_0|$). Отличие тем больше, чем ближе скорость движения источника к скорости распространения возмущений.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ К АНАЛИЗУ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТОВ

Применим полученные выше решения к трактовке численных результатов.

Для железной опоры (область 1 в задаче (15)) имеем скорость распространения продольных колебаний [12] $a_l = 5.916 \cdot 10^3$ м/с, а скорость распространения поперечных колебаний $a_t = 3.116 \cdot 10^3$ м/с. Толщина $L = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Для алюминиевой ленты (область 2 в задаче (15)) скорость распространения продольных колебаний равна $a_l = 6.205 \cdot 10^3$ м/с, скорость распространения поперечных колебаний $a_t = 3.122 \cdot 10^3$ м/с. Толщина $l = 1 \cdot 10^{-3}$ м.

При соударении твёрдых тел — ленты лайнера и опоры — основной интерес представляют продольные колебания, поскольку именно они генерируют нормальную компоненту силы на контактной поверхности.

Оценка (18) для приведённых параметров даёт границу

$$\lambda_1 < \frac{\pi}{2} \min\{2.958 \cdot 10^6, 6.205 \cdot 10^6\} = 4.646 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Численное решение (17) с помощью системы Wolfram-Matematica [13, с. 257] даёт значения $\lambda_1 = 2.906 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_2 = 5.974 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_3 = 11.726 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Как видно, данные величины хорошо согласуются между собой. Значение λ_1 задаёт частоту колебаний основной гармоники решения задачи (15), в свою очередь оно генерирует силовое воздействие на границе контакта. В результате на контакт действует сила, основная составляющая которой соответствует данной частоте. По подложке бежит волна поперечных колебаний, качественно описываемая решением (20). Расстояние между экстремумами смещения можно оценить величиной $\Delta l = 6.737 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Данное значение соответствует наблюдаемому в расчётах (см. рис. 2, 3).

Амплитуды колебаний перед точкой контакта и позади неё отличаются на порядки в случае учёта пластичности из-за того, что в точке контакта большая часть энергии уходит на пластическое деформирование и генерацию складки (горба). Для случая упругого деформирования различие не столь велико (в 10 раз), тем не менее оно качественно соответствует решению (20) (см. рис. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для двумерного моделирования контактного взаимодействия алюминиевого лайнера, разогнанного до скорости 0.5 км/с за интервал времени порядка 100 мкс, со стальной опорой, расположенной под углом 25 градусов к плоскости движения лайнера, использованы модели упругого и упругопластического тела с учётом больших деформаций. Численная модель основана на методах конечных элементов и Неймана–Дирихле для учёта контактных условий. Выполнена серия расчётов, результаты которых свидетельствуют о том, что максимальное пластическое деформирование тел и максимальные контактные силы сосредоточены в узкой области, примыкающей к движущейся границе контакта лайнера с опорой. Под действием контактных сил на поверхности опоры возникают волны смещения в направлении нормали, близкие к гармоническим. Проведён анализ аналитических решений ряда одномерных тестовых задач, позволяющих качественно оценить особенности полученных численных решений двумерной задачи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин, М.П. Математическое моделирование движения лайнера в различных сечениях магнитного компрессора / М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин // Мат. моделирование. — 2010. — Т. 22, № 10. — С. 35–55.
2. Коробейников, С.Н. Нелинейное деформирование твёрдых тел / С.Н. Коробейников. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. — 262 с.
3. Wriggers, P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. — Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. — 518 p.
4. Toselli, A. Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory / A. Toselli, O. Widlund. — Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2005. — 450 p.

5. Галанин, М.П. Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента / М.П. Галанин, А.С. Родин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 4. — С. 659–676.
6. Bayada, G. Convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb’s friction law / G. Bayada, J. Sabil, T. Sassi // *Math. Model. Numer. Anal.* — 2008. — V. 42. — P. 243–262.
7. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 736 с.
8. Агошков, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев. — М. : Физматлит, 2002. — 320 с.
9. Галанин, М.П. Математическое моделирование: теория и применение / М.П. Галанин, Н.А. Тихонов, М.Г. Токмачев. — М. : Ленанд, 2022. — 598 с.
10. Партон, В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. — М. : Наука, 1981. — 688 с.
11. Будаков, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будаков, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. — М. : Наука, 1988. — 686 с.
12. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х т. / Л.И. Седов. — М. : Наука, 1994. — Т. 2. — 568 с.
13. Дьяконов, В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В.П. Дьяконов. — М. : ДМК Пресс, 2010. — 624 с.

THE PROBLEM OF A LINER TAPE FAILING ONTO AN INCLINED SUPPORT

M. P. Galanin¹, A. S. Rodin²

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: ¹galan@keldysh.ru, ²ral@bk.ru

The problem of numerical simulation of the contact interaction of a metal tape moving at a speed of about 0.5 km/s with a fixed inclined support for a time of about 100 μ s is considered. A two-dimensional approximation was used; an elastoplastic body model for large deformations was used to describe the tape and support. To take into account the boundary conditions on contacting surfaces, an iterative algorithm related to Neumann–Dirichlet type methods was used in the calculations. The finite element method is used for spatial discretization. The calculation results are presented. A number of model one-dimensional problems are considered, which make it possible to qualitatively evaluate the results obtained in the two-dimensional case.

Keywords: elastoplastic body, contact problem, finite element method.

REFERENCES

1. Galanin, M.P., Lotoskii, A.P., and Rodin, A.S., Motion of liner in various sections of magnetic compressor, *Math. Models and Comp. Simul.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 273–289.
2. Korobeinikov, S.N., *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* (Nonlinear Deformation of Solids), Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN, 2000.
3. Wriggers, P., *Computational Contact Mechanics*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
4. Toselli, A. and Widlund, O., *Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
5. Galanin, M.P. and Rodin, A.S., Investigation and application of the domain decomposition method for simulating fuel elements, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 4, pp. 641–657.
6. Bayada, G., Sabil, J., and Sassi, T., Convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb’s friction law, *Math. Model. Numer. Anal.*, 2008, vol. 42, pp. 243–262.
7. Tichonov, A.N. and Samarskii, A.A., *Uraveniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1972.

8. Agoshkov, V.I., Dubovskii, P.B., and Shutiaev, V.P., *Metody resheniya zadach matematicheskoy fiziki* (Methods for Solving Problems of Mathematical Physics), Moscow: Fizmatlit, 2002.
9. Galanin, M.P., Tichonov, N.A., and Tokmachev, M.G., *Matematicheskoye modelirovaniye: teoriya i primeneniye* (Mathematical Modeling: Theory and Application), Moscow: Lenand, 2022.
10. Parton, V.Z. and Perlin, P.I., *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*, Moscow: MIR, 1984.
11. Budak, B.M., Samarskii, A.A., and Tichonov, A.N., *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* (Collection of Problems in Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1988.
12. Sedov, L.I., *Mekhanika sploshnoy sredy* (Continuum Mechanics), vol. 2, Moscow: Nauka, 1994.
13. Diakonov, V.P., *Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo* (Mathematica 5/6/7. Complete Guide), Moscow: DMK Press, 2010.

УДК 519.63

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОНСЕРВАТИВНОСТЬ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПОДВИЖНЫХ И ФИКСИРОВАННЫХ СЕТКАХ

© А. О. Гусев¹, О. С. Мажорова²

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

e-mail: ¹aogus@mail.ru, ²olgamazhor@mail.ru

Поступила в редакцию 02.03.2024 г., после доработки 02.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Предложена консервативная разностная схема для уравнения теплопроводности в двумерной области с подвижными границами. Изложение ведётся на примере двухфазной задачи Стефана. С помощью динамической замены переменных область с внутренней подвижной границей отображается в прямоугольную область с фиксированными границами, совпадающими с координатными линиями. Разностная схема построена с помощью интегро-интерполяционного метода на неподвижной прямоугольной сетке. Получены формулы, позволяющие вычислять якобиан замены переменных и скорость границы контрольного объёма, удовлетворяющие дискретному аналогу уравнения переноса якобиана и обеспечивающие выполнение геометрического закона сохранения в физической системе координат. Доказано, что предложенная разностная схема наследует основные свойства исходной дифференциальной задачи.

Ключевые слова: задача с подвижной границей, геометрическая консервативность, подвижная сетка, метод выпрямления фронта, фазовый переход.

DOI: 10.31857/S0374064124070059, EDN: KNLGXC

ВВЕДЕНИЕ

Тепломассоперенос в областях с подвижными границами играет важную роль во многих физико-химических процессах. Большое разнообразие задач, исследование которых предполагает совместное решение уравнений переноса и уравнений, описывающих движение границы, стимулирует разработку и исследование различных методов их численного решения. Центральное место здесь занимают конечно-разностные алгоритмы, в которых подвижная граница выделяется явным образом и определяется положением закреплённых на ней узлов сетки. Уравнения, описывающие эволюцию системы, аппроксимируются либо в физической системе координат на подвижной сетке, согласованной с формой границы, либо в специальной системе координат, в которой расчётная область имеет фиксированные границы, совпадающие с координатными линиями. На уровне постановки дифференциальной задачи эти подходы эквивалентны.

На подвижных неортогональных сетках конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений, описывающих процессы переноса массы, энергии и импульса, строятся, как правило, с помощью интегро-интерполяционного метода (метод контрольного объёма) [1, § 12.4]. В рамках данного подхода процесс построения дискретной модели сводится к вычислению потоков искомых величин в центрах границ контрольного объёма. При этом требуется вычислять значения сеточных функций и их производных в узлах, в которых

они не определены. Интерполяцию соответствующих величин необходимо осуществлять таким образом, чтобы на разностном уровне выполнялись различные формы записи законов сохранения и основные свойства (кососимметричность конвективных членов, самосопряжённость и отрицательная определённость диссипативных членов и т.д.), присущие исходной дифференциальной задаче.

На подвижных сетках, наряду с законами сохранения массы, импульса и энергии, в дискретной среде необходимо обеспечить выполнение закона сохранения площади элементарного объёма — соотношения, связывающего изменение площади расчётной ячейки со скоростью движения её границ. В работах [2–4] показано, что нарушение геометрического закона сохранения приводит к возникновению в сеточных уравнениях схемных источников/стоков внутренней и кинетической энергии, массы и т.д. В расчётах на подвижных сетках скорости движения границ ячейки аппроксимируются таким образом, чтобы в дискретной среде выполнялся закон сохранения площади (см., например, [5–7]). На неподвижной сетке в области, полученной в результате нестационарного преобразования системы координат, математическая модель дополняется уравнением переноса якобиана, обеспечивающим выполнение закона сохранения площади в исходной системе координат. При этом сеточный аналог уравнения переноса якобиана решается совместно с уравнениями, описывающими процессы переноса энергии, импульса и массы в дискретной среде (см., например, [8–11]).

Выполнение закона сохранения площади ячейки играет ключевую роль при моделировании фазовых переходов. В статье [12] на примере модельной задачи о кристаллизации бинарного соединения показано, что в случае нарушения этого закона полученная в расчётах масса кристаллизовавшегося вещества может более чем на 50% отличаться от истинного значения.

В настоящей работе в двумерном приближении рассмотрена задача о фазовом переходе в чистом веществе в области переменной ширины. Математическая модель учитывает процессы теплопереноса в твёрдой и жидкой фазах, движение фронта кристаллизации и выделение теплоты на нём. Для решения задачи с внутренней подвижной границей, положение которой необходимо определять в ходе решения задачи, применяется модификация метода выпрямления фронта [13]. Уравнения, полученные в результате преобразования системы координат, аппроксимируются на фиксированной сетке. Построена консервативная разностная схема, в которой выполнен дискретный аналог закона сохранения внутренней энергии. Формулы для вычисления скорости движения границы ячейки получены из закона сохранения площади восьмиугольного в физической области контрольного объёма. Для этого была использована дискретная замена переменных. Вычисленные таким образом скорости удовлетворяют неявной аппроксимации уравнения переноса якобиана.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу о фазовом переходе в чистом веществе рассмотрим в области переменной ширины $\Omega(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}: x \in [0, g(y)], y \in [0, L]\}$ в декартовой системе координат Oxy . Здесь $x = g(y)$ — боковая граница области, прямая $x = 0$ является осью симметрии. Твёрдая фаза находится в подобласти $\Omega^0(t, x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}: x \in [0, g(y)], y \in [0, f(t, x)]\}$, жидкая — в подобласти $\Omega^1(t, x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}: x \in [0, g(y)], y \in [f(t, x), L]\}$, где $y = f(t, x)$ — граница раздела фаз, положение которой изменится в ходе процесса (рис. 1).

Твёрдая и жидкая фазы имеют одинаковые плотности $\rho^{\text{cr}} = \rho^{\text{li}} = \rho$ и удельные теплоёмкости $c_p^{\text{cr}} = c_p^{\text{li}} = c_p$ и различные коэффициенты теплопроводности — k^{cr} и k^{li} соответственно.

Распределение температуры в области описывается уравнением теплопроводности

$$\partial_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (1)$$

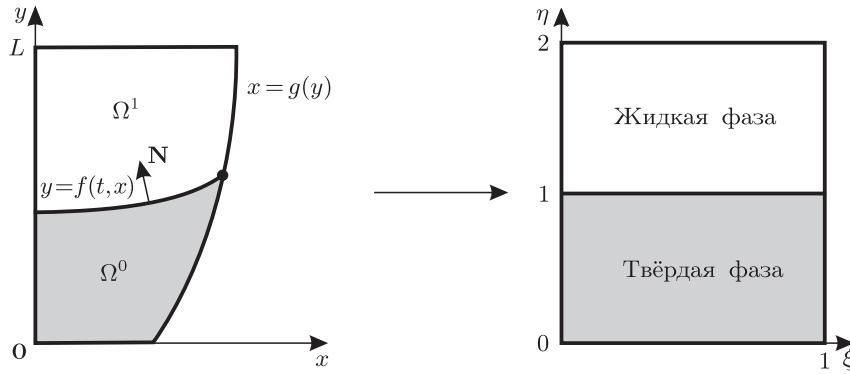


Рис. 1. Преобразование системы координат.

Здесь $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_t = \partial/\partial t$. Коэффициент температуропроводности является кусочно-постоянной функцией: $\kappa(x, y) = \kappa^{\text{cr}}$ при $(x, y) \in \Omega^1$, $\kappa(x, y) = \kappa^0$ при $(x, y) \in \Omega^0$, где $\kappa^{\text{cr}} = k^{\text{cr}}/(c_p \rho)$ и $\kappa^0 = k^1/(c_p \rho)$.

На межфазной границе температура равна температуре фазового перехода

$$T|_{y=f(t,x)} = T_{\text{melt}} \quad (2)$$

и выполняется закон сохранения энергии (условие Стефана)

$$(k^{\text{cr}} \nabla T \cdot \mathbf{N})|_{y=f(t,x)-0} - (k^1 \nabla T \cdot \mathbf{N})|_{y=f(t,x)+0} = \lambda \rho v^{\text{ph}}(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{N}). \quad (3)$$

Здесь λ — скрытая теплота плавления, $v^{\text{ph}} = v^{\text{ph}}(t, x)$ — скорость движения границы раздела фаз, $\mathbf{N}$ — единичная нормаль к межфазной границе, направленная в жидкую фазу, $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор в направлении оси y .

Из симметрии следует, что на оси $x=0$

$$\partial_x T = 0. \quad (4)$$

На боковой границе области Ω — кривой $x=g(y)$ — тепловой поток равен нулю:

$$(k \nabla T \cdot \tilde{\mathbf{N}})|_{x=g(y)} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{N}}$ — внешняя нормаль к границе $x=g(y)$. На торцах области Ω — прямых $y=0$, $y=L$ — заданы значения температуры

$$T|_{y=0} = T_b(t), \quad T|_{y=L} = T_t(t). \quad (6)$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Основу метода решения задачи (1)–(6) составляет модификация метода выпрямления фронта [13]. Физическая область $\Omega(t, x, y)$ отображается в расчётную область $\Omega(\tilde{t}, \xi, \eta)$ так, что в новой системе координат положение границы раздела фаз фиксировано и совпадает с координатной линией $\eta = \text{const}$, а боковой границы — с координатной линией $\xi = \text{const}$. Области Ω^0 и Ω^1 в новой системе координат становятся прямоугольниками (см. рис. 1): границы $x=0$, $x=g(y)$ переходят в прямые $\xi=0$, $\xi=1$, а границы $y=0$, $y=f(t, x)$, $y=L$ — в прямые $\eta=0$, $\eta=1$, $\eta=2$ соответственно. Расчётная $(\tilde{t}, \xi, \eta)$ и физическая (t, x, y) системы координат связаны соотношениями

$$\tilde{t} = t, \quad \xi = \xi(t, x, y), \quad \eta = \eta(t, x, y). \quad (7)$$

При наличии в физической области $\Omega(t, x, y)$ твёрдой и жидкой фаз преобразование координат (7) является невырожденным, т.е. $J^{(x,y)} = \partial(\tilde{t}, \xi, \eta) / \partial(t, x, y) \neq 0$. Запишем задачу (1)–(6) в расчётной системе координат. Частные производные преобразуются следующим образом:

$$\partial_t T = \partial_{\tilde{t}} T + \partial_{\xi} T \partial_{\tilde{t}} \xi + \partial_{\eta} T \partial_{\tilde{t}} \eta, \quad \partial_x T = \partial_{\xi} T \partial_x \xi + \partial_{\eta} T \partial_x \eta, \quad \partial_y T = \partial_{\xi} T \partial_y \xi + \partial_{\eta} T \partial_y \eta. \quad (8)$$

Для вычисления коэффициентов $\partial_{\tilde{t}} \xi$, $\partial_{\tilde{t}} \eta$, $\partial_x \xi$, $\partial_x \eta$, $\partial_y \xi$, $\partial_y \eta$ используем обратное к (7) преобразование координат

$$t = \tilde{t}, \quad x = \chi(\tilde{t}, \xi, \eta), \quad y = \varphi(\tilde{t}, \xi, \eta). \quad (9)$$

В этом случае можно показать, что [14, § 12.1]

$$\begin{aligned} \partial_x \xi &= \partial_{\eta} y / J^{(\xi, \eta)}, \quad \partial_y \xi = -\partial_{\eta} x / J^{(\xi, \eta)}, \quad \partial_t \xi = -(\partial_{\tilde{t}} x \partial_{\eta} y - \partial_{\tilde{t}} y \partial_{\eta} x) / J^{(\xi, \eta)}, \\ \partial_x \eta &= -\partial_{\xi} y / J^{(\xi, \eta)}, \quad \partial_y \eta = \partial_{\xi} x / J^{(\xi, \eta)}, \quad \partial_t \eta = (\partial_{\tilde{t}} x \partial_{\xi} y - \partial_{\tilde{t}} y \partial_{\xi} x) / J^{(\xi, \eta)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\partial_{\xi} x = \partial_{\xi} \chi, \quad \partial_{\eta} x = \partial_{\eta} \chi, \quad \partial_t x = \partial_t \chi, \quad \partial_{\xi} y = \partial_{\xi} \varphi, \quad \partial_{\eta} y = \partial_{\eta} \varphi, \quad \partial_t y = \partial_t \varphi,$$

$J^{(\xi, \eta)} = \partial(t, x, y) / \partial(\tilde{t}, \xi, \eta)$ — якобиан преобразования (9):

$$J^{(\xi, \eta)} = \partial_{\xi} x \partial_{\eta} y - \partial_{\eta} x \partial_{\xi} y = \partial_{\xi} \chi \partial_{\eta} \varphi - \partial_{\eta} \chi \partial_{\xi} \varphi.$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс у $J^{(\xi, \eta)}$, т.е. $J^{(\xi, \eta)} = J$.

2.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПЛОЩАДИ

Рассмотрим в физической системе координат контрольный объём $S^{(x,y)}(t)$, ограниченный положительно ориентированным замкнутым контуром $\partial S^{(x,y)}(t)$, движущимся со скоростью $v_g = (v_g^x(t, x, y), v_g^y(t, x, y))$, $x, y \in \partial S^{(x,y)}(t)$. Из транспортной теоремы Рейнольдса [1, § 1.2] следует, что изменение площади контрольного объёма удовлетворяет уравнению [2, 3, 15, 16]

$$d_t \left(\int_{S^{(x,y)}(t)} dx dy \right) = \int_{\partial S^{(x,y)}} v_g \cdot \mathbf{n} d\gamma, \quad (11)$$

здесь $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к контуру $\partial S^{(x,y)}(t)$. Уравнение (11) выражает *закон сохранения площади* контрольного объёма.

С помощью теоремы Остроградского–Гаусса запишем уравнение (11) как

$$d_t \left(\int_{S^{(x,y)}(t)} dx dy \right) = \int_{S^{(x,y)}(t)} \nabla \cdot v_g dx dy, \quad (12)$$

где $v_g = (d_t x, d_t y)$, $x, y \in S^{(x,y)}(t)$, — поле скоростей точек, принадлежащих области $S^{(x,y)}(t)$. Пусть $S^{(\xi, \eta)}$ — образ контрольного объёма $S^{(x,y)}(t)$ при отображении (7). Уравнение (12) в расчётной системе координат примет вид

$$d_{\tilde{t}} \left(\int_{S^{(\xi, \eta)}} J d\xi d\eta \right) = \int_{S^{(\xi, \eta)}} (\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot v_g) J d\xi d\eta.$$

Здесь $\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot$ — оператор дивергенции в расчётной системе координат, $\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot v_g = [\partial_{\xi} v_g^x \partial_x \xi + \partial_{\eta} v_g^x \partial_x \eta] + [\partial_{\xi} v_g^y \partial_y \xi + \partial_{\eta} v_g^y \partial_y \eta]$. С помощью соотношений (8), (10) нетрудно показать, что

$$(\nabla^{(\xi, \eta)} \cdot v_g) J = \partial_{\xi} [\partial_{\eta} y v_g^x - \partial_{\eta} x v_g^y] + \partial_{\eta} [-\partial_{\xi} y v_g^x + \partial_{\xi} x v_g^y]. \quad (13)$$

Обозначим соответственно через U и V выражения в квадратных скобках в формуле (13) и перепишем закон сохранения объёма ячейки в расчётной системе координат в виде

$$d_{\tilde{t}} \int_{S^{(\xi, \eta)}} J d\xi d\eta = \int_{S^{(\xi, \eta)}} (\partial_{\xi} U + \partial_{\eta} V) d\xi d\eta. \quad (14)$$

Контрольный объём $S^{(\xi, \eta)}$ является неподвижным, поэтому из интегрального тождества (14) следует уравнение переноса якобиана

$$\partial_{\tilde{t}} J = \partial_{\xi} U + \partial_{\eta} V \quad (15)$$

— закон сохранения объёма ячейки в дифференциальной форме. С учётом формул замены переменных (10) получим, что $U = -J\xi_{\tilde{t}}$, $V = -J\eta_{\tilde{t}}$. Таким образом, из уравнения (15) следует, что в расчётной системе координат $\partial_{\tilde{t}} J + J\xi_{\tilde{t}} + J\eta_{\tilde{t}} = 0$, т.е.

$$d_{\tilde{t}} J = 0.$$

2.2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В РАСЧЁТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В уравнении (1) с помощью соотношений (8), (10) перейдём к координатам $(\tilde{t}, \xi, \eta)$. Для производной по времени имеем

$$\partial_{\tilde{t}} T = \partial_{\tilde{t}} T + \partial_{\xi} T \partial_{\tilde{t}} \xi + \partial_{\eta} T \partial_{\tilde{t}} \eta. \quad (16)$$

После умножения (16) на якобиан преобразования (9) получим

$$J \partial_{\tilde{t}} T = J \partial_{\tilde{t}} T - U \partial_{\xi} T - V \partial_{\eta} T. \quad (17)$$

Из уравнения (15) следует, что $T \partial_{\tilde{t}} J - T \partial_{\xi} U - T \partial_{\eta} V = 0$. Данное соотношение позволяет записать производную по времени (17) в дивергентной форме:

$$\mathcal{T}(T) = J \partial_{\tilde{t}} T = \partial_{\tilde{t}}(JT) - \partial_{\xi}(UT) - \partial_{\eta}(VT). \quad (18)$$

Диссипативные члены в уравнении (1) преобразуются следующим образом:

$$\mathcal{D}(T) = J \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = [\partial_{\xi} \mathcal{W}^{\xi} + \partial_{\eta} \mathcal{W}^{\eta}].$$

Компоненты вектора теплового потока $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^{\xi}, \mathcal{W}^{\eta})$ в расчётной системе координат имеют вид [14, § 12.1]

$$\mathcal{W}^{\xi} = \kappa [L^{\xi\xi} \partial_{\xi} T + L^{\xi\eta} \partial_{\eta} T], \quad \mathcal{W}^{\eta} = \kappa [L^{\eta\eta} \partial_{\eta} T + L^{\eta\xi} \partial_{\xi} T]. \quad (19)$$

Метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}$, $L^{\xi\eta}$, $L^{\eta\xi}$, $L^{\eta\eta}$ вычисляются по формулам

$$L^{\xi\xi} = [(\partial_{\eta}\varphi)^2 + (\partial_{\eta}\chi)^2]/J, \quad L^{\xi\eta} = L^{\eta\xi} = -[\partial_{\xi}\chi \partial_{\eta}\chi + \partial_{\eta}\varphi \partial_{\xi}\varphi]/J, \quad L^{\eta\eta} = [(\partial_{\xi}\chi)^2 + (\partial_{\xi}\varphi)^2]/J.$$

Таким образом, уравнение теплопроводности (1) в расчётной системе координат имеет вид

$$\partial_{\tilde{t}}(JT) - \partial_{\xi}(UT) - \partial_{\eta}(VT) = \partial_{\xi} \mathcal{W}^{\xi} + \partial_{\eta} \mathcal{W}^{\eta}. \quad (20)$$

2.3. УСЛОВИЕ СТЕФАНА В РАСЧЁТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Используя представление тепловых потоков (19), запишем условие Стефана в расчётной системе координат:

$$W^{\eta}|_{\eta=1-0} - W^{\eta}|_{\eta=1+0} = \lambda \rho \chi_{\xi} v^{\text{ph}}. \quad (21)$$

Замечание. В дальнейшем для краткости там, где это не вызывает разночтений, знак $\sim$ над $\tilde{t}$ будем опускать.

3. СЕТКА И СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. СЕТКА

В расчётной области $\Omega(\xi, \eta)$ введём прямоугольную сетку $\omega_h^{(\xi, \eta)} = \omega_h^\xi \times \omega_h^\eta$, где $\omega_h^\xi = \{\xi_i, i = \overline{0, M}, \xi_0 = 0, \xi_M = 1\}$, $\omega_h^\eta = \{\eta_j, j = \overline{0, N}, \eta_0 = 0, \eta_{j^*} = 1, \eta_N = 2\}$, шаги сетки $h_{i+1/2}^\xi = \xi_{i+1} - \xi_i$, $h_{j+1/2}^\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$, а также полудельные узлы $\xi_{i+1/2} = (\xi_{i+1} + \xi_i)/2$, $\eta_{j+1/2} = (\eta_{j+1} + \eta_j)/2$. Расчётную область $\Omega(\xi, \eta)$ разобьём на прямоугольные ячейки $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$ с вершинами в точках $(\xi_{i\pm 1/2}, \eta_{j\pm 1/2})$; длины сторон ячейки $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$ равны $h_i^\xi = 0.5(h_{i+1/2}^\xi + h_{i-1/2}^\xi)$ и $h_j^\eta = 0.5(h_{j+1/2}^\eta + h_{j-1/2}^\eta)$, её площадь $\bar{S}_{ij}^{(\xi, \eta)} = h_i^\xi h_j^\eta$. Также рассмотрим ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$ с вершинами в точках $(\xi_{i+\alpha}, \eta_{j+\beta})$, $\alpha, \beta = 0, 1$. Сетка по времени $\omega_\tau = \{t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + \tau, k = 0, 1, \dots\}$, где τ — шаг по времени. Для обозначения узлов сетки также будем использовать локальную географическую нотацию: $f_{ij} = f_P$, $f_{i+1, j} = f_E$, $f_{i, j+1} = f_N$, $f_{i+1/2, j} = f_e$, $f_{i, j+1/2} = f_n$, $f_{i+1/2, j+1/2} = f_{ne}$ и т.д. Контрольный объём $S_P^{(\xi, \eta)} = \bigcup_{q=1}^4 S_q^{(\xi, \eta)}$.

В физической области $\Omega(t, x, y)$ введём подвижную сетку, согласованную с формой границы раздела $\omega_h^{(x, y)}(t) = \{(x_{ij}(t), y_{ij}(t)), i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}\}$, таким образом, чтобы $x_{ij}(t) = \chi(t, \xi_i, \eta_j)$, $y_{ij}(t) = \varphi(t, \xi_i, \eta_j)$. В этом случае узлы $(x_{ij^*}(t), y_{ij^*}(t))$, $i = \overline{0, M}$, в ходе всего процесса закреплены на межфазной границе и движутся со скоростью фронта кристаллизации. Сетка $\omega_h^{(x, y)}(t)$ разбивает физическую область на четырёхугольные ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(x, y)}(t)$ с вершинами в точках $(x_{i+\alpha, j+\beta}, y_{i+\alpha, j+\beta})$, $\alpha, \beta = 0, 1$. Соединим середины противоположащих границ данных ячеек отрезками прямых. Полученные отрезки разбивают физическую область на восьмиугольные ячейки $S_{ij}^{(x, y)}(t)$, $i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}$, являющиеся образом ячеек $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$ в расчётной области при отображении (9), т.е. $S_{ij}^{(x, y)}(t_k) = \{(x = \chi(t_k, \xi, \eta), y = \varphi(t_k, \xi, \eta)) : (\xi, \eta) \in S_{ij}^{(\xi, \eta)}\}$ (рис. 2); обозначим $S_P^{(x, y)} = \bigcup_{q=1}^4 S_q^{(x, y)}$, $\bar{S}_q^{(x, y)}$ — площадь ячейки $S_q^{(x, y)}$.

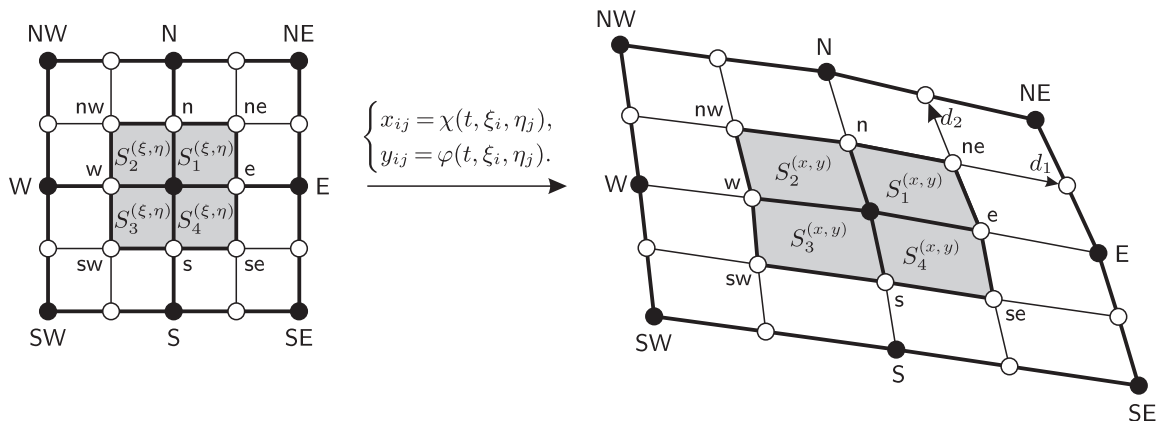


Рис. 2. Фиксированная сетка в расчётной системе координат (слева) и соответствующая ей подвижная сетка в физической системе координат (справа).

3.2. СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Сеточную функцию $T_{ij}^k = T(t_k, \xi_i, \eta_j)$ будем относить к узлам сетки $\omega_h^{(\xi, \eta)}$. Доопределим эту функцию внутри расчётных ячеек: $T(t_k, \xi, \eta) = T_{ij}^k$ при $(\xi, \eta) \in S_{ij}^{(\xi, \eta)}$. В точках $(\xi_i, \eta_{j\pm 1/2})$ и $(\xi_{i\pm 1/2}, \eta_j)$ температуру доопределим следующим образом: $T_{i, j\pm 1/2} = 0.5[T_{ij} + T_{i, j\pm 1}]$, $T_{i\pm 1/2, j} = 0.5[T_{ij} + T_{i\pm 1, j}]$. Температуропроводность κ относится к центрам ячеек $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$.

Введём множество индексов узлов сетки $\omega_h^{(\xi,\eta)}: (\bar{I} \times \bar{J})$, а также множество индексов внутренних узлов сетки $\omega_h^{(\xi,\eta)}: (I \times J)$. Рассмотрим пространство сеточных функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)}) = \{f_{ij}, (i,j) \in (\bar{I} \times \bar{J}) : f_{ij} = 0, (i,j) \in (\bar{I} \times \bar{J}) \setminus (I \times J)\}$. В пространстве сеточных функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)})$ определим скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{(i,j) \in (I \times J)} f_{ij} g_{ij} J_{ij} \bar{S}_{ij}^{(\xi,\eta)}. \quad (22)$$

Введём сеточные операторы разностного дифференцирования. Для пространственных производных в направлении оси ξ имеем $f_{ij,\xi} = (f_{i+1,j} - f_{ij})/h_{i+1/2}^\xi$, $f_{ij,\bar{\xi}} = f_{i-1,j,\xi}$, разностные аппроксимации пространственных производных в направлении оси η : $f_{ij,\eta} = (f_{i,j+1} - f_{ij})/h_{j+1/2}^\eta$, $f_{ij,\bar{\eta}} = f_{i,j-1,\eta}$. Разностную производную по времени обозначим через $f_{ij,t} = (\hat{f}_{ij} - f_{ij})/\tau$, где $\hat{f}_{ij} = f(t_k + \tau, \xi_i, \eta_j)$. Линейную комбинацию значений сеточной функции с нижнего и верхнего временных слоёв обозначим $f^{(\sigma)} = \sigma \hat{f} + (1 - \sigma)f$.

В работе [17] для двухфазной задачи Стефана в прямоугольной области на подвижной сетке, согласованной с формой границы раздела фаз, построена разностная схема, алгебраически эквивалентная схеме, построенной методом выпрямления фронта, и доказано, что схемы переходят друг в друга с помощью замены переменных аналогично дифференциальному случаю. Данное обстоятельство показывает, что аппроксимации операторов на фиксированной сетке могут быть получены в результате замены переменных в соответствующих дискретных выражениях, построенных на подвижной сетке. Воспользуемся этим свойством при конструировании разностной схемы.

3.3. АППРОКСИМАЦИЯ МЕТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Разностные аппроксимации пространственных производных функций χ_{ij}^k и φ_{ij}^k в узлах сетки введём естественным образом:

$$[\partial_\xi \chi]_h = \chi_{ij,\xi}, \quad [\partial_\eta \chi]_h = \chi_{ij,\eta}, \quad [\partial_\xi \varphi]_h = \varphi_{ij,\xi}, \quad [\partial_\eta \varphi]_h = \varphi_{ij,\eta}.$$

Переинтерполяция производных χ_ξ , χ_η , φ_ξ , φ_η в центр ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}$ осуществляется с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \chi_{i+1/2,j+1/2,\xi} &= 0.5(\chi_{ij,\xi} + \chi_{i+1,j,\xi}), & \chi_{i+1/2,j+1/2,\eta} &= 0.5(\chi_{ij,\eta} + \chi_{i+1,j,\eta}), \\ \varphi_{i+1/2,j+1/2,\xi} &= 0.5(\varphi_{ij,\xi} + \varphi_{i+1,j,\xi}), & \varphi_{i+1/2,j+1/2,\eta} &= 0.5(\varphi_{ij,\eta} + \varphi_{i+1,j,\eta}). \end{aligned} \quad (23)$$

Для вычисления якобиана преобразования в точке $(\xi_{i+1/2}, \eta_{j+1/2})$ воспользуемся тем, что

$$J_{i+1/2,j+1/2} \approx \frac{1}{\bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}} \int_{S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta, \quad \int_{S_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta = \bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)},$$

откуда $J_{i+1/2,j+1/2} \approx \bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)} / \bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)}$. Здесь $\bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(\xi,\eta)} = h_{i+1/2}^\xi h_{j+1/2}^\eta$. Площадь ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)}$ вычислим следующим образом: $\bar{S}_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)} = (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{k}$, где $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ — векторы, соединяющие середины противоположащих сторон ячейки $S_{i+1/2,j+1/2}^{(x,y)}$ (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= 0.5[(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j}) - (x_{i,j+1} + x_{ij}), (y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j}) - (y_{i,j+1} + y_{ij}), 0], \\ \mathbf{d}_2 &= 0.5[(x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1}) - (x_{i+1,j} + x_{ij}), (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1}) - (y_{i+1,j} + y_{ij}), 0], \end{aligned}$$

вектор $\mathbf{k}$ — единичный орт, сонаправленный с осью Oz . Векторы $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{k}$ образуют правую тройку, поэтому $\bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} = & 0.25([x_{i+1j+1} - x_{ij+1}] + [x_{i+1j} - x_{ij}])([y_{i+1j+1} - y_{i+1j}] + [y_{ij+1} - y_{ij}]) - \\ & - 0.25([x_{i+1, j+1} - x_{i+1j}] + [x_{ij+1} - x_{ij}])([y_{i+1j+1} - y_{i+1j}] + [y_{i+1j} - y_{ij}]). \end{aligned} \quad (24)$$

Утверждение 1. В расчётной системе координат площадь ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)}$ вычисляется по формуле

$$\bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} = \left[\frac{\chi_{ij, \xi} + \chi_{ij+1, \xi}}{2} \frac{\varphi_{ij, \eta} + \varphi_{i+1j, \eta}}{2} - \frac{\chi_{ij, \eta} + \chi_{i+1j, \eta}}{2} \frac{\varphi_{ij, \xi} + \varphi_{ij+1, \xi}}{2} \right] h_{i+1/2}^{\xi} h_{j+1/2}^{\eta}. \quad (25)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $x_{ij}(t) = \chi(t, \xi_i, \eta_j)$, $y_{ij}(t) = \varphi(t, \xi_i, \eta_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_{i+1j} - x_{ij} &= \chi(t, \xi_{i+1j}, \eta_{ij}) - \chi(t, \xi_{ij}, \eta_{ij}) = \chi_{\xi} h_{i+1/2}^{\xi}, \\ y_{ij+1} - y_{ij} &= \varphi(t, \xi_{ij}, \eta_{ij+1}) - \varphi(t, \xi_{ij}, \eta_{ij}) = \varphi_{\eta} h_{j+1/2}^{\eta}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} x_{i+1j+1} - x_{ij+1} &= \chi_{i+1j+1, \xi} h_{i+1/2}^{\xi}, \quad y_{i+1j+1} - y_{i+1j} = \varphi_{i+1j, \eta} h_{j+1/2}^{\eta}, \\ x_{i, j+1} - x_{ij} &= \chi_{\eta} h_{j+1/2}^{\eta}, \quad y_{i+1j} - y_{ij} = \varphi_{\xi} h_{i+1/2}^{\xi} \end{aligned}$$

и т.д. Поэтому формулу (24) для вычисления площади ячейки $S_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)}$ можно записать следующим образом:

$$\bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} = [\chi_{i+1/2j+1/2, \xi} \varphi_{i+1/2j+1/2, \eta} - \chi_{i+1/2j+1/2, \eta} \varphi_{i+1/2j+1/2, \xi}] h_{i+1/2}^{\xi} h_{j+1/2}^{\eta}.$$

Утверждение доказано.

Учитывая, что $J_{i+1/2j+1/2} = \bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(x,y)} / \bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$, $\bar{S}_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)} = h_{i+1/2}^{\xi} h_{j+1/2}^{\eta}$, из формулы (25) получаем следующую аппроксимацию якобиана в расчётной области:

$$J_{i+1/2j+1/2} = \chi_{i+1/2j+1/2, \xi} \varphi_{i+1/2j+1/2, \eta} - \chi_{i+1/2j+1/2, \eta} \varphi_{i+1/2j+1/2, \xi}. \quad (26)$$

Метрические коэффициенты $L^{\xi\xi}$, $L^{\xi\eta}$, $L^{\eta\eta}$ вычисляются в центрах ячеек $S_{i+1/2, j+1/2}^{(\xi, \eta)}$ естественным образом с помощью формул (23), (26).

4. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В качестве контрольного объёма выберем ячейку $S_{ij}^{(\xi, \eta)}$. В рамках интегро-интерполяционного метода построение разностных аналогов операторов $\mathcal{T}(T)$, $\mathcal{D}(T)$, по-существу, состоит в вычислении соответствующих потоков в центрах границ контрольного объёма. При этом требуется вычислять значения сеточных функций и их производных в узлах, в которых они не определены. Критерием в выборе способа интерполяции является выполнение на разностном уровне законов сохранения, присущих исходной дифференциальной задаче.

4.1. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ПЛОЩАДИ ЯЧЕЙКИ

При аппроксимации производной по времени $\mathcal{T}(T)$ в расчётной системе координат необходимо вычислять якобиан J в центре контрольного объёма $S_P^{(\xi,\eta)}$ в точке (x_{ij}, y_{ij}) , а также скорости U и V в потоковых точках $(x_{i\pm 1/2, j\pm 1/2}, y_{i\pm 1/2, j\pm 1/2})$. При этом величины J_P , U_e , U_w , V_n , V_s должны удовлетворять дискретному аналогу закона сохранения площади в форме (14). Построим полностью неявную аппроксимацию уравнения переноса якобиана (15), согласованную с законом изменения площади (11) восьмиугольной ячейки в физической системе координат ячейки $S_P^{(x,y)}$. Формулы для вычисления J_P , U_e , U_w , V_n , V_s получим с помощью замены переменных (9) в выражениях, обеспечивающих выполнение тождества (11) на подвижной сетке.

Перейдём к построению соответствующей аппроксимации. Проинтегрируем уравнение (15) по ячейке $S_P^{(\xi,\eta)}$ и отрезку $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \partial_t \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} [\partial_\xi U + \partial_\eta V] d\xi d\eta dt. \quad (27)$$

Интеграл в левой части равенства (27) аппроксимируем следующим образом:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \partial_t \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta dt \approx (\hat{J}_P - J_P) \bar{S}_P^{(\xi,\eta)}. \quad (28)$$

Для интеграла в правой части (27) с учётом формулы Остроградского–Гаусса имеем

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} [\partial_\xi U + \partial_\eta V] d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S_P^{(\xi,\eta)}} [UN^\xi + VN^\eta] d\gamma dt = \tau (\hat{h}_P^\eta \hat{U}_e + \hat{h}_P^\xi \hat{V}_n - \hat{h}_P^\eta \hat{U}_w - \hat{h}_P^\xi \hat{V}_s). \quad (29)$$

Выражения (28), (29) разделим на шаг τ . Полностью неявная аппроксимация уравнения переноса якобиана (15) имеет вид

$$(J_P)_t \bar{S}_P^{(\xi,\eta)} = [\hat{U}_e - \hat{U}_w] \hat{h}_P^\eta + [\hat{V}_n - \hat{V}_s] \hat{h}_P^\xi. \quad (30)$$

Построим формулы для вычисления J_P , U_e , U_w , V_n , V_s , обеспечивающие выполнение закона сохранения площади ячейки (11) в физической системе координат в форме

$$(\bar{S}^{(x,y)})_t = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S^{(x,y)}(t)} v_g(t) \cdot \mathbf{n}(t) d\gamma dt. \quad (31)$$

(Запись закона сохранения площади ячейки в форме (31) можно получить, проинтегрировав (11) по отрезку $[t_k, t_{k+1}]$ и разделив результат на шаг τ .) Для вычисления *якобиана преобразования в центре контрольного объёма* воспользуемся тем, что

$$J_P \approx \frac{1}{\bar{S}_P^{(\xi,\eta)}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} J d\xi d\eta = \bar{S}_P^{(x,y)} / \bar{S}_P^{(\xi,\eta)}. \quad (32)$$

Восьмиугольная ячейка $S^{(x,y)}$ образована четырьмя четырехугольниками $S_i^{(x,y)}$ (см. рис. 2), $i = \overline{1, 4}$, поэтому

$$J_P = (\bar{S}_1^{(x,y)} + \bar{S}_2^{(x,y)} + \bar{S}_3^{(x,y)} + \bar{S}_4^{(x,y)}) / \bar{S}_P^{(\xi,\eta)}. \quad (33)$$

Подставив выражение (33) в аппроксимацию уравнения переноса якобиана (30), получим

$$(\bar{S}^{(x,y)})_t = \hbar^\eta [\hat{U}_e - \hat{U}_w] + \hbar^\xi [\hat{V}_n - \hat{V}_s]. \quad (34)$$

Проводя выкладки, аналогичные приведённым при доказательстве утверждения 1, можно показать, что следующие формулы позволяют точно определить площади четырехугольников $S_i^{(x,y)}$:

$$\bar{S}_1^{(x,y)} = [0.5(\chi_{n,\xi} + \chi_\xi) 0.5(\varphi_{e,\eta} + \varphi_\eta) - 0.5(\chi_{e,\eta} + \chi_\eta) 0.5(\varphi_{n,\xi} + \varphi_\xi)] 0.25 h_e^\xi h_n^\eta, \quad (35)$$

$$\bar{S}_2^{(x,y)} = [0.5(\chi_{n,\bar{\xi}} + \chi_{\bar{\xi}}) 0.5(\varphi_{w,\eta} + \varphi_\eta) - 0.5(\chi_{w,\eta} + \chi_\eta) 0.5(\varphi_{n,\bar{\xi}} + \varphi_{\bar{\xi}})] 0.25 h_w^\xi h_n^\eta, \quad (36)$$

$$\bar{S}_3^{(x,y)} = [0.5(\chi_{s,\bar{\xi}} + \chi_{\bar{\xi}}) 0.5(\varphi_{w,\bar{\eta}} + \varphi_{\bar{\eta}}) - 0.5(\chi_{w,\bar{\eta}} + \chi_{\bar{\eta}}) 0.5(\varphi_{s,\bar{\xi}} + \varphi_{\bar{\xi}})] 0.25 h_w^\xi h_s^\eta, \quad (37)$$

$$\bar{S}_4^{(x,y)} = [0.5(\chi_{s,\xi} + \chi_\xi) 0.5(\varphi_{e,\bar{\eta}} + \varphi_{\bar{\eta}}) - 0.5(\chi_{e,\bar{\eta}} + \chi_{\bar{\eta}}) 0.5(\varphi_{s,\xi} + \varphi_\xi)] 0.25 h_e^\xi h_s^\eta. \quad (38)$$

Вычислим разностную производную площади контрольного объёма по времени в уравнении (34) из закона сохранения площади ячейки (31). В этом случае уравнение (34) преобразуется к виду

$$\Delta S = \tau (\hbar_P^\eta [\hat{U}_e - \hat{U}_w] + \hbar_P^\xi [\hat{V}_n - \hat{V}_s]), \quad (39)$$

где

$$\Delta S = \widehat{\bar{S}}_P^{(x,y)} - \bar{S}_P^{(x,y)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{\partial S^{(x,y)}(t)} v_g(t) \cdot \mathbf{n}(t) d\gamma dt. \quad (40)$$

Определённый интеграл (40) по величине равен площади геометрической фигуры, которую замечает граница ячейки $S^{(x,y)}(t)$ при движении со скоростью $v_g(t)$ на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ (см., например, [3, 15]). Вычислим интеграл (40) из геометрических соображений. Рассмотрим для этого контрольный объём $S^{(x,y),(0.5)} = \{(x, y) : x = 0.5[x(t_k) + x(t_{k+1})], y = 0.5[y(t_k) + y(t_{k+1})], [x(t_k), y(t_k)] \in S^{(x,y)}, [x(t_{k+1}), y(t_{k+1})] \in \widehat{S}^{(x,y)}\}$, образованный четырьмя четырехугольными контрольными объёмами $S_i^{(x,y),(0.5)}$ такими, что $S^{(x,y),(0.5)} = \bigcup_{q=1}^4 S_i^{(x,y),(0.5)}$. Границы ячеек $S^{(x,y)}$, $S^{(x,y),(0.5)}$, $\widehat{S}^{(x,y)}$ будем считать положительно ориентированными (рис. 3).

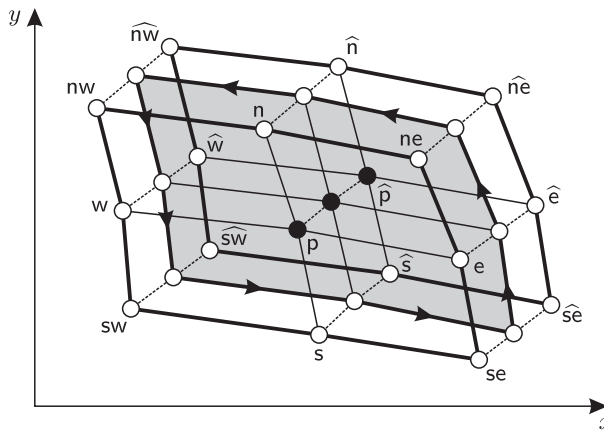


Рис. 3. Контрольные объёмы ячеек $S^{(x,y)}$, $S^{(x,y),(0.5)}$ (выделен серым цветом) и $\widehat{S}^{(x,y)}$.

Для вычисления ΔS воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \Delta S = & [(\Delta \mathbf{S}_1^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^n \cdot \mathbf{k})] + [(\Delta \mathbf{S}_3^s \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^s \cdot \mathbf{k})] + \\ & + [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})] + [(\Delta \mathbf{S}_2^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^w \cdot \mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $\Delta \mathbf{S}_i^\gamma$ — вектор, длина которого равна площади четырехугольника S_i^γ . Четырехугольник S_i^γ в ходе движения сетки замечает граница ячейки $S_i^{(x,y)}$, содержащая узел с индексом $\gamma = n, s, e, w$ (рис. 4). Вектор $\Delta \mathbf{S}_i^\gamma$ найдём как

$$\Delta \mathbf{S}_i^\gamma = (\delta \mathbf{r}_i^\gamma \times \mathbf{d}_i^\gamma), \quad (42)$$

где вектор $\delta \mathbf{r}_i^\gamma$ соединяет середины сторон ячеек $S_i^{(x,y)}$ и $\widehat{S}_i^{(x,y)}$, содержащие узел с индексом γ ; $\mathbf{d}_i^\gamma$ — граница ячейки $S_i^{(x,y),(0.5)}$, содержащая узел с индексом γ , $\gamma = n, s, e, w$ (см. рис. 4).

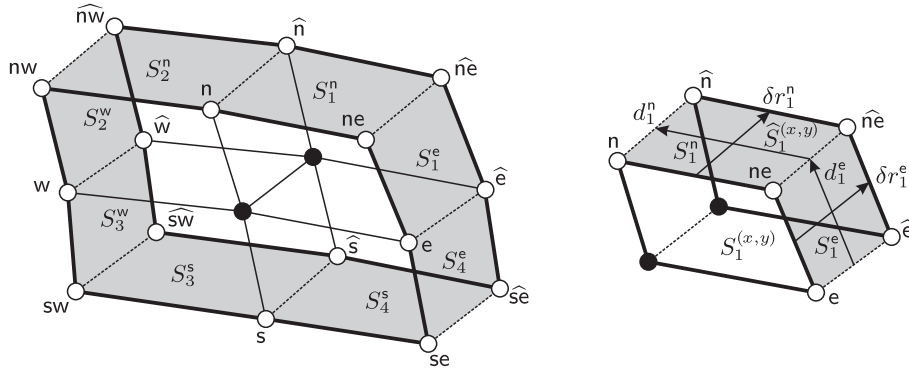


Рис. 4. Изменение площади ячейки $S^{(x,y)}(t)$ (слева) (четырёхугольники S_i^γ , которые замечает граница ячейки в ходе движения, выделены серым цветом) и ячейки $S_1^{(x,y)}(t)$ (справа).

Замечание. Выполнение равенства (41) можно проверить непосредственной подстановкой, вычислив площади соответствующих ячеек в координатной форме.

Подставив формулу (41) для вычисления определённого интеграла (40) в уравнение (39), получим

$$\begin{aligned} & (\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_1^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^s \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^s \cdot \mathbf{k}) = \\ & = \tau (\hbar_P^\eta [\widehat{U}_e - \widehat{U}_w] + \hbar_P^\xi [\widehat{V}_n - \widehat{V}_s]). \end{aligned}$$

Положим

$$\widehat{U}_e = [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})] / \hbar_P^\eta \tau, \quad \widehat{U}_w = -[(\Delta \mathbf{S}_2^w \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_3^w \cdot \mathbf{k})] / \hbar_P^\eta \tau, \quad (43)$$

$$\widehat{V}_n = [(\Delta \mathbf{S}_1^n \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_2^n \cdot \mathbf{k})] / \hbar_P^\xi \tau, \quad \widehat{V}_s = -[(\Delta \mathbf{S}_3^s \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^s \cdot \mathbf{k})] / \hbar_P^\xi \tau. \quad (44)$$

По построению использование формул (33), (35)–(38) для вычисления якобиана преобразования в центре ячейки и формул (43), (44) для вычисления компонент вектора скорости в центрах границ контрольного объёма обеспечивает выполнение в дискретной среде закона сохранения площади ячейки в форме (31).

Получим формулы для вычисления скоростей U и V в расчётной системе координат. Для этого выполним дискретное преобразование координат (9) в соотношениях (43), (44).

Утверждение 2. Закон сохранения площади ячейки (14) в форме

$$(J_P)_t = [\widehat{U}_e - \widehat{U}_w]/\hbar^\xi + [\widehat{V}_n - \widehat{V}_s]/\hbar^\eta$$

выполняется, если якобиан преобразования J в центре ячейки вычисляется по формулам (33), (35)–(38), а скорости U и V в центрах грани контрольного объёма — с помощью формул

$$\widehat{U}_e = \frac{1}{2\hbar^\eta} \left[\left(\frac{\chi_{ne,t} + \chi_{e,t}}{2} \varphi_{e,\eta}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{ne,t} + \varphi_{e,t}}{2} \chi_{e,\eta}^{(0.5)} \right) h_n^\eta + \left(\frac{\chi_{se,t} + \chi_{e,t}}{2} \varphi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{se,t} + \varphi_{e,t}}{2} \chi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)} \right) h_s^\eta \right], \quad (45)$$

$$\widehat{U}_w = \frac{1}{2\hbar^\eta} \left[\left(\frac{\chi_{nw,t} + \chi_{w,t}}{2} \varphi_{w,\eta}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{nw,t} + \varphi_{w,t}}{2} \chi_{w,\eta}^{(0.5)} \right) h_n^\eta + \left(\frac{\chi_{sw,t} + \chi_{w,t}}{2} \varphi_{w,\bar{\eta}}^{(0.5)} - \frac{\varphi_{sw,t} + \varphi_{w,t}}{2} \chi_{w,\bar{\eta}}^{(0.5)} \right) h_s^\eta \right], \quad (46)$$

$$\widehat{V}_n = \frac{1}{2\hbar^\xi} \left[\left(\frac{\varphi_{ne,t} + \varphi_{n,t}}{2} \chi_{n,\xi}^{(0.5)} - \frac{\chi_{ne,t} + \chi_{n,t}}{2} \varphi_{n,\xi}^{(0.5)} \right) h_e^\xi + \left(\frac{\varphi_{nw,t} + \varphi_{n,t}}{2} \chi_{n,\bar{\xi}}^{(0.5)} - \frac{\chi_{nw,t} + \chi_{n,t}}{2} \varphi_{n,\bar{\xi}}^{(0.5)} \right) h_w^\xi \right], \quad (47)$$

$$\widehat{V}_s = \frac{1}{2\hbar^\xi} \left[\left(\frac{\varphi_{se,t} + \varphi_{s,t}}{2} \chi_{s,\xi}^{(0.5)} - \frac{\chi_{se,t} + \chi_{s,t}}{2} \varphi_{s,\xi}^{(0.5)} \right) h_e^\xi + \left(\frac{\varphi_{sw,t} + \varphi_{s,t}}{2} \chi_{s,\bar{\xi}}^{(0.5)} - \frac{\chi_{sw,t} + \chi_{s,t}}{2} \varphi_{s,\bar{\xi}}^{(0.5)} \right) h_w^\xi \right]. \quad (48)$$

Доказательство. Получим выражение для определения $\widehat{U}_e = [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})]/\hbar^\eta \tau$ в расчётной системе координат. Для вычисления $\Delta \mathbf{S}_1^e$ воспользуемся формулой (42). Векторы $\delta \mathbf{r}_1^e$, $\mathbf{d}_1^e$ имеют следующие координаты (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_1^e &= 0.5([\widehat{x}_{ne} + \widehat{x}_e] - [x_{ne} + x_e], [\widehat{y}_{ne} + \widehat{y}_e] - [y_{ne} + y_e], 0), \\ \mathbf{d}_1^e &= 0.5([\widehat{x}_{ne} + x_{ne}] - [\widehat{x}_e + x_e], [\widehat{y}_{ne} + y_{ne}] - [\widehat{y}_e + y_e], 0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) = 0.5([\widehat{x}_{ne} - x_{ne}] + [\widehat{x}_e - x_e])[y_{ne} - y_e]^{(0.5)} - 0.5([\widehat{y}_{ne} - y_{ne}] + [\widehat{y}_e - y_e])[x_{ne} - x_e]^{(0.5)}. \quad (49)$$

С учётом равенств $x_{ij}(t) = \chi(t, \xi_i, \eta_j)$, $y_{ij}(t) = \varphi(t, \xi_i, \eta_j)$ запишем члены, входящие в выражение (49), в расчётной системе координат. Получим, что $(\widehat{x}_{ne} - x_{ne}) = \tau \chi_{ne,t}$, $(\widehat{x}_e - x_e) = \tau \chi_{e,t}$, $y_{ne} - y_e = \varphi_{e,\eta} 0.5 h_n^\eta$ и т.д. Тогда

$$(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) = [0.5\tau(\chi_{ne,t} + \chi_{e,t})\varphi_{e,\eta}^{(0.5)} - 0.5\tau(\varphi_{ne,t} + \varphi_{e,t})\chi_{e,\eta}^{(0.5)}] 0.5 h_n^\eta. \quad (50)$$

Аналогично

$$(\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k}) = [0.5\tau(\chi_{se,t} + \chi_{e,t})\varphi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)} - 0.5\tau(\varphi_{se,t} + \varphi_{e,t})\chi_{e,\bar{\eta}}^{(0.5)}] 0.5 h_s^\eta. \quad (51)$$

Подставив выражения (50) и (51) в $\widehat{U}_e = [(\Delta \mathbf{S}_1^e \cdot \mathbf{k}) + (\Delta \mathbf{S}_4^e \cdot \mathbf{k})]/\hbar^\eta \tau$, получим формулу (45). Точно также строятся формулы (46)–(48). Утверждение доказано.

4.2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Проинтегрируем уравнение теплопроводности (20) по ячейке $S_P^{(\xi,\eta)}$ и отрезку времени $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}(T) d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{D}(T) d\xi d\eta dt. \quad (52)$$

Учитывая (18), интеграл в левой части равенства (52) можно записать в виде

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} \mathcal{T}(T) d\xi d\eta dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \partial_t \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} JT d\xi d\eta dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{S_P^{(\xi,\eta)}} [\partial_\xi(UT) + \partial_\eta(VT)] d\xi d\eta dt.$$

Тогда аппроксимация производной по времени в расчётной системе координат примет вид

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\hat{T}) = (JT)_t - [\hat{U}_e \hat{T}_e - \hat{U}_w \hat{T}_w] / \hbar^\xi - [\hat{V}_n \hat{T}_n - \hat{V}_s \hat{T}_s] / \hbar^\eta. \quad (53)$$

Величины J_P , U_e , U_w , V_n , V_s в (53) вычисляются по формулам (33), (35)–(38), (45)–(48). В этом случае справедливо следующее

Утверждение 3. В расчётной системе координат оператор $\mathcal{T}_{h,\tau}(\hat{T})$ допускает недивергентную форму записи в виде

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\hat{T}) = J_P T_t - [h_e^\xi \hat{U}_e \hat{T}_\xi + h_w^\xi \hat{U}_w \hat{T}_\xi] / 2\hbar^\xi - [h_n^\eta \hat{V}_n \hat{T}_\eta + h_s^\eta \hat{V}_s \hat{T}_\eta] / 2\hbar^\eta. \quad (54)$$

Доказательство. Преобразуем первое слагаемое в (53) с помощью формулы разностного дифференцирования произведения

$$(fg)_t = f_t g + \hat{f} g_t$$

и получим

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\hat{T}) = J_P T_t + J_t \hat{T}_P - [\hat{U}_e \hat{T}_e - \hat{U}_w \hat{T}_w] / \hbar^\xi - [\hat{V}_n \hat{T}_n - \hat{V}_s \hat{T}_s] / \hbar^\eta. \quad (55)$$

Выражение для J_t в (55) запишем с учётом уравнения переноса якобиана (30). После приведения подобных слагаемых (55) примет вид

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\hat{T}) = J_P T_t - [\hat{U}_e (\hat{T}_e - \hat{T}_P) + \hat{U}_w (\hat{T}_P - \hat{T}_w)] / \hbar^\xi - [\hat{V}_n (\hat{T}_n - \hat{T}_P) + \hat{V}_s (\hat{T}_P - \hat{T}_s)] / \hbar^\eta.$$

Воспользуемся тем, что $\hat{T}_e = 0.5(\hat{T}_P + \hat{T}_E)$, $\hat{T}_w = 0.5(\hat{T}_P + \hat{T}_W)$, $\hat{T}_n = 0.5(\hat{T}_P + \hat{T}_N)$, $\hat{T}_s = 0.5(\hat{T}_P + \hat{T}_S)$. Тогда

$$\mathcal{T}_{h,\tau}(\hat{T}) = J_P T_t - [h_e^\xi \hat{U}_e \hat{T}_\xi + h_w^\xi \hat{U}_w \hat{T}_\xi] / 2\hbar^\xi - [h_n^\eta \hat{V}_n \hat{T}_\eta + h_s^\eta \hat{V}_s \hat{T}_\eta] / 2\hbar^\eta.$$

Утверждение доказано.

4.3. АППРОКСИМАЦИЯ ДИССИПАТИВНЫХ ЧЛЕНОВ

Используя формулу Остроградского–Гаусса, запишем оператор $\mathcal{D}(T)$ в виде

$$\mathcal{D}_h(T) \bar{S}_P^{(\xi,\eta)} = [\mathcal{W}_e^\xi - \mathcal{W}_w^\xi] \hbar^\eta + [\mathcal{W}_n^\eta - \mathcal{W}_s^\eta] \hbar^\xi. \quad (56)$$

Аппроксимируем потоки в выражении (56) [18, 19]. На “восточной” границе получим

$$\mathcal{W}_e^\xi \hbar^\eta = \int_{\partial S^{(\xi,\eta)}} \mathcal{W}^\xi d\eta = \int_{\partial S^{(\xi,\eta)}} [\mathcal{L}^{\xi\xi} \partial_\xi T + \mathcal{L}^{\xi\eta} \partial_\eta T] d\eta. \quad (57)$$

Здесь $\mathcal{L}^{\xi\xi} = \kappa L^{\xi\xi}$, $\mathcal{L}^{\xi\eta} = \kappa L^{\xi\eta}$; $\mathcal{L}^{\eta\eta}$, $\mathcal{L}^{\eta\xi}$ определяются аналогично: $\mathcal{L}^{\eta\eta} = \kappa L^{\eta\eta}$, $\mathcal{L}^{\eta\xi} = \kappa L^{\eta\xi}$. Для интегралов по границе ячейки в (57) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_e^{(\xi,\eta)}} \mathcal{L}^{\xi\xi} \partial_\xi T d\eta &\approx \mathcal{L}_e^{\xi\xi} T_\xi \hbar^\eta, \quad \mathcal{L}_e^{\xi\xi} = [h_n^\eta \mathcal{L}_{ne}^{\xi\xi} + h_s^\eta \mathcal{L}_{se}^{\xi\xi}] / 2\hbar^\eta, \\ \int_{\partial S_e^{(\xi,\eta)}} \mathcal{L}^{\xi\eta} \partial_\eta T d\eta &\approx 0.5 [h_n^\eta \mathcal{L}_{ne}^{\xi\eta} T_{e,\eta} + h_s^\eta \mathcal{L}_{se}^{\xi\eta} T_{e,\bar{\eta}}]. \end{aligned}$$

Для вычисления разностных производных $T_{e,\eta}$, $T_{e,\bar{\eta}}$ будем использовать следующие формулы: $(T)_{e,\eta} = 0.5[T_{P,\eta} + T_{E,\eta}]$, $T_{e,\bar{\eta}} = 0.5[T_{P,\bar{\eta}} + T_{E,\bar{\eta}}]$. Поток через “северную” грань $\partial S_n^{(\xi,\eta)}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{W}_n^\eta \hbar^\xi = \int_{\partial S_n^{(\xi,\eta)}} \mathcal{W}^\eta (\xi^\beta f) d\xi \approx \mathcal{L}_n^{\eta\eta} T_\eta \hbar^\xi + 0.5 [h_e^\xi \mathcal{L}_{ne}^{\eta\xi} T_{n,\xi} + h_w^\xi \mathcal{L}_{nw}^{\eta\xi} T_{n,\bar{\xi}}].$$

Здесь $\mathcal{L}_n^{\eta\eta} = [h_e^\xi \mathcal{L}_{ne}^{\eta\eta} + h_w^\xi \mathcal{L}_{nw}^{\eta\eta}] / (2\hbar^\xi)$, $T_{n,\xi} = 0.5[T_{P,\xi} + T_{N,\xi}]$, $T_{n,\bar{\xi}} = 0.5[(T_{P,\bar{\xi}} + T_{N,\bar{\xi}})]$. Выражения для потоков через “западную” и “южную” грани вычисляются аналогичным образом.

Покажем, что построенный разностный оператор, аппроксимирующий диссипативные члены в уравнении теплопереноса, является самосопряжённым и отрицательно определённым.

Утверждение 4. В пространстве функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)})$ разностный оператор $\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f_{ij})/J_{ij}$ отрицательно определён относительно сеточного скалярного произведения (22):

$$(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f) < 0.$$

Доказательство. Сеточное скалярное произведение $(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f)$ можно представить следующим образом [19]:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f) = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i+1/2}^\xi h_{j+1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i+1/2,j+1/2}^{\xi\xi} (f_\xi)^2 + 2\mathcal{L}_{i+1/2,j+1/2}^{\xi\eta} f_\xi f_\eta + \mathcal{L}_{i+1/2,j+1/2}^{\eta\eta} (f_\eta)^2] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i-1/2}^\xi h_{j+1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i-1/2,j+1/2}^{\xi\xi} (f_\xi)^2 + 2\mathcal{L}_{i-1/2,j+1/2}^{\xi\eta} f_\xi f_\eta + \mathcal{L}_{i-1/2,j+1/2}^{\eta\eta} (f_\eta)^2] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i+1/2}^\xi h_{j-1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i+1/2,j-1/2}^{\xi\xi} (f_\xi)^2 + 2\mathcal{L}_{i+1/2,j-1/2}^{\xi\eta} f_\xi f_\eta + \mathcal{L}_{i+1/2,j-1/2}^{\eta\eta} (f_\eta)^2] - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in (I_\gamma \times J_\gamma)} h_{i-1/2}^\xi h_{j-1/2}^\eta [\mathcal{L}_{i-1/2,j-1/2}^{\xi\xi} (f_\xi)^2 + 2\mathcal{L}_{i-1/2,j-1/2}^{\xi\eta} f_\xi f_\eta + \mathcal{L}_{i-1/2,j-1/2}^{\eta\eta} (f_\eta)^2]. \end{aligned}$$

Покажем, что квадратичные формы в квадратных скобках являются положительно определёнными, воспользовавшись критерием Сильвестра. Для углового минора первого порядка получим

$$\mathcal{L}_{pq}^{\xi\xi} = (\varphi_{pq,\eta}^2 + \chi_{pq,\eta}^2) / J_{pq} > 0, \quad p = i \pm 1/2, \quad q = j \pm 1/2,$$

так как $J_{pq} > 0$ для преобразования (9). Для углового минора второго порядка имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{pq}^{\xi\xi} \mathcal{L}_{pq}^{\eta\eta} - (\mathcal{L}_{pq}^{\xi\eta})^2 = [(\varphi_{pq,\eta}^2 + \chi_{pq,\eta}^2)(\chi_{pq,\xi}^2 + \varphi_{pq,\xi}^2) - (\chi_{pq,\xi} \chi_{pq,\eta} + \varphi_{pq,\eta} \varphi_{pq,\xi})^2] / J_{pq}^2 = \\ &= (\varphi_{pq,\eta} \chi_{pq,\xi} - \varphi_{pq,\xi} \chi_{pq,\eta})^2 / J_{pq}^2 = 1 > 0, \quad p = i \pm 1/2, \quad q = j \pm 1/2. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, f) < 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. В пространстве функций $D_h(\omega^{(\xi,\eta)})$ разностный оператор $\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f_{ij})/J_{i,j}$ является самосопряжённым относительно сеточного скалярного произведения (22):

$$(\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(f)/J, g) = (\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(g)/J, f).$$

Доказательство совпадает с доказательством утверждения 4 в работе [19].

4.4. АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВИЯ СТЕФАНА

Для аппроксимации условия Стефана (21) проинтегрируем уравнение теплопроводности (20) по ячейке $S_p^{(\xi,\eta)}$, содержащей границу раздела фаз. Область интегрирования разобьём на две подобласти: $S_p^{(\xi,\eta)+}$ — расположенную в жидкости и $S_p^{(\xi,\eta)-}$ — лежащую в твёрдой

фазе. В силу непрерывности температуры аппроксимация $\mathcal{T}^{(\xi,\eta)}(T)$ на межфазной границе, как и ранее, задаётся формулой (54). Проинтегрировав диссипативные члены по областям $S_{\text{p}}^{(\xi,\eta)+}$ и $S_{\text{p}}^{(\xi,\eta)-}$ и просуммировав полученные выражения, имеем [18, 19]

$$\mathcal{D}_h^{(\xi,\eta)}(T)\hbar^\xi\hbar^\eta = [\mathcal{W}_{\text{e}}^\xi - \mathcal{W}_{\text{w}}^\xi]\hbar^\eta + [\mathcal{W}_{\text{n}}^\eta - \mathcal{W}_{\text{s}}^\eta]\hbar^\xi + [\mathcal{W}_{\text{p}-}^\eta - \mathcal{W}_{\text{p}+}^\eta]\hbar^\xi.$$

Из условия Стефана (21) следует, что $\mathcal{W}_{\text{p}-}^\eta - \mathcal{W}_{\text{p}+}^\eta = (\lambda\rho\chi_\xi)\text{p}v_{\text{ph}}$. Таким образом, на границе раздела фаз аппроксимация диссипативных членов (56) дополняется слагаемым, описывающим выделение/поглощение теплоты при смене агрегатного состояния вещества.

Для аппроксимации граничного условия (5) уравнение (20) необходимо проинтегрировать по приграничным ячейкам. Благодаря тому что аппроксимации условий на границе раздела фаз и границах областей согласованы с аппроксимациями соответствующих уравнений в регулярных точках, на разностном уровне выполнен закон сохранения энергии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для двухфазной задачи Стефана в области с искривленной боковой границей построена консервативная разностная схема, в которой на разностном уровне выполнен дискретный аналог закона сохранения внутренней энергии. Получена полностью неявная аппроксимация уравнения переноса якобиана, обеспечивающая выполнение закона сохранения площади ячейки в физической системе координат. Показано, что разностный оператор, аппроксимирующий диссипативные члены в уравнении теплопроводности, является самосопряжённым и отрицательно определённым. На основе предложенной в работе разностной схемы построен численный метод, разработан программный комплекс. Вычислительный алгоритм был использован для решения задачи о фазовом переходе в чистом веществе в областях с различной формой боковой границы. Расчёты показали, что, несмотря на то что в ходе процесса подвижная сетка в физической области существенно деформируется, разностные аналоги законов сохранения внутренней энергии и площади ячейки выполняются в дискретной среде с высокой точностью.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferziger, J. Computational Methods for Fluid Dynamics / J. Ferziger, M. Peric. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. — 421 p.
2. Thomas, P.D. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grid / P.D. Thomas, C.K. Lombard // AIAA J. — 1979. — V. 17. — P. 1030–1037.
3. Demirdzic, I. Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow / I. Demirdzic, M. Peric // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 1988. — V. 8. — P. 1037–1050.
4. Vinokur, M. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation law / M. Vinokur // J. Comput. Phys. — 1989. — V. 81. — P. 1–52.
5. Авдюшенко, А.Ю. Численный алгоритм моделирования пространственных течений несжимаемой жидкости на подвижных сетках / А.Ю. Авдюшенко, С.Г. Черный, Д.В. Чирков // Вычислит. технологии. — 2012. — Т. 17, № 6. — С. 3–25.
6. Sjogreen, B. On high order finite-difference metric discretizations satisfying GCL on moving and deforming grids / B. Sjogreen, H.C. Yee, M. Vinokur // J. Comput. Phys. — 2014. — V. 265. — P. 211–220.
7. A moving mesh interface tracking method for simulation of liquid–liquid systems / A.H.L.M. Charin, Ž. Tuković, H. Jasak [et al.] // J. Comput. Phys. — 2017. — V. 334. — P. 419–441.

8. Rao, M. Moving boundary computation of the float zone process / M. Rao, W. Shyy // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* — 1997. — V. 40. — P. 1231–1261.
9. Kamakoti, R. Evaluation of geometric conservation law using pressure-based fluid solver and moving grid technique / R. Kamakoti, W. Shyy // *Int. J. Numer. Methods for Heat and Fluid Flow.* — 2003. — V. 14, № 7. — P. 851–865.
10. Kamakoti, R. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications / R. Kamakoti, W. Shyy // *Progress in Aerospace Sciences.* — 2004. — V. 40, № 8. — P. 535–558.
11. Бахвалов, П.А. Рёберно-ориентированные схемы на подвижных гибридных сетках в коде NOISEtte / П.А. Бахвалов, В.А. Вершков // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2018. — 36 с.
12. Мажорова, О.С. Консервативные разностные схемы для термодиффузионной задачи Стефана / О.С. Мажорова, Ю.П. Попов, О.В. Щерица // *Дифференц. уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 7. — С. 897–905.
13. Landau, H.G. Heat conduction in a melting solid / H.G. Landau // *J. Appl. Math.* — 1950. — V. 8. — P. 81–94.
14. Fletcher, C.A.J. *Computational Methods in Fluid Dynamics 2* / C.A.J. Fletcher. — Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1988. — 484 p.
15. Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes / H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trepanier, R. Camarero // *Computers and Fluids.* — 1993. — V. 22, № 1. — P. 9–23.
16. Shyy, W. Structured moving grid and geometric conservation laws for fluid flow computation / W. Shyy, S. Pal, H.S. Udaykumar // *Numerical Heat Transfer. Part A: Applications.* — 1998. — V. 34, № 4. — P. 369–397.
17. Гусев, А.О. К вопросу об эквивалентности разностных методов решения задачи Стефана на подвижных и фиксированных сетках / А.О. Гусев, О.В. Щерица, О.С. Мажорова // *Дифференц. уравнения.* — 2021. — Т. 57, № 7. — С. 907–921.
18. Gusev, A.O. Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques / A.O. Gusev, O.V. Shcheritsa, O.S. Mazhorova // *Computers and Fluids.* — 2020. — V. 202. — Art. 104501.
19. Гусев, А.О. О свойствах одного разностного метода решения двухфазной задачи Стефана / А.О. Гусев, О.В. Щерица, О.С. Мажорова // *Дифференц. уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 930–946.

GEOMETRIC CONSERVATION LAW FOR FINITE VOLUME DISCRETIZATION OF STEFAN PROBLEM ON BOUNDARY-FITTED GRIDS

A. O. Gusev¹, O. S. Mazhorova²

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia

e-mail: ¹aogus@mail.ru, ²olgamazhor@mail.ru

The conservative finite volume scheme for heat transfer problem in two-dimensional region with moving boundaries is presented. The two-phase Stefan problem is considered as an example. To track the moving interface between solid and liquid, the front-fixing technique is applied. The time varying physical domain is mapped to a fixed computational space with regular boundaries. Finite volume approximation of governing equations is constructed in computational domain on fixed rectangular grid. The geometric conservation law is incorporated into the numerical scheme. The Jacobian and the grid velocities of the control volume are evaluated to satisfy the discrete form of the Jacobian transport equation. This procedure guarantees the enforcing of space conservation law in the physical domain. The numerical scheme inherits the basic properties of the original differential problem.

Keywords: moving boundary problem, geometric conservation law, moving grids, boundary-fitted coordinate system, phase transition.

REFERENCES

1. Ferziger, J. and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
2. Thomas, P.D. and Lombard, C.K., Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grid, *AIAA J.*, 1979, vol. 17, pp. 1030–1037.
3. Demirdzic, I. and Peric, M., Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1988, vol. 8, pp. 1037–1050.
4. Vinokur, M., An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation law, *J. Comput. Phys.*, 1989, vol. 81, pp. 1–52.
5. Avdushenko, A.Yu., Cherny, S.G., and Chirkov, D.V., Chislennyi algorithm modelirovaniya prostranstvennih techeniy neszhimaemoy zhidkosti na podvizhnykh setkakh (Numerical method for incompressible fluid flow simulation on moving grids), *Vichislitelnye Tekhnologii*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 3–25.
6. Sjogreen, B., Yee, H.C., and Vinokur, M., On high order finite-difference metric discretizations satisfying GCL on moving and deforming grids, *J. Comput. Phys.*, 2014, vol. 265, pp. 211–220.
7. Charin, A.H.L.M., Tuković, Ž., Jasak, H., Silva, L.F.L.R., and Lage, P.L.C., A moving mesh interface tracking method for simulation of liquid–liquid systems, *J. Comput. Phys.*, 2017, vol. 334, pp. 419–441.
8. Rao, M. and Shyy, W., Moving boundary computation of the float zone process, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1997, vol. 40, pp. 1231–1261.
9. Kamakoti, R. and Shyy, W., Evaluation of geometric conservation law using pressure-based fluid solver and moving grid technique, *Int. J. Numer. Methods for Heat and Fluid Flow*, 2003, vol. 14, no. 7, pp. 851–865.
10. Kamakoti, R. and Shyy, W. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications, *Progress in Aerospace Sci.*, 2004, vol. 40, no. 8, pp. 535–558.
11. Bakhvalov, P.A. and Vershkov, V.A., *Roberno-orientirovannyye skhemy na podvizhnykh gibridnykh setkakh v kode NOISEtte* (Edge-Based Schemes on Moving Hybrid Meshes in the NOISEtte Code), KIAM, 2018.
12. Mazhorova, O.S., Popov, Yu.P., and Shcheritsa, O.V., Conservative scheme for the thermodiffusion Stefan problem, *Differ. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 869–882.
13. Landau, H.G., Heat conduction in a melting solid, *J. Appl. Math.*, 1950, vol. 8, pp. 81–94.
14. Fletcher, C.A.J., *Computational Methods in Fluid Dynamics 2*, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
15. Zhang, H., Reggio, M., Trepanier, J.Y., and Camarero, R., Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes, *Computers and Fluids*, 1993, vol. 22, no. 1, pp. 9–23.
16. Shyy, W., Pal, S., and Udaykumar, H.S., Structured moving grid and geometric conservation laws for fluid flow computation, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 1998, vol. 34, no. 4, pp. 369–397.
17. Gusev, A.O., Shcheritsa, O.V., and Mazhorova, O.S., Two equivalent finite volume schemes for Stefan problem on boundary-fitted grids: front-tracking and front-fixing techniques, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 876–890.
18. Gusev, A.O., Shcheritsa, O.V., and Mazhorova, O.S., Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques, *Computers and Fluids*, 2020, vol. 202, art. 104501.
19. Gusev, A.O., Shcheritsa, O.V., and Mazhorova, O.S., On the properties of conservative finite volume scheme for the two-phase Stefan problem, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 930–946.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6+517.95

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© А. М. Денисов¹, С. И. Соловьева²*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**e-mail: ¹den@cs.msu.ru, ²sol@cs.msu.ru**Поступила в редакцию 02.02.2024 г., после доработки 02.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Рассмотрена начально-краевая задача для сингулярно возмущённой системы уравнений с частными производными. Поставлена обратная задача, состоящая в определении неизвестного граничного условия по одной из компонент решения начально-краевой задачи, заданной в фиксированной точке пространства. Предложены методы приближённого решения обратной задачи, основанные на использовании разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру ε . Получены оценки точности приближённых решений. Приведены результаты численных расчётов, иллюстрирующие точность предложенных методов.

Ключевые слова: сингулярно возмущённая система, обратная задача, численные методы.

DOI: 10.31857/S0374064124070063, EDN: KNJURM

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущённой системы уравнений с частными производными

$$\nu u_x(x, t) + \varepsilon u_t(x, t) + \varepsilon a_t(x, t) = D u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \gamma(u(x, t) - a(x, t)), \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (3)$$

$$u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $Q_{t_0} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_0\}$; ν, D, γ — положительные постоянные; ε — малый параметр, $0 < \varepsilon < 1$.

Задачу (1)–(6) можно интерпретировать как математическую модель процесса динамики сорбции [1, с. 174], когда эффекты поглощения малы по сравнению с переносом и диффузией.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(6) от параметра ε , будем обозначать его $u(x, t; \varepsilon)$, $a(x, t; \varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть постоянные $\nu, \varepsilon, D, \gamma$ заданы, а функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(6):

$$u(x_0, t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (7)$$

где x_0 — заданное число, $x_0 \in (0, l)$, а $g(t; \varepsilon)$ — известная функция.

Дадим определение решения обратной задачи. Так как при неизвестной $\mu(t)$ функции $u(x, t; \varepsilon)$ и $a(x, t; \varepsilon)$ также неизвестны, то решением обратной задачи будем считать тройку функций $\{\mu(t), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$.

Определение. Функции $\{\mu(t), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ называются *решением обратной задачи* (1)–(7), если $\mu \in C^1[0, t_0]$, $\mu(0) = 0$, $u \in C^{2,1}(Q_{t_0})$, $a, a_t \in C(Q_{t_0})$ и $\{\mu(t), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3)–(7).

При выполнении определённых условий функция $u(x, t; \varepsilon)$ раскладывается по малому параметру ε . В данной работе это разложение используется для построения приближённых решений обратной граничной задачи. Подобный подход применялся для приближённого решения некоторых обратных задач [2–4]. Другим аспектам исследования обратных задач для сингулярно возмущённых уравнений с частными производными посвящены работы [5–12].

Рассмотрим функцию

$$f_0(x) = \frac{\exp\{\nu l/D\} - \exp\{\nu x/D\}}{\exp\{\nu l/D\} - 1}. \quad (8)$$

Докажем, что функцию $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon)/f_0(x_0)$ можно рассматривать как приближённое решение обратной задачи.

Теорема 1. Если функции $\{\mu(t), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи (1)–(7), то

$$\max_{[0, t_0]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon, \quad (9)$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от t_0 и ε .

Далее через c_i обозначены положительные постоянные, не зависящие от x , t и ε .

Доказательство. Пусть функции $\{\mu(t), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи. Проинтегрировав уравнение (2) с учётом начального условия (6), имеем

$$a(x, t; \varepsilon) = \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau; \varepsilon) d\tau, \quad (x, t) \in Q_{t_0}.$$

Из этого представления и уравнений (1), (2) следует, что $u(x, t; \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\nu u_x + \varepsilon u_t + \varepsilon \gamma u - \varepsilon \gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} u(x, \tau; \varepsilon) d\tau = D u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \quad (10)$$

Рассмотрим функцию

$$w(x, t; \varepsilon) = \exp\{-\nu x/(2D)\} (u(x, t; \varepsilon) - \mu(t) f_0(x)). \quad (11)$$

Из уравнения (10), определения (8) и условий (3)–(5) следует, что функция $w(x, t; \varepsilon)$ является решением начально-краевой задачи

$$\varepsilon w_t + \left(\varepsilon \gamma + \frac{\nu^2}{4D} \right) w - \varepsilon \gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} w(x, \tau; \varepsilon) d\tau + \varepsilon m(t) f_0(x) \exp\left\{ -\frac{\nu x}{2D} \right\} = D w_{xx}, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (12)$$

$$w(0, t; \varepsilon) = w(l, t; \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (13)$$

$$w(x, 0; \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (14)$$

где

$$m(t) = \mu'(t) + \gamma \mu(t) - \gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \mu(\tau) d\tau.$$

Применяя метод разделения переменных, получаем следующее представление для решения задачи (12)–(14):

$$w(x, t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t; \varepsilon) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (15)$$

в котором функции $T_n(t; \varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$\varepsilon T'_n(t; \varepsilon) + \left[\varepsilon \gamma + D \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 + \frac{\nu^2}{4D} \right] T_n(t; \varepsilon) - \varepsilon \gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} T_n(\tau; \varepsilon) d\tau = -\varepsilon m(t) F_{0n}, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (16)$$

$$T_n(0; \varepsilon) = 0, \quad (17)$$

где коэффициенты Фурье функции $f_0(x) \exp\{-\nu x/(2D)\}$

$$F_{0n} = \frac{2}{l} \int_0^l f_0(x) \exp\left\{-\frac{\nu x}{2D}\right\} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{\pi n} \left(1 + \frac{(l\nu)^2}{(2\pi n D)^2} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (16) с учётом условия (17), получаем

$$T_n(t; \varepsilon) = \gamma^2 \int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-\theta)} T_n(\theta; \varepsilon) d\theta d\tau - \int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)} m(\tau) F_{0n} d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

где $a_{n\varepsilon} = \varepsilon^{-1}(D(\pi n/l)^2 + \nu^2/(4D) + \varepsilon\gamma)$, следовательно, функция $T_n(t; \varepsilon)$ является решением интегрального уравнения

$$T_n(t; \varepsilon) = \int_0^t K_{n\varepsilon}(t, \theta) T_n(\theta; \varepsilon) d\theta - \int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)} m(\tau) F_{0n} d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (19)$$

с ядром

$$K_{n\varepsilon}(t, \theta) = \gamma^2 \int_\theta^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau) - \gamma(\tau-\theta)} d\tau.$$

Из формулы (18) и определения чисел $a_{n\varepsilon}$ следует, что

$$\max_{[0, t_0]} \left| \int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)} m(\tau) F_{0n} d\tau \right| \leq c_2 \frac{\varepsilon}{n^3}.$$

Учитывая это неравенство и уравнение (19), находим

$$\|T_n(t; \varepsilon)\|_{C[0, t_0]} \leq c_3 \frac{\varepsilon}{n^3}. \quad (20)$$

Из оценки (20) и формулы (15) имеем

$$\max_{Q_{t_0}} |w(x, t; \varepsilon)| \leq c_4 \varepsilon. \quad (21)$$

Полагая в равенстве (11) $x = x_0$, используя условие (7) и определение функции $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$, будем иметь

$$\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon) - \mu(t) = w(x_0, t; \varepsilon) \exp\{\nu x_0/(2D)\} (f_0(x_0))^{-1}.$$

Из этого равенства и неравенства (21) вытекает оценка (9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что функция $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$ аппроксимирует точное решение обратной задачи $\mu(t)$ с порядком $O(\varepsilon)$.

Покажем, что можно построить приближённое решение обратной задачи с порядком аппроксимации $O(\varepsilon^2)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{e^{\nu l/D} - 1} \left[\frac{2l}{\nu} e^{\nu l/D} \frac{e^{\nu x/D} - 1}{e^{\nu l/D} - 1} - \frac{x}{\nu} (e^{\nu l/D} + e^{\nu x/D}) \right],$$

являющуюся решением краевой задачи

$$Df_1''(x) - \nu f_1'(x) = f_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (22)$$

$$f_1(0) = f_1(l) = 0. \quad (23)$$

Из положительности функции $f_0(x)$ при $x \in (0, l)$, уравнения (22) и условий (23) следует, что $f_1(x) < 0$ при $x \in (0, l)$.

Найдём коэффициенты Фурье F_{1n} функции $f_1(x) \exp\{-\nu x/(2D)\}$. Используя уравнение (22), условия (23) и формулу (18), получаем, что

$$F_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \exp\left\{-\frac{\nu x}{2D}\right\} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{F_{0n}}{D} \left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \frac{\nu^2}{4D^2} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Будем далее предполагать, что известно значение функции $\mu(t)$ в точке t_0 : $\mu(t_0) = \mu_0$.

Рассмотрим функцию $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\varepsilon f_1(x_0) \tilde{\mu}_1''(t; \varepsilon) + (2\varepsilon \gamma f_1(x_0) + f_0(x_0)) \tilde{\mu}_1'(t; \varepsilon) + \gamma f_0(x_0) \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon) = g'(t; \varepsilon) + \gamma g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (25)$$

$$\tilde{\mu}_1(0; \varepsilon) = 0, \quad \tilde{\mu}_1(t_0; \varepsilon) = \mu_0. \quad (26)$$

Теорема 2. Если функции $\{\mu(t), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи (1)–(7), $\mu \in C^2[0, t_0]$, $\mu'(0) = 0$, $\mu(t_0) = \mu_0$ и выполнено неравенство $2\varepsilon \gamma f_1(x_0) + f_0(x_0) > 0$, то имеет место оценка

$$\max_{[0, t_0]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)| \leq c_5 \varepsilon^2. \quad (27)$$

Доказательство. Рассмотрим функции $T_n(t; \varepsilon)$ — решения задачи (16), (17), для которых справедливо представление

$$T_n(t; \varepsilon) = \varepsilon T_{0n}(t) + \varepsilon^2 T_{1n}(t; \varepsilon), \quad (28)$$

где

$$T_{0n}(t) = -m(t) F_{0n}(b_n)^{-1}, \quad b_n = D \left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \frac{\nu^2}{4D^2} \right), \quad (29)$$

а функции $T_{1n}(t; \varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon T_{1n}'(t; \varepsilon) + (b_n + \varepsilon \gamma) T_{1n}(t; \varepsilon) - \varepsilon \gamma^2 \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} T_{1n}(\tau; \varepsilon) d\tau = \\ = -T_{0n}'(t) - \gamma T_{0n}(t) + \gamma^2 \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} T_{0n}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$T_{1n}(0; \varepsilon) = 0. \quad (31)$$

Интегрируя уравнение (30) с учётом начального условия (31), получаем

$$T_{1n}(t; \varepsilon) = \gamma^2 \int_0^t \exp\left\{-\frac{b_n + \varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t - \tau)\right\} \int_0^\tau \exp\{-\gamma(\tau - \theta)\} T_{1n}(\theta; \varepsilon) d\theta d\tau + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left\{-\frac{b_n + \varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t - \tau)\right\} \psi_n(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

где

$$\psi_n(t) = -T'_{0n}(t) - \gamma T_{0n}(t) + \gamma^2 \int_0^t \exp\{-\gamma(t - \tau)\} T_{0n}(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Следовательно, функции $T_{1n}(t; \varepsilon)$ являются решениями интегрального уравнения

$$T_{1n}(t; \varepsilon) = \int_0^t B_n(t, \tau; \varepsilon) T_{1n}(\tau; \varepsilon) d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left\{-\frac{b_n + \varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t - \tau)\right\} \psi_n(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (33)$$

с ядром

$$B_n(t, \tau; \varepsilon) = \gamma^2 \int_\tau^t \exp\left\{-\frac{b_n + \varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t - \theta) - \gamma(\theta - \tau)\right\} d\theta.$$

Учитывая формулы (29), (32) и уравнение (33), находим оценку

$$\max_{[0, t_0]} |T_{1n}(t; \varepsilon)| \leq c_6 n^{-5}. \quad (34)$$

Из представления (28), формул (15) и (29) вытекает равенство

$$w(x, t; \varepsilon) = -\varepsilon m(t) \sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}(b_n)^{-1} \sin \frac{\pi n x}{l} + \varepsilon^2 w_1(x, t; \varepsilon), \quad (35)$$

где

$$w_1(x, t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{1n}(t; \varepsilon) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (36)$$

Используя (34), получаем оценку

$$\max_{Q_{t_0}} |w_1(x, t; \varepsilon)| \leq c_7. \quad (37)$$

Из формул (24) и (35) следует, что

$$w(x, t; \varepsilon) = \varepsilon m(t) f_1(x) \exp\{-\nu x / (2D)\} + \varepsilon^2 w_1(x, t; \varepsilon).$$

Ввиду этого представления и формулы (11) имеем равенство

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) f_0(x) + \varepsilon m(t) f_1(x) + \varepsilon^2 w_1(x, t; \varepsilon) \exp\{\nu x / (2D)\},$$

положив в котором $x = x_0$, используя условие (7) и определение функции $m(t)$, получим

$$\varepsilon f_1(x_0) \mu'(t) + \varepsilon \gamma f_1(x_0) \mu(t) - \varepsilon \gamma^2 f_1(x_0) \int_0^t \exp\{-\gamma(t - \tau)\} \mu(\tau) d\tau + \\ + f_0(x_0) \mu(t) = g(t; \varepsilon) - \varepsilon^2 w_1(x_0, t; \varepsilon) \exp\{\nu x_0 / (2D)\}, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (38)$$

Из формулы (36), уравнения (30) и оценки (34) следует оценка

$$\varepsilon \max_{[0, t_0]} \left| \frac{\partial w_1}{\partial t}(x_0, t; \varepsilon) \right| \leq c_8. \quad (39)$$

Умножив уравнение (38) на $e^{\gamma t}$ и продифференцировав его затем по t , будем иметь

$$\begin{aligned} & \varepsilon f_1(x_0) \mu''(t; \varepsilon) + (2\varepsilon \gamma f_1(x_0) + f_0(x_0)) \mu'(t; \varepsilon) + \gamma f_0(x_0) \mu(t; \varepsilon) = \\ & = g'(t; \varepsilon) + \gamma g(t; \varepsilon) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}(x_0, t; \varepsilon) + \gamma w_1(x_0, t; \varepsilon) \right) \exp\{\nu x_0/(2D)\}, \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Из условий теоремы получаем краевые условия для функции $\mu(t)$:

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(t_0) = \mu_0. \quad (41)$$

Рассмотрим функцию $z(t; \varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon) - \mu(t)$. Из уравнений (25), (40) и краевых условий (26), (41) следует, что $z(t; \varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon f_1(x_0) z''(t; \varepsilon) + (2\varepsilon \gamma f_1(x_0) + f_0(x_0)) z'(t; \varepsilon) + \gamma f_0(x_0) z(t; \varepsilon) = \varepsilon^2 w_2(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (42)$$

$$z(0) = 0, \quad z(t_0) = 0, \quad (43)$$

где

$$w_2(t; \varepsilon) = \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}(x_0, t; \varepsilon) + \gamma w_1(x_0, t; \varepsilon) \right) \exp\left\{ \frac{\nu x_0}{2D} \right\}.$$

Решение задачи (42), (43) определяется формулой

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) = & (f_1(x_0) a_\varepsilon \operatorname{sh}(a_\varepsilon t_0))^{-1} \left[\int_0^t \operatorname{sh}(a_\varepsilon \tau) \operatorname{sh}(a_\varepsilon (t - t_0)) \exp\{-d_\varepsilon(t - \tau)/2\} \varepsilon w_2(\tau; \varepsilon) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_t^{t_0} \operatorname{sh}(a_\varepsilon t) \operatorname{sh}(a_\varepsilon (\tau - t_0)) \exp\{-d_\varepsilon(t - \tau)/2\} \varepsilon w_2(\tau; \varepsilon) d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq t_0, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$d_\varepsilon = 2\gamma + \frac{f_0(x_0)}{\varepsilon f_1(x_0)}, \quad a_\varepsilon = \sqrt{\frac{d_\varepsilon^2}{4} - \gamma \frac{f_0(x_0)}{\varepsilon f_1(x_0)}}.$$

Для чисел d_ε и a_ε справедливы неравенства

$$|a_\varepsilon + d_\varepsilon/2 - \gamma| \leq c_8 \varepsilon, \quad |d_\varepsilon/2 - a_\varepsilon - f_0(x_0)(\varepsilon f_1(x_0))^{-1}| \leq c_9. \quad (45)$$

Используя оценки (37), (39), (45) и формулу (44), получаем, что

$$\max_{[0, t_0]} |z(t; \varepsilon)| = \max_{[0, t_0]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)| \leq c_5 \varepsilon^2.$$

Теорема доказана.

Из оценок (9) и (27) следует, что функции $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$ и $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ можно рассматривать в качестве приближённых решений обратной задачи. Приведём некоторые результаты численных расчётов, иллюстрирующих это утверждение.

Схема расчётов была такова. Для заданных значений ν , ε , D , γ и функции $\mu(t)$ решалась задача (1)–(6) и находилась функция $u(x, t; \varepsilon)$. Далее дополнительно для решения обратной задачи (1)–(7) использовалась функция $g(t; \varepsilon) = u(x_0, t; \varepsilon)$, затем на основе предложенных методов с этой функцией вычислялись приближённые решения $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$, $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ и сравнивались с точным решением $\mu(t)$. Все вычисления проводились при $l = 2$, $T = 2$, $\nu = 1$, $D = 1$, $\gamma = 1$ и $x_0 = 1.6$.

На рис. 1 приведены графики различных функций $\mu(t)$ и соответствующих приближённых решений $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$, $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$. Полученные результаты показывают, что функции $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$ и $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ можно рассматривать как приближённые решения обратной задачи, при этом приближённое решение $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ более точно аппроксимирует искомое точное решение $\mu(t)$.

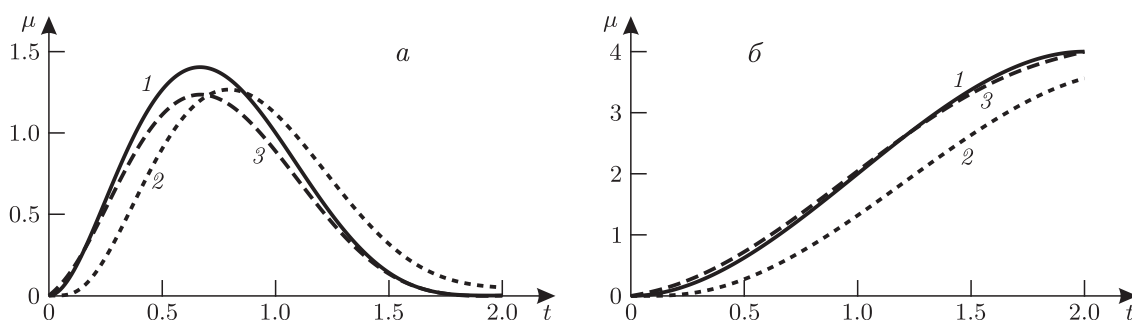


Рис. 1. Графики функции $\mu(t)$ (1) и приближённых решений $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$ (2), $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ (3): а — $\mu(t) = t^2(2-t)^4$, $\varepsilon = 0.2$; б — $\mu(t) = t^2(3-t)$, $\varepsilon = 0.3$.

На рис. 2 приведены графики функций $\mu(t)$ и соответствующих приближённых решений $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ для различных значений ε . Видно, что точность приближённого решения $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ повышается при уменьшении параметра ε .

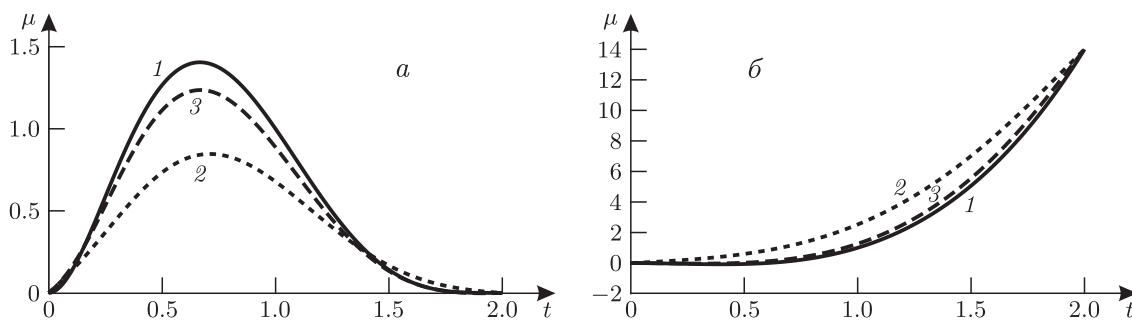


Рис. 2. Графики функций $\mu(t)$ (1) и приближённых решений $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$ для $\varepsilon = 0.5$ (2) и $\varepsilon = 0.2$ (3): а — $\mu(t) = t^2(2-t)^4$; б — $\mu(t) = 0.5t^2(5t-3)$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — 6-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 742 с.
2. Денисов, А.М. Приближённое решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением / А.М. Денисов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2040–2049.
3. Денисов, А.М. Приближённое решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением / А.М. Денисов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 5. — С. 702–709.
4. Денисов, А.М. Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных / А.М. Денисов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 746–751.
5. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1970. — 336 с.
6. Иванов, В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике / В.К. Иванов // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 4. — С. 652–658.
7. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 480 с.
8. Короткий, А.И. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики / А.И. Короткий, И.А. Цепелев, А.Е. Исмаил-заде // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 58, вып. 11. — С. 78–87.
9. Табаринцева, Е.В. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения / Е.В. Табаринцева, Л.Д. Менихес, А.Д. Дрозин // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2012. — № 6. — С. 8–13.
10. Belov, Yu.Ya. Determination of source function in composite type system of equations / Yu.Ya. Belov, V.G. Kopylova // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. — 2014. — Т. 7, № 3. — С. 275–288.
11. Денисов, А.М. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной / А.М. Денисов, С.И. Соловьева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 919–928.
12. Lukyanenko, D.V. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation / D.V. Lukyanenko, M.A. Shishilenin, V.T. Volkov // J. Inverse and Ill posed Problems. — 2019. — V. 27, № 5. — P. 745–758.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. M. Denisov¹, S. I. Solov'eva²

Lomonosov Moscow State University, Russia

e-mail: ¹den@cs.msu.ru, ²sol@cs.msu.ru

The initial boundary value problem for a singularly perturbed system of partial differential equations is considered. The inverse problem is formulated, which consists in determining an unknown boundary condition based on one of the components of the solution given at a fixed point in space. Methods of approximate solution of the inverse problem based on the use of small parameter expansion of the solution of the initial boundary value problem are proposed. Estimates of the accuracy of approximate solutions are obtained. The results of numerical calculations illustrating the accuracy of the proposed methods are presented.

Keywords: singularly perturbed system, inverse problem, numerical methods.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A., *Equations of Mathematical Physics*, London–New York: Pergamon Press, 1963.
2. Denisov, A.M. Approximate solution of inverse problems for the heat equation with a singular perturbation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 12, pp. 2004–2014.
3. Denisov, A.M. Approximate solution of an inverse problem for a singularly perturbed integro-differential heat equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 5, pp. 837–844.
4. Denisov, A.M., Approximation of solution of an inverse problem for singularly perturbed system partial differential equations, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 762–768.
5. Lattès, R. and Lions, J.-L., *Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications*, Paris: Dunod, 1967.
6. Ivanov, V.K., Problem of quasi inversion for the heat equation in uniform metric, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 4, pp. 643–649.
7. Samarskii, A.A. and Vabishchevich, P.N., *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Berlin–New York: De Gruyter, 2007.
8. Korotkii, A.I., Tsepelev, I.A., and Ismail-zade, A.T., Numerical modeling of inverse retrospective thermal convection problems with applications to geodynamic problems, *Izv. Ural. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, no. 58, pp. 78–87.
9. Tabarintseva, E.V., Menikhes, L.D., and Drozin, A.D., On solving a boundary inverse problem by the quasi-inversion method, *Vest. Yuzno-Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Mech. Fiz.*, 2012, no. 6, pp. 8–13.
10. Belov, Yu.Ya. and Kopylova, V.G., Determination of source function in composite type system of equations, *J. of Siberian Fed. Univ. Math. & Phys.*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 275–288.
11. Denisov, A.M. and Solov'eva, S.I., Numerical solution of inverse problems for a hyperbolic equation with a small parameter multiplying the highest derivative, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 900–910.
12. Lukyanenko, D.V., Shishlenin, M.A., and Volkov, V.T., Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation, *J. Inverse and Ill posed Problems*, 2019, vol. 27, no. 5, pp. 745–758.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С ХОРОШО КОНТРОЛИРУЕМОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ КАПИЛЫ

© Р. Р. Полехина¹, Е. Б. Савенков²

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

e-mail: ¹tukhvatullinar@gmail.com, ²savenkov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 25.02.2024 г., после доработки 25.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для решения уравнений модели Капилы, описывающей двухфазные течения, являющейся неконсервативной гиперболической системой уравнений первого порядка и, таким образом, требующей указания конкретного вида регуляризующего диссипативного оператора, выделяющего единственное решение задачи, применяется разностная схема с хорошо контролируемой диссипацией. Суть таких схем заключается в том, что диссипативный оператор, который определяется видом их первого дифференциального приближения, совпадает с точностью до малых высшего порядка с заданным оператором, использованным при определении обобщённого решения в континуальной постановке. В результате ожидается сходимость численного решения схемы к заданному решению. Численные эксперименты, представленные в работе, демонстрируют эффективность такого подхода. В качестве точных решений используются численные решения типа бегущей волны, полученные другим методом.

Ключевые слова: модель Капилы, схема с хорошо контролируемой диссипацией, многофазная среда, неконсервативная гиперболическая система уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064124070072, EDN: KNICMU

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследован один класс разностных схем для решения уравнений двухфазной модели Капилы [1, 2], которая может быть рассмотрена как предельный равновесный случай более общей неравновесной модели Баера–Нунциато и предназначена для описания течения двухфазных сред в приближении равновесия по скоростям и давлениям фаз.

Модель Капилы является гиперболической системой уравнений первого порядка. Её характеристическая особенность (типичная для многих других моделей, описывающих течения двух- и многофазных сред в рамках модели взаимопроникающих континуумов) — она не может быть записана в консервативной форме. Это связано с тем, что в число параметров состояния, описывающих состояние среды, входят объёмные доли фаз, которые не являются консервативными переменными.

Существующая математическая теория неконсервативных гиперболических систем уравнений первого порядка гораздо более “тонкая” по сравнению с более распространённым консервативным случаем прежде всего ввиду того, что определение обобщённого решения неконсервативной системы и формулировка условий Ренкина–Гюгонио для неё не могут быть даны таким же способом, как для консервативной.

Одним из способов определения корректных разрывных решений гиперболических систем является использование регуляризованной задачи, которая имеет вид диссипативного (“вязкого”) возмущения исходной системы уравнений. В этом случае разрывные решения определяются как пределы решений возмущённой задачи при исчезающе малой вязкости. В случае консервативных гиперболических систем вид возмущённой системы (т.е. вид соответствующего диссипативного оператора) до известной степени не имеет значения — все “разумные” регуляризации определяют одно и то же обобщённое решение. В неконсервативных системах это не так — различные вязкие возмущения определяют различные обобщённые решения исходной задачи. Таким образом, если для построения обобщённого решения консервативной системы, вообще говоря, не требуется никакой информации, кроме непосредственно самой системы, то для неконсервативных систем нужно указывать конкретный вид диссипативного оператора или так называемого “пути” в рамках теории авторов [3–5]. Эта информация не “содержится” в исходной неконсервативной системе и должна быть задана исходя из дополнительных соображений. Отметим, что указанный способ не является единственным. В частности, для определения решения задачи может быть использована непосредственно формулировка условий Ренкина–Гюгонио в виде так называемых “кинетических соотношений” (см. [5]). В этом случае соотношения Ренкина–Гюгонио не являются следствием системы уравнений, а вводятся как первичные соотношения на скачке с учётом дополнительной информации о рассматриваемом физическом процессе. Примеры алгоритмов, основанных на этом подходе, приведены в [6–8].

Любая устойчивая разностная схема неявно определяет особый вид диссипативного возмущения исходной системы — её первое дифференциальное приближение (см. ниже). В качестве малого диссипативного параметра в этом случае выступает “численная вязкость”, снижающаяся при уменьшении параметра дискретизации. Численные решения сходятся к тем разрывным решениям задачи, которые выделяются диссипативным оператором разностной схемы (точнее, её первого дифференциального приближения). В случае если этот оператор отличается от использованного при определении разрывного решения в исходной неконсервативной задаче, будет отсутствовать сеточная сходимость к нему. Впервые этот факт был отмечен в основополагающей работе [5], где объясняется отсутствие сходимости так называемых “консервативных по пути” разностных схем к ожидаемым решениям. Понятно, что это наблюдение является общим и касается схемы любого типа.

Отметим, что для консервативных систем уравнений такой проблемы не возникает — как уже отмечалось выше, в этом случае предел регуляризованных вязких решений не зависит от вида диссипирующего оператора (по крайней мере пока он остаётся дивергентным). По этой причине все консервативные разностные схемы, аппроксимирующие консервативную систему гиперболических уравнений, если и будут сходить, то к одному и тому же решению. По этой причине построение корректных разностных схем неконсервативных гиперболических систем уравнений является сложной задачей, не до конца решённой в настоящее время.

Метод (первого) дифференциального приближения является мощным средством исследования свойств разностных схем. Он наиболее эффективен применительно к исследованию методов решения гиперболических уравнений. Его суть заключается в том, что имея дифференциальное уравнение и аппроксимирующую его разностную схему, можно построить другое уравнение, которое разностная схема аппроксимирует с более высоким порядком, чем исходное. Это уравнение (дифференциальное приближение) “наследует” часть свойств разностной схемы; исследуя его мы до какой-то степени исследуем схему. Дифференциальное приближение может быть разных порядков (и даже формально “бесконечного”, в этом случае оно полностью эквивалентно разностной схеме и называется *дифференциальным представлением* разностной схемы).

В иностранной литературе метод дифференциального приближения известен как “метод модифицированного уравнения” [9]. Дифференциальное приближение для исследования свойств разностных схем применяется в работах Н.Н. Яненко и Ю.И. Шокина, начиная с 1960-х годов. В монографиях [10–12] изложена полная и системная теория, которая продемонстрировала свою эффективность.

В современной литературе первое дифференциальное приближение используется сравнительно редко, потому что, во-первых, современные схемы сложны и построение первого дифференциального приближения для них само по себе может являться технически сложной задачей, а, во-вторых, даже если оно получено, теоретический анализ первого дифференциального приближения может быть не менее сложной задачей, чем исследование исходного уравнения или разностной схемы. Тем не менее, как это было указано выше, при построении и анализе разностных схем для неконсервативных систем гиперболических уравнений оно играет особую роль с точки зрения их анализа.

Таким образом, один из способов построения корректных разностных схем для неконсервативных систем гиперболических уравнений — построение схемы такой, что оператор диссипации в её первом дифференциальном приближении имеет в точности требуемый вид, а члены более высокого порядка малы на разрывных решениях (и, таким образом, существенно не влияют на структуру разрыва). Верно и обратное: какую бы схему мы не написали, вопрос её корректности может быть решён путём анализа её первого дифференциального приближения; если оператор диссипации в нём имеет тот же вид, что и “заложенный” в постановку задачи, то можно ожидать, что численные решения будут сходиться к требуемому обобщённому решению. Конструктивно такой способ построения разностной схемы для неконсервативной гиперболической системы уравнений первого порядка был предложен в работе [13], в которой рассмотрен и ряд модельных задач, а также простейшие системы уравнений теории мелкой воды.

В настоящей работе метод применён для решения уравнений многофазной равновесной модели Капилы. В п. 1 кратко приведены модель Капилы и основные сведения о ней. В п. 2 представлены основные результаты по теории неконсервативных гиперболических систем уравнений первого порядка, важные для понимания работы, приведены технические сведения, в частности, вид матрицы системы в терминах консервативных переменных. Выводу разностной схемы по аналогии с работой [13] посвящён п. 3; основным новшеством здесь является более слабая оценка диапазона изменения параметров метода, гарантирующая требуемые свойства численного решения. В п. 4 представлены расчёты ряда одномерных тестов, демонстрирующие применимость метода для решения уравнений модели Капилы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель Капилы [1], описывающую динамику двухфазной среды в предположении мгновенной механической релаксации по скорости и давлению. Таким образом, модель является односкоростной и с одним давлением, однако температуры фаз могут отличаться. Модель включает в себя уравнения закона сохранения массы для каждой из фаз, закон сохранения импульса и полной энергии для смеси и эволюционное уравнение для объёмной доли фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + P) \mathbf{u}) &= 0, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha_1 &= K \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь α_k и ρ_k — объёмная доля и плотность фазы, $k=1, 2$; $\mathbf{u}$ и P — равновесные скорость и давление; $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ и $E = e + \mathbf{u}^2/2$ — плотность и полная энергия смеси; e — внутренняя энергия смеси; коэффициент

$$K = (\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2) \left[\frac{\rho_1 c_1^2}{\alpha_1} + \frac{\rho_2 c_2^2}{\alpha_2} \right]^{-1}$$

определяет сжимаемость двухфазной смеси; скорость звука c_k , $k=1, 2$, фазы находится как

$$c_k^2 = \frac{\gamma_k (P + \pi_k)}{\rho_k},$$

где π_k и γ_k — референсное давление и показатель адиабаты. Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния для смеси

$$P = \left[\rho e - \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1} \right) \right] \left[\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} \right]^{-1}. \quad (2)$$

Для объёмных долей выполнено условие нормировки

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

2. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Система (1) является (см. [1]) гиперболической неконсервативной системой уравнений (не может быть записана в консервативном виде). Её квазилинейная форма имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{Q} = (\alpha_1 \rho_1, \rho \mathbf{u}, \rho E, \alpha_1, \alpha_2 \rho_2)^\top$ — вектор состояния, $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = (A_{ij})_{5 \times 5}$ — матрица системы.

Введём следующие обозначения:

$$Q_1 := \alpha_1 \rho_1, \quad Q_2 := \rho \mathbf{u}, \quad Q_3 := \rho E, \quad Q_4 := \alpha_1, \quad Q_5 := \alpha_2 \rho_2;$$

$$\tilde{\gamma}_k = \gamma_k - 1, \quad \tilde{\pi}_k = \frac{\gamma_k \pi_k}{\tilde{\gamma}_k}, \quad k=1, 2; \quad \gamma_{\text{mix}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}_1} - \frac{1}{\tilde{\gamma}_2}, \quad \gamma_{\text{mix}}^\phi = \frac{Q_4}{\tilde{\gamma}_1} + \frac{1 - Q_4}{\tilde{\gamma}_2},$$

с учётом которых коэффициенты A_{ij} (i — номер строки, j — номер столбца) матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{Q})$ определяются по формулам

$$A_{11} = -\frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2} + \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{12} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{13} = A_{14} = A_{43} = A_{53} = A_{54} = 0,$$

$$A_{15} = -\frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{21} = A_{25} = \frac{Q_2^2}{(Q_1 + Q_5)^2} \left(\frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi} - 1 \right), \quad A_{22} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \left(2 - \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi} \right),$$

$$A_{23} = \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi}, \quad A_{24} = \frac{\pi_2 - \pi_1 - P(\mathbf{Q}) \gamma_{\text{mix}}}{\gamma_{\text{mix}}^\phi}, \quad A_{31} = \frac{Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2} \left(\frac{Q_2^2}{2 \gamma_{\text{mix}}^\phi (Q_1 + Q_5)} - Q_3 - P(\mathbf{Q}) \right),$$

$$A_{32} = \frac{Q_3 + P(\mathbf{Q})}{Q_1 + Q_5} - \frac{Q_2^2}{\gamma_{\text{mix}}^\phi (Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{33} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \left(1 + \frac{1}{\gamma_{\text{mix}}^\phi} \right),$$

$$A_{34} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \frac{\pi_2 - \pi_1 - P(\mathbf{Q}) \gamma_{\text{mix}}}{\gamma_{\text{mix}}^\phi}, \quad A_{35} = \frac{Q_2}{(Q_1 + Q_5)^2} \left(\frac{Q_2^2}{2 \gamma_{\text{mix}}^\phi (Q_1 + Q_5)} - Q_3 - P(\mathbf{Q}) \right),$$

$$A_{41} = A_{45} = \frac{KQ_2}{(Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{42} = -\frac{K}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{44} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5},$$

$$A_{51} = -\frac{Q_2Q_5}{(Q_1 + Q_5)^2}, \quad A_{52} = \frac{Q_5}{Q_1 + Q_5}, \quad A_{55} = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_5} \left(1 - \frac{Q_5}{Q_1 + Q_5}\right),$$

где

$$P(\mathbf{Q}) = \left[Q_3 - \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{(Q_1 + Q_5)} - Q_4 \hat{\pi}_1 + (Q_4 - 1) \hat{\pi}_2 \right] \left[\frac{Q_4}{\tilde{\gamma}_1} + \frac{1 - Q_4}{\tilde{\gamma}_2} \right]^{-1}.$$

Неконсервативность системы (3) означает, что $\mathbf{A} \partial \mathbf{Q} / \partial x \neq \partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}) / \partial x$ для какого-либо вектора потока $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$.

Основной проблемой при построении математической теории систем указанного вида является невозможность определить обобщённое (разрывное) решение традиционным способом, как это делается для консервативных систем уравнений: в случае разрывного решения $\mathbf{Q}$ неконсервативное произведение $\mathbf{A} \partial \mathbf{Q} / \partial x$ теряет смысл даже в смысле классической теории обобщённых функций. Корректное определение разрывного решения может быть дано различными способами (см. введение). В данной работе используется регуляризация уравнений (3) (см., например, [14]). В соответствии с этой идеей далее будем рассматривать только такие разрывные решения, которые являются пределом (в том или ином смысле) гладких решений расширенной системы вида

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_\mu}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\mu) \frac{\partial \mathbf{Q}_\mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}_\mu}{\partial x} \right] \quad (4)$$

при $\mu \rightarrow 0$. Конкретный вид регуляризующего диссипативного оператора в правой части возмущённой системы (4) часто встречается в физических и механических приложениях. Естественным считать, что $\mu > 0$ и матрица $\mathbf{B}$ такова, что задача Коши для уравнения (4) является корректной [15].

Рассмотрим решение уравнения (4) в виде бегущей волны $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\xi)$, где $\xi = x - \sigma t$, σ — скорость волны, удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathbf{Q}_\mu(\xi) = \mathbf{Q}^\pm, \quad \frac{d\mathbf{Q}_\mu}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$-\sigma \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi} = \mu \frac{d}{d\xi} \left[\mathbf{B} \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi} \right]. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем индекс μ в обозначении решения $\mathbf{Q}_\mu$ будем опускать.

Предположим, что уравнение (6) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (5). Отметим, что вопрос о существовании решения типа бегущей волны является нетривиальным (см. [16]). Предельное при $\mu \rightarrow 0$ решение $\mathbf{Q}(\xi)$ будет разрывным и удовлетворять условиям (5), т.е. (см. [14])

$$\mathbf{Q}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{Q}^-, & \xi < 0, \\ \mathbf{Q}^+, & \xi > 0. \end{cases} \quad (7)$$

В работе [14] показано, что предельное решение (7) не зависит от вида матрицы $\mathbf{B}$, если $\mathbf{A} \partial \mathbf{Q} / \partial x = \partial \mathbf{F} / \partial x$ для некоторого $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$, т.е. в случае, когда система уравнений (3) является

консервативной. В случае неконсервативных систем предельное решение для (4) зависит от вида матрицы $\mathbf{B}$, а состояния до и после разрыва связаны соотношением

$$-\sigma(Q^+ - Q^-) = - \int_{\Gamma} A(Q) dQ, \quad (8)$$

где Q^- и Q^+ — состояния до и после разрыва, Γ — зависящий от матрицы $\mathbf{B}$ путь в фазовом пространстве решений, соединяющий точки Q^- и Q^+ в смысле решения (4). Соотношение (8) является обобщением условий Ренкина–Гюгоньо для неконсервативных систем.

В общем случае решение уравнения (6) с граничными условиями (5) может быть получено непосредственно. Пример алгоритма, позволяющего получать решения задачи (6), (5), предложен в работе [17].

В дальнейшем участок решения, отвечающий области между Q^- и Q^+ , будем называть *структурой разрыва* [18].

На рис. 1 приведены решения уравнений (1) типа бегущей волны в переменных (P, α_1) , соответствующие двум различным матрицам $\mathbf{B}_{1,2}$. Показан участок фазовой плоскости, на котором отмечено состояние Q^- слева от разрыва и две выходящие из него структуры, соответствующие различным матрицам $\mathbf{B}$. На них отмечены два правых состояния $Q_{1,2}^+$, соответствующие одному и тому же значению σ скорости разрыва. Параметры модели приведены в п. 4. В дальнейшем будем считать, что матрица $\mathbf{B}$ является заданной. Видно, что разные матрицы диссипации выделяют разные разрывные решения, что согласуется с теорией, так как соотношение Ренкина–Гюгоньо (8) зависит от матрицы диссипации. Это является центральной проблемой при построении разностных схем для неконсервативных систем — если разностная схема имеет дифференциальное приближение (ДП) с матрицей диссипации $\mathbf{B}_h$, отличной от физической ($\mathbf{B}_h \neq \mathbf{B}$), то численное решение не будет сходиться к “физическому” решению.

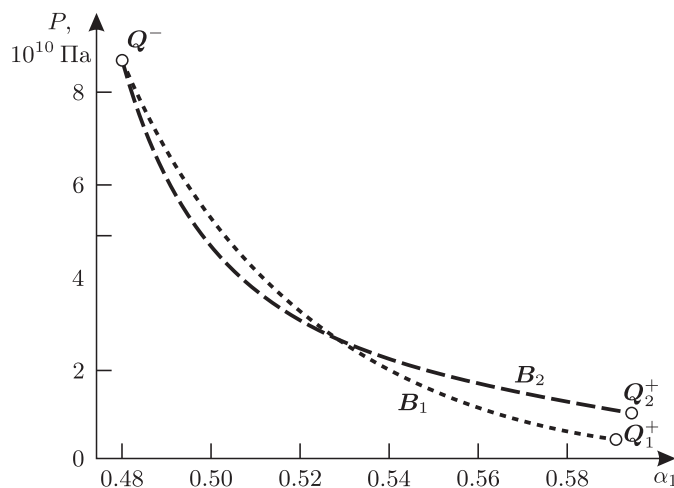


Рис. 1. Стационарное решение системы (6) с одинаковой скоростью разрыва σ и двумя различными матрицами $\mathbf{B}$.

3. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Как уже отмечалось, при построении разностных схем для численного решения неконсервативных гиперболических систем уравнений сталкиваются со значительными сложностями (см. введение). Основной проблемой является то, что типичная схема первого порядка для

решения системы уравнений вида (3) имеет ДП вида (4) с $\mu = \mathcal{O}(\Delta x)$, Δx — шаг сетки, и матрицей $\mathbf{B}_h$, которая определяется непосредственно схемой и в общем случае не совпадает с заданной физической матрицей $\mathbf{B}$, используемой для определения разрывного решения уравнения (4). В результате при $\Delta x \rightarrow 0$ численное решение сходится не к решению (4), которое определяется физической матрицей $\mathbf{B}$, а к какому-то другому решению, определяемому матрицей $\mathbf{B}_h$.

Очевидный способ построения “правильной” разностной схемы для решения уравнения (3) — построить схему, у которой, во-первых, ДП включает регуляризующий оператор $\mathbf{B}_h = \mathbf{B}$, а во-вторых, члены более высокого порядка в ДП малы по сравнению с членами низкого порядка. Такие схемы в [13] названы схемами с “хорошо контролируемой диссипацией”.

Предложенный в работе [13] метод основан на явном построении ДП схемы и оценке членов высокого порядка, входящих в него. Ниже кратко описана общая схема построения метода в соответствии с [13]. Схема содержит параметр c , который выбирается таким образом, чтобы обеспечить малость членов высокого порядка. В [13] доказывается, что такой выбор всегда можно сделать, однако чем больше величина этого параметра, тем больше ограничений на шаг схемы (см. п. 3.3). В данной работе предложен более простой подход для оценки малых членов высокого порядка, а также получены более слабые условия для параметра c .

3.1. СХЕМА С ХОРОШО КОНТРОЛИРУЕМОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Введём в расчётной области $[a, b] \subset \mathbb{R}$ расчётную сетку как совокупность точек $x = x_j$, где $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, $x_0 = a$, $x_N = b$, $\Delta x = \text{const}$ — шаг по пространству.

Полудискретную разностную схему для решения системы (4) запишем в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \mathbf{A}(\mathbf{Q}_i) \sum_{j=-p}^{j=p} \alpha_j \mathbf{Q}_{i+j} = \frac{c}{\Delta x} \mathbf{B} \sum_{j=-p}^{j=p} \beta_j \mathbf{Q}_{i+j}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (9)$$

где $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}(x_i, t)$, $p \in \mathbb{N}$, параметр $c\Delta x = \mu$.

Коэффициенты α_j и β_j выбираются таким образом, чтобы $(2p+1)$ -точечная аппроксимация первой (D_{2p+1}^1) и второй (D_{2p+1}^2) производных была точной для полиномов степени $j \leq 2p$:

$$f'(0) \cong D_{2p+1}^1(f) = \sum_{j=-p}^p \alpha_j f(j), \quad f''(0) \cong D_{2p+1}^2(f) = \sum_{j=-p}^p \beta_j f(j). \quad (10)$$

Тогда коэффициенты разложения в (10) имеют следующий вид [13]:

$$\alpha_j = (-1)^{j+1} \frac{(p!)^2}{j(p+j)!(p-j)!}, \quad j = 1, \dots, p, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = -\alpha_{-j}, \quad j = -1, \dots, -p,$$

$$\beta_j = (-1)^{j+1} \frac{2(p!)^2}{j^2(p+j)!(p-j)!}, \quad j = 1, \dots, p, \quad \beta_j = \beta_{-j}, \quad j = -1, \dots, -p, \quad \beta_0 = -2 \sum_{j=1}^p \beta_j.$$

3.2. АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В работе [13] было получено ДП разностной схемы (9) формальным применением разложения решения в ряд Тейлора в окрестности x_i до членов порядка $\mathcal{O}(\Delta x^{2p+1})$:

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{A}(\mathbf{Q})\mathbf{Q}_x = c\Delta x \mathbf{B}\mathbf{Q}_{xx} - \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \left(\sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{\Delta x^{k-1}}{k!} R_k^p \mathbf{Q}_x^{(k)} \right) + c\mathbf{B} \left(\sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{\Delta x^{k-1}}{k!} P_k^p \mathbf{Q}_x^{(k)} \right), \quad (11)$$

где

$$R_k^p = \sum_{j=-p}^{j=p} \alpha_j j^k, \quad P_k^p = \sum_{j=-p}^{j=p} \beta_j j^k. \quad (12)$$

С учётом (10) для членов R_k^p и P_k^p в (12) имеем

$$R_k^p = D_{2p+1}^1(x^k), \quad P_k^p = D_{2p+1}^2(x^k).$$

Рассмотрим уединённый разрыв

$$Q(x, t) = \begin{cases} Q^-, & \text{если } x \leq \sigma t, \\ Q^+, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оценим на разрыве величину входящих в ДП (11) членов

$$A(Q)Q_x \approx A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad c\Delta x B Q_{xx} \approx cB\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad Q_x^{(k)} \approx \frac{[Q]}{\Delta x^k},$$

где $\bar{Q} = (Q^- + Q^+)/2$, $[Q] = Q^+ - Q^-$ — скачок решения на разрыве. Для того чтобы сравнить порядки входящих в ДП величин, перепишем (11) в виде

$$\frac{dQ}{dt} + A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} = cB\frac{[Q]}{\Delta x} - S_p^A A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} + S_p^B B\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad (13)$$

где

$$S_p^A = \sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{R_k^p}{k!}, \quad S_p^B = \sum_{k=2p+1}^{\infty} \frac{P_k^p}{k!}.$$

Эти коэффициенты могут быть вычислены следующим образом:

$$S_p^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k^p}{k!} - 1 = \sum_{j=-p}^p \alpha_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} - 1 \approx \sum_{j=-p}^p \alpha_j e^j - 1, \quad (14)$$

$$S_p^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^p}{k!} - 1 = \sum_{j=-p}^p \beta_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k}{k!} - 1 \approx \sum_{j=-p}^p \beta_j e^j - 1. \quad (15)$$

Выделим в уравнении (13) слагаемые, отвечающие членам высокого и низкого порядков:

$$S^H = -S_p^A A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} + S_p^B B\frac{[Q]}{\Delta x}, \quad S^L = A(\bar{Q})\frac{[Q]}{\Delta x} - cB\frac{[Q]}{\Delta x}. \quad (16)$$

Для того чтобы численное решение задачи определялось дифференциальным оператором второго порядка, т.е. S^L , необходимо, чтобы для каждой компоненты $j = \overline{1, 5}$ вектора неизвестных выполнялось неравенство

$$|S_j^H| \leq \tau |S_j^L|, \quad 0 < \tau \ll 1. \quad (17)$$

Именно это условие обеспечивает близость ДП схемы к регуляризованному уравнению (4).

Введём для удобства обозначения $\mathbf{x} = A(\bar{Q})[Q]$, $\mathbf{y} = B[Q]$ и определим множества Λ_j , состоящие из всех c_j , для которых выполнено неравенство (17):

$$\Lambda_j = \{c_j : c_j > 0 \text{ и } |S_p^A x_j - c_j S_p^B y_j| \leq \tau |x_j - c_j y_j|\},$$

а также их объединение $\Lambda = \bigcap_j \Lambda_j$.

Утверждение. Если $|S_p^B| < \tau < |S_p^A|$, то $\Lambda \neq \emptyset$ и, таким образом, существует $c \in \Lambda$, при котором неравенство (17) будет выполнено.

Доказательство. Возведём неравенство (17) в квадрат и после раскрытия скобок запишем его в виде

$$P(c_j) \leq 0,$$

где

$$P(c_j) = c_j^2 y_j^2 [(S_p^B)^2 - \tau^2] + 2c_j x_j y_j [\tau^2 - S_p^A S_p^B] + x_j^2 [(S_p^A)^2 - \tau^2] \quad (18)$$

— полином второй степени относительно переменной c_j с корнями

$$c_j^{(1,2)} = \frac{-x_j y_j [\tau^2 - S_p^A S_p^B] \pm |x_j y_j \tau (S_p^A - S_p^B)|}{y_j^2 [(S_p^B)^2 - \tau^2]}.$$

Непосредственной проверкой формул (14) и (15) можно убедиться, что $S_p^A S_p^B > 0$ и $|S_p^A| > |S_p^B|$ для $p \in \mathbb{N}$. Для примера значения S_p^A и S_p^B для $p = \overline{1, 5}$ представлены в табл. 1.

Таблица 1. Значения параметров S_p^A , S_p^B для $p = \overline{1, 5}$

Параметры	p				
	1	2	3	4	5
S_p^A	0.175201	-0.0375418	0.00867283	-0.00208357	0.000512692
S_p^B	0.0861613	-0.0121509	0.0020868	-0.000398563	0.0000813488

Возможны два случая расположения корней:

1. $c_j^{(1)} < 0 < c_j^{(2)}$, если $x_j y_j > 0$ и $S_p^A < 0$ или $x_j y_j < 0$ и $S_p^A > 0$;
2. $c_j^{(2)} < 0 < c_j^{(1)}$, если $x_j y_j > 0$ и $S_p^A > 0$ или $x_j y_j < 0$ и $S_p^A < 0$,

где

$$c_j^{(1)} = \frac{x_j}{y_j} \frac{\tau + S_p^A}{\tau + S_p^B}, \quad c_j^{(2)} = \frac{x_j}{y_j} \frac{\tau - S_p^A}{\tau - S_p^B}.$$

Обозначим

$$c_j^{\min} = \min\{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}, \quad c_j^{\max} = \max\{c_j^{(1)}, c_j^{(2)}\}.$$

Так как $\tau > |S_p^B|$, то график функции (18) — парабола с ветвями, направленными вниз, и

$$\Lambda = \left\{ c: c \geq c^* = \max_j c_j^{\max} \right\}.$$

Утверждение доказано.

Отметим, что полученное здесь множество Λ отличается от представленного в [13]: оно накладывает меньшие ограничения на параметр c , что может быть важно, так как чем больше c , тем больше ограничения на шаг (см. п. 4.3).

Параметр τ можно выбрать сколь угодно малым, так как $S_p^A, S_p^B \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Параметр c не зависит от шага сетки, но зависит от порядка аппроксимации.

3.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

Для интегрирования по времени системы (9) используется вариант метода Рунге–Кутты [19]. Запишем задачу Коши для полудискретной системы (9) в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{Q}), \quad t \in (t_0, T]; \quad \mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{Q}_0, \quad (19)$$

где оператор $\mathbf{L}$ определён “пространственной” частью полудискретной системы уравнений (9).

Разобьём временной промежуток $[0, T]$ на отрезки точками $t_0, t_1, \dots, t_N$, где $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, $\Delta t = \text{const}$ — шаг по времени. Будем использовать обозначение $\mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}(t_n)$. Вычислим $\mathbf{Q}^{n+1}$ при заданном $\mathbf{Q}^n$ на каждом временном шаге $t \in (t_n, t_{n+1}]$ по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} &= \mathbf{Q}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{Q}^n), \\ \mathbf{Q}^{(2)} &= \frac{3}{4} \mathbf{Q}^n + \frac{1}{4} \mathbf{Q}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{Q}^{(1)}), \\ \mathbf{Q}^{(n+1)} &= \frac{1}{3} \mathbf{Q}^n + \frac{2}{3} \mathbf{Q}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{Q}^{(2)}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{Q}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(2)}$ — “промежуточные” решения метода Рунге–Кутты; $\mathbf{Q}^{(n+1)} = \mathbf{Q}(t_{n+1})$ принимается за решение задачи (19) в момент времени $t = t_{n+1}$.

В работе [13] был проведён анализ устойчивости схемы по Нейману и получены условия на шаг интегрирования по времени в случае, если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутируют:

$$\Delta t < \frac{2\Delta x c \lambda_k^B}{(\lambda_k^A)^2 + c^2 \pi^2 (\lambda_k^B)^2}, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (20)$$

где λ_k^A , λ_k^B — собственные значения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

В случае матрицы $\mathbf{B}$, которая не коммутирует с матрицей $\mathbf{A}$, λ_k^A и λ_k^B в формуле (20) заменялись на максимальные по модулю собственные значения $|\lambda_{\max}^A|$ и $|\lambda_{\max}^B|$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Рассматривалась система уравнений (1) с уравнением состояния (2) с параметрами $\gamma_1 = 2.43$, $\gamma_2 = 1.62$, $\pi_1 = 5.3 \cdot 10^9$, $\pi_2 = 141 \cdot 10^9$.

Для выделения единственного класса разрывных решений в соответствии с п. 2 использовались две различные матрицы:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства перейдём к примитивным переменным $\mathbf{W} = (P, u, \alpha_1, \rho_1, \rho_2)$, т.е. $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{W}$.

Все приведённые ниже расчёты соответствуют решению задачи Римана (задачи о распаде начального разрыва) с начальным условием

$$\mathbf{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}^-, & x < x_0, \\ \mathbf{W}^+, & x \geq x_0, \end{cases} \quad (21)$$

где $\mathbf{W}^\mp$ — состояния до и после разрыва:

$$\mathbf{W}^- = (8.7 \cdot 10^{10}, 4200, 0.48, 2415, 4886), \quad (22)$$

$$\mathbf{W}^+ = (5.087 \cdot 10^9, 382.9, 0.591, 1183, 3745) \quad (23)$$

или

$$\mathbf{W}^- = (8.7 \cdot 10^{10}, 4200, 0.48, 2415, 4886), \quad (24)$$

$$\mathbf{W}^+ = (1.08 \cdot 10^{10}, 649, 0.5945, 1209.5, 3886.2). \quad (25)$$

Пример решений уравнений (1) с матрицами $\mathbf{B}_{1,2}$ при скорости разрыва $\sigma = 10\,000$ для состояния $\mathbf{W}^-$ в (22) и (24) представлен на рис. 1. Соответствующие правые состояния $\mathbf{W}^+$ для данных $\mathbf{B}_{1,2}$ отличаются и соответствуют (23) и (25).

Для первой серии экспериментов (тесты 1–5), соответствующих решению уравнений (4) с матрицей $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ и начальными данными (22), (23), критическое значение c_* и другие параметры приведены в табл. 2. После выхода численного решения на стационар должна сформироваться уединённая волна с конечной шириной, зависящей от коэффициента вязкости μ , предельные состояния волны соответствуют начальным данным $\mathbf{W}^-$ и $\mathbf{W}^+$. Результаты численных расчётов представлены на рис. 2, 3. Для теста 1 (см. рис. 2) зна-

Таблица 2. Параметры для численных экспериментов с матрицей $\mathbf{B}_1$ (значения всех переменных приведены в СИ)

Тест	N	c_*	c	μ	p	τ
1	16 000	15 752	16 000	1	1	0.0862
2	16 000	15 752	1000	0.0625	1	0.0862
3	32 000	15 752	16 000	0.5	1	0.0862
4	64 000	15 752	16 000	0.25	1	0.0862
5	16 000	15 979	16 000	1	2	0.035

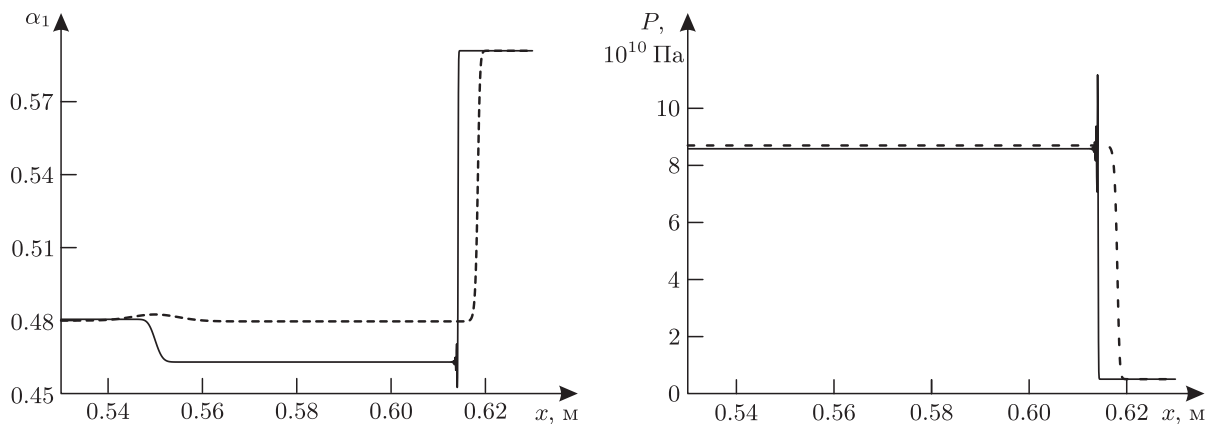


Рис. 2. Сравнение результатов расчёта для теста 1 (штриховая кривая) и теста 2 (сплошная кривая).

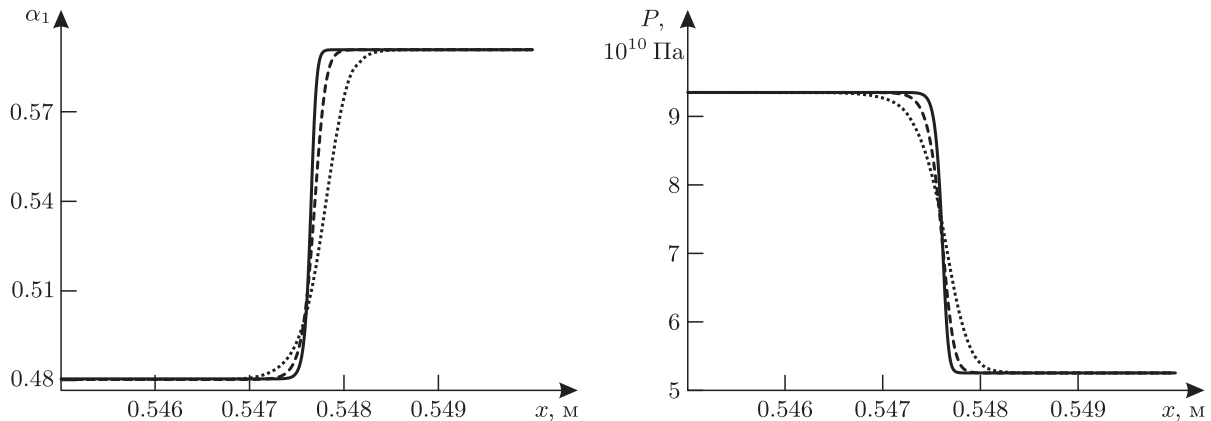


Рис. 3. Сравнение результатов расчёта для теста 1 (штриховая кривая, $N = 16\,000$), теста 3 (пунктирная кривая, $N = 32\,000$) и теста 4 (сплошная кривая, $N = 64\,000$).

чение c выбирается таким образом, чтобы неравенство (17) выполнялось, а для теста 2 — нет. Видно, что в тесте 1 решение типа уединённой волны, соответствующее начальным данным, сформировалось, в отличие от теста 2, где начальный разрыв “распался”. Два этих численных эксперимента демонстрируют влияние членов высокого порядка на предельное решение для неконсервативных систем уравнений и указывают на важность выполнения условия (17).

На рис. 3 показана сходимость численного решения к правильному предельному решению. Ширина размазывания прямо пропорционально зависит от $\mu = c\Delta x$ (см. (11)), поэтому уменьшается при измельчении сетки при постоянном c .

Численные решения тестов 1 и 5 совпали с хорошей точностью, поэтому решение для теста 5 не приводится.

Для второй серии экспериментов (тесты 6–8), соответствующих решению уравнений (4), с матрицей $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$ и начальными данными (24), (25) критическое значение c_* и другие параметры приведены в табл. 3. После выхода численного решения на стационар должна сформироваться уединённая волна с конечной шириной, зависящей от коэффициента вязкости μ , а предельные состояния волны соответствуют начальным данным $\mathbf{W}^-$ и $\mathbf{W}^+$ в (24) и (25).

Таблица 3. Параметры для численных экспериментов с матрицей $\mathbf{B}_2$ при $N = 16\,000$, $p = 1$, $\tau = 0.0862$ (значения всех переменных приведены в СИ)

Тест	c_*	c	μ
6	156 495	160 000	10
7	156 495	1000	0.0625
8	157 524	160 000	10

Результаты численных расчётов представлены на рис. 4. Для теста 6 (штриховая кривая на рис. 4, а, б) c выбирается таким образом, чтобы неравенство (17) выполнялось, а для теста 7 (сплошная кривая на рис. 4, а, б) — нет. Видно, как и для первой серии эксперимен-

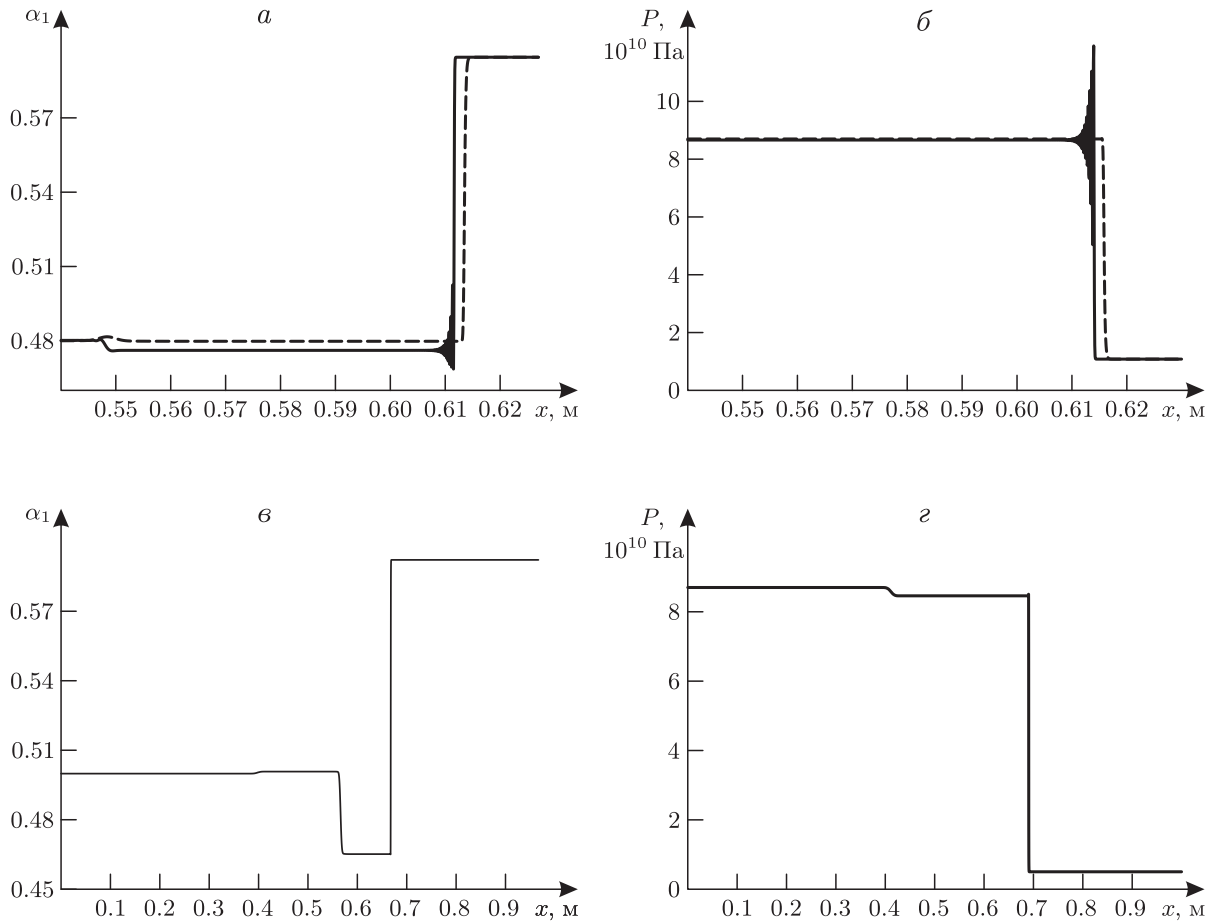


Рис. 4. Сравнение результатов расчёта для теста 6 и теста 7 (а), (б); результаты численных расчётов для теста 8 (в), (г).

тов, что в тесте 6 решение типа уединенной волны, соответствующее начальным данным, сформировалось, в отличие от теста 7, где начальный разрыв “распался”.

На рис. 4, в, г представлены результаты расчётов теста 8. Видно, что начальный разрыв “распался”, что согласуется с теорией, так как эти начальные данные соответствуют разрыву, который является допустимым для матрицы диссипации $\mathbf{B}_1$, а решается система уравнений (8) с матрицей $\mathbf{B}_2$. Допустимым будем называть разрыв, который лежит на ударной адиабате и удовлетворяет условиям Лакса.

Тест 9 — это расчёт задачи (22), (23) с матрицей диссипации $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$. Задача рассчитывалась методом расщепления второго порядка на гиперболическую и параболическую части. Гиперболическая часть рассчитывалась консервативным по пути методом, описанным в [20], а для решения параболической части для аппроксимации по пространству использовалась стандартная аппроксимация второй производной, а по времени — неявный метод Эйлера. Для такой схемы ДП не выписано в связи с трудоёмкостью. На рис. 5 представлены результаты численных расчётов. Видно, что начальный разрыв “распался”. Это связано с тем, что матрица диссипации, которая отвечает ДП численной схемы, отлична от матрицы $\mathbf{B}_1$ и равна $\tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{\text{HLL}}$, где последнее слагаемое соответствует матрице диссипации, порождаемой аппроксимацией неконсервативного произведения с помощью метода [20].

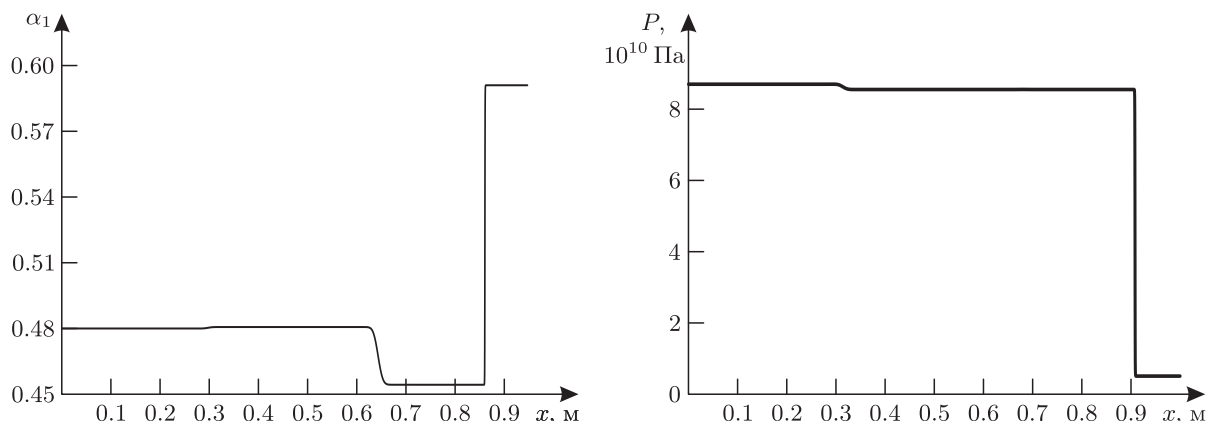


Рис. 5. Результаты численных расчётов для теста 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разностная схема с хорошо контролируемой диссипацией применяется для решения уравнений модели Капила, описывающей двухфазные течения. С математической точки зрения определяющая система является гиперболической неконсервативной системой уравнений. Её особенность заключается в том, что ДП всегда согласовано с физической матрицей диссипации при условии, что она задана. Это обеспечивает сходимость численного решения при измельчении шага сетки к верному предельному решению.

Использованная схема является слабоизученной и ранее применялась только к модельным задачам [13]. В работе продемонстрирована эффективность такого подхода при численном решении неконсервативных систем уравнений, возникающих в содержательных постановках при описании двухфазных течений. Проведено сравнение результатов расчётов с численными стационарными решениями типа бегущей волны, полученными методом из [18]. Также получена более слабая по сравнению с [13] оценка параметра схемы, гарантирующего требуемые свойства.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Полехиной Р.Р. (пп. 2–4) выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00218). Исследование Савенкова Е.Б. (п. 1) выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-283.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: Reduced equations / A.K. Kapila, R. Menikoff, Y. Bdzil [et al.] // *Physics of Fluids*. — 2001. — V. 13, № 10. — P. 3002–3024.
2. Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone / A.K. Kapila, S.F. Son, J.B. Bdzil [et al.] // *Physics of Fluids*. — 1997. — V. 9, № 12. — P. 3885–3897.

3. Le Floch, P. Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form / P. Le Floch // IMA Preprint Series. — 1989. — № 53.
4. Dal Maso, G. Definition and weak stability of nonconservative products / G. Dal Maso, P.G. LeFloch, F. Murat // J. de mathématiques pures et appliquées. — 1995. — V. 74, № 6. — P. 483–548.
5. LeFloch, P.G. Why many theories of shock waves are necessary: kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models / P.G. LeFloch, M. Mohammadian // J. Comput. Phys. — 2008. — V. 227, № 8. — P. 4162–4189.
6. Saurel, R. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures / R. Saurel, P. Petitpas, R.A. Berry // J. Comp. Phys. — 2009. — V. 228, № 5. — P. 1678–1712.
7. Меньшов, И.С. Численная модель многофазных течений на основе подсеточного разрешения контактных границ / И.С. Меньшов, А.А. Серёжкин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2022. — Т. 62, № 10. — С. 1740–1760.
8. In-cell discontinuous reconstruction path-conservative methods for non conservative hyperbolic systems — second-order extension / P.-G. Ernesto, M.J. Castro, C. Chalons [et al.] // J. Comp. Phys. — 2022. — V. 459. — Art. 111152.
9. Warming, R.F. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference method / R.F. Warming, B.J. Hyett // J. Comp. Phys. — 1974. — V. 14, № 2. — P. 159–179.
10. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения / Ю.И. Шокин. — Новосибирск : Наука, 1979. — 221 с.
11. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко. — Новосибирск : Наука, 1985. — 364 с.
12. Шокин, Ю.И. Метод дифференциального приближения / Ю.И. Шокин // Препринт АН СССР. Сиб. отд-е, ВЦ. — 1990. — № 7. — 50 с.
13. Schemes with well-controlled dissipation. Hyperbolic systems in nonconservative form / A. Beljadid, P.G. LeFloch, S. Mishra, C. Parés // Communicat. Comput. Phys. — 2017. — V. 21, № 4. — P. 913–946.
14. Гельфанд, И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И.М. Гельфанд // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, № 2 (86). — С. 87–158.
15. Петровский, И.Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секция А. Математика и механика. — 1938. — Т. 1, вып. 7. — 39 с.
16. Majda, A. Stable viscosity matrices for systems of conservation laws / A. Majda, L. Pego // J. Differ. Equat. — 1985. — V. 56, № 2. — P. 229–262.
17. Полехина, Р.Р. К вопросу о численном решении неконсервативных гиперболических систем уравнений / Р.Р. Полехина, М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 7. — С. 968–982.
18. Куликовский, А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова. — М. : Лицей, 1998. — 412 с.
19. Cockburn, B. The Runge-Kutta local projection-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws / B. Cockburn, C.-W. Shu // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. — 1991. — V. 25, № 3. — P. 337–361.
20. Dumbser, M. A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems / M. Dumbser, D.S. Balsara // J. Comp. Phys. — 2016. — V. 304. — P. 275–319.

DIFFERENCE SCHEME WITH WELL CONTROLLED DISSIPATION FOR SOLUTION OF KAPILA MODEL

R. R. Polekhina¹, E. B. Savenkov²

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: ¹tukhvatullinarr@gmail.com, ²savenkov@keldysh.ru

The work is devoted to the derivation and numerical studies of a difference scheme with well-controlled dissipation for solution of equations of the Kapila model. Kapila model is widely used for analysis of two-phase compressible flows. It has a form of first order non-conservative hyperbolic system. As any other 1st order non-conservative hyperbolic system it requires definition of the regularizing dissipative operator to define discontinuous solutions and Rankin–Hugoniot conditions. The choice of dissipative operator influence wave structure observed in the solutions. Schemes with well-controlled are constructed in such a way that the dissipative operator which is determined by the form of their equivalent equation coincides with the one used to define correct setting of the original problem to be solved. As a result, it is expected that numerical solution converges to the solution of the system under consideration. Numerical experiments presented in the work demonstrate the effectiveness of this approach. As exact solutions numerical solutions of the traveling wave type obtained by other methods were used.

Keywords: Kapila model, scheme with well controlled dissipation, multiphase flow, non-conservative hyperbolic system.

FUNDING

The research of Polekhina R.R. (sections 2–4) was carried out with support from the Russian Science Foundation (project no. 23-11-00218). The research of Savenkov E.B. (section 1) was carried out with support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-283.

REFERENCES

1. Kapila, A.K., Menikoff, R., Bdzil, Y., Son, S.F., and Stewart, D.S., Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations, *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, no. 10, pp. 3002–3024.
2. Kapila, A.K., Son, S.F., Bdzil, J.B., Menikoff, R., and Stewart, D.S., Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone, *Physics of Fluids*, 1997, vol. 9, no. 12, pp. 3885–3897.
3. LeFloch, P., Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *IMA Preprint Series*, 1989, no. 53.
4. Maso, G., Le Floch, P., and Murat, F., Definition and weak stability of nonconservative products, *J. de mathématiques pures et appliquées*, 1995, vol. 74, no. 6, pp. 483–548.
5. LeFloch, P.G. and Mohammadian, M., Why many theories of shock waves are necessary: kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models, *J. Comp. Phys.*, 2008, vol. 227, no. 8, pp. 4162–4189.
6. Saurel, R., Petitpas, P., and Berry, R.A., Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures, *J. Comp. Phys.*, 2009, vol. 228, no. 5, pp. 1678–1712.
7. Menshov, I.S. and Serezhkin, A.A., Numerical model of multiphase flows based on sub-cell resolution of fluid interfaces, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 10, pp. 1723–1742.
8. Ernesto, P.-G., Castro, M.J., Chalons, C., De Luna, T.M., and Parés, C., In-cell discontinuous reconstruction path-conservative methods for non conservative hyperbolic systems — Second-order extension, *J. Comp. Phys.*, 2022, vol. 459, art. 111152.
9. Warming, R.F. and Hyett, B.J., The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference method, *J. Comp. Phys.*, 1974, vol. 14, no. 2, pp. 159–179.
10. Shokin, Yu.I., *The Method of Differential Approximation*, Berlin; New York: Springer-Verlag, 1983.
11. Shokin, Yu.I. and Yanenko, N.N., *Metod differentsialnogo priblizheniya. Primenenie k gazovoi dinamike* (The Method of Differential Approximation. Application to Gas Dynamics), Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1985.

12. Shokin, Yu.I., Metod differentsialnogo priblizheniya (Differential Approximation Method), *Preprint of USSR Academy of Sciences. Siberian Branch*, 1990, no. 7.
13. Beljadid, A., LeFloch, P.G., Mishra, S., and Parés, C., Schemes with well-controlled dissipation. Hyperbolic systems in nonconservative form, *Communicat. Comput. Phys.*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 913–946.
14. Gel'fand, I.M., Some problems in the theory of quasilinear equations, Ser. 2, *Am. Math. Soc.*, 1963, vol. 29, pp. 295–381.
15. Petrovskii, I.G., *O probleme Cauchy dlia sistem lineynykh uravneniy c chastnymi proizvodnymi v oblasti neanaliticheskikh funktsiy* (On the Cauchy problem for linear systems of partial differential equations in domain of non-analytical functions), *Bull. of Moscow State University. Series A. Mathematics and Mechanics*, 1938, vol. 1, no. 7, 39 p.
16. Majda, A., Stable viscosity matrices for systems of conservation laws, *J. Differ. Equat.*, 1985, vol. 56, no. 2, pp. 229–262.
17. Polekhina, R.R., Alekseev, M.V., and Savenkov, E.B., On the numerical solution of nonconservative hyperbolic systems of equations, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 7, pp. 970–984.
18. Kulikovskiy, A.G. and Sveshnikova, E.I., *Nelineinye volny v uprugikh sredah* (Nonlinear Waves in Elastic Media), Moscow: Litsey, 1998.
19. Cockburn, B. and Shu, C.-W. The Runge-Kutta local projection-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 337–361.
20. Dumbser, M. and Balsara, D., A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems, *J. Comp. Phys.*, 2016, vol. 304, pp. 275–319.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Ю. В. Слостушенский¹, Д. Л. Ревизников², С. А. Семенов³*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)**e-mail: ¹slastushenskiy@mosinter.net, ²reviznikov@mai.ru, ³stdx@inbox.ru**Поступила в редакцию 12.03.2024 г., после доработки 12.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Рассматриваются вопросы параметрической идентификации дробно-дифференциальных моделей, описывающих процессы аномальной диффузии/теплопроводности. Акцент делается на варианте с пространственно локализованным начальным условием, что соответствует экспериментальному подходу к определению диффузионных характеристик. Предлагаются методы решения задачи идентификации, не требующие многократного решения прямой задачи. Проводится тестирование методов в режиме квазиреального эксперимента.

Ключевые слова: аномальная диффузия, дробная производная, формула Грюнвальда–Летникова, конечно-разностная схема, модель случайного блуждания, метод Монте-Карло, параметрическая идентификация.

DOI: 10.31857/S0374064124070081, EDN: KNEXAX

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия математическое моделирование целого класса объектов проводится при активном привлечении дробно-дифференциального исчисления. Дробные производные нашли своё применение в разнообразных областях науки и техники, таких как электромагнетизм, вязкоупругость, механика жидкости, электрохимия, динамика биологических популяций, оптика, обработка сигналов и др. [1–4]. Одним из наиболее ярких приложений дробно-дифференциальных уравнений является моделирование аномальной диффузии/теплопроводности. Аномальные диффузионные процессы в последнее время вызывают всё больший интерес у исследователей в связи с обнаружением аномальных свойств у ряда наноматериалов и наносистем (наноканалы, нанотрубки, нанонити и т. д.) [5–7]. В отличие от нормальной диффузии, которая характеризуется линейной зависимостью среднего квадрата смещения частиц от времени $\langle r^2 \rangle \sim t$, в аномальных диффузионных процессах наблюдается отклонение от линейного закона и появляется дробный показатель степени p : $\langle r^2 \rangle \sim t^p$, где r — вектор смещения частиц. При этом возможны режимы супердиффузии ($1 < p < 2$) и субдиффузии ($0 < p < 1$), которые связаны соответственно с баллистическим (прыжковым) механизмом переноса и наличием ловушек в среде. Подобное наблюдается в сложноструктурированных неоднородных средах, когда существенными становятся эффекты пространственной нелокальности и/или долгосрочной памяти. В качестве примеров систем, в которых наблюдаются корреляция или когерентность движения частиц, можно также привести пористые среды, среды с фрактальной структурой, аморфные полупроводники, аэрогели и т. д.

Для ряда дробно-дифференциальных уравнений известны аналитические решения [8, 9], однако более универсальным подходом нахождения решений являются численные методы.

К ним можно отнести конечно-разностные методы, построенные на основе формул Грюнвальда–Летникова [10–12], а также методы Монте-Карло [13, 14]. Важной задачей для дробно-дифференциальных моделей является параметрическая идентификация [15–17]. При этом, имея экспериментальные данные, необходимо определить не только коэффициенты уравнения, но и порядок дробной производной. Решение такой задачи возможно в экстремальной постановке, что типично для обратных задач математической физики [18, 19]. Как правило, формируется функция потерь, выражающая отклонение расчётных данных от эталонных (экспериментальных), которая минимизируется по искомым параметрам. Такой подход, в частности, применялся авторами в работах [20, 21]: в [20] параметры идентифицировались по результатам молекулярно-динамического моделирования, в [21] решалась задача поиска порядка дробной производной с учётом интервальной неопределённости экспериментальных данных [22]. Во всех вариантах в процессе решения задачи оптимизации многократно решалась прямая задача для дробно-дифференциального уравнения. В настоящей работе для варианта с пространственно локализованным начальным условием предлагаются методы идентификации, не требующие многократного решения прямой задачи. Этот класс задач представляется актуальным, так как с использованием локализованной подачи массы/энергии экспериментально определяются характеристики диффузии/теплопроводности различных сред.

В п. 1 сформулирована постановка прямой задачи для дробно-дифференциального уравнения диффузии и приведены распространённые численные методы её решения. В п. 2 представлены методы решения обратной задачи параметрической идентификации дробно-дифференциальной модели. Результатам тестирования идентификационных методов в режиме квазиреального эксперимента посвящен п. 3; проведено численное решение прямой задачи с заданными параметрами дробно-дифференциального уравнения; результаты решения зашумлены и рассмотрены в качестве эталонных (экспериментальных) данных, по которым идентифицируются параметры уравнения — порядок дробной производной и коэффициент диффузии.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим вопросы математического описания процессов одномерной аномальной диффузии в приближении сплошной среды на основе уравнений с частными дробными производными. При этом возможно появление как пространственных (для режима супердиффузии), так и эволюционных (для режима субдиффузии) дробно-дифференциальных операторов. Математическая модель одномерной супердиффузии представляется следующим дробно-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial_{\beta}^{\alpha} U(x, t)}{\partial x^{\alpha}}, \quad (1)$$

где $U(x, t)$ — объёмная концентрация вещества в среде, D — коэффициент диффузии.

Данное уравнение получается из классического дифференциального уравнения диффузии заменой производной второго порядка по пространственной переменной на производную $\partial_{\beta}^{\alpha} U(x, t)/\partial x^{\alpha}$, которая представляет собой двустороннюю дробную производную порядка α (из физических соображений следует условие $1 < \alpha \leq 2$) с параметром скоса β ($-1 \leq \beta \leq 1$) (см. определение оператора $\partial_{\beta}^{\alpha}/\partial x^{\alpha}$ ниже). Уравнение (1) описывает аномальную диффузию с показателем $p = 2/\alpha$. Очевидно, что в предельном случае ($\alpha = 2$) описывается классическая диффузия.

Диффузионный процесс рассматривается в пространстве $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2: x \in \mathbb{R}, t > 0\}$. В качестве начального условия может быть задана любая неотрицательная функция из про-

пространства $L_1(-\infty, +\infty)$, т.е. $U(x, 0) = f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = U_0 < \infty$. В настоящей работе делается акцент на варианте задания локализованного источника массы:

$$U(x, 0) = U_0 \delta(x). \quad (2)$$

На данный момент известно несколько альтернативных определений дробных интегралов и производных, но наиболее распространёнными являются определения по Риману–Лиувиллю, которые заключаются в обобщении формулы Коши для n -кратного интеграла на дробный порядок n , а именно, необходимые односторонние дробные производные произвольных порядков α в уравнении (1) определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_+^\alpha U(x, t)}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma([\alpha] + 1 - \alpha)} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{[\alpha]-\alpha} U(\tau, t) d\tau, \\ \frac{\partial_-^\alpha U(x, t)}{\partial x^\alpha} &= \frac{(-1)^{[\alpha]+1}}{\Gamma([\alpha] + 1 - \alpha)} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int_x^{+\infty} (\tau - x)^{[\alpha]-\alpha} U(\tau, t) d\tau, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Видно, что дробная производная является нелокальным оператором свёртки.

Методы численного решения дробно-дифференциального уравнения (1) основаны на аппроксимации односторонних дробных производных порядка α с использованием формул Грюнвальда–Летникова:

$$\frac{\partial_+^\alpha U(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(k + 1)} U(x - kh, t) \quad (3)$$

для левосторонней дробной производной по пространству и

$$\frac{\partial_-^\alpha U(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(k + 1)} U(x + kh, t) \quad (4)$$

— для правосторонней.

Формулы (3), (4) представляют собой вариант дробного интегро-дифференцирования, основанный на конечно-разностных отношениях. Именно они положены в основу большинства современных вычислительных алгоритмов решения дробно-дифференциальных уравнений.

Пусть пространство наблюдения $-L \leq x \leq L$ ($L > 0$) и время эволюции $0 \leq t \leq R$ ($R > 0$) разбиты пространственно-временной сеткой $x_i = -L + ih$, $h = 2L/K > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, K = 2S$ и $t_n = n\tau$, $\tau = R/N > 0$, $n = \overline{0, N}$.

Тогда, как следствие формул (3), (4), производные уравнения (1) будут аппроксимированы в узлах сетки (x_i, t_n) с шагами h, τ следующим образом:

$$\frac{\partial_+^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+s} g_{\alpha,k} U(x_i - (k-s)h, t_n) + O(h), \quad (5)$$

$$\frac{\partial_-^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{K-i+s} g_{\alpha,k} U(x_i + (k-s)h, t_n) + O(h), \quad (6)$$

где $g_{\alpha,k} = \Gamma(k - \alpha) / \Gamma(-\alpha)(k + 1)$ — нормированные веса Грюнвальда–Летникова, $\sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha,k} = 0$, $s \geq 0$ — целое значение сдвига для модифицированной (смещённой) формулы Грюнвальда–Летникова.

Отметим, что применение смещённой формулы Грюнвальда–Летникова для аппроксимации дробной производной по пространству принципиально, так как явный и неявный методы, основанные на использовании стандартной формулы Грюнвальда–Летникова ($s=0$), оказываются неустойчивыми. Введение смещения ($s=1$) позволяет получить абсолютно устойчивую неявную схему и условно устойчивую явную схему с условием устойчивости

$$D \frac{\tau}{h^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (7)$$

Для конструирования двусторонней дробной производной по пространству с параметром сгиба $-1 \leq \beta \leq 1$ обычно используется линейная комбинация левосторонней и правосторонней дробных производных:

$$\frac{\partial_\beta^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} = \frac{1+\beta}{2} \frac{\partial_+^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} + \frac{1-\beta}{2} \frac{\partial_-^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha}. \quad (8)$$

В итоге явная конечно-разностная схема численного решения уравнения (1) имеет вид

$$\frac{U_{i,n} - U_{i,n-1}}{\tau} = \frac{D}{h^\alpha} \left(\frac{1+\beta}{2} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} U_{i-k+1,n-1} + \frac{1-\beta}{2} \sum_{k=0}^{K-i+1} g_{\alpha,k} U_{i+k-1,n-1} \right).$$

Алгоритмическая сложность явного алгоритма $P \sim NK^2$, что на порядок выше соответствующей величины $P \sim NK$ для классической диффузии. Это связано с нелокальным характером дробной производной.

Аналогично строится неявная схема численного решения. При этом в связи с нелокальностью дробно-дифференциального оператора матрица дискретного аналога неявной схемы не является разреженной, что существенно отличает данный класс задач от задач классической диффузии.

Обе схемы имеют первый порядок точности и по пространству, и по времени [10, 11, 23]. Вопросы построения разностных схем повышенного порядка точности рассмотрены в [24, 25].

В связи с высокой вычислительной сложностью конечно-разностных методов для дробно-дифференциальных уравнений представляет интерес метод случайного блуждания по сетке, который является естественным обобщением метода Монте-Карло для уравнения классической диффузии [13, 14].

Примем

$$y(x_i, t_n) = \frac{1}{U_0} \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} U(x, t_n) dx = \frac{h}{U_0} U(x_i, t_n)$$

и запишем уравнение (1) в дискретном виде, переходя от концентрации $U(x_i, t_n)$ к доле массы в ячейке (или вероятности нахождения частицы в ячейке) $y(x_i, t_n)$:

$$\frac{\partial y(x_i, t_n)}{\partial t} = D \left(\frac{1+\beta}{2} \frac{\partial_+^\alpha y(x_i, t_{n-1})}{\partial x^\alpha} + \frac{1-\beta}{2} \frac{\partial_-^\alpha y(x_i, t_{n-1})}{\partial x^\alpha} \right), \quad i = \overline{0, K}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Воспользуемся формулами для аппроксимации соответствующих односторонних дробных производных, но без перехода к конечным суммам:

$$\begin{aligned} \frac{y_{i,n} - y_{i,n-1}}{\tau} &= \frac{D}{h^\alpha} \left(\frac{1+\beta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha,k} y_{i-k+1,n-1} + \frac{1-\beta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha,k} y_{i+k-1,n-1} \right), \\ y_{i,n} &= y_{i,n-1} + \frac{D\tau}{h^\alpha} \left(\frac{1+\beta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha,k} y_{i-k+1,n-1} + \frac{1-\beta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha,k} y_{i+k-1,n-1} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Соответствующие коэффициенты перехода для случайного блуждания стоят при величинах y_i в ходе их перераспределения по правилу

$$y_i(t_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k y_{i-k}(t_{n-1}). \quad (10)$$

Эти коэффициенты и есть нужные для модели случайного блуждания вероятности q перемещений по пространству. Из выражений (9), (10) следует, что

$$q_0 = 1 - \frac{D\tau}{h^\alpha} \alpha, \quad q_{\pm 1} = \frac{D\tau}{h^\alpha} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{1 \pm \beta}{2} + \frac{1 \mp \beta}{2} \right), \quad q_{\pm k} = \frac{D\tau}{h^\alpha} \frac{1 \pm \beta}{2} g(\alpha, k+1).$$

Видно, что процесс перераспределения является пространственно-однородным (вероятности прыжков q_k не зависят от i) и стационарным (вероятности q_k не зависят от n). Отметим, что вероятности соответствующих перемещений полностью определяются только набором величин, включающим параметры уравнения α , β , D и сеточные параметры h , τ .

В работе [14] показано, что для вероятностей q_k выполнены обязательные условия $q_k \geq 0$, если верно (7), и $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k = 1$, обеспечивающие неотрицательность массы в ячейке $y_i(t_n) \geq 0$ и сохранение общей массы $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(t_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(0) = 1$.

Вычислительные затраты метода Монте-Карло пропорциональны числу симуляций $Q: P \sim \sim QN$, вследствие чего на одинаковой сетке с увеличением разбиения с некоторого момента метод случайного блуждания при той же точности начинает превосходить по скорости конечно-разностные методы [24].

В настоящей статье прямая задача для дробно-дифференциального уравнения решается с целью получения эталонных данных для параметрической идентификации модели в режиме квазиреального эксперимента.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ И МЕТОДЫ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Поставим следующую обратную задачу: оценить по известным значениям $U(x_i, t_n)$ параметры дробно-дифференциального уравнения (1) — порядок дробной производной по пространству α и коэффициент диффузии D при локализованном начальном условии (2).

Как отмечалось во введении, аномальная диффузия характеризуется нелинейной зависимостью среднего квадрата смещения частиц от времени $\langle r^2 \rangle \sim t^p$. В режиме супердиффузии ($1 < p < 2$) показатель степени p связан с порядком дробной производной уравнения (1) соотношением $\alpha = 2/p$ [8, 9]. В случае нормальной диффузии ($p = 1$) аналитическое решение уравнения (1) представляется распределением Гаусса с дисперсией, линейно зависящей от времени:

$$\frac{U(x, t)}{U_0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tilde{\sigma}^2}}, \quad \tilde{\sigma}^2 = 2Dt = 2\sigma^2. \quad (11)$$

Решение дробно-дифференциального уравнения (1) также может быть представлено функцией плотности вероятности из множества устойчивых распределений, которые характеризуются не экспоненциальным, а степенным законом убывания на бесконечности. Это затрудняет прямое использование дисперсии для параметрической идентификации, так как в строгом смысле она оказывается бесконечной при любых $\alpha < 2$, что на практике приводит к сильной чувствительности решения обратной задачи к зашумлённым данным.

В связи с этим рассмотрим два метода оценки параметров уравнения (1) — по скорости спада максимума и по динамике границ w -ядра функции $U(x_i, t_n)$.

Утверждение 1. Порядок α дробной производной по пространству и коэффициент D уравнения (1) с начальным условием (2) однозначно определяются по известным значениям $U(0, t)$.

Доказательство. Воспользуемся известным аналитическим решением задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием (2) [1]:

$$\begin{aligned}\frac{U(x, t)}{U_0} &= \frac{1}{\sigma} f_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \sigma = \left(\left|\cos \frac{\pi\alpha}{2}\right| Dt\right)^{1/\alpha}, \\ f_{\alpha\beta}(x) &= \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k \frac{\Gamma(k/\alpha + 1)}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2\alpha}(\theta - \alpha)\right), \quad x \geq 0, \\ f_{\alpha\beta}(x) &= f_{\alpha(-\beta)}(-x), \quad x < 0, \quad \theta = \frac{2}{\pi} \arctg\left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi(\alpha - 2)}{2}\right).\end{aligned}\quad (12)$$

В случае пространственной симметрии дробная производная $\partial_\beta^\alpha U(x, t)/\partial x^\alpha$ полагается равносторонней ($\beta = 0$) и выражение (12) упрощается:

$$\begin{aligned}\frac{U(x, t)}{U_0} &= \frac{1}{\sigma} f_{\alpha 0}\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \sigma = \left(\left|\cos \frac{\pi\alpha}{2}\right| Dt\right)^{1/\alpha}, \\ f_{\alpha 0}(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \frac{\Gamma((2k+1)/\alpha + 1)}{(2k+1)!}, \quad x \geq 0, \\ f_{\alpha 0}(x) &= f_{\alpha 0}(-x), \quad x < 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Воспользовавшись (12) для вычисления $U(0, t)$, получим

$$\begin{aligned}U(0, t) &= U_0 \left(\left|\cos \frac{\pi\alpha}{2}\right| Dt\right)^{-1/\alpha} f_{\alpha\beta}(0) = U_0 \left(\left|\cos \frac{\pi\alpha}{2}\right| Dt\right)^{-1/\alpha} \left(-\frac{1}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}(\theta - \alpha)\right) = \\ &= U_0 \left(\left|\cos \frac{\pi}{p}\right| Dt\right)^{-p/2} \left(-\frac{1}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \sin\left(\frac{\pi p}{4}\left(\theta - \frac{2}{p}\right)\right).\end{aligned}\quad (14)$$

После логарифмирования выражения (14) по какому-либо основанию A имеем

$$\begin{aligned}\log U(0, t) &= \log \left[-U_0 \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \sin\left(\frac{\pi p}{4}\left(\theta - \frac{2}{p}\right)\right) \left(\left|\cos \frac{\pi}{p}\right| Dt\right)^{-p/2}\right] = \\ &= -\frac{p}{2} \log t - \frac{p}{2} \log \left[\left|\cos \frac{\pi}{p}\right| D\right] + \log \left[-U_0 \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \sin\left(\frac{\pi p}{4}\left(\theta - \frac{2}{p}\right)\right)\right].\end{aligned}\quad (15)$$

Легко видеть, что выражение (15) представляет собой линейную функцию вида $\tilde{y} = a \cdot \tilde{t} + b$, где $\tilde{y} = \log U(0, t)$ и $\tilde{t} = \log t$.

В результате показатель степени p однозначно определяется из (15) по скорости спада максимума функции концентрации в логарифмической шкале как

$$p = -2 \frac{d \log U(0, t)}{d \log t} = -2a, \quad (16)$$

соответственно $\alpha = 2/p$, а коэффициент диффузии вычисляется по формуле

$$D = \left|\cos \frac{\pi}{p}\right|^{-1} \left(-\frac{U_0}{\pi A^b} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right) \sin\left(\frac{\pi p}{4}\left(\theta - \frac{2}{p}\right)\right)\right)^{2/p} \quad (17)$$

при известном значении β или θ , A — основание логарифма. Таким образом, утверждение доказано.

В случае пространственной симметрии ($\beta = 0$) выражение для коэффициента диффузии принимает вид

$$D = \left| \cos \frac{\pi}{p} \right|^{-1} \left(\frac{U_0}{\pi A^b} \Gamma \left(\frac{p}{2} + 1 \right) \right)^{2/p} = \left| \cos \frac{\pi \alpha}{2} \right|^{-1} \left(\frac{U_0}{\pi A^b} \Gamma \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) \right)^\alpha. \quad (18)$$

Полученные формулы (16)–(18) дают первый практический алгоритм вычисления параметров дробно-дифференциального уравнения (1). При этом оценку коэффициентов a и b линейной функции $\tilde{y} = a\tilde{t} + b$ по известным данным $U(x_i, t_n)$ можно провести разными способами, например, методом наименьших квадратов. Отметим, что в представленном алгоритме информация о решении $U(x_i, t_n)$ используется не в полном объёме, достаточно лишь данных в точке $x = 0$.

Далее изложим метод, в котором информация о решении более полная. Введём в рассмотрение центрированное w -ядро ($0 < w < 1$) распределения $U(x, t)$, определив его как отрезок $[-d, d]$ такой, что $w = \int_{-d}^d U(x, t)/U_0 dx$. Физически w -ядро соответствует пространственной области, содержащей долю диффундирующего вещества, равную w . Ясно, что для выполнения условия $w = \text{const}$ границы w -ядра $[-d, d]$ должны сдвигаться со временем, т.е. $d = d(t)$. Второй предлагаемый метод идентификации параметров уравнения (1) с начальным условием (2) основан на анализе этой функциональной зависимости $d(t)$.

Утверждение 2. Порядок α дробной производной по пространству и коэффициент D уравнения (1) с начальным условием (2) однозначно определяются по известным значениям функции $d(t)$.

Доказательство. Вновь воспользуемся известным аналитическим решением (12) задачи Коши уравнения (1) с начальным условием (2) для вычисления w -ядра распределения $U(x, t)$:

$$w = \int_{-d}^d \frac{U(x, t)}{U_0} dx = \int_{-d}^d \frac{1}{\sigma} f_{\alpha\beta} \left(\frac{x}{\sigma} \right) dx = F_{\alpha\beta} \left(\frac{x}{\sigma} \right) \Big|_{-d}^d = \text{const}, \quad (19)$$

где функция $F(x)$ — некоторая не имеющая явного вида первообразная плотности вероятности (12), т.е. соответствующая функция распределения.

Функция $F(x)$ является монотонной, поэтому вне зависимости от её вида условие (19) будет выполнено тогда и только тогда, когда $d \sim \sigma$, следовательно

$$d(t) = l\sigma(t) = l \left(\left| \cos \frac{\pi \alpha}{2} \right| Dt \right)^{1/\alpha} = l \left(\left| \cos \frac{\pi}{p} \right| Dt \right)^{p/2} \quad (20)$$

для любых произвольно выбранного $l > 0$ и однозначно соответствующего ему значения

$$w = F_{\alpha\beta} \left(\frac{x}{\sigma} \right) \Big|_{-l\sigma}^{l\sigma} = F_{\alpha\beta}(l) - F_{\alpha\beta}(-l) = \Phi(l), \quad 0 < w < 1. \quad (21)$$

После логарифмирования по основанию A равенства (20) получим выражение

$$\log(d(t)) = \log \left(l \left(\left| \cos \frac{\pi}{p} \right| Dt \right)^{\frac{p}{2}} \right) = \frac{p}{2} \log t + \frac{p}{2} \log \left(\left| \cos \frac{\pi}{p} \right| D \right) + \log l, \quad (22)$$

которое представляет собой линейную функцию вида $\tilde{y} = a\tilde{t} + b$, где $\tilde{y} = \log d(t)$ и $\tilde{t} = \log t$.

В результате из (22) показатель степени p однозначно определяется по динамике границ w -ядра в логарифмической шкале по формуле

$$p = 2 \frac{d \log d(t)}{d \log t} = 2a, \quad (23)$$

соответственно $\alpha = 2/p$, а коэффициент диффузии вычисляется по формуле

$$D = \left| \cos \frac{\pi}{p} \right|^{-1} \frac{A^{2b/p}}{l^{2/p}} = \left| \cos \frac{\pi \alpha}{2} \right|^{-1} \frac{A^{b\alpha}}{l^{\alpha}}. \quad (24)$$

Утверждение доказано.

Полученные формулы (23), (24) дают второй алгоритм вычисления параметров дробно-дифференциального уравнения (1). Оценку коэффициентов a и b линейной функции $\tilde{y} = a\tilde{t} + b$ можно провести методом наименьших квадратов, при этом необходимые значения $d(t_n)$ границ w -ядра $[-d_n, d_n]$ вычисляются как

$$d(t_n) = \min_j \sum_{i=K/2-j}^{K/2+j} U_{i,n} \geq wU_0, \quad n = \overline{0, N}.$$

Отметим, что рассчитываемый порядок α дробной производной не зависит от используемого w -ядра и для его определения можно взять любое значение $0 < w < 1$. В выражение (24) для коэффициента диффузии D величина l входит явно, причём связь между l и w даётся нелинейным уравнением (21) с неявно заданной правой частью. Решение уравнения (21) связано с дополнительными вычислительными затратами, так как при этом приходится решать прямую задачу (1), (2), а затем вычислять функцию $F(x)$ численным интегрированием. Использование аналитического решения (12) вычислительно не эффективно, так как присутствующий в нём знакопеременный ряд медленно сходится. Однако, как показали вычислительные эксперименты, хорошим универсальным приближением функции $\Phi(l)$ уравнения (21) в диапазоне $l \leq 1$ является $\operatorname{erf}(l/2)$, строго верное для гауссова распределения (11). В таком случае решения прямой задачи не требуется и достаточно заранее выбранной пары значений l и w .

3. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДОВ

Тестирование описанных в п. 2 методов будем проводить в режиме квазиреального эксперимента. Сначала, задав параметры дробно-дифференциального уравнения, решим прямую задачу. Далее, добавив к полученному решению шумовую компоненту, будем использовать его в качестве генератора эталонных (экспериментальных) данных, по которым будем идентифицировать параметры уравнения — порядок дробной производной и коэффициент диффузии.

Для всех примеров решение генерировалось в виде сеточной функции $U(x_i, t_n)$ с импульсом $U_0 = 625$ на отрезке $-L \leq x \leq L$ и на промежутке времени $0 \leq t \leq R$ при значениях границ $L = 312$ и $R = 10\,000$ на пространственно-временной сетке $x_i = -L + ih$, $h = 2L/K = 1$, $i = \overline{0, K}$, $K = 624$ и $t_n = n\tau$, $\tau = R/N = 1$, $n = \overline{0, N}$, $N = 10\,000$. К полученному результату добавлялась шумовая компонента, после чего зашумлённые данные использовались для идентификации параметров α и D уравнения (1).

В дальнейшем будем обозначать значения порядка дробной производной, полученные разными методами, как α_1 , α_2 , а соответствующие значения коэффициента диффузии — D_1 , D_2 . Для точных значений параметров будем использовать обозначения α , D .

Рассмотрим вариант с $\beta = 0$ и отсутствием шумовой компоненты. Проварьируем значения α в диапазоне от 1 до 2, подбирая коэффициент D максимально возможным, но так, чтобы за рассматриваемое время не нарушить однородные условия на границах. Полученные результаты приведены в табл. 1. Видно, что оба предложенных метода верно оценивают наблюдаемую диффузию как аномальную и находят заданные в уравнении (1) параметры α и D , но не во всём диапазоне значений $1 \leq \alpha \leq 2$, а для примерно $1.5 \leq \alpha \leq 2$. В диапазоне же значений $1 \leq \alpha \leq 1.5$ приведённые результаты обнаруживают проблему: при $\alpha \rightarrow 1$ получаемые оценки неверны. Однако данная проблема возникает не из-за ошибочности предлагаемых методов идентификации, а вследствие неточности используемого подхода к численному решению уравнения (1).

Таблица 1. Заданные и идентифицированные параметры уравнения

α	D	α_1	D_1	α_2	D_2
1.00	0.40	2.000	0.200146	2.000	0.200002
1.10	0.01	1.472	0.007097	1.434	0.007357
1.20	0.01	1.395	0.009549	1.363	0.010000
1.30	0.01	1.412	0.010570	1.389	0.010932
1.40	0.01	1.465	0.010744	1.446	0.010973
1.50	0.01	1.535	0.010585	1.519	0.010705
1.60	0.02	1.616	0.020728	1.613	0.021093
1.70	0.05	1.706	0.050970	1.708	0.051913
1.80	0.10	1.803	0.101074	1.805	0.102616
1.90	0.20	1.903	0.201429	1.901	0.202342
2.00	0.40	2.000	0.401322	2.000	0.400072

Представление двусторонней дробной производной при $-1 < \beta < 1$ линейной комбинацией (8) из двух формул Грюнвальда–Летникова для левосторонней и правосторонней дробных производных при близких к единице значениях параметра α оказывается неточным. В результате численные решения уравнения (1) со значениями параметра $\alpha \rightarrow 1$ будут приближаться к распределению Гаусса, как если бы $\alpha = 2$, но с коэффициентом диффузии, зависящим от сеточного параметра h .

Действительно, при $\alpha \rightarrow 1$ для уравнения (1) нормированные веса Грюнвальда–Летникова $g_{\alpha,k}$ будут выглядеть как $(1, -1, 0, 0, \dots)$ и формулы дробных производных (5), (6) примут вид разности вперёд и минус разности назад:

$$\frac{\partial_+^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} = \frac{U_{i+1,n} - U_{i,n}}{h} \approx \frac{\partial U(x_i, t_n)}{\partial x} \quad (\text{для } \beta = +1),$$

$$\frac{\partial_-^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} = \frac{U_{i-1,n} - U_{i,n}}{h} \approx -\frac{\partial U(x_i, t_n)}{\partial x} \quad (\text{для } \beta = -1).$$

В результате для равносторонней дробной производной ($\beta = 0$) имеем

$$\frac{\partial_0^\alpha U(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{U_{i+1,n} - U_{i,n}}{h} + \frac{1}{2} \frac{U_{i-1,n} - U_{i,n}}{h} = \frac{U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}}{2h} \approx \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U(x_i, t_n)}{\partial x^2}.$$

Следует отметить, что в практически важных случаях подход к численному решению уравнения (1) на основе линейной комбинации двух формул Грюнвальда–Летникова работает вполне удовлетворительно, так как сильные аномалии ($1 \leq \alpha \leq 1.5$) наблюдаются редко.

Далее рассмотрим методы идентификации для зашумлённых данных.

Для генерации эталонных данных использовалось решение уравнения (1) при значениях параметров $\alpha = 1.8$ и $D = 0.1$ с переменным уровнем добавленной шумовой компоненты. Профили этого решения в виде $U(x/L, t)$ без шума и с шумом 20% представлены на рисунке для различных выбранных моментов времени t . Полученные результаты приведены в табл. 2. Видно, что оба предложенных метода устойчивы к зашумлению входного массива

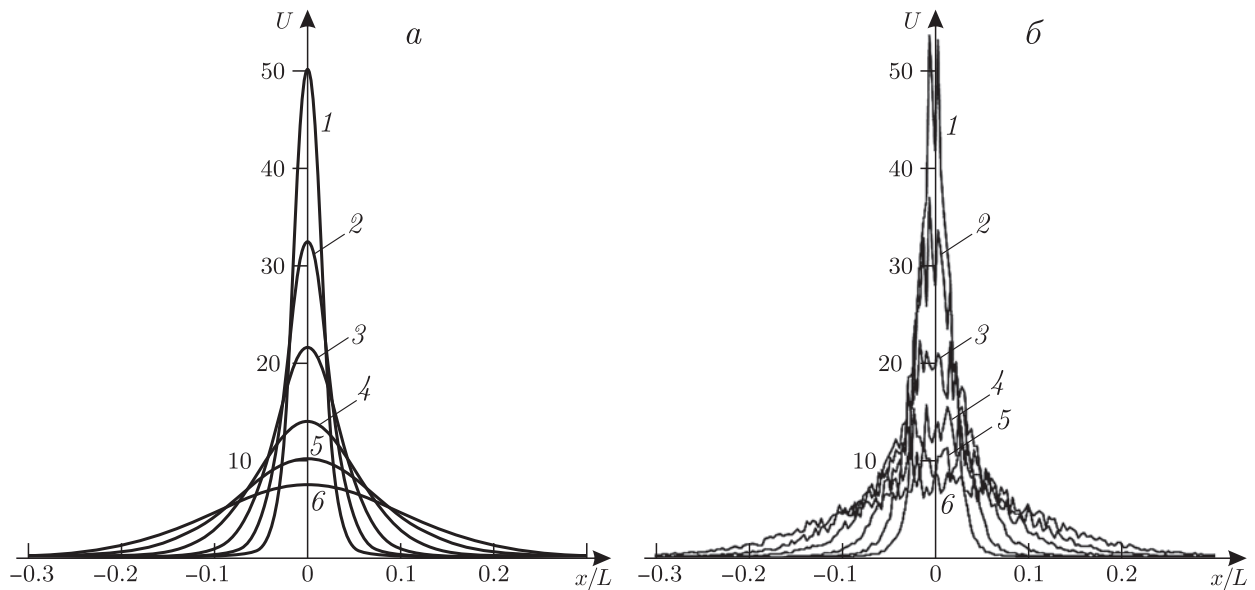


Рисунок. Профили решения без шума (а) и с шумом 20% (б): 1 — $t = 100$; 2 — 220; 3 — 460; 4 — 1000; 5 — 1780; 6 — 3160.

Таблица 2. Идентифицированные параметры уравнения в зависимости от заданной доли шума

Доля шума, %	α_1	D_1	α_2	D_2
0.000	1.803	0.101074	1.805	0.102616
2.000	1.805	0.101222	1.805	0.102513
4.000	1.803	0.101162	1.805	0.102451
6.000	1.807	0.102071	1.805	0.102858
8.000	1.803	0.101091	1.803	0.102388
10.000	1.803	0.101383	1.805	0.102637
12.000	1.802	0.100970	1.803	0.102249
14.000	1.807	0.102478	1.807	0.103220
16.000	1.802	0.101186	1.807	0.103184
18.000	1.808	0.103122	1.802	0.101920
20.000	1.803	0.101982	1.802	0.101734

данных, верно оценивают наблюдаемую диффузию как аномальную и находят заданные в уравнении (1) параметры α и D для широкого диапазона заданного уровня шума. Отметим высокую точность идентификации параметров даже при значительных уровнях шумового воздействия на решение, что связано с применением метода наименьших квадратов при значительном количестве N используемых эталонных точек на заданном интервале времени $0 \leq t \leq R$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены методы идентификации параметров дробно-дифференциального уравнения супердиффузии для варианта с пространственно локализованным начальным условием. Данный класс задач актуален в связи с использованием локализованной подачи массы/энергии при экспериментальном определении характеристик диффузии/теплопроводности различных сред. Отличительной чертой представленных методов является отсутствие необходимости многократного решения прямой задачи. Тестирование методов в режиме квазиреального эксперимента показало их высокую точность и устойчивость к погрешности входных данных.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benson, D.A. Application of a fractional advection-dispersion equation / D.A. Benson, S.W. Wheatcraft, M.M. Meerschaert // *Water Resources Research*. — 2000. — V. 36, № 6. — P. 1403–1412.
2. Шитикова, М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твёрдого тела / М.В. Шитикова // *Изв. РАН. Механика твёрдого тела*. — 2022. — № 1. — С. 3–40.
3. Мороз, Л.И. Дробно-дифференциальные модели динамических откликов сегнетоэлектриков / Л.И. Мороз, А.Г. Масловская. — Благовещенск : Изд-во АмГУ, 2022. — 198 с.
4. Tverdyi, D. Application of the fractional Riccati equation for mathematical modeling of dynamic processes with saturation and memory effect / D. Tverdyi, R. Parovik // *Fractal and Fractional*. — 2022. — V. 6, № 3. — Art. 163.
5. Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in nonlinear lattices, single walled nanotubes, and billiard gas channels / L. Baowen, J. Wang, L. Wang, G. Zhang // *Chaos*. — 2005. — V. 15. — Art. 15121.
6. Maruyama, S. CVD growth and heat transfer of carbon nanotubes / S. Maruyama // *Proc. of the 14th Int. Heat Transfer Conf. IHTC14, August 8–13, 2010, Washington, DC, USA*. — P. 23350.
7. Yang, N. Violation of Fourier's law and anomalous heat diffusion in silicon nanowires / N. Yang, G. Zhang, L. Baowen // *Nano Today*. — 2010. — № 5. — P. 85–90.
8. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
9. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.
10. Meerschaert, M.M. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations / M.M. Meerschaert, C. Tadjeran // *J. Comp. Appl. Math.* — 2004. — V. 172. — P. 65–77.
11. Meerschaert, M.M. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations / M.M. Meerschaert, C. Tadjeran // *Appl. Numer. Math.* — 2006. — V. 56, № 1. — P. 80–90.
12. Space-fractional advection-dispersion equations with variable parameters: diverse formulas, numerical solutions, and application to the MADE-site data / Z. Yong, D.A. Benson, M.M. Meerschaert, E.M. LaBolle // *Water Resources Research*. — 2007. — V. 43. — Art. W05439.

13. Gorenflo, R. Random walk models for space-fractional diffusion processes / R. Gorenflo, F. Mainardi // *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 1998. — V. 1, № 2. — P. 167–191.
14. Сластушенский, Ю.В. Модель случайного блуждания для уравнения аномальной диффузии / Ю.В. Сластушенский // *Науч.-техн. вестн. Поволжья.* — 2011. — № 5. — С. 242–246.
15. Ерохин, С.В. Параметрическая идентификация порядка дробной производной в модели Бегли–Торвика / С.В. Ерохин, Т.С. Алероев // *Мат. моделирование.* — 2018. — Т. 30, № 7. — С. 93–102.
16. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка / С.В. Ерохин, Т.С. Алероев, Л.Ю. Фриштер, А.В. Колесниченко // *Международ. журн. по расчёту гражданских и строит. конструкций.* — 2015. — Т. 11, № 3. — С. 82–86.
17. Унгарова, Л.Г. Применение нелинейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика / Л.Г. Унгарова // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* — 2016. — Т. 20, № 4. — С. 691–706.
18. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М. : Наука, 1974. — 224 с.
19. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. Обратные задачи теплообмена / О.М. Алифанов, П.М. Вабищевич, В.В. Михайлов и др. — М. : Логос, 2001. — 400 с.
20. Ревизников, Д.Л. Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале / Д.Л. Ревизников, Ю.В. Сластушенский // *Мат. моделирование.* — 2013. — Т. 25, № 5. — С. 3–14.
21. Морозов, А.Ю. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений с интервальными параметрами / А.Ю. Морозов, Д.Л. Ревизников // *Сиб. журн. индустр. математики.* — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 93–108.
22. Морозов, А.Ю. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем / А.Ю. Морозов, Д.Л. Ревизников // *Дифференц. уравнения.* — 2022. — Т. 58, № 7. — С. 962–976.
23. Петухов, А.А. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений / А.А. Петухов, Д.Л. Ревизников // *Вестн. Моск. авиац. ин-та.* — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 228–234.
24. Ревизников, Д.Л. Применение дробно-дифференциального исчисления для описания аномальной диффузии / Д.Л. Ревизников, Ю.В. Сластушенский // *Вестн. Моск. авиац. ин-та.* — 2011. — Т. 18, № 4. — С. 76–82.
25. Мороз, Л.И. Численное моделирование процесса аномальной диффузии на основе схемы повышенного порядка точности / Л.И. Мороз, А.Г. Масловская // *Мат. моделирование.* — 2020. — Т. 32, № 10. — С. 62–76.

METHODS FOR PARAMETRIC IDENTIFICATION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Y. V. Slastushenskiy¹, D. L. Reviznikov², S. A. Semenov³

Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia
e-mail: ¹slastushenskiy@mosinter.net, ²reviznikov@mai.ru, ³stdx@inbox.ru

The issues of parametric identification of fractional differential models describing the processes of anomalous diffusion/heat conductivity are considered. The emphasis is on the option with a spatially localized initial condition, which corresponds to the experimental approach to determine diffusion characteristics. Methods are proposed for solving the identification problem that do not require multiple solutions of the direct problem. Testing of methods is carried out in a quasi-real experiment mode.

Keywords: anomalous diffusion, fractional derivative, Grunwald–Letnikov formula, finite-difference scheme, random walk model, Monte Carlo method, parametric identification.

REFERENCES

1. Benson, D.A., Wheatcraft, S.W., and Meerschaert, M.M., Application of a fractional advection-dispersion equation, *Water Resources Research*, 2000, vol. 36, no. 6, pp. 1403–1412.
2. Shitikova, M.V., Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: a review, *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, no. 1, pp. 1–33.
3. Moroz, L.I. and Maslovskaya, A.G., *Drobnodifferentsial'nyye modeli dinamicheskikh otklikov segnetoelektrikov* (Fractional Differential Models of Dynamic Responses of Ferroelectrics), Blagoveshchensk: ASU Publishing, 2022.
4. Tverdyi, D. and Parovik, R., Application of the fractional Riccati equation for mathematical modeling of dynamic processes with saturation and memory effect, *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 3, art. 163.
5. Baowen, L., Wang, J., Wang, L., and Zhang, G., Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in nonlinear lattices, single walled nanotubes, and billiard gas channels, *Chaos*, 2005, vol. 15, art. 15121.
6. Maruyama, S., CVD growth and heat transfer of carbon nanotubes, *Proc. of the 14th Int. Heat Transfer Conf.*, IHTC14, August 8–13, 2010, Washington, DC, USA, p. 23350.
7. Yang, N., Zhang, G., and Baowen, L., Violation of Fourier's law and anomalous heat diffusion in silicon nanowires, *Nano Today*, 2010, no. 5, pp. 85–90.
8. Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I., *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* (Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of their Applications), Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987.
9. Nakhushiev, A.M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* (Fractional Calculus and its Applications), Moscow: Fizmatlit, 2003.
10. Meerschaert, M.M. and Tadjeran, C., Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations, *J. Comp. Appl. Math.*, 2004, vol. 172, pp. 65–77.
11. Meerschaert, M.M. and Tadjeran, C., Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations, *Appl. Numer. Math.*, 2006, vol. 56, no. 1, pp. 80–90.
12. Yong, Z., Benson, D.A., Meerschaert, M.M., and LaBolle, E.M., Space-fractional advection-dispersion equations with variable parameters: diverse formulas, numerical solutions, and application to the MADE-site data, *Water Resources Research*, 2007, vol. 43, art. W05439.
13. Gorenflo, R. and Mainardi, F., Random walk models for space-fractional diffusion processes, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1998, vol. 1, no. 2, pp. 167–191.
14. Slatushenskiy, Y.V., Random walk model for anomalous diffusion equation, *Nauch.-tekhn. vestn. Povolzh'ya* (Scientific and Technical Volga Region Bulletin), 2011, no. 5, pp. 242–246.
15. Erokhin, S.V. and Aleroev, T.S., Parametric identification of the fractional-derivative order in the Bagley–Torvik model, *Math. Models and Comp. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 219–225.
16. Erokhin, S.V., Aleroev, T.S., Frishter, L.Y., and Kolesnichenko, A.V., Parameter identification of the viscoelastic materials mathematical model using fractional derivatives, *Int. J. Comput. Civil and Struct. Engin.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 82–86.
17. Ungarova, L.G., The use of linear fractional analogues rheological models in the problem of approximating the experimental data on the stretch polyvinylchloride elastron, *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser. fiz.-mat. nauki* (J. of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences), 2016, vol. 20, no. 4, pp. 691–706.
18. Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y., *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for Solving Ill-Posed Problems), Moscow: Nauka, 1974.
19. Alifanov, O.M., Vabishchevich, P.M., Mikhailov, V.V. et al., *Osnovy identifikatsii i proyektirovaniya teplovykh protsessov i sistem. Obratnyye zadachi teploobmena* (Fundamentals of Identification and Design of Thermal Processes and Systems. Inverse Heat Transfer Problems), Moscow: Logos, 2001.
20. Reviznikov, D.L. and Slatushenskiy, Y.V., Numerical simulation of anomalous diffusion in polygonal billiard gas channel, *Math. Models and Comput. Simul.*, 2013, vol. 25, no. 5, pp. 3–14.
21. Morozov, A.Y. and Reviznikov, D.L., Algorithms for numerical solution of fractional differential equations with interval parameters, *J. Appl. Industr. Math.*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 93–108.
22. Morozov, A.Y. and Reviznikov, D.L., Interval approach to solving parametric identification problems for dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 952–965.
23. Petukhov, A.A. and Reviznikov, D.L., Algorithms for numerical solution of fractional differential equations, *Aerospace MAI J.*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 228–234.
24. Reviznikov, D.L. and Slatushenskiy, Y.V., Application of fractional differential calculus to describe anomalous diffusion, *Aerospace MAI J.*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 76–82.
25. Moroz, L.I. and Maslovskaya, A.G., Numerical simulation of an anomalous diffusion process based on a scheme of a higher order of accuracy, *Math. Models and Comput. Simul.*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 492–501.

УДК 519.63

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЭЛЕМЕНТА ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

© П. С. Соловьев¹, С. И. Соловьев²*Казанский (Приволжский) федеральный университет**e-mail: ¹pavel.solovev.kpfu@mail.ru, ²sergey.solovev.kpfu@mail.ru**Поступила в редакцию 26.11.2023 г., после доработки 03.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.*

Исследована симметричная задача на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра в гильбертовом пространстве, которое является векторной решёткой с конусом положительных элементов. Установлено существование положительного простого минимального собственного значения, соответствующего единственному нормированному положительному собственному элементу. Изучена аппроксимация задачи в конечномерном подпространстве. Получены результаты о сходимости и погрешности приближений к минимальному собственному значению и соответствующему положительному собственному элементу. Разработаны и обоснованы вычислительные методы решения матричных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие теоретические выводы.

Ключевые слова: собственное значение, положительный собственный элемент, задача на собственные значения, гильбертово пространство, векторная решётка, конус, конечномерная аппроксимация, итерационный метод, метод конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064124070093, EDN: KNEQAH

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на собственные значения с линейной и нелинейной зависимостями от спектрального параметра применяются в различных областях науки и техники [1–4]. Значительный интерес исследователей к изучению положительных относительно конуса решений задач на собственные значения был вызван знаменитыми классическими результатами О. Перрона, Г. Фробениуса, Р. Йентча, М.А. Рутмана, М.Г. Крейна и М.А. Красносельского (см. обзор в [5]), ими были изучены задачи на собственные значения с линейной зависимостью от спектрального параметра в банаховых пространствах с телесным конусом. Развитие классических результатов для задач на собственные значения с линейной зависимостью от спектрального параметра в банаховых пространствах с банаховой решёткой изложено в книгах [6, с. 400; 7, с. 63]. При дальнейшем обобщении этих результатов для задач на собственные значения в пространствах Соболева были выявлены следующие трудности: конус в пространстве Соболева не является телесным, пространство Соболева является векторной, но не банаховой решёткой [8, с. 149].

В настоящей работе предложен новый подход, позволяющий преодолеть отмеченные трудности для симметричных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью

от спектрального параметра в гильбертовом пространстве, которое является векторной решёткой с конусом положительных элементов. Сформулированы новые достаточные условия на билинейные формы симметричной вариационной задачи на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, гарантирующие существование в конусе единственного нормированного собственного элемента, соответствующего положительному простому минимальному собственному значению. Построена конечномерная аппроксимация симметричной вариационной задачи на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра в конечномерном подпространстве исходного гильбертова пространства, установлены результаты о сходимости и погрешности приближений к минимальному собственному значению и к положительному собственному элементу. В статье разработаны также вычислительные методы нахождения решений матричных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Изложенные численные методы могут быть применены для решения и исследования прикладных задач физики плазмы и механики конструкций [1–4].

1. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество вещественных чисел. Пусть V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$, $u, v \in V$.

Предположим, что выполнено следующее

Условие А.1. Пространство V является векторной решёткой с конусом положительных элементов K . Каждому элементу $v \in V$ поставлены в соответствие единственные элементы $v^+, v^-, |v| \in K$, где $v = v^+ - v^-$, $|v| = v^+ + v^-$, v^+ — положительная часть элемента v , v^- — его отрицательная часть, $|v|$ — модуль элемента v [8, с. 146].

Для заданного числа $\tau > 0$ обозначим $\Lambda = (\tau, \infty)$ и введём при фиксированном $\eta \in \Lambda$ симметричные билинейные формы $a(\eta): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b(\eta): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям.

Условие А.2. Билинейная форма $a(\eta)$ является положительно определённой и ограниченной, т.е. существуют положительные непрерывные функции $\alpha_1(\eta)$, $\alpha_2(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, такие, что

$$\alpha_1(\eta)\|v\|^2 \leq a(\eta, v, v) \leq \alpha_2(\eta)\|v\|^2, \quad v \in V, \quad \eta \in \Lambda.$$

Условие А.3. Билинейная форма $b(\eta)$ является положительной и вполне непрерывной, т.е. $b(\eta, v, v) > 0$ для $v \in V \setminus \{0\}$ и $b(\eta, v_j, v_j) \rightarrow b(\eta, v, v)$ при $j \rightarrow \infty$, если $v_j \rightarrow v$ в V при $j \rightarrow \infty$. Здесь символ $\rightarrow$ обозначает слабую сходимость в гильбертовом пространстве V .

Условие А.4. Имеют место соотношения $\|a(\eta) - a(\mu)\| \rightarrow 0$, $\|b(\eta) - b(\mu)\| \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \mu$. Здесь норма симметричной билинейной формы $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ определяется по формуле

$$\|c\| = \sup_{v \in V, \|v\|=1} |c(v, v)|.$$

Согласно условию А.4 для билинейной формы $b(\eta)$ существует положительная непрерывная функция $\beta_2(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, такая, что $b(\eta, v, v) \leq \beta_2(\eta)\|v\|^2$ для любого $v \in V$ при фиксированном параметре $\eta \in \Lambda$ [3].

Условие А.5. Справедлива сходимость функционала Рэля $R(\eta, v) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, где $R(\eta, v) = a(\eta, v, v)/b(\eta, v, v)$, $\eta \in \Lambda$, $v \in V \setminus \{0\}$.

Условие А.6. Выполняется неравенство $b(\eta, u, v) \geq 0$ для любых $\eta \in \Lambda$, $u, v \in K$.

Условие А.7. Справедливы соотношения $a(\eta, v^+, v^-) = b(\eta, v^+, v^-) = 0$ для любых $\eta \in \Lambda$, $v \in V$.

Условие А.8. Множество $\dot{K} = \dot{K}(\eta) = \{u: u \in K, b(\eta, u, v) > 0 \text{ для любых } v \in K \setminus \{0\}\}$ непусто и не зависит от параметра $\eta \in \Lambda$.

Условие А.9. Если $\eta \in \Lambda$, $u \in K \setminus \{0\}$, $a(\eta, u, v) \geq 0$ для любого $v \in K$, то $u \in \dot{K}$, где $\dot{K}$ — непустое подмножество множества $\dot{K}$.

Сформулируем вариационную задачу на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра:

$$\lambda \in \Lambda, \quad u \in V \setminus \{0\}: \quad a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v) \quad \text{для любого } v \in V. \quad (1)$$

Число λ , удовлетворяющее уравнению (1), называется *собственным значением задачи* (1), а элемент u — соответствующим *собственным элементом*. Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ введём параметрическую задачу на собственные значения

$$\gamma(\eta) \in \mathbb{R}, \quad w \in V \setminus \{0\}: \quad a(\eta, w, v) = \gamma(\eta)b(\eta, w, v) \quad \text{для любого } v \in V. \quad (2)$$

Известно [2], что существуют конечнократные собственные значения $\gamma_k = \gamma_k(\eta)$, $k = 0, 1, \dots$, параметрической задачи (2), занумерованные с учётом кратности, $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_k \leq \dots$, $\gamma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и соответствующие собственные элементы $w_k = w_k(\eta)$, $k = 0, 1, \dots$, $a(\eta, w_i, w_j) = \gamma_i \delta_{ij}$, $b(\eta, w_i, w_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ справедливо следующее вариационное свойство:

$$\gamma_0(\eta) = R(w_0(\eta)) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\eta, v). \quad (3)$$

Положим $\gamma_0(\tau + 0) = \lim_{\eta \rightarrow \tau} \gamma_0(\eta)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия А.1–А.9 и $\gamma_0(\tau + 0) > 1$. Тогда существует положительное простое минимальное собственное значение λ_0 , $\gamma_0(\lambda_0) = 1$, задачи (1), соответствующее единственному нормированному положительному собственному элементу $u_0 \in \dot{K}$, $u_0 = w_0(\lambda_0)$, $a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$.

Доказательство. Для $w_0 = w_0(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, согласно условиям А.1 и А.7 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} b(\eta, w_0, w_0) &= b(\eta, w_0^+ - w_0^-, w_0^+ - w_0^-) = b(\eta, w_0^+, w_0^+) + b(\eta, w_0^-, w_0^-) - 2b(\eta, w_0^+, w_0^-) = \\ &= b(\eta, w_0^+, w_0^+) + b(\eta, w_0^-, w_0^-) + 2b(\eta, w_0^+, w_0^-) = b(\eta, w_0^+ + w_0^-, w_0^+ + w_0^-) = b(\eta, |w_0|, |w_0|) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично получим $a(\eta, w_0, w_0) = a(\eta, |w_0|, |w_0|) = \gamma_0(\eta)$. Поэтому из вариационного свойства (3) выводим, что на элементе $|w_0|$ достигается минимум функционала Рэля, т.е.

$$\gamma_0(\eta) = R(\eta, w_0) = R(\eta, |w_0|) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\eta, v).$$

Следовательно, элемент $|w_0| \in K$ является собственным элементом, соответствующим минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$ параметрической задачи (2), и справедливо тождество $a(\eta, |w_0|, v) = \gamma_0(\eta)b(\eta, |w_0|, v)$ для любого $v \in V$. Отсюда с учётом условия А.6 получим соотношения $a(\eta, |w_0|, v) = \gamma_0(\eta)b(\eta, |w_0|, v) \geq 0$ для любого $v \in K$. В силу условия А.9 выводим $|w_0| \in \dot{K}$.

Пусть существуют два линейно независимых собственных элемента $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$, соответствующих минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$. С помощью процесса ортогонализации определим два ортонормированных собственных элемента v_1 и v_2 , соответствующих минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$:

$$v_1 = \frac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|_{b(\eta)}}, \quad v_2 = \frac{\tilde{v}_2 - b(\eta, \tilde{v}_2, v_1)v_1}{\|\tilde{v}_2 - b(\eta, \tilde{v}_2, v_1)v_1\|_{b(\eta)}}.$$

Тогда элементы $|v_1|, |v_2| \in \bar{K}^*$ также являются собственными элементами, соответствующими минимальному собственному значению $\gamma_0(\eta)$. Кроме того, $v_1 = |v_1|$ или $v_1 = -|v_1|$, $v_2 = |v_2|$ или $v_2 = -|v_2|$. Следовательно, получим $b(\eta, v_1, v_2) = \alpha b(\eta, |v_1|, |v_2|) = 0$, где $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Но это противоречит неравенству $b(\eta, |v_1|, |v_2|) > 0$ для элементов $|v_1|, |v_2| \in \bar{K}^*$ в силу условия А.8. Таким образом, исходные собственные элементы $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ линейно зависимы, а соответствующее собственное значение $\gamma_0(\eta)$ является простым и выполняется неравенство $\gamma_0(\eta) < \gamma_1(\eta)$.

Предположим, что существует собственный элемент w_i , принадлежащий конусу K и соответствующий собственному значению $\gamma_i(\eta)$ при $\gamma_0(\eta) < \gamma_i(\eta)$ для $i > 0$. Тогда в силу ортогональности получим соотношение $b(\eta, w_i, w_0) = b(\eta, w_i, |w_0|) = 0$, но это противоречит свойству билинейной формы $b(\eta, w_i, |w_0|) > 0$ для элемента $|w_0| \in \bar{K}$. В результате установлена единственность нормированного собственного элемента $|w_0| = |w_0(\eta)|$ в конусе K .

Из непрерывности билинейных форм согласно условию А.4 вытекает непрерывность функций $\gamma_k = \gamma_k(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $k = 0, 1, \dots$ [3].

Докажем, что уравнение $\gamma_0(\eta) = 1$, $\eta \in \Lambda$, имеет наименьший корень λ_0 . Действительно, имеем $\gamma_0(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, $\eta \in \Lambda$, так как согласно условию А.5 и свойству (3) для фиксированного элемента $w \in V \setminus \{0\}$ справедливо соотношение

$$\gamma_0(\eta) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\eta, v) \leq R(\eta, w) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty, \quad \eta \in \Lambda.$$

Кроме того, по предположению теоремы $\gamma_0(\tau + 0) > 1$. Отсюда заключаем, что существует наименьший корень λ_0 , который определяет минимальное собственное значение задачи (1).

Собственному значению λ_0 соответствует единственный нормированный положительный собственный элемент $|u_0| \in \bar{K}$, $u_0 = w_0(\lambda_0)$, $a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$. Теорема доказана.

2. КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ

Определим семейство конечномерных подпространств V_h пространства V размерности $N+1$, $N = N_h$, где h — положительный параметр дискретизации. Предположим выполненным следующее требование предельной плотности семейства подпространств V_h в пространстве V .

Условие В.1. Для любого элемента $v \in V$ имеет место сходимость $\varepsilon_h(v) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\|.$$

Для замкнутых подпространств V_1 и V_2 пространства V обозначим через $c|_{V_1 \times V_2} : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ сужение билинейной формы $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ на множество $V_1 \times V_2$. Зададим норму билинейной формы $c|_{V_1 \times V_2} : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\|c|_{V_1 \times V_2}\| = \sup_{u \in V_1, v \in V_2, \|u\|=\|v\|=1} |c(u, v)|.$$

Введём при фиксированном параметре $\eta \in \Lambda$ симметричные билинейные формы $a_h(\eta) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ и $b_h(\eta) : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям.

Условие В.2. Билинейные формы $a_h(\eta)$ и $b_h(\eta)$ являются положительными, т.е. $a_h(\eta, v^h, v^h) > 0$ и $b_h(\eta, v^h, v^h) > 0$ для произвольного $v^h \in V_h \setminus \{0\}$, $\eta \in \Lambda$.

Условие В.3. Билинейные формы $a_h(\eta)$ и $b_h(\eta)$ непрерывны, т.е.

$$\|(a_h(\eta) - a_h(\mu))|_{V_h \times V_h}\| \rightarrow 0, \quad \|(b_h(\eta) - b_h(\mu))|_{V_h \times V_h}\| \rightarrow 0$$

при $\eta \rightarrow \mu$, $\eta, \mu \in \Lambda$.

Условие В.4. Справедливы условия аппроксимации билинейных форм

$$\|(a_h(\eta) - a(\eta))|_{V_h \times V_h}\| \rightarrow 0, \quad \|(b_h(\eta) - b(\eta))|_{V_h \times V_h}\| \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, $\eta \in \Lambda$.

Согласно условиям А.2, А.3 и В.4 при достаточно малых h существуют положительные непрерывные функции $\bar{\alpha}_1(\eta)$, $\bar{\alpha}_2(\eta)$, $\bar{\beta}_2(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, такие, что

$$\bar{\alpha}_1(\eta)\|v^h\|^2 \leq a_h(\eta, v^h, v^h) \leq \bar{\alpha}_2(\eta)\|v^h\|^2, \quad b_h(\eta, v^h, v^h) \leq \bar{\beta}_2(\eta)\|v^h\|^2$$

для любого $v^h \in V_h$, $\eta \in \Lambda$.

Условие В.5. Для $R_h(\eta, v^h) = a_h(\eta, v^h, v^h)/b_h(\eta, v^h, v^h)$, $\eta \in \Lambda$, $v^h \in V_h \setminus \{0\}$, справедлива сходимость $R_h(\eta, v^h) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Введём конечномерную задачу на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра

$$\lambda^h \in \Lambda, \quad u^h \in V_h \setminus \{0\}: \quad a_h(\lambda^h, u^h, v^h) = b_h(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \text{для любого } v^h \in V_h. \quad (4)$$

Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ сформулируем параметрическую задачу на собственные значения

$$\gamma^h(\eta) \in \mathbb{R}, \quad w^h \in V_h \setminus \{0\}: \quad a_h(\eta, w^h, v^h) = \gamma^h(\eta)b_h(\eta, w^h, v^h) \quad \text{для любого } v^h \in V_h. \quad (5)$$

Известно [2], что существуют конечнократные собственные значения $\gamma_k^h = \gamma_k^h(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, параметрической задачи (5), занумерованные с учётом кратности, $0 < \gamma_0^h \leq \gamma_1^h \leq \dots \leq \gamma_N^h$, и соответствующие собственные элементы $w_k^h = w_k^h(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, $a_h(\eta, w_i^h, w_j^h) = \gamma_i^h \delta_{ij}$, $b_h(\eta, w_i^h, w_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{0, N}$. Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ справедливо следующее вариационное свойство:

$$\gamma_0^h(\eta) = R_h(w_0^h(\eta)) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R_h(\eta, v^h). \quad (6)$$

Положим $\gamma_0^h(\tau + 0) = \lim_{\eta \rightarrow \tau} \gamma_0^h(\eta)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия В.2, В.3, В.5 и $\gamma_0^h(\tau + 0) > 1$. Тогда существует положительное минимальное собственное значение λ_0^h , $\gamma_0^h(\lambda_0^h) = 1$, задачи (4), соответствующее нормированному собственному элементу $u_0^h = w_0^h(\lambda_0^h)$, $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$, $b_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$.

Доказательство. Из непрерывности билинейных форм согласно условию В.3 вытекает непрерывность функций $\gamma_k^h = \gamma_k^h(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $k = \overline{0, N}$ [3]. Покажем, что уравнение $\gamma_0^h(\eta) = 1$, $\eta \in \Lambda$, имеет наименьший корень λ_0^h . Действительно, имеем $\gamma_0^h(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, $\eta \in \Lambda$, так как согласно условию В.5 и свойству (6) для фиксированного элемента $w^h \in V_h \setminus \{0\}$ справедливо соотношение

$$\gamma_0^h(\eta) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R_h(\eta, v^h) \leq R_h(\eta, w^h) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty, \quad \eta \in \Lambda.$$

Кроме того, по предположению теоремы $\gamma_0^h(\tau + 0) > 1$. Отсюда заключаем, что существует наименьший корень λ_0^h , который определяет минимальное собственное значение задачи (4). Собственному значению λ_0^h соответствует нормированный собственный элемент $u_0^h = w_0^h(\lambda_0^h)$, $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$, $b_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$. Теорема доказана.

Обозначим для $v \in V$, $v^h \in V_h$, $\eta \in \Lambda$

$$\|v\|_{a(\eta)} = a(\eta, v, v), \quad \|v\|_{b(\eta)} = b(\eta, v, v), \quad \|v^h\|_{a_h(\eta)} = a_h(\eta, v^h, v^h), \quad \|v^h\|_{b_h(\eta)} = b_h(\eta, v^h, v^h).$$

Введём оператор ортогонального проектирования $P_h(\eta): V \rightarrow V_h$ с помощью соотношения $a(\eta, u - P_h(\eta)u, v^h) = 0$ для любого элемента $v^h \in V_h$, где $u \in V$. Имеем $\|u - P_h(\eta)u\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, так как

$$\sqrt{\alpha_1(\eta)} \|u - P_h(\eta)u\| \leq \|u - P_h(\eta)u\|_{a(\eta)} \leq \|u - v^h\|_{a(\eta)} \leq \sqrt{\alpha_2(\eta)} \|u - v^h\|,$$

$$\|u - P_h(\eta)u\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2(\eta)}{\alpha_1(\eta)}} \inf_{v^h \in V_h} \|u - v^h\| = \sqrt{\frac{\alpha_2(\eta)}{\alpha_1(\eta)}} \varepsilon_h(u) \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, $v^h \in V_h$.

Одним и тем же символом c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от h , и считать h достаточно малым. Обозначим через λ_0 минимальное собственное значение задачи (1), через $u_0 \in K$ — соответствующий собственному значению λ_0 положительный собственный элемент такой, что $a(\lambda_0, u_0, u_0) = b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$. Обозначим через λ_0^h минимальное собственное значение задачи (4), через u_0^h — соответствующий собственному значению λ_0^h собственный элемент такой, что $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = b_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$, $a(\lambda_0, u_0^h, u_0) = b(\lambda_0, u_0^h, u_0) > 0$. Предположим, что функция $\gamma_0(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, является убывающей в некоторой окрестности точки λ_0 .

Теорема 3. Пусть выполнены условия A.1–A.9, B.1–B.5 и $\gamma_0(\tau + 0) > 1$. Тогда имеет место сходимость $\lambda_0^h \rightarrow \lambda_0$, $\|u_0^h - u_0\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ из результатов [2] получим сходимость $\gamma_0^h(\eta) \rightarrow \gamma_0(\eta)$ при $h \rightarrow 0$. Следовательно, справедлива сходимость $\lambda_0^h \rightarrow \lambda_0$ при $h \rightarrow 0$.

Так как $b_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$, то получим $\bar{\alpha}_1(\lambda_0^h) \|u_0^h\|^2 \leq a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = \gamma_0^h(\lambda_0^h) = 1$, отсюда $\|u_0^h\| \leq 1/(\bar{\alpha}_1(\lambda_0^h))^{1/2} \leq c$. Поэтому для произвольной последовательности $h' \rightarrow 0$ найдётся подпоследовательность $h'' \rightarrow 0$, $u_0^h \rightharpoonup w$ в V при $h = h'' \rightarrow 0$, $w \in V$.

Теперь для любого элемента $v \in V$ положим $v^h = P_h(\lambda_0)v$. Тогда справедливы следующие предельные свойства: $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, v^h) \rightarrow a(\lambda_0, w, v)$, $b_h(\lambda_0^h, u_0^h, v^h) \rightarrow b(\lambda_0, w, v)$ при $h = h'' \rightarrow 0$.

С помощью предельного перехода в равенстве $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, v^h) = b_h(\lambda_0^h, u_0^h, v^h)$ при $h = h'' \rightarrow 0$ получим $a(\lambda_0, w, v) = b(\lambda_0, w, v)$ для произвольного $v \in V$. Так как $1 = b_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) \rightarrow b(\lambda_0, w, w)$ при $h = h'' \rightarrow 0$, то $b(\lambda_0, w, w) = 1$ и $w \in K$. Действительно, предположив противное ($-w \in K$), находим $w = -u_0$, и поэтому $b(\lambda_0, u_0^h, u_0) \rightarrow -b(\lambda_0, u_0, u_0) = -1$ при $h = h'' \rightarrow 0$, $u_0 \in K$, но это противоречит предположению теоремы $b(\lambda_0, u_0^h, u_0) > 0$. В результате установлено, что λ_0 и $w = u_0$ являются минимальным собственным значением и соответствующим положительным собственным элементом задачи (1).

Докажем сходимость $\|u_0^h - u_0\| \rightarrow 0$ при $h = h'' \rightarrow 0$. Сначала получим предельные соотношения при $h = h'' \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1(\lambda_0^h) \|u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0\|^2 &\leq a_h(\lambda_0^h, u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0, u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0) = \\ &= a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) - 2a_h(\lambda_0^h, u_0^h, P_h(\lambda_0)u_0) + a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, P_h(\lambda_0)u_0) \rightarrow a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) \rightarrow a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$ при $h = h'' \rightarrow 0$. Теперь выводим сходимость $\|u_0^h - u_0\| \leq \|u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0\| + \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\| \rightarrow 0$ при $h = h'' \rightarrow 0$.

Пусть для некоторой последовательности $h' \rightarrow 0$ имеет место неравенство $\|u_0^h - u_0\| \geq c$ при $h = h' \rightarrow 0$. Тогда, повторяя проведённые рассуждения, получаем, что найдётся подпоследовательность $h'' \rightarrow 0$, для которой $\|u_0^h - u_0\| \rightarrow 0$ при $h = h'' \rightarrow 0$, что приводит к противоречию с предыдущим неравенством.

Итак, для произвольной последовательности $h' \rightarrow 0$ установлена сходимость $\|u_0^h - u_0\| \rightarrow 0$ при $h = h' \rightarrow 0$, а это эквивалентно $\|u_0^h - u_0\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Предположим, что билинейные формы удовлетворяют следующим условиям.

Условие А.10. Существуют непрерывные функции $\alpha_3(\eta, \mu)$, $\beta_3(\eta, \mu)$, $\eta, \mu \in \Lambda$, такие, что для любого $v \in V$

$$|a(\eta, v, v) - a(\mu, v, v)| \leq \alpha_3(\eta, \mu) |\eta - \mu| \|v\|^2,$$

$$|b(\eta, v, v) - b(\mu, v, v)| \leq \beta_3(\eta, \mu) |\eta - \mu| \|v\|^2.$$

Условие В.6. Существуют непрерывные функции $\bar{\alpha}_3(\eta, \mu)$, $\bar{\beta}_3(\eta, \mu)$, $\eta, \mu \in \Lambda$, такие, что для любого $v^h \in V_h$

$$|a_h(\eta, v^h, v^h) - a_h(\mu, v^h, v^h)| \leq \bar{\alpha}_3(\eta, \mu) |\eta - \mu| \|v^h\|^2,$$

$$|b_h(\eta, v^h, v^h) - b_h(\mu, v^h, v^h)| \leq \bar{\beta}_3(\eta, \mu) |\eta - \mu| \|v^h\|^2.$$

Введём следующие обозначения:

$$\delta_1^h(u_0) = \delta_{1a}^h(u_0) + \delta_{1b}^h(u_0), \quad \delta_2^h(u_0) = \delta_{2a}^h(u_0) + \delta_{2b}^h(u_0),$$

$$\delta_{1a}^h(u_0) = \sup_{v^h \in V_h, \|v^h\|=1} |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)|,$$

$$\delta_{1b}^h(u_0) = \sup_{v^h \in V_h, \|v^h\|=1} |b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)|,$$

$$\delta_{2a}^h(u_0) = |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0)|,$$

$$\delta_{2b}^h(u_0) = |b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0)|.$$

Обозначим $\Delta(\eta, \mu) = (\gamma_0(\eta) - \gamma_0(\mu))/(\eta - \mu)$, $\Delta_h(\eta, \mu) = (\gamma_0^h(\eta) - \gamma_0^h(\mu))/(\eta - \mu)$, $\eta, \mu \in \Lambda$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия А.1–А.10, В.1–В.6, $\gamma_0(\tau + 0) > 1$ и существует число $\varkappa > 0$ такое, что $-\Delta(\lambda_0, \eta) \geq c_0 > 0$ при любом $\eta \in (\lambda_0 - \varkappa, \lambda_0) \cup (\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa)$. Тогда имеют место оценки погрешности

$$|\lambda_0^h - \lambda_0| \leq c[\delta_2^h(u_0) + (\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))^2], \quad \|u_0^h - u_0\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Доказательство. Через $U_0 = \{v: v = \alpha u_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ обозначим собственное подпространство, соответствующее минимальному собственному значению λ_0 . Введём обозначения

$$\varepsilon^h = \sup_{u \in U_0, \|u\|=1} \varepsilon_h(u),$$

$$\delta_1^h = \|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times V_h}\| + \|(b_h(\lambda_0) - b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times V_h}\|,$$

$$\delta_2^h = \|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times P_h(\lambda_0)U_0}\| + \|(b_h(\lambda_0) - b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times P_h(\lambda_0)U_0}\|.$$

Согласно [2] справедлива оценка

$$|\gamma_0^h(\lambda_0) - \gamma_0(\lambda_0)| \leq c[\delta_2^h + (\varepsilon^h + \delta_1^h)^2]. \quad (7)$$

Оценим величины, входящие в правую часть неравенства (7). Из соотношения

$$\alpha_2(\lambda_0)\|u_0\|^2 \geq a(\lambda_0, u_0, u_0) = b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$$

получим $\|u_0\| \geq 1/\sqrt{\alpha_2(\lambda_0)}$, отсюда выводим оценку

$$\varepsilon^h = \sup_{u \in U_0, \|u\|=1} \varepsilon_h(u) = \frac{\varepsilon_h(u_0)}{\|u_0\|} \leq \sqrt{\alpha_2(\lambda_0)} \varepsilon_h(u_0).$$

Кроме того, находим

$$\begin{aligned} \delta_1^h &= \|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times V_h}\| + \|(b_h(\lambda_0) - b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times V_h}\| \leq \\ &\leq c(\delta_{1a}^h(u_0) + \delta_{1b}^h(u_0)) = \delta_1^h(u_0), \\ \delta_2^h &= \|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times P_h(\lambda_0)U_0}\| + \|(b_h(\lambda_0) - b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times P_h(\lambda_0)U_0}\| \leq \\ &\leq c(\delta_{2a}^h(u_0) + \delta_{2b}^h(u_0)) = \delta_2^h(u_0). \end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times V_h}\| &= \sup_{u^h \in P_h(\lambda_0)U_0, v^h \in V_h, \|u^h\|=\|v^h\|=1} |(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))(u^h, v^h)| = \\ &= \sup_{u^h \in P_h(\lambda_0)U_0 \setminus \{0\}, v^h \in V_h, \|v^h\|=1} \frac{|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))(u^h, v^h)|}{\|u^h\|} = \\ &= \sup_{v^h \in V_h, \|v^h\|=1} \frac{|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))(P_h(\lambda_0)u_0, v^h)|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\|} \leq \\ &\leq c \sup_{v^h \in V_h, \|v^h\|=1} |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| = c\delta_{1a}^h(u_0), \\ \|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times P_h(\lambda_0)U_0}\| &= \sup_{u^h, v^h \in P_h(\lambda_0)U_0, \|u^h\|=\|v^h\|=1} |(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))(u^h, v^h)| = \\ &= \sup_{u^h, v^h \in P_h(\lambda_0)U_0 \setminus \{0\}} \frac{|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))(u^h, v^h)|}{\|u^h\| \|v^h\|} = \frac{|(a_h(\lambda_0) - a(\lambda_0))(P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0)|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\| \|P_h(\lambda_0)u_0\|} \leq \\ &\leq c |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0)| = c\delta_{2a}^h(u_0), \end{aligned}$$

а также аналогичные оценки

$$\|(b_h(\lambda_0) - b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times V_h}\| \leq c\delta_{1b}^h(u_0), \quad \|(b_h(\lambda_0) - b(\lambda_0))|_{P_h(\lambda_0)U_0 \times P_h(\lambda_0)U_0}\| \leq \delta_{2b}^h(u_0),$$

где учтено, что $\|P_h(\lambda_0)u_0\| = \|P_h(\lambda_0)u_0 - u_0 + u_0\| \geq \|u_0\| - \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\| \geq c$.

Так как $\Delta_h(\eta, \mu) \rightarrow \Delta(\eta, \mu)$ при $h \rightarrow 0$, $\eta, \mu \in \Lambda$, то из (7) для $c_1 > 0$ выводим

$$\begin{aligned} c_1|\lambda_0^h - \lambda_0| &\leq |\gamma_0^h(\lambda_0) - \gamma_0^h(\lambda_0^h)| = |\gamma_0^h(\lambda_0) - \gamma_0(\lambda_0)| \leq \\ &\leq c[\delta_2^h + (\varepsilon^h + \delta_1^h)^2] \leq c[\delta_2^h(u_0) + (\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))^2]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает первая оценка теоремы.

Обозначим $\xi_i^h = b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, w_i^h)$, $i = \overline{0, N}$, где $w_i^h = w_i(\lambda_0^h)$, $i = \overline{0, N}$, — собственные элементы параметрической задачи (5) при $\eta = \lambda_0^h$. Так как собственные элементы w_i^h , $i = \overline{0, N}$, составляют ортонормированный базис в конечномерном пространстве V_h , то для элемента $P_h(\lambda_0)u_0 \in V_h$ справедливо представление

$$P_h(\lambda_0)u_0 = \sum_{i=0}^N \xi_i^h w_i^h = \xi_0^h w_0^h + \sum_{i=1}^N \xi_i^h w_i^h = \xi_0^h w_0^h + z^h, \quad z^h = \sum_{i=1}^N \xi_i^h w_i^h.$$

Из неравенства $\gamma_1(\lambda_0) - \gamma_0(\lambda_0) > 0$ выводим

$$\gamma_1^h(\lambda_0^h) - 1 = \gamma_1^h(\lambda_0^h) - \gamma_0(\lambda_0) = (\gamma_1(\lambda_0) - \gamma_0(\lambda_0)) + (\gamma_1^h(\lambda_0^h) - \gamma_1^h(\lambda_0)) + (\gamma_1^h(\lambda_0) - \gamma_1(\lambda_0)) \geq c,$$

так как $\gamma_1^h(\lambda_0^h) - \gamma_1^h(\lambda_0) \rightarrow 0$ и $\gamma_1^h(\lambda_0) - \gamma_1(\lambda_0) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ согласно [2, 3]. Положим

$$\nu_h(u_0) = \sup_{v^h \in V_h, \|v^h\|=1} |a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)|.$$

Для оценки величины $\nu_h(u_0)$ предварительно проведём следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) = \\ & = (a(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) + (a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) - \\ & - (b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) + (a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) - \\ & - (b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) - (a(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) + \\ & + (b(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)), \\ & a(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) = \\ & = (a(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) - (b(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) + \\ & + a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0 - u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0 - u_0, v^h) + a(\lambda_0, u_0, v^h) - b(\lambda_0, u_0, v^h) = \\ & = (a(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) - (b(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)) - \\ & - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0 - u_0, v^h). \end{aligned}$$

Было учтено, что $a(\lambda_0, u_0, v^h) - b(\lambda_0, u_0, v^h) = 0$, $a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0 - u_0, v^h) = 0$ для любого элемента $v^h \in V_h$.

Теперь при $\|v^h\| = 1$ оценим следующие выражения:

$$\begin{aligned} & |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq c \delta_{1a}^h(u_0), \\ & |b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq c \delta_{1b}^h(u_0), \\ & |a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq \\ & \leq \bar{\alpha}_3(\lambda_0^h, \lambda_0) |\lambda_0^h - \lambda_0| \|P_h(\lambda_0)u_0\| \|v^h\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ & |b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq \\ & \leq \bar{\beta}_3(\lambda_0^h, \lambda_0) |\lambda_0^h - \lambda_0| \|P_h(\lambda_0)u_0\| \|v^h\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ & |a(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq \\ & \leq \alpha_3(\lambda_0^h, \lambda_0) |\lambda_0^h - \lambda_0| \|P_h(\lambda_0)u_0\| \|v^h\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ & |b(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq \\ & \leq \beta_3(\lambda_0^h, \lambda_0) |\lambda_0^h - \lambda_0| \|P_h(\lambda_0)u_0\| \|v^h\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ & |b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0 - u_0, v^h)| \leq \beta_2(\lambda_0) \|P_h(\lambda_0)u_0 - u_0\| \|v^h\| \leq c\varepsilon_h(u_0). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\nu_h(u) = \sup_{v^h \in V_h, \|v^h\|=1} |a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Установим теперь оценку $\|z^h\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))$. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) &= a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h), \quad b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) = b_h(\lambda_0^h, z^h, z^h), \\ a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) &\geq \gamma_1^h(\lambda_0^h)b_h(\lambda_0^h, z^h, z^h), \end{aligned}$$

с помощью которых находим

$$\begin{aligned} \|z^h\| \nu_h(u_0) &\geq a_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) - b_h(\lambda_0^h, P_h(\lambda_0)u_0, z^h) = \\ &= a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) - b_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) \geq \frac{\gamma_1^h(\lambda_0^h) - 1}{\gamma_1^h(\lambda_0^h)} a_h(\lambda_0^h, z^h, z^h) \geq c^{-1} \|z^h\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает требуемая оценка.

Теперь, применяя установленные оценки, имеем

$$\|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\| = \|z^h\| \leq c \nu_h(u_0) \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)).$$

Далее, используя оценки

$$\begin{aligned} &| \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)} | \leq \frac{|\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}^2 - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)}^2|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} + \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)}} \leq \\ &\leq c|\lambda_0^h - \lambda_0| \leq c[\delta_2^h(u_0) + (\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))^2] \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ &| \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} | \leq \frac{|\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)}^2 - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}^2|}{\|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} + \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)}} \leq c\delta_1^h(u_0), \\ &\|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} \leq c\varepsilon_h(u_0), \quad \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \end{aligned}$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} \xi_0^h &= \xi_0^h \|w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} = \|\xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leq \\ &\leq \|u_0\|_{b(\lambda_0)} + \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} + | \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)} | + \\ &+ | \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} | + \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leq 1 + c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ \xi_0^h &= \xi_0^h \|w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} = \|\xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \geq \\ &\geq \|u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - | \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0^h)} | - \\ &- | \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b(\lambda_0)} - \|P_h(\lambda_0)u_0\|_{b_h(\lambda_0)} | - \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{b_h(\lambda_0^h)} \leq 1 - c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)). \end{aligned}$$

Следовательно, $|1 - \xi_0^h| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))$.

В итоге приходим ко второй оценке теоремы:

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\alpha}_1(\lambda_0^h)} \|u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0\| &\leq \|P_h(\lambda_0)u_0 - w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} \leq \\ &\leq \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} + \|w_0^h - \xi_0^h w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} = \\ &= \|P_h(\lambda_0)u_0 - \xi_0^h w_0^h\|_{a_h(\lambda_0^h)} + |1 - \xi_0^h| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)), \\ \|u_0^h - u_0\| &\leq \|u_0^h - P_h(\lambda_0)u_0\| + \|u_0 - P_h(\lambda_0)u_0\| \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

В пространстве V_h зададим базис φ_j , $j = \overline{0, N}$. Положим $\mathbb{H} = \mathbb{R}^{N+1}$. Определим симметричные квадратные матрицы $A(\eta)$ и $B(\eta)$ порядка $N+1$ с элементами $a_{ij}(\eta) = a_h(\eta, \varphi_i, \varphi_j)$, $b_{ij}(\eta) = b_h(\eta, \varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = \overline{0, N}$, $\eta \in \Lambda$. Согласно условиям В.2 и В.3 матрицы $A(\eta)$ и $B(\eta)$ являются симметричными положительно определёнными матрицами с элементами, непрерывно зависящими от параметра $\eta \in \Lambda$.

В этом пункте для краткости будем опускать индекс h в обозначениях собственных значений $\lambda_0 = \lambda_0^h$, $\gamma_k = \gamma_k(\eta) = \gamma_k^h(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, конечномерных задач (4) и (5).

Конечномерная задача (4) эквивалентна следующей матричной задаче на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра:

$$\lambda \in \Lambda, \quad y \in \mathbb{H} \setminus \{0\}: \quad A(\lambda)y = B(\lambda)y. \quad (8)$$

Число λ , удовлетворяющее уравнению (8), называется *собственным значением задачи* (8), а вектор y — соответствующим *собственным вектором*. Для фиксированного $\eta \in \Lambda$ конечномерная задача (5) эквивалентна следующей матричной задаче на собственные значения:

$$\gamma(\eta) \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \{0\}: \quad A(\eta)z = \gamma(\eta)B(\eta)z. \quad (9)$$

Существуют собственные значения $\gamma_k = \gamma_k(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_N$, параметрической задачи (9) и соответствующие собственные векторы $z^{(k)} = z^{(k)}(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, $(A(\eta)z^{(i)}, z^{(j)}) = \gamma_i \delta_{ij}$, $(B(\eta)z^{(i)}, z^{(j)}) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{0, N}$.

Пусть выполнены условия А.1–А.9, В.2, В.3, В.5 и $\gamma_0(\tau+0) > 1$. Тогда по теореме 2 существует положительное минимальное собственное значение λ_0 , $\gamma_0(\lambda_0) = 1$, задачи (8), соответствующее нормированному собственному вектору $y^{(0)} = z^{(0)}(\lambda_0)$, $(A(\lambda_0)y^{(0)}, y^{(0)}) = 1$, $(B(\lambda_0)y^{(0)}, y^{(0)}) = 1$. Согласно теоремам 1 и 3 для достаточно малых h собственное значение λ_0 является простым.

Предположим, что функция $\gamma_0(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, является убывающей в некоторой окрестности точки λ_0 . Обозначим через μ_1 минимальный корень уравнения $\gamma_0(\eta) = 1$, $\eta \in (\lambda_0, \infty)$, если этот корень существует, иначе полагаем $\mu_1 = \infty$. Обозначим через λ_1 минимальный корень уравнения $\gamma_1(\eta) = 1$, $\eta \in \Lambda$, если этот корень существует, иначе полагаем $\lambda_1 = \infty$. Положим $\varkappa = \min\{\mu_1 - \lambda_0, \lambda_1 - \lambda_0\}$, $M = (\tau, \lambda_0 + \varkappa)$.

Лемма. Для произвольной симметричной квадратной матрицы C порядка $N+1$ найдётся обратимая матрица G такая, что $G^T C G = D$, $D = \text{diag}\{E_p, -E_q, O_r\}$, где E_n и O_n — единичная и нулевая матрицы порядка n , $p+q+r = N+1$. Тройка чисел (p, q, r) определяется лишь матрицей C и называется инерцией матрицы C . Числа p , q и r равны соответственно количеству положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы C .

Доказательство леммы приведено, например, в книге [9, с. 318].

В следующей теореме развиваются результаты работ [10–12].

Теорема 5. Пусть для фиксированного числа $\eta \in M$ имеет место треугольное разложение $A(\eta) - B(\eta) = L(\eta)D(\eta)L^T(\eta)$, где $D(\eta)$ — диагональная матрица, $L(\eta)$ — нижняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами. Тогда выполняются соотношения $q(A(\eta) - B(\eta)) = q(\Delta - \eta E) = q(D(\eta))$, где E — единичная матрица порядка $N + 1$, $q(C)$ — количество отрицательных собственных значений матрицы C , $\Delta = \text{diag}\{\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa, \dots, \lambda_0 + \varkappa\}$ — диагональная матрица порядка $N + 1$.

Доказательство. По сформулированной лемме справедливо соотношение $q(A(\eta) - B(\eta)) = q(D(\eta))$ при $\eta \in M$. Через $Q = (z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$ обозначим квадратную матрицу со столбцами $z^{(k)} = z^{(k)}(\eta)$, $k = \overline{0, N}$, при фиксированном $\eta \in M$. Тогда $Q^T B(\eta)Q = E$, $Q^T A(\eta)Q = \Delta(\eta)$, $\Delta(\eta) = \text{diag}\{\gamma_0(\eta), \gamma_1(\eta), \dots, \gamma_N(\eta)\}$, где $\gamma_i(\eta)$, $i = \overline{0, N}$, — собственные значения линейной параметрической задачи на собственные значения (9) при фиксированном $\eta \in M$, соответствующие собственным векторам $z^{(k)} = z^{(k)}(\eta)$, $k = \overline{0, N}$. Матрица Q имеет обратную, поскольку столбцы матрицы линейно независимы. Следовательно, применяя лемму и равенство $Q^T(A(\eta) - B(\eta))Q = \Delta(\eta) - E$, находим $q(A(\eta) - B(\eta)) = q(\Delta(\eta) - E)$, $\eta \in M$.

Чтобы обосновать соотношение $q(\Delta(\eta) - E) = q(\Delta - \eta E)$, $\eta \in M$, выделим следующие возможности.

1. Пусть $\lambda_0 < \eta < \lambda_0 + \varkappa$. Установим равенства $q(\Delta(\eta) - E) = q(\Delta - \eta E) = 1$. Из соотношений $\gamma_0(\eta) - 1 < \gamma_0(\lambda_0) - 1 = 0$, $\gamma_i(\eta) - 1 \geq \gamma_1(\eta) - 1 \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, выводим $q(\Delta(\eta) - E) = 1$, $q(\Delta - \eta E) = 1$. Отсюда требуемое соотношение доказано.

2. Пусть $\tau < \eta \leq \lambda_0$. Проверим соотношения $q(\Delta(\eta) - E) = q(\Delta - \eta E) = 0$. Имеют место неравенства $\gamma_i(\eta) - 1 \geq \gamma_0(\eta) - 1 \geq \gamma_0(\lambda_0) - 1 = 0$, $i = \overline{0, N}$, из которых находим $q(\Delta(\eta) - E) = 0$, $q(\Delta - \eta E) = 0$, что даёт требуемое соотношение. Теорема доказана.

Согласно теореме 5 выводим, что число собственных значений задачи (8), меньших заданного числа $\eta \in M$, равно количеству отрицательных компонент $q(D(\eta))$ диагональной матрицы $D(\eta)$ из треугольного разложения теоремы 5. Чтобы найти числа $q(D(\eta))$, можно применить метод исключения Гаусса, тогда $q(D(\eta))$ будет числом отрицательных ведущих элементов гауссова исключения неизвестных, применённого к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей $A(\eta) - B(\eta)$ [13, с. 50]. Изложенный способ деления спектра и метод деления отрезка пополам дают возможность вычислить с заданной точностью минимальное собственное значение λ_0 задачи (8). Этот подход позволяет эффективно решать задачи сравнительно небольшой размерности. Для решения задач высокой размерности более предпочтительны излагаемые далее методы, обобщающие на более широкий класс нелинейных задач на собственные значения методы работы [4].

Зададим при фиксированном $\eta \in \Lambda$ симметричную положительно определённую матрицу $C(\eta)$ порядка $N + 1$, для которой известны постоянные $\delta_0(\eta)$ и $\delta_1(\eta)$, $0 < \delta_0(\eta) \leq \delta_1(\eta)$, такие, что $\delta_0(\eta)(C(\eta)z, z) \leq (A(\eta)z, z) \leq \delta_1(\eta)(C(\eta)z, z)$, $z \in \mathbb{H}$. Для $\eta \in \Lambda$ обозначим $\|z\|_{B(\eta)}^2 = (B(\eta)z, z)$, $z \in \mathbb{H}$. В следующих алгоритмах применяется QR -разложение [14, с. 115].

Метод 1. Метод простой итерации. Построим последовательности η^n , x^n , $n = 0, 1, \dots$, согласно следующему алгоритму: зададим вектор y^0 , вычислим минимальный корень η^0 уравнения $R(\eta^0, y^0) = 1$, найдём вектор $x^0 = y^0 / \|y^0\|_{B(\eta^0)}$. Для $n = 0, 1, \dots$ выполним следующие действия: вычислим параметр $\tau^n = 2 / (\delta_0(\eta^n) + \delta_1(\eta^n))$, найдём вектор $z^n = C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n) - B(\eta^n))x^n$, вычислим вектор $y^{n+1} = x^n - \tau^n z^n$ и минимальный корень η^{n+1} уравнения $R(\eta^{n+1}, y^{n+1}) = 1$, найдём вектор $x^{n+1} = y^{n+1} / \|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$.

Метод 2. Метод наискорейшего спуска. Построим последовательности η^n , x^n , $n = 0, 1, \dots$, согласно следующему алгоритму: зададим вектор y^0 , вычислим минимальный корень η^0 уравнения $R(\eta^0, y^0) = 1$, найдём вектор $x^0 = y^0 / \|y^0\|_{B(\eta^0)}$. Для $n = 0, 1, \dots$ выполним следующие

действия: найдём вектор $z^n = C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n) - B(\eta^n))x^n$, сформируем матрицу Y_n со столбцами x^n и z^n , построим QR -разложение $Y_n = Q_n R_n$, вычислим минимальный корень η^{n+1} уравнения $\psi_n(\eta^{n+1}) = 1$ и вектор $v_n(\eta^{n+1})$, где $\psi_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ — минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор задачи $Q_n^\top A(\eta) Q_n v_n(\eta) = \psi_n(\eta) Q_n^\top B(\eta) Q_n v_n(\eta)$, определим вектор $y^{n+1} = Q_n v_n(\eta^{n+1})$, найдём вектор $x^{n+1} = y^{n+1} / \|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$.

Метод 3. Локально оптимальный метод сопряжённых градиентов. Построим последовательности η^n , x^n , $n = 0, 1, \dots$, согласно следующему алгоритму: зададим вектор y^0 , вычислим минимальный корень η^0 уравнения $R(\eta^0, y^0) = 1$, найдём вектор $x^0 = y^0 / \|y^0\|_{B(\eta^0)}$. Для $n = 0$ выполним следующие действия: найдём вектор $z^n = C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n) - B(\eta^n))x^n$, сформируем матрицу Y_n со столбцами x^n и z^n , построим QR -разложение $Y_n = Q_n R_n$, вычислим минимальный корень η^{n+1} уравнения $\psi_n(\eta^{n+1}) = 1$ и вектор $v_n(\eta^{n+1})$, где $\psi_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ — минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор задачи $Q_n^\top A(\eta) Q_n v_n(\eta) = \psi_n(\eta) Q_n^\top B(\eta) Q_n v_n(\eta)$, определим вектор $y^{n+1} = Q_n v_n(\eta^{n+1})$, найдём вектор $x^{n+1} = y^{n+1} / \|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$. Для $n = 1, 2, \dots$ выполним следующие действия: найдём вектор $z^n = C(\eta^n)^{-1}(A(\eta^n) - B(\eta^n))x^n$, сформируем матрицу Y_n со столбцами x^{n-1} , x^n и z^n , построим QR -разложение $Y_n = Q_n R_n$, вычислим минимальный корень η^{n+1} уравнения $\psi_n(\eta^{n+1}) = 1$ и вектор $v_n(\eta^{n+1})$, где $\psi_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$ — минимальное собственное значение и соответствующий собственный вектор задачи $Q_n^\top A(\eta) Q_n v_n(\eta) = \psi_n(\eta) Q_n^\top B(\eta) Q_n v_n(\eta)$, определим вектор $y^{n+1} = Q_n v_n(\eta^{n+1})$, найдём вектор $x^{n+1} = y^{n+1} / \|y^{n+1}\|_{B(\eta^{n+1})}$.

Теорема 6. Пусть последовательности η^n , x^n , $n = 0, 1, \dots$, вычислены по одному из методов 1–3, $\eta^0 < \lambda_0 + \varkappa$. Тогда имеет место сходимость $\eta^n \rightarrow \lambda_0$, $x^n \rightarrow y^{(0)}$, $(x^n, y^{(0)}) > 0$, при $n \rightarrow \infty$, и справедливы неравенства $\lambda_0 \leq \dots \leq \eta^n \leq \dots \leq \eta^1 \leq \eta^0 < \lambda_0 + \varkappa$.

Доказательство. Докажем сходимость метода 1. Для заданного вектора $v^0 \in \mathbb{H}$, $\|v^0\|_{B(\eta)} = 1$, определим вектор $v^1 \in \mathbb{H}$ и числа ν^0 и ν^1 при фиксированном параметре $\eta \in \Lambda$ по формулам

$$\tilde{v}^1 = v^0 - \tau^0 w^0, \quad \tau^0 = \frac{2}{\delta_0(\eta) + \delta_1(\eta)}, \quad w^0 = C(\eta)^{-1}(A(\eta) - \nu^0 B(\eta))v^0,$$

$$v^1 = \frac{\tilde{v}^1}{\|\tilde{v}^1\|_{B(\eta)}}, \quad \nu^0 = R(\eta, v^0), \quad \nu^1 = R(\eta, v^1).$$

Пусть $\gamma_0(\eta)$ и $\gamma_1(\eta)$ — собственные значения параметрической задачи (9) при $\eta \in M$, $\gamma_0(\eta) < \gamma_1(\eta)$. Предположим, что $\nu^0 < \gamma_1(\eta)$. Тогда согласно [15] справедливы неравенства $\gamma_0(\eta) \leq \nu^1 \leq \nu^0$ и выполняется оценка

$$\frac{\nu^1 - \gamma_0(\eta)}{\gamma_1(\eta) - \nu^1} \leq \rho^2(\eta) \frac{\nu^0 - \gamma_0(\eta)}{\gamma_1(\eta) - \nu^0}, \quad (10)$$

где $0 < \rho(\eta) < 1$, $\rho(\eta) = 1 - (1 - \xi(\eta))(1 - \zeta(\eta))$, $\xi(\eta) = (1 - \delta(\eta))/(1 + \delta(\eta))$, $\delta(\eta) = \delta_0(\eta)/\delta_1(\eta)$, $\zeta(\eta) = \gamma_0(\eta)/\gamma_1(\eta)$, $\eta \in M$.

Обозначим $\rho_0 = 1 - (1 - \xi_0)(1 - \zeta_0)$, $\xi_0 = (1 - d)/(1 + d)$,

$$d = \min_{\eta \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa]} \delta(\eta), \quad \zeta_0 = \max_{\eta \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa]} \zeta(\eta), \quad \eta \in M.$$

Заметим, что $0 < d \leq 1$, $0 < \rho_0 < 1$, $\rho(\eta) \leq \rho_0$ при $\eta \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa]$.

Поскольку $\varphi_{n+1}(\eta) = 1$ при $\eta = \eta^{n+1}$ и $\nu^1 = \varphi_{n+1}(\eta^n) \leq \nu^0 = \varphi_n(\eta^n) = 1$, то $\eta^{n+1} \leq \eta^n$. Также из $\gamma_0(\eta^n) \leq \varphi_n(\eta^n) = 1$ получим $\lambda_0 \leq \eta^n$.

Так как $\lambda_0 \leq \eta^{n+1} \leq \eta^n < \lambda_0 + \varkappa$, то выполняется неравенство

$$\frac{1 - \gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n) - 1} \leq s_n \frac{1 - \varphi_{n+1}(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n) - 1} + \rho_0^2 \frac{1 - \gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n) - 1}, \quad s_n = \frac{\gamma_1(\eta^n) - \gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n) - 1}, \quad (11)$$

для доказательства которого запишем соотношение

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1} = \frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1} - \frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)} + \frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)}.$$

Из неравенств $\lambda_0 \leq \eta^{n+1} \leq \eta^n < \lambda_0 + \varkappa$ получим $\gamma_0(\eta^n) \leq 1$, $\gamma_1(\eta^n) > 1$, $\gamma_1(\eta^n) - \varphi_{n+1}(\eta^n) > 0$. Следовательно, согласно (10) имеем

$$\frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)} \leq \rho_0^2 \frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1}. \quad (12)$$

Для функции $f(t) = (t-a_0)/(a_1-t)$, $t \in (a_0, a_1)$, при фиксированных a_0 и a_1 , $a_0 < a_1$, получим $f'(t) = (a_1-a_0)/(a_1-t)^2$, $t \in (a_0, a_1)$. Поэтому существует число $c \in (a, b)$, $a_0 \leq a \leq b \leq a_1$, такое, что $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \leq f'(b)(b-a)$. Полагая $a_0 = \gamma_0(\eta^n)$, $a_1 = \gamma_1(\eta^n)$, $a = \varphi_{n+1}(\eta^n)$, $b = 1$, где $b = 1 = \varphi_{n+1}(\eta^{n+1}) \geq \varphi_{n+1}(\eta^n) = a$, и используя свойство функции $f(t)$, выводим соотношение

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1} - \frac{\varphi_{n+1}(\eta^n)-\gamma_0(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-\varphi_{n+1}(\eta^n)} \leq s_n \frac{1-\varphi_{n+1}(\eta^n)}{\gamma_1(\eta^n)-1},$$

которое с учётом (12) доказывает требуемое неравенство (11).

Докажем, что $\eta^n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $\eta^{n+1} \leq \eta^n$, $n = 0, 1, \dots$, то существует число $\xi \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa)$ такое, что $\eta^n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда из соотношения $(B(\eta)y, y) \geq g(\eta)\|y\|^2$, $y \in \mathbb{H}$, $\eta \in M$, с непрерывной функцией $g(\eta)$, $\eta \in M$, и из условия нормировки $\|x^n\|_{B(\eta^n)} = 1$, $n = 0, 1, \dots$, выводим существование постоянной $c > 0$ такой, что

$$\|x^n\| \leq \frac{\|x^n\|_{B(\eta^n)}}{\sqrt{g(\eta^n)}} = \frac{1}{\sqrt{g(\eta^n)}} \leq c, \quad n = 0, 1, \dots, \quad c = \max_{\eta \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa]} \frac{1}{\sqrt{g(\eta)}}.$$

Поэтому найдутся вектор $z \in \mathbb{H}$ и подпоследовательность x^{n_i+1} , $i = 1, 2, \dots$, такие, что $x^{n_i+1} \rightarrow z$ при $i \rightarrow \infty$. Сходимость $1 - \varphi_{n_i+1}(\eta^{n_i}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ вытекает из соотношений $0 \leq 1 - \varphi_{n_i+1}(\eta^{n_i}) = R(\eta^{n_i+1}, x^{n_i+1}) - R(\eta^{n_i}, x^{n_i+1}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, где учтено, что $R(\eta^{n_i+1}, u^{n_i+1}) \rightarrow R(\xi, z)$, $R(\eta^{n_i}, u^{n_i+1}) \rightarrow R(\xi, z)$ при $i \rightarrow \infty$.

Теперь из соотношения

$$\frac{1-\gamma_0(\eta^{n_i})}{\gamma_1(\eta^{n_i})-1} \leq s_{n_i} \frac{1-\varphi_{n_i+1}(\eta^{n_i})}{\gamma_1(\eta^{n_i})-1} + \rho_0^2 \frac{1-\gamma_0(\eta^{n_i})}{\gamma_1(\eta^{n_i})-1}$$

при $i \rightarrow \infty$ получим $0 \leq 1 - \gamma_0(\xi) \leq \rho_0^2(1 - \gamma_0(\xi))$, где $0 < \rho_0 < 1$. Поэтому число $\xi \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varkappa)$ является корнем уравнения $1 - \gamma_0(\xi) = 0$ и определяет собственное значение $\xi = \lambda_0$ задачи (8), и справедлива сходимость $\eta^n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как $x^{n_i+1} \rightarrow z$, $1 = R(\eta^{n_i+1}, x^{n_i+1}) = R(\lambda_0, z) = R(\lambda_0, y^{(0)})$ при $i \rightarrow \infty$, то

$$1 = R(\lambda_0, z) = R(\lambda_0, y^{(0)}) = \min_{y \in \mathbb{H}} R(\lambda_0, y).$$

Поэтому $y^{(0)} = z$ является собственным вектором задачи (8), соответствующим собственному значению λ_0 . В силу простоты собственного значения λ_0 выводим сходимость для всей последовательности $x^n \rightarrow y^{(0)}$, $(x^n, y^{(0)}) > 0$, при $n \rightarrow \infty$. Сходимость методов 2 и 3 вытекает из проведённого доказательства, так как каждый элемент последовательности η^n , $n = 0, 1, \dots$, метода 1 не меньше соответствующего элемента последовательности η^n , $n = 0, 1, \dots$, вычисленной по методу 2 или 3. Теорема доказана.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Проиллюстрируем приложения абстрактных результатов теорем 1–6 к обобщённой задаче на собственные значения для самосопряжённого эллиптического дифференциального оператора второго порядка с нелинейной зависимостью от спектрального параметра: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \Omega$, такие, что

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(\lambda, x)\partial_j u(x)) + a_0(\lambda, x)u(x) = b_0(\lambda, x)u(x), \quad x \in \Omega; \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (13)$$

где Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с непрерывной по Липшицу границей Γ [16, с. 66], $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = \overline{1, n}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. При фиксированном $\eta \in \Lambda$ коэффициенты $a_{ij}(\eta, x) = a_{ji}(\eta, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $a_0(\eta, x)$, $b_0(\eta, x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, дифференциальной задачи (13) предполагаются заданными измеримыми вещественными функциями, для которых существуют непрерывные положительные функции $\tilde{\alpha}_1(\eta)$, $\tilde{\alpha}_2(\eta)$, $\tilde{\beta}_1(\eta)$, $\tilde{\beta}_2(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, такие, что для п.в. $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1(\eta) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta, x) \xi_j \xi_i \leq \tilde{\alpha}_2(\eta) \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}, \\ 0 &\leq a_0(\eta, x) \leq \tilde{\alpha}_2(\eta), \quad \tilde{\beta}_1(\eta) \leq b_0(\eta, x) \leq \tilde{\beta}_2(\eta), \end{aligned} \quad (14)$$

$\tilde{\alpha}_2(\eta)/\tilde{\beta}_1(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, $\eta \in \Lambda$. Дополнительно предположим существование непрерывных положительных функций $\tilde{\alpha}_3(\eta, \mu)$, $\tilde{\beta}_3(\eta, \mu)$, $\eta, \mu \in \Lambda$, таких, что для п.в. $x \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(\eta, x) - a_{ij}(\mu, x)) \xi_j \xi_i \right| &\leq \tilde{\alpha}_3(\eta, \mu) \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}, \\ |a_0(\eta, x) - a_0(\mu, x)| &\leq \tilde{\alpha}_3(\eta, \mu), \quad |b_0(\eta, x) - b_0(\mu, x)| \leq \tilde{\beta}_3(\eta, \mu), \end{aligned} \quad (15)$$

$\tilde{\alpha}_3(\eta, \mu) \rightarrow 0$, $\tilde{\beta}_3(\eta, \mu) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \mu$, $\eta, \mu \in \Lambda$.

Обозначим через $L_2(\Omega)$ вещественное пространство Лебега [16, с. 22] с нормой

$$|v|_0 = \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

а через $W_2^1(\Omega)$ — вещественное пространство Соболева [16, с. 44] с нормой

$$\|v\|_1 = (|v|_0^2 + |v|_1^2)^{1/2}, \quad |v|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i v|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Определим вещественное гильбертово пространство $V = \{v: v \in W_2^1(\Omega), v(x) = 0, x \in \Gamma\}$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|_1$. Введём симметричные билинейные формы

$$\begin{aligned} a(\eta, u, v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta, x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) + a_0(\eta, x) u(x) v(x) \right) dx, \\ b(\eta, u, v) &= \int_{\Omega} b_0(\eta, x) u(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (16)$$

для произвольных функций $u, v \in V$, $\eta \in \Lambda$.

Обобщённая постановка дифференциальной задачи на собственные значения (13) приводит к следующей вариационной задаче на собственные значения:

$$\lambda \in \Lambda, \quad u \in V \setminus \{0\}: \quad a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v) \quad \text{для любого } v \in V. \quad (17)$$

Зададим конус K в пространстве V , состоящий из неотрицательных п.в. в области Ω функций $v \in V$. Через B будем обозначать открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть G_1 и G_2 — множества из $\mathbb{R}^n$. Множество G_1 называется *компактно вложенным* в множество G_2 , если замыкание множества G_1 компактно и содержится во внутренней части G_2 ; при этом используется обозначение $G_1 \Subset G_2$.

Из определения множества $\dot{K}$ согласно условию А.8 выводим, что положительные п.в. на Ω функции принадлежат множеству $\dot{K}$. Введём множество $\dot{K}^*$, состоящее из функций u множества $\dot{K}$, удовлетворяющих неравенству $\text{ess. inf}_{x \in B} u(x) > 0$ для любого шара $B \Subset \Omega$. Функции из множества $\dot{K}^*$ являются положительными п.в. функциями, не приближающимися сколь угодно близко к нулю внутри области Ω .

Теорема 7. Пусть выполнены свойства (14), (15) и $\gamma_0(\tau+0) > 1$. Тогда существует положительное простое минимальное собственное значение λ_0 , $\gamma_0(\lambda_0) = 1$, задачи (17), соответствующее единственному нормированному положительному собственному элементу $u_0 \in \dot{K}$, $u_0 = w_0(\lambda_0)$, $a(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$, $b(\lambda_0, u_0, u_0) = 1$.

Доказательство. Проверим выполнение условий А.1–А.9 для задачи (17).

Условие А.1 выполнено, так как пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$ является векторной решёткой [8, с. 149; 17, с. 203].

Учитывая свойства (14) и (15) на коэффициенты задачи (17) и компактность вложения пространства V в пространство $L_2(\Omega)$, убеждаемся в справедливости условий А.2–А.5.

Условие А.6 проверяется непосредственно с помощью определения (16) билинейной формы $b(\eta, u, v)$ и свойства (14) на коэффициенты задачи. Выполнение условия А.7 следует из [17, с. 203].

Множества $\dot{K}$ и $\dot{K}^*$ из условий А.8 и А.9 являются непустыми, так как множество $\dot{K}$ содержит непрерывную функцию из V , положительную п.в. в Ω , а множество $\dot{K}^*$ содержит непрерывную функцию из V , положительную всюду в Ω .

Условие А.9 устанавливается с помощью сильного принципа максимума для дифференциального оператора (13) вариационной задачи (17). Действительно, с помощью замены u на $-u$ из теоремы 8.19 в [18, с. 190] получим следующую формулировку сильного принципа максимума: если $\eta \in \Lambda$, $u \in W_2^1(\Omega)$, $a(\eta, u, v) \geq 0$ при произвольной функции $v \in K$ и для некоторого шара $B \Subset \Omega$ справедливо соотношение

$$\text{ess. inf}_{x \in B} u(x) = \text{ess. inf}_{x \in \Omega} u(x) \leq 0,$$

то функция u постоянна п.в. в Ω .

Пусть теперь $\eta \in \Lambda$, $u \in K \setminus \{0\}$, $a(\eta, u, v) \geq 0$ при произвольной функции $v \in K$. Тогда для любого шара $B \Subset \Omega$ справедливо неравенство $\text{ess. inf}_{x \in B} u(x) > 0$. Для доказательства этого неравенства предположим противное, т.е. существует шар $B \Subset \Omega$ такой, что

$$\text{ess. inf}_{x \in B} u(x) = \text{ess. inf}_{x \in \Omega} u(x) = 0.$$

Тогда согласно сильному принципу максимума функция u равна нулю п.в. в Ω . Полученное противоречие устанавливает выполнение условия А.9.

Таким образом, условия А.1–А.9 выполнены для задачи (17), и поэтому результат теоремы 7 следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Пусть Ω — открытый многогранник в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Определим разбиение $\mathcal{T}_h$ множества $\bar{\Omega}$ на симплицальные конечные элементы с равным h максимальным диаметром. Предположим, что выполнены следующие требования [19, с. 48, 55, 61].

Условие С.1. Множество $\bar{\Omega}$ разбито на замкнутые n -симплексы e в пространстве $\mathbb{R}^n$: $\bar{\Omega} = \bigcup_{e \in \mathcal{T}_h} e$.

Условие С.2. Любая грань каждого n -симплекса e_1 является подмножеством границы Γ или гранью другого n -симплекса e_2 .

Условие С.3. Найдётся не зависящая от h постоянная σ такая, что $h_e/\rho_e \leq \sigma$ для любого $e \in \bigcup_h \mathcal{T}_h$, $h_e = \text{diam}(e)$, $\rho_e = \sup_{B \in \mathcal{B}(e)} \text{diam}(B)$, где $\text{diam}(e)$ — диаметр множества e , $\mathcal{B}(e)$ — множество всех замкнутых шаров из e .

Определим семейство конечномерных подпространств V_h пространства V размерности $N+1$, $N = N_h$, как множество непрерывных функций из пространства V , которые на каждом элементе $e \in \mathcal{T}_h$ являются полиномами степени не выше первой.

Для приближённого вычисления интеграла на конечном элементе e от непрерывной функции $\varphi(x)$, $x \in e$, применим квадратурную формулу [19, с. 181] по центру тяжести элемента $\int_e \varphi(x) dx \approx c_e \varphi(x_e)$, где $c_e = \text{meas}(e)$ — мера элемента e , x_e — центр тяжести элемента e . Эта квадратурная формула точна для полиномов степени не выше первой. Обозначим $E_e(\varphi) = \int_e \varphi(x) dx - c_e \varphi(x_e)$. Тогда $E_e(\varphi) = 0$ для любого полинома $\varphi \in \mathcal{P}_1(e)$, где $\mathcal{P}_1(e)$ — пространство полиномов степени не выше единицы.

Предположим, что для фиксированного $\eta \in \Lambda$ функции $a_{ij}(\eta, x) = a_{ji}(\eta, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $a_0(\eta, x)$, $b_0(\eta, x)$, $x \in e$, являются непрерывными для каждого элемента $e \in \mathcal{T}_h$. Зададим симметричные билинейные формы $a_h(\eta): V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ и $b_h(\eta): V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ для произвольных функций $u^h, v^h \in V_h$, $\eta \in \Lambda$, по формулам

$$\begin{aligned} a_h(\eta, u^h, v^h) &= \sum_{e \in \mathcal{T}_h} c_e \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\eta, x_e) \partial_j u^h(x_e) \partial_i v^h(x_e) + a_0(\eta, x_e) u^h(x_e) v^h(x_e) \right), \\ b_h(\eta, u^h, v^h) &= \sum_{e \in \mathcal{T}_h} c_e b_0(\eta, x_e) u^h(x_e) v^h(x_e). \end{aligned} \quad (18)$$

Введём конечномерную задачу на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра:

$$\lambda^h \in \Lambda, \quad u^h \in V_h \setminus \{0\}: \quad a_h(\lambda^h, u^h, v^h) = b_h(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \text{для любого } v^h \in V_h. \quad (19)$$

Теорема 8. Пусть выполнены свойства (14), (15) и $\gamma_0(\tau+0) > 1$. Тогда существует положительное минимальное собственное значение λ_0^h , $\gamma_0^h(\lambda_0^h) = 1$, задачи (19), соответствующее нормированному собственному элементу $u_0^h = w_0^h(\lambda_0^h)$, $a_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$, $b_h(\lambda_0^h, u_0^h, u_0^h) = 1$.

Доказательство. Из свойств (14), (15) и свойств квадратурной формулы выводим справедливость условий В.2, В.3, В.5 билинейных форм (18), поэтому результат теоремы 8 вытекает из теоремы 2. Теорема доказана.

Для элемента $e \in \mathcal{T}_h$ и $i = \overline{0, m}$, $m \geq 0$, будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} |v|_{0,e} &= \left(\int_e (v(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{m,e} = \left(\sum_{i=0}^m |v|_{i,e}^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_{i,e} = \left(\sum_{|\alpha|=i} |\partial^\alpha v|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, \\ |v|_{0,\infty,e} &= \text{ess. sup}_{x \in e} |v(x)|, \quad \|v\|_{m,\infty,e} = \max_{i=0,m} |v|_{i,\infty,e}, \quad |v|_{i,\infty,e} = \max_{|\alpha|=i} |\partial^\alpha v|_{0,\infty,e}, \end{aligned}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами α_i , $i = \overline{1, n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Будем применять

также стандартные обозначения $W_2^2(\Omega)$ и $W_\infty^m(e)$ при $m = 1, 2$ для функциональных пространств [16, с. 44].

Теорема 9. Пусть выполнены свойства (14), (15) и $\gamma_0(\tau + 0) > 1$. Предположим, что для фиксированного $\eta \in \Lambda$ функции $a_{ij}(\eta, x) = a_{ji}(\eta, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $a_0(\eta, x)$, $b_0(\eta, x)$, $x \in e$, принадлежат пространству $W_\infty^1(e)$ для каждого элемента $e \in \mathcal{T}_h$. Тогда имеют место сходимости $\lambda_0^h \rightarrow \lambda_0$ при $h \rightarrow 0$, $|u_0^h - u_0|_1 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Доказательство. Из [19, с. 137] следует справедливость условия В.1.

Если $d \in W_\infty^1(e)$, то согласно [20] выполняется оценка $|E_e(d\varphi\psi)| \leq ch \|d\|_{1,\infty,e} \|\varphi\|_{1,e} \|\psi\|_{0,e}$ для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_1(e)$. Поэтому для произвольной функции $v^h \in V_h$ получим

$$\begin{aligned} & |a_h(\eta, v^h, v^h) - a(\eta, v^h, v^h)| = \\ & = \left| \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n E_e(a_{ij} \partial_j v^h \partial_i v^h) + \sum_{e \in \mathcal{T}_h} E_e(a_0 v^h v^h) \right| \leq \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n |E_e(a_{ij} \partial_j v^h \partial_i v^h)| + \sum_{e \in \mathcal{T}_h} |E_e(a_0 v^h v^h)| \leq \\ & \leq ch \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n \|\partial_j v^h\|_{1,e} \|\partial_i v^h\|_{0,e} + ch \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|v^h\|_{1,e} \|v^h\|_{0,e} \leq ch \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|v^h\|_{1,e}^2 \leq ch \|v^h\|_1^2 \leq ch |v^h|_1^2, \\ & |b_h(\eta, v^h, v^h) - b(\eta, v^h, v^h)| = \left| \sum_{e \in \mathcal{T}_h} E_e(b_0 v^h v^h) \right| \leq ch \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|v^h\|_{1,e} \|v^h\|_{0,e} \leq ch \|v^h\|_1^2 \leq ch |v^h|_1^2. \end{aligned}$$

Тогда выводим

$$\begin{aligned} \|(a_h(\eta) - a(\eta))|_{V_h \times V_h}\| &= \sup_{v^h \in V_h, |v^h|_1=1} |a_h(\eta, v^h, v^h) - a(\eta, v^h, v^h)| \leq ch, \\ \|(b_h(\eta) - b(\eta))|_{V_h \times V_h}\| &= \sup_{v^h \in V_h, |v^h|_1=1} |b_h(\eta, v^h, v^h) - b(\eta, v^h, v^h)| \leq ch. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено условие аппроксимации В.4 для приближённых билинейных форм. Результат сходимости теперь вытекает из теоремы 3. Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть выполнены свойства (14), (15), $\gamma_0(\tau + 0) > 1$ и существует число $\kappa > 0$ такое, что $-\Delta(\lambda_0, \eta) \geq c_0 > 0$ при любом $\eta \in (\lambda_0 - \kappa, \lambda_0) \cup (\lambda_0, \lambda_0 + \kappa)$. Предположим, что $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, для фиксированного $\eta \in \Lambda$ функции $a_{ij}(\eta, x) = a_{ji}(\eta, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $a_0(\eta, x)$, $b_0(\eta, x)$, $x \in e$, принадлежат пространству $W_\infty^2(e)$ для каждого элемента $e \in \mathcal{T}_h$, кроме того, существуют непрерывные положительные функции $\bar{\alpha}_3(\eta, \mu)$, $\bar{\beta}_3(\eta, \mu)$, $\eta, \mu \in \Lambda$, такие, что $\tilde{\alpha}_3(\eta, \mu) = \bar{\alpha}_3(\eta, \mu) |\eta - \mu|$, $\tilde{\beta}_3(\eta, \mu) = \bar{\beta}_3(\eta, \mu) |\eta - \mu|$, $\eta, \mu \in \Lambda$. Тогда выполняются оценки погрешности $|\lambda_0^h - \lambda_0| \leq ch^2$, $|u_0^h - u_0|_1 \leq ch$.

Доказательство. Если $d \in W_\infty^2(e)$, то согласно [20] для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_1(e)$ справедлива оценка $|E_e(d\varphi\psi)| \leq ch^2 \|d\|_{2,\infty,e} \|\varphi\|_{1,e} \|\psi\|_{1,e}$. Поэтому для произвольных функций $u^h, v^h \in V_h$ получим

$$\begin{aligned} & |a_h(\lambda_0, u^h, v^h) - a(\lambda_0, u^h, v^h)| = \left| \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n E_e(a_{ij} \partial_j u^h \partial_i v^h) + \sum_{e \in \mathcal{T}_h} E_e(a_0 u^h v^h) \right| \leq \\ & \leq \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n |E_e(a_{ij} \partial_j u^h \partial_i v^h)| + \sum_{e \in \mathcal{T}_h} |E_e(a_0 u^h v^h)| \leq \\ & \leq ch^2 \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n \|\partial_j u^h\|_{1,e} \|\partial_i v^h\|_{1,e} + ch^2 \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e} \|v^h\|_{1,e} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq ch^2 \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^n \|u^h\|_{1,e} \|v^h\|_{1,e} + ch^2 \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e} \|v^h\|_{1,e} \leq \\
 &\leq ch^2 \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e} \|v^h\|_{1,e} \leq ch^2 \|u^h\|_1 \|v^h\|_1 \leq ch^2 |u^h|_1 |v^h|_1, \\
 &|b_h(\lambda_0, u^h, v^h) - b(\lambda_0, u^h, v^h)| = \left| \sum_{e \in \mathcal{T}_h} E_e(b_0 u^h v^h) \right| \leq \sum_{e \in \mathcal{T}_h} |E_e(b_0 u^h v^h)| \leq \\
 &\leq ch^2 \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \|u^h\|_{1,e} \|v^h\|_{1,e} \leq ch^2 \|u^h\|_1 \|v^h\|_1 \leq ch^2 |u^h|_1 |v^h|_1.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 \delta_{1a}^h(u_0) &= \sup_{v^h \in V_h, |v^h|_1=1} |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq ch^2, \\
 \delta_{1b}^h(u_0) &= \sup_{v^h \in V_h, |v^h|_1=1} |b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, v^h)| \leq ch^2, \\
 \delta_{2a}^h(u_0) &= |a_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) - a(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0)| \leq ch^2, \\
 \delta_{2b}^h(u_0) &= |b_h(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0) - b(\lambda_0, P_h(\lambda_0)u_0, P_h(\lambda_0)u_0)| \leq ch^2, \\
 \delta_1^h(u_0) &= \delta_{1a}^h(u_0) + \delta_{1b}^h(u_0) \leq ch^2, \quad \delta_2^h(u_0) = \delta_{2a}^h(u_0) + \delta_{2b}^h(u_0) \leq ch^2.
 \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что $|P_h(\lambda_0)u|_1 \leq c$. Действительно, $|u - P_h(\lambda_0)u|_1 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, тогда $||u|_1 - |P_h(\lambda_0)u|_1| \leq |u - P_h(\lambda_0)u|_1 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, следовательно, $|P_h(\lambda_0)u|_1 \rightarrow |u|_1$ при $h \rightarrow 0$. Поэтому $|P_h(\lambda_0)u|_1 \leq c$.

Согласно [19, с. 136, 147, 148] для $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ имеем $\varepsilon_h(u_0) \leq ch$. Следовательно, по теореме 4 имеем $|\lambda_0^h - \lambda_0| \leq c[\delta_2^h(u_0) + (\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0))^2] \leq ch^2$, $|u_0^h - u_0|_1 \leq c(\varepsilon_h(u_0) + \delta_1^h(u_0)) \leq ch$. Таким образом, требуемые оценки теоремы доказаны.

Для иллюстрации установленных теоретических результатов приведём результаты численных экспериментов. В задаче (17) с билинейными формами (16) при $n=2$, $\Lambda=(0, \infty)$ возьмём область в виде усечённого квадрата и определим коэффициенты по формулам $a_{11}(\eta, x) = a_{22}(\eta, x) = p(\eta s(x))$, $a_{12}(\eta, x) = a_{21}(\eta, x) = 0$, $a_0(\eta, x) = 0$, $b_0(\eta, x) = r(\eta s(x))$, $p(\eta) = 0.3(\eta+1)^2$, $r(\eta) = e^\eta$, $s(x) = \cos(x_1) \cos(x_2)$. Полученная задача решалась с помощью схемы (19) на последовательности вложенных сеток уровней $m = \overline{1, 8}$. На рис. 1 приведены начальная сетка уровня $m=1$ и сетки последующих уровней $m=2, 3$, полученные измельчением сетки предыдущего уровня.

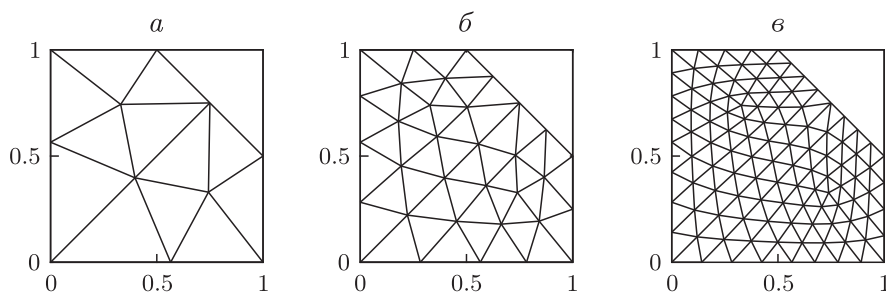
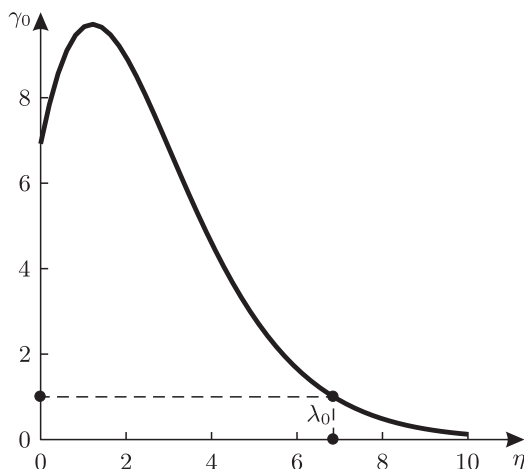
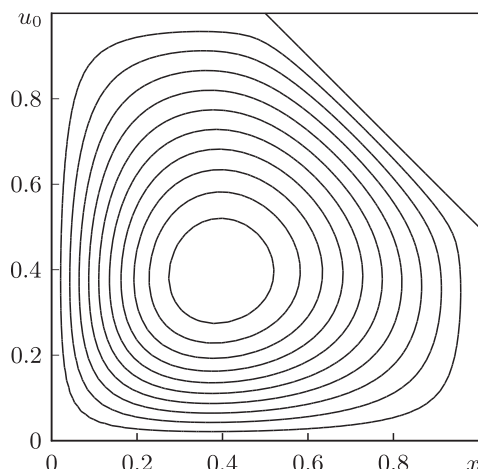


Рис. 1. Вложенные сетки: а — $m=1$; б — $m=2$; в — $m=3$.

На рис. 2 приведён график функции $\gamma_0(\eta)$ и отмечено минимальное собственное значение λ_0 , найденное на сетке уровня $m = 5$. На рис. 3 показаны изолинии приближённой положительной собственной функции $u_0(x)$ на сетке уровня $m = 5$. Порядки сходимости ν_m для минимального собственного значения λ_0 вычислялись по формуле $\nu_m = \log_2((\lambda_0^{(m-2)} - \lambda_0^{(m-1)})/(\lambda_0^{(m-1)} - \lambda_0^{(m)}))$, где $\lambda_0^{(m)}$ — приближение для минимального собственного значения λ_0 на сетке уровня m . Полученные численные результаты (таблица) показывают хорошее согласование с теоретическими результатами теоремы 10.

Рис. 2. График функции $\gamma_0(\eta)$.Рис. 3. Изолинии собственной функции $u_0(x)$.Таблица. Порядки сходимости для разных m

m	3	4	5	6	7	8
$\lambda_0^{(m)}$	6.8887	6.8643	6.8581	6.8565	6.8561	6.8560
ν_m	0.7626	1.8362	1.9580	1.9876	1.9956	1.9981

Графики погрешности итерационных методов 1–3 в зависимости от числа итераций приведены на рис. 4, когда элементы матрицы $C(\eta) = C$ порядка $N+1$ выбирались по формуле

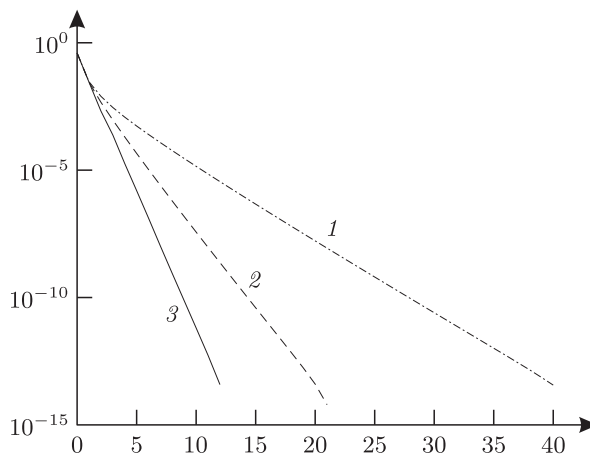


Рис. 4. Погрешность итерационных методов: 1 — метод 1, 2 — метод 2, 3 — метод 3.

$c_{ij} = c_h(\varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = \overline{0, N}$, $\eta \in \Lambda$, для билинейной формы $c_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемой при произвольных функциях $u^h, v^h \in V_h$ по правилу

$$c_h(u^h, v^h) = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} c_e \sum_{i=1}^n \partial_i u^h(x_e) \partial_i v^h(x_e),$$

φ_i , $i = \overline{0, N}$, — базисные функции пространства V_h [19, с. 63]. Численные эксперименты демонстрируют однозначное превосходство итерационного метода 3 по скорости сходимости.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания и предложения по улучшению оформления результатов статьи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллин, И.Ш. Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения / И.Ш. Абдуллин, В.С. Желтухин, Н.Ф. Кашапов. — Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 2000. — 348 с.
2. Соловьев, С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.
3. Соловьев, С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.
4. Solov'ev, S.I. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems / S.I. Solov'ev // Linear Algebra Appl. — 2006. — V. 41, № 1. — P. 210–229.
5. Богатов, Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е–1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского / Е.М. Богатов // Прикл. математика & Физика. — 2020. — Т. 52, № 2. — С. 105–127.
6. Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. — М. : Наука, 1967. — 416 с.
7. Gazzola, F. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains / F. Gazzola, H.-C. Grunau, G. Sweers. — Berlin : Springer, 2010. — 423 p.
8. Bátkai, A. Positive operator semigroups. From finite to infinite dimensions / A. Bátkai, M.K. Fijař, A. Rhandi. — Cham : Springer, 2017. — 364 p.
9. Воеводин, В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. — М. : Наука, 1980. — 400 с.
10. Dautov, R.Z. The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly / R.Z. Dautov, A.D. Lyashko, S.I. Solov'ev // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1994. — V. 9, № 5. — P. 417–427.
11. Samsonov, A.A. The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem / A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — V. 1158. — Art. 042011.
12. Samsonov, A.A. Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter / A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — V. 1158. — Art. 042012.
13. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 552 с.
14. Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт. — М. : Мир, 1983. — 384 с.
15. Knyazev, A.V. A geometric theory for preconditioned inverse iteration III: a short and sharp convergence estimate for generalized eigenvalue problems / A.V. Knyazev, K. Neymeyr // Linear Algebra Appl. — 2003. — V. 358, № 1–3. — P. 95–114.
16. Adams, R.A. Sobolev spaces / R.A. Adams. — New York : Academic Press, 1975. — 268 p.
17. Sauvigny, F. Partial Differential Equations 2. Functional Analytic Methods / F. Sauvigny. — London : Springer-Verlag, 2012. — 453 p.

18. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер ; пер. с англ. Л.Н. Купцова ; под ред. А.К. Гущина. — М. : Наука, 1989. — 464 с.
19. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле ; пер. с англ. Б.И. Квасова. — М. : Мир, 1980. — 512 с.
20. Banerjee, U. Estimation of the effect of numerical integration in finite element eigenvalue approximation / U. Banerjee, J.E. Osborn // Numer. Math. — 1990. — V. 56. — P. 735–762.

COMPUTATION OF THE LEADING EIGENVALUE AND THE CORRESPONDING EIGENELEMENT OF EIGENVALUE PROBLEMS WITH NONLINEAR DEPENDENCE ON THE SPECTRAL PARAMETER

P. S. Solov'ev¹, S. I. Solov'ev²

Kazan (Volga region) Federal University, Russia
 e-mail: ¹pavel.solovev.kpfu@mail.ru, ²sergey.solovev.kpfu@mail.ru

The paper studies the symmetric eigenvalue problem with nonlinear dependence on the spectral parameter in a Hilbert space which is a vector lattice with a cone of positive elements. The existence of a positive simple minimum eigenvalue corresponding to a single normalised positive eigenelement is established. The approximation of the problem in a finite-dimensional subspace is investigated. Results on the convergence and error of approximations to the minimum eigenvalue and the corresponding positive eigenelement are obtained. Computational methods for solving matrix eigenvalue problems with nonlinear dependence on the spectral parameter are developed and justified. The results of numerical experiments illustrating theoretical conclusions are given.

Keywords: eigenvalue, positive eigenelement, eigenvalue problem, Hilbert space, vector lattice, cone, finite-dimensional approximation, iterative method, finite element method.

REFERENCES

1. Abdullin, I.Sh., Zheltukhin, V.S., and Kashapov, N.F., *Vysokochastotnaya plazmenno-struinaya obrabotka materialov pri ponizhennykh davleniyakh. Teoriya i praktika primeneniya* (Radio-Frequency Plasma-Jet Processing of Materials at Reduced Pressures. Theory and Practice of Application), Kazan: Izd. Kazan. Univ., 2000.
2. Solov'ev, S.I., Approximation of variational eigenvalue problems, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
3. Solov'ev, S.I., Approximation of nonlinear spectral problems in the Hilbert space, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 934–947.
4. Solov'ev, S.I., Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems, *Linear Algebra Appl.*, 2006, vol. 415, no. 1, pp. 210–229.
5. Bogatov, E.M., On the history of the positive operators (1900s–1960s) and the contribution of M.A. Krasnosel'skii, *Applied Mathematics & Physics*, 2020, vol. 52, no. 2, pp. 105–127.
6. Vulikh, B.Z., *Vvedenie v funktsional'nyi analiz* (Introduction to Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1967.
7. Gazzola, F., Grunau, H.-C., and Sweers, G., *Polyharmonic Boundary Value Problems. Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*, Berlin: Springer, 2010.
8. Bátkai, A., Fijavž, M.K., and Rhandi, A., *Positive Operator Semigroups. From Finite to Infinite Dimensions*, Cham: Springer, 2017.
9. Voevodin, V.V., *Lineinaya algebra* (Linear Algebra), Moscow: Nauka, 1980.
10. Dautov, R.Z., Lyashko, A.D., and Solov'ev, S.I., The bisection method for symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1994, vol. 9, no. 5, pp. 417–427.
11. Samsonov, A.A., Solov'ev, P.S., and Solov'ev, S.I., The bisection method for solving the nonlinear bar eigenvalue problem, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, art. 042011.
12. Samsonov, A.A., Solov'ev, P.S., and Solov'ev, S.I., Spectrum division for eigenvalue problems with nonlinear dependence on the parameter, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, art. 042012.
13. Gantmakher, F.R., *Teoriya matrits* (Theory of Matrices), Moscow: Nauka, 1988.
14. Parlett, B., *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1980.

15. Knyazev, A.V. and Neymeyr, K., A geometric theory for preconditioned inverse iteration III: a short and sharp convergence estimate for generalized eigenvalue problems, *Linear Algebra Appl.*, 2003, vol. 358, no. 1–3, pp. 95–114.
16. Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.
17. Sauvigny, F., *Partial Differential Equations 2. Functional Analytic Methods*, London: Springer-Verlag, 2012.
18. Gilbarg, D. and Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Heidelberg: Springer, 1977.
19. Ciarlet P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Amsterdam: North Holland, 1978.
20. Banerjee, U. and Osborn, J.E., Estimation of the effect of numerical integration in finite element eigenvalue approximation, *Numer. Math.*, 1990, vol. 56, pp. 735–762.

УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© Б. Н. Четверушкин¹, А. Е. Луцкий², Е. В. Шильников³

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

e-mail: ¹chetver@imamod.ru, ²allutsky@yandex.ru, ³shilnikov@imamod.ru

Поступила в редакцию 27.02.2024 г., после доработки 12.03.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Для построения дополнительных уравнений для описания турбулентных моментов применена кинетическая модель, используемая для вывода квазигазодинамической системы уравнений. Модель построена на примере пространственно-двумерной задачи для описания течения слабосжимаемого газа.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, турбулентное течение, слой смешения, замыкание системы осреднённых уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064124070109, EDN: KNDPWI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимость моделирования турбулентных течений обусловлена появлением в уравнениях, характеризующих движение среды, дополнительных неизвестных пульсационных моментов. Не вдаваясь в подробности хорошо известного определения [1, § 120] пульсационных моментов, приведём следующую систему уравнений, описывающую пространственно-двумерное осреднённое по времени турбулентное течение слабо сжимаемого изотермического газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p + \rho \overline{\Delta u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p + \rho \overline{\Delta v^2})}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Здесь u и v — осреднённые значения скорости в направлениях Ox и Oy соответственно; ρ — плотность; p — давление; μ — коэффициент молекулярной вязкости; $\rho \overline{\Delta u^2}$, $\rho \overline{\Delta v^2}$, $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ — пульсационные моменты.

Пульсационные моменты $\rho \overline{\Delta u^2}$, $\rho \overline{\Delta v^2}$ являются малыми добавками к давлению, не оказывающими существенного влияния на картину течения. Не учитывая их в (1)–(3), получаем систему, состоящую из трёх уравнений относительно четырёх переменных ρ , u , v и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

Далее будем исследовать систему (4)–(6). Проблема замыкания системы уравнений с учётом пульсационных моментов является наиболее важной при описании турбулентных течений. Самым распространённым является представление вклада пульсационных моментов с помощью модели турбулентной вязкости [1, § 122], которая в нашем случае будет иметь вид

$$\rho \overline{\Delta u \Delta v} = -\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Ключевым в этом подходе является вид турбулентной вязкости μ_T , для описания которой используется большое количество моделей [2–10], в том числе и широко применяемая (κ – ε)-модель (см., например, работу А.Н. Колмогорова [10, гл. 6.3]). Эти модели позволяют проводить расчёты конкретных течений, содержащих турбулентные зоны. Однако, как правило, они ограничены узким набором параметров и геометрических конфигураций течения, а также большим набором настроечных параметров, выбранных в ходе вычислительного эксперимента.

В нашей работе на основе кинетической модели, ранее используемой для построения квазигазодинамической (КГД) системы уравнений [11, § 5], получено дополнительное уравнение для пульсационного момента $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$, позволяющее замкнуть систему (4)–(6).

2. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННЫХ МОМЕНТОВ

На аналогию между движением молекул и дрейфом небольших турбулентных вихрей-молей было обращено внимание ещё в начале XX века [1, § 122]. Согласно этому выводу среднее время существования молей аналогично характерному времени τ между столкновениями молекул, а характерный путь l_T , пройденный молекул до исчезновения, соответствует длине свободного пробега молекул l . По аналогии с кинетической теорией газов, определяющей молекулярную вязкость как

$$\mu = \rho \frac{lc^2}{2} = \rho \frac{\tau c}{2},$$

где c — скорость звука, турбулентная вязкость μ_T определялась*) по формуле

$$\mu_T = \rho \frac{l_T v_T}{2} = \rho \frac{\tau_T v_T^2}{2}, \quad (7)$$

где v_T — характерная скорость дрейфа молей.

В нашей работе мы используем кинетическую модель, на основе которой получена КГД система уравнений. Суть этой модели заключается в следующем. На момент времени $t = t^j$ распределение молекул по скоростям $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (\xi_x, \xi_y)$ характеризуется локально максвелловской функцией

$$f = f_0 = \frac{\rho(t, \bar{x})}{(2\pi RT(t, \bar{x}))^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(\bar{\xi} - \bar{u}(t, \bar{x}))^2}{2RT} \right\},$$

слабо меняющейся на расстоянии длины свободного пробега l ($l/L \ll 1$, где L — характерный размер задачи). Затем в течение времени τ возникает бесстолкновительный разлёт и на момент времени $t^{j+1} = t^j + \tau$ происходит мгновенная максвеллизация и процедура повторяется вновь.

*) Вопрос эффективного применения этой модели заключается в определении v_T, l_T или τ_T .

Функция распределения f^{j+1} на новом слое по времени до максвеллизации связана с локально-максвелловской функцией при $t = t^j$ соотношением*)

$$f(t^{j+1}, \bar{x}, \bar{\xi}) = f_0(t^j, \bar{x} - \tau \bar{\xi}, \bar{\xi}).$$

Учитывая условие $\text{Kn} = l/L \ll 1$ (Kn — число Кнудсена), можно с точностью до $O(\text{Kn}^2)$ записать балансное уравнение [11, § 5]

$$\frac{f^{j+1} - f_0^j}{\tau} + \text{div}(\bar{\xi} f_0^j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi_i \xi_k \frac{\tau}{2} \frac{\partial f_0^j}{\partial x_k} \right). \quad (8)$$

КГД систему получим, умножив уравнение (8) последовательно на сумматорные инварианты

$$\varphi(\bar{\xi}) = 1, \bar{\xi}, \bar{\xi}^2/2 \quad (9)$$

и проинтегрировав затем по пространству скоростей.

Выпишем КГД систему на примере пространственно-одномерного случая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) \right), \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + p) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + 3pu) \right), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} (u(E + p)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2(E + 2p)) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} (E + p) \right) \right), \quad \tau = \frac{2\mu}{p}. \end{aligned}$$

Здесь E — полная энергия.

КГД система отличается от системы уравнений Навье–Стокса на члены порядка малости $O(\text{Kn}^2)^{**}$. Этот факт подтверждается многочисленными как расчётами, так и теоремами [12, 13]. Следует отметить, что сами уравнения Навье–Стокса получены из кинетического уравнения Больцмана с той же точностью $O(\text{Kn}^2)$ [14]. Применение КГД системы имеет существенные преимущества при использовании вычислительных систем высокой и сверх-высокой производительности [15], позволяя повысить устойчивость полученных на её основе явных разностных схем.

Воспользуемся балансным уравнением (8) для получения дополнительного уравнения с целью замкнуть систему (4)–(6). Умножим уравнение (8) на $\xi_x \xi_y$ и проинтегрируем по всем скоростям молекул. Эта процедура не вызывает затруднений из-за того что в (8) f^j полагается равной f_0 . В этом наблюдается отличие от уравнения Больцмана, в правой части которого стоит сложный интеграл столкновений, обращающийся в нуль лишь при интегрировании с сумматорными инвариантами (9).

Дополнительные уравнения для пульсационных моментов в принципе можно получить, умножая исходные уравнения Навье–Стокса на скорость и проводя процедуру осреднения по времени. Однако при этом появляются дополнительные моменты типа $\Delta u_l (\partial \Delta u_k / \partial x_l)$ и $(\partial \Delta u_l / \partial x_k) (\partial \Delta u_k / \partial x_l)$, препятствующие получению замкнутой системы уравнений. При использовании балансного уравнения (8) таких моментов нет, что является его преимуще-

*) Здесь не рассматривается воздействие на молекулы внешнего поля.

**) Число Кнудсена можно определить как отношение длины свободного пробега l к характерному размеру задачи L .

ством. Тем не менее появляется и ряд проблем, связанных с интегрированием уравнения (8) с весом $\xi_x \xi_y$.

Моменты членов в уравнении (8), связанных с интегрированием f_0^j , легко могут быть получены. Однако в отличие от КГД системы, когда моменты f^{j+1} с сумматорными инвариантами известны, момент $\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\bar{\xi}$ заранее неизвестен и зависит от вида функции f^{j+1} .

Время τ в уравнении (8) уже не является временем между столкновениями молекул и должно отражать турбулентное время τ_T существования молей.

3. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Для определения турбулентной вязкости μ_T воспользуемся аналогом формулы (7). Выберем аналог v_T^2 в виде $|\overline{\Delta u \Delta v}|$. В качестве времени τ_T выберем характерную величину $|\partial u / \partial y + \partial v / \partial x|^{-1}$. Тогда турбулентная вязкость μ_T примет вид

$$\mu_T = \left| \frac{\rho \overline{\Delta u \Delta v}}{2} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{-1}, \quad (10)$$

и соответственно пульсационный момент $\overline{\Delta u \Delta v}$ может быть представлен в виде

$$\rho \overline{\Delta u \Delta v} = -\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Используемая при определении μ_T величина $|\partial u / \partial y + \partial v / \partial x|$ связана с характерным значением соответствующих производных. Однако, как показывают результаты вычислительного эксперимента, даже значительный разброс её величины не влияет на конечные значения осреднённых скоростей.

Момент $\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\bar{\xi}$ функции f запишем в виде

$$\int f^{j+1} \xi_x \xi_y d\bar{\xi} = \int f^{j+1} uv d\bar{\xi} + \int f^{j+1} c_x c_y d\bar{\xi},$$

где c_x и c_y — значения тепловых и хаотических скоростей

$$c_x = \xi_x - u, \quad c_y = \xi_y - v.$$

Величину $\int f^{j+1} c_x c_y d\bar{\xi}$ представим с помощью двух членов разложения:

$$\int f^{j+1} c_x c_y d\bar{\xi} = \int \left(\tau_T f_1 + \frac{\tau_T^2}{t_{\text{газ}}} f_2 \right) c_x c_y d\bar{\xi}. \quad (11)$$

Выберем τ_T по аналогии с временем τ и магнитным временем τ_M , присутствующих при квазигазодинамическом аналоге уравнения магнитной индукции [15]^{*)}

$$\tau = \frac{2\mu}{p}, \quad \tau_M = \frac{2\nu}{p + B^2 / (8\pi)},$$

где ν — магнитная вязкость, B — вектор напряжённости магнитного поля,

$$\tau_T = \frac{2\mu_T}{p}. \quad (12)$$

^{*)} Для получения магнитогазодинамического (МГД) аналога КГД системы использовалась комплекснозначная функция $f_{\text{ом}} = \rho(2\pi RT)^{-3/2} \exp\{-(\xi_k - u_k - iB_k(4\pi\rho)^{-1/2})(2RT)^{-1}\}$, где i — мнимая единица. МГД аналог КГД системы применялся для решения задач астрофизики и охлаждения ядерного реактора [15].

В кинетической теории следующим членом разложения по малому параметру $\tau/t_{\text{газ}}$ является навье-стоксовская функция f_{NS} , интеграл от которой $\int \tau f_{NS} c_i c_k d\bar{\xi}$ приводит к тензору вязких напряжений. По аналогии выберем $f_1 = h f_{NS}$. Коэффициент пропорциональности h определим так, чтобы в конечном уравнении, описывающем изменение пульсационного момента, отсутствовали члены по порядку величины большие, чем μ , μ_T и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$. Отметим, что такое условие выполняется и для $(\kappa-\varepsilon)$ -модели.

Определим теперь функцию f_2 . Учитывая определение турбулентной вязкости μ_T (10) и τ_T (12), получаем

$$\frac{\tau_T}{t_{\text{газ}}} \sim |\rho \overline{\Delta u \Delta v}|.$$

Величина $\tau_T t_{\text{газ}}^{-1} \int c_x c_y f_2 d\bar{\xi}$ должна иметь размерность, совпадающую с $\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})/\partial t$ в уравнении, описывающем изменение $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ по времени. Этому условию будет удовлетворять функция

$$f_2 \sim \frac{1}{p} f_{NS}.$$

В таком случае интеграл $\tau_T t_{\text{газ}}^{-1} \int c_x c_y f_2 d\bar{\xi}$ будет пропорционален $|\rho \overline{\Delta u \Delta v}|(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$. Учитывая аналогию $|\overline{\Delta u \Delta v}|$ и c^2 , а также смену знака членов при разложении функции распределения по малому параметру, окончательно получаем

$$\frac{\tau_T}{t_{\text{газ}}} \int c_x c_y f_2 d\bar{\xi} = -\frac{1}{2} |\rho \overline{\Delta u \Delta v}| \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Ввиду предположения о бесстолкновительном разлёте функции f_1 и f_2 зависят от газодинамических параметров предыдущего шага по времени, в том числе и от входящих в них величин хаотических скоростей $c_x = \xi_x - u^j$ и $c_y = \xi_y - v^j$. Однако в интеграл (11) входят величины c_x и c_y , определяемые с помощью значений скоростей на новом шаге по времени $t = t^{j+1}$. Тем не менее этот факт не влияет на конечный результат.

По аналогии с f_{NS} представим интересующий момент $\tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\bar{\xi}$ в виде

$$\tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_{NS} d\bar{\xi} = h \tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^j f_0^j d\bar{\xi}.$$

Учитывая, что $c_x^{j+1} = c_x^j - \tau_T \partial(u + \Delta u)/\partial t$, $c_y^{j+1} = c_y^j - \tau_T \partial(v + \Delta v)/\partial t$, величины $c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j$ запишем как

$$c_x^{j+1} c_y^{j+1} c_x^j c_y^j = c_x^{2j} c_y^{2j} - \tau_T \frac{\partial(u + \Delta u)}{\partial t} c_y^j c_x^{2j} - \tau_T \frac{\partial(v + \Delta v)}{\partial t} c_x^j c_y^{2j} + \tau_T^2 \frac{\partial(u + \Delta u)}{\partial t} \frac{\partial(v + \Delta v)}{\partial t}. \quad (14)$$

Моменты всех членов с локально-максвелловской функцией f_0^j в правой части (14), кроме первого, обратятся в нуль либо будут второго порядка малости по τ_T , поэтому

$$\tau_T \int c_x^{j+1} c_y^{j+1} f_1 d\bar{\xi} = \frac{h p \tau_T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^j. \quad (15)$$

Чтобы в уравнении для пульсационного момента $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$ отсутствовали члены по порядку величины большие, чем μ , μ_T и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$, выберем $h = 2$.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПУЛЬСАЦИОННОГО МОМЕНТА

Умножим балансное уравнение (8) на $\xi_x \xi_y$ и проинтегрируем по скоростям молекул. Учтём (13) и (15) в интеграле $\int c_x c_y f^{j+1} d\xi$, а также представление актуальных скоростей в виде суммы осреднённой скорости и пульсационной составляющей, и получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho uv)}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho uv)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho u^2 v)}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial(2u\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 u)}{\partial y} + \frac{\partial(2v\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} 3(p \overline{\Delta u \Delta v} + u^2 \rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3\rho uv + \rho u^3 v) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (4\rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} 3(p \overline{\Delta u \Delta v} + v^2 \rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3\rho uv + \rho v^3 u) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом величина $\int f^{j+1} uv d\bar{\xi} - \int f_0^j \xi_x \xi_y d\bar{\xi}$ заменена на

$$\frac{\int f^{j+1} uv d\bar{\xi} - \int f_0^j \xi_x \xi_y d\bar{\xi}}{\tau_T} = \frac{\partial(\rho uv)}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho uv)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t^2}.$$

Чтобы получить уравнение, описывающее изменение $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$, вычтем из (16) уравнение (2), умноженное на v , и уравнение (3), умноженное на u . В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2(\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial t^2} + \frac{\partial(u\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho \overline{\Delta u \Delta v})}{\partial y} + \\ & + uv \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \overline{\Delta u \Delta v} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) = \\ & = -\frac{\rho \overline{\Delta u \Delta v}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} 3(p + \rho u^2) \overline{\Delta u \Delta v} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3\rho uv + \rho u^3 v) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p^2}{\rho} + p(u^2 + v^2) + \rho u^2 v^2 \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (4\rho \overline{\Delta u \Delta v}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} 3(p + \rho v^2) \overline{\Delta u \Delta v} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3\rho uv + \rho v^3 u) \right) - v\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

В левой части уравнения (17) присутствует член $uv(\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y)$, формально превышающий по порядку величины члены, пропорциональные μ , μ_T и $\rho \overline{\Delta u \Delta v}$. Однако, учитывая, что

$$uv \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) = -uv \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

для рассматриваемого случая слабо сжимаемого газа, этот член можно считать малым. Полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. На основе использования кинетической модели, записанной в виде балансного уравнения (8), а также классических представлений о виде функции распределения вблизи локально-термодинамического равновесия, получена замкнутая система уравнений, описывающая пространственно-двумерные турбулентные течения в слабосжимаемом газе.

5. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

В качестве основной для расчёта пульсаций использовалась следующая система:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\overline{\Delta u\Delta v})}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho\overline{\Delta u\Delta v})}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho\overline{\Delta u\Delta v})}{\partial y} + \\ & + \overline{\Delta u\Delta v} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + uv \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) = \\ & = -\frac{\rho\overline{\Delta u\Delta v}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3(p + \rho u^2)\overline{\Delta u\Delta v}) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial x} (3\rho uv + \rho u^3 v) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3(p + \rho v^2)\overline{\Delta u\Delta v}) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu + \mu_T}{p} \frac{\partial}{\partial y} (3\rho uv + \rho v^3 u) \right) - v\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений (1)–(3), (18) использовалась для расчёта турбулентных течений. В уравнении (18), в отличие от (17), так же как и в уравнениях (1)–(3) отсутствуют члены со смешанными пространственными производными. Как показывает вычислительный эксперимент, их присутствие фактически не сказывается на результате расчёта, при этом усложняя его процесс. По той же причине в (18) отсутствуют члены $(\tau_T/2) (\partial^2(\rho\overline{\Delta u\Delta v})/\partial t^2)$ и $(\tau_T/2) (\partial^2(\rho uv)/\partial t^2)$. Кроме того, в правой части (18) к членам, содержащим турбулентную вязкость μ_T , добавлена молекулярная вязкость μ , что позволяет единым образом строить расчётный процесс, в том числе и в зонах отсутствия турбулентности. Расчёт проводился по явной схеме.

Теперь выберем μ_T . В качестве примера рассматривалась задача о смешении двух плоских потоков, движущихся со скоростями u_1 и u_0 .

Характерным значением величины $|\partial u/\partial y + \partial v/\partial x|$ в данном случае удобно выбрать

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| = \frac{|u_1 - u_0|}{L}, \quad (19)$$

где L — характерная толщина слоя смешения. Тогда турбулентную вязкость μ_T можно определить как

$$\mu_T = \frac{|\rho\overline{\Delta u\Delta v}|}{2} \frac{L}{|u_1 - u_0|}.$$

Естественно возникает вопрос о влиянии неопределённости в значении величины (19) на конечный результат расчёта. Установлено, что варьирование величины $|u_1 - u_0|/L$ более чем на порядок практически не влияет на значения осреднённых скоростей u и v .

В задаче о смешении двух потоков существовала одна характерная зона — сам слой смешения. Для задач, в которых присутствует несколько турбулентных зон, предлагается выбрать μ_t в каждой зоне в зависимости от характерного для неё значения $|\partial u/\partial y + \partial v/\partial x|$.

Вопрос о нахождении центральных пульсационных моментов $\overline{\rho\Delta u^2}$ и $\overline{\rho\Delta v^2}$, определяющих значение турбулентной кинетической энергии, также легко решается. Для получения дополнительного уравнения, описывающего $\overline{\rho\Delta u^2}$, умножим балансное уравнение (19) на $\xi_x^2/2$ и проинтегрируем по скоростям молекул, а затем вычтем умноженное на скорость u уравнение (2). Аналогично можно получить уравнения для нахождения $\overline{\rho\Delta v^2}$.

Рассмотрим результаты расчёта задачи о слое смешения. Начальные скорости слоёв $u=0.7$ при $y \leq 0$ и $u=0.35$ при $y > 0$. Молекулярная вязкость определялась по заданному числу Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^4$. Результаты вычислений сравнивались с данными, полученными на основе модели Спаларта–Аллмараса [2] и приближённой аналитической зависимости Шлихтинга [16, гл. 24, § 3]. При использовании уравнений Навье–Стокса имеем нестационарное решение, соответствующее неустойчивости слоя смешения (рис. 1).

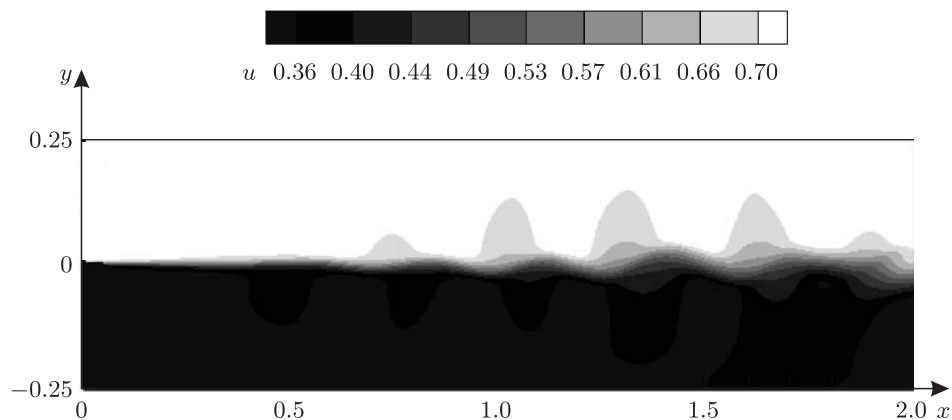


Рис. 1. Мгновенное распределение скорости. Нестационарное решение уравнений Навье–Стокса.

В результате расчёта уравнений представленной модели и уравнений Рейнольдса с моделью Спаларта–Аллмараса получаем стационарное решение (рис. 2). Наблюдается линейный рост ширины области смешения.

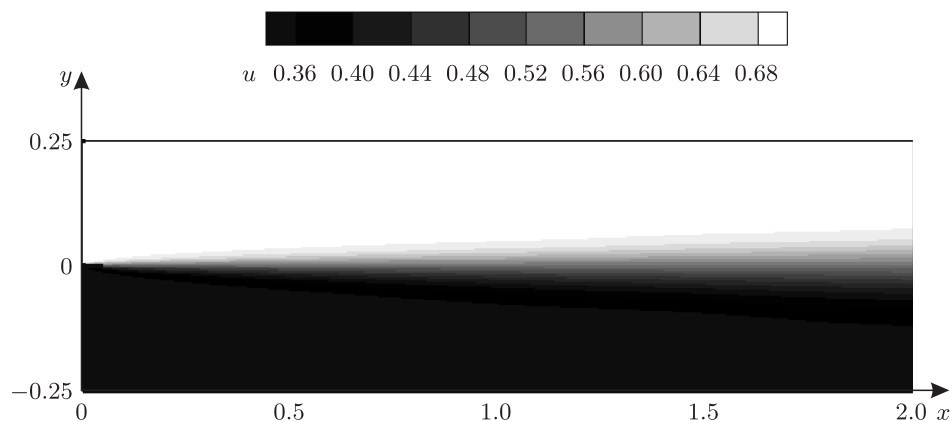


Рис. 2. Распределение скорости. Стационарное решение с использованием представленной модели.

На рис. 3 показано распределение скорости в сечении $x = 1.5$. Видно, что кривые достаточно близки.

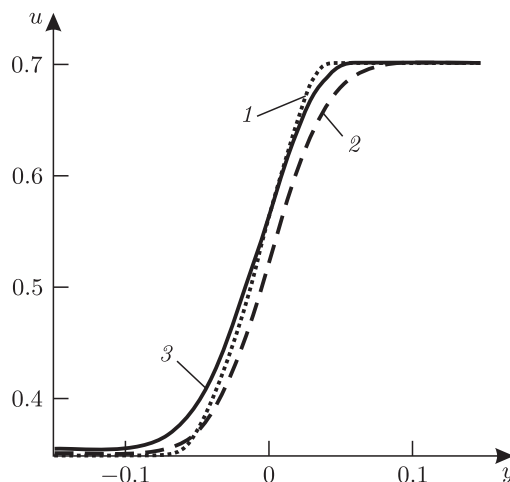


Рис. 3. Распределение скорости в поперечном сечении $x = 1.5$: 1 — модель Спаларта–Алмараса; 2 — зависимость Шлихтинга; 3 — КГД система.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты демонстрируют перспективность применения предложенной модели к моделированию турбулентных течений. Однако полноценное включение её в ряд используемых моделей для описания турбулентности течений требует дополнительных исследований. В частности, планируется в дальнейшем расширить круг моделируемых задач, обобщить данную модель на случай сжимаемого газа и пространственной 3D-геометрии. Предполагается также в рамках предложенной методологии получить дополнительные уравнения для моментов $\rho \overline{\Delta u^2}$ и $\rho \overline{\Delta v^2}$, которые важны для нахождения кинетической энергии турбулентных пульсаций.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. — М. : Дрофа, 2003. — 840 с.
2. Spalart, P.R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // Recherche Aerospaciale. — 1994. — № 1. — P. 5–21.
3. Comparative numerical testing of one and two equation turbulence models for flows with separation and reattachment / M. Shur, M. Strelets, L. Zaikov [et al.] // AIAA Paper. — 1995. — Art. 95–0863.
4. Ивахненко, И.А. Квазигазодинамическая модель и мелкомасштабная турбулентность / И.А. Ивахненко, С.В. Поляков, Б.Н. Четверушкин // Мат. моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 13–20.
5. Wilcox, D.E. Formulation of the K-omega turbulence model revisited / D.E. Wilcox // AIAA J. — 2008. — V. 46, № 11. — P. 2823–2838.
6. Использование алгебраической модели турбулентности для расчёта нестационарных течений в окрестности выемок / И.В. Абалакин, А.Н. Антонов, И.А. Граур, Б.Н. Четверушкин // Мат. моделирование. — 2000. — Т. 12, № 1. — С. 45–56.
7. Menter, F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications / F.R. Menter // AIAA J. — 1994. — V. 32, № 8. — P. 1598–1605.

8. The k-e-Rt turbulence closure / V. Goldberg, O. Perommain, P. Batten, S. Chakravarthy // *Engineering Appl. of Comput. Fluid Mech.* — 2009. — V. 3, № 2. — P. 175–183.
9. Abdol-Hamid, K.S. Verification and validation of the K-KL turbulence model in FUN 3D and CFL 3D Codes / K.S. Abdol-Hamid, J.-R. Carlson, C.L. Rumsey // *AIAA Paper.* — 2016. — Art. 2016–3941.
10. Фриш, У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / У. Фриш. — М. : Физматлит, 1998. — 343 с.
11. Четверушкин, Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений / Б.Н. Четверушкин. — М. : Макс-Пресс, 2004. — 328 с.
12. Zlotnik, A.A. On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem / A.A. Zlotnik, B.N. Chetverushkin // *Appl. Math. Letters.* — 2018. — V. 83. — P. 116–122.
13. Злотник, А.А. О свойствах и погрешности параболического и гиперболического 2-го порядка возмущений гиперболической системы 1-го порядка / А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин // *Мат. сб.* — 2023. — Т. 214, № 4. — С. 3–37.
14. Четверушкин, Б.Н. Кинетические алгоритмы расчёта течений электропроводящей жидкости на высокопроизводительных вычислительных системах / Б.Н. Четверушкин, В.И. Савельев, А.В. Савельев // *Докл. РАН.* — 2019. — Т. 489, № 6. — С. 552–557.
15. Chetverushkin, B.N. Kinetic consistent MHD algorithm for incompressible conductive fluids / B.N. Chetverushkin, A.V. Saveliev, V.I. Saveliev // *Computer and Fluids.* — 2023. — V. 255. — Art. 105724.
16. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг ; пер. Г.А. Вольперта ; под ред. Л.Г. Лойцянского. — М. : Наука, 1974. — 711 с.

ABOUT ONE MODEL FOR DESCRIBING TURBULENT FLOWS

B. N. Chetverushkin¹, A. E. Lutsky², E. V. Shilnikov³

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
 e-mail: ¹chetver@imamod.ru, ²allutsky@yandex.ru, ³shilnikov@imamod.ru

Based on a simple kinetic model, which is used in the derivation of a quasi-gasdynamic system, additional equations for turbulent moments are obtained. The properties of the additional equations are demonstrated by the example of turbulent mixing layer simulation.

Keywords: quasi-gas dynamic system of equations, turbulent flow, mixing layer, closure of averaged equations system.

REFERENCES

1. Loitsyanskii, L.G., *Mechanics of Liquids and Gases*, Oxford, 2014.
2. Spalart, P.R. and Allmaras, S.R., A one equation turbulence model for aerodynamic flows, *Recherche Aerospaciale*, 1994, no. 1, pp. 5–21.
3. Shur, M., Strelets, M., Zaikov, L. [et al.], Comparative numerical testing of one and two equation turbulence models for flows with separation and reattachment, *AIAA Paper*, 1995, art. 95–0863.
4. Ivakhnenko, I.A., Polyakov, S.V., and Chetverushkin, B.N., Quasihydrodynamic model and small-scale turbulence, *Math. Models Comput. Simul.*, 2009, vol. 1, pp. 44–50.
5. Wilcox, D.E., Formulation of the K-omega turbulence model revisited, *AIAA J.*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 2823–2838.
6. Abalakin, I.V., Antonov, A.N., Graur, I.A., and Chetverushkin, B.N., Application of an algebraic turbulent model to unsteady flow simulation around a cavity, *Mat. Model.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 45–56.
7. Menter, F.R., Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
8. Goldberg, V., Perommain, O., Batten, P., and Chakravarthy, S., The k-e-Rt turbulence closure, *Engineering Appl. Comput. Fluid Mech.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 175–183.

9. Abdol-Hamid, K.S., Carlson, J.-R., and Rumsey, C.L., Verification and validation of the K-KL turbulence model in FUN 3D and CFL 3D Codes, *AIAA Paper*, 2016, art. 2016–3941.
10. Frish, U., *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
11. Chetverushkin, B.N., *Kinetic Schemes and Quasi Gasdynamic System of Equations*, Barcelona: CIMNE, 2008.
12. Zlotnik, A.A. and Chetverushkin, B.N., On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial boundary value problem, *Appl. Math. Letters*, 2018, vol. 83, pp. 116–122.
13. Zlotnik, A.A. and Chetverushkin, B.N., Properties and errors of second-order parabolic and hyperbolic perturbations of a first-order symmetric hyperbolic system, *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 4, pp. 444–478.
14. Chetverushkin, B.N., Saveliev, A.V., and Saveliev, V.I., Kinetic algorithms for modeling conductive fluids flow on high-performance computing systems, *Dokl. Math.*, 2019, vol. 100, pp. 577–581.
15. Chetverushkin, B.N., Saveliev, A.V., and Saveliev, V.I., Kinetic consistent MHD algorithm for incompressible conductive fluids, *Computer and Fluids*, 2023, vol. 255, art. 105724.
16. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, Michigan: McGraw-Hill, 1979.

УДК 519.63+517.957

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ УЗАДЕЛЯ

© М. М. Хапаев¹, М. Ю. Куприянов²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

²Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва

e-mail: ¹vmhap@cs.msu.ru, ²mkupr@pn.sinp.msu.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024 г., после доработки 10.01.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассматривается нелинейная одномерная задача для уравнений теории сверхпроводимости, особенностью которой является нестандартное условие сопряжения Робена на внутренней границе и разрывное решение. Для задачи строится оптимальная однородная монотонная разностная схема, включая условие на интерфейсе. Используя решение серии эллиптических задач и метод Ньютона, решается полная система уравнений Узаделя, которые являются базовой математической моделью на микроуровне для описания токов и полей в сверхпроводниках с джозефсоновскими переходами. Приводятся результаты расчётов для задачи о грануле с абрикосовским вихрем.

Ключевые слова: разностная схема, разрывное решение, уравнения Узаделя.

DOI: 10.31857/S0374064124070118, EDN: KNDDON

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Узаделя [1] являются эффективным инструментом, позволяющим анализировать процессы как в устройствах слаботочной сверхпроводимости [2, 3], так и в сверхпроводниковых структурах, содержащих абрикосовские вихри [4–8]. Основная проблема при численном решении этой системы — нестандартные условия сопряжения решений на внутренних границах, являющихся границами раздела сред [9]. Эти условия по аналогии с третьей краевой задачей в работе [10, с. 164], где они получены для тонкого слабопроводящего слоя, называют *условиями Робена* [11]. Хорошо известно, что стандартные условия сопряжения, обеспечивающие непрерывность решения и потока, учитываются автоматически при численном решении задач как конечно-разностным методом, так и методом конечных элементов. Нестандартные условия подразумевают разрывное решение, что требует его особой аппроксимации [11].

Ранее при анализе структуры абрикосовских вихрей решались уравнения Узаделя для задач, в которых описывающие эти вихри функции имели радиальную симметрию, а их зависимости от расстояния r от центра вихря являлись непрерывными функциями [4–6]. Для разрывных решений был предложен смешанный метод конечных элементов [12], в котором использована кусочно-постоянная аппроксимация решений для каждой ячейки сетки, что приводит к необходимости применения сеток с малым шагом и значительно увеличивает время расчётов.

В настоящей работе предлагается простая конечно-разностная схема на стандартном трёхточечном шаблоне [13, с. 136], имеющая по крайней мере первый порядок аппроксимации и обладающая монотонностью. С помощью этой схемы решается задача о нахождении структуры абрикосовского вихря, центр которого расположен на оси сверхпроводящего цилиндра, помещённого в магнитное поле H , направленное параллельно его образующей. Сам цилиндр находится внутри сверхпроводящей матрицы из того же сверхпроводящего материала, но отделён от неё резкой границей, имеющей конечную прозрачность. Рассматриваемая математическая модель описывает структуру абрикосовского вихря в гранулированной сверхпроводящей плёнке, размер гранул в которой сравним с длиной когерентности сверхпроводника.

Предлагаемая разностная аппроксимация нестандартных условий сопряжения может быть обобщена на двумерные и трёхмерные схемы на регулярных прямоугольных сетках, а также на задачи с другими условиями сопряжения с разрывными решениями и потоками.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений для рассматриваемой задачи включает в себя нелинейные уравнения для компонент функций Грина $\theta_n(r)$, соответствующих бесконечной последовательности так называемых мацубаровских частот Ω_n , и уравнения самосогласования для параметра порядка $\Delta(r)$, r — радиальная компонента цилиндрической системы координат.

Пусть $t = T/T_c$ — безразмерная температура; $\gamma_B > 0$ — параметр прозрачности границы; частоты $\Omega_n = t(2n + 1)$, $n = 0, 1, \dots$; $r \in (0, \Gamma)$; γ — внутренняя граница, $\gamma \in (0, \Gamma)$; $Q(r) = (1 - r^2/\Gamma^2)/r$ — нормированный на $\Phi_0/(2\pi\xi)$ векторный потенциал; Φ_0 — квант магнитного потока; $\xi = (D/(2\pi T_c))^{1/2}$ — длина когерентности сверхпроводящего материала; D и T_c — коэффициент диффузии и критическая температура материала; Γ — зависящий от H радиус круглой вихревой ячейки [4–6]; радиус-вектор r и параметр порядка Δ нормированы на ξ и πT_c соответственно. В этих обозначениях уравнения Узаделя для функции $\theta_n(r)$ имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_n(r)}{dr} \right) - F_n(\theta_n(r)) = 0, \quad (1)$$

$$F_n(\theta_n) = (\Omega_n + Q^2(r) \cos \theta_n) \sin \theta_n + \Delta(r) \cos \theta_n. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) должны быть дополнены условием ограниченности решения при $r = 0$ и краевым условием при $r = \Gamma$:

$$|\theta_n(0)| < \infty, \quad \frac{d\theta_n}{dr}(\Gamma) = 0.$$

Условия на внутренней границе имеют вид $([u](x))$ — скачок функции $u(s)$ в точке x)

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\theta_n}{dr} \right](\gamma) &= 0, \\ \gamma_B \frac{d\theta_n}{dr}(\gamma - 0) &= \sin[\theta_n](\gamma). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, все функции $\theta_n(r)$ и $\Delta(r)$ при $r = \gamma$ имеют разрыв первого рода. Кроме того, все функции θ_n связаны уравнением самосогласования

$$\Delta(r) \ln t = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta(r)}{\Omega_n} - \sin \theta_n(r) \right) = 0. \quad (4)$$

2. МЕТОД НЬЮТОНА

Так как уравнения (1) содержат нелинейность, применим для её разрешения метод Ньютона, а для (3) — метод Пикара. В результате получим следующую последовательность линейных задач для каждого значения индекса n :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{\theta}_n^{k+1}(r)}{dr} \right) - q^k(r) \tilde{\theta}_n^{k+1}(r) = -f^k(r), \quad (5)$$

$$q^k(r) = F'_n(\theta_n^k)(r), \quad f^k(r) = F'_n(\theta_n^k)(r) \theta_n^k(r) - F_n(\theta_n^k)(r), \quad (6)$$

$$|\tilde{\theta}_n^{k+1}(0)| < \infty, \quad \frac{d\tilde{\theta}_n^{k+1}}{dr}(\Gamma) = 0, \quad (7)$$

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}_n}{dr} \right](\gamma) = 0, \quad \gamma_B \frac{d\tilde{\theta}_n^{k+1}}{dr}(\gamma - 0) = [\tilde{\theta}_n^{k+1}](\gamma) \frac{\sin[\theta_n^k](\gamma)}{[\theta_n^k](\gamma)}, \quad (8)$$

где k — индекс итераций по методу Ньютона.

Для улучшения сходимости метода Ньютона используется релаксационная модификация, описанная в [14, с. 48]:

$$\theta_n^{k+1} = \omega \tilde{\theta}_n^{k+1} + (1 - \omega) \theta_n^k.$$

Релаксационный параметр ω вычисляется с помощью норм невязок $r1$ для $\tilde{\theta}_n^{k+1}$ и $r0$ для θ_n^k [14] для исходной задачи (1)–(3) по формуле

$$\omega = \frac{r1}{r1 + r0}. \quad (9)$$

Начальное приближение для $n = 0$ выбирается из линейного приближения [6]. Далее выбирается $\theta_{n+1}^0 = \theta_n$.

3. УРАВНЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Для приближённого решения уравнения самосогласования и определения функции $\Delta(r)$ ограничимся конечным числом членов ряда. Пусть l — индекс итераций для определения $\Delta(r)$, M — число удерживаемых членов ряда в (4), тогда уравнение для метода Пикара–Зейделя имеет вид

$$\Delta^{l+1}(r) \ln t = 2t \sum_{n=0}^M \left(\frac{\Delta^{l+1}(r)}{\Omega_n} - \sin \theta_n^l(r) \right) = 0, \quad (10)$$

откуда легко выражается $\Delta^{l+1}(r)$. Начальное приближение $\Delta^0(r)$ берётся из решения линеаризованной задачи.

В отличие от [12] мы не использовали многошаговое ускорение последовательных итераций, так как в нашем случае одномерной задачи и однородной сверхпроводящей среды сходимость оказалась достаточно быстрой. Ускорение может потребоваться для задач с нормальными металлами и ферромагнетиками.

4. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для численного решения линейных уравнений (5)–(8) применим метод конечных разностей. Будем использовать обозначения и результаты [13]. Метод основан на совмещении точки сопряжения с одним из узлов сетки.

Схема строится на некоторой неравномерной сетке r_i , $i = 0, 1, \dots, m-1, m, m+1, \dots, N$, причём $r_m = \gamma$. Таким образом, внутренняя граница γ совпадает с внутренним узлом сетки с номером $1 < m < N-1$. Например, можно использовать равномерные сетки на каждом отрезке $[0, \gamma]$ и $[\gamma, \Gamma]$ с приблизительно равными шагами $h_i = r_i - r_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$. Напомним, что $r_{i+0.5} = r_i + h_{i+1}/2$, $r_{i-0.5} = r_i - h_i/2$. Будем обозначать через y_i решение разностной задачи в узлах сетки.

Рассмотрим известную схему [13, с. 173]

$$4y_{r,0} - q(0)y_0 = -f_0, \quad i = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{r_i}(r_{i-1/2}y_{\bar{r}})_r - q_i y_i = -f_i, \quad i = 1, \dots, m-1, m, m+1, \dots, N, \quad (12)$$

$$-y_{\bar{r},N} = 0.5h_N f_N, \quad i = N. \quad (13)$$

Предложение. Разностная схема (12) на равномерной сетке имеет второй порядок точности $O(h^2)$ [13, с. 176]. Условие (11) учитывает требование ограниченности решения (7) при $r=0$ [13, с. 174].

После простых стандартных преобразований разностная схема (11)–(13) сводится к системе разностных уравнений

$$A_m y_{m-1} - C_m y_m + B_m y_{m+1} = -F_m$$

с трёхдиагональной матрицей.

5. АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ НА ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЕ

Условия сопряжения на внутренней границе γ в обозначениях разностной схемы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr}(\gamma-0) &= \frac{dy}{dr}(\gamma+0), \\ \beta_k \frac{dy}{dr}(\gamma-0) &= [y](\gamma), \quad \beta_k = \frac{\gamma_B[\theta^k](\gamma)}{\sin([\theta^k](\gamma))}. \end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимацию этих условий в точке сопряжения r_m . Будем полагать, что $y_m = y(\gamma-0)$ является левым предельным значением, а $y_m^* = y(\gamma+0)$ — правым, так что $[y](r_m) = y_m^* - y_m$:

$$\begin{aligned} \frac{y_m - y_{m-1}}{h_m} &= \frac{y_{m+1} - y_m^*}{h_{m+1}}, \\ \beta_k \frac{y_m - y_{m-1}}{h_m} &= \beta_k \frac{y_{m+1} - y_m^*}{h_{m+1}} = y_m^* - y_m. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая в этих формулах y_m^* , получаем следующее разностное уравнение для узла m :

$$-\left(\frac{\beta_k}{h_m} + \frac{h_{m+1}}{h_m}\right)y_{m-1} + \left(1 + \frac{\beta_k}{h_m} + \frac{h_{m+1}}{h_m}\right)y_m - y_{m+1} = 0. \quad (15)$$

Уравнение для узла $m+1$ имеет вид

$$A_{m+1}y_m^* - C_{m+1}y_{m+1} + B_{m+1}y_{m+2} = -F_{m+1}. \quad (16)$$

Используя соотношение (14), можно исключить y_m^* в (16). В результате получается трёхточечное разностное соотношение с доминирующим центральным коэффициентом (при условии неотрицательности функций $q(r)$ в (5)):

$$\bar{A}_{m+1}y_m - \bar{C}_{m+1}y_{m+1} + B_{m+1}y_{m+2} = -F_{m+1}, \quad (17)$$

где $\bar{A}_{m+1} = A_{m+1}/(1 + \beta_k/h_{m+1})$, $\bar{C}_{m+1} = \bar{A}_{m+1} + B_{m+1} + 0.5(h_{m+1} + h_{m+2})r_m q(r_m)$.

Окончательно разностная схема состоит из уравнений (11)–(13) для $i \neq m$, уравнения (15) для $i = m$ и модифицированного уравнения (17) для $i = m + 1$. При условии $q^k(r) \geq 0$ эта схема монотонна.

Для вычисления невязок, необходимых для модифицированного метода Ньютона, используется разностная схема

$$(r_{i-1/2}\theta_{n,\bar{r}}^k)_r - r_i F_n(\theta_n^k)(r_i) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

с соответствующими аппроксимациями краевых условий при $i = 0$ и $i = N$.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Для проведения расчётов и сравнения с результатами физических исследований на языке C++ была написана программа, решающая полную постановку описанной системы уравнений, включая итерации для решения уравнения самосогласования (4), метод Ньютона для нелинейных задач и прогонку для линейных разностных уравнений. Результаты вычислений выводятся в виде файлов, предназначенных для построения графиков с помощью известной программы Gnuplot. Размеры гранулы γ и области Γ , а также температуру t , прозрачность γ_B , число M (10) частот Ω_n и желаемую точность можно задать в командной строке.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчётов, выполненных для температуры $t = 0.6$, радиуса сверхпроводящей гранулы (внутренней границы) $\gamma = 0.7$, радиуса круглой вихревой решетки $\Gamma = 8.16$ (внешняя граница), параметра прозрачности $\gamma_B = 1$. Для сравнения на рис. 2 приведена кривая для $\gamma_B = 0$, что соответствует гладкому решению, совпадающему с координатной зависимостью $\Delta(r)$, рассчитанному ранее в работах [4–6].

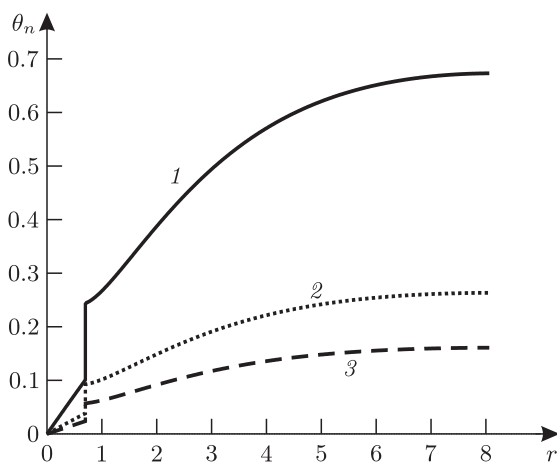


Рис. 1. Результаты расчётов функции $\theta_n(r)$ ($n = \overline{1, 3}$): 1 — $\Omega_1 = 3t$; 2 — $\Omega_2 = 5t$; 3 — $\Omega_3 = 7t$. Представлен скачок решения на внутренней границе $\gamma = 0.7$.

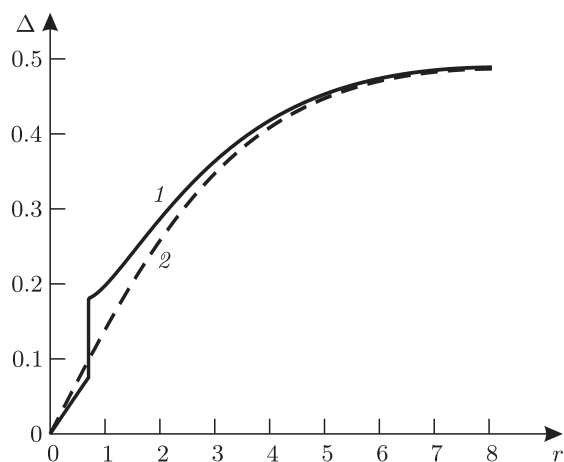


Рис. 2. Зависимости параметра порядка $\Delta(r)$ для задачи с внутренним интерфейсом с $\gamma_B = 1$ (кривая 1) и для гладкого решения с прозрачной границей $\gamma_B = 0$ (кривая 2).

Неравномерная сетка имела около 500 узлов. Неравномерность была связана с необходимостью совмещения внутренней границы γ с узлом сетки. Для вычислений использовалось $M = 400$ членов ряда (мацубаровских частот). Итерации метода Ньютона и уравнения самосогласования проводились с точностью до 10^{-5} .

В вычислениях для сходимости последовательных приближений уравнения самосогласования (10) потребовалось около 60 итераций, метод Ньютона сходил за 4–6 итераций. В целом время счёта для достаточно плотных сеток незначительно. В силу неравномерности сетки сходимость по величине скачка решения $[\theta](\gamma) = y_m^* - y_m$ имела первый порядок. Условие сопряжения на внутренней границе для $\Delta(r)$ выполнялось с точностью 0.5%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен разностный метод решения одномерных эллиптических задач с нестандартным условием сопряжения на внутренней границе, приводящим к разрывным решениям. С его помощью решена задача о моделировании состояния сверхпроводниковой гранулы с вихрем. Предложенный простой разностный метод оказался достаточно эффективным.

Аналогичный разностный метод может быть применён для решения задач с нестандартными условиями сопряжения, в которых поток и решение не являются непрерывными и явно заданы скачки этих величин: $[u] = \alpha$, $[ku'] = \beta$.

Метод аппроксимации условий сопряжения может быть обобщён на многомерные, в частности двумерные, задачи на регулярных прямоугольных сетках.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-12-00130).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Usadel, K.D. Generalized diffusion equation for superconducting alloys / K.D. Usadel // Phys. Rev. Lett. — 1970. — V. 25, № 8. — P. 507–509.
2. Likharev, K.K. Superconducting weak links / K.K. Likharev // Rev. Mod. Phys. — 1979. — V. 51, № 1. — P. 101–159.
3. Golubov, A.A. The current-phase relation in Josephson junctions / A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev // Rev. Mod. Phys. — 2004. — V. 76, № 2. — P. 411–469.
4. Watts-Tobin, R. Density of states, entropy, and specific heat for dirty type II superconductors at arbitrary temperature / R. Watts-Tobin, L. Kramer, W. Pesch // J. Low Temp. Phys. — 1974. — V. 17. — P. 71–86.
5. Golubov, A.A. Theoretical investigation of Josephson tunnel-junctions with spatially inhomogeneous superconducting electrodes / A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov // J. Low Temp. Phys. — 1988. — V. 70. — P. 83–130.
6. Golubov, A.A. Electronic structure of the Abrikosov vortex core in arbitrary magnetic fields / A.A. Golubov, U. Hartmann // Phys. Rev. Lett. — 1994. — V. 72, № 22. — P. 3602–3605.
7. Golubov, A.A. Abrikosov vortices in SF bilayers / A.A. Golubov, M.Yu. Kupriyanov, M.M. Khapaev // JETP Lett. — 2016. — V. 104. — P. 847–851.
8. Expansion of a superconducting vortex core into a diffusive metal / V.S. Stolyarov, C. Tristan, B. Christophe [et al.] // Nature Communications. — 2018. — V. 9, № 2277. — P. 1–8.

9. Куприянов, М.Ю. Влияние прозрачности границ на критический ток грязных SS'S структур / М.Ю. Куприянов, В.Ф. Лукичев // Журн. эксп. и теор. физики. — 1988. — Т. 94, № 6. — Р. 139–149.
10. Самарский, А.А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 352 с.
11. Kwak, D.Y. New finite element for interface problems having robin type jump / D.Y. Kwak, L. Seungwoo, H.A. Yunkyong // Int. J. Numer. Anal. Model. — 2017. — V. 14, № 4–5. — Р. 532.
12. Моделирование сверхпроводниковых SFN-структур с помощью метода конечных элементов / М.М. Хапаев, М. Ю. Куприянов, С. В. Бакурский и др. // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 7. — С. 984–992.
13. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 657 с.
14. Калиткин, Н.Н. Численные методы. Кн. 1 / Н.Н. Калиткин. — М. : Академия, 2013. — 304 с.

FINITE DIFFERENCES SCHEME FOR DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF USADEL EQUATIONS

М. М. Khapaev¹, М. Yu. Kupriyanov²

¹*Lomonosov Moscow State University, Russia*

²*Skobeleva Institute of Nuclear Physics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

e-mail: ¹vmhap@cs.msu.ru, ²mkupr@pn.sinp.msu.ru

In the paper we consider a nonlinear one-dimensional problem for equations of superconductivity theory. The peculiarity of the problem is a nonstandard Robin type junction condition on the inner boundary and a discontinuous solution. An optimal homogeneous monotone difference scheme including the condition at the interface is constructed for the problem. By means of solving a series of elliptic problems and Newton's method, we solve the complete system of the Usadel equations, which is the basic mathematical model at the microlevel for describing the currents and fields in superconductors with Josephson junctions. The results of calculations for the problem of a pellet with an Apricot vortex are presented.

Keywords: differences scheme, discontinuous solution, Usadel equations.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 20-12-00130).

REFERENCES

1. Usadel, K.D., Generalized diffusion equation for superconducting alloys, *Phys. Rev. Lett.*, 1979, vol. 25, no. 8, pp. 507–509.
2. Likharev, K.K., Superconducting weak links, *Rev. Mod. Phys.*, 1979, vol. 51, no. 1, pp. 101–159.
3. Golubov, A.A., Kupriyanov, M.Y., and Il'ichev, E., The current-phase relation in Josephson junctions, *Rev. Mod. Phys.*, 2004, vol. 76, no. 2, pp. 411–469.
4. Watts-Tobin, R., Kramer, L., and Pesch, W., Density of states, entropy, and specific heat for dirty type II superconductors at arbitrary temperature, *J. Low Temp. Phys.*, 1974, vol. 17, pp. 71–86.
5. Golubov, A.A. and Kupriyanov, M.Y., Theoretical investigation of Josephson tunnel-junctions with spatially inhomogeneous superconducting electrodes, *J. Low Temp. Phys.*, 1988, vol. 70, pp. 83–130.
6. Golubov, A.A. and Hartmann, U., Electronic structure of the Abrikosov vortex core in arbitrary magnetic fields, *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 72, no. 22, pp. 3602–3605.
7. Golubov, A.A., Kupriyanov, M.Y., and Khapaev, M.M., Abrikosov vortices in SF bilayers, *JETP Lett.*, 2016, vol. 104, pp. 847–851.
8. Stolyarov, V.S., Tristan, C., Christophe, B. [et al.], Expansion of a superconducting vortex core into a diffusive metal, *Nature Communications*, 2018, vol. 9, no. 2277, pp. 1–8.

9. Kuprianov, M.Yu. and Lukichev, V.F., Influence of boundary transparency on the critical current of “dirty” SS’S structures, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1988, vol. 67, no. 6, art. 1163.
10. Samarskii, A.A. and Andreev, V.B., *Raznostnie metody dlia ellipticheskikh uravnenii* (Finite Difference Methods for Elliptic Equations), Moscow: Nauka, 1976.
11. Kwak, D.Y., Seungwoo, L., and Yunkyong, H.A., New finite element for interface problems having robin type jump, *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2017, vol. 14, no. 4–5, p. 532.
12. Khapaev, M.M., Kupriyanov, M.Y., and Bakurskiy, S.V., Modeling superconductor SFN-structures using the finite element method, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 959–967.
13. Samarskii, A.A., *Teoria raznostnikh skhem* (Theory of Differential Schemes), Moscow: Nauka, 1977.
14. Kalitkin, N.N., *Chislennye metody. Kn. 1* (Numerical Methods. Book 1), Moscow: Academia, 2013.