ISSN 0374-0641

Том 60, Номер 11

Ноябрь 2024

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДУ

300 лет

Российская Академия Наук

НАУКА

1727

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 11, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1443–1451

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИОХИМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЛЕКАРСТВЕННЫХ НАНОФОРМ

И. В. Асташова[1], Ю. Н. Морозов[2], А. В. Филиновский[3], Г. А. Чечкин[4], Т. И. Шабатина[5]

[1–5]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[1]*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, г. Москва*
[2,3,5]*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*
e-mail: [1]*irina.astashova@math.msu.ru,* [2]*yunmor@mail.ru,* [3]*alexey.filinovskiy@math.msu.ru,* [4]*chechkin@mech.math.msu.su,* [5]*tsh@kinet.chem.msu.ru*

Поступила в редакцию 20.09.2024 г., после доработки 28.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего при математическом моделировании процессов криохимического синтеза лекарственных наноформ, исследовано поведение его положительных монотонных решений, а также существование, единственность и свойства решений различных краевых задач с фиксированными и свободными границами.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, монотонное решение, краевая задача, криохимический синтез

DOI: 10.31857/S0374064124110011, EDN: JENAXV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Строится математическая модель процесса создания наноформ лекарственных препаратов методом криохимического синтеза. Терапевтическая эффективность различных фармацевтических препаратов находится в прямой зависимости от размера и структуры формирующих микрочастиц, влияющих на биоэффективность и биодоступность [1, 2]. Уменьшение лекарственных частиц до наноразмеров позволяет добиваться большой площади реагирующей поверхности и получать высокоэффективные препараты, следовательно, снижать дозировку и возможные токсические эффекты от их применения [3]. Для получения лекарственных наноформ используются различные физические и химические методы (см., например, [4–6]), в том числе криохимический синтез [7–9]. Одним из эффективных активно развивающихся методов является метод криохимического преобразования лекарственной субстанции, основанный на её возгонке в условиях высокого вакуума и переносе полученных паров потоком газа-носителя с последующей низкотемпературной конденсацией газообразного потока молекул лекарственной субстанции на охлаждаемой поверхности.

Технология криохимической модификации фармацевтических веществ заключается в следующем. Исходное лекарственное вещество нагревается до определённой температуры в потоке предварительно нагретого газа-носителя. Образующиеся пары́ исходного соединения захватываются потоком газа-носителя и выносятся через сопло во внешнее свободное вакуумируемое пространство химического реактора, заканчивающегося охлаждающей поверхностью. При движении от сопла формирователя к холодной поверхности смешанный молекулярный поток резко охлаждается за счёт теплопроводности. В результате в системе создаются условия для быстрого газофазного "зародышеобразования". В свою очередь, высокая скорость зародышеобразования быстро обедняет газовую фазу пара́ми соединения, что ограничивает дальнейший рост зародышей. Таким образом, удаётся получать формы (кристаллиты) с размерами, близкими к размерам критических зародышей, составляющими для органических соединений несколько десятков нанометров.

Задача математического описания процесса криохимической модификации фармацевтических субстанций разбивается на две:

1) расчёт температурного поля в потоке несущего газа, взаимодействующего с охлаждаемой поверхностью;

2) построение кинетической модели, учитывающей процессы зарождения и роста наночастиц в газовой фазе в заданном температурном поле.

В данной работе исследуется задача 1), для решения которой необходимо сделать ряд допущений:

– смешанный молекулярный поток не рассеивается при движении от сопла формирователя молекулярного потока к холодной поверхности;

– смешанный молекулярный поток имеет одинаковую температуру по всему сечению;

– температура смешанного молекулярного потока равна температуре охлаждаемой поверхности при достижении её;

– теплофизические характеристики газа-носителя не изменяются при включении в него молекул и наночастиц фармацевтической субстанции.

При этих допущениях для расчёта температурного поля, создаваемого потоком газа-носителя, можно использовать уравнение теплопроводности с массопереносом для одномерного случая:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = v\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho C_V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Здесь ρ, μ, λ — соответственно плотность, молекулярный вес и температуропроводность газа-носителя, C_V — молярная теплоёмкость газа-носителя при постоянном объёме, v — линейная скорость фронта потока газа-носителя.

В стационарном случае ($\partial T/\partial t = 0$) уравнение (1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{dx} - \frac{\mu}{\rho v C_V}\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Регулируемый поток газа-носителя, проходя через подогретый медный экран цилиндрической формы, нагревается до определённой температуры, захватывает пары́ исходного вещества и выводит их в вакуумное пространство. Пусть площадь сопла формирователя смешанного молекулярного потока равна S. Тогда молярный расход газа-носителя равен

$$\dot N = \frac{dN}{dt} = \frac{\rho v S}{\mu}.$$

В этом случае отношение молярной скорости потока газа-носителя dN/dt к площади сопла (т.е. плотность потока газа-носителя dn/dt) может быть представлено в виде

$$\dot n = \frac{dn}{dt} = \frac{\dot N}{S} = \frac{\rho v}{\mu}.$$

Теперь уравнение (2) можно записать как

$$\frac{dT}{dx}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{C_V\dot{n}}\frac{dT}{dx}\right)=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) может быть решено аналитически с учётом зависимости теплопроводности газа-носителя от температуры. Для большого количества газов (азот, гелий, аргон, углекислый газ и т.д.) зависимость теплопроводности от температуры выражается приближённой формулой

$$\lambda=\frac{ik}{3\pi^{3/2}d^2}\sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \tag{4}$$

где i — сумма поступательных и вращательных степеней свободы молекул (5 — для двухатомных газов, 3 — для одноатомных), k — постоянная Больцмана, μ — молярная масса, T — абсолютная температура, d — эффективный диаметр молекул, R — универсальная газовая постоянная.

Представив λ в (4) как $\alpha\sqrt{T}$ с подходящим коэффициентом α, получим

$$\frac{\lambda}{C_V\dot{n}}=\frac{\alpha\sqrt{T}}{C_V\dot{n}}=b\sqrt{T},\quad b=\frac{\alpha}{C_V\dot{n}}.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(T-b\sqrt{T}\frac{dT}{dx}\right)=0,\quad b>0. \tag{5}$$

2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ УБЫВАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ

Исследуем поведение положительных решений уравнения (5).

Теорема 1. *Каждое положительное решение T уравнения (5) либо постоянно, либо строго монотонно. Любое строго убывающее решение имеет вид*

$$T(x)=c^2\Theta\left(\frac{x-x^*}{bc}\right)^2, \tag{6}$$

где x^* и $c>0$ – произвольные константы, а функция $\Theta\colon(-\infty,0)\to(0,1)$ убывает и неявно задаётся формулой

$$x=2\Theta(x)+\ln\frac{1-\Theta(x)}{1+\Theta(x)}. \tag{7}$$

Выражение $T-b\sqrt{T}dT/dx$ в (5) является постоянным и для решения вида (6) равно c^2. Максимально продолженное решение T определено на интервале $(-\infty;x^*)$ и для него справедливы соотношения

$$T(x)\to c^2 \text{ и } T'(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to-\infty,\quad T(x)\to 0 \text{ и } T'(x)\to-\infty \quad \text{при} \quad x\to x^*. \tag{8}$$

Доказательство. С помощью замены $T=Z^2$, где $Z>0$, преобразуем уравнение (5) к виду

$$(Z^2-2bZ^2Z')'=0,$$

откуда сразу следует, что

$$Z^2-2bZ^2Z'=C=\mathrm{const}\,.$$

Если $C=0$, то или $Z\equiv0$, или $1=2bZ'$, это означает, что $Z'>0$ и Z строго возрастает. Если $C=-c^2<0$, то получается $Z^2+c^2=2bZ^2Z'$, откуда опять вытекает, что $Z'>0$.

Таким образом, $C=c^2>0$, где $c>0$, и имеем уравнение

$$Z^2-c^2=2bZ^2Z'. \tag{9}$$

Если $Z(x)=c$ в некоторой точке x, то (по теореме единственности) Z совпадает с постоянным решением $Z\equiv c$. Если это не так, то на всей области определения либо $Z>c$, либо $Z<c$. Первый случай не рассматривается (для него из (9) следует $Z'>0$), как и предыдущий случай постоянного решения. Во втором случае положим

$$Z(x)=cz\left(\frac{x}{bc}\right), \quad 0<z<1,$$

что приводит (9) к уравнению

$$z^2-1=2z^2z', \tag{10}$$

которое можно представить в виде

$$1=\left(2+\frac{2}{z^2-1}\right)z'.$$

Отсюда для случая $0<z<1$ получаем, что при некотором a справедливо равенство

$$x-a=\int\limits_0^{z(x)}\left(2+\frac{2}{\zeta^2-1}\right)d\zeta=2z(x)+\ln\frac{1-z(x)}{1+z(x)}.$$

Итак, имеется общее семейство неявно определённых строго убывающих решений уравнения (10), удовлетворяющих условию $0<z<1$. Одно из них (при $a=0$) — в точности функция Θ, неявно заданная уравнением (7). Все остальные решения могут быть получены из Θ сдвигом по горизонтали. Таким образом, доказано соотношение (6).

Из (7) следует, что

$$\Theta(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0, \qquad \Theta(x)\to 1 \quad \text{при} \quad x\to-\infty.$$

Отсюда, используя (10), получаем

$$\Theta'(x)\to-\infty \quad \text{при} \quad x\to 0, \qquad \Theta'(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to-\infty.$$

Вместе с (6) это даёт первые три предела в (8). Для четвертого предела, применив (9), имеем

$$T'=2ZZ'=\frac{Z^2-c^2}{2bZ}=\frac{T-c^2}{2b\sqrt{T}}\to-\infty \quad \text{при} \quad T\to 0.$$

Теорема доказана.

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Исследуем зависимость температуры потока T от расстояния x до сопла при трёх типах граничных условий: Дирихле, Неймана и Робена. Отметим, что условие Дирихле задаёт значение температуры на границе, условие Неймана — граничное значение для производной температуры, условие Робена — линейную комбинацию значений температуры и производной температуры на границе. Коэффициентом значения температуры в условии Робена является число Био (отношение кондуктивного теплового сопротивления внутри объекта к конвективному сопротивлению на поверхности объекта). Аналогичные задачи рассматривались для теплового процесса в статье [10].

Теорема 2. *Для любых постоянных $x_0 < x_1$ и $T_0 > T_1 > 0$ уравнение (5) имеет единственное решение T, определённое на отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее условиям*

$$T(x_0) = T_0, \quad T(x_1) = T_1. \tag{11}$$

Доказательство. Граничные условия (11) показывают, что в соответствии с теоремой 1 решение T должно строго убывать и поэтому задаётся формулами (6) и (7). При этом граничные условия принимают форму

$$\frac{\sqrt{T_j}}{c} = \Theta\left(\frac{x_j - x^*}{bc}\right), \quad j \in \{0, 1\},$$

или, учитывая (7),

$$\frac{x_j - x^*}{bc} = 2\frac{\sqrt{T_j}}{c} + \ln\frac{c - \sqrt{T_j}}{c + \sqrt{T_j}}, \quad j \in \{0, 1\}. \tag{12}$$

Осталось доказать существование и единственность пары чисел (x^*, c), удовлетворяющей (12). Полагая

$$q := \sqrt{T_1/T_0} \in (0, 1) \quad \text{и} \quad k := \sqrt{T_0}/c \in (0, 1), \tag{13}$$

запишем разность двух уравнений (12) как

$$\frac{k(x_1 - x_0)}{b\sqrt{T_0}} = 2k(q - 1) + \ln\frac{(1 - qk)(1 + k)}{(1 + qk)(1 - k)}$$

или

$$\frac{x_1 - x_0}{2b\sqrt{T_0}} = F_q(k), \tag{14}$$

где

$$F_q(k) := f(k) - qf(qk), \quad f(k) := \frac{1}{2k}\ln\frac{1 + k}{1 - k} - 1. \tag{15}$$

Лемма. *Для любых $A > 0$ и $q \in (0, 1)$ существует единственное число $k \in (0, 1)$, при котором $F_q(k) = A$, где F_q задана равенствами (15). Отображение $(A, q) \mapsto k$ является функцией $(0, +\infty) \times (0, 1) \to (0, 1)$ класса C^1, строго возрастающей как по A, так и по q.*

Доказательство. Заметим, что

$$f(k) = \frac{\ln(1 + k)}{2k} - \frac{\ln(1 - k)}{2k} - 1,$$

откуда имеем $f(k) \to 0$ при $k \to 0$ (по правилу Лопиталя) и $f(k) \to +\infty$ при $k \to 1$.

Теперь исследуем производную функции f, используя ряды Тейлора, равномерно сходящиеся на любом подотрезке интервала $(0, 1)$. Из соотношений

$$f'(k) = \frac{1}{k(1 - k^2)} - \frac{\ln(1 + k)}{2k^2} + \frac{\ln(1 - k)}{2k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n + 1}k^{2n-1} > 0$$

следует, что $f(k) > 0$.

Далее, из $f''(k) > 0$ заключаем, что f' строго возрастает и

$$\frac{dF_q}{dk}(k) = f'(k) - q^2f'(qk) > 0.$$

Значит, F_q строго возрастает по k, $F_q(k)\to 0$ при $k\to 0$ и

$$F_q(k)=(1-q)f(k)+q(f(k)-f(qk))>(1-q)f(k)\to+\infty \quad \text{при} \quad k\to 1.$$

Таким образом, F_q принимает каждое значение $A>0$ ровно один раз, что доказывает первую часть леммы.

Вторая часть утверждения следует немедленно из теоремы о неявной функции и неравенств

$$\partial(F_q(k)-A)/\partial A=-1<0, \quad \partial(F_q(k)-A)/\partial q=-f(qk)-qkf'(qk)<0.$$

Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы 2. Имея единственное значение k, удовлетворяющее равенству (14), получим из (12) и (13) единственные значения

$$c=\frac{\sqrt{T_0}}{k}>\sqrt{T_0} \quad \text{и} \quad x^*=x_1-2b\sqrt{T_1}-bc\,\ln\frac{c-\sqrt{T_1}}{c+\sqrt{T_1}},$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Перейдём к формулировке и доказательству двух теорем, относящихся к другим граничным условиям для уравнения (5) (условиям Неймана (теорема 3) и Робена (теорема 4)).

Теорема 3. *Для любых вещественных постоянных $x_0<x_1$, $T_0>0$ и $U_1<0$ уравнение (5) имеет единственное решение T, определённое на $[x_0,x_1]$ и удовлетворяющее условиям*

$$T(x_0)=T_0, \quad T'(x_1)=U_1.$$

Теорема 4. *Для любых вещественных постоянных $x_0<x_1$, $T_0>0$ и $U_1<0$ уравнение (5) имеет единственное решение T, определённое на $[x_0,x_1]$ и удовлетворяющее условиям*

$$T(x_0)=T_0, \quad T'(x_1)=U_1T(x_1).$$

Доказательство теорем 3 и 4. Докажем существование и единственность постоянной $T_1\in(0,T_0)$, при которой единственное решение T, существующее в соответствии с теоремой 2, удовлетворяет граничным условиям соответствующей теоремы.

По теореме 1 имеем $T-b\sqrt{T}T'=c^2$, откуда, используя обозначения (13), получаем

$$T'(x_1)=\frac{T(x_1)-c^2}{b\sqrt{T(x_1)}}=\frac{q^2T_0-T_0/k^2}{bq\sqrt{T_0}}=\frac{k^2q^2-1}{k^2q}\frac{\sqrt{T_0}}{b}, \qquad \frac{T'(x_1)}{T(x_1)}=\frac{k^2q^2-1}{k^2q^3}\frac{1}{b\sqrt{T_0}},$$

где число $k\in(0,1)$ выбирается зависящим от $q\in(0,1)$ так, чтобы обеспечивались граничные условия (11) для решения T, заданного формулой (6).

Из леммы следует, что дроби в правых частях последних уравнений являются отрицательными. Теперь рассмотрим их пределы при стремлении аргумента к нулю и к единице. Обе дроби стремятся к $-\infty$ при $q\to 0$. Что касается случая $q\to 1$, то должен существовать предел $k_1=\lim_{q\to 1}k\in(0,1]$. Если $k_1<1$, то из (14), (15) следует, что

$$0<\frac{x_1-x_0}{2b\sqrt{T_0}}=F_1(k_1)=f(k_1)-1\cdot f(1\cdot k_1)=0.$$

Это противоречие показывает, что $k_1=1$. (Для значения $k_1=1$ противоречия не возникает, поскольку $f(k)\to+\infty$ при $k\to 1$.) Таким образом,

$$T'(x_1)\to 0 \quad \text{и} \quad \frac{T'(x_1)}{T(x_1)}\to 0 \quad \text{при} \quad q\to 1.$$

Следовательно, оба выражения строго возрастают от $-\infty$ до 0, когда q меняется от 0 до 1 (т.е. когда T_1 меняется от 0 до T_0). Таким образом, они оба должны принимать один раз каждое отрицательное значение, что завершает доказательство теорем 3 и 4.

4. О ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Следующая теорема даёт ответ на вопрос о том, на каком расстоянии может находиться охлаждающая поверхность, если на левом конце отрезка нам задана температура, а на правом — температура и её градиент.

Теорема 5. *Если* $b>0$, $T_0>T_1>0$ *и* $U_1<0$, *то неравенство*

$$b|U_1|\sqrt{T_1}>T_0-T_1 \tag{16}$$

эквивалентно существованию на некотором отрезке $[x_0,x_1]$ *строго убывающего решения* T *уравнения (5), удовлетворяющего условиям*

$$T(x_0)=T_0, \tag{17}$$

$$T'(x_1)=U_1, \tag{18}$$

$$T(x_1)=T_1. \tag{19}$$

Доказательство. Для любых x_1, $b>0$, $T_1>0$ и $U_1<0$ существует решение уравнения (5), заданное в некоторой окрестности точки x_1 и удовлетворяющее условиям (18) и (19).

Согласно теореме 1 это решение строго убывает и, будучи максимально продолженным, стремится на $-\infty$ к константе $c^2=T_1-b\,U_1\sqrt{T_1}$. Таким образом, существование точки $x_0<x_1$, в которой выполняется (17), эквивалентно неравенству $T_0<c^2=T_1-bU_1\sqrt{T_1}$ или, что то же самое, неравенству (16). Теорема доказана.

Замечание. Часть результатов данной статьи была анонсирована в [11]. Другие исследования авторов по математическому моделированию физических и биологических процессов см., например, в работах [12–16].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках программы развития Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (проект № 23-НШ05-26).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синтез и функциональные свойства гибридных наноформ биоактивных и лекарственных веществ / М.Я. Мельников, Л.И. Трахтенберг, В.П. Шабатин [и др.] ; под ред. М.Я. Мельникова, Л.И. Трахтенберга. — М. : Техносфера, 2019. — 383 с.
2. Cryochemically obtained nanoforms of antimicrobial drug substance dioxidine and their physico-chemical and structural properties / T.I. Shabatina, O.I. Vernaya, V.P. Shabatin [et al.] // Crystals. — 2018. — V. 8, № 7. — P. 1–15.
3. Cryochemical modification, activity, and toxicity of dioxidine nanoforms / O.I. Vernaya, V.P. Shabatin, T.I. Shabatina [et al.] // Russ. J. Phys. Chem. A. — 2017. — V. 91, № 2. — P. 229–232.
4. New forms of old drugs: improving without changing / S. Domingos, V. Andre, S. Quaresma [et al.] // J. Pharm. Pharmacol. — 2015. — V. 67, № 6. — P. 830–846.
5. Sergeev, G.B. Nanochemistry / G.B. Sergeev, K.J. Klabunde. — 2nd edn. — Amsterdam : Elsevier, 2013. — 372 p.
6. Verma, S. Quality by design approach to understand the process of nanosuspension preparation / S. Verma, R. Gokhale, D.J. Burgess // Int. J. Pharm. — 2009. — V. 377, № 1–2. — P. 185–198.
7. Cryosynthesis of nanosized drug substances / Y.N. Morozov, A.Y. Utekhina, V.P. Shabatin [et al.] // Russ. J. Gen. Chem. — 2014. — V. 84, № 5. — P. 1010–1017.

8. Pharmaceutical nanoparticles formation and their physico-chemical and biomedical properties / T.I. Shabatina, Ya.A. Gromova, O.I. Vernaya [et al.] // Pharmaceuticals. — 2024. — V. 17, № 587. — P. 1–20.
9. Mathematical modeling of cryochemical formation of medicinal substances in nanoforms. The role of temperature and dimensional parameters / I.V. Astashova, G.A. Chechkin, A.V. Filinovskiy [et al.] // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2023. — V. 20. — P. 213–221.
10. Makhatar, N.A.M. Flow reversal of fully developed combined convection in a vertical channel with boundary condition of a third kind / N.A.M. Makhatar, M.M.A. Lee, N.L.M. Fauzi // J. Adv. Res. Fluid Mech. Therm. Sci. — 2022. — V. 91, № 1. — P. 56–68.
11. О математическом моделировании криохимического синтеза лекарственных наноформ / И.В. Асташова, Ю.Н. Морозов, А.В. Филиновский [и др.] // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 859–861.
12. Astashova, I.V. On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model / I.V. Astashova, K.N. Belikova // Funct. Differ. Equat. — 2022. — № 3–4. — P. 7–15.
13. Astashova, I. On the controllability problem with pointwise observation for the parabolic equation with free convection term / I. Astashova, A. Filinovskiy // WSEAS Transactions on Systems and Control. — 2019. — V. 14. — P. 224–231.
14. Astashova, I. On maintaining optimal temperatures in greenhouses / I. Astashova, D. Lashin, A. Filinovskiy // WSEAS Transactions on Circuits and Systems. — 2016. — V. 15, № 23. — P. 198–204.
15. Astashova, I. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PHAPL / I. Astashova, V. Chebotaeva, A. Cherepanov // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2018. — V. 15, № 12. — P. 112–118.
16. Chechkin, G.A. On the Eringen model for nematic liquid crystals / G.A. Chechkin, T.S. Ratiu, M.S. Romanov // Comptes Rendus, Mecanique. — 2021. — V. 349, № 1. — P. 21–27.

ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO EQUATIONS ARISING WHILE MODELING CRYOCHEMICAL SYNTHESIS OF FORMACEUTICAL NANOFORMS

I. V. Astashova[1], Yu. N. Morozov[2], A. V. Filinovsky[3], G. A. Chechkin[4], T. I. Shabatina[5]

[1–5]*Lomonosov Moscow State University, Russia*
[1]*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia*
[2,3,5]*Bauman Moscow State Technical University, Russia*
e-mail: [1]irina.astashova@math.msu.ru, [2]yunmor@mail.ru, [3]alexey.filinovskiy@math.msu.ru, [4]chechkin@mech.math.msu.su, [5]tsh@kinet.chem.msu.ru

For a nonlinear second order ordinary differential equation, arising while mathematical modeling cryochemical synthesis of medicinal nanoforms, the behavior of its positive monotonic solutions is studied as well as the existence, uniqueness and properties of solutions of various boundary value problems with fixed and free boundaries.

Keywords: nonlinear equation, monotonic solutions, boundary value problem, cryochemical synthesis

FUNDING

This work was carried out with financial support as part of Lomonosov Moscow State University development program (project no. 23-N-SH-05-26).

REFERENCES

1. Melnikov, M.Ya., Trahtenberg, L.I., Shabatin V.P. [et al.], *Sintez i funkcional'nye svojstva gibridnyh nanoform bioaktivnyh i lekarstvennyh veshchestv* (Synthesis and Functional Properties of Hybrid Pharmacologigal and Bioactive Nanoparticles), Moscow: Tehnosphera, 2019.

2. Shabatina, T.I., Vernaya, O.I., Shabatin, V.P. [et al.], Cryochemically obtained nanoforms of antimicrobial drug substance dioxidine and their physico-chemical and structural properties, *Crystals*, 2018, vol. 8, no. 7, pp. 1–15.
3. Vernaya, O.I., Shabatin, V.P., Shabatina, T.I. [et al.], Cryochemical modification, activity, and toxicity of dioxidine nanoforms, *Russ. J. Phys. Chem. A*, 2017, vol. 91, no. 2, pp. 229–232.
4. Domingos, S., Andre, V., Quaresma, S. [et al.], New forms of old drugs: improving without changing, *J. Pharm. Pharmacol.*, 2015, vol. 67, no. 6, pp. 830–846.
5. Sergeev, G.B. and Klabunde, K.J., *Nanochemistry*, 2nd edn., Amsterdam: Elsevier, 2013.
6. Verma, S., Gokhale, R., and Burgess, D.J., Quality by design approach to understand the process of nanosuspension preparation, *Int. J. Pharm.*, 2009, vol. 377, iss. 1–2, pp. 185–198.
7. Morozov, Y.N., Utekhina, A.Y., Shabatin, V.P. [et al.], Cryosynthesis of nanosized drug substances, *Russ. J. Gen. Chem.*, 2014, vol. 84, no. 5, pp. 1010–1017.
8. Shabatina, T.I., Gromova, Ya.A., Vernaya, O.I. [et al.], Pharmaceutical nanoparticles formation and their physicochemical and biomedical properties, *Pharmaceuticals*, 2024, vol. 17, no. 587, pp. 1–20.
9. Astashova, I.V., Chechkin, G.A., Filinovskiy, A.V. [et al.], Mathematical modeling of cryochemical formation of medicinal substances in nanoforms. The role of temperature and dimensional parameters, *WSEAS Transac. Biol. Biomed.*, 2023, vol. 20, pp. 213–221.
10. Makhatar, N.A.M., Lee, M.M.A., Fauzi, N.L.M., Flow reversal of fully developed combined convection in a vertical channel with boundary condition of a third kind, *J. Adv. Res. Fluid Mech. Therm. Sci.*, 2022, vol. 91, iss. 1, pp. 56–68.
11. Astashova, I.V., Morozov, Yu.N., Filinovskij, A.V. [et al.], O matematicheskom modelirovanii kriohimicheskogo sinteza lekarstvennyh nanoform, *Differ. Uravn.*, 2024, vol. 60, no. 6, pp. 859–861.
12. Astashova, I.V. and Belikova, K.N., On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model, *Funct. Differ. Equat.*, 2022, no. 3–4, pp. 7–15.
13. Astashova, I. and Filinovskiy, A., On the controllability problem with pointwise observation for the parabolic equation with free convection term, *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 2019, vol. 14, pp. 224–231.
14. Astashova, I., Lashin, D., and Filinovskiy, A., On maintaining optimal temperatures in greenhouses, *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 2016, vol. 15, no. 23, pp. 198–204.
15. Astashova, I., Chebotaeva, V., and Cherepanov, A., Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PHAPL, *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*, 2018, vol. 15, no. 12, pp. 112–118.
16. Chechkin, G.A., Ratiu, T.S., and Romanov, M.S., On the Eringen model for nematic liquid crystals, *Comptes Rendus, Mecanique*, 2021, vol. 349, no. 1, pp. 21–27.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1452–1459

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

ЗАДАЧА НАЙМАРКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Л. Х. Гадзова

Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик

e-mail: macaneeva@mail.ru

Поступила в редакцию 19.03.2024 г., после доработки 19.03.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования исследована задача Наймарка с краевыми условиями в форме линейных функционалов, охватывающими достаточно широкий класс линейных локальных и нелокальных условий. Получено необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи, доказано существование её решения. В терминах специальных функций найдено представление решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: задача Наймарка, дробная производная Герасимова–Капуто, функционал

DOI: 10.31857/S0374064124110029, EDN: JELOBG

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$Lu(x) \equiv \sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0,1); \tag{1}$$

где $\beta_1 > 0$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$ — заданные числа; $\alpha_1 \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m$;

$$\partial_{sx}^{\alpha} u(x) = \operatorname{sign}^n(x-s) D_{sx}^{\alpha-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

— производная Герасимова–Капуто [1, с. 11]; оператор дробного интегро-дифференцирования порядка α в смысле Римана–Лиувилля по переменной x определяется следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{sx}^{\alpha} u(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-s)}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_s^x \dfrac{u(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x), & \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}^n(x-s) \dfrac{d^n}{dx^n} D_{sx}^{\alpha-n} u(x), & n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$\Gamma(\,\cdot\,)$ — гамма-функция Эйлера.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка в последние десятилетия непрерывно развивается. Многие явления в механике жидкости, теории вязкоупругости, динамики населения и в других областях науки можно описать математическими моделями с такими уравнениями. Обширный обзор литературы по дробному исчислению и его применению можно найти в монографии [2].

Работы [3–7] посвящены дифференциальным уравнениям с операторами непрерывно и дискретно распределённого порядка. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределённого дифференцирования и неравенство Ляпунова для этого уравнения рассматривались в статьях [8, 9].

Для уравнения (1) методом функции Грина исследованы основные двухточечные краевые задачи [10, 11]. Также изучена краевая задача с локальным смещением, связывающим значения искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями в его внутренних точках, и нелокальная задача с интегральным смещением [12]. В [13] решена обобщённая краевая задача для уравнения (1).

В настоящей статье для уравнения (1) сформулирована и решена задача с краевыми условиями в форме линейных функционалов.

Регулярным решением уравнения (1) назовём функцию $u=u(x)$ из класса $AC^n[0,1]$ (имеющую на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные до порядка $n-1$ и удовлетворяющую этому уравнению во всех точках интервала $(0,1)$).

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1) в интервале $(0,1)$, удовлетворяющее условию

$$\ell[u]=b, \tag{3}$$

где $b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)^{\mathrm{т}}$ — заданный вектор-столбец, $b_k\in\mathbb{R}$; $\ell=(\ell_1,\ \ell_2,\ \ldots,\ \ell_n)^{\mathrm{т}}$ — вектор-столбец, ℓ_k, $k=\overline{1,n}$, — заданные линейные ограниченные функционалы с областью определения $D(\ell_k)\subset AC^n[0,1]$.

2. ФУНКЦИЯ $G^\mu_m(x)$

Введём в рассмотрение функцию [10]

$$G^\mu_m(x)=G^\mu_m(x;\nu_1,\ldots,\nu_m;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)\equiv\int\limits_0^\infty e^{-t}S^\mu_m(x;\nu_1 t,\ldots,\nu_m t;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)\,dt,$$

где

$$\nu_1=-\frac{\lambda}{\beta_1},\quad \nu_j=-\frac{\beta_j}{\beta_1},\quad \gamma_1=\alpha_1,\quad \gamma_j=\alpha_1-\alpha_j,\quad j=\overline{2,m},$$

$$S^\mu_m(x;z_1,\ldots,z_m;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)=(h_1*h_2*\ldots*h_m)(x),$$

$$h_j=h_j(x)\equiv x^{\mu_j-1}\phi(\gamma_j,\mu_j;z_jx^{\gamma_j}),$$

а через

$$(g*h)(x)=\int\limits_0^x g(t)h(x-t)\,dt,\quad \phi(\rho,\zeta;z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\zeta)}$$

обозначены соответственно свёртка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$ и функция Райта [14]. Далее считаем, что параметры функции $G^\mu_m(x)$

$$x>0,\quad \nu_j\in\mathbb{R},\quad \gamma_j>0,\quad \mu_j>0.$$

Заметим, что функция $G^\mu_m(x)$ не зависит от распределения чисел $\mu_j>0$, а зависит лишь от их суммы $\mu=\sum_{j=1}^m\mu_j$.

Для функции $G_m^\mu(x)$ справедливы равенства

$$G_m^\mu(x)=O(x^{\mu-1}) \quad \text{при} \quad x\to 0, \tag{4}$$

$$D_{0x}^\nu G_m^\mu(x)=G_m^{\mu-\nu}(x), \quad \text{если} \quad \mu>\nu, \tag{5}$$

$$G_m^\mu(x)-\sum_{j=1}^m \nu_j D_{0x}^{-\gamma_j} G_m^\mu(x)=\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{6}$$

Приведём утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $u(x)$, $v(x)$ *— произвольные функции такие, что*

$$u(x)\in AC^n[0,1], \quad D_{0x}^{\alpha_1-n}v(x)\in C^n[0,1], \quad v(x)\in L[0,1].$$

Тогда справедлива формула

$$(Lu*v)(x)=(u*L^*v)(x)+\sum_{l=0}^{n-1} u^{(l)}(t)\mathcal{L}_k v(x-t)|_{t=0}^{t=x}, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{L}_k=\sum_{j=1}^m \beta_j D_{xt}^{\alpha_j-k}, \quad L^*v(x)=\sum_{j=1}^m \beta_j D_{0x}^{\alpha_j}v(x)+\lambda v(x). \tag{8}$$

Доказательство. Найдём свёртку Лапласа функций $Lu(x)$ и $v(x)$:

$$(Lu*v)(x)=\int_0^x Lu(t)v(x-t)\,dt=\int_0^x\left[\sum_{j=1}^m \beta_j\partial_{0t}^{\alpha_j}u(t)+\lambda u(t)\right]v(x-t)\,dt. \tag{9}$$

Пользуясь определением дробной производной Герасимова–Капуто (2), из равенства (9) имеем

$$\int_0^x\left[\sum_{j=1}^m \beta_j\partial_{0t}^{\alpha_j}u(t)+\lambda u(t)\right]v(x-t)\,dt=\sum_{j=1}^m\beta_j\int_0^x D_{0t}^{\alpha_j-n}u^{(n)}(t)v(x-t)\,dt+\lambda\int_0^x u(t)v(x-t)\,dt. \tag{10}$$

Далее с учётом формулы дробного интегрирования по частям [2, с. 15]

$$\int_a^b g(x)D_{ax}^\alpha h(x)\,dx=\int_a^b h(x)D_{bx}^\alpha g(x)\,dx, \quad \alpha\leqslant 0, \tag{11}$$

из соотношения (10) получим равенство

$$(Lu*v)(x)=\sum_{j=1}^m\beta_j\int_0^x u^{(n)}(t)D_{xt}^{\alpha_j-n}v(x-t)\,dt+\lambda\int_0^x u(t)v(x-t)\,dt. \tag{12}$$

Проинтегрировав первое слагаемое в правой части (12) n раз по частям, будем иметь

$$(Lu*v)(x)=\sum_{j=1}^m\beta_j\sum_{k=1}^n u^{(n-k)}(t)D_{xt}^{\alpha_j-n-1+k}v(x-t)|_{t=0}^{t=x}+\int_0^x u(t)\left(\sum_{j=1}^m\beta_j D_{xt}^{\alpha_j}v(x-t)+\lambda v(x-t)\right)dt,$$

т.е. справедлива формула (7). Лемма доказана.

Дифференциальное выражение $L^*v(x)$, определённое формулой (8), назовём *сопряжённым* к дифференциальному выражению $Lu(x)$, а соотношение (7) — формулой Лагранжа для дифференциальных операторов L и L^*.

Лемма 2. *Функция* $G_m^{\alpha_1}(x)$ *является решением уравнения*

$$\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j}(x)G_m^{\alpha_1}(x)+\lambda G_m^{\alpha_1}(x)=0 \tag{13}$$

и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}\right)G_m^{\alpha_1}(x)=1, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-l-1}\right)G_m^{\alpha_1}(x)=0, \quad l=\overline{1,n-1}. \tag{15}$$

Доказательство. В силу равенств (4)–(6) имеем

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}G_m^{\alpha_1}(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(x)=1.$$

В частности, из них также следует формула [10]

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j G_m^{\mu-\alpha_j}(x)+\lambda G_m^{\mu}(x)=\frac{\beta_1 x^{\mu-\alpha_1-1}}{\Gamma(\mu-\alpha_1)}, \quad \mu>\alpha_1, \tag{16}$$

с учётом которой получаем

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+l+1}(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+l+1}(x)+\frac{x^l}{\Gamma(l+1)}\right)=0, \quad l=\overline{1,n-1}.$$

Из формулы (16) также следует справедливость равенства (13). Лемма доказана.

Функция $G_m^{\alpha_1}(x)$, удовлетворяющая свойствам (13)–(15), является фундаментальным решением уравнения (1).

Известно [15], что решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями $u^{(n-k)}(0)=u_k$ $(k=\overline{1,n})$ имеет вид

$$u(x)=\int_0^x f(t)\mathcal{W}^{\alpha}(x-t)\,dt+\mathcal{W}(x)\overline{u}, \tag{17}$$

где $\mathcal{W}^{\alpha}(x)=(1/\beta_1)G_m^{\alpha_1}(x)$, $\mathcal{W}(x)=(\mathcal{W}_0(x),\mathcal{W}_1(x),\ldots,\mathcal{W}_{n-1}(x))$, $\mathcal{W}_l(x)=\mathcal{L}_{l+1}\mathcal{W}^{\alpha}(x)$, $l=\overline{0,n-1}$, $\overline{u}=(u(0),\ u'(0),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0))^{\text{т}}$.

Воспользовавшись формулой (16), получаем, что

$$\mathcal{W}_l(x)=\frac{x^l}{\Gamma(l+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l+1}(x).$$

Лемма 3. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{W}_l(x)=\begin{cases}1, & l=k,\\ 0, & l\neq k,\end{cases} \quad l,k=\overline{0,n-1}.$$

Доказательство. Если $l=k$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{W}_l(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{l-k}}{\Gamma(l-k+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l-k+1}(x)\right]=1,\quad n-1<\alpha_1\leqslant n,\quad k=\overline{0,n-1}.$$

При $l\neq k$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{W}_l(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{l-k}}{\Gamma(l-k+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l-k+1}(x)\right]=0,\quad \alpha_1+l-k+1>1.$$

Лемма доказана.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\partial^i K(x,t)/\partial x^i\in C([0,1]\times[0,1])$, $i=\overline{0,p}$; ℓ — линейный ограниченный функционал в пространстве $C^p[0,1]$. Тогда справедливо соотношение*

$$\ell\left[\int_0^1 K(x,t)\,dt\right]=\int_0^1 \ell[K(x,t)]\,dt. \tag{18}$$

Заметим, что в формуле (18) функционал ℓ применяется к $K(x,t)$ как к функции переменной x.

Доказательство. В силу наложенных на $K(x,t)$ условий можем записать

$$\int_0^1 K(x,t)\,dt=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}K\left(x,\frac{i}{m}\right).$$

Так как $K(x,i/m)\in C^p[0,1]$ для любого i и $\ell[K(x,t)]$ и как функция переменной t является непрерывной на отрезке $[0,1]$, то

$$\ell\left[\int_0^1 K(x,t)\,dt\right]=\ell\left[\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}K\left(x,\frac{i}{m}\right)\frac{1}{m}\right]=\lim_{m\to\infty}\ell\left[\sum_{i=0}^{m}K\left(x,\frac{i}{m}\right)\frac{1}{m}\right]=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\ell\left[K\left(x,\frac{i}{m}\right)\right]\frac{1}{m}=\int_0^1 \ell[K(x,t)]\,dt.$$

Лемма доказана.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. *Пусть $n\geqslant 2$, $D(\ell_k)=C^{n-2}[0,1]$, $k=\overline{1,n}$, функция $f(x)$ представима в виде*

$$f(x)=D_{0x}^{\alpha_1-n}g(x),\quad g(x)\in L[0,1],\quad x^{1-\mu}f(x)\in C[0,1],$$

и выполняется условие

$$\det A\neq 0, \tag{19}$$

где $A=\|\ell_i[\mathcal{W}_j(x)]\|$ — квадратная матрица, $i,j=\overline{1,n}$.

Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1), (3)

$$u(x)=\int_0^1 f(t)G(x,t)\,dt+\mathcal{W}(x)A^{-1}b, \tag{20}$$

где

$$G(x,t)=\mathcal{W}^{\alpha}(x-t)-\mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}^{\alpha}(x-t)].$$

Доказательство. Подставив представление (17) в условие (3), с учётом леммы 4 получим систему алгебраических линейных уравнений для определения $\overline{u}$ следующего вида:

$$A\overline{u} = b - \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \int\limits_0^1 f(t)\ell[\mathcal{W}^\alpha(x-t)]\,dt.$$

Если $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1} и тогда

$$\overline{u} = A^{-1}b - A^{-1}\mathcal{F}.$$

Подставляя теперь найденные значения $\overline{u}$ в (17), после несложных преобразований получаем (20).

Докажем, что функция $u(x)$, определяемая равенством (20), действительно является регулярным решением уравнения (1). Учитывая соотношения (4) и

$$\sum_{j=2}^m \nu_j G_m^{\alpha_j+\mu}(x) = G_m^\mu(x) - \nu_1 G_m^{\alpha_1+\mu}(x) - \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$$

(см. (6) и (16)) и используя свойства свертки Лапласа, закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования и формулу дробного интегрирования по частям (11), будем иметь

$$\sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\beta_1}\partial_{0x}^{\alpha_j}\int\limits_0^x G_m^{\alpha_1}(x-t)f(t)\,dt = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\beta_1} D_{0x}^{\alpha_j-n}\frac{d^n}{dx^n}(f * G_m^{\alpha_1})(x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(g * \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\beta_1} D_{0x}^{\alpha_j-n-1} G_m^{\alpha_1-\alpha_1+n-n}\right)(x) = \frac{d}{dx}\left[D_{0x}^{\alpha_j-n} g * \left(-\frac{\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+1}+1\right)\right](x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[f * \left(-\frac{\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+1}+1\right)\right](x) = -\lambda\int\limits_0^x f(t)\mathcal{W}^\alpha(x-t)\,dt + f(x),$$

откуда следует справедливость равенства

$$\sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j}\big(f * \big[\mathcal{W}^\alpha(x) - \mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}^\alpha(x)]\big] + \mathcal{W}(x)A^{-1}b\big) +$$

$$+ \lambda\big(f * \big[\mathcal{W}^\alpha(x) - \mathcal{W}(x)A^{-1}\ell[\mathcal{W}^\alpha(x)]\big] + \mathcal{W}(x)A^{-1}b\big) = f(x).$$

С учётом формулы (18) нетрудно проверить, что функция (20) удовлетворяет краевым условиям (3):

$$\ell[f * \mathcal{W}^\alpha(x)] - AA^{-1}\ell[f * \mathcal{W}^\alpha(x)] + AA^{-1}b = b,$$

так как $A = \ell[\mathcal{W}(x)]$, $AA^{-1} = E$ — единичная матрица.

Покажем, что если условие разрешимости (19) нарушается, то решение задачи (1), (3), вообще говоря, неединственно. Более точно, однородная задача в этом случае имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{u}(x) = \mathcal{W}(x)C,$$

где $\mathcal{W}(x) = (\mathcal{W}_n(x), \mathcal{W}_{n-1}(x), \ldots, \mathcal{W}_1(x))$, $C = (C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)^{\text{т}}$, C_i, $i = \overline{1,n}$, — произвольные постоянные.

Из (17) следует, что функция $\widetilde{u}(x)$ является решением уравнения

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}\widetilde{u}(x)+\lambda\widetilde{u}(x)=0. \tag{21}$$

Так как $\det A=0$, то по предположению найдётся такой ненулевой вектор $\widetilde{C}$, что

$$\ell[\widetilde{u}(x)]=\ell[\mathcal{W}(x)]\widetilde{C}=A\widetilde{C}=0.$$

Таким образом, показано, что функция $\widetilde{u}(x)=\mathcal{W}(x)\widetilde{C}$ является решением однородного уравнения (21) и удовлетворяет нулевым условиям $\ell[\widetilde{u}(x)]=0$. Теорема доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 432 с.
2. Псху, А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
3. Pskhu, A. Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives / A. Pskhu // Bol. Soc. Mat. Mex. — 2023. — V. 29, № 93.
4. Pskhu, A.V. Transmutations for multi-term fractional operators / A.V. Pskhu // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics ; eds. V. Kravchenko, S. Sitnik. — Cham : Birkhäuser, 2020. — P. 603–614.
5. Fedorov, V.E. On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations / V.E. Fedorov, N.V. Filin // Fractal Fract. — 2021. — V. 5, № 1. — Art. 20.
6. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann–Liouville derivatives / V.E. Fedorov, W.Sh. Du, M. Kostic, A.A. Abdrakhmanova // Mathematics. — 2022. — V. 10, № 5. — Art. 681.
7. On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral / S.M. Sitnik, V.E. Fedorov, N.V. Filin, V.A. Polunin // Mathematics. — 2022. — V. 10, № 16. — Art. 2979.
8. Эфендиев, Б.И. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования / Б.И. Эфендиев // Мат. заметки СВФУ. — 2022. — Т. 29, № 2. — С. 58–71.
9. Эфендиев, Б.И. Неравенство Ляпунова для уравнения второго порядка с оператором распределённого дифференцирования / Б.И. Эфендиев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 950–953.
10. Гадзова, Л.Х. Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами / Л.Х. Гадзова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1580–1586.
11. Гадзова, Л.Х. Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 180–186.
12. Гадзова, Л.Х. Нелокальная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Мат. заметки. — 2019. — Т. 106, № 6. — С. 860–865.
13. Gadzova, L.Kh. Generalized boundary value problem for a linear ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator / L.Kh. Gadzova // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — V. 106, № 2. — P. 108–116.

14. Wright, E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities / E.M. Wright // J. London Math. Soc. — 1933. — V. 8, № 29. — P. 71–79.
15. Гадзова, Л.Х. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования / Л.Х. Гадзова // Вест. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 3 (23). — С. 48–56.

NAYMARK PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FRACTIONAL DISCRETE DISTRIBUTED DIFFERENTIATION OPERATOR

 L. Kh. Gadzova

Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, Nalchik, Russia
e-mail: macaneeva@mail.ru

For an ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, the Naimark problem is studied, where the boundary conditions are specified in the form of linear functionals. This allows us to cover a fairly wide class of linear local and nonlocal conditions. A necessary and sufficient condition for the unique solvability of the problem is obtained. A representation of the solution to the problem under study is found in terms of special functions. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proven.

Keywords: Naimark problem, Gerasimov–Caputo fractional derivative, functional

REFERENCES

1. Nakhushev, A.M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* (Fractional Calculus and its Applications), Moscow: Fizmatlit, 2003.
2. Pskhu, A.V., *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* (Fractional Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 2005.
3. Pskhu, A., Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 2023, vol. 29, no. 93.
4. Pskhu, A.V., Transmutations for multi-term fractional operators, in: *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics*, Kravchenko V., Sitnik S. (eds), Cham: Birkhäuser, 2020, pp. 603–614.
5. Fedorov, V.E. and Filin, N.V., On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations, *Fractal Fract.*, 2021, vol. 5, no. 1, art. 20.
6. Fedorov, V.E., Du, W.Sh., Kostic, M., and Abdrakhmanova, A.A., Analytic resolving families for equations with distributed Riemann–Liouville derivatives, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 5, art. 681.
7. Sitnik, S.M., Fedorov, V.E., Filin, N.V., and Polunin, V.A. On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 16, art. 2979.
8. Efendiev, B.I., Initial-value problem for a second-order ordinary differential equation with distributed-order differentiation operator, *Math. Notes of NEFU*, 2022, vol. 29, no. 2, pp. 59–71.
9. Efendiev, B.I., Lyapunov inequality for second-order equation with operator of distributed differentiation, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, no. 5-6, pp. 879–882.
10. Gadzova, L.Kh., Dirichlet and Neumann problems for a fractional ordinary differential equation with constant coefficients, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1556–1562.
11. Gadzova, L.Kh., Boundary value problem for a linear ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 178–184.
12. Gadzova, L.Kh., Nonlocal boundary-value problem for a linear ordinary differential equation with fractional discretely distributed differentiation operator, *Math. Notes*, 2019, vol. 106, no. 5–6, pp. 904–908.
13. Gadzova, L.Kh., Generalized boundary value problem for a linear ordinary differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator, *Bull. Karaganda univ. Math. ser.*, 2022, vol. 106, no. 2, pp. 108–116.
14. Wright, E.M., On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. London Math. Soc.*, 1933, vol. 8, no. 29, pp. 71–79.
15. Gadzova, L.Kh., Zadacha Koshi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom drobnogo diskretno raspredelennogo differentsirovaniya, *Vest. KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2018, vol. 3, no. 23, pp. 48–56.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1460–1470

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ

© 2024 г. А. П. Крищенко

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

e-mail: apkri@bmstu.ru, yapkri@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.05.2024 г., после доработки 26.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Доказаны условия положительной инвариантности и компактности локализирующих множеств и расширенных локализирующих множеств. Получено необходимое условие существования аттрактора в системе. Введено понятие итерационной последовательности расширенных локализирующих множеств и получено условие, при выполнении которого её элементы являются положительно инвариантными компактными множествами и дают оценку множества притяжения. С помощью полученных результатов исследовано поведение траекторий трёхмерной системы для допустимых значений её параметров. Найдены условия устойчивости в целом одного её положения равновесия и указано множество притяжения другого положения равновесия.

Ключевые слова: положительно инвариантное множество, локализующая функция, локализующее множество, компактное инвариантное множество, аттрактор, предельная граница

DOI: 10.31857/S0374064124110037, EDN: JELHZZ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При решении некоторых задач качественного анализа системы дифференциальных уравнений можно использовать метод локализации инвариантных компактов (МЛИК) [1], связанный с изучением поведения функций вдоль траекторий системы и генерирующий построение положительно инвариантных областей в фазовом пространстве.

В работах последних лет данный метод используется при анализе поведения траекторий систем, описывающих динамику популяций. Среди исследуемых вопросов можно отметить определение условий вымирания популяций [2, 3], существование периодических траекторий [4], аттрактора [4, 5], предельных границ траекторий [2–6], установление связей между положениями равновесия и численными методами решения нелинейных уравнений [5, 7].

Отметим, что в большинстве работ авторы используют МЛИК в основном для поиска предельных границ траекторий и их уточнения [7, 8], для нахождения локализирующих множеств и получения условий вымирания популяций [8, 9].

Постановка основных задач, решаемых МЛИК, возникла в связи с анализом метода Пуанкаре нахождения периодических траекторий. В [10] в частном случае инвариантных компактов приведены основные определения и результаты МЛИК, включая итерационную процедуру. Результаты работы [10] для периодических траекторий были распространены в статье [1] на инвариантные компакты.

Начальной операцией МЛИК является сопоставление заданному подмножеству фазового пространства и непрерывно дифференцируемой функции (*локализирующей функции*) на этом подмножестве такого множества специального вида (*локализирующего множества*) [1], которое включает все инвариантные компакты системы, содержащиеся в заданном подмножестве. Эту операцию можно выполнять неоднократно, используя только что найденное локализирующее множество и выбирая другую или уже использовавшуюся локализирующую функцию. Так возникает последовательность локализирующих множеств, вложенных друг в друга (*итерационная последовательность*) [1, 10]. В результате происходит уменьшение локализирующих множеств, однако оказываются полезными и их расширения.

В данной работе МЛИК применяется при исследовании вопросов существования аттрактора, предельной ограниченности траекторий, устойчивости в целом положений равновесия, продолжения решений на неограниченный вправо интервал времени, построения оценок областей притяжения. Основное внимание при этом отводится построению итерационных последовательностей и расширению локализирующих множеств, доказательству их свойств. Среди элементов итерационной последовательности может оказаться положительно инвариантное компактное множество, что имеет большое значение для дальнейшего исследования. Действительно, у таких итерационных последовательностей все последующие элементы также являются положительно инвариантными компактными множествами. Кроме того, возникает возможность модификации предыдущих элементов итерационной последовательности с помощью их параметрических расширений и получения положительно инвариантного компактного расширенного локализирующего множества, зависящего от дополнительных параметров. С помощью выбора значений этих параметров в такое множество можно включить любую точку фазового пространства, что имеет важные следствия для свойств решений.

2. ЛОКАЛИЗИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x), \quad x\in D\subseteq \mathbb{R}^n, \quad f\in C^1(D). \tag{1}$$

Множеству $Q\subseteq D$ и функции $\varphi\in C^1(D)$ соответствуют множество $S(\varphi)=\{x\in D\colon \dot{\varphi}(x)=0\}$, называемое *универсальным сечением*, и экстремальные значения

$$\varphi_{\inf}(Q)=\inf_{S(\varphi,Q)}\varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q)=\sup_{S(\varphi,Q)}\varphi(x),$$

где $S(\varphi,Q)=S(\varphi)\cap Q$ — часть универсального сечения $S(\varphi)$, содержащаяся в Q.

Теорема 1 [1]. *Все инвариантные компакты автономной системы (1), содержащиеся во множестве Q, содержатся во множествах*

$$\{\varphi_{\inf}(Q)\leqslant\varphi(x)\}\cap Q, \quad \{\varphi(x)\leqslant\varphi_{\sup}(Q)\}\cap Q, \quad \{\varphi_{\inf}(Q)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi_{\sup}(Q)\}\cap Q. \tag{2}$$

Множества (2) называют *локализирующими* и обозначают $\Omega(\varphi,Q)$. Если $S(\phi)\cap Q=\emptyset$, то это означает, что во множестве Q нет инвариантных компактов. В этом случае будем полагать, что $\Omega(\varphi,Q)=\emptyset$.

Известно [11, с. 127], что ω-предельное множество ограниченной положительной полутраектории является инвариантным компактом. Следовательно, если множество D положительно инвариантно и замкнуто, то ω-предельные множества всех ограниченных положительных полутраекторий системы (1) содержатся в D и, согласно теореме 1, в локализирующем множестве $\Omega(\varphi,D)$.

При любых $\tau,\nu\geqslant 0$ множество

$$\Omega(\varphi,Q,\tau,\nu)=\{\varphi_{\inf}(Q)-\tau\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi_{\sup}(Q)+\nu\}\cap Q$$

называют *расширенным локализирующим множеством.* Оно содержит все инвариантные компакты системы (1), содержащиеся в Q, поскольку $\Omega(\varphi,Q,\tau,\nu)\supseteq\Omega(\varphi,Q,0,0)=\Omega(\varphi,Q)$.

Локализирующие множества и их расширения имеют важные свойства. Часть из них связана с тем, что локализирующее множество $\Omega(\varphi,Q)$ всегда содержит все нули производной локализирующей функции во множестве Q, т.е. $S(\varphi)\cap Q\subset\Omega(\varphi,Q)$. Следовательно, множество $Q\setminus\Omega(\varphi,Q)$ распадается на компоненты связности, в каждой из которых производная локализирующей функции $\dot\varphi$ сохраняет знак. Множество $Q\setminus\Omega(\varphi,Q)$ равно объединению двух непересекающихся множеств: $\{\varphi(x)>\varphi_{\sup}(Q)\}\cap Q$ и $\{\varphi(x)<\varphi_{\inf}(Q)\}\cap Q$, для которых справедлива следующая

Теорема 2. *Если множество Q положительно инвариантно, функция $\dot\varphi$ отрицательна во множестве $\{\varphi(x)>\varphi_{\sup}(Q)\}\cap Q$ и положительна во множестве $\{\varphi(x)<\varphi_{\inf}(Q)\}\cap Q$, то при любых $\tau,\nu\geqslant 0$ множество $\Omega(\varphi,Q,\tau,\nu)$ положительно инвариантно.*

Доказательство. Предположим, что траектория выходит из множества $\Omega(\varphi,Q,\tau,\nu)$ через точку x_0. Рассмотрим случай, когда $x_0\in\{\varphi(x)=\varphi_{\sup}(Q)+\nu\}$. Тогда траектория попадает в компоненту связности, где $\varphi(x)>\varphi_{\sup}(Q)+\nu\geqslant\varphi_{\sup}(Q)$, а это возможно лишь в случае компоненты связности, для которой $\dot\varphi>0$, что противоречит условию теоремы. При $x_0\in\{\varphi(x)=\varphi_{\inf}(Q)-\tau\}$ доказательство аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если замкнутое множество Q положительно инвариантно, а траектории системы ограничены, то для любой функции $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ локализирующее множество $\Omega(\varphi,Q)$ положительно инвариантно.*

Доказательство. Предположим, что траектория выходит из локализирующего множества $\Omega(\varphi,Q)$ через точку x_0. Рассмотрим случай, когда $x_0\in\{\varphi(x)=\varphi_{\sup}(Q)\}$. Тогда траектория попадает в компоненту связности, где $\varphi(x)>\varphi_{\sup}(Q)$, и поэтому для некоторой точки x_* выполнено неравенство $\varphi(x_*)>\varphi_{\sup}(Q)$, что возможно лишь в случае компоненты связности, для которой $\dot\varphi>0$. Но тогда траектория не выходит из положительно инвариантного множества $\{x\in Q\colon \varphi(x)\geqslant\varphi(x_*)>\varphi_{\sup}(Q)\}$, которое содержит и ω-предельное множество этой траектории. Последнее противоречит тому, что ω-предельное множество, как инвариантный компакт из Q, содержится в $\Omega(\varphi,Q)$, где $\varphi(x)\leqslant\varphi_{\sup}(Q)$. При $x_0\in\{\varphi(x)=\varphi_{\inf}(Q)\}$ доказательство аналогично. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если компактное множество Q положительно инвариантно, то для любой функции $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ локализирующее множество $\Omega(\varphi,Q)$ компактно и положительно инвариантно.*

Доказательство. Все положительные полутраектории в компактном положительно инвариантном множестве ограничены. Поэтому выполнены условия теоремы 3, согласно которой для любой функции $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ локализирующее множество $\Omega(\varphi,Q)$ положительно инвариантно. Оно компактно, так как замкнуто и содержится в компактном множестве Q. Теорема доказана.

Как следствие, справедлива следующая

Теорема 5 (необходимое условие существования аттрактора). *Если система (1) задана на замкнутом положительно инвариантном множестве D и имеет аттрактор, то для любой функции $\varphi\in C^1(D)$ локализирующее множество $\Omega(\varphi,D)$ положительно инвариантно.*

3. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть функции $\varphi_m(x)$, $m\in\mathbb{N}$, принадлежат классу $C^1(Q)$, $Q\subseteq\mathbb{R}^n$, $K_0=Q$. Все инвариантные компакты автономной системы $\dot x=f(x)$, содержащиеся во множестве Q, содержатся в расширенных локализирующих множествах

$$K_1=\Omega(\varphi_1,K_0,\tau_1,\nu_1),\quad K_2=\Omega(\varphi_2,K_1,\tau_2,\nu_2),\quad \ldots,\quad K_m=\Omega(\varphi_m,K_{m-1},\tau_m,\nu_m),\quad \ldots, \tag{3}$$

где постоянные τ_m, ν_m, $m \in \mathbb{N}$, неотрицательны. Если все τ_m, ν_m равны нулю, то последовательность (3) совпадает с итерационной последовательностью локализирующих множеств, введённой в [10]. Если же, например, $\tau_m = 0$, $\nu_m > 0$, то это может означать, что при нахождении K_m вместо вычисления $\varphi_{m\sup}(K_{m-1})$ используется оценка сверху, которая в (3) обозначена $\varphi_{m\sup}(K_{m-1}) + \nu_m$, и поэтому

$$\Omega(\varphi_m, K_{m-1}) = \{\varphi_{m,\inf}(K_{m-1}) \leqslant \varphi_m(x) \leqslant \varphi_{m,\sup}(K_{m-1})\} \cap K_{m-1} \subseteq$$
$$\subseteq \{\varphi_{m,\inf}(K_{m-1}) \leqslant \varphi_m(x) \leqslant \varphi_{m,\sup}(K_{m-1}) + \nu_m\} \cap K_{m-1} = \Omega(\varphi_m, K_{m-1}, 0, \nu_m) = K_m,$$

что упрощает вычисления и не нарушает соотношения $K_{m-1} \supseteq K_m$.

Определение. Последовательность (3) назовём *итерационной последовательностью расширенных локализирующих множеств.*

Отметим, что предел последовательности (3) всегда существует, равен $K_\infty = \cap_{m=0}^{+\infty} K_m$ и включает все инвариантные компакты системы, содержащиеся во множестве Q.

Теорема 6. *Если в итерационной последовательности (3) существует компактное положительно инвариантное множество K_p, то все последующие множества K_i, $i > p$, компактны и положительно инвариантны. Если дополнительно $K_\infty = x^*$, где x^* — положение равновесия, которое является внутренней точкой множеств (3), то x^* — асимптотически устойчивое положение равновесия с областью притяжения, содержащей множество K_p.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы о том, что множества K_i, $i > p$, компактны и положительно инвариантны, следует из теоремы 4. Несложно заметить, что для любой окрестности O точки x^* существует положительно инвариантное множество K_s, $s > p$, которое содержится в O. Точка x^* является внутренней точкой множества K_s, и поэтому существует окрестность O_1 точки x^*, содержащаяся в K_s. Тогда любая траектория, начинающаяся в $O_1 \subset K_s$, не выходит из $K_s \subset O$ и стремится к точке x^*. Это означает асимптотическую устойчивость положения равновесия x^*. Кроме того, траектории, начинающиеся в положительно инвариантном компакте K_p, ограничены и стремятся к своим ω-предельным множествам, которые совпадают с положением равновесия x^*. Теорема доказана.

При построении последовательности (3) удобно использовать периодические последовательности локализирующих функций, в которых первые q функций попарно различны и равны $h_1, \ldots, h_q$, а потом они повторяются в том же порядке. В этом случае все множества K_{qj+i}, $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, q-1}$, задаются с помощью q двойных неравенств

$$K_{qj+i} = \{\alpha_{s,j+1} \leqslant h_s \leqslant \beta_{s,j+1} \ \ (s = \overline{1, i}), \ \ \alpha_{s,j} \leqslant h_s \leqslant \beta_{s,j} \ \ (s = \overline{i+1, q})\} \cap Q$$

относительно функций h_s, $s = \overline{1, q}$. Нижние (верхние) границы значений функций h_s в этих неравенствах образуют q неубывающих (невозрастающих) ограниченных числовых последовательностей $\alpha_{s,j}$, $j \in \mathbb{N}$, ($\beta_{s,j}$, $j \in \mathbb{N}$) $s = \overline{1, q}$, которые имеют пределы $\alpha_{s,*}$ ($\beta_{s,*}$), задающие множество $K_\infty = \{\alpha_{s,*} \leqslant h_s(x) \leqslant \beta_{s,*}, \ \ s = \overline{1, q}\} \cap Q$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛИЗИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ И ИТЕРАЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Локализирующие множества и их итерационные последовательности оказываются полезными при исследовании нелинейных систем. Для примера рассмотрим трёхмерную систему динамики популяций [12]

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = r x_2 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \alpha x_1 - \frac{\beta x_1 x_3}{x_1 + n}, \quad \dot{x}_2 = f_2(x) = \alpha x_1 - \delta_1 x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3 f_3(x) = \left(\frac{\varphi \beta x_1}{x_1 + n} - \delta_2\right) x_3 \quad (4)$$

с неотрицательными переменными $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_{+,0}=\{x\geqslant 0\}$ и положительными параметрами, где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ — плотности популяций подрастающих жертв, взрослых жертв и хищников соответственно.

Для этой системы покажем, что все её решения продолжаются на неограниченный вправо интервал времени и ограничены и у неё есть аттрактор. Кроме того, найдём условия асимптотической устойчивости и устойчивости в целом одного положения равновесия системы и область притяжения другого положения равновесия.

Сформулируем следующую теорему об инвариантных компактах системы (4) и её аттракторе.

Теорема 7. *Все инвариантные компакты системы (4) содержатся в положительно инвариантных множествах*

$$K_1=\{x_1\leqslant k\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},\quad K_2=\{x_1\leqslant k, x_2\leqslant \alpha k/\delta_1\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},$$

$$K_3=\{x_1\leqslant k, x_2\leqslant \alpha k/\delta_1, x_1+x_3/\varphi\leqslant k+r\alpha k/(\delta_1\delta_2)\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}.$$

Множество K_3 компактно и содержит аттрактор системы.

Доказательство. Множество $\mathbb{R}^3_{+,0}$ положительно инвариантно. Для локализирующей функции $h_1(x)=x_1$, $h_1\in C^1(\mathbb{R}^3_{+,0})$, и множества $Q=\mathbb{R}^3_{+,0}$ находим, что универсальное сечение

$$S(h_1,\mathbb{R}^3_{+,0})=\left\{rx_2\left(1-\frac{x_1}{k}\right)-\alpha x_1-\frac{\beta x_1x_3}{x_1+n}=0\right\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}$$

содержится в множестве $\{0\leqslant h_1(x)=x_1\leqslant k\}$ и содержит точку $(0,0,0)$. Следовательно, $h_{1\,\inf}(\mathbb{R}^3_{+,0})=0$, $h_{1\,\sup}(\mathbb{R}^3_{+,0})\leqslant k$, локализирующее множество

$$\Omega(h_1,\mathbb{R}^3_{+,0})=\{h_{1\,\inf}(\mathbb{R}^3_{+,0})\leqslant h_1\leqslant h_{1\,\sup}(\mathbb{R}^3_{+,0})\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}$$

содержится в множестве $\{0\leqslant x_1\leqslant k\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}=K_1$. В результате все инвариантные компакты системы содержатся в K_1 и во множествах

$$K_1(\epsilon)=\{x_1\leqslant k+\epsilon\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},\quad \epsilon\geqslant 0.$$

Множества $K_1(\epsilon)$ положительно инвариантны, поскольку $\dot h_1=\dot x_1<0$ в множестве $\mathbb{R}^3_{+,0}\setminus K_1(\epsilon)=\{x_1>k+\epsilon\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}$.

Рассмотрим локализирующую функцию $h_2(x)=x_2$, $h_2\in C^1(\mathbb{R}^3_{+,0})$, и положительно инвариантное множество $K_1(\epsilon)$. В точках множества

$$S(h_2,K_1(\epsilon))=\{\alpha x_1-\delta_1x_2=0, x_1\leqslant k+\epsilon\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}$$

выполнены неравенства $0\leqslant h_2(x)$, $h_2(x)\leqslant\alpha(k+\epsilon)/\delta_1$, которые превращаются в равенства в соответствующих точках $(0,0,0),(k+\epsilon,\alpha(k+\epsilon)/\delta_1,0)\in S(h_2,K_1(\epsilon))$. В результате находим экстремальные значения $h_{2\,\inf}(K_1(\epsilon))=0$, $h_{2\,\sup}(K_1(\epsilon))=\alpha(k+\epsilon)/\delta_1$ и локализирующее множество

$$\Omega(h_2,K_1(\epsilon))=\{0\leqslant x_2\leqslant\alpha(k+\epsilon)/\delta_1\}\cap K_1(\epsilon)=K_2(\epsilon),$$

а $K_2(0)=K_2$.

Отметим, что $\dot h_2=\dot x_2<0$ в множестве $K_1(\epsilon)\setminus K_2(\epsilon)=\{0\leqslant x_1\leqslant k+\epsilon, x_2>\alpha(k+\epsilon)/\delta_1\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}$, и поэтому расширения локализирующего множества $K_2(\epsilon)$, т.е.

$$K_2(\epsilon,\tau)=\{x_2\leqslant\alpha(k+\epsilon)/\delta_1+\tau\}\cap K_1(\epsilon)=\{x_1\leqslant k+\epsilon, x_2\leqslant\alpha(k+\epsilon)/\delta_1+\tau\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},$$

положительно инвариантны при всех $\epsilon\geqslant 0$ и $\tau\geqslant 0$ и содержат все инвариантные компакты системы.

Рассмотрим локализирующую функцию $h_3 = x_1 + x_3/\varphi$ и положительно инвариантное множество $K_2(\epsilon,\tau)$. Для $\dot h_3$ в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ справедлива оценка

$$\dot h_3 = rx_2(1-x_1/k) - \alpha x_1 - \delta_2 x_3/\varphi \leqslant rx_2 - \delta_2 x_3/\varphi,$$

а на множестве $S(h_3, K_2(\epsilon,\tau))$ выполнены неравенства

$$x_3 \leqslant \frac{r\varphi}{\delta_2}x_2 \leqslant \frac{r\varphi}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right), \quad h_3 \leqslant k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right).$$

Следовательно,

$$h_{3\,\sup}(K_2(\epsilon,\tau)) \leqslant k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)$$

и локализирующее множество $\Omega(h_3, K_2(\epsilon,\tau))$ содержится в компактном множестве

$$\left\{x_1 + x_3/\varphi \leqslant k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)\right\} \cap K_2(\epsilon,\tau) = K_3(\epsilon,\tau),$$

которое содержит все инвариантные компакты системы и при $\epsilon=0$, $\tau=0$ совпадает с K_3.

Во множестве $K_2(\epsilon,\tau)\setminus K_3(\epsilon,\tau)$ выполнено неравенство $\dot h_3 < 0$. Действительно, если

$$h_3 = x_1 + x_3/\varphi = k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)+d, \quad d>0,$$

то

$$\dot h_3 \leqslant rx_2 - \delta_2 x_3/\varphi = rx_2 - \delta_2\left(k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)+d-x_1\right) =$$

$$= rx_2 - \delta_2\left(k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)\right) - \delta_2 d + \delta_2 x_1 \leqslant$$

$$\leqslant r\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right) - \delta_2\left(k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)\right) - \delta_2 d + \delta_2(k+\epsilon) = -\delta_2 d < 0.$$

В результате получаем, что компактное множество

$$K_3(\epsilon,\tau,\nu) = \{x_1 + x_3/\varphi \leqslant h_{3\,\sup}(K_2(\epsilon,\tau)) + \nu\} \cap K_2(\epsilon,\tau) =$$

$$= \left\{x_1 \leqslant k+\epsilon,\ x_2 \leqslant \alpha(k+\epsilon)/\delta_1+\tau,\ x_1 + x_3/\varphi \leqslant k+\epsilon+\frac{r}{\delta_2}\left(\frac{\alpha}{\delta_1}(k+\epsilon)+\tau\right)+\nu\right\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}$$

при всех неотрицательных ϵ, τ, ν положительно инвариантно. Начальная точка любой траектории в $\mathbb{R}^3_{+,0}$ при достаточно бóльших значениях ϵ, τ, ν содержится во множестве $K_3(\epsilon,\tau,\nu)$. Следовательно, все решения системы (4) продолжаются на неограниченный вправо интервал времени [13, с. 107], ограничены и стремятся к их ω-предельным множествам, которые содержатся в компактном множестве K_3. Замыкание объединения этих ω-предельных множеств есть аттрактор системы (4), и он содержится в локализирующем множестве K_3. Теорема доказана.

4.1. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Система (4) имеет не более трёх положений равновесия: E_0, E_1, E_2. Условия их существования и асимптотической устойчивости, полученные в [12], уточняет следующая

Теорема 8. *1. Нулевое положение равновесия $E_0(0,0,0)$ существует при всех значениях параметров, оно асимптотически устойчиво при $r<\delta_1$ и неустойчиво при $r>\delta_1$.*

2. При $r > \delta_1$ существует положение равновесия $E_1(x_{11}, x_{21}, 0)$, $x_{11}, x_{21} > 0$, где

$$x_{11} = k(r - \delta_1)/r, \quad x_{21} = \alpha x_{11}/\delta_1. \tag{5}$$

Оно асимптотически устойчиво, если

$$\delta_2 > \delta_{2*} = \frac{\varphi\beta x_{11}}{x_{11} + n}, \tag{6}$$

и неустойчиво при $\delta_2 < \delta_{2*}$.

3. Внутреннее положение равновесия $E_2(x_{1*}, x_{2*}, x_{3*})$, $x_{1*}, x_{2*}, x_{3*} > 0$, где

$$x_{1*} = \frac{\delta_2 n}{\beta\varphi - \delta_2}, \quad x_{2*} = \frac{\alpha}{\delta_1} x_{1*}, \quad x_{3*} = \frac{\alpha\varphi x_{1*}}{\delta_1\delta_2}\left(r - \delta_1 - \frac{r x_{1*}}{k}\right), \tag{7}$$

существует при выполнении системы неравенств

$$\beta\varphi - \delta_2 > 0, \quad r(1 - x_{1*}/k) > \delta_1. \tag{8}$$

Доказательство. Положения равновесия системы (4) являются неотрицательными решениями системы уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad x_3 f_3(x) = 0 \tag{9}$$

и легко находятся. Действительно, если $x_3 = 0$ и $x_1 = 0$, то $x_2 = 0$ и получаем положение равновесия E_0 при всех значениях параметров. В случае $x_3 = 0$, $x_1 > 0$ из второго уравнения системы (9) следует, что $x_2 = \alpha x_1/\delta_1 > 0$, и после подстановки x_3, x_2 в первое уравнение получаем $x_1 = k(r - \delta_1)/r$. Это решение системы (9) при $r > \delta_1$ неотрицательно и ему соответствует положение равновесия E_1. В случае $x_3 > 0$ при $\beta\varphi - \delta_2 > 0$ из третьего уравнения системы (9) находим $x_1 = x_{1*} > 0$, из второго — $x_2 = x_{2*} > 0$, а из первого — $x_3 = x_{3*} > 0$, и полученное решение (7) положительно при выполнении системы неравенств (8).

Условия асимптотической устойчивости положений равновесия E_0, E_1 следуют из анализа матриц Якоби $J(x)$ в этих точках:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\alpha & r & 0 \\ \alpha & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{pmatrix}, \quad J(E_1) = \begin{pmatrix} -\alpha r/\delta_1 & \delta_1 & * \\ \alpha & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{2*} - \delta_2 \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что действительные части корней характеристического многочлена матрицы $J(E_0)$ ($J(E_1)$) отрицательны лишь при $r < \delta_1$ (соответственно $\delta_2 > \delta_{2*}$), что завершает доказательство теоремы, поскольку условия асимптотической устойчивости положения E_2 имеют громоздкий вид [12] и здесь не приводятся. Теорема доказана.

Условия существования и асимптотической устойчивости положений равновесия из теоремы 8 допускают удобную переформулировку, указывающую на r как на бифуркационный параметр системы (4).

Следствие. *Система (4) всегда имеет положение равновесия E_0. При $r < \delta_1$ оно асимптотически устойчивое; при $r > \delta_1$ — неустойчивое и возможны два случая:*

1) если $\delta_2 - \beta\varphi > 0$, то существует второе положение равновесия E_1, которое асимптотически устойчиво;

2) если $\delta_2 - \beta\varphi < 0$, то $\delta_{1*} = \delta_1/(1 - x_{1*}/k) > \delta_1$, существует второе положение равновесия E_1, которое асимптотически устойчиво при $\delta_1 < r < \delta_{1*}$, но при $r > \delta_{1*}$ оно неустойчиво и существует третье положение равновесия E_2.

Доказательство. Запишем условие (6) в эквивалентном виде $x_{11}(\delta_2-\beta\varphi)+\delta_2 n>0$. Если $\delta_2-\beta\varphi>0$, то (6) выполнено и положение равновесия E_1 асимптотически устойчиво, а положения равновесия E_2 нет. В случае $\delta_2-\beta\varphi<0$ условие (6) эквивалентно неравенству $x_{11}<\delta_2 n/(\beta\varphi-\delta_2)=x_{1*}$, т.е. $r(1-x_{1*}/k)<\delta_1$. Если это неравенство выполнено, то E_1 асимптотически устойчиво, а положения равновесия E_2 нет, а если оно не выполнено, т.е. $r(1-x_{1*}/k)>\delta_1$, то положение равновесия E_1 неустойчиво и существует E_2. Следствие доказано.

4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ E_0 В ЦЕЛОМ

Для положения равновесия $E_0(0,0,0)$ справедлива следующая

Теорема 9. *Если $r\leqslant\delta_1$, то положение равновесия $E_0(0,0,0)$ устойчиво в целом в $\mathbb{R}^3_{+,0}$.*

Доказательство. Построим итерационную последовательность локализирующих множеств (3), соответствующую начальному множеству $Q=\mathbb{R}^3_{+,0}$ и последовательности локализирующих функций

$$x_1, \quad x_2, \quad x_1+x_3/\varphi, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_1+x_3/\varphi, \quad \ldots, \tag{10}$$

и докажем, что для неё выполнены условия теоремы 6.

Последовательность (10) состоит из рассмотренных в доказательстве теоремы 7 функций h_1, h_2 и h_3, которые повторяются в одном и том же порядке и в положении равновесия E_0 имеют наименьшее значение в $\mathbb{R}^3_{+,0}$, равное нулю. Поэтому в итерационной последовательности локализирующих множеств первые три множества совпадают с K_1, K_2 и K_3 из теоремы 7. Множество K_3 положительно инвариантно, компактно и содержит аттрактор системы. Согласно теореме 6 следующие множества K_i, $i>3$, итерационной последовательности (3), в том числе и её предел K_∞, тоже будут положительно инвариантными, компактными, содержащими аттрактор системы. Найдём множество K_∞.

Множество K_3 и следующие множества с номерами $3j+i$, $j\in\mathbb{N}$, $i=0,1,2,3$, запишем в виде

$$K_{3j}=\{x_1\leqslant a_j,\ \ x_2\leqslant b_j,\ \ x_1+x_3/\varphi\leqslant c_j\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},$$

$$K_{3j+1}=\{x_1\leqslant a_{j+1},\ \ x_2\leqslant b_j,\ \ x_1+x_3/\varphi\leqslant c_j\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},$$

$$K_{3j+2}=\{x_1\leqslant a_{j+1},\ \ x_2\leqslant b_{j+1},\ \ x_1+x_3/\varphi\leqslant c_j\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0},$$

$$K_{3j+3}=\{x_1\leqslant a_{j+1},\ \ x_2\leqslant b_{j+1},\ \ x_1+x_3/\varphi\leqslant c_{j+1}\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}.$$

Найдём числовые последовательности $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$. Несложно заметить, что это невозрастающие последовательности с неотрицательными членами, их пределы a, b, и c существуют, единственны и определяют множество $K_\infty=\{x_1\leqslant a, x_2\leqslant b, x_1+x_3/\varphi\leqslant c\}\cap\mathbb{R}^3_{+,0}$.

Поскольку множество K_3 уже известно, то

$$a_1=k, \quad b_1=\alpha k/\delta_1, \quad c_1=k+r\alpha k/(\delta_1\delta_2).$$

Найдём a_{j+1} при $j\geqslant 1$. Поскольку

$$\dot h_1=rx_2-x_1\left(\frac{rx_2}{k}+\alpha\right)-\frac{\beta x_1x_3}{x_1+n},$$

то на $S(h_1,K_{3j})$ выполнено неравенство

$$x_1=\frac{k}{rx_2+\alpha k}\left(rx_2-\frac{\beta x_1x_3}{x_1+n}\right)\leqslant\frac{rb_jk}{rb_j+\alpha k}=h_{1\,\sup}(K_{3j}).$$

Следовательно, найдено локализирующее множество $\Omega(h_1, K_{3j}) = \{0 \leqslant x_1 \leqslant rb_jk/(rb_j+\alpha k)\} \cap \cap K_{3j}$ и, полагая $K_{3j+1} = \Omega(h_1, K_{3j})$, получаем $a_{j+1} = rb_jk/(rb_j+\alpha k)$.

Аналогично найдём b_{j+1} при $j \geqslant 1$. Поскольку $\dot{h}_2 = \alpha x_1 - \delta_1 x_2$, то на $S(h_2, K_{3j+1})$ получаем оценку $x_2 = \alpha x_1/\delta_1 \leqslant \alpha a_{j+1}/\delta_1 = h_{2\sup}(K_{3j+1})$. Таким образом, найдено локализирующее множество

$$\Omega(h_2, K_{3j+1}) = \{0 \leqslant x_2 \leqslant \alpha a_{j+1}/\delta_1\} \cap K_{3j+1}$$

и, полагая $K_{3j+2} = \Omega(h_2, K_{3j+1})$, получаем $b_{j+1} = \alpha a_{j+1}/\delta_1$.

Наконец, найдём c_{j+1} при $j \geqslant 1$. Поскольку $\dot{h}_3 = rx_2(1-x_1/k) - \alpha x_1 - \delta_2 x_3/\varphi$, то на $S(h_3, K_{3j+2})$ справедлива оценка

$$h_3 = x_1 + x_3/\varphi = x_1 + (rx_2(1-x_1/k) - \alpha x_1)/\delta_2 \leqslant a_{j+1} + rb_{j+1}/\delta_2.$$

Следовательно, $h_{3\sup}(K_{3j+1}) \leqslant a_{j+1} + rb_{j+1}/\delta_2$ и $\Omega(h_3, K_{3j+2}) \subseteq K_{3j+3}$ при $c_{j+1} = a_{j+1} + rb_{j+1}/\delta_2$.

В результате члены последовательностей связаны рекуррентными соотношениями

$$a_{j+1} = rb_jk/(rb_j+\alpha k), \quad b_{j+1} = \alpha a_{j+1}/\delta_1, \quad c_{j+1} = a_{j+1} + rb_{j+1}/\delta_2.$$

Переходя в них к пределу, получаем систему уравнений

$$a = rbk/(rb+\alpha k), \quad b = \alpha a/\delta_1, \quad c = a + rb/\delta_2. \tag{11}$$

Из первых двух уравнений системы (11) следует уравнение $a(ra + k\delta_1) = rak$, откуда $a = 0$ или $a = k(1-\delta_1/r)$. Значит, при $r \leqslant \delta_1$ система (11) имеет единственное неотрицательное решение $a=0$, $b=0$, $c=0$ и K_∞ совпадает с положением равновесия $E_0(0,0,0)$; E_0 — внутренняя точка (в индуцированной на $\mathbb{R}^3_{+,0}$ топологии) всех множеств построенной итерационной последовательности. Согласно теореме 6 положение равновесия E_0 асимптотически устойчиво и является аттрактором системы. Следовательно, E_0 устойчиво в целом. Теорема доказана.

Замечание. При $r > \delta_1$ система (11) имеет два неотрицательных решения:

$$a = a_* = k(1-\delta_1/r), \quad b = b_* = \alpha k(r-\delta_1)/(r\delta_1), \quad c = c_* = a + rb/\delta_2$$

задаёт множество $K_\infty = K_* = \{x_1 \leqslant a_*, x_2 \leqslant b_*, x_3 \leqslant c_*\} \cap \mathbb{R}^3_{+,0}$, а второе нулевое — оно постороннее в случае $r > \delta_1$, поскольку последовательности $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ имеют единственный предел.

4.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ E_1 В $\mathbb{R}^3_{+,0} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$

Множество $\mathbb{R}^3_{+,0} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ состоит из фазовой траектории системы (4) и положения равновесия E_0, к которому она стремится. Оказывается, что остальные точки множества $\mathbb{R}^3_{+,0}$ образуют область притяжения положения равновесия E_1 в случае его асимптотической устойчивости.

Теорема 10. *Если $r > \delta_1$, $\delta_2 > \varphi\beta x_{11}/(x_{11}+n)$, то аттрактор системы (4) состоит из двух положений равновесия E_0, E_1 и все траектории в $\mathbb{R}^3_{+,0} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ стремятся к асимптотически устойчивому положению равновесия E_1.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы положение равновесия E_1 существует и асимптотически устойчиво. Для доказательства достаточно рассмотреть положительно инвариантное компактное множество K_*, содержащее аттрактор системы (4). Отметим, что $a_* = x_{11}$, $b_* = x_{21}$, где x_{11}, x_{21} (см. (5)) — первые две координаты положения равновесия E_1, и найдём локализирующее множество $\Omega(h(x), K_*)$, где $h(x) = x_3$. В K_* для производной функции $h(x)$ справедлива оценка

$$\dot{h} = \left(\frac{\varphi\beta x_1}{x_1+n} - \delta_2\right)x_3 \leqslant \left(\frac{\varphi\beta a_*}{a_*+n} - \delta_2\right)x_3 = \left(\frac{\varphi\beta x_{11}}{x_{11}+n} - \delta_2\right)x_3 \leqslant 0$$

и $\dot{h} = 0$ лишь при $x_3 = 0$. Поэтому $h_{\inf}(K_*) = 0$, $h_{\sup}(K_*) = 0$ и положительно инвариантное локализирующее множество

$$\Omega(h, K_*) = \{x_3 = 0\} \cap K_* = \{0 \leqslant x_1 \leqslant a_* = x_{11}, 0 \leqslant x_2 \leqslant b_* = x_{21}, x_3 = 0\} = U$$

содержит аттрактор системы (4). Следовательно, предельное поведение траекторий системы (4) определяется динамикой ограничения системы (4) на инвариантную плоскость $\{x_3 = 0\}$

$$\dot{x}_1 = rx_2\left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \alpha x_1, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 - \delta_1 x_2, \quad x_1, x_2 \geqslant 0, \tag{12}$$

в положительно инвариантном множестве $\hat{U} = \{0 \leqslant x_1 \leqslant x_{11},\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_{21}\}$. Система (12) имеет два положения равновесия: седло $\hat{E}_0(0,0)$ и устойчивый узел $\hat{E}_1(x_{11}, x_{21})$. Функция $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - x_{11})^2/2 + \delta_1(x_2 - x_{21})^2/2$ неотрицательна, равна нулю только в точке $\hat{E}_1$ и имеет производную $\dot{V}(x_1, x_2) = -(\alpha x_1 - \delta_1 x_2)^2 - \alpha r x_2(x_1 - x_{11})^2/k$, которая в $\hat{U}$ неположительная и равна нулю только в положениях равновесия $\hat{E}_0$ и $\hat{E}_1$. Если $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \hat{U}$ и $M_0 \neq \hat{E}_0$, $M_0 \neq \hat{E}_1$, то точка M_0 принадлежит области $(\hat{U} \setminus \hat{E}_1) \cap \{V(x_1, x_2) < V(0,0)\}$, где $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$, и поэтому траектория $\gamma((x_{10}, x_{20}), t)$ не выходит из положительно инвариантного множества $\hat{U} \cap \{V(x_1, x_2) < V(x_{10}, x_{20})\}$ и стремится к $\hat{E}_1$. Теорема доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крищенко, А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1597–1604.
2. Starkov, K.E. Cancer cell eradication in a 6D metastatic tumor model with time delay / K.E. Starkov, A.N. Kanatnikov // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2023. — V. 120. — Art. 107164.
3. Kanatnikov, A.N. Ultimate dynamics of the two-phenotype cancer model: attracting sets and global cancer eradication conditions / A.N. Kanatnikov, K.E. Starkov // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 20. — Art. 4275.
4. Крищенко, А.П. Бифуркация Хопфа в системе хищник–жертва с инфекцией / А.П. Крищенко, О.А. Поддерегин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1566–1570.
5. Крищенко, А.П. Поведение траекторий систем с положительными переменными / А.П. Крищенко, Е.С. Тверская // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1439–1446.
6. Starkov, K.E. On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model / K.E. Starkov, A.P. Krishchenko // Mathematics. — 2024. — V. 12, № 6. — Art. 843.
7. Analysis of immunotherapeutic control of the TH1/TH2 imbalance in a 4D melanoma model applying the invariant compact set localization method / M.N. Gómez-Guzmán, E. Inzunza-González, E. Palomino-Vizcaino [et al.] // Alex. Eng. J. — 2024. — V. 107. — P. 838–850.
8. Gamboa, D. Ultimate bounds for a diabetes mathematical model considering glucose homeostasis / D. Gamboa, L.N. Coria, P.A. Valle // Axioms. — 2022. — V. 11, № 7. — Art. 320.
9. Starkov, K.E. Dynamic analysis of the melanoma model: from cancer persistence to its eradication / K.E. Starkov, L.J. Beristain // Int. J. Bifur. Chaos. — 2017. — V. 27. — Art. 1750151.
10. Krishchenko, A.P. Estimations of domains with cycles / A.P. Krishchenko // Comput. Math. Appl. — 1997. — V. 34, № 3–4. — P. 325–332.
11. Khalil, H.K. Nonlinear Systems / H.K. Khalil. — 3rd edn. — Upper Saddle River : Prentice Hall, 2002. — 750 p.
12. Beay, L.K. A stage-structure Rosenzweig–MacArthur nodel with effect of prey refuge / L.K. Beay, M. Saija // Jambura J. Biomath. — 2020. — V. 1, № 1. — P. 1–7.
13. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд — М. : МЦНМО, 2012. — 341 с.

ITERATIVE SEQUENCES OF THE LOCALIZATION METHOD

A. P. Krishchenko

Bauman Moscow State Technical University, Russia
e-mail: apkri@bmstu.ru, yapkri@yandex.ru

The conditions of positive invariance and compactness of localizing sets and extended localizing sets are proved. The necessary condition for the existence of an attractor in the system is obtained. The concept of an iterative sequence of extended localizing sets is introduced and a condition is obtained under which its elements are positively invariant compact sets and give an estimate of the attraction set. Using the obtained results the behavior of the trajectories of a three-dimensional system for acceptable values of its parameters is investigated. The conditions of global stability of one of its equilibrium point are found and the set of attraction of another equilibrium point is indicated.

Keywords: positively invariant set, localizing function, localization set, compact invariant set, attractor, ultimate bound

REFERENCES

1. Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676.
2. Starkov, K.E. and Kanatnikov, A.N., Cancer cell eradication in a 6D metastatic tumor model with time delay, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2023, vol. 120, art. 107164.
3. Kanatnikov, A.N. and Starkov, K.E., Ultimate dynamics of the two-phenotype cancer model: attracting sets and global cancer eradication conditions, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 20, art. 4275.
4. Krishchenko, A.P. and Podderegin, O.A., Hopf bifurcation in a predator–prey system with infection, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1573–1578.
5. Krishchenko, A.P. and Tverskaya, E.S., Behavior of trajectories of systems with nonnegative variables, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 11, pp. 1408–1415.
6. Starkov, K.E. and Krishchenko, A.P., On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 6, art. 843.
7. Gómez-Guzmán, M.N., Inzunza-González, E., Palomino-Vizcaino, E. [et al.], Analysis of immunotherapeutic control of the TH1/TH2 imbalance in a 4D melanoma model applying the invariant compact set localization method, *Alex. Eng. J.*, 2024, vol. 107, pp. 838–850.
8. Gamboa, D., Coria, L.N., and Valle, P.A., Ultimate bounds for a diabetes mathematical model considering glucose homeostasis, *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 7, art. 320.
9. Starkov, K.E and Beristain, L.J., Dynamic analysis of the melanoma model: from cancer persistence to its eradication, *Int. J. Bifur. Chaos*, 2017, vol. 27, art. 1750151.
10. Krishchenko, A.P., Estimations of domains with cycles, *Comput. Math. Appl.*, 1997, vol. 34, no. 3–4, pp. 325–332.
11. Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*, 3rd edn., Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
12. Beay, L.K. and Saija, M., A stage-structure Rosenzweig–MacArthur model with effect of prey refuge, *Jambura J. Biomath.*, 2020, vol. 1, no. 1, pp. 1–7.
13. Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, Heidelberg; Berlin: Springer, 1992.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1471–1483

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ В КЛАССЕ $C^{1,0}(\overline{D})$ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Е. А. Бадерко[1], С. И. Сахаров[2]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
e-mail: [1]baderko.ea@yandex.ru, [2]ser341516@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.07.2024 г., после доработки 11.07.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Установлена однозначная разрешимость задачи Коши в полосе для параболической по И.Г. Петровскому системы уравнений второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в пространстве непрерывных и ограниченных вместе с производной первого порядка по пространственной переменной в замыкании полосы функций. Найдено интегральное представление решения задачи, получены соответствующие оценки этого решения.

Ключевые слова: параболическая система, задача Коши, условие Дини

DOI: 10.31857/S0374064124110049, EDN: JEKDOY

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача Коши для одномерной по пространственной переменной параболической системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини. Начальная функция предполагается непрерывной и ограниченной вместе со своей производной первого порядка.

Из общей теории краевых задач для параболических систем (см. [1; 2, с. 707]) следует однозначная разрешимость задачи Коши для параболической системы второго порядка с гёльдеровскими коэффициентами в пространстве $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, где $0<\alpha<1$. В статье [3] эти результаты были обобщены на случай растущих при $t\to+\infty$ решений.

Из результатов работы [4], где рассматривался случай параболического уравнения высокого порядка с гёльдеровскими коэффициентами, вытекает, в частности, однозначная разрешимость в пространстве $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$, $0<\alpha<1$, задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с начальной функцией из класса $H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$.

Задача Коши для одного параболического уравнения в пространстве Дини–Гёльдера $H^{1+\omega,1/2+\hat{\omega}}(\overline{D})$, где ω, $\hat{\omega}$ — некоторые модули непрерывности, при тройном условии Дини на коэффициенты уравнения рассматривалась в [5], при двойном условии Дини на эти коэффициенты — в [6]. В [7, 8] задача Коши для параболического уравнения исследована в пространствах Зигмунда.

В статьях [9, 10] установлена разрешимость задачи Коши для параболической системы с одной пространственной переменной, с гёльдеровскими коэффициентами, с начальной функцией из класса $H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ в пространстве $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$, $0<\alpha<1$. Вопрос о единственности решения этой задачи не рассматривался.

В статье [11] доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для параболических систем в весовом пространстве Гёльдера $C^{2,\alpha}_{\lambda,\alpha}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ функций, которые могут расти определённым образом при $t\to+\infty$ вместе со своими пространственными производными первого порядка, а их временна́я производная первого порядка и пространственные производные второго порядка могут расти как при $t\to+0$, так и при $t\to+\infty$. При этом предполагается, что коэффициенты системы локально гёльдеровы, младшие коэффициенты могут расти определённым образом при $t\to+0$, а правая часть системы может расти определённым образом как при $t\to+0$, так и при $t\to+\infty$.

Теорема о единственности решения задачи Коши для параболических систем второго порядка из пространства функций, принадлежащих классу Тихонова, пространственные производные первого и второго порядков которых принадлежат классу Тихонова в каждом слое $\mathbb{R}^n\times(t_1,T]$, $t_1\in(0,T)$, доказана в [12–14]. При этом предполагается, что коэффициенты систем при младших членах ограничены и непрерывны, а при старших ограничены, равномерно непрерывны и Дини-непрерывны по пространственной переменной.

В [15] установлена однозначная разрешимость в пространстве $\hat{C}^{2,1}(\overline{D})$ задачи Коши для однородной параболической системы, коэффициенты которой удовлетворяют двойному условию Дини, с начальной функцией, непрерывной и ограниченной вместе со своими производными первого и второго порядков. Пространство $\hat{C}^{2,1}(\overline{D})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ при подстановке в определение последнего $\alpha=0$, причём нормы в этих пространствах эквивалентны.

Естественно возникает вопрос: справедливы ли описанные выше результаты из работ [4, 9, 10] при подстановке $\alpha=0$ в определения пространств $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$ и $H^{1+\alpha}(\mathbb{R})$? В настоящей статье на него дан положительный ответ. А именно при сформулированных выше условиях на коэффициенты параболической системы и на начальную функцию доказано, что сумма объёмного потенциала и потенциала Пуассона является решением задачи Коши из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ (см. п. 1), которое совпадает с пространством $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$ при подстановке в определение последнего $\alpha=0$, и нормы в этих пространствах эквивалентны. Также доказана единственность классического решения задачи Коши в пространстве функций, ограниченных и непрерывных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании полосы.

Заметим, что достаточно слабые условия на коэффициенты системы и на начальную функцию не позволяют воспользоваться известными методами исследования характера гладкости решения задачи Коши в классах Гёльдера и Дини–Гёльдера. Используемый в настоящей работе метод опирается на подход из [15] и на свойства фундаментальных матриц решений параболических систем.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Следуя [16, с. 151], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, для которой $\omega(0)=0$. Модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z)\equiv\int\limits_0^z y^{-1}\omega(y)\,dy<+\infty,\quad z>0, \tag{1}$$

и *двойному условию Дини*, если

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}(z)\equiv\int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y x^{-1}\omega(x)\,dx<+\infty,\quad z>0. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество модулей непрерывности, удовлетворяющих условию Дини (1), а через $\mathcal{D}^2$ — двойному условию Дини (2).

Функция $\nu(z)$, $z>0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C>0$ выполняется неравенство $\nu(z_1)\leqslant C\nu(z_2)$, $z_1\geqslant z_2>0$. В отдельных случаях мы будем требовать, чтобы модуль непрерывности ω удовлетворял следующему условию:

Условие A. Существует такое $\varepsilon\in(0,1)$, что функция $\omega(z)z^{-\varepsilon}$, $z>0$, почти убывает.

Через $C^1(\mathbb{R})$ обозначим пространство (вектор-)функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной первого порядка h', с нормой

$$\|h;\mathbb{R}\|^1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|h'(x)|.$$

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Обозначим $D=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\colon x\in\mathbb{R},\ \ t\in(0,T)\}$, где $T>0$ — фиксированное число, $D_0=$ $=\{(x,t)\in\overline{D}\colon t=0\}$.

Пусть $\Omega\subset D$ — произвольная область. Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ (вектор-)функций с нормой $\|u;\Omega\|^0=\sup_{(x,t)\in\Omega}|u(x,t)|$. Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Введём пространства

$$C^{1,0}(\overline{\Omega})=\big\{u\in C^0(\overline{\Omega})\colon \partial_x u\in C^0(\overline{\Omega})\big\},\quad \|u;\Omega\|^{1,0}=\sum_{k=0}^{1}\|\partial_x^k u;\Omega\|^0,$$

$$\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})=\left\{u\in C^{1,0}(\overline{\Omega})\colon \|u;\Omega\|^1=\|u;\Omega\|^{1,0}+\sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega,\\ \Delta t\neq 0}}\frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}}<\infty\right\},$$

$$\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})=\{u\in C^{1,0}(\overline{\Omega})\colon \partial_x^k u(x,0)=0,\ \ k=0,1\},$$

$$\underset{0}{\hat{C}}^{1,0}(\overline{\Omega})=\{u\in \hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})\colon \partial_x^k u(x,0)=0,\ \ k=0,1\}.$$

Заметим, что пространство $\hat{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ совпадает с пространством Гёльдера $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ (см. [2, с. 16]) при подстановке в определение последнего $\alpha=0$. При этом нормы в этих пространствах эквивалентны.

Положим $C^{2,1}(\overline{\Omega})=\{u\in C^0(\overline{\Omega})\colon \partial_t^l\partial_x^k u\in C^0(\overline{\Omega}),\ 1\leqslant 2l+k\leqslant 2\}$. Обозначим через $C^{2,1}(\overline{D}\setminus D_0)$ пространство (вектор-)функций, непрерывных вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^k u$ $(k=1,2)$ в $\overline{D}\setminus D_0$.

Пусть $\mathcal{D}_x^{loc}(\overline{D}\setminus D_0)$ — пространство (вектор-)функций f таких, что для каждой ограниченной области Ω, для которой $\overline{\Omega}\subset\overline{D}\setminus D_0$, существует такой модуль непрерывности $\omega_\Omega\in\mathcal{D}$, что

$$|\Delta_x f(x,t)|\leqslant\omega_\Omega(|\Delta x|),\quad (x,t),(x+\Delta x,t)\in\overline{\Omega},$$

где $\Delta_x f(x,t)=f(x+\Delta x,t)-f(x,t)$.

Введём пространство $C_{1/2}(\overline{D}\setminus D_0)$ (вектор-)функций f, непрерывных в $\overline{D}\setminus D_0$, для которых $\|f;\overline{D}\setminus D_0\|_{1/2}=\sup_{(x,t)\in\overline{D}\setminus D_0}|f(x,t)|t^{1/2}<+\infty$.

Пусть число $m\in\mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим равномерно параболический по И.Г. Петровскому (см. [17]) оператор

$$Lu=\partial_t u-\sum_{k=0}^{2}A_k(x,t)\partial_x^k u,\quad u=(u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}},$$

где $A_k=\|a_{ijk}\|$, $k=0,1,2,$ — $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D}$, и выполнены условия:

a) собственные числа μ_r, $r=\overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r(x,t)\geqslant\delta$ для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$;

b) $|a_{ijk}(x+\Delta x,t+\Delta t)-a_{ijk}(x,t)|\leqslant\omega_0(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})$, $(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\overline{D}$, где $\omega_0\in\mathcal{D}^2$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию A.

Пусть

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\exp\{-y^2tA_2(\xi,\tau)\}\,dy,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),\quad (\xi,\tau)\in\overline{D}. \tag{3}$$

Имеют место следующие оценки (см. [18, с. 298, 306]):

$$|\partial_t^l\partial_x^kZ(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant C(l,k)t^{-(2l+k+1)/2}\exp\{-cx^2/t\},$$

$$|\partial_t^l\partial_x^kZ(x,t;A_2(\xi+\Delta\xi,\tau+\Delta\tau))-\partial_t^l\partial_x^kZ(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant$$

$$\leqslant C(l,k)[\omega_0(|\Delta\xi|)+\omega_0(|\Delta\tau|^{1/2})]t^{-(2l+k+1)/2}\exp\{-cx^2/t\},$$

$$(x,t)\in D,\quad (\xi+\Delta\xi,\tau+\Delta\tau),(\xi,\tau)\in\overline{D},\quad l,k\geqslant 0.$$

Обозначим $D^*=\{(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}\colon t>\tau\}$. Матрицу $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, называем *фундаментальной матрицей решений (ФМР)* системы $Lu=0$, если её элементы Γ_{ij}, $i,j=\overline{1,m}$, являются непрерывными функциями в своей области определения и для любой финитной и непрерывной (вектор-)функции $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, $h=(h_1,\ldots,h_m)^{\mathrm{т}}$, и любого $\tau_0\in[0,T)$ (вектор-)функция (*потенциал Пуассона*)

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau_0)h(\xi)\,d\xi,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in[\tau_0,T],$$

является ограниченным решением задачи Коши

$$Lu=0\ \text{ в }\ \mathbb{R}\times(\tau_0,T],\quad u(x,\tau_0)=h(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

удовлетворяющим (в случае $m\geqslant 2$) для любого $\sigma\in(0,T-\tau_0]$ условиям

$$|\partial_x^ku(x,t)|\leqslant C(\sigma),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[\tau_0+\sigma,T],\quad k=1,2, \tag{4}$$

для некоторой постоянной $C(\sigma)$.

Из результатов [14] о единственности решения задачи Коши для параболических систем следует единственность ФМР системы $Lu=0$, если $m\geqslant 2$. В случае $m=1$ требование (4) можно опустить и воспользоваться теоремой о единственности решения задачи Коши для одного уравнения (см. [2, с. 29]).

Известно (см. [19, 20]), что при выполнении условий a), b) у системы $Lu=0$ существует ФМР $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, справедливы оценки

$$|\partial_t^l\partial_x^k\Gamma(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-(2l+k+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\} \tag{5}$$

и, кроме того, для разности

$$W(x,t;\xi,\tau)\equiv\Gamma(x,t;\xi,\tau)-Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau))$$

выполнены неравенства

$$|\partial_t^l\partial_x^kW(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(2l+k+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{6}$$

$(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, $2l+k\leqslant 2$.

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m и коэффициентов оператора L.

Рассмотрим задачу Коши: найти (вектор-)функцию $u \in C^{2,1}(\overline{D} \setminus D_0)$, являющуюся решением параболической системы

$$Lu(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D} \setminus D_0, \tag{7}$$

и удовлетворяющую начальному условию

$$u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Основным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия a) и b). Пусть* $u \in \underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{D})$ *— решение задачи Коши*

$$Lu(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{D} \setminus D_0, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия a) и b). Тогда для любой функции* $h \in C^1(\mathbb{R})$ *и любой функции* $f \in C_{1/2}(\overline{D} \setminus D_0) \cap \mathcal{D}_x^{loc}(\overline{D} \setminus D_0)$, *удовлетворяющей условию: для любого* $B > 0$ *существует модуль непрерывности* ω_B *такой, что выполняется неравенство*

$$|f(x,t)| \leqslant \omega_B(t^{1/2})t^{-1/2}, \quad x \in [-B,B], \quad 0 < t \leqslant T, \tag{10}$$

существует единственное решение задачи (7), (8) из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ *и для него справедливы представление*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi \equiv$$

$$\equiv (Ph)(x,t) + (Vf)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}, \tag{11}$$

и оценка

$$\|u; D\|^1 \leqslant C(\|h;\mathbb{R}\|^1 + \|f; \overline{D} \setminus D_0\|_{1/2}). \tag{12}$$

Замечание 1. Если условие $f \in \mathcal{D}_x^{loc}(\overline{D} \setminus D_0)$ не выполнено, то регулярного решения системы (7) может не существовать (см. [21]).

2. СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛА ПУАССОНА

Приведём сведения о ФМР параболических систем и потенциале Пуассона Ph (см. (11)), которые будут использованы в дальнейшем. Для оператора

$$L_1 u = \partial_t u - A_2(x,t)\partial_x^2 u - A_1(x,t)\partial_x u$$

ФМР системы $L_1 u = 0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = Z(x-\xi, t-\tau; A_2(\xi,\tau)) + W_1(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

где для W_1 выполнены оценки (6). Справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = E, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$

где E — единичная $m \times m$-матрица.

Для ФМР $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ в дальнейшем будут полезны представление

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)+W_2(x,t;\xi,\tau),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,$$

где

$$W_2(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;y,\eta)A_0(y,\eta)\Gamma_1(y,\eta;\xi,\tau)\,dy,$$

и оценки [15]

$$|\partial_x^k W_2(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{(1-k)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,\quad k=0,1,2.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия a), b). Тогда для интеграла W_2 справедливо неравенство*

$$|\Delta_t W_2(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(\Delta t)|\ln(\Delta t/T)|(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\tag{13}$$

$x,\xi\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T,\ \Delta t\leqslant t-\tau.$

Доказательство. Положим

$$\nu(y,\eta;\xi,\tau)=A_0(y,\eta)\Gamma_1(y,\eta;\xi,\tau)$$

и заметим, что выполнена оценка

$$|\nu(y,\eta;\xi,\tau)|\leqslant C(\eta-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(y-\xi)^2/(\eta-\tau)\},\quad (y,\eta;\xi,\tau)\in D^*.\tag{14}$$

Имеет место представление

$$\Delta_t W_2(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t+\Delta t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{t-\Delta t}^{t}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{\tau}^{t-\Delta t}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta_t\Gamma(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,d\xi\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^3 I_i(x,t,\Delta t;\xi,\tau),\quad x,\xi\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T,\quad \Delta t\leqslant t-\tau.$$

Оценки для интегралов I_1 и I_2 сразу следуют из (5):

$$|I_j(x,t,\Delta t;\xi,\tau)|\leqslant C(\Delta t)^{1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\quad j=1,2.\tag{15}$$

Оценим I_3:

$$|I_3(x,t,\Delta t;\xi,\tau)|\leqslant C\Delta t(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}\int\limits_\tau^{t-\Delta t}(t-\eta)^{-1}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant C\Delta t|\ln(\Delta t/T)|(t-\tau)^{-1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}.\tag{16}$$

Из (15), (16) следует неравенство (13). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия a) и b). Тогда для любой (вектор-)функции $h\in C^1(\mathbb{R})$ для потенциала Пуассона Ph справедливы включение $Ph\in\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ и оценка $\|Ph;D\|^1\leqslant\leqslant C\|h;\mathbb{R}\|^1$. При этом имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,+0)}\partial_x^k(Ph)(x,t)=\frac{d^kh}{dx^k}(x_0),\quad x_0\in\mathbb{R},\quad k=0,1,$$

в которых стремление к пределу равномерно по $x_0\in\mathbb{R}$, если $k=0$, и равномерно по $x_0\in[-B,B]$ для любого $B>0$, если $k=1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|\partial_x^k(Ph)(x,t)| \leqslant C_h, \quad k=0,1, \tag{17}$$

$$|\Delta_t(Ph)(x,t)| \leqslant C_h|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in D, \tag{18}$$

и, в силу гладкости h, предельные соотношения

$$\lim_{t\to+0}\partial_x^k(Ph)(x,t)=\frac{d^kh}{dx^k}(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad k=0,1, \tag{19}$$

в которых стремление к пределу равномерно по $x\in\mathbb{R}$, если $k=0$, и равномерно по $x\in[-B,B]$ для любого $B>0$, если $k=1$. Здесь и далее обозначаем $C_h=C\|h;\mathbb{R}\|^1$.

Для доказательства (17) и (19) при $k=0$ используем представление

$$(Ph)(x,t)=h(x)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_1(x,t;\xi,0)[h(\xi)-h(x)]\,d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_2(x,t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi\equiv$$
$$\equiv h(x)+I_1(x,t)+I_2(x,t), \quad (x,t)\in D. \tag{20}$$

Справедливы неравенства

$$|I_1(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-\xi|t^{-1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_ht^{1/2}, \tag{21}$$

$$|I_2(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^{1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_ht, \tag{22}$$

из которых вытекают оценка (17) и предельное соотношение (19) при $k=0$.

Докажем (17) при $k=1$. Имеет место представление

$$\partial_x(Ph)(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_x\Gamma_1(x,t;\xi,0)[h(\xi)-h(x)]\,d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_xW_2(x,t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi\equiv$$
$$\equiv J_1(x,t)+J_2(x,t), \quad (x,t)\in D.$$

Из оценок

$$|J_1(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-\xi|t^{-1}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}d\xi\leqslant C_h,$$

$$|J_2(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_ht^{1/2}$$

следует (17) при $k=1$.

Докажем теперь (19) при $k=1$. Воспользуемся представлением

$$\partial_x(Ph)(x,t)=h'(x)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(x-\xi,t;A_2(x,0))[h'(\xi)-h'(x)]\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big[\partial_xZ(x-\xi,t;A_2(\xi,0))-\partial_xZ(x-\xi,t;A_2(z,0))|_{z=x}\big][h(\xi)-h(x)]\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_xW_1(x,t;\xi,0)[h(\xi)-h(x)]\,d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_xW_2(x,t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi\equiv h'(x)+\sum_{i=1}^{4}R_i(x,t), \quad (x,t)\in D.$$

Оценим слагаемое R_1. Зафиксируем произвольно число $B>0$ и рассмотрим модуль непрерывности (вектор-)функции h' на отрезке $[-2B,2B]$:

$$\omega_{h'}^{(2B)}(z)=\sup_{|\Delta x|\leqslant z,\ x,x+\Delta x\in[-2B,2B]}|\Delta_x h'(x)|.$$

Учитывая неравенства

$$|\xi-x|\geqslant|\xi|-|x|\geqslant\frac{|\xi|}{2},\quad |x|\leqslant B,\quad |\xi|\geqslant 2B, \tag{23}$$

получаем

$$|R_1(x,t)|\leqslant\biggl(\int\limits_{|\xi|\leqslant 2B}+\int\limits_{|\xi|\geqslant 2B}\biggr)|Z(x-\xi,t;A_2(x,0))|\,|h'(\xi)-h'(x)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C\omega_{h'}^{(2B)}(t^{1/2})+C_h\exp\{-cB^2/t\},\quad x\in[-B,B],\quad 0<t\leqslant T,$$

откуда следует предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}R_1(x,t)=0, \tag{24}$$

в котором стремление к нулю равномерно по $x\in[-B,B]$.

Оценим интегралы $R_i,\ i=2,3,4$:

$$|R_2(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-\xi|\omega_0(|x-\xi|)t^{-1}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_h\omega_0(t^{1/2}),$$

$$|R_3(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-\xi|\widetilde{\omega}_0(t^{1/2})t^{-1}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_h\widetilde{\omega}_0(t^{1/2}),$$

$$|R_4(x,t)|\leqslant C_h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_h t^{1/2}.$$

Из полученных оценок и соотношения (24) вытекает справедливость (19) при $k=1$.

Неравенство (18) докажем с помощью представления (20). В силу (21), (22) достаточно рассмотреть случай $0<\Delta t<t$. Тогда (18) следует из оценок

$$|\Delta_t I_1(x,t)|\leqslant C_h\Delta t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x-\xi|t^{-3/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_h(\Delta t)^{1/2},$$

$$|\Delta_t I_2(x,t)|\leqslant C_h\Delta t|\ln(\Delta t/T)|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^{-1/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/t\}\,d\xi\leqslant C_h(\Delta t)^{1/2},$$

$$(x,t),(x,t+\Delta t)\in D,\quad 0<\Delta t<t.$$

Лемма доказана.

3. СВОЙСТВА ОБЪЁМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Лемма 3. *Пусть выполнены условия a) и b). Тогда для любой функции* $f\in C_{1/2}(\overline{D}\setminus D_0)$, *удовлетворяющей условию: для любого* $B>0$ *существует модуль непрерывности* ω_B *такой, что выполняется неравенство (10), для объёмного потенциала* Vf *(см. (11)) справедливы* *включение* $Vf\in\hat C^{1,0}(\overline{D})$ *и оценка* $\|Vf;D\|^1\leqslant C\|f;\overline{D}\setminus D_0\|_{1/2}$. *При этом имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,+0)}\partial_x^k(Vf)(x,t)=0,\quad x_0\in\mathbb{R},\quad k=0,1,$$

в которых стремление к нулю равномерно по $x_0\in\mathbb{R}$, *если* $k=0$, *и равномерно по* $x_0\in[-B,B]$ *для любого* $B>0$, *если* $k=1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|\partial_x^k(Vf)(x,t)|\leqslant C_f t^{(1-k)/2},\quad k=0,1, \tag{25}$$

$$|\Delta_t(Vf)(x,t)|\leqslant C_f|\Delta t|^{1/2}, \tag{26}$$

$(x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{D}$, и предельные соотношения

$$\lim_{t\to+0}\partial_x^k(Vf)(x,t)=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad k=0,1, \tag{27}$$

в которых стремление к нулю равномерно по $x\in\mathbb{R}$, если $k=0$, и равномерно по $x\in[-B,B]$ для любого $B>0$, если $k=1$. Здесь и далее обозначаем $C_f=C\|f;\overline{D}\setminus D_0\|_{1/2}$.

Оценки (25) сразу следуют из (5). Докажем оценку (26). В силу (25) достаточно рассмотреть случай $0<2\Delta t<t$. Тогда (26) следует из представления

$$\Delta_t(Vf)(x,t)=\int\limits_t^{t+\Delta t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t+\Delta t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta_t\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\equiv$$
$$\equiv J_1(x,t,\Delta t)+J_2(x,t,\Delta t),\quad x\in\mathbb{R},\quad 0<2\Delta t<t<t+\Delta t\leqslant T,$$

и справедливых при $x\in\mathbb{R}$, $0<2\Delta t<t<t+\Delta t\leqslant T$ неравенств

$$|J_1(x,t,\Delta t)|\leqslant C_f\int\limits_t^{t+\Delta t}\tau^{-1/2}\,d\tau\leqslant C_f(\Delta t)^{1/2},$$

$$|J_2(x,t,\Delta t)|\leqslant C_f(\Delta t)^{1/2}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1/2}\,d\tau\leqslant C_f(\Delta t)^{1/2}.$$

Наконец, докажем, что выполнены предельные соотношения (27). Из оценки (25) сразу следует, что (27) имеет место при $k=0$. Пусть $k=1$. Зафиксируем произвольно $B>0$ и в силу неравенств (23) имеем

$$|\partial_x(Vf)(x,t)|=\left|\int\limits_0^t d\tau\left(\int\limits_{|\xi|\leqslant 2B}+\int\limits_{|\xi|\geqslant 2B}\right)\partial_x\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\right|\leqslant C_f(\omega_{2B}(t^{1/2})+\exp\{-cB^2/t\}),$$

$x\in[-B,B]$, $0<t\leqslant T$, откуда следует соотношение (27) при $k=1$. Лемма доказана.

Замечание 2. В случае одного параболического уравнения утверждение леммы 3 следует из [6] при дополнительном условии: существует такой модуль непрерывности ω, что выполняется неравенство $|f(x,t)|\leqslant\omega(t^{1/2})t^{-1/2}$ для любых $(x,t)\in\overline{D}\setminus D_0$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Пусть $u\in\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{D})$ — решение задачи (9). Для любых числа $s>0$, ограниченной вектор-функции $v\colon\overline{D}\to\mathbb{R}^m$ и множества $\hat D\subset\overline{D}$ положим

$$\omega(s;v;\hat D)=\sup_{|z_1-z_2|\leqslant s,\ z_1,z_2\in\hat D}|v(z_1)-v(z_2)|. \tag{28}$$

Для произвольного числа $R>0$ обозначим

$$\mathcal{B}_R=\{x\in\mathbb{R}\colon |x|<R\}. \tag{29}$$

Зафиксируем произвольно точку $(x_0,t_0)\in D$ и докажем, что $u(x_0,t_0)=0$. Достаточно показать, что для любого $\sigma>0$ справедливо неравенство

$$|u(x_0,t_0)|<\sigma. \tag{30}$$

Зафиксируем произвольно $\sigma>0$ и рассмотрим полосу $D_{t_1}=\{(x,t)\in\overline{D}\colon t_1<t\leqslant T\}$, где $t_1\in\in(0,T/2)$ — такое число, что $(x_0,t_0)\in D_{t_1}$. Для произвольного $R>R_0=\max\{1,|x_0|\}$ рассмотрим функцию $\zeta_R\in C^\infty(\mathbb{R})$, обладающую свойствами [22, с. 18]

$$0\leqslant\zeta_R(x)\leqslant 1,\quad x\in\mathbb{R};\quad \zeta_R(x)=1,\quad |x|\leqslant R;\quad \zeta_R(x)=0,\quad |x|\geqslant 2R;$$

$$\left|\frac{d^k\zeta_R}{dx^k}(x)\right|\leqslant CR^{-k},\quad x\in\mathbb{R},\quad k=1,2.$$

Положим $u_R(x,t)=u(x,t)\zeta_R(x)$, $(x,t)\in\overline{D}$. Вектор-функция u_R является решением задачи

$$Lv(x,t)=f_R(x,t),\quad (x,t)\in D_{t_1},\quad v(x,t_1)=h_{R,t_1}(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

где

$$f_R(x,t)\equiv Lu_R(x,t)=-A_2(x,t)\left[2\partial_x u(x,t)\frac{d\zeta_R}{dx}(x)+u(x,t)\frac{d^2\zeta_R}{dx^2}(x)\right]-A_1(x,t)u(x,t)\frac{d\zeta_R}{dx}(x) \tag{31}$$

и $h_{R,t_1}(x)\equiv u_R(x,t_1)$. Так как $u_R\in C^{2,1}(\overline{D}_{t_1})$, то в силу теоремы о единственности решения задачи Коши [14] имеет место представление

$$u_R(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,t_1)h_{R,t_1}(\xi)\,d\xi+\int\limits_{t_1}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f_R(\xi,\tau)\,d\xi\equiv$$

$$\equiv P_{R,t_1}(x,t)+V_{R,t_1}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{D}_{t_1}. \tag{32}$$

Оценим потенциалы в (32). Рассмотрим сначала потенциал

$$P_{R,t_1}(x,t)=\int\limits_{|\xi|\leqslant 2R}\Gamma(x,t;\xi,t_1)h_{R,t_1}(\xi)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{D}_{t_1}.$$

Из соотношений (см. обозначения (28), (29))

$$|h_{R,t_1}(\xi)|=\big|[u(\xi,t_1)-u(\xi,0)]\zeta_R(\xi)\big|\leqslant C\omega(t_1;u;\mathcal{B}_{2R}\times[0,T]),\quad \xi\in\mathcal{B}_{2R},$$

вытекает неравенство

$$|P_{R,t_1}(x,t)|\leqslant C\hat\omega(R,t_1),\quad (x,t)\in\overline{D}_{t_1}, \tag{33}$$

где $\hat\omega(R,t_1)=\omega(t_1;u;\mathcal{B}_{2R}\times[0,T])$.

Далее рассмотрим потенциал V_{R,t_1}. Используя равенство (31), получаем

$$|f_R(x,t)|\leqslant C\|u;D\|^{1,0}R^{-1},\quad (x,t)\in\overline{D}_{t_1}, \tag{34}$$

и, следовательно,

$$|V_{R,t_1}(x,t)|\leqslant C\|u;D\|^{1,0}R^{-1},\quad (x,t)\in\overline{D}_{t_1}. \tag{35}$$

Из (33), (35), в силу представления (32), имеем неравенство

$$|u_R(x,t)|\leqslant C[\|u;D\|^{1,0}R^{-1}+\hat{\omega}(R,t_1)],\quad (x,t)\in\overline{D}_{t_1}.$$

Отсюда следует оценка

$$|u(x_0,t_0)|\leqslant C[\|u;D\|^{1,0}R^{-1}+\hat{\omega}(R,t_1)],$$

из которой, выбирая последовательно достаточно большое $R>R_0$, а затем достаточно малое $t_1=t_1(R)\in(0,T/2)$, получаем (30). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Единственность решения из пространства $C^{1,0}(\overline{D})$ задачи (7), (8) вытекает из теоремы 1. Докажем, что существует решение этой задачи из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$ и оно имеет вид (11). В силу условий на функцию f объёмный потенциал Vf (см. (11)) является регулярным решением параболической системы $Lu=f$ в $\overline{D}\setminus D_0$ (см. [23, с. 104]). Кроме того, потенциал Пуассона Ph (см. (11)) является регулярным решением параболической системы $Lu=0$ в $\overline{D}\setminus D_0$. Отсюда и из лемм 2, 3 следует, что существует решение задачи (7), (8) из пространства $\hat{C}^{1,0}(\overline{D})$, которое имеет вид (11) и удовлетворяет оценке (12). Теорема 2 доказана.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солонников, В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1965. — Т. 83. — С. 3–163.
2. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
3. Черепова, М.Ф. О гладкости решения задачи Коши для параболической системы / М.Ф. Черепова // Вестник МЭИ. — 2009. — № 6. — С. 38–44.
4. Arnese, G. Su alcune proprieta dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine $2m$ a coefficienti non costanti / G. Arnese // Ann. di Mat. Pura ed Appl. — 1971. — V. 91, № 1. — P. 1–16.
5. Камынин, Л.И. О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения 2-го порядка / Л.И. Камынин // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 4. — С. 806–834.
6. Cherepova, M.F. The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients / M.F. Cherepova, I.V. Zhenyakova // J. Math. Sci. — 2022. — V. 264, № 5. — P. 581–602.
7. Коненков, А.Н. Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 820–831.
8. Коненков, А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42, № 6. — С. 814–819.
9. Тверитинов, В.А. О второй краевой задаче для параболической системы с одной пространственной переменной / В.А. Тверитинов // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 12. — С. 2178–2179.
10. Тверитинов, В.А. Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений / В.А. Тверитинов. — Москва, 1989. — Деп. ВИНИТИ РАН № 6906-В89.
11. Cherepova, M.F. The Cauchy problem for a parabolic system with nonuniform Hölder coefficients / M.F. Cherepova // J. Math. Sci. — 2013. — V. 191, № 2. — P. 296–313.

12. Baderko, E.A. Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Appl. Anal. — 2016. — V. 95, № 7. — P. 1570–1580.
13. Бадерко, Е.А. Единственность решения задачи Коши для параболических систем / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Докл. РАН. — 2016. — Т. 468, № 6. — С. 607–608.
14. Бадерко, Е.А. О единственности решения задачи Коши для параболических систем / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 822–830.
15. Бадерко, Е.А. О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости / Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1606–1618.
16. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 512 с.
17. Петровский, И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / И.Г. Петровский // Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — Т. 1, № 7. — С. 1–72.
18. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 428 с.
19. Зейнеддин, М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук / М. Зейнеддин. — М., 1992. — 89 с.
20. Зейнеддин, М. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини / М. Зейнеддин. — 1992. — Деп. ВИНИТИ РАН № 1294-В92.
21. Кружков, С.Н. Об оценках старших производных для решений эллиптических и параболических уравнений с непрерывными коэффициентами / С.Н. Кружков // Мат. заметки. — 1967. — Т. 2, № 5. — С. 549–560.
22. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. — М. : Наука, 1979. — 320 с.
23. Эйдельман, С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 444 с.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM IN THE CLASS $C^{1,0}(\overline{D})$ FOR PARABOLIC SYSTEMS ON THE PLANE

 E. A. Baderko[1], S. I. Sakharov[2]

Lomonosov Moscow State University, Russia
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Russia
e-mail: [1]baderko.ea@yandex.ru, [2]ser341516@yandex.ru

The Cauchy problem for Petrovskii second-order parabolic systems in a strip on the plane is considered. The coefficients of the system satisfy the double Dini condition. The unique solvability of the problem in the space of functions that are continuous and bounded together with their spatial derivatives of the first order in the closure of the strip is established and corresponding estimates are obtained. An integral representation of the solution is given.

Keywords: parabolic system, Cauchy problem, Dini condition

REFERENCES

1. Solonnikov, V.A., *O kraevyh zadachah dlya linejnyh parabolicheskih sistem differencial'nyh uravnenij obshchego vida*, *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova*, 1965, vol. 83, pp. 3–163.
2. Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., and Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Soc., 1968.
3. Cherepova, M.F., *O gladkosti resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskoj sistemy*, *Vestnik MEI*, 2009, no. 6, pp. 38–44.
4. Arnese, G., Su alcune proprieta dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine 2m a coefficienti non costanti, *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, 1971, vol. 91, no. 1, pp. 1–16.

5. Kamynin, L.I., On solution of the fundamental boundary value problems for a one-dimensional parabolic equation of second order by the method of potentials, *Sib. Math. J.*, 1974, vol. 15, no. 4, pp. 573–592.
6. Cherepova, M.F. and Zhenyakova, I.V., The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients, *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 264, no. 5, pp. 581–602.
7. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for the heat equation in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 860–872.
8. Konenkov, A.N., The Cauchy problem for parabolic equations in Zygmund spaces, *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 6, pp. 867–873.
9. Tveritinov, V.A., *O vtoroj kraevoj zadache dlya parabolicheskoj sistemy s odnoj prostranstvennoj peremennoj*, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 2178–2179.
10. Tveritinov, V.A., *Reshenie vtoroi kraevoi zadachi dlya parabolicheskoi sistemy s odnoi prostranstvennoi peremennoi metodom granichnykh integral'nykh uravnenii*, Moscow, 1989, dep. VINITI no. 6906–V89.
11. Cherepova, M.F., The Cauchy problem for a parabolic system with nonuniform Hölder coefficients, *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 191, no. 2, pp. 296–313.
12. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem, *Appl. Anal.*, 2016, vol. 95, no. 7, pp. 1570–1580.
13. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness of a solution to the Cauchy problem for parabolic systems, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 3, pp. 316–317.
14. Baderko, E.A. and Cherepova, M.F., Uniqueness of the solution of the Cauchy problem for parabolic systems, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 806–814.
15. Baderko, E.A. and Fedorov, K.D., On the smoothness of the poisson potential for second-order parabolic systems on the plane, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1613–1626.
16. Dzyadyk, V.K. and Shevchuk, I.A., *Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*, Berlin, de Gruyter, 2008.
17. Petrovskij, I.G., *O probleme Koshi dlya sistem linejnyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi v oblasti neanaliticheskih funkcij*, *Byull. Mos. Gos. Univ. Sek. A,* 1938, vol. 1, no. 7, pp. 1–72.
18. Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
19. Zeineddin, M., *O potenciale prostogo sloya dlya parabolicheskoj sistemy v klassah Dini* (On the simple layer potential for a parabolic system in Dini classes), Cand. Sci. (Phys.-Math.) Diss., Moscow, 1992.
20. Zeineddin, M., *Gladkost' potentsiala prostogo sloya dlya parabolicheskoi sistemy vtorogo poryadka v klassakh Dini*, 1992, dep. VINITI no. 1294–V92.
21. Kruzhkov, S.N., Estimates for the highest derivatives of solutions of elliptic and parabolic equations with continuous coefficients, *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1967, vol. 2, no. 5, pp. 824–830.
22. Vladimirov, V.S., Generalized Functions in Mathematical Physics, Moscow: Mir Publishers, 1979.
23. Eidel'man, S.D., *Parabolic Systems*, North-Holland, Wolters-Nordhoff, 1969.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1484–1498

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬЮ

А. А. Мельникова[1], П. А. Точилин[2], А. Н. Дарьин[3]

[1–3]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[2]*Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва*
e-mail: [1]nastya.a.melnikova@gmail.com, [2]tochilin@cs.msu.ru, [3]daryin@mail.ru

Поступила в редакцию 28.05.2024 г., после доработки 23.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована задача верификации попадания на целевое множество на конечном отрезке времени состояния линейной управляемой системы дифференциальных уравнений, включающей неопределённость (помеху), на которую наложено геометрическое, поточечное выпуклое ограничение. В случае с двумерным фазовым пространством предложен способ построения множества разрешимости без операции овыпукления, необходимой для вычисления опорной функции геометрической разности множеств. Получено уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана, которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

Ключевые слова: динамическое программирование, функция цены, множество разрешимости, альтернированный интеграл, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, задача верификации

DOI: 10.31857/S0374064124110054, EDN: JEGHXR

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача попадания на целевое множество за заданный конечный промежуток времени для линейной системы дифференциальных уравнений, включающей управляющие параметры и неопределённость с жёсткими выпуклыми ограничениями, из заданного начального положения. Подобная постановка задачи восходит к работам [1, 2]. Для решения задачи о переводе на целевое множество можно использовать множество разрешимости, которое строится в форме альтернированного интеграла [3]. Наибольшую вычислительную сложность при его построении представляет вычисление геометрической разности целевого множества и множества, определяемого помехой. Другой подход к решению задачи подобного типа состоит в применении методов динамического программирования, согласно которому множество разрешимости может быть найдено как множество уровня для специально сконструированной функции цены [4, с. 375–377], определяемой как решение краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса [5, с. 382–384].

В настоящей работе рассматривается система, на которую действует только неопределённость (отсутствуют управляющие параметры). Известно, что для линейной системы без помехи функция цены, построенная для множества разрешимости, совпадает с расстоянием от точки до множества разрешимости. При наличии помехи (неопределённости) значение функции цены может не совпадать с расстоянием до множества разрешимости во всех точках. Так, в работе [6] рассмотрен пример системы, для которой выведено выражение для функции цены и приведены точки, в которых значение этой функции не совпадает с расстоянием до множества разрешимости. Таким образом, представляется интересным вывод уравнения, решением которого является расстояние до множества разрешимости. В случае когда в системе есть как управление, так и помеха, ситуация будет ещё более сложной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматривается линейная система

$$\dot{x}(\tau)=A(\tau)x(\tau)+C(\tau)\tilde{v}, \quad \tau\in[t_0,t_1], \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывными матричными коэффициентами $A(\tau)$, $C(\tau)$, $\tilde{v}(\tau)\in \mathrm{Q}(\tau)$ — помеха, где $\mathrm{Q}(\tau)$ — непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа многозначное отображение, принимающее значения во множестве выпуклых компактов.

Пусть $X(t_1,\tau)$ — фундаментальная матрица Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с матрицей $A(\tau)$. Тогда с помощью преобразования $z(\tau)=X(t_1,\tau)x(\tau)$ система (1) может быть сведена к более простой линейно-выпуклой системе (см. [7, с. 2–3]) следующего вида:

$$\dot{x}(\tau)=v, \quad \tau\in[t_0,t_1], \tag{2}$$

где на новую помеху $v(\tau)=X^{-1}(\tau,t_1)C(\tau)\tilde{v}(\tau)$ наложены поточечные ограничения

$$v(\tau)\in\mathcal{Q}(\tau), \tag{3}$$

$\mathcal{Q}(\tau)=X^{-1}(\tau,t_1)C(\tau)\mathrm{Q}(\tau)$. Для упрощения выкладок сначала будем считать, что выпуклый компакт $\mathcal{Q}$ не зависит от времени (случай когда $\mathcal{Q}$ зависит от времени рассмотрен в п. 3). Будем также считать, что $0\in\mathcal{Q}$.

Необходимо выяснить, попадёт ли состояние системы (2) в целевое множество M в конечный момент времени t_1, несмотря на действие помехи (3). Предполагается, что M — непустое выпуклое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Множество разрешимости* $\mathbf{W}[\tau,t_1,M]$ в момент времени τ системы (2) с ограничением (3) состоит из всех точек x_τ, для которых решения системы, выпущенные из этих точек, достигают в момент времени t_1 множества M для любой помехи (3).

Множество разрешимости $\mathbf{W}[\tau,t_1,M]$ в момент времени τ далее обозначается $\mathbf{W}[\tau]$.

Определение 2. *Геометрическая разность множеств A и B* пространства $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$A\dot{-}B=\{c\colon\, c+B\subseteq A\}.$$

Также геометрическая разность множеств может быть записана в виде [8, с. 23]

$$A\dot{-}B=\bigcap_{b\in B}(A-b).$$

Отсюда, в частности, следует, что геометрическая разность двух выпуклых компактных множеств также является выпуклым компактным множеством.

Возьмём временной интервал $t\leqslant\tau\leqslant t_1$ и рассмотрим разбиение $\Sigma_k=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\}$, $t=\vartheta_k$, ϑ_{k-1}, $\ldots$, ϑ_1, $\vartheta_0=t_1$, $\sigma_i>0$, $\vartheta_j=t_1-\sum_{i=1}^{j}\sigma_i$.

Далее будем вычислять множество разрешимости в дискретные моменты времени ϑ_j:

$$\mathbf{W}[\vartheta_k]=\mathbf{W}[\vartheta_{k-1}]\dot{-}\int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau=$$

$$=\left(\left(M\dot{-}\int\limits_{\vartheta_1}^{t_1}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right)\dot{-}\ldots\right)\dot{-}\int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau=M\dot{-}\int\limits_{t}^{t_1}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Если множество $\mathcal{Q}(\tau)$ не зависит от τ, то формула (4) преобразуется как

$$\mathbf{W}[t] = \mathbf{W}[\vartheta_k] = M \dot{-} (t_1 - t)\mathcal{Q}. \tag{5}$$

Если добавить в систему (2) управление $u = u(\tau) \in \mathcal{P}(\tau)$, то для полученной системы

$$\dot{x}(\tau) = u + v, \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

множество разрешимости (альтернированная сумма с коррекциями управления в моменты времени ϑ_k) выглядит более сложным, но схожим образом (см. [3]):

$$\mathbf{W}[\vartheta_k] = \mathbf{W}(\vartheta_k, \vartheta_{k-1}, \mathbf{W}[\vartheta_{k-1}]) =$$

$$= \left(\left(\left(\left(M + \int\limits_{\vartheta_1}^{t_1} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_1}^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right) \ldots + \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} -\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right) \dot{-} \int\limits_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k-1}} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $\mathcal{P}(\tau)$ – задающее поточечные ограничения на управление многозначное отображение, непрерывное по $\tau \in [t_0, t_1]$, принимающее выпуклые компактные значения.

Пусть A, B, C — произвольные множества пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим некоторые свойства геометрической разности, которые можно вывести непосредственно из определений алгебраической суммы и геометрической разности множеств.

1. Если $B \subseteq C$ и $B \dot{-} A \neq \emptyset$, то $C \dot{-} A \neq \emptyset$ и $B \dot{-} A \subseteq C \dot{-} A$.

2. Если $A \subseteq B$ и $C \dot{-} B \neq \emptyset$, то $C \dot{-} A \neq \emptyset$ и $C \dot{-} B \subseteq C \dot{-} A$.

3. $A \subseteq (A + B) \dot{-} B$.

Для доказательства достаточно заметить, что для любого $a \in A$ выполняется $a + B \subseteq A + B$ и далее воспользоваться определением геометрической разности множеств.

4. Если $A \dot{-} B \neq \emptyset$, то $(A \dot{-} B) + B \subseteq A$.

5. Если $A \dot{-} B \neq \emptyset$, то $B \subseteq A \dot{-} (A \dot{-} B)$.

Из свойств 1 и 4 имеем

$$((A \dot{-} B) + B) \dot{-} (A \dot{-} B) \subseteq A \dot{-} (A \dot{-} B).$$

Из свойства 3 получаем $B \subseteq A \dot{-} (A \dot{-} B)$.

6. При условиях $A \dot{-} B \neq \emptyset$, $A \dot{-} (A \dot{-} B) \neq \emptyset$, $A \dot{-} (A \dot{-} (A \dot{-} B)) \neq \emptyset$ выполняется равенство

$$A \dot{-} (A \dot{-} (A \dot{-} B)) = A \dot{-} B.$$

С одной стороны, из свойства 5 получаем, что $A \dot{-} (A \dot{-} (A \dot{-} B)) \supseteq A \dot{-} B$, а с другой — из свойства 5 с применением свойства 2 имеем

$$B \subseteq A \dot{-} (A \dot{-} B) \implies A \dot{-} B \supseteq A \dot{-} (A \dot{-} (A \dot{-} B)).$$

7. $(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B + C)$ (см. [8, с. 23]).

Выпуклое компактное множество разрешимости $\mathbf{W}[\vartheta_j]$ может быть задано при помощи своей опорной функции $\rho(l|\mathbf{W}[\vartheta_j])$, $l \in \mathbb{R}^n$. Известно [9, с. 45–46], что опорная функция геометрической разности множеств A и B вычисляется следующим образом:

$$\rho(l|A \dot{-} B) = \mathrm{conv}(\rho(l|A) - \rho(l|B)),$$

где conv — операция овыпукления (построения выпуклой оболочки) функции [10, с. 53].

Будем далее считать выполненным следующее предположение, обычно используемое при построении альтернированных интегралов (см. подробнее в [3]).

Предположение. *Существует непрерывная функция* $r(t)>0,\ t\in[t_0,t_1]$, *для которой при любом рассматриваемом разбиении* Σ *выполнено условие*

$$\mathbf{W}(\vartheta_j)\dot{-}\mathcal{B}_{r(\vartheta_j)}(0)\neq\emptyset,\quad j=0,1,\ldots,k.$$

Отсюда, в частности, следует, что множества разрешимости $\mathbf{W}(\vartheta_j)$ *не пусты.*

Здесь $\mathcal{B}_r(0)$ — замкнутый шар радиуса r с нулевым центром, построенный с использованием евклидовой нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$.

При подсчёте опорной функции множеств $\mathbf{W}[\vartheta_k]$ из (4) требуется вычисление опорной функции геометрической разности выпуклых компактов, для чего необходимо овыпукление разности опорных функций. Данная операция является достаточно затратной с точки зрения вычислений.

Введём функцию цены

$$\mathcal{V}(t,x)=\max_{x(\cdot)}\{d(x(t_1),M)\colon x(\cdot)\in\mathcal{X}(\cdot)\},$$

где $\mathcal{X}(\cdot)$ — множество решений задачи $\dot{x}\in\mathcal{Q}(\tau),\ x(t_0)=x,\ \tau\in[t_0,t_1]$; $d(x,M)$ — евклидово расстояние от точки x до множества M. В точках дифференцируемости $\mathcal{V}(t,x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана (см. [5, с. 11–13])

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t}+\max_{v\in\mathcal{Q}(\tau)}\left\langle\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x},v\right\rangle=0$$

и краевому условию

$$\mathcal{V}(t_1,x)=d(x,M).$$

Рассмотрим также функцию $V(t,x)=d(x,\mathbf{W}[t])$. В работе [6] показано, что уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для $V(t,x)$ не выполнено даже в точках дифференцируемости этой функции.

2. МОДИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим вспомогательные конструкции, которые (при дополнительных предположениях) позволяют описать множества разрешимости $\mathbf{W}[\vartheta_j]$ без использования операции овыпукления разности опорных функций.

Определение 3 [8, с. 324]. Пусть M — выпуклое замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество M называется *порождающим*, если для любого непустого множества A, представимого в виде

$$A=\bigcap_{x\in X}(M+x)\tag{6}$$

для некоторого множества сдвигов $X\subset\mathbb{R}^n$, существует выпуклое замкнутое множество B такое, что $\overline{A+B}=M$. Всякое непустое множество A из этого определения называется M*-сильно выпуклым* множеством.

Для порождающего множества M верно равенство

$$(M\dot{-}Y)+(M\dot{-}(M\dot{-}Y))=M,$$

где $Y=-X$ из (6).

Определение 4. Пусть $M\subseteq\mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, Q — такое множество, что $M\dot{-}Q\neq\emptyset$. Множество $\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q=M\dot{-}(M\dot{-}Q)$ называется M-сильно выпуклой оболочкой множества Q.

Определение 5. *Хаусдорфово расстояние* между компактными множествами A и B пространства $\mathbb{R}^n$ определяется по формуле

$$h(A,B)=\inf_{r>0}\{A\subseteq B+\mathcal{B}_r(0),\ B\subseteq A+\mathcal{B}_r(0)\}.$$

Определение 6. Пусть M — выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$, Q — произвольное множество. Выпуклый компакт $\hat{Q}$ называется *предельной M-сильно выпуклой оболочкой Q*, если

$$\lim_{\sigma\to+0} h(\hat{Q},\sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma Q)=0.$$

Предельную M-сильно выпуклую оболочку множества Q обозначим $\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q$.

Для дальнейшего рассмотрения нам потребуются свойства, позволяющие сравнивать между собой несколько сильно выпуклых оболочек множеств.

Теорема 1. *1. Пусть M_1, M_2, Q — выпуклые замкнутые множества, удовлетворяющие следующим условиям:* $\operatorname{int}\operatorname{dom}\rho(l\,|\,M_1)\neq\emptyset$, $M_1+(M_2\mathbin{\dot-}M_1)=M_2$, $M_1\mathbin{\dot-}Q\neq\emptyset$. *Тогда*

$$Q\subseteq\operatorname{str}\operatorname{co}_{M_2} Q\subseteq\operatorname{str}\operatorname{co}_{M_1} Q.$$

2. Пусть M_1, M_2 — порождающие множества, M_1+M_2 — замкнутое множество, Q_1, Q_2 — такие множества, что $M_i\mathbin{\dot-}Q_i\neq\emptyset$, $i=1,2$. Тогда

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_{M_1+M_2}(Q_1+Q_2)\subseteq\operatorname{str}\operatorname{co}_{M_1} Q_1+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M_2} Q_2.$$

Доказательство теоремы см. в [8, с. 355–356].

Теорема 2 (теорема существования). *Пусть M и Q — выпуклые компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $0\in Q$. Пусть существует такое число $\sigma_0>0$, что $M\mathbin{\dot-}\sigma_0 Q\neq\emptyset$. Тогда существует предельная M-сильно выпуклая оболочка Q. При этом выполняются вложения*

$$Q\subseteq\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q\subseteq\sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M\sigma Q\quad \textit{для любого } \sigma\in(0,\sigma_0].$$

Заметим, что если $0\in Q$, то для любого $\sigma\in(0,\sigma_0)$ справедливо $\sigma Q\subset\sigma_0 Q$, и значит, согласно свойству 2 из п. 1, $M\mathbin{\dot-}\sigma Q\neq\emptyset$.

Из п. 1 теоремы 1 следует, что для любого $\sigma\in(0,\sigma_0)$ $Q\subseteq\sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M\sigma Q$.

Далее справедливость утверждения теоремы 2 следует из двух следующих лемм.

Лемма 1. *Многозначное отображение $G(\sigma)=\sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M\sigma Q$ при $\sigma\in(0,\sigma_0]$ имеет непустые выпуклые компактные значения и является неубывающим по вложению, т.е. $G(\sigma_1)\subseteq G(\sigma_2)$ при $0<\sigma_1<\sigma_2\leqslant\sigma_0$.*

Доказательство. По определению M-сильно выпуклой оболочки

$$G(\sigma)=\sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M\sigma Q=\operatorname{str}\operatorname{co}_{\sigma^{-1}M} Q.$$

Из свойства 4 геометрической разности множеств следует, что

$$(\sigma_1^{-1}M\mathbin{\dot-}\sigma_2^{-1}M)+\sigma_2^{-1}M\subseteq\sigma_1^{-1}M.$$

Из выпуклости M следует, что для любых $x,y\in M$ $(1-\sigma_1(\sigma_2)^{-1})x+\sigma_1(\sigma_2)^{-1}y\in M$, а значит, $(\sigma_1^{-1}-\sigma_2^{-1})x+(\sigma_2^{-1})y\in\sigma_1^{-1}M$. Отсюда вытекает, что $(\sigma_1^{-1}-\sigma_2^{-1})x+(\sigma_2^{-1})M\subseteq\sigma_1^{-1}M$, и потому $(\sigma_1^{-1}-\sigma_2^{-1})x\in\sigma_1^{-1}M\mathbin{\dot-}(\sigma_2^{-1})M$. Тем более выполнено включение

$$\sigma_1^{-1}M\subseteq(\sigma_1^{-1}M\mathbin{\dot-}\sigma_2^{-1}M)+\sigma_2^{-1}M.$$

Объединяя полученные вложения, получаем равенство

$$\sigma_1^{-1}M=(\sigma_1^{-1}M\mathbin{\dot-}\sigma_2^{-1}M)+\sigma_2^{-1}M.$$

Отсюда в силу п. 1 теоремы 1 получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность непустых выпуклых компактов в пространстве* $\mathbb{R}^n$*, невозрастающая по включению:* $A_{n+1}\subseteq A_n$*,* $n\in\mathbb{N}$*. Тогда множество* $\bar{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ *является непустым выпуклым компактом и совпадает с хаусдорфовым пределом последовательности* A_n*:*

$$\lim_{n\to\infty} h(\bar{A},A_n)=0.$$

Доказательство. Покажем, что $\bar{A}$ является непустым множеством. Возьмём последовательность векторов $x_n\in A_n$. В силу компактности множества A_1 из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\bar{x}$. По построению $\bar{x}$ принадлежит всем множествам A_n, $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\bar{x}\in\bar{A}$.

Расстояние $h_n=h(\bar{A},A_n)$ убывает с ростом n в силу монотонности последовательности A_n. Пусть предел h_n отличен от нуля, т.е. $h(\bar{A},A_n)\geqslant\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда существует последовательность векторов $x_n\in A_n$, для которых $d(x_n,\bar{A})\geqslant\varepsilon$ ($d(x_n,\bar{A})$ – евклидово расстояние от точки x_n до множества $\bar{A}$). В силу компактности множества A_1 у последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предельная точка $\bar{x}$, которая должна принадлежать любому из множеств A_n. Следовательно, $\bar{x}\in\bar{A}$, но при этом из непрерывности расстояния имеем $d(\bar{x},\bar{A})\geqslant\varepsilon>0$. Полученное противоречие означает, что $\lim_{n\to\infty}h(\bar{A},A_n)=0$. Лемма доказана.

Ниже будет показано, что исходная задача нахождения множества разрешимости для системы (2) с ограничением (3) в случае фазового пространства $\mathbb{R}^2$ может быть сведена к задаче с модифицированным множеством-помехой

$$\hat{\mathcal{Q}}(\tau)=\lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q},\quad \tau\in[0,t],\tag{7}$$

причём множество разрешимости этой задачи совпадает с $\mathbf{W}[t]$ из (4). Основные результаты сформулированы далее в виде теорем 3, 5, 6, для доказательства которых потребуются вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Пусть* $M\dot{-}Q\neq\emptyset$*. Тогда*

1) $\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q\dot{-}Q=\{0\}$*;*

2) $\operatorname{str}\operatorname{co}_{\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q} Q=\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q$.

Доказательство. 1. Из определения M-сильно выпуклой оболочки множества Q получаем

$$(\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q)\dot{-}Q=(M\dot{-}(M\dot{-}Q))\dot{-}Q=M\dot{-}((M\dot{-}Q)+Q)=(M\dot{-}Q)\dot{-}(M\dot{-}Q)=\{0\}.$$

Здесь дважды использовано свойство 7 геометрической разности множеств.

2. Также из определения M-сильно выпуклой оболочки имеем

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_{\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q} Q=\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q\dot{-}(\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q\dot{-}Q)=(\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q)\dot{-}\{0\}=\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q.$$

Лемма 4. *Пусть* M *— порождающее множество в пространстве* $\mathbb{R}^n$*,* Q_1*,* Q_2 *— такие множества, что* $M\dot{-}Q_1\neq\emptyset$*,* $(M\dot{-}Q_1)\dot{-}Q_2\neq\emptyset$*. Тогда*

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M(Q_1+Q_2)=\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}Q_1}Q_2.\tag{8}$$

Доказательство. Из определения порождающего множества получаем, что для множества Q_1 такого, что $M\dot{-}Q_1\neq\emptyset$, выполнено равенство

$$M=(M\dot{-}Q_1)+\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1.$$

Тогда в силу п. 2 теоремы 1 и п. 2) леммы 3 имеем

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M(Q_1+Q_2)\subseteq\operatorname{str}\operatorname{co}_{\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1}Q_1+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}Q_1}Q_2=\operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}Q_1}Q_2.\tag{9}$$

С другой стороны,

$$(\operatorname{str}\operatorname{co}_M(Q_1+Q_2)) \dot{-} \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1 = (M \dot{-} (M \dot{-} (Q_1+Q_2))) \dot{-} \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1 =$$
$$= (M \dot{-} \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1) \dot{-} (M \dot{-} (Q_1+Q_2)) = (M \dot{-} Q_1) \dot{-} ((M \dot{-} Q_1) \dot{-} Q_2) = \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} Q_1} Q_2.$$

Здесь было дважды использовано свойство 7 геометрической разности множеств — аналогично доказательству п. 1) леммы 3. Используем теперь свойство 4 геометрической разности множеств:

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M(Q_1+Q_2) \supseteq (\operatorname{str}\operatorname{co}_M(Q_1+Q_2)) \dot{-} \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1 + \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1 = \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} Q_1} Q_2 + \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q_1. \quad (10)$$

Объединяя (9) и (10), получаем требуемое равенство (8). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть M — выпуклое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, множество $Q \in \mathbb{R}^n$ такое, что $M \dot{-} \sigma_0 Q \neq \emptyset$, $\sigma_0 > 0$. Тогда*

$$h(\operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma Q,\, \sigma \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q) = \bar{o}(\sigma), \quad \sigma \to +0.$$

Доказательство. Из определения предельной сильно выпуклой оболочки имеем

$$\lim_{\sigma \to 0} h(\lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q,\, \sigma^{-1} \operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma Q) = 0.$$

Воспользовавшись свойством расстояния Хаусдорфа [8, с. 35]

$$h(\alpha A, \alpha B) \leqslant \alpha h(A, B) \quad \text{для любого } \alpha > 0,$$

получаем, что

$$h(\operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma Q,\, \sigma \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q) \leqslant \sigma h(\sigma^{-1} \operatorname{str}\operatorname{co}_M \sigma Q, \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_M Q) = \bar{o}(\sigma).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть для любого $\tau \in [0,t]$ множество $M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}$ является порождающим и существует предельная M-сильно выпуклая оболочка $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau) = \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}} \mathcal{Q}$. Тогда отображение $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)\colon [0,t] \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ полунепрерывно сверху и интегрируемо, а его интеграл по указанному отрезку является выпуклым компактом.*

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что для каждого фиксированного $\tau \in [0,t]$ множество $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)$ является выпуклым компактом (как пересечение семейства выпуклых компактов).

По аналогии с леммой 1 введём следующее обозначение:

$$G(\sigma, \tau) = \sigma^{-1} \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}} \sigma \mathcal{Q}.$$

Заметим, что так как множество $M \dot{-} (t-\tau)Q$ порождающее, то для любого $l \in \mathbb{R}^n$

$$\rho(l \,|\, \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}} \sigma \mathcal{Q}) = \rho(l \,|\, M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}) - \rho(l \,|\, (M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}) \dot{-} \sigma \mathcal{Q}) =$$
$$= \rho(l \,|\, M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}) - \rho(l \,|\, M \dot{-} (t-\tau+\sigma)\mathcal{Q}).$$

При любых фиксированных $\sigma > 0$, $\tau, \tau + \Delta\tau \in [0, t]$ справедлива оценка

$$h(G(\sigma,\tau+\Delta\tau), G(\sigma,\tau)) \leqslant \sigma^{-1} h(\operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}} \sigma\mathcal{Q}, \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}} \sigma\mathcal{Q}) =$$
$$= \sigma^{-1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} |\rho(l| \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}} \sigma\mathcal{Q}) - \rho(l| \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}} \sigma\mathcal{Q})| =$$
$$= \sigma^{-1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} |\rho(l|M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}) - \rho(l|M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau+\sigma)\mathcal{Q}) -$$
$$- \rho(l|M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}) + \rho(l|M \dot{-} (t-\tau+\sigma)\mathcal{Q})| \leqslant$$
$$\leqslant \sigma^{-1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} |\rho(l|M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}) - \rho(l|M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q})| +$$
$$+ \sigma^{-1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} |\rho(l|M \dot{-} (t-\tau+\sigma)\mathcal{Q}) - \rho(l|M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau+\sigma)\mathcal{Q})| =$$
$$= \sigma^{-1} h(M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}, M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}) + \sigma^{-1} h(M \dot{-} (t-\tau+\sigma)\mathcal{Q}, M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau+\sigma)\mathcal{Q}).$$

С учётом теоремы 4.4.4 из [8, с. 358] имеем

$$h(M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}, M \dot{-} (t-\tau)\mathcal{Q}) \leqslant Lh((t-\tau+\Delta\tau)\mathcal{Q}, (t-\tau)\mathcal{Q}) \leqslant \tilde{L}|\Delta\tau|,$$
$$h(M \dot{-} (t-\tau+\sigma)\mathcal{Q}, M \dot{-} (t-\tau+\Delta\tau+\sigma)\mathcal{Q}) \leqslant Lh((t-\tau+\sigma+\Delta\tau)\mathcal{Q}, (t-\tau+\sigma)\mathcal{Q}) \leqslant \tilde{L}|\Delta\tau|.$$

Здесь $L = 1 + \operatorname{diam}(M)\big(\min_{t\in[t_0,t_1]} r(t)\big)^{-1} > 0$, $\tilde{L} = L\operatorname{diam}(\mathcal{Q})$, а функция $r(t)$ была определена в сформулированном выше предположении. Объединяя полученные неравенства, получаем, что многозначное отображение $G(\sigma,\tau)$ непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа (h-непрерывно) по переменной τ при любом фиксированном значении параметра $\sigma > 0$.

Из леммы 1 следует, что

$$\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau) = \bigcap_{\sigma\in(0,\sigma_0)} G(\sigma,\tau).$$

Так как $G(\sigma,\tau)$ при любом фиксированном σ удовлетворяет условию Липшица по переменной τ с постоянной $2\sigma^{-1}\tilde{L}$, то существует число $C > 0$ такое, что

$$\operatorname{diam}(\hat{\mathcal{Q}}(\tau)) \leqslant \operatorname{diam}(G(\sigma,\tau)) \leqslant C$$

для любого $\tau \in [0, t]$ и для некоторого фиксированного $\sigma \in (0, \sigma_0)$. Используя теперь теорему 2.3.4 из [11, с. 121–122] и следствие из неё, заключаем, что многозначное отображение $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)$ полунепрерывно сверху по τ, откуда следует его измеримость [11, с. 130]. Согласно теореме 1 из [12, с. 60] многозначное отображение $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)$ интегрируемо на отрезке $[0, t]$. Более того, из теоремы Ляпунова о векторных мерах [13] вытекает, что многозначный интеграл $\int_0^t \hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)\,d\tau$ является выпуклым компактным множеством.

Поскольку дальнейшие построения существенно опираются на требование, чтобы рассматриваемое множество M было порождающим, то необходимо упомянуть следующий важный результат относительно достаточно широкого класса таких множеств. Справедлива

Теорема 4 [8, с. 336–339]. *В пространстве $\mathbb{R}^2$ любое непустое выпуклое замкнутое множество является порождающим.*

Следующая теорема позволяет перейти от задачи (2) с ограничением $v(\tau) \in \mathcal{Q}$ и множеством разрешимости (4) к эквивалентному классу задач (см. теорему 6).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3 для некоторого значения $t>0$, для которого $M\dot{-}t\mathcal{Q}\neq\emptyset$. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q}=\int\limits_0^t \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\,d\tau.$$

Доказательство. Разобьём отрезок $[0,t]$ на N частей с шагом дискретизации $\xi=t/N$. Используя лемму 4, представим множество $\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q}$ в виде суммы сильно выпуклых оболочек:

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q}=\operatorname{str}\operatorname{co}_M N\xi\mathcal{Q}=\operatorname{str}\operatorname{co}_M \xi\mathcal{Q}+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\xi\mathcal{Q}}(N-1)\xi\mathcal{Q}=$$

$$=\operatorname{str}\operatorname{co}_M \xi\mathcal{Q}+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\xi\mathcal{Q}}\xi\mathcal{Q}+\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}2\xi\mathcal{Q}}(N-2)\xi\mathcal{Q}=\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}n\xi\mathcal{Q}}\xi\mathcal{Q}.$$

В последнем выражении перейдём к сумме предельных сильно выпуклых оболочек с помощью леммы 5:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}n\xi\mathcal{Q}}\xi\mathcal{Q}=\sum_{n=0}^{N-1}\xi\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}n\xi\mathcal{Q}}\mathcal{Q}+\bar{o}(N\xi)\underset{\xi\to0}{\to}\int\limits_0^t\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q}d\tau.$$

Существование интеграла следует из теоремы 3. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть M — компактное порождающее множество, $\mathcal{Q}$ — такое множество, что существует $t>0$, для которого $M\dot{-}t\mathcal{Q}\neq\emptyset$. Тогда*

$$M\dot{-}t\mathcal{Q}=M\dot{-}\int\limits_0^t\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\,d\tau.$$

Для опорных функций справедливо соотношение

$$\rho(l\,|\,M\dot{-}t\mathcal{Q})=\rho(l\,|\,M)-\int\limits_0^t\rho(l\,|\,\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q})\,d\tau.$$

Доказательство. Используем теорему 5 и определение M-сильно выпуклой оболочки:

$$M\dot{-}\int\limits_0^t\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\,d\tau=M\dot{-}\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q}=M\dot{-}(M\dot{-}(M\dot{-}t\mathcal{Q})).$$

Выражение в правой части равно $M\dot{-}t\mathcal{Q}$ (свойство 6 геометрической разности множеств).

Так как множество M порождающее, то $(M\dot{-}t\mathcal{Q})+\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q}=M$. Значит, для опорных функций выполняется следующее равенство:

$$\rho(l\,|\,M)-\rho(l\,|\,\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q})=\rho(l\,|\,M\dot{-}t\mathcal{Q}),$$

причём по теореме 5

$$\rho(l\,|\,\operatorname{str}\operatorname{co}_M t\mathcal{Q})=\int\limits_0^t\rho(l\,|\,\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}\tau\mathcal{Q}}\mathcal{Q})\,d\tau.$$

Замечание 1. Результаты теоремы 5 и следствия 1 останутся справедливыми, если заменить отрезок $[0,t]$ на $[t,t_1]$. В этом случае

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M(t_1-t)\mathcal{Q}=\int\limits_t^{t_1}\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}(t_1-\tau)\mathcal{Q}}\,Qd\tau,$$

$$M\dot{-}(t_1-t)\mathcal{Q}=M\dot{-}\int\limits_t^{t_1}\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}(t_1-\tau)\mathcal{Q}}\,\mathcal{Q}\,d\tau,$$

$$\rho\big(l\mid M\dot{-}(t_1-t)\mathcal{Q}\big)=\rho(l\mid M)-\int\limits_t^{t_1}\rho\big(l\mid\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}(t_1-\tau)\mathcal{Q}}\,\mathcal{Q}\big)\,d\tau.$$

Теорема 6. *Пусть M, $\mathcal{Q}$ — выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что на временно́м отрезке $\tau\in[t,t_1]$ определена предельная сильно выпуклая оболочка $\hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)$. Тогда множество разрешимости в момент времени t может быть найдено по формуле*

$$\mathbf{W}[t]=M\dot{-}\int\limits_t^{t_1}\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}(t_1-\tau)\mathcal{Q}}\,\mathcal{Q}\,d\tau.$$

Для опорной функции множества разрешимости верно следующее выражение:

$$\rho(l|\mathbf{W}[t])=\rho(l\mid M)-\rho\left(l\,\middle|\,\int\limits_t^{t_1}\lim\operatorname{str}\operatorname{co}_{M\dot{-}(t_1-\tau)\mathcal{Q}}\,\mathcal{Q}\,d\tau\right). \tag{11}$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что множество M является порождающим. Далее необходимо воспользоваться формулой (5), теоремой 5 и следствием 1 (замечанием 1).

Таким образом, для линейной системы (2) с ограничением $v\in\mathcal{Q}$ выведен эквивалентный класс задач с той же трубкой разрешимости $\mathbf{W}[t]$, $t\in[t_0,t_1]$. При построении последней не требуется прибегать к операции овыпукления геометрической разности множеств. Описаны свойства множеств этого класса задач.

3. МОДИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОМЕХИ ИЗ МНОЖЕСТВА $\mathcal{Q}(t)$

Пусть теперь множество $\mathcal{Q}(t)$, задающее поточечные ограничения для помехи $v(t)$, зависит от t. Более того, будем предполагать, что при любом фиксированном векторе $l\in\mathbb{R}^n$ опорная функция $\rho(l|\mathcal{Q}(t))$ липшицева по t с некоторой константой $\hat{L}>0$, причём $\hat{L}$ не зависит от l и $t\in[t_0,t_1]$. Тогда

$$h(\mathcal{Q}(t+\Delta t),\mathcal{Q}(t))\leqslant\hat{L}\Delta t,$$

многозначное отображение $\mathcal{Q}(t)$ интегрируемо на отрезке $[t_0,t_1]$ и

$$h\left(\sigma\mathcal{Q}(t),\ \int\limits_t^{t+\sigma}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\right)\leqslant\frac{\hat{L}\sigma^2}{2}=O(\sigma^2).$$

Используя теорему 4.4.4 из [8, с. 358] и предположение, получаем следующую оценку:

$$h\left(\operatorname{str}\operatorname{co}_M\int\limits_t^{t+\sigma}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau,\sigma^{-1}\operatorname{str}\operatorname{co}_M\sigma\mathcal{Q}(t)\right)\leqslant L\,h\left(\int\limits_t^{t+\sigma}\mathcal{Q}(\tau)\,d\tau,\sigma\mathcal{Q}(t)\right)=O(\sigma^2), \tag{12}$$

где постоянная $L>0$ та же, что была ранее введена при доказательстве теоремы 3.

Теорема 7. *Предположим, что для любого $\tau \in [0,t]$ множество $M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds$ является порождающим и существует предельная M-сильно выпуклая оболочка*

$$\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau) = \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds} \mathcal{Q}(\tau).$$

Тогда отображение $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)\colon [0,t] \to \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ является полунепрерывным сверху, интегрируемым, а его интеграл по указанному отрезку будет выпуклым компактом.

Доказательство. Как и в теореме 3, получаем, что для каждого фиксированного $\tau \in [0,t]$ множество $\hat{\mathcal{Q}}_t(\tau)$ является выпуклым компактом. Введём следующее обозначение:

$$G(\sigma,\tau) = \sigma^{-1} \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds} \sigma \mathcal{Q}(\tau).$$

Так как множество $M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds$ является порождающим, то для любого $l \in \mathbb{R}^n$

$$\rho(l | \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds} \sigma \mathcal{Q}(\tau)) = \rho\biggl(l \biggm| M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds\biggr) - \rho\biggl(l \biggm| M \dot{-} \biggl(\int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau)\biggr)\biggr).$$

При любых фиксированных $\sigma > 0$, $\tau, \tau + \Delta\tau \in [0,t]$ справедлива оценка

$$h(G(\sigma,\tau+\Delta\tau), G(\sigma,\tau)) \leqslant \sigma^{-1} h\Bigl(\operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)\,ds} \sigma \mathcal{Q}(\tau+\Delta\tau), \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds} \sigma \mathcal{Q}(\tau)\Bigr) =$$

$$= \sigma^{-1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} \Bigl|\rho\Bigl(l \Bigm| \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)ds} \sigma \mathcal{Q}(\tau+\Delta\tau)\Bigr) - \rho\Bigl(l \Bigm| \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds} \sigma \mathcal{Q}(\tau)\Bigr)\Bigr| =$$

$$= \sigma^{-1} \sup_{\|l\| \leqslant 1} \biggl|\rho\biggl(l \biggm| M \dot{-} \int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)\,ds\biggr) - \rho\biggl(l \biggm| M \dot{-} \biggl(\int_{\tau+\Delta\tau}^t \tau \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau+\Delta\tau)\biggr)\biggr) -$$

$$- \rho\biggl(l \biggm| M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds\biggr) + \rho\biggl(l \biggm| M \dot{-} \biggl(\int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau)\biggr)\biggr)\biggr| \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^{-1} h\biggl(M \dot{-} \int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)\,ds, M \dot{-} \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds\biggr) +$$

$$+ \sigma^{-1} h\biggl(M \dot{-} \biggl(\int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau+\Delta\tau)\biggr), M \dot{-} \biggl(\int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau)\biggr)\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^{-1} L h\biggl(\int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)\,ds, \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds\biggr) + \sigma^{-1} L h\biggl(\int_{\tau+\Delta\tau}^t \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau+\Delta\tau), \int_\tau^t \mathcal{Q}(s)\,ds + \sigma \mathcal{Q}(\tau)\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sigma^{-1} \tilde{L} \Delta\tau + L \hat{L} \Delta\tau.$$

Здесь $\tilde{L} = L \max_{\tau \in [0,t]} \operatorname{diam}(\mathcal{Q}(\tau))$, а постоянная L была определена в доказательстве теоремы 3. Таким образом удалось доказать, что функция $G(\sigma,\tau)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной τ с константой $2\sigma^{-1}\tilde{L} + L\hat{L}$. Дальнейшее доказательство теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы 3.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 7 для некоторого значения $t > 0$, для которого $M \dot{-} \int_0^t \mathcal{Q}(s) ds \neq \emptyset$. Тогда*

$$\operatorname{str} \operatorname{co}_M \int_0^t \mathcal{Q}(\tau) d\tau = \int_0^t \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_\zeta^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(\zeta)\,d\zeta.$$

Доказательство. Разобьём отрезок $[0,t]$ на N частей длины $\xi = t/N$. Аналогично доказательству теоремы 5, воспользовавшись леммами 4 и 5, а также оценкой (12), получим соотношение

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M \int\limits_0^t \mathcal{Q}(\tau)d\tau = \operatorname{str}\operatorname{co}_M \int\limits_{t-\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau + \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \int\limits_0^{t-\xi} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \operatorname{str}\operatorname{co}_M \int\limits_{t-\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau + \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \int\limits_{t-2\xi}^{t-\xi} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau + \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-2\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \int\limits_{t-3\xi}^{t-2\xi} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-(N-1)\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \int\limits_{t-N\xi}^{t-(N-1)\xi} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-n\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \int\limits_{t-(n+1)\xi}^{t-n\xi} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-n\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} (\xi\, \mathcal{Q}(t-(n+1)\xi) + O(\xi^2)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \xi \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-n\xi}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} (\mathcal{Q}(t-(n+1)\xi) + O(\xi)) + \bar{o}(N\xi) \underset{\xi\to 0}{\to}$$

$$\underset{\xi\to 0}{\to} \int\limits_0^t \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{t-s}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(t-s)\,ds = \int\limits_0^t \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{\zeta}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(\zeta)\,d\zeta.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть M — компактное порождающее множество, $\mathcal{Q}(\tau)$ — многозначное отображение со значениями во множестве выпуклых компактов, опорная функция $\rho(l|\mathcal{Q}(\tau))$ которого липшицева по τ. При условии непустоты геометрической разности M и интеграла от отображения на временно́м отрезке $[0,t]$ справедливо соотношение*

$$M \dot{-} \int\limits_0^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = M \dot{-} \int\limits_0^t \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{\zeta}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(\zeta)\,d\zeta.$$

Для опорных функций верно равенство

$$\rho\Big(l \,\Big|\, M \dot{-} \int\limits_0^t \mathcal{Q}(\tau)d\tau\Big) = \rho(l\,|\,M) - \int\limits_0^t \rho\Big(l \,\Big|\, \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_{\zeta}^t \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(\zeta)\Big)\,d\zeta.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1 к теореме 5.

Замечание 2. Результаты теоремы 8 и следствия 2 останутся справедливыми, если заменить отрезок $[0,t]$ на $[t,t_1]$. В этом случае

$$\operatorname{str}\operatorname{co}_M \int\limits_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = \int\limits_t^{t_1} \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(s)\,ds,$$

$$M \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau = M \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(s)\,ds,$$

$$\rho\Big(l \,\Big|\, M \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau\Big) = \rho(l\,|\,M) - \int\limits_t^{t_1} \rho\Big(l \,\Big|\, \lim \operatorname{str}\operatorname{co}_{M \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\,d\tau} \mathcal{Q}(s)\Big)\,ds.$$

Теорема 9. *Для линейной системы с неопределённостью (2) и ограничением (3) множество разрешимости* $\mathbf{W}[t]$ *может быть найдено из соотношения*

$$\mathbf{W}[t] = M \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau}\, \mathcal{Q}(s)\, ds.$$

Для опорной функции этого множества верно следующее выражение:

$$\rho(l \mid \mathbf{W}[t]) = \rho(l \mid M) - \int\limits_t^{t_1} \rho\Big(l \,\Big|\, \lim \operatorname{str} \operatorname{co}_{M \dot{-} \int_s^{t_1} \mathcal{Q}(\tau)\, d\tau}\, \mathcal{Q}(s)\Big)\, ds. \tag{13}$$

Доказательство следует из теоремы 8 и следствия 2.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ

Для системы (2) с ограничением (3) рассмотрим следующую функцию цены:

$$\hat{\mathcal{V}}(t,x) = \max_{v \in \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\cdot)} d(x(t_1), M).$$

Здесь $d(x(t_1), M)$ — евклидово расстояние до целевого множества в момент времени t_1, и в каждый момент времени $\tau \in [t, t_1]$ $v(\tau) \in \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)$. Тогда

$$d(x, M) = \max_{\|l\| \leqslant 1} \{\langle l, x\rangle - \rho(l|M)\},$$

и, использовав выражение для положения системы в момент времени t, имеем

$$\hat{\mathcal{V}}(t,x) = \max_{v \in \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\cdot)} \max_{\|l\| \leqslant 1} \bigg\{ \bigg\langle l, x + \int\limits_t^{t_1} v(\tau)\, d\tau \bigg\rangle - \rho(l|M) \bigg\}.$$

Проводя максимизацию по помехе из расширенного множества $\hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\cdot)$, получаем

$$\hat{\mathcal{V}}(t,x) = \max_{\|l\| \leqslant 1} \bigg\{ \langle l, x\rangle + \int\limits_t^{t_1} \rho(l \mid \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau))\, d\tau - \rho(l \mid M) \bigg\} =$$

$$= \max_{\|l\| \leqslant 1} \bigg\{ \langle l, x\rangle - \bigg(\rho(l \mid M) - \int\limits_t^{t_1} \rho(l \mid \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau))\, d\tau \bigg) \bigg\} =$$

$$= \max_{\|l\| \leqslant 1} \bigg\{ \langle l, x\rangle - \rho\bigg(l \,\bigg|\, M \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)\, d\tau \bigg) \bigg\} = d\bigg(x, M \dot{-} \int\limits_t^{t_1} \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)\, d\tau \bigg) = d(x, \mathbf{W}[t]).$$

Переход от разности опорных функций целевого множества и интеграла от множества $\hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)$ к опорной функции геометрической разности множеств выполняется в силу (11), (13). Получаем, что при замене в исходной задаче множества $\mathcal{Q}(t)$ на $\hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(t)$ функция цены равна расстоянию до множества разрешимости в момент времени t.

Следующая теорема даёт уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана с помехой (7), которому удовлетворяет функция расстояния до множества разрешимости.

Теорема 10. *Для линейно выпуклой задачи с неопределённостью (2), $\tau \in [t, t_1]$, ограничением $v(\tau) \in \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)$ ($\hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)$ — непустое компактное множество) в случае $\mathbb{R}^2$ функция цены*

$$V(t,x) = d(x, \mathbf{W}[t])$$

в точках дифференцируемости является решением уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}(\tau, x) + \max_{v \in \hat{\mathcal{Q}}_{t_1}(\tau)} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(\tau, x), v \right\rangle = 0, \quad \tau \in [t, t_1],$$

с краевым условием $V(t_1, x) = d(x, M)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена модификация задачи разрешимости для линейной системы с неопределённостью, для которой не требуется вычислительно сложная операция овыпукления геометрической разности. Изучен случай фазового пространства $\mathbb{R}^2$. Найдены условия, при которых переход к указанной модификации возможен. Выведено уравнение типа Гамильтона–Якоби–Беллмана, которому удовлетворяет расстояние до множества разрешимости. В дальнейших исследованиях предполагается рассмотрение задачи с ненулевым управлением, а также обобщение полученных результатов на случай фазового пространства $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин, Л.С. О линейных дифференциальных играх. II / Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 175, № 4. — С. 910–912.
2. Понтрягин, Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования / Л.С. Понтрягин // Мат. сб. — 1980. — Т. 112 (154), № 3 (7). — С. 307–330.
3. Куржанский, А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений / А.Б. Куржанский // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1999. — Т. 224. — С. 234–248.
4. Kurzhanski, A.B. Dynamics and Control of Trajectory Tubes / A.B. Kurzhanski, P. Varaiya. — Basel : Birkhäuser, 2014. — 445 p.
5. Fleming W.H. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions / W.H. Fleming, H.M. Soner. — New York : Springer, 2006. — 429 p.
6. Мельникова, А.А. Об одной задаче вычисления множества разрешимости для линейной системы с неопределённостью / А.А. Мельникова, П.А. Точилин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1533–1540.
7. Kurzhanski, A.B. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control / A.B. Kurzhanski, I. Vályi. — Boston : Birkhäuser, 1997. — 321 p.
8. Половинкин, Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. — М. : Физматлит, 2007. — 416 с.
9. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. — М. : Наука, 1977. — 392 с.
10. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар ; пер. с англ. А.Д. Иоффе ; под ред. В.М. Тихомирова. — М. : Мир, 1973. — 470 с.

11. Арутюнов, А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу / А.В. Арутюнов. — М. : Физматлит, 2014. — 184 с.
12. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 224 с.
13. Ляпунов, А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях / А.А. Ляпунов // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — № 6. — С. 465–478.

ON THE PROPERTIES OF THE SOLVABILITY SET FOR A LINEAR SYSTEM WITH UNCERTAINTY

A. A. Melnikova[1], P. A. Tochilin[2], A. N. Daryin[3]

[1–3]Lomonosov Moscow State University, Russia
[2]V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
e-mail: [1]nastya.a.melnikova@gmail.com, [2]tochilin@cs.msu.ru, [3]daryin@mail.ru

The work is devoted to the problem of verifying that the state of a linear controlled system of differential equations will hit the target set over a finite time interval, despite the uncertainties (noise). Some geometric, pointwise convex constraints on uncertainties are imposed. In the case of a two-dimensional state space a method is proposed for constructing a solvability set without the calculation of the convex hulls of the functions necessary to construct a support function of the geometric difference of the sets. A Hamilton–Jacobi–Bellman type equation is obtained, which is satisfied by the distance function to the solvability set.

Keywords: dynamic programming, value function, solvability set, alternated integral, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, verification problem

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042).

REFERENCES

1. Pontriagin, L.S., On linear differential games. II, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1967, vol. 175, no. 4, pp. 910–912.
2. Pontriagin, L.S., Linear differential games of pursuit, *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303.
3. Kurzhanski, A.B., Pontryagin's alternated integral in the theory of control synthesis, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1999, vol. 224, pp. 212–225.
4. Kurzhanski, A.B. and Varaiya, P., *Dynamics and Control of Trajectory Tubes*, Basel: Birkhäuser, 2014.
5. Fleming, W.H., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, New York: Springer, 2006.
6. Melnikova, A.A. and Tochilin, P.A., On a problem of calculating the solvability set for a linear system with uncertainty, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1538–1546.
7. Kurzhanski, A.B. and Vályi, I., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Boston: Birkhäuser, 1997.
8. Polovinkin, E.S. and Balashov, M.V., *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* (Elements of Convex and Strongly Convex Analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007.
9. Kurzhanski, A.B., *Upravlenie i nabl'udenie v usloviah neopedelennosti* (Control and Observation under Uncertainty Conditions), Moscow: Nauka, 1977.
10. Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
11. Arutyunov, A.V., *Lekcii po vypuklomu i mnogoznachnomu analizu* (Lectures on Convex and Set-Valued Analysis), Moscow: Fizmatlit, 2014.
12. Filippov, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Springer, 1988.
13. Lyapunov, A.A., On countably additive set-functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1940, no. 6, pp. 465–478.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1499–1518

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2024 г. Г. Г. Петросян

Воронежский государственный педагогический университет
e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.05.2024 г., после доработки 26.07.2024 г.; принята к публикации 02.08.2024 г.

Найдены условия управляемости для систем, описываемых полулинейными дифференциальными включениями дробного порядка с обратной связью в виде sweeping процесса в гильбертовом пространстве. Использованы топологические методы нелинейного анализа для многозначных уплотняющих отображений.

Ключевые слова: задача управляемости, дифференциальное включение, sweeping процесс, дробная производная, уплотняющее отображение, мера некомпактности

DOI: 10.31857/S0374064124110067, EDN: JEFZHE

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача управляемости требует существования функции управления, переводящей систему из заданного начального состояния в требуемое конечное состояние, причём эти состояния могут выбираться произвольно в фазовом пространстве. Для решения этой задачи в случае бесконечномерного банахова пространства весьма эффективны методы многозначного анализа (см., например, статью [1] и библиографию в ней). В работах [2, 3] получены результаты об управляемости для систем, которые можно описать в терминах полулинейных дифференциальных и функционально-дифференциальных включений в бесконечномерных банаховых пространствах.

Актуальной задачей современной математики является моделирование процессов в системах управления с обратной связью. Зачастую это достигается с помощью дифференциальных включений и вариационных неравенств различного типа в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Большой интерес представляет исследование систем управления, динамика которых описывается дифференциальными или функционально-дифференциальными уравнениями или включениями с управляющим параметром в бесконечномерном банаховом пространстве. Во многих случаях налагаемые на выбор управления ограничения обратной связи рассматриваются как решения так называемых sweeping процессов в гильбертовых пространствах. Фундаментальные результаты о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений для таких процессов были получены в [4–7].

В то же время имеется большое число работ, посвящённых теории дробного анализа и дифференциальных уравнений и включений дробного порядка, имеющей многочленные приложения в различных областях прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см. монографии [8, 9]). В [10–13] исследованы вопросы разрешимости дифференциальных уравнений, включений и краевых задач для них в случае дробного порядка производной из интервала $(0, 1)$.

С использованием теории топологической степени уплотняющих мультиотображений в настоящей статье устанавливается общий принцип управляемости для систем с обратной связью, описываемых полулинейным дифференциальным включением дробного порядка и sweeping процессом в гильбертовом пространстве.

Пусть E — банахово пространство и H — гильбертово пространство. Рассматривается система управления с обратной связью, описываемая следующими дифференциальным включением и sweeping процессом:

$$^{C}D_0^{\alpha}x(t)\in Ax(t)+F(t,x(t),y(t))+Bu(t),\quad t\in[0,a], \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

$$-y'(t)\in N_{C(t)}(y(t))+g(t,x(t),y(t))+ly(t),\quad t\in[0,a], \tag{3}$$

$$y(0)=y_0\in C(0), \tag{4}$$

$$x(a)=x_1, \tag{5}$$

где $^{C}D_0^{\alpha}$ — дробная производная Капуто–Герасимова порядка $\alpha\in(0,1)$, $C\colon [0,a]\multimap H$ — многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями, $A\colon D(A)\subset E\to E$ — линейный замкнутый оператор, порождающий равномерно ограниченную C_0-полугруппу операторов $\{T(t),t\geqslant 0\}$ в E. Функция внешнего управления $u(\cdot)$ принадлежит пространству $L^{\infty}([0,a];U)$, U — банахово пространство управлений, $B\colon U\to E$ — ограниченный линейный оператор. Для внутреннего управления y через $N_{C(t)}(y)$ обозначается нормальный конус, определённый по выпуклому замкнутому множеству $C(t)\subset H$ как

$$N_{C(t)}(y)=\begin{cases}\{\xi\in H\colon \langle\xi,c-y\rangle\leqslant 0 \text{ для всех } c\in C(t)\}, & \text{если } y\in C(t),\\ \emptyset, & \text{если } y\notin C(t),\end{cases} \tag{6}$$

$F\colon [0,a]\times E\times H\multimap E$ — многозначное отображение типа Каратеодори, $g\colon [0,a]\times E\times H\to H$ — нелинейное однозначное отображение, $x_0,x_1\in E$ и $y_0\in H$ наперёд заданы, число $l>0$.

Задача управляемости формулируется следующим образом: для данных x_0, x_1 исследовать вопрос существования решений $x\in C([0,a];E)$, $y\in C([0,a];H)$ системы (1)–(4) и функции управления $u\in L^{\infty}([0,a];U)$ таких, чтобы выполнялось условие (5).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. ПОНЯТИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА И ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Определение 1. *Дробным интегралом порядка* $\alpha>0$ от функции $g\colon [0,a]\to E$ называется функция

$$I_0^{\alpha}g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds,$$

где $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 2. *Дробной производной Капуто–Герасимова порядка* $\alpha\in(0,1)$ функции $g\in C^1([0,a];E)$ называется функция

$$^{C}D_0^{\alpha}g(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}g'(s)\,ds.$$

2.2. МЕРЫ НЕКОМПАКТНОСТИ

Введём следующие обозначения множеств: $P(E)=\{A\subseteq E\colon A\neq\varnothing\}$; $Pb(E)=\{A\in P(E)\colon A$ — ограничено$\}$; $Pv(E)=\{A\in P(E)\colon A$ — выпукло$\}$; $J(E)=\{A\in P(E)\colon A$ — замкнуто$\}$; $Jb(E)=\{A\in P(E)\colon A$ — замкнуто и ограничено$\}$; $Jv(E)=\{A\in P(E)\colon A$ — замкнуто и выпукло$\}$; $K(E)=\{A\in Pb(E)\colon A$ — компактно$\}$; $Kv(E)=Pv(E)\cap K(E)$.

Определение 3. Пусть $(\mathcal{A},\geqslant)$ — частично упорядоченное множество. Тогда функция $\beta\colon Pb(E)\to\mathcal{A}$ *называется мерой некомпактности* (далее *МНК*) в E, если для любого $\Omega\in Pb(E)$ выполняется равенство $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega)=\beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

МНК β называется:

– *монотонной*, если для любых $\Omega_0,\Omega_1\in Pb(E)$ из $\Omega_0\subseteq\Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0)\leqslant\beta(\Omega_1)$;

– *несингулярной*, если для любого $a\in E$ и любого $\Omega\in Pb(E)$ выполнено $\beta(\{a\}\cup\Omega)=\beta(\Omega)$;

– *инвариантной относительно объединения с компактным множеством*, если $\beta(\Omega\cup K)=\beta(\Omega)$ для любого $\Omega\in Pb(E)$ и относительно компактного множества $K\subset E$;

– *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

– *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0+\Omega_1)\leqslant\beta(\Omega_0)+\beta(\Omega_1)$ для любых $\Omega_0,\Omega_1\in Pb(E)$;

– *правильной*, если $\beta(\Omega)=0$ равносильно относительной компактности Ω.

Примером вещественной МНК в пространстве E, обладающей всеми перечисленными выше свойствами, является *МНК Хаусдорфа*

$$\chi_E(\Omega)=\inf\{\varepsilon>0,\ \text{для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\},$$

которая удовлетворяет также свойству полуоднородности $\chi_E(\lambda\Omega)=|\lambda|\chi_E(\Omega)$ для всех $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\Omega\in Pb(E)$. Более того, если $\mathcal{L}\colon E\to E$ — линейный ограниченный оператор, то $\chi_E(\mathcal{L}(\Omega))\leqslant\|\mathcal{L}\|\chi_E(\Omega)$ для любого $\Omega\in Pb(E)$.

Норма множества $M\in Pb(E)$ определяется по формуле $\|M\|=\sup_{x\in M}\|x\|_E$.

2.3. МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [14, 15].

Определение 4. Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F}\colon X\to P(E)$ называется:

– *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V)=\{x\in X\colon\mathcal{F}(x)\subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V\subset E$;

– *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}}=\{(x,y)\colon y\in\mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X\times E$;

– *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ относительно компактно в E.

Определение 5. Мультиотображение $\mathcal{F}\colon X\subseteq E\to K(E)$ называется *уплотняющим относительно МНК β (β-уплотняющим)*, если для любого ограниченного множества $\Omega\subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено условие $\beta(\mathcal{F}(\Omega))\ngeqslant\beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество E и $\mathcal{F}\colon\mathcal{M}\to Kv(\mathcal{M})$ — замкнутое β-уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в E. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$: $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F}:=\{x\colon x\in\mathcal{F}(x)\}$ непустое.*

2.4. ИЗМЕРИМЫЕ МУЛЬТИФУНКЦИИ

Сформулируем необходимые далее понятия (см., например, [14, 15]).

Определение 6. Мультифункция $G\colon [0,a]\to K(E)$ для $p\geqslant 1$ называется:

– L^p-*интегрируемой*, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g\in L^p([0,a];E)$ такая, что $g(t)\in G(t)$ для п.в. $t\in[0,a]$;

– L^p-*интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi\in L^p([0,a])$ такая, что

$$\|G(t)\|:=\sup\{\|g\|_E\colon g(t)\in G(t)\}\leqslant \xi(t)\quad \text{для п.в. } t\in[0,a].$$

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G\colon [0,a]\to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Определение 7. Последовательность функций $\{\xi_n\}\subset L^p([0,a];E)$, $p\geqslant 1$, называется L^p-*полукомпактной*, если она L^p-интегрально ограничена, т.е.

$$\|\xi_n(t)\|_E\leqslant v(t)\ \text{для всех } n\in\mathbb{N} \text{ и п.в. } t\in[0,a],$$

где $v\in L^p_+([0,a])$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t\in[0,a]$.

Определение 8. Мультифункция G называется *измеримой*, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,a]$) для любого открытого подмножества $V\subset E$.

Для L^p-интегрируемой мультифункции G определён многозначный интеграл

$$\int\limits_0^t G(s)ds:=\left\{\int\limits_0^t g(s)\,ds\colon g\in\mathcal{S}^p_G\right\}\quad \text{для любого } t\in[0,a].$$

Лемма 1 (см. [14], теорема 4.2.1). *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\}\subset L^1([0,a];E)$ является L^1-интегрально ограниченной. Предположим, что $\chi_E(\{\xi_n\}(t))\leqslant k(t)$ для п.в. $t\in\in[0,a]$ и для всех $n\in\mathbb{N}$, где $k\in L^1_+([0,a])$. Тогда для любого $\delta>0$ существуют компактное множество $K_\delta\subset E$, множество $m_\delta\subset[0,a]$ с лебеговой мерой $\operatorname{mes} m_\delta<\delta$ и множество функций $G_\delta\subset L^1([0,a];E)$ со значениями в K_δ такие, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует функция $b_n\in G_\delta$, для которой*

$$\|\xi_n(t)-b_n(t)\|_E\leqslant 2k(t)+\delta,\quad t\in[0,a]\setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n\equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2.5. SWEEPING ПРОЦЕССЫ

Напомним некоторые понятия и определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть M — непустое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H и $x\in H$, тогда расстояние от x до M, обозначаемое как $d(x,M)$, определяется по формуле

$$d(x,M)=\inf\{\|x-z\|\colon z\in M\},$$

а проекция элемента x на M как

$$pr_M(x)=\{z\in M\colon d(x,M)=\|x-z\|\}.$$

Если $z\in pr_M(x)$ и $c\geqslant 0$, то вектор $c(x-z)$ называется *проксимально нормальным* для M в точке z. Множество всех таких векторов образует конус, называемый *проксимальным* *нормальным конусом* для M в точке z. Он обозначается как $N_M^P(z)$. Предельный нормальный конус определяется как

$$N_M^L(z)=\{\eta\in H\colon \eta_n\rightharpoonup\eta,\ \ \eta_n\in N_M^P(z_n),\ \ z_n\to z\}.$$

Для фиксированного $r>0$ множество M называется *r-prox регулярным*, если для каждого $z\in M$ и произвольного $\eta\in N_M^L(z)$ такого, что $\|\eta\|<1$, выполняется $z=pr_M(z+r\eta)$. Если M является r-prox регулярным, то справедливы следующие свойства (см. [6]):

– для каждого $z\in M$ все нормальные конусы, определённые выше, совпадают (в таком случае их обозначают более просто $N_M(z)$);

– для любого $z\in H$ такого, что $d(z,M)<r$, множество $pr_M(z)$ является одноэлементным.

Пусть мультифункция $C\colon [0,a]\to J(H)$ такова, что

(A1) для каждого $t\in[0,a]$ множество $C(t)$ является r-prox регулярным;

(A2) существует абсолютно непрерывная функция $\vartheta\colon [0,a]\to\mathbb{R}$ такая, что для каждого $x\in H$ и $s,t\in[0,a]$

$$|d(x,C(t))-d(x,C(s))|\leqslant|\vartheta(t)-\vartheta(s)|.$$

Теорема 2 [6]. *Предположим, что мультифункция $C(\cdot)$ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Пусть $h\colon [0,a]\to H$ — интегрируемое отображение. Тогда для каждого $\eta_0\in C(0)$ sweeping процесс с возмущением*

$$-y'(t)\in N_{C(t)}(y(t))+h(t)\quad \text{для п.в. } t\in[0,a],\quad y(0)=\eta_0,$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение y. Более того, справедлива оценка

$$\|y'(t)+h(t)\|\leqslant\|h(t)\|+|\vartheta'(t)|\quad \text{для п.в. } t\in[0,a]. \tag{7}$$

Теорема 3 [6]. *Предположим, что мультифункция $C(\cdot)$ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Пусть $f\colon [0,a]\times H\to H$ удовлетворяет условиям:*

– для каждого $x\in H$ функция $f(\cdot,x)\colon [0,a]\to H$ измерима;

– для любого $\delta>0$ существует неотрицательная функция $k_\delta\in L^1[0,a]$ такая, что для каждого $(x,y)\in B_\delta(0)\times B_\delta(0)$ имеем

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant k_\delta(t)\|x-y\|\quad \text{для п.в. } t\in[0,a];$$

– существует неотрицательная функция $\varsigma\in L^1[0,a]$ такая, что для каждого $x\in\bigcup_{s\in[0,a]}C(s)$

$$\|f(t,x)\|\leqslant\varsigma(t)(1+\|x\|)\quad \text{для п.в. } t\in[0,a].$$

Тогда для любого $\eta_0\in C(0)$ возмущённый sweeping процесс

$$-y'(t)\in N_{C(t)}(y(t))+f(t,y(t))\quad \text{для п.в. } t\in[0,a],\quad y(0)=\eta_0,$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение y.

Для мультифункции $C\colon [0,a]\to Jv(H)$ рассмотрим следующий sweeping процесс с возмущением:

$$-y'(t)\in N_{C(t)}(y(t))+h(t)+ly(t), \tag{8}$$

где $h\colon [0,a]\to H$ — ограниченная измеримая функция и $l>0$.

Будем полагать, что мультифункция C удовлетворяет следующим свойствам:

(A2$'$) существует $L_C>0$ такое, что для любых $t_1,t_2\in[0,a]$ выполняется оценка

$$d_H(C(t_1),C(t_2))\leqslant L_C|t_1-t_2|, \tag{9}$$

где $d_H(C_1, C_2)$ — хаусдорфово расстояние между $C_1, C_2 \subset H$, определённое как

$$d_H(C_1, C_2) = \max\Big\{\sup_{a \in C_2} d(a, C_1), \sup_{b \in C_1} d(b, C_2)\Big\};$$

(A3) множество $\bigcup_{t\in[0,a]} C(t)$ относительно компактно.

Заметим, что условие (A2′) является частным случаем (A2), где $v(t) = L_C t$.

При выполнении условия (A2′) для начального условия $y(0) \in C(0)$ sweeping процесс (8) допускает единственное абсолютно непрерывное решение $y(t)$, удовлетворяющее (8) для п.в. $t \in [0,a]$ (теорема 3).

Пусть отображение $g\colon [0,a]\times E\times H \to H$ при всех фиксированных $(x,y)\in E\times H$ является измеримой на отрезке $[0,a]$ функцией и подчиняется следующим условиям:

(g1) существуют константы $m_1, m_2 > 0$ такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in E$ и $y_1, y_2 \in H$

$$\|g(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)\|_H \leqslant m_1\|x_1 - x_2\|_E + m_2\|y_1 - y_2\|_H, \quad t\in[0,a];$$

(g2) существует функция $\sigma \in L^1_+([0,a])$ такая, что

$$\|g(t,x,y)\|_H \leqslant \sigma(t)(1 + \|x\|_E + \|y\|_H) \quad \text{для п.в. } t \in [0,a].$$

Из теорем 2 и 3 следует, что при выполнении условий (A1), (A2′), (A3), (g1), (g2) для каждого $x \in C([0,a];E)$ задача (3), (4) имеет единственное решение $y_x \in C([0,a];H)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем полагать, что мультиотображение $F\colon [0,a]\times E\times H \to Kv(E)$ задачи (1), (2) удовлетворяет следующим условиям:

(B1) для всех $(x,y)\in E\times H$ мультифункция $F(\cdot,x,y)\colon [0,a]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

(B2) для п.в. $t\in[0,a]$ многозначное отображение $F(t,\cdot,\cdot)\colon E\times H\to Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

(B3) для каждого $r>0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,a])$ такая, что $\|F(t,x,y)\|_E \leqslant \omega_r(t)$ для всех $(x,y)\in E\times H$, $\|x\|_E < r$, $\|y\|_H < r$;

(B4) существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,a])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega\subset E$ и $y\in H$ справедливо неравенство $\chi_E(F(t,\Omega,y)) \leqslant \mu(t)\chi_E(\Omega)$ для п.в. $t\in[0,a]$, где χ_E — МНК Хаусдорфа в E.

В свою очередь, на оператор A наложим следующее условие:

(A) оператор $A\colon D(A)\subset E\to E$ порождает ограниченную C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ линейных операторов в E.

Обозначим $M = \sup\{\|T(t)\|;\ t\geqslant 0\}$.

Для функции $x\in C([0,a];E)$ рассмотрим мультифункцию $\Phi_F\colon [0,a]\to Kv(E)$, определяемую равенством

$$\Phi_F(t) = F(t, x(t), y_x(t)).$$

Из условий (B1)–(B3) следует, что мультифункция Φ_F является L^∞-интегрируемой. Поэтому суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}^\infty_F\colon C([0,a];E)\to P(L^\infty([0,a];E))$, заданный по формуле

$$\mathcal{P}^\infty_F(x) = \{f\in L^\infty([0,a];E)\colon f(t)\in F(t,x(t),y_x(t)) \quad \text{для п.в. } t\in[0,a]\},$$

корректно определён.

Определение 9. *Интегральным решением задачи* (1), (2) на отрезке $[0,a]$ называется функция $x\in C([0,a];E)$, определяемая как

$$x(t)=\mathcal{G}(t)x_0+\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)\,ds+\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)Bu(s)\,ds,\quad t\in[0,a],$$

где $f\in\mathcal{P}_F^\infty(x)$, $u\in L^\infty([0,a];U)$,

$$\mathcal{G}(t)=\int\limits_0^\infty \xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)\,d\theta,\quad \mathcal{T}(t)=\alpha\int\limits_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)\,d\theta,\quad \xi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\alpha}\theta^{-1-1/\alpha}\Psi_\alpha(\theta^{-1/\alpha}),$$

$$\Psi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\theta^{-\alpha n-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha),\quad \theta\in\mathbb{R}^+.$$

Замечание. $\xi_\alpha(\theta)\geqslant 0$, $\int_0^\infty\xi_\alpha(\theta)\,d\theta=1$, $\int_0^\infty\theta\xi_\alpha(\theta)\,d\theta=1/\Gamma(\alpha+1)$.

Лемма 2 [13]. *Оператор-функции $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ обладают следующими свойствами:*

– для каждого $t\in[0,a]$ $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются линейными ограниченными операторами, более того

$$\|\mathcal{G}(t)x\|_E\leqslant M\|x\|_E,\quad \|\mathcal{T}(t)x\|_E\leqslant\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\|x\|_E;\tag{10}$$

– оператор-функции $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{T}(t)$ являются сильно непрерывными для всех $t\in[0,a]$.

Для достижения поставленной цели стандартно предположим, что соответствующая линейная задача управляемости разрешима, т.е. будем полагать, что оператор управления $W\colon L^\infty([0,a];U)\to E$, заданный как

$$Wu=\int\limits_0^a (a-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-s)Bu(s)\,ds,$$

имеет ограниченный правый обратный оператор $W^{-1}\colon E\to L^\infty([0,a];U)$.

Пусть оператор W^{-1} удовлетворяет условию регулярности:

(W) существует функция $\gamma\in L_+^\infty([0,a])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Omega\subset E$

$$\chi_U(W^{-1}(\Omega)(t))\leqslant\gamma(t)\chi_E(\Omega)\quad\text{для п.в. } t\in[0,a],$$

где χ_U — МНК Хаусдорфа в U.

Пусть M_1, M_2 — положительные константы такие, что

$$\|B\|\leqslant M_1,\quad \|W^{-1}\|\leqslant M_2.\tag{11}$$

Рассмотрим оператор $S\colon L^\infty([0,a];E)\to C([0,a];E)$:

$$S(f)(t)=\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)\left[BW^{-1}\left(x_1-\mathcal{G}(a)x_0-\int\limits_0^a (a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\right)(s)\right]ds=:S'(f)+S_2''(f).$$

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{\eta_n\}\subset L^p([0,a];E)$*, где* $1/\alpha<p\leqslant\infty$*, ограничена и* $\eta_n\rightharpoonup\eta_0$ *в* $L^1([0,a];E)$*. Тогда* $S'(\eta_n)\rightharpoonup S'(\eta_0)$ *в* $C([0,a];E)$*.*

Доказательство. Для числа $d>0$ рассмотрим оператор $S'_d\colon L^1([0,a];E)\to C([0,a];E)$:

$$S'_d(\eta_n)=\begin{cases}0, & t\leqslant d,\\ \int_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)\eta_n(s)ds, & t>d.\end{cases}$$

Поскольку интеграл в последнем выражении является непрерывной функцией на $[0,t-d]$, то имеем сходимость

$$S'_d(\eta_n)\rightharpoonup S'_d(\eta_0) \tag{12}$$

в пространстве $C([0,a];E)$. Пусть ψ — непрерывный линейный функционал на $C([0,a];E)$, т.е. $\psi\in C^*([0,a];E)$. Тогда получаем

$$(\psi,S'(\eta_n))=(\psi,S'_d(\eta_n))+(\psi,S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n)),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Из определения оператора S'_d следует его представление

$$(S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n))(t)=\begin{cases}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)\eta_n(s)\,ds, & t\leqslant d,\\ \int_{t-d}^t(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)\eta_n(s)ds, & t>d,\end{cases}$$

откуда с учётом леммы 2 вытекают оценки

$$\|S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n)\|_{C([0,a];E)}\leqslant\begin{cases}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|\,\|\eta_n(s)\|\,ds, & t\leqslant d,\\ \int_{t-d}^t(t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|\,\|\eta_n(s)\|\,ds, & t>d.\end{cases}$$

Следовательно, для $p\in(1/\alpha,\infty)$ имеем

$$\|S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n)\|_{C([0,a];E)}\leqslant\begin{cases}\left(\int\limits_0^t(t-s)^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\,ds\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_0^t\|\mathcal{T}(t-s)\|^p\,\|\eta_n(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}, & t\leqslant d,\\ \left(\int\limits_{t-d}^t(t-s)^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\,ds\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{t-d}^t\|\mathcal{T}(t-s)\|^p\,\|\eta_n(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}, & t>d\end{cases}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Md^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{p-1}{\alpha p-1}\right]^{\frac{p-1}{p}}\|\eta_n\|_{L^p}.$$

В свою очередь, для $p=\infty$ получаем

$$\|S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n)\|_{C([0,a];E)}\leqslant\frac{Md^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\|\eta_n\|_{L^\infty}.$$

Тогда для произвольного $\epsilon>0$ можно подобрать $d>0$ такое, что справедлива следующая оценка:

$$\|S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n)\|_{C([0,a];E)}\leqslant\frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,a];E)}}. \tag{14}$$

С учётом (12) $(\psi,S'_d(\eta_n))\to(\psi,S'_d(\eta_0))$, но тогда для данного ϵ можно подобрать n_0 такое, что

$$(\psi,S_d(\eta_{n_0})-S_d(\eta_0))<\epsilon/2. \tag{15}$$

Теперь, используя (13)–(15), получаем неравенство

$$(\psi, S'(\eta_n)-S'(\eta_0)) = (\psi, S'_d(\eta_n)-S'_d(\eta_0)) + (\psi, S'(\eta_n)-S'_d(\eta_n)) + (\psi, S'_d(\eta_0)-S'(\eta_0)) <$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + 2\|\psi\|_{C^*([0,a];E)} \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,a];E)}} = \epsilon,$$

доказывающее утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть Δ — ограниченное подмножество $L^\infty([0,a];E)$ такое, что $\chi_E(\Delta(t)) \leqslant \leqslant \kappa(t)$ для п.в. $t \in [0,a]$, где $\kappa \in L^\infty_+[0,a]$. Тогда*

$$\chi_E(S'(\Delta)(t)) \leqslant \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\kappa(s)\,ds.$$

Доказательство. Пусть $\|\Delta\| \leqslant K$. Тогда, используя оценку (10), можно утверждать, что $S'_d(\Delta)$ является $Md^\alpha K/\Gamma(\alpha)$-сетью в пространстве $C([0,a];E)$ для множества $S'(\Delta)$ и

$$\chi_E(S'_d(\Delta)(t)) \leqslant 2\frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-d} (t-s)^{\alpha-1}\kappa(s)\,ds.$$

Теперь остаётся лишь сослаться на малость d. Лемма доказана.

Используя лемму 3, по аналогии с доказательством леммы 4.2.1 из [14] устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 5. *Оператор S' удовлетворяет следующим свойствам:*

– если $1/\alpha < p < \infty$, то существует константа $q \geqslant 0$ такая, что

$$\|S'(\xi)(t) - S'(\eta)(t)\|_E \leqslant q \int_0^t \|\xi(s)-\eta(s)\|_E\,ds, \quad \xi, \eta \in L^1([0,a];E);$$

– для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательноси $\{\eta_n\} \subset \subset L^1([0,a];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,a]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,a];E)$ влечёт сходимость $S'(\eta_n) \to S'(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$.

Лемма 6. *Пусть $\Omega \subset C([0,a];E)$ — непустое ограниченное множество и $\Omega(t)$ относительно компактно в E при каждом $t \in [0,a]$. Тогда множество*

$$\left\{ S' \circ \mathcal{P}^\infty_F(\Omega)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)\,ds \colon f \in \mathcal{P}^\infty_F(\Omega) \right\}$$

является равностепенно непрерывным в $C([0,a];E)$.

Доказательство. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и возьмём $t_1, t_2 \in [0,a]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leqslant a$. Тогда для произвольного $f \in \mathcal{P}^\infty_F(\Omega)$ имеем

$$\|S'(f)(t_2) - S'(f)(t_1)\|_E \leqslant \left\| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)f(s)\,ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s)f(s)\,ds \right\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)f(s)\,ds \right\|_E +$$
$$+ \left\| \int_0^{t_1} ((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s) - (t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))f(s)\,ds \right\|_E =: Z_1 + Z_2.$$

Используя лемму 2 и условие (B3), можно подобрать $\delta_1>0$, для которого из неравенства $|t_2-t_1|<\delta_1$ для $f\in\mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x\in\Omega$, следует оценка

$$Z_1\leqslant\frac{M\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\alpha}<\frac{\epsilon}{6}.$$

Для оценки Z_2 возьмём

$$d<\delta_2:=\left[\frac{\epsilon\Gamma(1+\alpha)/6}{M\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty(2^\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тогда для $t_1<d$ и $t_2-t_1<d$ получим

$$Z_2\leqslant\int\limits_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t_2-s)\|\,\|f(s)\|\,ds+\int\limits_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t_1-s)\|\,\|f(s)\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t_2-s)\|\,\|f(s)\|\,ds+\int\limits_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t_1-s)\|\,\|f(s)\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty}{\Gamma(1+\alpha)}(2^\alpha+1)d^\alpha<\frac{\epsilon}{6}.$$

Для $t_1>d$ имеем

$$Z_2\leqslant\left\|\int\limits_0^{t_1-d}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))f(s)\,ds\right\|_E+$$

$$+\left\|\int\limits_{t_1-d}^{t_1}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))f(s)\,ds\right\|_E=:I_1+I_2.$$

Возьмём d настолько малым, чтобы

$$I_2\leqslant\frac{M\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty d^\alpha(2+2^\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}<\frac{\epsilon}{6}.$$

Поскольку $\chi_E(\Omega(t))\equiv0$, то по лемме 1 для любого $\delta_3>0$ существуют компактное множество $K_{\delta_3}\subset E$, множество $m_{\delta_3}\subseteq[0,a]$ с лебеговой мерой $\operatorname{mes}(m_{\delta_3})<\delta_3$ и множество функций $\Delta\subset L^1([0,a];E)$ со значениями в K_{δ_3} такие, что существует функция $b\in\Delta$, для которой

$$\|f(t)-b(t)\|_E\leqslant\delta_3,\quad t\in[0,a]\setminus m_{\delta_3}. \tag{16}$$

Более того, функция $b\in\Delta$ может быть выбрана так, что $b(t)\equiv0$ на m_{δ_3} и множество Δ слабо компактно в $L^1([0,a];E)$. Тогда для I_1 имеет место оценка

$$I_1=\left\|\int\limits_0^{t_1-d}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))(f(s)-b(s)+b(s))\,ds\right\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^{t_1-d}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))(f(s)-b(s))\,ds\right\|_E+$$

$$+\left\|\int\limits_0^{t_1-d}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))b(s)\,ds\right\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))(f(s)-b(s))\,ds\Big\|_E+$$

$$+\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))(f(s)-b(s))\,ds\Big\|_E+$$

$$+\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))b(s)\,ds\Big\|_E+$$

$$+\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))b(s)\,ds\Big\|_E=$$

$$=\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))(f(s)-b(s))\,ds\Big\|_E+$$

$$+\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))(f(s)-b(s))\,ds\Big\|_E+$$

$$+\Big\|\int\limits_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}}((t_2-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_2-s)-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t_1-s))b(s)\,ds\Big\|_E=:N_1+N_2+N_3.$$

Используя (16), можно подобрать $\delta_3>0$ настолько малым, что при $\operatorname{mes}(m_{\delta_3})<2\epsilon d^{1-\alpha}/6$ выполняются оценки $N_1<\epsilon/6$ и $N_2<\epsilon/6$. Заметим, что функции из Δ принимают свои значения в K_{δ_3}, поэтому $\Delta\subset L^\infty([0,a];E)$. Тогда, используя лемму 5, можно подобрать $\delta_4>0$ таким, что при $|t_2-t_1|<\delta_4$ выполняется неравенство $N_3<\epsilon/6$. Таким образом, для произвольного $\epsilon>0$ можно подобрать $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$ таким, что

$$\|S'(f)(t_2)-S'(f)(t_1)\|_E\leqslant Z_1+Z_2\leqslant Z_1+I_1+I_2\leqslant Z_1+I_2+N_1+N_2+N_3<\epsilon$$

для всех $f\in\mathcal{P}^\infty_F(\Omega)$ и $|t_2-t_1|<\delta$, поэтому множество $S'\circ\mathcal{P}^\infty_F(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Лемма доказана.

Оператор S'' может быть представлен следующим образом:

$$S''(f)=S'(BW^{-1}(x_1-\mathcal{G}(a)x_0-\Pi S'(f))),$$

где $\Pi\colon C([0,a];E)\to E$, $\Pi x=x(a)$ — ограниченный линейный оператор. Учитывая, что операторы W^{-1}, B и S' также линейны и ограничены, можем сделать вывод, что и оператор S'' подчиняется условиям лемм 4–6. Но тогда и оператор $S=S'+S''$ удовлетворяет условиям этих лемм.

Введём теперь оператор $G\colon C([0,a];E)\multimap C([0,a];E)$, заданный формулой

$$G(x)(t)=\mathcal{G}(t)x_0+\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}(t-s)\Big[BW^{-1}\Big(x_1-\mathcal{G}(a)x_0-\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\Big)(s)\Big]\,ds,$$

где $f\in\mathcal{P}^\infty_F(x)$.

Ясно, что функция $x\in C([0,a];E)$ является неподвижной точкой мультиоператора G тогда и только тогда, когда функция $x\in C([0,a];E)$ — интегральное решение задачи (1), (2), (5). Поэтому мы вправе свести исходную задачу к задаче о существовании неподвижных точек G.

Введём в пространстве $C([0,a];E)$ меру некомпактности $\nu\colon Pb(C([0,a];E))\to\mathbb{R}^2_+$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, определённую как $\nu(\Omega)=(\varphi(\Omega),\mathrm{mod}_C(\Omega))$, где вторая компонента — модуль равностепенной непрерывности

$$\mathrm{mod}_C(\Omega)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}\|x(t_1)-x(t_2)\|,$$

а $\varphi(\Omega)$ — модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega)=\sup_{t\in[0,a]}e^{-pt}\chi_E(\Omega(t)),$$

здесь константа $p>0$ выбрана так, что

$$\varrho:=\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\sup_{t\in[0,a]}\left(\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds\right)<1.$$

Последнее неравенство реализуется следующим образом. Возьмем $d>0$ таким, что

$$\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\frac{d^\alpha}{\alpha}<\frac{1}{2},$$

и по нему найдём $p>0$ таким, что

$$\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\frac{1}{pd^{1-\alpha}}<\frac{1}{2}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\sup_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\sup_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds+\int\limits_{t-d}^t(t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{1}{d^{1-\alpha}}\frac{e^{-pd}}{p}+\frac{d^\alpha}{\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}}+\frac{d^\alpha}{\alpha}\right)<1.$$

Известно (см. [14]), что МНК ν — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная.

Сформулируем условия, при которых мультиоператор G является уплотняющим.

Теорема 4. *При выполнении условий (A), (A1), (A2′), (A3), (B1)–(B4), (W) мультиоператор G является ν-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega\subset C([0,a];E)$ — непустое ограниченное множество и $y_x\in C([0,a];H)$ — решение задачи (3), (4), соответствующее функции $x\in C([0,a];E)$. Предположим, что $\nu(G(\Omega))\geqslant\nu(\Omega)$. Покажем, что Ω относительно компактно. Заметим, что теорему достаточно доказать для оператора $S\circ\mathcal{P}_F^\infty$. Поскольку МНК ν несингулярна, имеем

$$\nu(S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega))\geqslant\nu(\Omega). \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$\varphi(S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega))\geqslant\varphi(\Omega). \tag{18}$$

С учётом условия (B4) для $0\leqslant s\leqslant a$ получаем оценку

$$\chi_E(\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(s))=\chi_E(\{f(s)\colon f\in\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\})\leqslant\mu(s)\chi_E(\{x(s)\colon x\in\Omega\})=$$
$$=\mu(s)e^{ps}e^{-ps}\chi_E(\{x(s)\colon x\in\Omega\})\leqslant\mu(s)e^{ps}\sup_{t\in[0,a]}e^{-ps}\chi_E(\{x(s)\colon x\in\Omega\})=\mu(s)e^{ps}\varphi(\Omega),$$

используя которую и лемму 4, выводим

$$\chi_E(S'\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(t))\leqslant\frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\varphi(\Omega)\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mu(s)e^{ps}\,ds\leqslant\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\varphi(\Omega)\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{ps}\,ds.$$

Далее, справедливы неравенства

$$\chi_E\biggl(\biggl\{BW^{-1}\biggl(x_1-\mathcal{G}(a)x_0-\int_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\biggr)(s)\colon f\in\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\biggr\}\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant M_1\gamma(s)\chi_E\biggl(\biggl\{\biggl(\int_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\biggr)(s)\colon f\in\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\biggr\}\biggr)\leqslant$$
$$\leqslant M_1\gamma(s)\frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\varphi(\Omega)\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}\mu(s)e^{ps}\,ds\leqslant\frac{2MM_1}{\Gamma(\alpha)}\|\mu\|_\infty\|\gamma\|_\infty\varphi(\Omega)\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}e^{ps}\,ds.$$

Снова используя лемму 4, получаем

$$\chi_E(S''\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega(t)))\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\chi_E\biggl(\biggl\{BW^{-1}\biggl(x_1-\mathcal{G}(a)x_0-\int_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\biggr)(s)\colon f\in\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\biggr\}\biggr)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4M^2M_1}{\Gamma^2(\alpha)}\,\|\mu\|_\infty\,\|\gamma\|_\infty\varphi(\Omega)\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{ps}\,ds\int_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}e^{p\tau}\,d\tau.$$

Таким образом, приходим к следующей оценке:

$$\sup_{t\in[0,a]}e^{-pt}\chi_E(S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega(t)))\leqslant\frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\varphi(\Omega)\sup_{t\in[0,a]}\biggl(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds\biggr)+$$
$$+\frac{8M^2M_1}{\Gamma^2(\alpha)}\,\|\mu\|_\infty\,\|\gamma\|_\infty\varphi(\Omega)\sup_{t\in[0,a]}\biggl(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds\biggr)=$$

$$
= \frac{2M\|\mu\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{4MM_1\|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\right)\varphi(\Omega)\sup_{t\in[0,a]}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-p(t-s)}\,ds\right)=\rho\varphi(\Omega),
$$

поэтому для $\rho<1$

$$
\varphi(S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega))\leqslant\rho\varphi(\Omega). \tag{19}
$$

Сравнивая неравенства (18) и (19), приходим к равенству $\varphi(\Omega)=0$.

Перейдём теперь к оценке модуля равностепенной непрерывности. Из (17) следует, что $\mathrm{mod}_C(S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega))\geqslant\mathrm{mod}_C(\Omega)$. По лемме 6 можно утверждать, что множество $S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ равностепенно непрерывно, поэтому $\mathrm{mod}_C(S\circ\mathcal{P}_F^\infty(\Omega))=0$. Значит, $\mathrm{mod}_C(\Omega)=0$.

Таким образом, $\nu(\Omega)=(0,0)$, и заключаем, что Ω — относительно компактное множество, а G — уплотняющий мультиоператор относительно МНК ν. Теорема доказана.

Следующее утверждение устанавливается аналогично следствию 5.1.2 из [14].

Теорема 5. *Мультиоператор G — п.н.св.*

Теперь докажем главное утверждение настоящей статьи.

Теорема 6. *При выполнении условий (A), (A1), (A2′), (A3), (B1)–(B4), (W) и условия подлинейного роста:*

(B′3) существует функция $\varsigma\in L_+^\infty([0,a])$ такая, что

$$
\|F(t,x,y)\|_E\leqslant\varsigma(t)(1+\|x\|_E+\|y\|_H)\quad \text{для п.в. } t\in[0,a],
$$

задача управляемости (1)–(5) имеет решение.

Доказательство. Заметим, что из условия (A3) следует существование константы $K>0$ такой, что $\|y_x\|_{C([0,a];H)}\leqslant K$.

Введём в пространстве $C([0,a];E)$ норму $\|x\|_*=\max_{t\in[0,a]}e^{-pt}\|x(t)\|_E$, где константа $p>0$ выбрана таким образом, что для числа $d>0$ выполняется следующее неравенство:

$$
\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}}+\frac{d^\alpha}{\alpha}\right)\leqslant N<1.
$$

В пространстве $C([0,a];E)$ с нормой $\|\cdot\|_*$ рассмотрим замкнутый шар

$$
\overline{B}_r(0)=\{x\in C([0,a];E)\colon \|x\|_*\leqslant r\},
$$

где $r>0$ таково, что

$$
M\|x_0\|_E+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+Nr\leqslant r.
$$

Покажем, что мультиоператор G преобразует шар $\overline{B}_r(0)$ в себя. Возьмём произвольную функцию $x\in\overline{B}_r(0)$. Пусть $y_x\in C([0,a];H)$ — соответствующее решение задачи (3), (4). Для $z\in G(x)$ и произвольного $f\in\mathcal{P}_F^\infty(x)$, используя лемму 2, условия (B3) и (11), получаем оценку

$$
e^{-pt}\|z(t)\|_E\leqslant e^{-pt}\|\mathcal{G}(t)x_0\|_E+e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|_{L(E)}\|f(s)\|_E\,ds+
$$

$$
+e^{-pt}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{T}(t-s)\|_{L(E)}\left\|BW^{-1}\left(x_1-\mathcal{G}(a)x_0-\int_0^a (a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\right)(s)\right\|_E ds\leqslant
$$

$$
\leqslant M\|x_0\|_E+e^{-pt}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varsigma(s)(1+\|x(s)\|_E+\|y_x(s)\|_H)\,ds+
$$

$$+e^{-pt}\frac{MM_1M_2}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E+\left\|\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)\,d\tau\right\|_E\right)\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+e^{-pt}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varsigma(s)(1+\|x(s)\|_E+\|y_x(s)\|_H)\,ds+$$

$$+e^{-pt}\frac{MM_1M_2}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E+\left\|\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\mathcal{T}(a-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_E\right)\frac{a^\alpha}{\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+e^{-pt}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varsigma(s)(1+\|x(s)\|_E+\|y_x(s)\|_H)\,ds+$$

$$+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+e^{-pt}\frac{M^2M_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\varsigma(\tau)(1+\|x(\tau)\|_E+\|y_x(\tau)\|_H)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+e^{-pt}\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\varsigma(s)(1+\|x(s)\|_E+K)\,ds+$$

$$+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+e^{-pt}\frac{M^2M_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\varsigma(\tau)(1+\|x(\tau)\|_E+K)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+e^{-pt}\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,ds+\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{ps}e^{-ps}\|x(s)\|_E\,ds\right)+$$

$$+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+$$

$$+e^{-pt}\frac{M^2M_1M_2a^\alpha\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}\,ds+\int\limits_0^a(a-\tau)^{\alpha-1}e^{p\tau}e^{-p\tau}\|x(\tau)\|_E\,d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\|x\|_*\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)}e^{-pt}\left(\int\limits_0^{t-d}(t-s)^{\alpha-1}e^{ps}\,ds+\int\limits_{t-d}^t(t-s)^{\alpha-1}e^{ps}\,ds\right)+$$

$$+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+\frac{M^2M_1M_2a^{2\alpha}\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma^2(\alpha+1)}+$$

$$+\|x\|_*\frac{M^2M_1M_2a^\alpha\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}e^{-pt}\left(\int\limits_0^{a-d}(a-\tau)^{\alpha-1}e^{p\tau}\,ds+\int\limits_{a-d}^a(a-\tau)^{\alpha-1}e^{p\tau}\,d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\|x\|_*\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)}\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-\alpha}}\frac{e^{p(t-d)}-1}{p}+\frac{d^\alpha}{\alpha}\right)+$$

$$+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+\frac{M^2M_1M_2a^{2\alpha}\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma^2(\alpha+1)}+$$

$$+\|x\|_*\frac{M^2M_1M_2a^\alpha\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\left(e^{-pt}\frac{1}{d^{1-\alpha}}\frac{e^{p(a-d)}-1}{p}+\frac{d^\alpha}{\alpha}\right)\leqslant$$

$$\leqslant M\|x_0\|_E+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\|x_1\|_E+M\|x_0\|_E)+\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)+$$
$$+\|x\|_*\frac{M\|\varsigma\|_\infty(1+K)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{MM_1M_2a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(\frac{1}{pd^{1-\alpha}}+\frac{d^\alpha}{\alpha}\right)\leqslant r.$$

Таким образом, $\|z\|_*\leqslant r$. Из теорем 4 и 5 известно, что мультиоператор G является п.н.св. и ν-уплотняющим. Тогда, ссылаясь на теорему 1, получаем доказательство существования решения задачи управляемости (1)–(5). Теорема доказана.

4. ПРИМЕР

Исследования многих авторов (см. монографию [9] и библиографию в ней) посвящены уравнению вида
$$D_t^\alpha x(s,t)=\frac{d^2x(s,t)}{ds^2}. \tag{20}$$

Поскольку порядок α производной по времени в уравнении (20) может быть любого вещественного порядка, включая $\alpha=1$, его называют *дробным диффузионно-волновым уравнением* [16]. При $\alpha=1$ уравнение (20) становится классическим уравнением диффузии, при $0<\alpha<1$ имеет место так называемая сверхмедленная диффузия. Важно, что уравнение дробной диффузии связано с динамическими процессами во фрактальных средах: порядок полученного уравнения зависит от фрактала, который служит моделью пористого материала [17].

Пусть $\mathbb{R}^2$ — двумерная плоскость точек $\xi=(\xi_1,\xi_2)$. Через $\mathbb{R}^2_{++}=\{\xi=(\xi_1,\xi_2)\colon \xi_1,\xi_2\geqslant 0\}$ обозначим первый квадрант, а через $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$ и $L^2([0,1]\times[0,1])$ — гильбертовы пространства функций, суммируемых с квадратом на соответствующих множествах.

Рассмотрим следующую дробную управляемую систему диффузионного типа:

$${}^CD_t^\alpha(v(t,\xi))=(\triangle-c)v(t,\xi)+\sum_{i=1}^k\nu_i(t)\phi_i(\xi,v(t,\xi),y(t,\xi))+Bu(t),\quad (t,\xi)\in[0,a]\times\mathbb{R}^2_{++}; \tag{21}$$
$$v(0,\xi)=v_0(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^2_{++};\qquad v(t,\xi)=0,\quad (t,\xi)\in[0,a]\times\partial\mathbb{R}^2_{++}; \tag{22}$$
$$-y_t'(t,\xi)\in N_M(y(t,\xi))+m_\chi(\xi)v(t,\xi)+ly(t,\xi),\quad (t,\xi)\in[0,a]\times[0,1]\times[0,1]; \tag{23}$$
$$y(0,\xi)=y_0(\xi)\in M,\quad \xi\in[0,1]\times[0,1]; \tag{24}$$
$$v(a,\xi)=v_1(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^2_{++}, \tag{25}$$

где $0<\alpha<1$, $\triangle=\partial^2/\partial\xi_1^2+\partial^2/\partial\xi_2^2$ — оператор Лапласа; $c>0$; m_χ — характеристическая функция для множества $[0,1]\times[0,1]$, т.е.

$$m_\chi(\xi)=\begin{cases}1, & (\xi_1,\xi_2)\in[0,1]\times[0,1],\\ 0, & (\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2_{++}\setminus[0,1]\times[0,1];\end{cases}$$

v_0, y_0, v_1 — заданные функции; M — замкнутый единичный шар в $L^2([0,1]\times[0,1])$; N_M — нормальный конус ко множеству M в точке $y(t,\xi)$, определяемый по формуле (6); $y(t,\xi)$ — решение sweeping процесса (23), соответствующего функции $v(t,\xi)$.

Состояние управляемой системы описывается функцией $v\colon [0,a]\times\mathbb{R}^2_{++}\to\mathbb{R}$, $v(t,\cdot)\in L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, $t\in[0,a]$.

Предполагается, что управляющие воздействия на систему делятся на два типа: с обратной связью и абсолютное. Управление с обратной связью характеризуется k источниками внешних воздействий, свойства которых зависят от решения $y(t,\xi)$ sweeping процесса (23). Плотности источников описываются функциями $\phi_i\colon \mathbb{R}^2_{++}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,k}$, причём при всех $t\in[0,a]$, для которых

$$\|y(t)\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2(t,(\xi_1,\xi_2))\,d\xi_1\,d\xi_2=1,$$

имеет место равенство $\phi_i(\xi,v,y)=0$, $\xi\in\mathbb{R}^2_{++}$, $i=\overline{1,k}$.

Интенсивности внешних воздействий регулируются управлениями $\nu_i\colon [0,a]\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,k}$, — измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям обратной связи

$$\nu(t)=(\nu_1(t),\ldots,\nu_k(t))\in W(v(t,\cdot)),\quad t\in[0,a], \tag{26}$$

где W — п.н.св. мультиотображение из $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$ в $\mathbb{R}^m$ с выпуклыми замкнутыми значениями, которое глобально ограничено, т.е. $\|W(x)\|\leqslant\mathcal{W}$ для всех $x\in L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, где $\mathcal{W}>0$.

Ограниченный линейный оператор $B\colon U\to L^\infty[0,a]$ из банахова пространства управлений U определяет абсолютное управление. Функция управления $u\in L^2([0,a];U)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $A=\triangle-cI$ с областью определения $H^2_0(\mathbb{R}^2_{++})$. Граничная задача

$$(\lambda I-A)z=f,\quad \lambda\geqslant 0;\quad z|_\Gamma=0$$

для $f\in L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, $\Gamma=\partial\mathbb{R}^2_{++}$ разрешима, и операторы, сопоставляющие функции f решение z, ограничены. Применяя формулу Грина к выражению $\int_\Omega z\triangle z\,dx$, где $\Omega=\mathbb{R}^2_{++}$, получаем для $\lambda>0$ следующую оценку:

$$(\lambda+c)\|z\|^2\leqslant(\lambda+c)\langle z,z\rangle-\int\limits_\Omega z\triangle z\,dx=\langle(\lambda I-A)z,z\rangle\leqslant\|f\|\,\|z\|.$$

Тогда для резольвенты $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$ имеем

$$\|R(\lambda,A)\|\leqslant\frac{1}{\lambda+c}\quad\text{для }\lambda>0.$$

Это означает, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу e^{At}, удовлетворяющую оценке $\|e^{At}\|\leqslant e^{-ct}$, $t\geqslant 0$.

Предполагается, что функции ϕ_i, $i=\overline{1,k}$, удовлетворяют следующим условиям:

(C1) $\phi_i(\cdot,v,y)\colon\mathbb{R}^2_{++}\to\mathbb{R}$ измерим для всех $(v,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$;

(C2) $|\phi_i(\xi,v,y)|\leqslant\omega_i(\xi)$ для п.в. $(\xi,v,y)\in\mathbb{R}^2_{++}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где $\omega_i\in L^2_+(\mathbb{R}^2_{++})$;

(C3) $|\phi_i(\xi,v_1,y)-\phi_i(\xi,v_2,y)|\leqslant\mu_i|v_1-v_2|$ для всех $v_1,v_2\in\mathbb{R}$ и $(\xi,y)\in\mathbb{R}^2_{++}\times\mathbb{R}$.

Тогда отображение $h\colon L^2(\mathbb{R}^2_{++})\times L^2([0,1]\times[0,1])\times\mathcal{B}_\mathcal{W}(\mathbb{R}^k)\to L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, где $\mathcal{B}_\mathcal{W}(\mathbb{R}^k)=$ $=\{\nu\in\mathbb{R}^k\colon\|\nu\|\leqslant\mathcal{W}\}$, определённое как

$$h(v,y,\nu)(\xi)=\sum_{i=1}^k\nu_i\phi_i(\xi,v(\xi),\overline{y}(\xi)),\quad \xi\in\mathbb{R}^2_{++},$$

μ-липшицево по v, где

$$\mu=\mathcal{W}\biggl[\sum_{i=1}^k\mu_i^2\biggr]^{1/2},\quad \overline{y}(\xi)=\begin{cases}y(\xi), & (\xi_1,\xi_2)\in[0,1]\times[0,1],\\ 0, & (\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2_{++}\setminus[0,1]\times[0,1],\end{cases}$$

и компактно по ν, т.е. множество $h(v,y,\mathcal{B}_{\mathcal{W}}(\mathbb{R}^k))$ относительно компактно в $L^2(\mathbb{R}^2_{++})$ для всех $(v,y)\in L^2(\mathbb{R}^2_{++})\times L^2([0,1]\times[0,1])$.

В таком случае мультиотображение $F\colon L^2(\mathbb{R}^2_{++})\times L^2([0,1]\times[0,1])\to Kv(L^2(\mathbb{R}^2_{++}))$

$$F(x,y)=h(x,y,W(x))$$

удовлетворяет условиям (B1), (B2), (B$'$3), (B4) с $\varsigma(t)\equiv\omega:=\mathcal{W}\big[\sum_{i=1}^k\|\omega_i\|^2_{L^2}\big]^{1/2}$ в условии (B$'$3) и $\mu(t)\equiv\mu$ в условии (B4).

Тогда система для пространств $E=L^2(\mathbb{R}^2_{++})$, $H=L^2([0,1]\times[0,1])$ может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}{}^{C}D_t^{\alpha}x(t)\in Ax(t)+F(x(t),y(t))+Bu(t),\quad t\in[0,a],\\ -y'(t)\in N_M(y(t))+m_{\chi}(\xi)x(t)+ly(t),\quad t\in[0,a].\end{gathered}$$

Поэтому имеет место следующая

Теорема 7. *При выполнении условий (A), (A1), (A2$'$), (A3), (C1)–(C3) и (W) система (21)–(25) является управляемой.*

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-10008).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Balachandran, K. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey / K. Balachandran, J.P. Dauer // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — V. 115. — P. 7–28.
2. Benedetti, I. Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator / I. Benedetti, V. Obukhovskii, P. Zecca // Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. — 2011. — V. 31. — P. 39–69.
3. Górniewicz, L. Controllability of semilinear differential equations and inclusions via semigroup theory in Banach spaces / L. Górniewicz, S.K. Ntouyas, D. O'Regan // Rep. Math. Phys. — 2005. — V. 56. — P. 437–470.
4. Monteiro Marques, M.D.P. Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction / M.D.P. Monteiro Marques // Progress Nonlin. Differ. Equat. Appl. — 1993. — V. 9.
5. Valadier, M. Rafle et viabilite / M. Valadier // Sem. Anal. Convexe Exp. — 1992. — V. 22, № 17.
6. Edmond, J.F. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process / J.F. Edmond, L. Thibault // Math. Program. Ser. B. — 2005. — V. 104. — P. 347–373.
7. Толстоногов, А.А. Локальные условия существования решений процессов выметания / А.А. Толстоногов // Мат. сб. — 2019. — Т. 210, № 9. — С. 107–128.
8. Kilbas, A.A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam : Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006.
9. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego : Academic Press, 1999.
10. Gomoyunov, M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems / M.I. Gomoyunov // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2018. — V. 21. — P. 1238–1261.
11. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, C.F. Wen, V. Bocharov // J. Nonlin. Var. Anal. — 2022. — V. 6, № 3. — P. 185–197.

12. Петросян, Г.Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2022. — Т. 32, № 3. — С. 415–432.
13. Zhou, Y. Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations / Y. Zhou, F. Jiao // Comput. Math. Appl. — 2010. — V. 59. — P. 1063–1077.
14. Kamenskii, M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin ; New-York : Walter de Gruyter, 2001.
15. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М. : Книжный дом "Либроком", 2011. — 224 с.
16. Mainardi, F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri // Waves and Stability in Continuous Media. — 1994. — P. 246–251.
17. Nigmatullin, R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry / R.R. Nigmatullin // Phys. Status Solidi B. — 1986. — V. 133. — P. 425–430.

ON FEEDBACK CONTROL SYSTEMS GOVERNED BY FRACTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

 G. G. Petrosyan

Voronezh State Pedagogical University, Russia
e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

For feedback systems governed by fractional semilinear differential inclusions and a sweeping process in a Hilbert space, controllability conditions are found. For the proof, topological methods of nonlinear analysis for multivalued condensing maps are used.

Keywords: controllability problem, differential inclusion, sweeping process, fractional derivative, condensing mapping, measure of non-compactness

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-71-10008).

REFERENCES

1. Balachandran, K. and Dauer, J.P., Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey, *J. Optim. Theory Appl.*, 2002, vol. 115, pp. 7–28.
2. Benedetti, I., Obukhovskii, V., and Zecca, P., Controllability for impulsive semilinear functional differential inclusions with a non-compact evolution operator, *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.*, 2011, vol. 31, pp. 39–69.
3. Górniewicz, L., Ntouyas, S.K., and O'Regan, D., Controllability of semilinear differential equations and inclusions via semigroup theory in Banach spaces, *Rep. Math. Phys.*, 2005, vol. 56, pp. 437–470.
4. Monteiro Marques, M.D.P., Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction, *Progress Nonlin. Differ. Equat. Appl.*, 1993, vol. 9.
5. Valadier, M., Rafle et viabilite, *Sem. Anal. Convexe Exp.*, 1992, vol. 22, no. 17.
6. Edmond, J.F. and Thibault, L., Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, *Math. Program. Ser. B.*, 2005, vol. 104, pp. 347–373.
7. Tolstonogov, A.A., Local existence conditions for sweeping process solutions, *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 9, pp. 1305–1325.
8. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., and Trujillo, J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006.
9. Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, San Diego: Academic Press, 1999.
10. Gomoyunov, M.I., Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, pp. 1238–1261.

11. Obukhovskii, V., Petrosyan, G., Wen, C.F., and Bocharov, V., On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces, *J. Nonlin. Var. Anal.*, 2022, vol. 6, no. 3, pp. 185–197.
12. Petrosyan, G., On a boundary value problem for a class of fractional Langevin type differential equations in a Banach space, *Vestn. Udmurt. Un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, no. 3, pp. 415–432.
13. Zhou, Y. and Jiao, F., Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comput. Math. Appl.*, 2010, vol. 59, pp. 1063–1077.
14. Kamenskii, M., Obukhovskii, V., and Zecca, P., *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 2001.
15. Borisovich, Yu.G., Gel'man, B.D., Myshkis, A.D., and Obukhovskii, V.V., *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* (Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions), Moscow: Librocom, 2011.
16. Mainardi, F., Rionero, S., and Ruggeri, T., On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, *Waves and Stability in Continuous Media*, 1994, pp. 246–251.
17. Nigmatullin, R.R., The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Phys. Status Solidi B.*, 1986, vol. 133, pp. 425–430.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1519–1530

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Д. Пирогова[1], В. Н. Четвериков[2]

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

e-mail: [1]pirogova_ arina@mail.ru, [2]chetverikov.vl@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.07.2024 г., после доработки 02.10.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована задача оптимального выбора параметров системы относительно заданного критерия качества управления. Для сравнения систем с разными значениями параметров введена количественная оценка управляемости, основанная на среднем значении функции, определяющей критерий качества. Для примера рассмотрена упрощённая модель подводного аппарата и изучена задача поиска такого расположения его управляющих винтов, при котором либо время движения, либо энергозатраты аппарата будут минимальными, при этом траектории подводного аппарата генерируются случайным образом. Проведено сравнение энергозатрат и времени движения по этим траекториям систем с разными значениями параметров и показателями.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, степень управляемости, критерий качества управления, локальная управляемость

DOI: 10.31857/S0374064124110076, EDN: JEBIUY

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих задач теории управления необходимо не только отвечать на вопрос, управляема система или нет, но также и оценивать, насколько она управляема. Такая необходимость возникает, например, при выборе параметров системы, оптимальной по управлению в том или ином смысле.

Основы теории управляемости систем были заложены Р.Э. Кальманом в 60-е годы XX в. В частности, в статье [1] был определён грамиан управляемости линейной системы, а его взвешенный след рассмотрен как мера управляемости этой системы. Такой подход позднее был развит в работах [2–10]. В качестве степени управляемости рассматривались максимальное собственное значение, след и определитель обратной матрицы Грама и другие величины. Связь определяемой степени управляемости с минимальной управляющей энергией, необходимой для перевода любого начального состояния в начало координат, исследовалась в [1, 2, 6, 8]. Связь с задачей выбора количества и расположения исполнительных механизмов системы управления рассматривалась в [2, 4–6]. Из недостатков подхода, основанного на грамиане управляемости, отметим возможность его применения только к линейным системам и вычислительную сложность. Хотя в работе [9] и предложен другой метод расчётов степени управляемости, вычисления всё равно остаются непростыми.

В статье [10] было отмечено, что “подавляющее большинство исследователей понимают количественные показатели управляемости как характеристики взаимосвязи двух множеств — множества $\mathcal{U}$ входных воздействий на систему и множества $\mathcal{X}$ её состояний, т.е. как характеристики “вход–состояние”, предполагая в общем случае, что чем теснее (в некотором смысле) связь между $\mathcal{U}$ и $\mathcal{X}$, тем более управляема система”. И далее: “существенным недостатком большинства указанных работ является абсолютизация предлагаемых показателей, а также анализ количественных аспектов рассматриваемых характеристик вне связи с задачами синтеза систем управления". Последнее замечание нашло подтверждение и в наших исследованиях, а именно, введённая количественная оценка управляемости зависит от выбранного критерия качества управления, что показано далее. Для одного критерия более управляема система с одним набором параметров, а для другого — с иным набором параметров.

Подход в настоящей статье основан на предположении, что в малой окрестности каждого допустимого состояния любая траектория системы возможна и равновероятна. Из этого следует, в частности, локальная управляемость системы. Кроме того, функцию, определяющую критерий качества управления, считаем случайной величиной, а её математическое ожидание предлагаем использовать для количественного оценивания управляемости относительно выбранного критерия качества.

В работе [11] этот подход был применён к аффинным системам с неотрицательными входами и рассмотрен вариант предельного показателя управляемости. В этой статье мы исследуем общий случай и покажем, что определение количественного показателя управляемости зависит от вида критерия качества. Рассмотрены критерии двух видов и получены формулы для показателей в обоих случаях. В качестве демонстрации вводимых понятий приведён пример движения в вертикальной плоскости подводного аппарата, управляемого винтомоторными агрегатами (ВМА). Упрощенная система, описывающая такое движение, локально управляема только в случае трёх и более ВМА, расположенных определённым образом. Параметрами системы являются углы, определяющие расположение ВМА. Количественная оценка управляемости системы получена для двух критериев: быстродействия и энергопотребления. Для тестирования нашего подхода случайным образом сгенерирована достаточно длинная и сложная траектория, вычислены минимальное время движения и потребляемая энергия при движении по ней для разных значений параметров и проанализирована их связь со значениями полученных количественных показателей управляемости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x,u,\alpha), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — состояние системы, $u=(u_1,\ldots,u_m)$ — её управление, $\mathcal{X}$ — область допустимых состояний, $\mathcal{U}$ — область допустимых управлений, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ — набор параметров, $\dot{x} \equiv dx/dt$.

Для системы (1) будем решать задачу выбора параметров α, оптимальных относительно некоторого критерия качества. Пусть критерий качества представляет собой интегральный функционал, зависящий от решений системы (1). Рассмотрим два типа критериев: когда гладкая функция Φ, определяющая функционал, зависит от x, u или от x, $\dot{x}$. Приведём примеры таких критериев.

Пример 1. Управляющая энергия, необходимая для движения по заданной траектории $x(t)$, $t \in [0,T]$, оценивается функционалом

$$\int\limits_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t)\,dt, \tag{2}$$

где векторная функция $u(t)$ в паре с траекторией $x(t)$ составляют решение системы (1). (Для упрощения считаем, что управляющие агрегаты однотипны.) Значение функционала (2) зависит от выбора параметров α, так как от α зависит $u(t)$: чем меньше значение функционала, тем меньше тратится управляющей энергии при движении по заданной траектории.

Пример 2. Для критерия оптимальности по быстродействию имеем $\Phi \equiv 1$, а минимизируется время движения T. Однако наш подход предполагает, что функция Φ, определяющая функционал, зависит от выбора параметров α, а T фиксировано. Поэтому заметим, что наиболее быстрому движению по заданной траектории $x(t)$ соответствует максимальная скорость $\dot{x}$ изменения состояния. В качестве функции Φ возьмём $\Phi = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2$, где t не время, а параметр траектории: чем больше значение функционала, тем быстрее движение по заданной траектории.

В случае $\Phi = \Phi(x,u)$ нет какой-либо информации о возможных траекториях системы (1), поэтому будем считать, что $x(t)$ — случайный процесс, равномерно распределённый в области $\mathcal{X}$. Задачу поиска параметров модели, оптимальной по данному критерию, сформулируем как задачу поиска таких параметров системы, для которой экстремально (минимально или максимально, в зависимости от критерия) математическое ожидание

$$M[\Phi(x,u)] = \frac{1}{V(K_\alpha)} \int\limits_{K_\alpha} \Phi(x,u)\, d\sigma \to \mathrm{extr}_\alpha, \tag{3}$$

где интеграл берётся по множеству $K_\alpha = \{\dot{x} - f(x,u,\alpha) = 0\colon x \in \mathcal{X},\ u \in \mathcal{U}\}$, зависящему от параметров α, $V(K_\alpha)$ — объём K_α.

В случае $\Phi = \Phi(x,\dot{x})$ будем считать, что начальное состояние $x(0)$ — случайная величина, равномерно распределённая в области $\mathcal{X}$, а функция $u(t)$ — случайный процесс, равномерно распределённый в области $\mathcal{U}$. Задачу поиска параметров модели, оптимальной по такому критерию, сформулируем как задачу поиска таких параметров модели, для которой экстремально математическое ожидание

$$M[\Phi(x,\dot{x})] = \frac{1}{V(K)} \int\limits_K \Phi(x, f(x,u,\alpha))\, dx\, du \to \mathrm{extr}_\alpha,$$

где $K = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, $V(K)$ — объём K.

Для линейной системы количественный показатель управляемости относительно критерия оптимальности по быстродействию вычисляется на основе следующей теоремы.

Теорема. *Пусть для линейной системы*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m,$$

$\mathcal{X} = \{|x_i| \leqslant \gamma_i,\ i = \overline{1,n}\}$ *и* $\mathcal{U} = \{|u_j| \leqslant \delta_j,\ j = \overline{1,m}\}$ *— области допустимых состояний и допустимых управлений соответственно. Тогда математическое ожидание значения функции* $\Phi = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2$ *в случае равномерного распределения* (x,u) *на* $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ *равно*

$$M[\Phi] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \gamma_i^2 + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \beta_{jj} \delta_j^2, \tag{4}$$

где α_{ii} *и* β_{jj} *— диагональные компоненты матриц* $A^T A$ *и* $B^T B$ *соответственно.*

Доказательство. Отметим, что объём $V(K)$ множества $K=\mathcal{X}\times\mathcal{U}$ равен произведению чисел $2\gamma_i$ $(i=\overline{1,n})$ и $2\delta_j$ $(j=\overline{1,m})$. Перепишем Φ в матричном виде: $\Phi=\dot{x}^T\dot{x}$, тогда

$$M[\dot{x}^T\dot{x}]=\frac{1}{V(K)}\int\limits_K(Ax+Bu)^T(Ax+Bu)\,dx\,du=$$

$$=\frac{1}{V(K)}\int\limits_K(x^TA^TAx+x^TA^TBu+u^TB^TAx+u^TB^TBu)\,dx\,du.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле является многочленом второй степени по $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $u_1,\ \ldots,\ u_m$. Так как область интегрирования $K=\mathcal{X}\times\mathcal{U}$ симметрична относительно замен x_i на $-x_i$ и u_j на $-u_j$, то интегралы от всех слагаемых, в которых эти переменные входят в первой степени, равны нулю. Ненулевыми являются только интегралы от вторых степеней указанных переменных, поэтому последний интеграл равен

$$\frac{1}{V(K)}\int\limits_K\bigg(\sum_{i=1}^n\alpha_{ii}x_i^2+\sum_{j=1}^m\beta_{jj}u_j^2\bigg)\,dx\,du.$$

Вычислив его, с учётом формулы для объёма $V(K)$ получим утверждение теоремы.

Таким образом, для линейной системы количественный показатель управляемости относительно критерия оптимальности по быстродействию равен сумме взвешенных следов матриц Грама для столбцов матриц A и B (см. (4)). Аналогичный результат может быть получен для некоторых нелинейных систем (см. п. 3).

2. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Изложенный подход применим к локально управляемым системам вида

$$\dot{x}=f(x,u),\quad x\in\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Областью достижимости состояния $x_f\in\mathcal{X}$ *в области* $D\subset\mathcal{X}$ называют множество таких состояний $x_0\in\mathcal{X}$, что существует решение $(x(t),u(t))$, $t\in[t_0,t_f]$, системы (5), удовлетворяющее условиям

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_f)=x_f,$$
$$x(t)\in D,\quad u(t)\in\mathcal{U},\quad \text{когда}\quad t\in[t_0,t_f].$$

Систему (5) называют *локально управляемой в точке* $x_f\in\mathcal{X}$, если область достижимости состояния x_f в области $\mathcal{X}$ содержит окрестность точки x_f. Система (5) *локально управляема в области* $\mathcal{X}$, если она локально управляема в любой точке $x_f\in\mathcal{X}$.

Замечание. В определении локальной управляемости рассматриваются траектории системы, которые начинаются в произвольной точке $x_0\in\mathcal{X}$ и заканчиваются в заданной точке x_f, а не наоборот. Такой выбор объясняется тем, что в начальный момент, как правило, определены значения u, а в конечный момент можно считать компоненты u произвольными.

3. ПРИМЕР ПОИСКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Рассмотрим подводный аппарат цилиндрической формы с закруглёнными концами, имеющий один винтовой двигатель (двигатель 1) для движения вперёд и два винтовых двигателя для разворота (двигатели 2 и 3). Двигатель 1 расположен на конце аппарата и направлен вдоль его корпуса. Двигатели 2 и 3 расположены на цилиндрической поверхности, их расположение и направление определяются углами ϕ_2, ψ_2, ϕ_3, ψ_3. Движение аппарата в вертикальной плоскости описывает следующая система (см., например, [11; 12, с. 48]):

$$\ddot{\xi} = Q_\theta M u - B_0, \tag{6}$$

где $\xi = (x, z, J\theta/(md))^T$, x, z — координаты центра масс аппарата в системе координат, связанной с землёй, θ — угол наклона корпуса аппарата относительно земли, m — масса подводного аппарата, J — момент инерции аппарата относительно оси, ортогональной вертикальной плоскости движения, d — радиус цилиндрической поверхности аппарата, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ — столбец управлений, пропорциональных тягам F_1, F_2, F_3 трёх двигателей: $u_l = F_l/m$, верхний индекс T означает транспонирование матриц,

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \cos\phi_2 & \cos\phi_3 \\ 0 & \sin\phi_2 & \sin\phi_3 \\ 0 & \dfrac{\sin\psi_2}{|\sin(\psi_2+\phi_2)|} & \dfrac{\sin\psi_3}{|\sin(\psi_3+\phi_3)|} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa g \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\kappa = (m - m_w)/m$, m_w — масса воды, вытесненной подводным аппаратом, g — ускорение свободного падения. Углы ϕ_2, ψ_2, ϕ_3, ψ_3 являются параметрами системы (6).

Выведем условия локальной управляемости системы (6). Если матрица M невырождена, то система (6) записывается в виде

$$u = M^{-1} Q_{-\theta}(\ddot{\xi} + B_0). \tag{7}$$

Пусть δ — такое число, что u — допустимое управление при $|u| \leqslant \delta$. Предположим, что

$$\kappa g \|M^{-1}\|_2 < \delta, \tag{8}$$

где $\|M^{-1}\|_2$ — спектральная норма матрицы M^{-1}: $\|M^{-1}\|_2 = \sqrt{\max_i(\sigma_i)}$, σ_i — собственные значения симметричной матрицы $(M^{-1})^T M^{-1}$. Так как $Q_{-\theta}$ — ортогональная матрица, а $|B_0| = \kappa g$, то из свойств спектральной нормы следует, что $|M^{-1} Q_{-\theta} B_0| \leqslant \|M^{-1}\|_2 |B_0| < \delta$. Тогда $\delta_1 = \delta - |M^{-1} Q_{-\theta} B_0| > 0$.

Рассмотрим граничные условия для системы (6) с произвольным конечным состоянием $(\xi_f, \dot{\xi}_f)$ в момент времени $t = 0$ и начальным состоянием $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ в момент $t = t_0 < 0$. Векторная функция

$$\xi(t) = \xi_f\left(1 - 3\frac{t^2}{t_0^2} + 2\frac{t^3}{t_0^3}\right) + t_0\dot{\xi}_f\left(\frac{t}{t_0} - 2\frac{t^2}{t_0^2} + \frac{t^3}{t_0^3}\right) + \xi_0\left(3\frac{t^2}{t_0^2} - 2\frac{t^3}{t_0^3}\right) + t_0\dot{\xi}_0\left(-\frac{t^2}{t_0^2} + \frac{t^3}{t_0^3}\right)$$

удовлетворяет этим граничным условиям. Имеем

$$\ddot{\xi}(t) = \frac{\xi_f - \xi_0}{t_0^2}\left(-6 + 12\frac{t}{t_0}\right) + \frac{\dot{\xi}_f - \dot{\xi}_0}{t_0}\left(2 - 6\frac{t}{t_0}\right) + \frac{\dot{\xi}_f}{t_0}\left(-6 + 12\frac{t}{t_0}\right).$$

Используя неравенство треугольника и оценку линейных выражений в скобках при $t \in [t_0, 0]$, получаем

$$|\ddot{\xi}(t)| \leqslant \frac{6|\xi_f - \xi_0|}{t_0^2} + \frac{4|\dot{\xi}_f - \dot{\xi}_0|}{|t_0|} + \frac{6|\dot{\xi}_f|}{|t_0|}, \quad t \in [t_0, 0]. \tag{9}$$

Пусть $t_0 = -18|\dot{\xi}_f|\|M^{-1}\|_2/\delta_1$, а состояние $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ лежит в окрестности

$$U = \{(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in \mathbb{R}^6 \colon 18\|M^{-1}\|_2\,|\xi_f - \xi_0| < \delta_1 t_0^2,\ 12\|M^{-1}\|_2\,|\dot{\xi}_f - \dot{\xi}_0| < \delta_1 |t_0|\}.$$

Тогда каждое слагаемое в правой части неравенства (9) меньше $\delta_1/(3\|M^{-1}\|_2)$, а значит, $\|M^{-1}\|_2\,|\ddot{\xi}(t)|<\delta_1$. Соответствующее управление $u(t)=M^{-1}Q_{-\theta}(\ddot{\xi}(t)+B_0)$ допустимое, так как

$$|u(t)|\leqslant|M^{-1}Q_{-\theta}\ddot{\xi}(t)|+|M^{-1}Q_{-\theta}B_0|\leqslant\|M^{-1}\|_2\,|\ddot{\xi}(t)|+|M^{-1}Q_{-\theta}B_0|<\delta_1+|M^{-1}Q_{-\theta}B_0|=\delta.$$

Поэтому окрестность U лежит в области достижимости состояния $(\xi_f,\dot{\xi}_f)$, а значит, при выполнении (8) система (6) локально управляема в этом состоянии. Так как это произвольное состояние системы, то (8) — достаточное условие локальной управляемости системы (6).

Пример (минимизации времени движения). Пусть область допустимых управлений $\mathcal{U}$ симметрична относительно замен u_i на $-u_i$ для $i=1,2,3$ (например, когда $\mathcal{U}$ — брус с центром в начале координат). Состояние системы (6) составляют векторы ξ и $\dot{\xi}$, квадрат скорости изменения состояния равен $\dot{x}^2=\dot{\xi}^T\dot{\xi}+\ddot{\xi}^T\ddot{\xi}$ (здесь и далее под квадратом вектора будем понимать скалярный квадрат вектора). Тогда

$$M[\dot{x}^2]=\frac{1}{V(K)}\left(\int\limits_K\dot{\xi}^T\dot{\xi}\,d\xi\,d\dot{\xi}\,du+\int\limits_K\ddot{\xi}^T\ddot{\xi}\,d\xi\,d\dot{\xi}\,du\right),\tag{10}$$

где первый интеграл и объём $V(K)$ не зависят от параметра α, а второй интеграл равен

$$\int\limits_K(Q_\theta Mu-B_0)^T(Q_\theta Mu-B_0)\,d\xi\,d\dot{\xi}\,du=$$

$$=\int\limits_K(u^TM^TQ_\theta^TQ_\theta Mu-u^TM^TQ_\theta^TB_0-B_0^TQ_\theta Mu+B_0^TB_0)\,d\xi\,d\dot{\xi}\,du.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле зависит только от u_1, u_2, u_3, θ и является многочленом второй степени от u_1, u_2, u_3. Произведение $Q_\theta^TQ_\theta$ есть единичная матрица, так как Q_θ — ортогональная матрица. Поэтому слагаемые второй степени от u_l составляют квадратичную форму u^TM^TMu. Обозначим коэффициенты матрицы M^TM через a_{ij}, $i,j=1,2,3$. Так как область интегрирования $K=\mathcal{X}\times\mathcal{U}$ симметрична относительно замен u_i на $-u_i$, то интегралы от всех слагаемых с u_iu_j при $i\neq j$ и с u_i, $i,j=1,2,3$, равны нулю, а последний интеграл равен

$$\int\limits_K\left(\sum_{i=1}^3a_{ii}u_i^2+B_0^TB_0\right)d\xi\,d\dot{\xi}\,du.$$

Вычисляя его в случае $\mathcal{U}=\{u\colon|u_i|\leqslant\delta_i\}$, получаем

$$M[\dot{x}^2]=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3a_{ii}\delta_i^2+b,\tag{11}$$

где слагаемое b содержит первый интеграл из (10) и интеграл от $B_0^TB_0$, которые не зависят от параметров. Таким образом, один из вариантов построения оптимальной по быстродействию модели — выбор параметров $\alpha=(\phi_2,\psi_2,\phi_3,\psi_3)$, для которых максимально $M_v=\sum_{i=1}^3a_{ii}\delta_i^2$.

Матрица M^TM является матрицей Грама, её элемент a_{ij} равен стандартному скалярному произведению i-го и j-го столбцов матрицы M. Учитывая вид матрицы M, получаем экстремальную задачу

$$M_v=\delta_1^2+\delta_2^2\left(1+\frac{\sin^2\psi_2}{\sin^2(\psi_2+\phi_2)}\right)+\delta_3^2\left(1+\frac{\sin^2\psi_3}{\sin^2(\psi_3+\phi_3)}\right)\to\max_\alpha.\tag{12}$$

Пример (минимизации энергопотребления). Как известно, потребляемая энергия ВМА пропорциональна его тяге. Предположим, что все три двигателя аппарата однотипны. Тогда потребляемая ими энергия при движении по заданной траектории $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, пропорциональна величине

$$\Phi_u=\int\limits_0^T(|u_1(t)|+|u_2(t)|+|u_3(t)|)\,dt, \tag{13}$$

где набор $(\xi(t),u_1(t),u_2(t),u_3(t))$ — решение системы (6). Однако для упрощения вычислений интеграла в (3), а также следуя работам [1, 2, 6, 8], где при минимизации потребляемой управляющей энергии исследуется интеграл от квадрата вектора управлений, в качестве критерия выбираем функционал (2).

Используя соотношение (7), получаем для математического ожидания квадрата вектора управлений выражение

$$M[u^2]=\frac{1}{V(K_1)}\int\limits_{K_1}(\ddot\xi+B_0)^TQ_{-\theta}^T{M^{-1}}^TM^{-1}Q_{-\theta}(\ddot\xi+B_0)\,d\xi\,d\dot\xi\,d\ddot\xi, \tag{14}$$

где K_1 — область допустимых значений ξ, $\dot\xi$, $\ddot\xi$, а $V(K_1)$ — объём K_1. Пусть

$$K_1=\{|\xi_i|\leqslant\alpha_i,\ \ |\dot\xi_i|\leqslant\beta_i,\ \ |\ddot\xi_i|\leqslant\varepsilon_i,\ \ i=1,2,3\}.$$

Так как подынтегральное выражение в (14) зависит только от $\ddot\xi$, θ, то интегрирование по остальным переменным — это интегрирование постоянных функций. Поэтому после интегрирования по ним формула для $M[u^2]$ примет тот же вид (14), только K_1 следует заменить брусом K_2 размерности 4: $K_2=\{|\theta|\leqslant\alpha,\ \ |\ddot\xi_i|\leqslant\varepsilon_i,\ \ i=1,2,3\}$ с некоторым $\alpha>0$.

Подынтегральное выражение в (14) является многочленом второй степени по $\ddot\xi_l$, причём слагаемые второй степени от $\ddot\xi_l$ составляют квадратичную форму $\ddot\xi^TQ_{-\theta}^T{M^{-1}}^TM^{-1}Q_{-\theta}\ddot\xi$. Обозначим коэффициенты произведения матриц $Q_{-\theta}^T{M^{-1}}^TM^{-1}Q_{-\theta}$ через c_{ij}, $i,j=1,2,3$. Так как область интегрирования K_2 симметрична относительно замен $\ddot\xi_i$ на $-\ddot\xi_i$, то интегралы от всех слагаемых с $\ddot\xi_i\ddot\xi_j$ при $i\neq j$ и с $\ddot\xi_i$, $i,j=1,2,3$, равны нулю. Учитывая это и вид столбца B_0, получаем

$$M[u^2]=\frac{1}{V(K_2)}\int\limits_{K_2}\biggl(\sum_{i=1}^3c_{ii}\ddot\xi_i^2+c_{22}\kappa^2g^2\biggr)\,d\theta\,d\ddot\xi.$$

Предположим, что угол θ принимает все возможные значения, т.е. $|\theta|\leqslant\pi$, и проинтегрируем последнее выражение по $\ddot\xi_i$, $i=1,2,3$:

$$M[u^2]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\biggl(\frac13\sum_{i=1}^3c_{ii}\varepsilon_i^2+c_{22}\kappa^2g^2\biggr)\,d\theta.$$

Заметим, что c_{ij} — коэффициенты матрицы Грама столбцов матрицы $M^{-1}Q_{-\theta}$. Обозначая через b_1, b_2, b_3 столбцы матрицы M^{-1}, найдём выражения для c_{ii}, $i=1,2,3$, и проинтегрируем их по θ. Получим

$$M[u^2]=\frac16(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+3\kappa^2g^2)(b_1^2+b_2^2)+\frac13\varepsilon_3^2b_3^2, \tag{15}$$

где b_i^2 — квадрат длины вектора-столбца b_i, $\varepsilon_i=\max|\ddot\xi_i|$, $i=1,2,3$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для тестирования предлагаемого подхода мы случайным образом сгенерировали достаточно длинную и сложную траекторию, вычислили минимальное время движения и потребляемую энергию при движении по ней для разных значений параметров и проанализировали их связь со значениями математических ожиданий (12) и (15).

Генерация каждой компоненты x, z, θ траектории выполнялась по следующему алгоритму.

Построение случайного процесса $\xi(\tau)\in\mathbb{R}$. Используем обозначения: τ — параметр (может не совпадать со временем), T — конечное значение параметра, N — количество опорных точек, $\Delta=T/N$ — величина одного шага, $\xi^0=\xi(0)$ — заданное значение, $[-a,a]$ — отрезок изменения приращения ξ, т.е. $\xi(\tau+\Delta)-\xi(\tau)\in[-a,a]$.

Этап генерации опорных точек.

Шаг 0. Полагаем $p(0)=\xi^0$, $\tau=\Delta$.

Шаг $s>0$.

1. Вычисляем $p(\tau)=p(\tau-\Delta)-a+2a\eta$, где $\eta\in[0,1]$ — число, полученное датчиком случайных чисел.

2. Полагаем $\tau:=\tau+\Delta$. Если $\tau>T$, то выходим с ответом $\{p(\tau)\colon \tau=0,\Delta,\ldots,T\}$, иначе переходим к п. 1 шага $s+1$.

Этап сглаживания Строим кубический сплайн $S(\tau)$, $\tau\in[0,T]$, по опорным точкам $\{p(\tau)\colon \tau=0,h,\ldots,T\}$. Полагаем в точках между опорными $p(\tau)=S(\tau)$.

Данный алгоритм был применён для построения: $x(\tau)$ с параметром $a=10$ м, $z(\tau)$ с $a=2$ м и $\theta(\tau)$ с $a=0.2$ рад, при этом $N=100$, $T=1000$ для всех трёх функций. Сгенерированная траектория приведена на рис. 1.

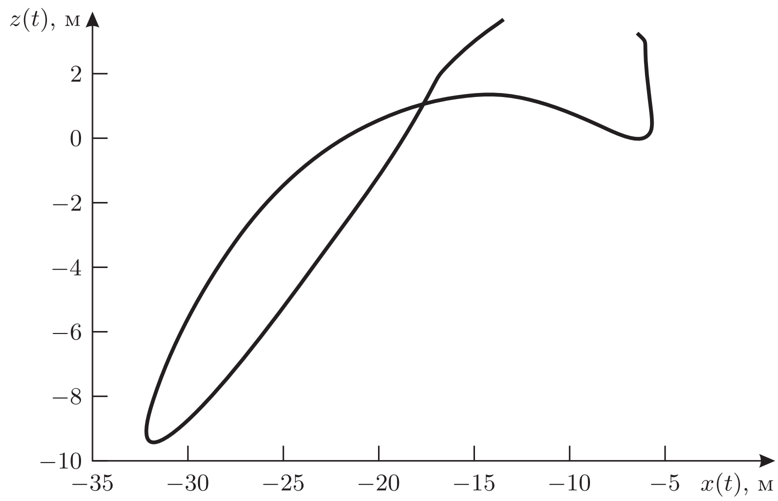

Рис. 1. Сгенерированная траектория

Пройти по заданной траектории можно за разное время — увеличение скорости приводит к уменьшению времени. Однако неограниченно повышать скорость невозможно из-за ограниченности мощности двигателей. Минимальное время движения при ограничениях $|u_i|\leqslant\delta_i$, $i=1,2,3$, вычисляем по следующему алгоритму.

Вычисление минимального времени движения по заданной траектории. Известные данные: матрица M, соответствующая заданным параметрам; траектория $\{\xi_i(sh)\colon s=-1,0,1,\ldots,N_0,\ i=1,2,3\}$, при этом $\xi_i(-h)=0=\xi_i(0)$, $i=1,2,3$; $[-\delta_i,\delta_i]$ — область допустимых значений управления u_i. Здесь h — малая величина, определяющая точность аппроксимации второй производной ξ.

Шаг 0. Вычисляем обратную матрицу M^{-1}. Полагаем $s=1$, $\tau=h$, $D_t=0$ (D_t — счётчик времени движения).

Шаг $s>0$.

1. Для $i=1,2,3$ вычисляем

$$\alpha_i=\frac{1}{h^2}M_i^{-1}Q_{-\theta}\big(\xi(\tau)-2\xi(\tau-h)+\xi(\tau-2h)\big),\qquad \beta_i=M_i^{-1}Q_{-\theta}B_0,$$

где M_i^{-1} — i-я строка матрицы M^{-1}.

2. Проверяем условие $|\beta_i|<\delta_i$, $i=1,2,3$. Если оно выполняется, то переходим к п. 3, иначе выходим из алгоритма с выводом, что система не является локально управляемой (условие (8) не выполняется).

3. Находим

$$b=\max_i\frac{|\alpha_i|}{\delta_i-\beta_i\operatorname{sgn}\alpha_i},\qquad dt=h\sqrt{b},\qquad Dt:=Dt+dt,$$

здесь $\operatorname{sgn}\alpha_i$ — знак α_i, d_t — минимальное время движения на шаге s.

4. Полагаем $\tau:=\tau+h$. Если $\tau>T$, то выходим с минимальным временем движения D_t. Иначе переходим к п. 1 шага $s+1$.

Для вычисления показателей (12) и (15), а также минимального времени движения и потребляемой энергии использовались следующие значения фиксированных параметров: $d=0.15$ м, $L=1.5$ м (радиус и длина цилиндрической поверхности аппарата), $m=131.4$ кг, $m_w=120$ кг, $J=35.1$ кг$\cdot$м^2, $\delta_i=1$ м/с^2, $\varepsilon_i=0.6$ м/с^2, $i=1,2,3$. Из условия, что второй и третий ВМА располагаются на цилиндрической поверхности, следуют ограничения: $|\operatorname{tg}(\psi_j+\phi_j)|\geqslant 2d/L=0.2$, $j=1,2$, а из условия локальной управляемости (8) — условие $|\beta_i|<\delta_i$, $i=1,2,3$, на каждом шаге вычисления минимального времени движения.

Для наборов параметров (ϕ_2, ψ_2, ϕ_3, ψ_3), удовлетворяющих указанным выше ограничениям, вычислили: M_v — показатель управляемости относительно критерия быстродействия, вычисляемый по формуле (12), M_u — показатель управляемости относительно критерия энергопотребления (см. формулу (15)), Φ_t — минимальное время движения по траектории, изображенной на рис. 1 (вычисляется по алгоритму, приведённому выше), Φ_u — потребляемая энергия аппаратом при движении по этой траектории (см. (13)). Полученные значения приведены на рис. 2 и в таблице.

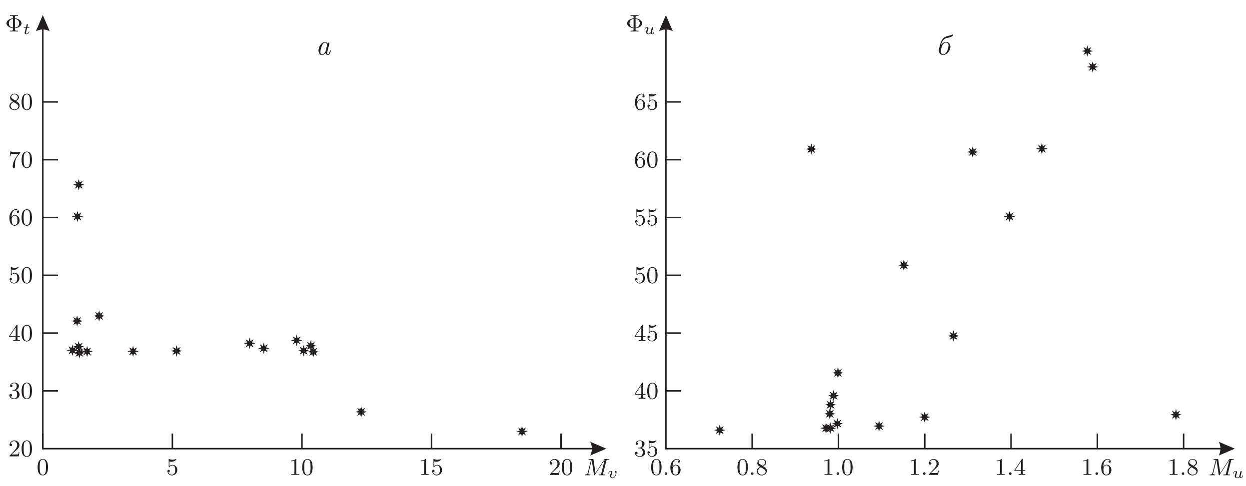

Рис. 2. Распределения значений $\Phi_t(M_v)$ (*а*) и $\Phi_u(M_u)$ (*б*)

Таблица. Результаты численных расчётов параметров модели

Номер набора	$(\psi_2,\ \psi_3,\ \phi_2,\ \phi_3)$	M_v	M_u	Φ_t	Φ_u
1	(1.77, 4.51, 1.57, 1.57)	18.47	0.72	22.98	36.55
2	(1.57, 1.11, 1.82, 5.41)	12.28	0.94	26.27	60.98
3	(1.57, 3.14, 1.37, 4.71)	10.44	0.97	36.85	36.73
4	(1.52, 6.24, 1.82, 4.76)	10.32	0.98	37.71	38.78
5	(1.57, 3.14, 1.37, 4.71)	10.06	0.97	36.82	36.73
6	(1.32, 3.23, 2.02, 4.62)	9.78	1.00	38.80	41.44
7	(1.62, 6.26, 1.30, 4.74)	8.51	0.98	37.33	37.93
8	(1.71, 6.23, 1.66, 4.77)	7.97	0.99	38.14	39.51
9	(1.29, 3.14, 2.14, 4.71)	5.19	0.98	36.82	36.68
10	(2.91, 3.14, 3.14, 4.71)	3.53	1.00	36.84	37.05
11	(0.35, 3.14, 2.98, 4.39)	2.21	1.15	43.04	50.89
12	(1.43, 3.14, 2.54, 4.71)	1.73	1.09	36.82	36.90
13	(1.48, 6.12, 0.47, 5.07)	1.50	1.58	88.50	69.50
14	(1.39, 6.00, 3.14, 4.65)	1.47	1.31	37.24	60.76
15	(0.78, 6.28, 0.00, 4.71)	1.44	1.20	36.82	37.66
16	(0.94, 6.28, 3.14, 4.22)	1.44	1.47	65.66	61.01
17	(1.19, 6.07, 0.38, 4.93)	1.41	1.59	60.19	68.17
18	(0.88, 6.22, 0.10, 4.78)	1.39	1.27	37.69	44.75
19	(1.01, 6.15, 0.24, 4.85)	1.37	1.40	42.00	55.12
20	(0.39, 3.14, 1.96, 4.71)	1.19	1.78	36.99	37.89

Зависимость минимального времени движения Φ_t от показателя M_v отражена на рис. 2, *а*. Видно, что с ростом M_v минимальное время движения, как правило, уменьшается. Аналогичная тенденция прослеживается на графике $\Phi_u(M_u)$ (рис. 2, *б*): при убывании M_u потребление энергии снижается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для двух видов критерия качества определены количественные показатели управляемости. Полученные формулы для показателей были протестированы на примере движения в вертикальной плоскости подводного аппарата относительно критериев быстродействия и энергопотребления. В случае критерия быстродействия показатель (12) есть взвешенный след матрицы Грама для столбцов матрицы M (см. (11)), а в случае критерия энергопотребления показатель (15) есть взвешенный след матрицы Грама для столбцов M^{-1}. Похожие факты были установлены в [1–10] для линейных систем.

Рассмотрены фиксированные параметры подводного аппарата, для которых коэффициент κ (см. (11)) оказался относительно большим, что привело к значительному сужению области параметров ϕ_2, ψ_2, ϕ_3, ψ_3, для которых система (6) локально управляема.

Установлено, что введённый показатель управляемости зависит от выбранного критерия качества. Это следует, например, из сравнения строк 13 и 18 таблицы (у набора 13 хуже показатель M_u, но лучше показатель M_v).

Отметим также, что исследован только случай, когда сдвиг из любого состояния в любом направлении возможен и равновероятен. Однако в реальной ситуации вероятность сдвига в каком-либо направлении зависит от решаемой аппаратом задачи. Закон распределения вероятности сдвига в направлении может быть определён при дополнительном исследовании траекторий аппарата, при этом изменение закона распределения приведёт к изменению зависимости коэффициента локальной управляемости от параметров.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана в рамках реализации программы “Приоритет 2030”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman, R.E. Controllability of linear dynamical systems / R.E. Kalman, Y.C. Ho, K.S. Narendra // Contribut. to the Theory of Differ. Equat. — 1963. — V. 1, № 2. — P. 189–213.
2. Muller, P.C. Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems / P.C. Muller, H.I. Weber // Automatica. — 1972. — V. 8, № 3. — P. 237–246.
3. Rhodes, I.B. Some quantitative measures of controllability and observability and their implications / I.B. Rhodes // Contr. Int. Fed. Autom. Contr. — Kyoto, Japan, 24–28 August 1981. — P. 24–28.
4. Schulz, G. Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures / G. Schulz, G.J. Heimbold // Guid. Control Dyn. — 1983. — V. 6. — P. 361–367.
5. Kondon, S. The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible systems / S. Kondon, C. Yatomi, K. Inoue // JSME Int. J. — 1990. — V. 33. — P. 145–152.
6. Xing, G.Q. Actuator placement using degree of controllability for discrete-time systems / G.Q. Xing, P.M. Bainum // J. Dyn. Syst. Meas. Control. — 1996. — V. 79. — P. 51–88.
7. Кириллов, О.Е. Количественный анализ управляемости и его применение к приближенной декомпозиции линейных динамических систем / О.Е. Кириллов, В.Г. Лисиенко // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 1. — С. 47–56.
8. Lee, H. Degree of controllability for linear unstable systems / H. Lee, Y. Park // J. Vib. Control. — 2016. — V. 22. — P. 1928–1934.
9. Zhang, L. A new method for determining the degree of controllability of state variables for the LQR problem using the duality theorem / L. Zhang, K.A. Neusypin, M.S. Selezneva // Appl. Sci. — 2020. — V. 10. — Art. 5234.
10. Воронин, А.В. Квалиметрия достижимости и возмущаемости линейных динамических систем / А.В. Воронин // Изв. Томск. политех. ун-та. — 2013. — Т. 323, № 5. — С. 74–78.
11. Велищанский, М.А. Поиск параметров модели с наилучшей локальной управляемостью / М.А. Велищанский, В.Н. Четвериков // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1692–1701.
12. Fossen, T.I. Guidance and Control of Ocean Vehicles / T.I. Fossen. — Chichester : John Wiley and Sons, 1994. — 480 p.

QUANTITATIVE CONTROLLABILITY INDEXES OF NONLINEAR SYSTEMS

A. D. Pirogova[1], V. N. Chetverikov[2]

Bauman Moscow State Technical University, Russia
e-mail: [1]pirogova_arina@mail.ru, [2]chetverikov.vl@yandex.ru

The problem of optimal choice of system parameters with respect to a given control quality criterion is studied. To compare systems with different parameter values, a quantitative estimation of controllability is introduced. This estimation is based on the average value of the function that defines the quality criterion. As an example, a very simplified model of an underwater vehicle is considered. The problem of finding an arrangement of its control propellers, in which either the movement time or the energy consumption of the vehicle is minimal is investigated. To test the used approach, the trajectories of the underwater vehicle are randomly generated. The energy consumption and the movement time along these trajectories of systems with different parameter values and different indexes are compared.

Keywords: nonlinear dynamic system, degree of controllability, control quality criterion, local controllability

FUNDING

This work was carried out with financial support from Bauman Moscow State Technical University within the framework of the program "Priority 2030".

REFERENCES

1. Kalman, R.E., Ho, Y.C., and Narendra, K.S., Controllability of linear dynamical systems, *Contribut. to the Theory of Differ. Equat.*, 1963, vol. 1, no. 2, pp. 189–213.
2. Muller, P.C. and Weber, H.I., Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems, *Automatica*, 1972, vol. 8, no. 3, pp. 237–246.
3. Rhodes, I.B., Some quantitative measures of controllability and observability and their implications, *Contr. Int. Fed. Autom. Contr., Kyoto, Japan, 24–28 August*, 1981, pp. 24–28.
4. Schulz, G. and Heimbold, G., Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures, *J. Guid. Control Dyn.*, 1983, vol. 6, pp. 361–367.
5. Kondon, S., Yatomi, C., and Inoue, K., The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible systems, *JSME Int. J.*, 1990, vol. 33, pp. 145–152.
6. Xing, G.Q. and Bainum, P.M., Actuator placement using degree of controllability for discrete-time systems, *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 1996, vol. 79, pp. 51–88.
7. Kirillov, O.E. and Lisienko, V.G., Quantitative analysis of controllability and its application in approximate decomposition of linear dynamic systems, *Automation and Remote Control*, January 1997, vol. 1, no. 1, pp. 47–56.
8. Lee, H. and Park, Y., Degree of controllability for linear unstable systems, *J. Vib. Control*, 2016, vol. 22, pp. 1928–1934.
9. Zhang, L., Neusypin, K.A., and Selezneva, M.S., A new method for determining the degree of controllability of state variables for the LQR problem using the duality theorem, *Appl. Sci.*, 2020, vol. 10, art. 5234.
10. Voronin, A.V., Qualimetry of accessibility and disturbance of linear dynamic systems, *Izv. Tomsk. politeh. univ.* (Proceedings of the Tomsk Polytechnic University), 2013, vol. 323, no. 5, pp. 74–78.
11. Velishchanskiy, M.A. and Chetverikov, V.N., Searching for parameters of a model with the best local controllability, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1758–1768.
12. Fossen, T.I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, Chichester: John Wiley and Sons, 1994.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1531–1540

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

СЕМЕЙСТВО ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ РАЗМЕРНОСТИ 8 С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

© 2024 г. **М. И. Ронжина[1], Л. А. Манита[2]**

[1]*Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, г. Москва*

[2]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", г. Москва*

e-mail: [1]ronzhina.m@gubkin.ru, [2]lmanita@hse.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г., после доработки 05.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Изучена окрестность особого режима второго порядка в задачах оптимального управления, аффинных по управлению из круга. Рассмотрен случай, когда гамильтонова система имеет размерность 8 и является малым (в смысле действия группы Фуллера) возмущением гамильтоновой системы обобщённой задачи Фуллера с управлением из круга. Показано, что для такого класса задач существуют экстремали в виде логарифмических спиралей, которые приходят на особую экстремаль второго порядка за конечное время, при этом управление совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности.

Ключевые слова: двумерное управление из круга, особая экстремаль, раздутие особенности, логарифмическая спираль, гамильтонова система принципа максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S0374064124110085, EDN: JDYXQP

ВВЕДЕНИЕ

Экстремали в виде логарифмических спиралей могут возникать в окрестности особых экстремалей второго порядка в аффинных по ограниченному управлению задачах. Для задач, аффинных по *скалярному* управлению u, гамильтониан имеет вид

$$H(q,p,u)=H_0(q,p)+uH_1(q,p),$$

где q и p — фазовая и сопряжённая переменные соответственно. Говорят, что экстремаль $(q(t),p(t))$ является *особой* на непустом промежутке (t_1,t_2), если $H_1(q(t),p(t))=0$ для всех $t\in(t_1,t_2)$. Особая экстремаль *второго* порядка задаётся условиями

$$H_1=0,\quad (\operatorname{ad}H_k)H_1=0,\quad \operatorname{ad}H_l(\operatorname{ad}H_k)H_1=0,$$
$$\operatorname{ad}H_j(\operatorname{ad}H_l)(\operatorname{ad}H_k)H_1=0,\quad \operatorname{ad}H_1(\operatorname{ad}\,H_0)^3H_1\neq 0,\quad j,l,k=0,1.$$

Если эти условия выполнены в окрестности особой экстремали, то экстремаль имеет глобальный второй порядок, а если только в точках самой экстремали, то локальный второй порядок. Здесь $(\operatorname{ad}F)G=\{F,G\}$ — скобка Пуассона функций F и G. На оптимальной особой экстремали второго порядка также должно быть выполнено условие Келли (в строгой форме) [1]

$$\operatorname{ad}H_1(\operatorname{ad}H_0)^3H_1<0.$$

Согласно теореме Келли–Коппа–Мойера [2] если особая экстремаль имеет глобальный второй порядок и выполнено строгое условие Келли, то любая неособая экстремаль, выходящая на особую, должна быть *четтеринг-экстремалью*, т.е. экстремалью с бесконечным числом точек переключения управления за конечное время.

Было показано, что для задач, аффинных по ограниченному скалярному управлению, для которых решение содержит особые экстремали второго порядка, структура решений определяется оптимальным синтезом в следующей модельной задаче (задача Фуллера) [3, 4]:

$$\int\limits_0^\infty x^2(t)\,dt \to \inf, \quad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=u, \quad |u|\leqslant 1, \quad x(0)=x^0, \quad \dot{x}(0)=y^0, \quad x,y,u\in\mathbb{R}.$$

Здесь начало координат является единственной особой экстремалью и имеет второй глобальный порядок. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет размерность 4 и сводится к виду

$$\dot{z}_1=z_2, \quad \dot{z}_2=z_3, \quad \dot{z}_3=z_4, \quad \dot{z}_4=-u, \quad u=\operatorname{sgn} z_1. \tag{1}$$

В задаче Фуллера построен полный оптимальный синтез, содержащий четтеринг-траектории и особую экстремаль второго порядка (см., например, [3]). Оптимальные четтеринг-траектории попадают в начало координат за конечное время, при этом управления на них совершают бесконечное число переключений с 1 на -1 (рис. 1).

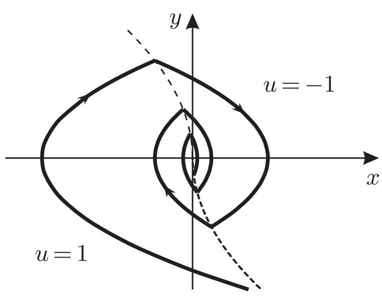

Рис. 1. Оптимальные четтеринг-траектории

В работах [3; 5, гл. 3] была доказана фундаментальная теорема о расслоении в окрестности особой экстремали второго порядка (в том числе локального), дающая полное описание оптимального синтеза, и показано, что фазовое пространство расслаивается над многообразием особых траекторий на двумерные слои, заполненные оптимальными четтеринг-траекториями, аналогичными решениям в модельной задаче. Теорема о расслоении применима в случае, когда гамильтонова система задачи в окрестности особой экстремали второго порядка сводится к виду

$$\begin{gathered}\dot{z}_1=z_2+f_1(z,w,u), \quad \dot{z}_2=z_3+f_2(z,w,u), \quad \dot{z}_3=z_4+f_3(z,w,u),\\ \dot{z}_4=\alpha(w)+\beta(w)u+f_4(z,w,u), \quad \dot{w}=F(z,w,u), \quad u=\operatorname{sgn} z_1.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь функции $f_i(z,w,u)$ по сравнению с z_{i+1} имеют малый порядок относительно действия группы Фуллера $g_\lambda(z)=(\lambda^4 z_1, \lambda^3 z_2, \lambda^2 z_3, \lambda z_4)$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{|f_i(g_\lambda(z),w,u)|}{\lambda^{5-i}}<C, \quad i=\overline{1,4},$$

где C — некоторая положительная константа. При этом функции $\alpha(w)$ и $\beta(w)$ таковы, что выполнены условие Келли в строгой форме и ограничение на управление $|u|\leqslant 1$. Заметим, что уравнения на переменные z системы (2) являются возмущением гамильтоновой системы (1) задачи Фуллера. Цель данной работы — показать, что результаты такого же типа можно получить и в случае векторного управления.

Рассмотрим задачу оптимального управления, аффинную по *двумерному* управлению. Соответствующий гамильтониан можно записать в виде

$$H(q,p,u)=H_0(q,p)+u_1H_1(q,p)+u_2H_2(q,p),$$

где q и p — фазовая и сопряжённая переменные соответственно. Будем называть (q_s, p_s) *особой экстремалью второго порядка*, если:

1) функции H_i, $(\operatorname{ad} H_k)H_i$, $\operatorname{ad} H_l(\operatorname{ad} H_k)H_i$, $\operatorname{ad} H_j(\operatorname{ad} H_l)(\operatorname{ad} H_k)H_i$, $i = 1, 2$, $j, k, l = \overline{0, 2}$, обращаются в нуль в точках (q_s, p_s), набор их дифференциалов в точках (q_s, p_s) имеет постоянный ранг;

2) билинейная форма $B_{ij} = \operatorname{ad} H_i(\operatorname{ad} H_0)^3 H_j\big|_{(q_s,p_s)}$, $i, j = 1, 2$, имеет ранг 2, симметрическая и отрицательно определённая;

3) остальные (независимые от перечисленных) скобки пятого порядка от функций H_j, $j = \overline{0, 2}$, обращаются в нуль в точках (q_s, p_s).

Модельной задачей с двумерным управлением и особой экстремалью второго порядка будем называть обобщение задачи Фуллера на случай управления из круга:

$$\int\limits_0^\infty \langle x(t), x(t)\rangle\, dt \to \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \qquad (3)$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^2$. В задаче (3), так же как и в задаче Фуллера, начало координат является единственной особой экстремалью и имеет второй глобальный порядок. Доказано, что оптимальная траектория задачи (3) попадает в начало координат за конечное время [5, гл. 7]. Но, в отличие от задачи Фуллера, полный оптимальный синтез в (3) не известен. Известны два семейства решений: логарифмические спирали (рис. 2) и четтеринг-траектории [5, гл. 7; 6].

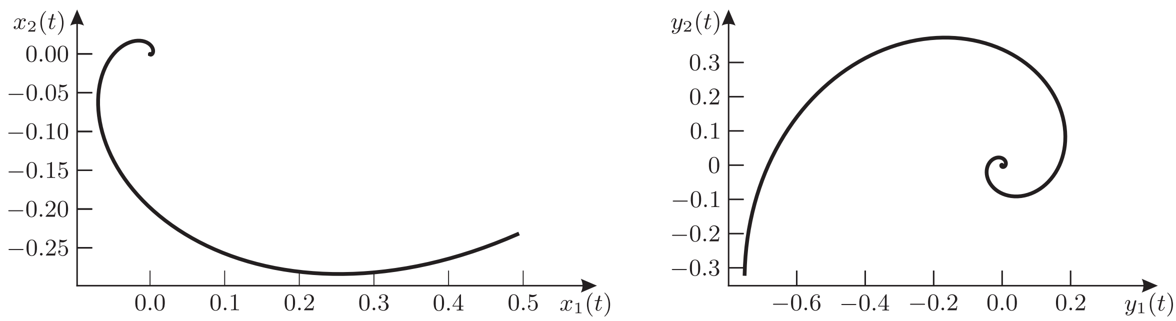

Рис. 2. Логарифмические спирали в модельной задаче

Для задач, аффинных по управлению из круга, с гамильтоновыми системами достаточно большой размерности (32 и выше) доказано [7, 8], что в окрестности особой экстремали второго порядка существует семейство экстремалей в форме логарифмических спиралей, которые попадают на особую экстремаль за конечное время, при этом управление совершает счётное число оборотов по границе круга. В случае когда размерность гамильтоновой системы меньше 32, решения в виде логарифмических спиралей найдены только для некоторых конкретных задач оптимального управления: стабилизация перевёрнутого сферического маятника [9], управление балкой Тимошенко [10], управление космической ракетой на орбите [11].

В настоящей работе исследуется окрестность особого режима второго порядка в задаче, аффинной по управлению из круга, для которой гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет ту же размерность 8, что и гамильтонова система модельной задачи (3). Аналогично случаю со скалярным управлением рассматриваемая задача является малым возмущением задачи (3) относительно действия группы Фуллера. Будет показано, что в возмущённой задаче сохраняется семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей. Непосредственно применить результаты работ [7, 8] здесь нельзя, тем не менее можно адаптировать разработанный подход и к данной задаче.

Изложение построено следующим образом. В п. 1 описывается семейство логарифмических спиралей в модельной задаче (3) с управлением из круга. В п. 2 рассматривается задача, аффинная по управлению из круга, гамильтонова система которой является малым возмущением гамильтоновой системы модельной задачи относительно действия группы Фуллера; доказывается теорема о существовании семейства решений гамильтоновой системы в виде логарифмических спиралей.

1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина задачи (3) имеет вид

$$\dot{\psi}=-\phi,\quad \dot{\phi}=x,\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=u,\quad u=\psi/\|\psi\|, \tag{4}$$

где ϕ и ψ — сопряжённые переменные.

Введём новые координаты $z_i\in\mathbb{R}^2$, $i=\overline{1,4}$, сводящие гамильтонову систему (4) модельной задачи к удобному виду

$$z_{1i}=H_i,\quad z_{2i}=(\mathrm{ad}H_0)H_i,\quad z_{3i}=(\mathrm{ad}H_0)^2H_i,\quad z_{4i}=(\mathrm{ad}H_0)^3H_i,\quad i=1,2,$$

где

$$H_0=-\frac{1}{2}\langle x,x\rangle+\langle\phi,y\rangle,\quad H_1=\psi_1,\quad H_2=\psi_2.$$

В координатах z система (4) записывается как

$$\dot{z}_1=z_2,\quad \dot{z}_2=z_3,\quad \dot{z}_3=z_4,\quad \dot{z}_4=-u,\quad u=z_1/\|z_1\|. \tag{5}$$

Система (5) обладает решениями в форме логарифмических спиралей [5, 6], которые могут быть записаны следующим образом:

$$z_m^*(t)=-A_{m-1}(T^*-t)^{5-m}e^{\mathbf{i}\alpha\ln|T^*-t|},\quad u^*(t)=e^{\mathbf{i}\alpha\ln|T^*-t|},\quad 0\leqslant t<T^*,\quad m=\overline{1,4}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{i}$ — мнимая единица; $A_0=-1/126$, $A_{l+1}=-A_l(4-l+\mathbf{i}\alpha)$, $l=0,1,2$, угол между $z_3(0)$ и $z_4(0)$ равен $2\operatorname{arctg}\alpha$, $\alpha^2=5$, и $|z_4(0)|^2=(\sqrt{6}/2)|z_3(0)|$. Траектории $z_m^*(t)$ попадают в нуль за конечное время T^*, и оптимальное управление $u^*(t)$ совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности S^1.

2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В ВОЗМУЩЁННОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим задачу оптимального управления, аффинную по управлению из круга, гамильтонова система которой является малым возмущением гамильтоновой системы модельной задачи относительно действия группы Фуллера:

$$\int\limits_0^\infty (g_0(x)+u_1g_1(x)+u_2g_2(x))\,dx\to\inf_u,\quad \dot{x}=h_0(x)+u_1h_1(x)+u_2h_2(x),\quad u=(u_1,u_2):\|u\|\leqslant 1. \tag{7}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^4$, $x(0)=x_0$, $g_i:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $h_i:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $i=0,1,2$. Функции g_i и h_i предполагаются достаточно гладкими. Допустимые управления — измеримые функции, допустимые траектории абсолютно непрерывны. Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина имеет размерность 8 и записывается в виде

$$\begin{gathered}\dot{x}=\nabla_\psi\,(H_0(x,\psi)+u_1H_1(x,\psi)+u_2H_2(x,\psi)),\quad u=(H_1,H_2)/\sqrt{H_1^2+H_2^2},\\ \dot{\psi}=-\nabla_x\,(H_0(x,\psi)+u_1H_1(x,\psi)+u_2H_2(x,\psi)),\end{gathered} \tag{8}$$

где $\psi\in(\mathbb{R}^4)^*$ — сопряжённые переменные, $H_i(x,\psi)=\psi h_i(x)-\lambda_0g_i(x)$, $i=0,1,2$.

Пусть система (8) имеет особую экстремаль второго порядка. Предположим, что в окрестности особой экстремали существует невырожденная замена переменных $(x,\psi)\to z$, $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, в результате которой систему (8) можно записать как

$$\dot z_1=z_2+f_1(z,u),\quad \dot z_2=z_3+f_2(z,u),\quad \dot z_3=z_4+f_3(z,u),\quad \dot z_4=\beta(z)u+f_4(z,u),\quad u=z_1/\|z_1\|, \tag{9}$$

здесь функции $f_i\colon \mathbb{R}^{10}\to\mathbb{R}^2$, $i=\overline{1,4}$, малы относительно действия группы Фуллера:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f_i(g_\lambda(z),u)\|}{\lambda^{5-i}}<C,\quad \text{т.е.}\quad f_i(g_\lambda(z),u)=(\lambda^{5-i}+o(\lambda^{5-i}))F_i(z,u)\quad \text{при}\quad \lambda\to 0,$$

$F_i\colon \mathbb{R}^{10}\to\mathbb{R}^2$ — ограниченные вектор-функции; матрица $\beta(z)\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\beta(g_\lambda(z))=B+(\lambda+o(\lambda))b(z),\qquad \lambda\to 0,$$

где $B=\beta(0)$ — симметричная отрицательно определённая матрица, $b(z)$ — ограниченная матрица. Если выполнены сформулированные выше условия, то верна следующая

Теорема. *В достаточно малой окрестности начала координат существует семейство решений системы (9) в форме логарифмических спиралей:*

$$z_m(t)=k_m(t)\,(T-t)^{5-m}e^{\mathbf{i}\alpha\ln|T-t|}\,e^{i\varphi_m(t)},\quad m=\overline{1,4},$$

$$u(t)=e^{\mathbf{i}\alpha\ln|T-t|}\,e^{i\varphi_0(t)},\quad t\leqslant T,$$

$$z_m(t)=u(t)=0,\quad t\geqslant T,$$

и все их возможные повороты. Здесь $T>0$, $\alpha=\pm\sqrt5$, функции $k_m(t)$, $\varphi_m(t)$ и $\varphi_0(t)$ ограничены.

Схема доказательства.

1. Для гамильтоновой системы задачи (7) проводится разрешение особенности (раздутие особенности) в окрестности особой экстремали второго порядка.

2. Показывается, что существует инвариантное подпространство, на котором раздутие системы для задачи (7) совпадает с раздутием системы для задачи (3).

3. Доказывается, что периодическое решение для задачи (3) является гиперболическим циклом для задачи (7).

4. Проводится обратный ход процедуры раздутия особенности.

Заметим, что схема доказательства совпадает с этапами вывода аналогичного результата для случая большой размерности. Однако сами доказательства существенно различаются.

Доказательство. *Шаг 1 (раздутие особенности). Раздутием особенности* в начале координат для системы (9) назовём отображение $B\colon z\mapsto(\mu,\tilde z)$:

$$\tilde z_4=\frac{z_4}{\mu},\quad \tilde z_3=\frac{z_3}{\mu^2},\quad \tilde z_2=\frac{z_2}{\mu^3},\quad \tilde z_1=\frac{z_1}{\mu^4},$$

$$4\mu^{24}=\frac{\langle -B^{-1}z_4,z_4\rangle^{12}}{|A_3|^{24}}+\frac{\langle -B^{-1}z_3,z_3\rangle^{6}}{|A_2|^{12}}+\frac{\langle -B^{-1}z_2,z_2\rangle^{4}}{|A_1|^{8}}+\frac{\langle -B^{-1}z_1,z_1\rangle^{3}}{|A_0|^{6}}, \tag{10}$$

где $\mu\in\mathbb{R}_+$, A_j, $j=\overline{0,3}$, определены в (6), $\tilde z\in\mathbb{R}^8$ лежит на сфере

$$S=\left\{\frac{\langle -B^{-1}\tilde z_4,\tilde z_4\rangle^{12}}{|A_3|^{24}}+\frac{\langle -B^{-1}\tilde z_3,\tilde z_3\rangle^{6}}{|A_2|^{12}}+\frac{\langle -B^{-1}\tilde z_2,\tilde z_2\rangle^{4}}{|A_1|^{8}}+\frac{\langle -B^{-1}\tilde z_1,\tilde z_1\rangle^{3}}{|A_0|^{6}}=4\right\}.$$

Нетрудно видеть, что замена (10) индуцирована действием группы Фуллера g_λ с параметром $\lambda=1/\mu$: $\tilde z=g_{1/\mu}(z)$, что эквивалентно $z=g_\mu(\tilde z)$, и сопоставляет точке $z=0$ сферу S.

Система (9) обыкновенных дифференциальных уравнений в координатах $(\mu,\tilde z)$ принимает вид

$$\mu'=\mu\mathcal{M},\quad u=\tilde z_1/\|\tilde z_1\|,\quad \tilde z_1'=\tilde z_2-4\tilde z_1\mathcal{M}+f_1(g_\mu(\tilde z),u)/\mu^3,\quad \tilde z_2'=\tilde z_3-3\tilde z_2\mathcal{M}+f_2(g_\mu(\tilde z),u)/\mu^2,$$
$$\tilde z_3'=\tilde z_4-2\tilde z_3\mathcal{M}+f_3(g_\mu(\tilde z),u)/\mu,\quad \tilde z_4'=\beta(g_\mu(\tilde z))u-\tilde z_4\mathcal{M}+f_4(g_\mu(\tilde z),u),\tag{11}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной s:

$$ds=\frac{1}{\mu}dt,\tag{12}$$

а $\mathcal{M}$ задаётся условием

$$\mathcal{M}(\mu,\tilde z)=\frac{1}{96}\biggl(\frac{24}{|A_3|^{24}}\langle B^{-1}\tilde z_4,\tilde z_4\rangle^{11}\Bigl\langle B^{-1}\tilde z_4,\beta(g_\mu(\tilde z))\frac{\tilde z_1}{\|\tilde z_1\|}+f_4(g_\mu(\tilde z),u)\Bigr\rangle+$$
$$+\frac{12}{|A_2|^{12}}\langle B^{-1}\tilde z_3,\tilde z_3\rangle^5\Bigl\langle B^{-1}\tilde z_3,\tilde z_4+\frac{f_3(g_\mu(\tilde z),u)}{\mu}\Bigr\rangle+\frac{8}{|A_1|^8}\langle B^{-1}\tilde z_2,\tilde z_2\rangle^3\Bigl\langle B^{-1}\tilde z_2,\tilde z_3+\frac{f_2(g_\mu(\tilde z),u)}{\mu^2}\Bigr\rangle-$$
$$-\frac{6}{|A_0|^6}\langle B^{-1}\tilde z_1,\tilde z_1\rangle^2\Bigl\langle B^{-1}\tilde z_1,\tilde z_2+\frac{f_1(g_\mu(\tilde z),u)}{\mu^3}\Bigr\rangle\biggr).$$

Решения системы (11) лежат на цилиндре $Q=S\times\{\mu\in\mathbb{R}\}$.

Шаг 2 (инвариантное подпространство решений). Опишем решения (11) на нулевом сечении цилиндра $Q_0=Q\cap\{\mu=0\}$. Для этого сначала применим разложение Тейлора к правой части (11) в окрестности нулевого сечения Q_0:

$$\mu'=\mu\mathcal{M},\quad u=\tilde z_1/\|\tilde z_1\|,\quad \tilde z_1'=\tilde z_2-4\tilde z_1\mathcal{M}+(\mu+o(\mu))F_1(\tilde z,u),\quad \tilde z_2'=\tilde z_3-3\tilde z_2\mathcal{M}+(\mu+o(\mu))F_2(\tilde z,u),$$
$$\tilde z_3'=\tilde z_4-2\tilde z_3\mathcal{M}+(\mu+o(\mu))F_3(\tilde z,u),\quad \tilde z_4'=Bu-\tilde z_4\mathcal{M}+(\mu+o(\mu))F_4(\tilde z,u),\tag{13}$$

где $\mathcal{M}(\mu,\tilde z)=\mathcal{M}_0(\tilde z)+\mu\mathcal{M}_1(\tilde z)$,

$$\mathcal{M}_0(\tilde z)=\frac{1}{96}\biggl(\frac{24}{|A_3|^{24}}\langle B^{-1}\tilde z_4,\tilde z_4\rangle^{11}\Bigl\langle\tilde z_4,\frac{\tilde z_1}{\|\tilde z_1\|}\Bigr\rangle+\frac{12}{|A_2|^{12}}\langle B^{-1}\tilde z_3,\tilde z_3\rangle^5\langle B^{-1}\tilde z_3,\tilde z_4\rangle+$$
$$+\frac{8}{|A_1|^8}\langle B^{-1}\tilde z_2,\tilde z_2\rangle^3\langle B^{-1}\tilde z_2,\tilde z_3\rangle-\frac{6}{|A_0|^6}\langle B^{-1}\tilde z_1,\tilde z_1\rangle^2\langle B^{-1}\tilde z_1,\tilde z_2\rangle\biggr).$$

Подставляя $\mu=0$ в систему (13), получаем систему уравнений на Q_0

$$\mu'=0,\quad u=\tilde z_1/\|\tilde z_1\|,\quad \tilde z_1'=\tilde z_2-4\tilde z_1\mathcal{M}_0,\quad \tilde z_2'=\tilde z_3-3\tilde z_2\mathcal{M}_0,$$
$$\tilde z_3'=\tilde z_4-2\tilde z_3\mathcal{M}_0,\quad \tilde z_4'=Bu-\tilde z_4\mathcal{M}_0.\tag{14}$$

Отсюда следует, что нулевое сечение цилиндра Q_0 является инвариантным подпространством для системы (11). С точностью до линейной замены переменных система (14) совпадает с раздутием системы для задачи (3). Действительно, применив к системе (14) замену

$$\hat z_1=G^{-1}\tilde z_1,\quad \hat z_2=G^{-1}\tilde z_2,\quad \hat z_3=G^{-1}\tilde z_3,\quad \hat z_4=G^{-1}\tilde z_4,\quad \hat u=Gu,\quad G=\sqrt{-B},\tag{15}$$

имеем

$$\mu'=0,\quad \hat u=G\hat z_1/\|\hat z_1\|,\quad \hat z_1'=\hat z_2-4\hat z_1\mathcal{M}_0,\quad \hat z_2'=\hat z_3-3\hat z_2\mathcal{M}_0,$$
$$\hat z_3'=\hat z_4-2\hat z_3\mathcal{M}_0,\quad \hat z_4'=-\hat u-\hat z_4\mathcal{M}_0,\tag{16}$$

где

$$\mathcal{M}_0(\hat z) = \frac{1}{96}\left(-\frac{24\|\hat z_4\|^{22}}{|A_3|^{24}}\left\langle \hat z_4, \frac{G\hat z_1}{\|\hat z_1\|}\right\rangle + \frac{12\|\hat z_3\|^{10}}{|A_2|^{12}}\langle \hat z_3, \hat z_4\rangle + \frac{8\|\hat z_2\|^{6}}{|A_1|^{8}}\langle \hat z_2, \hat z_3\rangle + \frac{6\|\hat z_1\|^{4}}{|A_0|^{6}}\langle \hat z_1, \hat z_2\rangle\right).$$

Система (16) совпадает с раздутием гамильтоновой системы задачи (3) в случае, когда управление меняется в эллипсе, заданном матрицей G. Используя (6), (10) и (12), получаем частное решение системы (16):

$$\mu^*(s) = 0, \quad \hat z_m^*(s) = GA_{m-1}e^{-\mathbf{i}\alpha s}, \quad m = \overline{1,4}, \quad \hat u^*(s) = Ge^{-\mathbf{i}\alpha s}. \tag{17}$$

Таким образом, применив обратную замену (15) к (17), найдём частное решение систем (14) и (11):

$$\mu^*(s) = 0, \quad \tilde z_m^*(s) = G^2A_{m-1}e^{-\mathbf{i}\alpha s}, \quad m = \overline{1,4}, \quad u^*(s) = e^{-\mathbf{i}\alpha s}.$$

Заметим, что это решение является циклом. Обозначим его через $\xi^0(s) = (0, \tilde z^*(s))$.

Шаг 3 (гиперболичность периодического решения). Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Периодическое решение $\xi^0(s)$ является гиперболическим циклом.*

Доказательство. Исследуем систему уравнений в вариациях на решении $\xi^0(s)$ для (11):

$$h' = F_\xi(\xi^0(s))h. \tag{18}$$

Здесь F — правая часть (11), а F_ξ — якобиан для F. Так как F не зависит явно от s и $\xi^0(s)$ — периодическая траектория, то $F_\xi(\xi^0(s))$ — непрерывная периодическая матрица. Следовательно, по теореме Ляпунова [12, теорема 2.2.6] существует такое невырожденное периодическое преобразование $\hat h = P(s)h$ (преобразование Ляпунова), что в координатах $\hat h$ система (18) принимает вид

$$\hat h' = J\hat h, \tag{19}$$

где J — постоянная матрица. При этом собственные значения матрицы J являются характеристическими показателями цикла $\xi^0(s)$. Для (18) матрица $P(s) \in M_{9\times 9}(\mathbb{R})$ имеет вид

$$P(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_* \end{pmatrix}, \quad P_* = \begin{pmatrix} \cos(\alpha s) & -\sin(\alpha s) \\ \sin(\alpha s) & \cos(\alpha s) \end{pmatrix},$$

здесь 0 — нулевая матрица соответствующего размера. Идея выбора матрицы P основана на форме решения $\xi^0(s)$, а именно, преобразование P переводит цикл $\xi^0(s)$ в неподвижную точку. В результате прямых вычислений получаем матрицу системы (19):

$$J = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & 9 & -\frac{7\sqrt5}{4} & -\frac{127}{252} & -\frac{25\sqrt5}{63} & \frac{67}{252} & \frac{73\sqrt5}{252} & \frac{53}{252} & -\frac{47\sqrt5}{252} \\
* & \sqrt5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & -15 & \frac{9\sqrt5}{4} & \frac{631}{84} & \frac{4\sqrt5}{21} & \frac{17}{84} & -\frac{73\sqrt5}{84} & -\frac{53}{84} & \frac{47\sqrt5}{84} \\
* & -\frac{15\sqrt5}{4} & \frac{45}{16} & \frac{715\sqrt5}{336} & \frac{377}{84} & -\frac{67\sqrt5}{336} & -\frac{29}{336} & -\frac{53\sqrt5}{336} & \frac{235}{336} \\
* & \frac{35}{2} & -\frac{21\sqrt5}{8} & -\frac{379}{72} & -\frac{25\sqrt5}{18} & \frac{211}{72} & \frac{\sqrt5}{72} & \frac{125}{72} & -\frac{47\sqrt5}{72} \\
* & \frac{35\sqrt5}{2} & -\frac{105}{8} & -\frac{379\sqrt5}{72} & -\frac{125}{18} & \frac{139\sqrt5}{72} & \frac{509}{72} & \frac{53\sqrt5}{72} & -\frac{163}{72} \\
* & \frac{105}{4} & -\frac{63\sqrt5}{16} & -\frac{379}{48} & -\frac{25\sqrt5}{12} & \frac{67}{48} & \frac{73\sqrt5}{48} & \frac{101}{48} & -\frac{95\sqrt5}{48} \\
* & -\frac{105\sqrt5}{4} & -\frac{1701}{16} & \frac{379\sqrt5}{48} & \frac{125}{12} & -\frac{67\sqrt5}{48} & -\frac{365}{48} & -\frac{5\sqrt5}{48} & \frac{283}{48}
\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы J имеют вид

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=4,\quad \lambda_4=5,\quad \lambda_5=24,$$
$$\lambda_{6,7}=\frac{1}{2}\Big(5+\sqrt{47\pm 12\sqrt{34}\mathbf{i}}\Big)\approx 4.65903\pm 4.0511\mathbf{i},$$
$$\lambda_{8,9}=\frac{1}{2}\Big(5-\sqrt{47\pm 12\sqrt{34}\mathbf{i}}\Big)\approx 0.340974\pm 4.0511\mathbf{i}.$$

Получаем, что периодическое решение $\xi^0(s)$ имеет один характеристический показатель с отрицательной действительной частью, семь характеристических показателей с положительной действительной частью и один нулевой характеристический показатель. Лемма доказана.

В силу гиперболичности цикла $\xi^0(s)$ имеет место сжатие по направлению μ и растяжение по остальным направлениям [12]. Применяя к $\xi^0(s)$ теорему об инвариантных многообразиях [13], получаем, что система (11) имеет решение $\xi(s)=(\mu(s),\tilde{z}(s))\in\mathbb{R}^9$, удовлетворяющее условию

$$\left\|\xi(s+s_0)-\xi^0(s)\right\| e^{cs}\to 0 \quad \text{при} \quad s\to+\infty \tag{20}$$

для некоторых s_0 и $c>0$.

Таким образом, построено двумерное устойчивое многообразие цикла $\xi^0(s)$ для системы (10) (рис. 3). Далее покажем, что это многообразие состоит из логарифмических спиралей.

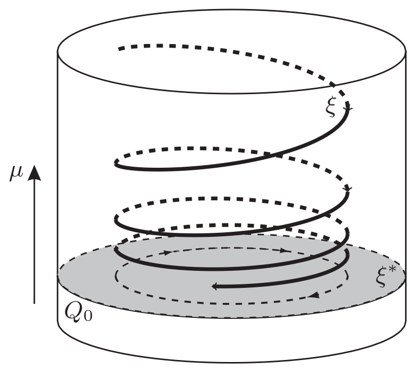

Рис. 3. Решения системы (10)

Шаг 4 (обратный ход процедуры раздутия особенности). Пусть T — момент попадания решения $z(t)$ системы (9) в начало координат и $\xi(s)$ — решение системы (11), удовлетворяющее условию (20). Из условия (20) могут быть получены следующие оценки [9]:

$$\mu(s)=\kappa e^{-s}(1+o(e^{-c_\mu s}))\quad \text{при}\quad s\to\infty,$$
$$e^{-s(t)}=\kappa^{-1}(T-t)(1+o(e^{-c_\mu s(t)}))\quad \text{при}\quad t\to T-0,$$
$$e^{-\mathbf{i}\alpha s(t)}=e^{\mathbf{i}\alpha\ln(T-t)}e^{-\mathbf{i}\alpha(\ln\kappa+o((T-t)^{c_\mu}))}\quad \text{при}\quad t\to T-0, \tag{21}$$

где κ и c_μ — некоторые положительные постоянные.

Применяя (21) (аналогично [7]) к решению $\xi(s)$ системы (11), получаем окончательные асимптотические формулы для решения $z(t)$ гамильтоновой системы (9) в форме логарифмических спиралей:

$$z_m(t)=|G^2A_{m-1}|(T-t)^{5-m}(1+o((T-t)^\sigma))e^{\mathbf{i}\mathrm{Arg}\,(G^2A_{m-1})}e^{\mathbf{i}\alpha\ln(T-t)}e^{\mathbf{i}\alpha(\gamma+o((T-t)^\sigma))},$$
$$u(t)=e^{\mathbf{i}\mathrm{Arg}(A_0)}e^{\mathbf{i}\alpha\ln(T-t)}e^{\mathbf{i}\alpha(\gamma+o((T-t)^\sigma))}\quad \text{при}\quad t\to T-0,$$

где $\sigma>0,$ $\gamma=s_0-\ln\kappa\in\mathbb{R}$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась окрестность особого режима второго порядка в задачах оптимального управления, аффинных по управлению из круга. Рассмотрен случай, когда гамильтонова система имеет размерность 8 и является малым (в смысле действия группы Фуллера) возмущением гамильтоновой системы обобщённой задачи Фуллера с управлением из круга. Показано, что для такого класса задач сохраняются экстремали в виде логарифмических спиралей. Мы надеемся, что полученный результат может быть полезен не только с теоретической точки зрения, но и в приложениях (см. [9–11]).

Авторы благодарны рецензенту за полезные комментарии.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kelley, H.J. A second variation test for singular extremals / H.J. Kelley // AIAA J. — 1964. — V. 2, № 8. — P. 1380–1382.
2. Kelley, H.J. Singular extremals / H.J. Kelley, R.E. Kopp, H.G. Moyer // Topics in Optimization / Ed. G. Leitmann. — New York : Academic, 1967. — P. 63–103.
3. Зеликин, М.И. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления / М.И. Зеликин, В.Ф. Борисов // Тр. МИАН СССР. — 1991. — Т. 197. — С. 85–166.
4. Kupka, I. The ubiquity of Fuller's phenomenon / I. Kupka // Nonlinear Controllability and Optimal Control / Ed. H.J. Sussmann. — New York : Dekker, 1990. — P. 313–350.
5. Zelikin, M.I. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering / M.I. Zelikin, V.F. Borisov. — Boston : Birkhäuser, 1994. — 244 p.
6. Chukanov, S.V. Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem / S.V. Chukanov, A.A. Milyutin // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — V. 2, № 1. — P. 31–48.
7. Ронжина, М.И. Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга / М.И. Ронжина, Л.А. Манита, Л.В. Локуциевский // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2021. — Т. 315. — С. 222–236.
8. Ронжина, М.И. Решения гамильтоновой системы с двумерным управлением в окрестности особой экстремали второго порядка / М.И. Ронжина, Л.А. Манита, Л.В. Локуциевский // Успехи мат. наук. — 2021. — Т. 76, № 5. — С. 201–202.
9. Manita, L.A. Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem / L.A. Manita, M.I. Ronzhina // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2022. — V. 27, № 6. — P. 3325–3343.
10. Ronzhina, M.I. Singularity of optimal control for a Timoshenko beam / M.I. Ronzhina, L.A. Manita // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — V. 1740. — Art. 012068.
11. Ronzhina, M.I. Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem / M.I. Ronzhina, L.A. Manita // Regul. Chaotic Dyn. — 2023. — V. 28, № 2. — P. 148–161.
12. Farkas, M. Periodic Motions / M. Farkas. — New York : Springer, 1994. — 577 p.
13. Hartman, Ph. Ordinary Differential Equations / Ph. Hartman. — New York : Wiley, 1964. — 612 p.

FAMILY OF LOGARITHMIC SPIRALS IN HAMILTONIAN SYSTEMS OF DIMENSION 8 WITH CONTROL IN A DISK

© 2024 / M. I. Ronzhina[1], L. A. Manita[2]

[1]National University of Oil and Gas “Gubkin University”, Moscow, Russia
[2]National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
e-mail: [1]ronzhina.m@gubkin.ru, [2]lmanita@hse.ru

We study the neighbourhood of a singular second-order extremal in optimal control problems that are affine in control in a disk. We consider the case when the Hamiltonian system has dimension 8 and is a small (in the sense of the action of the Fuller group) perturbation of the Hamiltonian system of the generalized Fuller problem with control in a disk. For this class of problems we prove the existence of extremals in the form of logarithmic spirals, which reach the singular second-order extremal in a finite time, while the control performs an infinite number of rotations around the circle.

Keywords: two-dimensional control in a disk, singular extremal, blow-up of a singularity, logarithmic spiral, Hamiltonian system of Pontryagin's maximum principle

REFERENCES

1. Kelley, H.J., A second variation test for singular extremals, *AIAA J.*, 1964, vol. 2, no. 8, pp. 1380–1382.
2. Kelley, H.J., Kopp, R.E., and Moyer, H.G., Singular extremals, in: *Topics in Optimization*, ed. G. Leitmann, New York: Academic, 1967, pp. 63–103.
3. Zelikin, M.I. and Borisov, V.F., Regimes with frequented switches in the problems of optimal control, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1993, vol. 197, pp. 95–186.
4. Kupka, I., The ubiquity of Fuller's phenomenon, in: *Nonlinear Controllability and Optimal Control*, ed. H.J. Sussmann, New York: Dekker, 1990, pp. 313–350.
5. Zelikin, M.I. and Borisov, V.F., *Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering*, Boston: Birkhäuser, 1994.
6. Chukanov, S.V. and Milyutin, A.A., Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem, *Russ. J. Math. Phys.*, 1994, vol. 2, no. 1, pp. 31–48.
7. Ronzhina, M.I., Manita, L.A., and Lokutsievskiy, L.V., Neighborhood of the second-order singular regime in problems with control in a disk, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, pp. 209–222.
8. Ronzhina, M.I., Manita, L.A., and Lokutsievskiy, L.V., Solutions of a Hamiltonian system with two-dimensional control in a neighbourhood of a singular second-order extremal, *Russ. Math. Surv.*, 2021, vol. 76, no. 5, pp. 936–938.
9. Manita, L.A. and Ronzhina, M.I., Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 2022, vol. 27, no. 6, pp. 3325–3343.
10. Ronzhina, M.I. and Manita, L.A., Singularity of optimal control for a Timoshenko beam, *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, vol. 1740, art. 012068.
11. Ronzhina, M.I. and Manita, L.A., Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2023, vol. 28, no. 2, pp. 148–161.
12. Farkas, M., *Periodic Motions*, New York: Springer, 1994.
13. Hartman, Ph., *Ordinary Differential Equations*, New York: Wiley, 1964.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1541–1552

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА РАЗБИЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ДЛЯ УСТОЙЧИВОЙ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ

А. С. Фурсов[1], П. А. Крылов[2]

[1]*Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай*

[1,2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

[1]*Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, г. Москва*

e-mail: [1]fursov@cs.msu.ru, [2]pavel@leftsystem.ru

Поступила в редакцию 14.07.2024 г., после доработки 01.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Для переключаемой аффинной системы, замкнутой стабилизирующей статической обратной связью, представлен метод построения параметрического семейства разбиений пространства состояний, относительно которого данная замкнутая система сохраняет устойчивость.

Ключевые слова: переключаемая аффинная система, переключающий сигнал, устойчивость, обратная связь, стабилизация

DOI: 10.31857/S0374064124110095, EDN: JDRZGZ

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается переключаемая аффинная система

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \tag{1}$$

порождаемая множеством F всевозможных пар (N, D), задающих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$ на выпуклые замкнутые многогранники $\overline{M}_i$ (под выпуклым многогранником понимаем выпуклое множество, ограниченное некоторым числом гиперплоскостей, при этом в общем случае многогранник может быть неограниченным), $i = \overline{1, m}$. Здесь, следуя обозначениям работ [1, 2], $N = [n_{ijk}]$ — трёхмерная $m \times m \times n$-матрица, для которой коэффициент n_{ijk} обозначает k-ю компоненту вектора нормали n_{ij} к плоскости $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \langle n_{ij}, x\rangle = d_{ij},\ d_{ij} \in \mathbb{R}\}$, содержащей общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$, направленного в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$ — матрица из $\mathbb{R}^{m\times m}$. При этом очевидно, что $n_{ji} = -n_{ij}$, $d_{ji} = -d_{ij}$, и если $n_{ij} = 0$ (в случае, когда многогранники $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$ не имеют общей грани), то считаем, что $d_{ij} = d_{ji} = 1$, и для удобства полагаем $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$. Далее $S(F)$ — множество переключающих сигналов σ, где $\sigma(x; N, D)\colon \mathbb{R}^n \to I = \{1, \ldots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой $(N, D) \in F$ и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ — управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A\colon I \to \{A_1, \ldots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b \circ \sigma$ и $v_\sigma = v \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $b\colon I \to \{b_1, \ldots, b_m\}$, $v\colon I \to \{v_1, \ldots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$, т.е. $0 \in M_1$. Через $\Gamma(N; D)$ будем обозначать множество граничных точек разбиения, задаваемого парой $(N, D) \in F$.

В упомянутых работах [1, 2] рассматривалась задача построения проверяемых условий устойчивости системы (1), замкнутой статической обратной связью $u = -\theta^T x$, т.е. замкнутой системы вида

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^T x, \quad \sigma \in S(F). \tag{2}$$

Нулевое решение замкнутой переключаемой системы (2) считаем глобально равномерно устойчивым [1], если для любого фиксированного $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

В статье [1] сформулирована и доказана теорема о достаточном условии глобальной равномерной устойчивости нулевого решения системы (2), в [2] приведён эффективный метод численной проверки выполнения этого условия, позволяющий устанавливать факт глобальной устойчивости замкнутой системы (2) в случаях, когда множество разбиений $S(F)$ либо конечное, либо представляет собой линейно-параметризованное семейство разбиений вида

$$F(\kappa) = \{(N, D(\kappa))\},$$

где N — фиксированная трёхмерная матрица, а $D(\kappa)$ — матрица, элементы которой линейно зависят от параметров $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$, а именно,

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$\Phi \kappa \leqslant \varphi, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^l,$$

для некоторого натурального l. При этом если $n_{ij} = 0$, то $d_{ij}^0 = 1$ и $d_{ij}^1 = \ldots = d_{ij}^r = 0$.

В настоящей работе рассматривается задача в некотором смысле обратная той, которая исследовалась в [1, 2], а именно: пусть статическая обратная связь в форме регулятора переменной структуры вида

$$u(x) = -\theta_\sigma^T x - w_\sigma \tag{3}$$

обеспечивает глобальную равномерную устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma \theta_\sigma^T) x + v_\sigma - b_\sigma w_\sigma, \quad \sigma \in S(F), \tag{4}$$

причём множество разбиений состоит из одного переключающего сигнала $S(F) = \{\sigma_0\}$ ($\sigma_0 \sim (N_0, D_0)$). Требуется разработать метод построения линейно-параметризованного семейства разбиений

$$F_0(\kappa) = \{(N_0, D(\kappa))\}, \tag{5}$$

где

$$D(\kappa) = D_0 + D_1 \kappa_1 + \cdots + D_r \kappa_r \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad D(\kappa) = \{d_{ij}(\kappa)\}, \quad D_l = \{d_{ij}^l\},$$
$$\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r) \in K \subset \mathbb{R}^r, \quad D(0) = D_0,$$

относительно которого замкнутая система (4) при $S(F) = S(F_0(\kappa))$ глобально равномерно устойчива.

Отметим, что данная задача может возникать при кусочно-линейной аппроксимации нелинейной аффинной системы на заданном множестве по известному конечному набору значений, вычисляемых по её правой части (имеются в виду значения самой правой части и её частных производных в некотором конечном наборе точек, при этом в остальных точках значения правой части считаются неизвестными).

Для решения сформулированной задачи будут использоваться результаты работ [1, 2], в частности, предлагается строить Г-инвариантное расширение (некоторые определения см. в п. 1) множества разбиений $S(F)$, что позволит применить к нему предложенные в [2] подходы для проверки глобальной равномерной устойчивости переключаемой аффинной системы с линейно-параметризованным семейством разбиений. Ниже будут сформулированы необходимые определения и уточнена постановка задачи.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Пусть $(N;D)\in F$ — некоторое разбиение пространства состояний для системы (1). В соответствии с работой [1] для каждого набора $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ такого, что $\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\{1,\ldots,m\}$, $2\leqslant p\leqslant m$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$, введём множества граничных точек (граней рассматриваемого разбиения) $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\bigcap_{i=1}^{p}\overline{M}_{\alpha_i}\setminus\bigcup_{k\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\overline{M}_k$. Тогда

$$\Gamma(N;D)=\bigcup_{\substack{(\alpha_1\ldots\alpha_p)\\ \alpha_1<\ldots<\alpha_p}}\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}.$$

Несжимаемой гранью $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ будем называть грань, определяемую набором $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ таким, что для любого набора $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_q\}$, $q>p$, содержащего $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$, $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_q}=\varnothing$.

Заметим, что по построению $\overline{\Gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ является объединением всех $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$ таких, что $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ содержится в $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_q\}$, поэтому грань $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ является несжимаемой тогда и только тогда, когда она совпадает со своим замыканием $\overline{\Gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Несложно заметить, что (по построению) ограниченная грань совпадает со своим замыканием только в том случае, когда она состоит из одной точки. Основываясь на этом, сформулируем следующее определение: ограниченную несжимаемую грань $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_q}$ будем называть *угловой точкой грани* $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, если $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ содержится в $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_q\}$.

Замечание 1. Известно [3], что выпуклый компакт в конечномерном пространстве является выпуклой оболочкой своих экстремальных точек. Отсюда следует, что замыкание любой ограниченной грани $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ является выпуклой оболочкой её угловых точек.

Любой луч, принадлежащий замыканию любой грани, будем называть её *угловым лучом*.

Замечание 2. Из [4, с. 11] следует, что замыкание любой неограниченной грани является выпуклой оболочкой некоторого конечного семейства её угловых лучей.

Заметим, что любая точка выпуклой оболочки k лучей вида $l_i=x_i+\lambda_i y_i$ $(\lambda_i\geqslant 0)$ может быть представлена как

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i(x_i+\lambda_i y_i),\quad \sum_{i=1}^{k}\mu_i=1,\quad \lambda_i\geqslant 0,\quad \mu_i\geqslant 0.$$

Здесь каждый луч l_i определяется точкой x_i и направляющим вектором y_i.

Значение функции $\sigma(x;N,D)$ в каждой точке $x\notin\Gamma(N;D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования переключаемой системы (4), описываемый аффинной системой

$$\dot{x}=(A_i-b_i\theta_i^T)x+v_i-b_iw_i,\quad i\in I. \tag{6}$$

Доопределение значения переключающего сигнала на множестве $\Gamma(N;D)$ зависит от выбора обратной связи (3), которую, по аналогии с работой [1], определим как допустимую, если выполнено следующее

Условие А. Для любой пары $(N,D)\in F$ и любого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ такого, что $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\neq\varnothing$, верно, что для любого $x\in\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i\in\{\alpha_1,...,\alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k\in\{\alpha_1,...,\alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i\alpha_k}\neq 0$, выполняется неравенство

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k},\overline{A}_{\alpha_i}x+v_{\alpha_i}-b_{\alpha_i}w_{\alpha_i}\rangle<0,$$

где $\overline{A}_{\alpha_i}=A_{\alpha_i}-b_{\alpha_i}\theta^T$.

Как показано в [1], при выполнении условия А можно так доопределить значение переключающего сигнала в каждой точке границы многогранников, что для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma\in S(F)$ соответствующее решение системы (4) существует и единственно [5, с. 59].

Для каждого разбиения $\sigma\in S(F)$ обозначим через H_σ множество квадратных матриц H порядка m таких, что $h_{ij}=0$, если $\Gamma_{ij}=\varnothing$ для данного σ, а остальные элементы равны -1 или 1.

Далее, при фиксированных $\sigma\in S(F)$, управлении u вида (3) и $H\in H_\sigma$ для соответствующей замкнутой системы (4) введём показатель грубости

$$\varepsilon(\sigma,u,H)=\min_{i=\overline{1,m}}\inf_{x\in\Gamma_i(\sigma)}\varepsilon_i(x),$$

где

$$\varepsilon_i(x)=\min_{j:\,x\in\overline{\Gamma}_{ij}(\sigma)}\varepsilon_{ij}(x),\quad x\in\Gamma_i(\sigma)=\overline{M}_i(\sigma)\setminus M_i(\sigma),$$

$$\varepsilon_{ij}(x)=h_{ij}\langle n_{ij},(A_i-k_ib_i)x+v_i-w_ib_i\rangle,\quad x\in\overline{\Gamma}_{ij}(\sigma),\quad h_{ij}\in\{-1,1\}.$$

По аналогии с [2] семейство разбиений (5), при некотором фиксированном разбиении σ_0, будем называть Г-*инвариантным*, если выполнено следующее

Условие Б. Если для некоторого набора $\alpha_1<\ldots<\alpha_p$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\{1,\ldots,m\})$ и некоторого $\kappa^*\in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa^*)$ не пусто, то для всех $\kappa\in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa)$ не пусты. И обратно, если для некоторого набора $\alpha_1<\ldots<\alpha_p$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\{1,\ldots,m\})$ и некоторого $\kappa^*\in K$ соответствующее множество $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa^*)$ пусто, то для всех $\kappa\in K$ множества $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\kappa)$ пусты.

Фактически Г-инвариантность линейно-параметризованного семейства разбиений (5) означает, что любое разбиение $(N_0,D(\kappa))\in F_0(\kappa)$ $(\kappa\neq 0)$ получается из (N_0,D_0) параллельным переносом его граней с сохранением их конфигурации. Для Г-инвариантных семейств разбиений выполняется следующее свойство.

Лемма 1. *Пусть для переключающего сигнала σ_0 и допустимого управления u при некоторой матрице $H\in H_{\sigma_0}$ выполнено неравенство $\varepsilon(\sigma_0,u,H)>0$. Тогда если для переключающего сигнала $\sigma\in S(F_0(\kappa))$, где $S(F_0(\kappa))$ является* Г-*инвариантным семейством, показатель грубости $\varepsilon(\sigma,u,H)>0$, то управление u является допустимым для σ.*

Доказательство. Из определения показателя грубости можно заметить, что $\varepsilon(\sigma,u,H)>0$ тогда и только тогда, когда для всех x из любого непустого множества $\overline{\Gamma}_{ij}$ выполняется неравенство $h_{ij}\langle n_{ij},\overline{A}_ix+v_i-w_ib_i\rangle>0$, т.е. скалярное произведение $\langle n_{ij},\overline{A}_ix+v_i-w_ib_i\rangle$ сохраняет знак h_{ij} на $\overline{\Gamma}_{ij}$. По условию для σ_0 управление u является допустимым, а значит, для любой непустой грани $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i\alpha_k}\neq 0$, выполняется неравенство $\langle n_{\alpha_i\alpha_k},\overline{A}_{\alpha_i}x+v_{\alpha_i}-b_{\alpha_i}w_{\alpha_i}\rangle<0$ или, в терминах показателя грубости, $h_{\alpha_i\alpha_k}=-1$ и $h_{\alpha_i\alpha_j}=1$ для $\alpha_j\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}\setminus\{\alpha_i,\alpha_k\}$. Так как σ и σ_0 принадлежат одному Г-инвариантному семейству, то для них совпадают множества возможных наборов $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$, отвечающих непустым граням. Для каждого такого набора существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i\alpha_k} \neq 0$, $h_{\alpha_i\alpha_k} = -1$ и показатель грубости $\varepsilon(\sigma, u, H) > 0$, значит условие A выполнено для переключающего сигнала $\sigma \in S(F_0(\kappa))$. Лемма доказана.

Замечание 3. Условия леммы 1 обеспечивают также равенства

$$\sigma(\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}; N_0, D(\kappa)) = \sigma_0(\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p})$$

для всех $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \neq \varnothing$.

Аналогично [1] каждому переключающему сигналу $\sigma \in S(F)$ системы (4), замкнутой допустимым управлением (3), сопоставим ориентированный граф дискретных состояний $G(\sigma)$, вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \to j$ означает существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j. В работе [2] получен критерий существования ребра $i \to j$ (для произвольных i, j) у графа состояний замкнутой системы, который для систем с положительным показателем грубости может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие леммы 1, тогда в системе (4) существует траектория, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j тогда и только тогда, когда найдётся набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, содержащий i и j, для которого $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \neq \varnothing$, выполнено равенство $\sigma(\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}; N, D) = j$ и $h_{i\alpha_k} = 1$ для всех $k \in \{1, \ldots, p\}$ таких, что $n_{i\alpha_k} \neq \mathbf{0}$.*

Лемма 2. *Пусть выполнено условие леммы 1, тогда $G(\sigma) = G(\sigma_0)$.*

Доказательство. Из теоремы 1, леммы 1 и замечания 3 следует, что для каждого сигнала $\sigma \in S(F_0(\kappa))$ наборы вершин и рёбер графов состояний совпадают, откуда и вытекает утверждение леммы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полученное в работе [1] достаточное условие глобальной равномерной устойчивости нулевого решения системы (1), замкнутой статической обратной связью $u = -\theta^T x$, практически без изменений может быть переформулировано для систем, замкнутых обратной связью (3). А именно, верна следующая

Теорема 2. *Пусть для системы (4), замкнутой допустимым управлением (3), все матрицы $A_i - b_i\theta^T$ $(i = \overline{1, m})$ не имеют собственных значений на мнимой оси и для любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ соответствующий ориентированный граф $G(\sigma)$ слабосвязный и не содержит циклов. Пусть подсистема системы (4) с индексом 1 асимптотически устойчива, а для остальных режимов $(i = \overline{2, m})$ и для любого $\sigma \in S(F)$ выполнены следующие условия:*

1) матрица $A_i - b_i\theta^T$ устойчива или область функционирования режима i (многогранник M_i) ограничена;

2) $x_0^i \notin \Gamma(N, D)$, где $x_0^i \equiv (A_i - b_i\theta^T)^{-1} v_i$ — стационарное решение аффинной системы, являющейся i-м режимом переключаемой системы (2);

3) $\sigma(x_0^i; N, D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (4) глобально равномерно устойчиво.

Итак, рассмотрим систему (4), замкнутую допустимым управлением u при $S(F) = \{\sigma_0\}$ (т.е. множество переключающих сигналов состоит из одного сигнала σ_0). Пусть данная система удовлетворяет теореме 2 и пусть для некоторой матрицы $H_0 \in H_{\sigma_0}$ соответствующий показатель грубости удовлетворяет для некоторого фиксированного ε_0 неравенству

$$\varepsilon(\sigma_0, u, H_0) \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Поставим теперь задачу расширения множества переключающих сигналов (множества соответствующих разбиений): *для рассматриваемой замкнутой системы (4) построить линейно-параметризованное семейство разбиений вида (5) со следующими свойствами*:

z1) *семейство* $S(F_0(\kappa))$ *является* Γ-*инвариантным*;

z2) *при всех* $i=\overline{2,m}$ *выполнены условия* $\sigma(x_0^i;N_0,D(\kappa))\neq i$ *и* $x_0^i\notin\Gamma(N_0,D(\kappa))$, *где* $\kappa\in K$, *а* $x_0^i\equiv(A_i-b_i\theta^T)^{-1}v_i$;

z3) $0\in M_1$;

z4) $\varepsilon(\sigma,u,H_0)\geqslant\varepsilon_0>0$ *для всех* $\sigma\in S(F_0(\kappa))$.

Можно показать, что нулевое решение замкнутой системы (5) с линейно-параметризованным семейством переключаемых сигналов $S(F_0(\kappa))$, удовлетворяющим свойствам z1)–z4), является глобально равномерно устойчивым. А именно, верна следующая

Теорема 3. *Пусть для системы (4) с* $S(F)=\{\sigma_0\}$ *и допустимым управлением и выполнены условия теоремы 2. Тогда нулевое решение системы (4) с множеством переключающих сигналов* $S(F)=S(F_0(\kappa))$, $\kappa\in K$, *удовлетворяющим условиям z1)–z4), глобально равномерно устойчиво.*

Доказательство. Поскольку для переключающего сигнала σ_0 выполнены условия теоремы 2, то все матрицы $A_i-b_i\theta^T$ $(i=\overline{1,m})$ не имеют собственных значений на мнимой оси. В силу Γ-инвариантности семейства $S(F_0(\kappa))$ и леммы 1 рассматриваемое управление u является допустимым для любого сигнала $\sigma\in S(F_0(\kappa))$ и выполнено условие 1) теоремы 2. В силу условия z2) для любого $\sigma\in S(F_0(\kappa))$ выполнены условия 2), 3) теоремы 2, а в силу условия z4) и леммы 2 имеем равенство $G(\sigma)=G(\sigma_0)$ при всех $\sigma\in S(F_0(\kappa))$. Отсюда следует, что для всех $\sigma\in S(F_0(\kappa))$ выполнены условия теоремы 2. Значит, система (4) с множеством переключающих сигналов $S(F)=S(F_0(\kappa))$ глобально равномерно устойчива. Теорема доказана.

Ниже будет приведён метод построения для замкнутой системы (4) с $S(F)=\{\sigma_0\}$ семейства переключающих сигналов $S(F)=S(F_0(\kappa))$, удовлетворяющего свойствам z1)–z4). Данный метод на основании теоремы 3 гарантирует глобальную равномерную устойчивость рассматриваемой системы с полученным расширенным множеством переключающих сигналов.

3. ОБЕСПЕЧЕНИЕ Г-ИНВАРИАНТНОСТИ РАСШИРЕНИЯ

Построение Γ-инвариантного линейно-параметризованного семейства разбиений для системы (4) с $S(F)=\{\sigma_0\}$ фактически состоит в определении допустимого параллельного переноса граней разбиения (N_0,D_0), при котором сохраняется конфигурация получаемых граней в смысле выполнения условия Б, т.е. для любого упорядоченного набора индексов $(\alpha_1\ldots\alpha_p)$ такого, что $\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\{1,\ldots,m\}$, $2\leqslant p\leqslant m$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$, должно выполняться условие

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\sigma_0)\neq\varnothing\Longleftrightarrow\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\sigma)\neq\varnothing\quad\text{для любого } \sigma\in S(F_0(\kappa)).$$

Поскольку каждое разбиение данного семейства имеет вид $(N_0,D(\kappa))$, где

$$D(\kappa)=D_0+D_1\kappa_1+\cdots+D_r\kappa_r\in\mathbb{R}^{m\times m},\quad \kappa\in\mathbb{R}^r,\quad D_i\in\mathbb{R}^{m\times m},$$

необходимо разработать алгоритм построения матриц $D_1,\ \ldots,\ D_r$, обеспечивающих Γ-инвариантность получаемого семейства.

Итак, предположим, что для разбиения (N_0,D_0) существует непустая грань $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. По построению она вложена в пересечение плоскостей

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\subset\bigcap_{i<j,\ i,j\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}}P_{ij}$$

и, следовательно, данное пересечение не пусто. Наличие такого непустого пересечения приводит к возникновению ограничений на параллельный перенос плоскостей, а именно: каждая плоскость P_{ij} с учётом переноса описывается уравнением

$$\langle n_{ij}, x\rangle = d_{ij}^0 + \mu_{ij},$$

где величина μ_{ij} характеризует величину параллельного сдвига соответствующей плоскости. Существование грани $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ после параллельного переноса плоскостей эквивалентно совместности системы линейных уравнений

$$\langle n_{\alpha_1\alpha_2}, x\rangle = d^0_{\alpha_1\alpha_2} + \mu_{\alpha_1\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \langle n_{\alpha_1\alpha_p}, x\rangle = d^0_{\alpha_1\alpha_p} + \mu_{\alpha_1\alpha_p}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \langle n_{\alpha_{p-1}\alpha_p}, x\rangle = d^0_{\alpha_{p-1}\alpha_p} + \mu_{\alpha_{p-1}\alpha_p}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} n^T_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ n^T_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ n^T_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} d^0_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ d^0_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ d^0_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Совместность (7) нужно исследовать при различных μ_{ij}. При этом, так как по построению $\langle n_{ij}, x\rangle = d^0_{ij}$, её совместность эквивалентна совместности следующей системы:

$$\begin{pmatrix} n^T_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ n^T_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ n^T_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Ввиду утверждения теоремы Фредгольма [6, с. 313] система (8) совместна тогда и только тогда, когда её правая часть ортогональна всем решениям сопряжённой системы. Итак, пусть $N_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = (n_{\alpha_1\alpha_2} \ldots n_{\alpha_1\alpha_p} \ldots n_{\alpha_{p-1}\alpha_p}) \in \mathbb{R}^{n\times p(p-1)/2}$. Обозначим через $Y_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ фундаментальную систему решений (ФСР) системы

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_p} y = 0.$$

Таким образом, ограничение на взаимное изменение величин μ_{ij} можно выразить системой уравнений

$$Y^T_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \begin{pmatrix} \mu_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ \mu_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} = 0.$$

Получив аналогичные системы из условия существования каждой непустой грани разбиения (N_0, D_0), можно записать получившиеся ограничения в виде единой системы

$$Y^T \mu = 0, \tag{9}$$

где μ — вектор-столбец из всех рассматриваемых коэффициентов μ_{ij}.

Пусть ФСР системы (9) содержит r векторов $D'_1, \ldots, D'_r$, т.е. её общее решение можно представить в виде

$$\mu = c_1 D'_1 + \ldots + c_r D'_r. \tag{10}$$

Построим по этой ФСР матрицы $D_1, \ldots, D_r$ следующим образом: в матрице D_1 размещаем элементы из D'_1 в соответствии с индексами i, j у элементов μ в левой части формулы (10), остальные элементы полагаем нулями и достраиваем матрицу до кососимметричной. Таким образом, для каждого разбиения из семейства $F_0(\kappa) = (N_0, D(\kappa))$, где

$$D(\kappa) = D_0 + \sum_{i=1}^{r} \kappa_i D_i, \quad \kappa \in \mathbb{R}^r,$$

будет верна первая часть условия Б.

Найдём теперь ограничения на κ, при которых выполняется вторая часть условия Б. Итак, пусть для некоторого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ при $\kappa = \mathbf{0}$ выполнено $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \varnothing$. Определим условия на κ, при которых $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa) = \varnothing$.

Если $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(\kappa) = \varnothing$, то по определению несовместна система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} n^T_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ n^T_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ n^T_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} d^0_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots \\ d^0_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots \\ d^0_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^1_{\alpha_1\alpha_2} & \cdots & d^r_{\alpha_1\alpha_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d^1_{\alpha_1\alpha_p} & \cdots & d^r_{\alpha_1\alpha_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d^1_{\alpha_{p-1}\alpha_p} & \cdots & d^r_{\alpha_{p-1}\alpha_p} \end{pmatrix} \kappa \tag{11}$$

или в матричной форме

$$N_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} x = d^0_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \hat{D}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \kappa.$$

Пусть Y — матрица, составленная по столбцам из ФСР однородной системы

$$N_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} x = 0.$$

По теореме Фредгольма система (11) совместна тогда и только тогда, когда

$$Y^T (d^0_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \hat{D}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \kappa) = 0,$$

т.е. когда κ удовлетворяет уравнению

$$Y^T \hat{D}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \kappa = -Y^T d^0_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}. \tag{12}$$

Обозначим через $L_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ линейное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^r$, представляющее множество решений системы (12), и рассмотрим объединение $L = \bigcup L_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ по всем наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, соответствующим пустым граням разбиения (N_0, D_0). Поскольку для выполнения второй части условия Б требуется несовместность системы (11), то, учитывая полученные выше условия для выполнения первой части условия Б, искомое Г-инвариантное семейство разбиений можем представить в следующем виде:

$$F_0(\kappa) = (N_0, D(\kappa)), \quad D(\kappa) = D_0 + \sum_{i=1}^{r} \kappa_i D_i, \quad \kappa \in K = \mathbb{R}^r \setminus L. \tag{13}$$

4. ИНВАРИАНТНОСТЬ РАСПОЛОЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК РЕЖИМОВ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Нетрудно заметить, что выполнение условия z2) для семейства (13) эквивалентно выполнению для каждого $\kappa\in K$ и каждой точки x_0^i следующей совокупности линейных неравенств:

$$\langle n_{i1},x_0^i\rangle > d_{i1}(\kappa)=d_{i1}^0+(d_{i1}^1\cdots d_{i_1}^l)\kappa,\quad \ldots,\quad \langle n_{im},x_0^i\rangle > d_{i1}(\kappa)=d_{im}^0+(d_{im}^1\cdots d_{i_n}^l)\kappa$$

или

$$(d_{i1}^1\cdots d_{i_1}^l)\kappa<\langle n_{i1},x_0^i\rangle-d_{i1}^0,\quad \ldots,\quad (d_{im}^1\cdots d_{i_m}^l)\kappa<\langle n_{im},x_0^i\rangle-d_{i1}^0. \tag{14}$$

Обозначим через E_i $(i=\overline{1,m})$ множество решений i-го неравенства совокупности (14). Тогда получим дополнительное ограничение для множества K вида

$$K=\mathbb{R}^r\setminus(L\cup E),\quad E=\bigcup_{i=1}^m E_i.$$

В свою очередь, условие z3), в соответствии с определением принадлежности точки многограннику M_1, выражается системой неравенств $d_{1i}(\kappa)>0$, $i=\overline{1,m}$, или системой в координатной форме относительно κ:

$$(d_{11}^1\cdots d_{11}^r)\kappa>-d_{11}^0,\quad \ldots,\quad (d_{m1}^1\cdots d_{m1}^r)\kappa>-d_{m1}^0.$$

Обозначая через T множество решений данной системы, ограничения на множество K запишем в виде

$$K=T\setminus(L\cup E),\quad E=\bigcup_{i=1}^m E_i. \tag{15}$$

5. ПОКАЗАТЕЛЬ ГРУБОСТИ РАСШИРЯЕМОГО СЕМЕЙСТВА РАЗБИЕНИЙ

Перейдём теперь к обеспечению условия z4). Согласно определению показателя грубости верны следующие соотношения:

$$\varepsilon(\sigma(\kappa))\geqslant\varepsilon_0\Longleftrightarrow\varepsilon_{ij}(x)\geqslant\varepsilon_0,\quad x\in\overline{\Gamma}_{ij}(\kappa),\quad i,j=\overline{1,m},$$
$$\varepsilon_{ij}(x)\geqslant\varepsilon_0,\quad x\in\overline{\Gamma}_{ij}(\kappa)\Longleftrightarrow h_{ij}\langle n_{ij},\overline{A_i}x+v_i-w_ib_i\rangle\geqslant\varepsilon_0,\quad x\in\overline{\Gamma}_{ij}(\kappa).$$

Ввиду замечаний 1 и 2 замыкание грани $\overline{\Gamma}_{ij}(\kappa)$ является выпуклой оболочкой её угловых точек и угловых лучей, поэтому выполнение неравенства

$$h_{ij}\langle n_{ij},\overline{A_i}x+v_i-w_ib_i\rangle\geqslant\varepsilon_0 \tag{16}$$

для всех точек $\overline{\Gamma}_{ij}(\kappa)$ эквивалентно выполнению данного неравенства для всех угловых точек данной грани и на её угловых лучах. Обозначим через $x_l(\kappa)$ угловые точки грани $\Gamma_{ij}(\kappa)$.

Угловая точка $x_l(\kappa)$, в свою очередь, однозначно определяется как пересечение n некоторых плоскостей $P_{ij}(\kappa)$. Пусть эти плоскости имеют номера (i_1,j_1), …, (i_n,j_n). Тогда $x_l(\kappa)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} n_{i_1j_1}^T\\ \vdots\\ n_{i_nj_n}^T\end{pmatrix}x_l(\kappa)=\begin{pmatrix} d_{i_1j_1}^0\\ \vdots\\ d_{i_nj_n}^0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_{i_1j_1}^1 & \cdots & d_{i_1j_1}^r\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{i_nj_n}^1 & \cdots & d_{i_nj_n}^r\end{pmatrix}\kappa.$$

Обозначая матрицу нормалей через $\hat{N}_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а матрицу правых частей через $\hat{D}_l \in \mathbb{R}^{n\times r}$, перепишем данную систему в матричной форме:

$$x_l = \hat{N}_l^{-1}(\hat{d}_l^0 + \hat{D}_l \kappa).$$

Тогда неравенство (16) для угловой точки принимает вид

$$h_{ij}\langle n_{ij}, \overline{A_i}\hat{N}_l^{-1}(\hat{d}_l^0 + \hat{D}_l\kappa) + v_i - w_i b_i\rangle \geqslant \varepsilon_0. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь угловые лучи. Заметим, что если грань имеет угловые точки, то семейство угловых лучей всегда может быть выбрано таким образом, что началом лучей являются угловые точки, более того, каждый луч будет замыканием некоторой грани $\overline{\Gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, которая вложена в прямую, являющуюся пересечением плоскостей $\bigcap_{i<j,\ i,j\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}} P_{ij}$. В таком случае угловой луч можно описать как $x_l(\kappa) + \lambda y_l$, $\lambda \geqslant 0$, где $x_l(\kappa)$ — угловая точка, y_l — направляющий вектор углового луча. При этом направляющий вектор однозначно определяется набором нормалей к упомянутым плоскостям и не зависит от κ. В результате неравенство (16) для углового луча принимает вид

$$h_{ij}\langle n_{ij}, \overline{A_i}(x_l(\kappa) + \lambda y_l) + v_i - w_i b_i\rangle \geqslant \varepsilon_0$$

или

$$h_{ij}\langle n_{ij}, \overline{A_i}x_l(\kappa) + v_i - w_i b_i\rangle + h_{ij}\langle n_{ij}, \overline{A_i}\lambda y_l\rangle \geqslant \varepsilon_0,$$

где первое слагаемое больше или равно ε_0 в силу условия (17) для отдельной угловой точки, поэтому

$$h_{ij}\langle n_{ij}, \overline{A_i} y_l\rangle \geqslant 0.$$

Данное условие не зависит от κ и выполнено в силу условия А для σ_0, т.е. условие z4) обеспечивается только выполнением неравенств (17). Следовательно, итоговая система неравенств относительно κ, обеспечивающая условие z4), принимает вид

$$\langle h_{ij}\hat{D}_l^T(\hat{N}_l^{-1})^T\overline{A_i}^T n_{ij}, \kappa\rangle \geqslant \varepsilon_0 - \langle n_{ij}, \overline{A_i}\hat{N}_l^{-1}\hat{d}_l^0 + v_i - w_i b_i\rangle, \quad i,j\in\overline{1,m}, \quad n_{ij}\neq 0, \quad l\in\overline{1,r}. \tag{18}$$

Остаётся отдельно рассмотреть случай, когда неограниченная грань не содержит угловых точек, а значит, целиком содержит некоторую прямую. Построим произвольную гиперплоскость $\hat{P}$, пересекающую данную грань ортогонально данной прямой. Теперь рассматриваемую грань можно представить как объединение двух выпуклых множеств, лежащих по разные стороны по отношению к данной гиперплоскости. Описанную процедуру следует повторять для каждого из полученных множеств до тех пор, пока у всех новых множеств не появятся угловые точки. В результате исходную грань можно будет описать как выпуклую оболочку всех угловых точек и угловых лучей построенных множеств (очевидно, что такое описание не единственно) и, таким образом, данный случай сводится к уже разобранному выше.

Обозначив через Q множество решений системы линейных неравенств (18), с учётом (15) получим искомое множество K в следующем виде:

$$K = (Q\cap T)\setminus(L\cup E). \tag{19}$$

Таким образом, разработан метод расширения множества переключающих сигналов (множества соответствующих разбиений) для замкнутой системы (4), позволяющий построить линейно-параметризованное семейство разбиений вида (5), где множество K можно получить по формуле (19), численно решая соответствующие системы линейных уравнений и неравенств.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсов, А.С. Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 4. — С. 554–562.
2. Фурсов, А.С. О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы / А.С. Фурсов, П.А. Крылов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1541–1549.
3. Krein, M. On extreme points of regular convex sets / M. Krein, D. Milman // Studia Mathematica. — 1940. — № 9. — P. 133–138.
4. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. — М. : Наука, 1968. — 488 с.
5. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 224 с.
6. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности “Прикладная математика” / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. — 2-е изд. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2002. — 320 с.

ON THE EXPANSION OF THE STATE SPACE PARTITIONS SET FOR A STABLE SWITCHED AFFINE SYSTEM

© 2024 / A. S. Fursov[1], P. A. Krylov[2]

[1]Department of Mathematics, School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang, China
[1,2]Lomonosov Moscow State University, Russia
[1]Kharkevich Institute for Information Transmission Problems of RAS, Moscow, Russia
e-mail: [1]fursov@cs.msu.ru, [2]pavel@leftsystem.ru

For a switched affine system closed by stabilizing static feedback, a method is presented for constructing a parametric family of partitions of the state space, relative to which this closed system remains stable.

Keywords: switched affine system, switching signal, stability, feedback, stabilization

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2019-1621.

REFERENCES

1. Fursov, A.S. and Krylov, P.A., On the stability of a switched affine system for a class of switching signals, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 563–571.
2. Fursov, A.S. and Krylov, P.A., On the construction of the graph of discrete states of s switched affine system, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1547–1556.

3. Krein, M. and Milman, D., On extreme points of regular convex sets, *Studia Mathematica*, 1940, no. 9, pp. 133–138.
4. Chernikov, S.N., *Lineinye neravenstva* (Linear Inequalities), Moscow: Nauka, 1968.
5. Filippov, A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential Equations with a Discontinuous Right Side), Moscow: Nauka, 1985.
6. Il'in, V.A. and Kim, G.D., *Lineinaya algebra i analiticheskaya geometriya* (Linear Algebra and Analytic Geometry), Moscow: MSU Press, 2002.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1553–1561

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.65+517.938

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ В ЗАДАЧАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ

А. Н. Канатников[1], О. С. Ткачева[2]

[1,2]Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
[2]Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва
e-mail: [1]skipper@bmstu.ru, [2]tkolga17@gmail.com

Поступила в редакцию 26.05.2024 г., после доработки 13.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

При численном решении задачи локализации основная проблема состоит в построении универсального сечения, отвечающего данной локализирующей функции. Предложены два метода решения этой проблемы, в которых использованы оценки производных первого и второго порядков. Проведён сравнительный анализ этих методов с методом, основанным на использовании всех узлов регулярной сетки. Он показал, что предложенные методы выигрывают и по вычислительной сложности, и по качеству полученной аппроксимации универсального сечения.

Ключевые слова: локализирующее множество, инвариантный компакт, универсальное сечение, аппроксимация

DOI: 10.31857/S0374064124110107, EDN: JDQQEW

ВВЕДЕНИЕ

При качественном анализе динамических систем хорошо зарекомендовал себя функциональный метод локализации, который позволяет строить в фазовом пространстве системы множество, содержащее все инвариантные компакты. Такое множество называют *локализирующим* [1, 2].

Инвариантными компактами являются многие характерные структуры фазового портрета системы: положения равновесия, предельные циклы, инвариантные торы, гомоклинические и гетероклинические траектории, аттракторы и репеллеры. Для динамической системы, описываемой автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, простейшим инвариантным компактом является ограниченная траектория с присоединёнными к ней α- и ω-предельными множествами.

Построение локализирующих множеств позволяет получить оценки колебательных и других сложных движений системы. Фактически такое множество разделяет фазовое пространство на область сложной динамики и область простой динамики [3, 4]. С помощью функционального метода локализации можно проводить анализ положений равновесия на устойчивость, важный в критическом случае [5], а также строить функцию Ляпунова для устойчивых положений равновесия [6]. Он, по существу, является топологическим и может использоваться для динамических систем самых разных типов: нестационарных систем [7], систем дискретного времени [8], систем с управлением и/или возмущением [9] разрывных систем и дифференциальных включений [10].

С помощью функционального метода локализации был исследован ряд динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые относятся к разным отраслям науки (см., например, [11–15]). Особенностью выполненных исследований является то, что все выкладки проведены чисто аналитически. В процессе построения локализирующего множества необходимо решить так называемую ассоциированную задачу на экстремум [1, 2], что не всегда можно сделать аналитически. Возникает проблема применения численных методов построения локализирующих множеств. Это особенно актуально при использовании итерационной процедуры, в которой на каждой итерации локализирующее множество уточняется применением новой локализирующей функции [1, 2]. При этом ассоциированная задача на условный экстремум с каждой итерацией усложняется.

Тему численных методов в задачах локализации затрагивает статья [16], где эти задачи исследовались при анализе асимптотической устойчивости положений равновесия.

Настоящая работа посвящена развитию и уточнению численных методов решения задач локализации. В п. 1 приведены основные сведения о функциональном методе локализации. В п. 2 описана численная процедура исследования положения равновесия на устойчивость с использованием этого метода. Пример численного построения универсального сечения с помощью трёх алгоритмов и сравнительный анализ результатов моделирования приведены в п. 3.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим динамическую систему, описываемую автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),$$

где $\dot{x} = dx/dt$, $x \in \mathbb{R}^n$; $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *инвариантным* для системы $\dot{x} = f(x)$, если вместе с любой точкой $x_0 \in K$ оно содержит и всю траекторию системы, проходящую через эту точку (под траекторией системы понимаем решение системы, определённое на максимальном интервале времени).

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Множество

$$S(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \dot{\varphi}(x) = 0\},$$

где $\dot{\varphi}(x)$ — производная функции φ в силу системы, называется *универсальным сечением*, соответствующим функции φ (это множество пересекается с любым инвариантным компактным множеством).

Для любого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим значения

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf\{\varphi(x)\colon x \in Q \cap S(\varphi)\}, \qquad \varphi_{\sup}(Q) = \sup\{\varphi(x)\colon x \in Q \cap S(\varphi)\}. \tag{1}$$

Теорема 1 [1, 2]. *Для любой функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ все инвариантные компакты, целиком содержащиеся в множестве Q, также содержатся в множестве*

$$\Omega(\varphi, Q) = \{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Множество $\Omega(\varphi, Q)$ будем называть *локализирующим множеством, соответствующим функции φ*.

Построение локализирующего множества связано с поиском значений (1), что можно сформулировать следующим образом:

$$\varphi(x) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{\varphi}(x) = 0, \quad x \in Q.$$

Однако следует уточнить, что в этой задаче в общем случае речь идёт не о поиске точек условного экстремума (соответствующую задачу обычно записывают так же), а о нахождении точных верхней и нижней граней функции на поверхности (кривой) $S(\varphi)$ с ограничением $x \in Q$.

Сформулируем простейшие свойства локализирующих множеств:

1) пересечение любого семейства локализирующих множеств является локализирующим множеством, т.е. содержит в себе все инвариантные компакты;

2) если функция $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и $\psi(x)=h(\varphi(x))$, то $S(\psi)\supset S(\varphi)$ и $\Omega(\psi,Q)\supset\Omega(\varphi,Q)$;

3) если функция φ достигает глобального (т.е. в $\mathbb{R}^n$) максимума (минимума) в точке $x_0 \in \in Q$, то неравенство $\varphi(x)\leqslant\varphi_{\sup}(Q)$ (неравенство $\varphi(x)\geqslant\varphi_{\inf}(Q)$) тривиально, т.е. выполняется на всём множестве Q.

Теорема 2 (итерационная процедура [1, 2]). *Пусть $Q\subset\mathbb{R}^n$ и $\{\varphi_n\}$ — последовательность непрерывно дифференцируемых функций, определённых на $\mathbb{R}^n$. Положим $K_0=Q$, $K_m= =\Omega(\varphi_m, K_{m-1})$, $m\in\mathbb{N}$. Тогда $K_0\supset K_1\supset\dots\supset K_m\supset\dots$ и все инвариантные компакты системы, содержащиеся в Q, содержатся в множестве $K_\infty=\bigcap_{m=1}^{\infty}K_m$.*

Можно выделить две тактики применения функционального метода локализации. При первой тактике выбирается некоторое семейство локализирующих функций (например, включением в выражение, определяющее функцию, одного или нескольких параметров). Для каждой локализирующей функции строится локализирующее множество, а затем находится пересечение всех найденных локализирующих множеств. При второй тактике используется последовательность локализирующих функций, возможно, повторяющихся. На каждом шаге итерационной процедуры учитывается уже найденное локализирующее множество.

Если при первой тактике мы имеем дело с ассоциированной задачей на условный экстремум, в которой, как правило, отсутствуют ограничения типа неравенств, то при второй тактике они появляются и их количество от шага к шагу может расти. Решать задачу на условный экстремум аналитически в первом случае проще, однако вторая тактика потенциально точнее, поскольку каждое новое локализирующее множество строится на базе уже найденного локализирующего множества.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ

При построении локализирующего множества с точки зрения численных методов ключевой является ассоциированная задача на условный экстремум. Её решение численно возможно, если множество $S(\varphi)\cap Q$ является ограниченным. В этом случае функция φ достигает своих точных верхней и нижней граней на этом множестве или на его границе. Эти значения можно вычислить приближённо, взяв значение в близкой точке. Если же множество $S(\varphi)\cap Q$ не ограничено, то точная верхняя или точная нижняя грани могут быть бесконечными или достигаться по последовательности, уходящей в бесконечность. Сам факт неограниченного возрастания значений функции или её аргументов установить численными методами не представляется возможным. Следовательно, и приближённое значение точной верхней или точной нижней грани в этой ситуации найти не удастся.

Если множество $S(\varphi)\cap Q$ ограничено, то можно попытаться представить его некоторым конечным множеством точек (назовём его *аппроксимирующим множеством* или *аппроксимацией*). Тогда задача сводится к поиску максимума или минимума функции по конечному множеству значений. Указанное аппроксимирующее множество должно быть ε-сетью множества $S(\varphi)\cap Q$, т.е. любая точка множества $S(\varphi)\cap Q$ должна быть на расстоянии не более ε от аппроксимирующего множества, что позволяет, исходя из непрерывности локализирующей функции, контролировать точность найденных экстремальных значений (1). Отметим, что при этом взаимное расположение точек представляющего множества не является существенным.

В работе [16] предложен численный алгоритм построения аппроксимирующего множества, который состоит в построении сетки точек $\{x_j\}\subset Q$, покрывающих ограниченное множество Q. Для каждой точки x_j численно решается уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$ и в итерационном процессе такого решения точка x_j выполняет роль начального значения. Для решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ выбран известный метод Левенберга–Марквардта, поскольку уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$ — пример вырожденной задачи поиска нулей функции: количество неизвестных превышает количество уравнений.

В результате решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ с различными начальными условиями x_j будет получен набор точек $\{\hat{x}_j\}$, которые можно считать лежащими на универсальном сечении (допуск определяется точностью, с которой решается уравнение). Этот набор точек рассматривается как аппроксимирующее множество для универсального сечения. Если итерационный процесс для данного узла x_j не сходится, то точка в аппроксимирующее множество не добавляется. Итерационный процесс также может вывести за пределы множества Q, и в этом случае точка в аппроксимирующее множество не добавляется. Таким образом, не каждой точке x_j сетки на Q соответствует точка $\hat{x}_j$ аппроксимирующего множества.

При численной реализации итерационной процедуры с использованием некоторого конечного циклически повторяющегося набора функций аппроксимирующие множества для универсальных сечений можно рассчитать один раз для исходного ограничивающего множества $K_0=Q$. На каждом m-м шаге итерационной процедуры достаточно выбрать одно из заранее рассчитанных аппроксимирующих множеств и отбросить точки, не попадающие в очередное множество K_{m-1}. В результате получим аппроксимирующее множество для $S(\varphi_m)\cap K_{m-1}$.

Предложенный численный метод оказался рабочим в рамках задач по анализу асимптотической устойчивости положений равновесия автономной системы [16]. Однако он не был обоснован, а его применение выявило два заметных недостатка.

Во-первых, данный метод имеет заметную вычислительную сложность. Например, если Q — единичный параллелепипед, на котором построена сетка с шагом $\delta=0.01$, то число точек x_j, для которых решается уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$, равно 100^n, где n — размерность системы. Мы имеем очень много итерационных процессов, каждый из которых требует времени. Однако из геометрических соображений ясно, что количество точек аппроксимирующего множества должно быть порядка 100^{n-1}. Видно, что вычислительная сложность описанного алгоритма избыточна. Напрашивается идея фильтра, который бы отбрасывал узлы сетки, находящиеся далеко от универсального сечения.

Во-вторых, даже в двумерном случае можно заметить, что набор точек $\{\hat{x}_j\}$, полученных в процессе решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$, неоднороден: в каких-то областях их много, а в каких-то не хватает (рис. 1). Неоднородность, с одной стороны, увеличивает объём вычислений, поскольку в аппроксимирующем множестве есть ненужные, слишком близкие друг к другу точки, а с другой — уменьшает точность, так как экстремальные значения могут быть в областях, где точек аппроксимирующего множества мало и расстояния между ними велики.

Существует, по-видимому, много способов построить аппроксимирующее множество для универсального сечения. В данной работе мы сохраняем идею описанного выше метода, но дополнительно используем фильтр, который проверяет, есть ли точки универсального сечения, достаточно близкие к очередному узлу x_j сетки на Q. Если некоторая окрестность точки x_j не пересекается с универсальным сечением, то итерационный процесс решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ не запускается и точка x_j не используется для построения аппроксимирующего множества. Это позволяет сократить количество итерационных процессов при построении аппроксимирующего множества и уменьшить количество шагов в каждом ите-

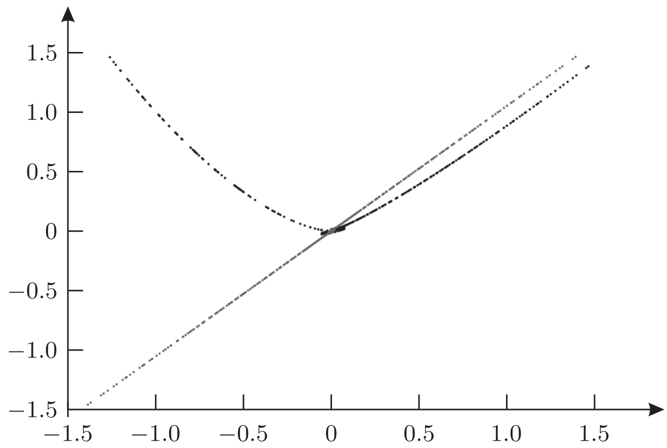

Рис. 1. Неоднородность множества точек аппроксимации универсального сечения

рационном процессе. Вряд ли существует способ оценить сверху расстояние от данной точки до множества $S(\varphi)\cap Q$. Но оценку снизу получить удаётся.

Далее для $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\text{т}}\in\mathbb{R}^n$ используем нормы

$$\|x\|_{h1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{h_i}, \quad \|x\|_{hm}=\max_{i=\overline{1,\,n}} h_i|x_i|,$$

где $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)^{\text{т}}$, $h_i>0$, $i=\overline{1,\,n}$ (h — набор шагов регулярной сетки).

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируема в выпуклой области D и $M=\sup_{x\in D}\|f'(x)\|_{hm}<+\infty$. Пусть x_0 — точка множества $\{x\in D\colon f(x)=0\}$, ближайшая к точке $x\in D$. Тогда $|f(x)|\leqslant M\|x-x_0\|_{h1}$.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,1]$ функцию $g(t)=f(x_0+t(x-x_0))$. По теореме Лагранжа $g(1)-g(0)=g'(\theta)$. Переходя к функции f, получаем, что $f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$, где $f'(x)=\operatorname{grad} f(x)$ — вектор-строка частных производных функции f. Так как $f(x_0)=0$, то

$$|f(x)|=|f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)|\leqslant\|f'(x_0+\theta(x-x_0))\|_{hm}\,\|x-x_0\|_{h1}\leqslant M\|x-x_0\|_{h1}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает, что если $|f(x)|>M\varepsilon$, то в ε-окрестности точки x по норме $\|\cdot\|_{h1}$ нет нулей функции $f(x)$. На практике в качестве M можно взять максимум функции $\|f'(x)\|_{hm}$ по всем узлам сетки. Так как функция $\|f'(x)\|_{hm}$ непрерывна, точность такого приближения контролируется шагом сетки.

На основании полученной оценки можно предложить следующий алгоритм построения аппроксимирующего множества для универсального сечения $S(\varphi)$ функции φ, который обозначим $\hat{S}(\varphi)$. Полагаем, что исходное ограничивающее множество Q является параллелепипедом и задано неравенствами $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $i=\overline{1,\,n}$, которые удобно представить в векторной форме: $a\leqslant x\leqslant b$ (векторное неравенство выполняется поэлементно). Введём также обозначения: $i=(i_1, i_2, \ldots, i_n)^{\text{т}}$ — мультииндекс; $x*y$ — поэлементное умножение вектор-столбцов x и y.

1. Построим сетку $\{x^i\}$, где $x^i=a+i*h$, h — вектор-столбец шагов сетки.
2. Вычислим $M=\max\|\operatorname{grad}\dot{\varphi}(x^i)\|_{h1}$.
3. Для каждой точки x^i вычислим значение $f=|\dot{\varphi}(x^i)|$. Если $f>M$, то точку x^i пропускаем. Иначе решаем уравнение $\dot{\varphi}(x)=0$, используя точку x^i как начальную.

4. Если итерационный метод решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$ не дал результата, т.е. решение x^* не найдено или $|f(x^*)|>\delta$ (δ — параметр алгоритма), то точку x^i пропускаем. Иначе точку x^* включаем в множество $\hat{S}(\varphi)$.

Критерий удалённости точек от универсального сечения, предложенный выше, основан на верхней границе для частных производных функции $\dot{\varphi}$ первого порядка. Можно получить более точный критерий, основанный на верхней границе частных производных второго порядка.

Рассмотрим некоторый узел x^i сетки в области и единичный шар $\|x-x^i\|_{h1}\leqslant 1$ — многогранник в $\mathbb{R}^n$, вершинами которого являются точки $x^i\pm h_je_j$, $j=\overline{1,\,n}$, где e_j — j-й вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Если непрерывная функция f в вершинах многогранника принимает значения разных знаков, то внутри многогранника или на его границе есть нули функции f. Таким образом, условие одинаковых знаков в вершинах многогранника является необходимым условием отсутствия нулей функции f в многограннике.

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в Q и

$$M_2=\sup_{x\in Q}\|f''(x)\|_{hm}=\sup_{x\in Q}\max_{i,j}\Big|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j\Big|,$$

где $f''(x)$ — матрица Гессе функции f в точке x.

Теорема 4. *Если функция f в точке x^i и в вершинах многогранника $\|x-x^i\|_{h1}\leqslant 1$ принимает значения одного знака и $|f(x^i)|>M_2/2$, то в указанном многограннике нет нулей функции f.*

Доказательство. Пусть для определённости все значения функции f в точке x^i и в вершинах многогранника положительны (иначе можно рассмотреть функцию $-f$). Предположим, что в многограннике есть точки с отрицательным или нулевым значением. Тогда функция внутри многогранника или на его границе достигает наименьшего значения в некоторой точке x^*. Если x^* — внутренняя точка многогранника, то, полагая $\Delta x=x-x^*$, запишем в точке x^* формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)\Delta x+\frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x=f(x^*)+\frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x$$

(так как $f'(x^*)=0$ в силу того, что x^* — точка локального минимума). Имеем

$$|\Delta x^{\mathrm{T}}f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x|\leqslant\|\Delta x\|_{h1}\|f''(x^*+\theta\Delta x)\Delta x\|_{hm}\leqslant\|f''(x^*+\theta\Delta x)\|_{hm}\|\Delta x\|_{h1}^2\leqslant M_2\|\Delta x\|_{h1}^2.$$

Следовательно, $|f(x)-f(x_*)|\leqslant 0.5M_2\|\Delta x\|_{h1}^2$, откуда $|f(x)|\leqslant 0.5M_2\|\Delta x\|_{h1}^2$. Выбрав в качестве x вершину многогранника, ближайшую к точке x^*, приходим к нужному утверждению.

Если минимум достигается на какой-то грани, то рассматриваем функцию только на этой грани и повторяем рассуждения. Так как частные производные сужения функции на грань выражаются в виде выпуклых комбинаций через частные производные функции f, получаем ту же оценку. Теорема доказана.

3. СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ ВАРИАНТОВ АЛГОРИТМА

Для анализа вариантов алгоритма построения аппроксимирующего множества для универсального сечения рассмотрим систему из работы [16]:

$$\dot{x}=-(2x-y)(3x-y)(4x-y),\quad \dot{y}=(x-3y)(x-4y)(x-5y).$$

Эта система имеет одно положение равновесия $E=(0,\,0)$, окрестность которого и рассмотрим. В качестве исходного ограничивающего множества Q выберем прямоугольник

$[-1.5, 1.5]\times[-1.5, 1.5]$. Возьмём локализирующие функции $\varphi_1(x,y)=y-x^2$, $\varphi_2(x,y)=y-5.5x$. Для численного построения универсального сечения в Q выберем регулярную сетку с 51 узлом по каждой оси, т.е. всего 2601 узел. Для оценки качества полученного приближения универсального сечения рассчитаем минимальное $\rho_{\min}$ и максимальное $\rho_{\max}$ расстояния между ближайшими точками, а именно, если $\{x_j\}$ — последовательность узлов сетки, то

$$\rho_{\min}=\min_i \min_j |x_j-x_i|, \qquad \rho_{\max}=\max_i \min_j |x_j-x_i|,$$

где $|x|$ — длина (евклидова норма) вектора x.

Результаты расчётов по трём вариантам алгоритма приведены в таблице: алгоритм 0 — без использования фильтра узлов сетки (метод из [16]); алгоритм 1 — с фильтром на основе частных производных первого порядка функции $\dot\varphi$ (в соответствии с теоремой 3, фильтр 1-го порядка); алгоритм 2 — с фильтром на основе частных производных второго порядка (в соответствии с теоремой 4, фильтр 2-го порядка). Видно, что и в случае фильтра 1-го порядка, и в случае фильтра 2-го порядка отбрасывается заметное число узлов, что приводит к существенному ускорению расчёта, но фильтр 2-го порядка более эффективен.

Таблица. Сравнение результатов расчёта по трём вариантам алгоритма при числе узлов 2601

Вариант алгоритма	Локализирующая функция	Число отфильтрованных узлов	$\rho_{\min}$	$\rho_{\max}$	Время, с
Алгоритм 0	$y-x^2$	0	$2.6\cdot10^{-7}$	0.014	2.85
	$y-5.5x$	0	$1.6\cdot10^{-6}$	0.015	
Алгоритм 1	$y-x^2$	979	$2.5\cdot10^{-7}$	0.028	1.55
	$y-5.5x$	1254	$1.5\cdot10^{-6}$	0.015	
Алгоритм 2	$y-x^2$	2084	$3.2\cdot10^{-6}$	0.053	0.41
	$y-5.5x$	2322	$0.1\cdot10^{-4}$	0.043	

Следует отметить, что оба фильтра отрабатывают не в полной мере: итерационный процесс решения уравнения запускался для многих узлов, около которых нет точек универсального сечения. Связано это с тем, что оценки, полученные в теоремах 3 и 4, основаны на оценке производных по всей области, а такая оценка в одних частях области оказывается не столь точной, как в других. На рис. 2 показаны результаты работы фильтров для первой локализирующей функции: узлы, в которых запускался итерационный процесс решения

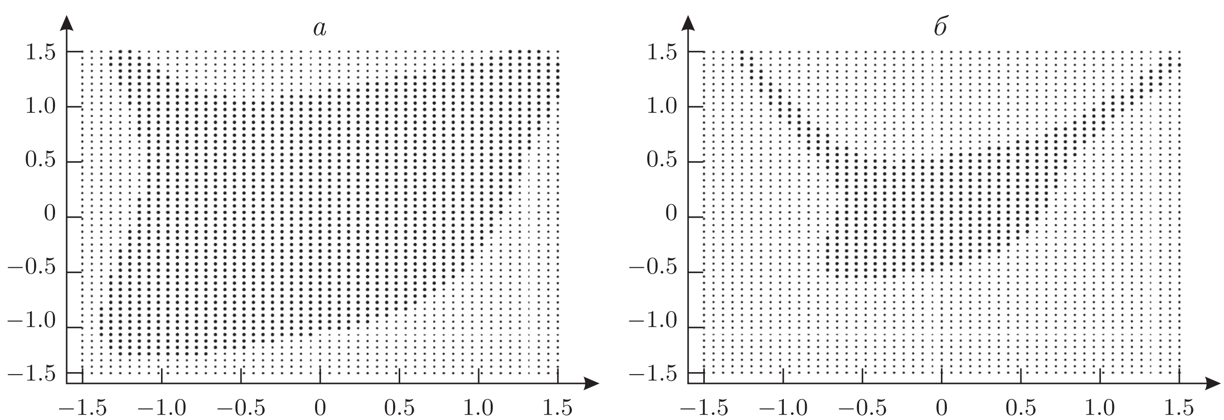

Рис. 2. Результаты фильтрации с помощью фильтров 1-го порядка (*а*) и 2-го порядка (*б*)

уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$, выделены бо́льшими точками. Видно, что "паразитные" узлы сосредоточены в окрестности нуля, т.е. там, где производные анализируемой локализирующей функции по абсолютной величине невелики.

Описанная особенность заметно сказывается на эффективности алгоритма, однако имеется ресурс для усиления. Во-первых, в теоремах 3 и 4 можно использовать оценки производных не по всей области, а по некоторой окрестности текущего узла (например, по всем узлам, отстоящим от текущего не далее чем на $2h$). Во-вторых, даже начав итерационный процесс решения уравнения $\dot{\varphi}(x)=0$, можно его прервать, если очередной член итерационной последовательности удалился от текущего узла слишком далеко.

"Паразитные" узлы вызывают ещё одну проблему. В полученной аппроксимации универсального сечения слишком много точек и находятся они слишком близко друг к другу (см. таблицу), хотя было бы разумно, чтобы расстояния между соседними точками были того же порядка, что и шаг сетки. Эту проблему можно решить, организовав ещё один фильтр, который проверяет пары близких точек и, если расстояние между ними меньше некоторого предела, удаляет одну из них. Расчёты показывают, что подобный фильтр достаточно эффективен и заметно выравнивает расстояния между близкими точками.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крищенко, А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1597–1604.
2. Канатников, А.Н. Инвариантные компакты динамических систем / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 231 с.
3. Канатников, А.Н. Локализирующие множества и поведение траекторий / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2016. — Т. 470, № 2. — С. 133–136.
4. Крищенко, А.П. Локализация простой и сложной динамики в нелинейных системах / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1440–1447.
5. Крищенко, А.П. Анализ асимптотической устойчивости автономных систем методом локализации инвариантных компактов / А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2016. — Т. 469, № 1. — С. 17–20.
6. Крищенко, А.П. Построение функций Ляпунова методом локализации инвариантных компактов / А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1447–1452.
7. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов неавтономных систем / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 47–53.
8. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов дискретных систем / А.Н. Канатников, С.К. Коровин, А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2010. — Т. 431, № 3. — С. 323–325.
9. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов непрерывных систем с возмущением / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Докл. РАН. — 2012. — Т. 446, № 1. — С. 30–32.
10. Канатников, А.Н. Локализация инвариантных компактов в дифференциальных включениях / А.Н. Канатников // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1433–1439.
11. Крищенко, А.П. Бифуркация Хопфа в системе хищник–жертва с инфекцией / А.П. Крищенко, О.А. Поддерегин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1566–1570.
12. Coria, L.N. Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor system / L.N. Coria, K.E. Starkov // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2009. — V. 14, № 11. — P. 3879–3888.
13. Starkov, K.E. Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems / K.E. Starkov // Phys. Lett. A. — 2011. — V. 375, № 36. — P. 3184–3187.
14. Starkov, K.E. Eradication conditions of infected cell populations in the 7-order HIV model with viral mutations and related results / K.E. Starkov, A.N. Kanatnikov // Mathematics. — 2021. — V. 9, № 16. — Art. 1862.

15. Starkov, K.E. On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model / K.E. Starkov, A.P. Krishchenko // Mathematics. — 2024. — V. 12, № 6. — Art. 843.
16. Воркель, А.А. Численное исследование асимптотической устойчивости положений равновесия / А.А. Воркель, А.П. Крищенко // Математика и мат. моделирование. — 2017. — № 3. — С. 44–63.

ON NUMERICAL METHODS IN LOCALIZATION PROBLEMS

© 2024 / **A. N. Kanatnikov[1], O. S. Tkacheva[2]**

[1,2]Bauman Moscow State Technical University, Russia
[2]V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia
e-mail: [1]skipper@bmstu.ru, [2]tkolga17@gmail.com

When solving localization problem numerically, the main problem is to construct a universal cross section corresponding to a given localizing function. The paper proposes two methods for solving this problem, which use estimates of the first and second order derivatives. A comparative analysis of these methods with a method based on the use of all nodes of a regular grid was carried out. A comparative analysis shows that the proposed methods are superior both in terms of computational complexity and in the quality of the resulting approximation of the universal section.

Keywords: localizing set, invariant compact set, universal cross section, approximation

REFERENCES

1. Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of dynamical systems, *Differ. Equat.*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676.
2. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., *Invariantnye kompakty dinamicheskikh sistem* (Invariant Compact Sets of Dynamical Systems), Moscow: Izd. MGTU im. N.E. Baumana, 2011.
3. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., Localizing sets and trajectory behavior, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 2, pp. 506–509.
4. Krishchenko, A.P., Localization of simple and complex dynamics in nonlinear systems, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1432–1439.
5. Krishchenko, A.P., Asymptotic stability analysis of autonomous systems by applying the method of localization of compact invariant sets, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 1, pp. 365–368.
6. Krishchenko, A.P., Construction of Lyapunov functions by the method of localization of invariant compact sets, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1413–1418.
7. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of nonautonomous systems, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 46–52.
8. Kanatnikov, A.N., Korovin, S.K., and Krishchenko, A.P., Localization of invariant compact sets of discrete systems, *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 326–328.
9. Kanatnikov, A.N. and Krishchenko, A.P., Localization of compact invariant sets of continuous-time systems with disturbance, *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 2, pp. 720–722.
10. Kanatnikov, A.N., Localization of invariant compact sets in differential inclusions, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1425–1431.
11. Krishchenko, A.P. and Podderegin, O.A., Hopf bifurcation in a predator–prey system with infection, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 11, pp. 1573–1578.
12. Coria, L.N. and Starkov, K.E., Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor system, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, no. 11, pp. 3879–3888.
13. Starkov, K.E., Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A.*, 2011, vol. 375, no. 36, pp. 3184–3187.
14. Starkov, K.E. and Kanatnikov, A.N., Eradication conditions of infected cell populations in the 7-order HIV model with viral mutations and related results, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 16, art. 1862.
15. Starkov, K.E. and Krishchenko, A.P., On the dynamics of immune-tumor conjugates in a four-dimensional tumor model, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 6, art. 843.
16. Vorkel', A.A. and Krishchenko, A.P., Numerical analysis of asymptotic stability of equilibrium points, *Mathematics Math. Model.*, 2017, no. 3, pp. 44–63.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.32

КОНЕЧНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ СТРЕМЯЩЕЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ К СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ

А. Б. Плаченов[1], А. П. Киселев[2]

[1]*МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва*
[2]*Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН*
[2]*Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург*
e-mail: [1]a_plachenov@mail.ru, [2]aleksei.kiselev@gmail.com

Поступила в редакцию 26.08.2024 г., после доработки 26.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Приведено решение волнового уравнения с тремя пространственными переменными, которое имеет конечный интеграл энергии, однако не стремится на бесконечности к сферической волне.

Ключевые слова: волновое уравнение, интеграл энергии, сферическая волна

DOI: 10.31857/S0374064124110113, EDN: JDQMIZ

Естественно ожидать, что решение волнового уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0, \quad c=\mathrm{const}>0, \tag{1}$$

достаточно быстро убывающее в некоторый начальный момент $t=t_0$, имеет для бóльших времён и расстояний асимптотику в виде расходящейся сферической волны

$$u\approx\frac{F(R-ct,\mathbf{n})}{R}, \quad R\to\infty, \quad t\to\infty. \tag{2}$$

Здесь $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — длина вектора $\mathbf{R}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, а $\mathbf{n}=\mathbf{R}/R$ — единичный вектор направления, в котором точка (x,y,z) удаляется на бесконечность.

Функция F, которую называют *диаграммой*, определяется как предел при согласованном росте R и t:

$$F(s,\mathbf{n})=\lim_{t\to\infty}[ctu(\mathbf{R},t)]\big|_{R=s+ct}. \tag{3}$$

Равномерной сходимости относительно параметра $s\in\mathbb{R}$ не предполагается.

Решение $u=u(\mathbf{R},t)$ удобно характеризовать начальными данными Коши $\varphi=\varphi(\mathbf{R})$ и $\psi=\psi(\mathbf{R})$:

$$u|_{t=t_0}=\varphi, \quad u_t|_{t=t_0}=\psi$$

для произвольно фиксированного t_0.

Существование предела (3) установлено для гладких быстро убывающих данных [1, 2] для случая, когда данные являются обобщёнными функциями с компакным носителем [3], и, наконец, для гладких данных в предположении, что ϕ, ψ и $|\nabla\psi|$ имеют при $R\to\infty$ оценку $O(R^{-3})$ [4]. Отметим, что в работе [1] для гладких быстро убывающих данных установлено, что если отношение R/t имеет предел, отличный от $\pm c$, то предел (3) равен нулю.

Функция (3) играет важную роль в разных разделах математической физики (см., например, [1–7]), причём особенно интересны решения с конечной энергией:

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+\frac{1}{c^2}\,|u_t|^2\right)dx\,dy\,dz<\infty.$$

Приведём простой пример решения уравнения (1) с конечной энергией, для которого конечного предела (3) не существует, и, следовательно, это решение не стремится на бесконечности к сферической волне.

Рассмотрим функцию

$$V(\mathbf{R},t)=\frac{1}{c^2t_*^2-R^2}, \tag{4}$$

где $t_*=t+i\tau$ и для определённости $\tau>0$. Выражение (4) является частным случаем сплэш импульса [8], широко используемого для моделирования коротких оптических импульсов. Легко убедиться (непосредственной подстановкой), что функция (4) удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$.

Первообразная функции (4) по t

$$u(\mathbf{R},t)=\int\limits_{-\infty}^{t}V(\mathbf{R},t')\,dt'=\begin{cases}\dfrac{1}{2cR}\ln\dfrac{ct_*-R}{ct_*+R}, & R\neq 0,\\ -\dfrac{1}{c^2t_*}, & R=0,\end{cases} \tag{5}$$

очевидно, также удовлетворяет волновому уравнению (1).

Утверждение 1. *Для функции (5) передел (3) бесконечен.*

В самом деле, легко видеть, что при $R=ct+s$ (т.е. $\mathbf{R}=(ct+s)\mathbf{n}$)

$$u(\mathbf{R},t)=\frac{1}{2c(ct+s)}\ln\frac{ic\tau-s}{2ct+ic\tau+s}=-\frac{\ln(ct)}{2c^2t}+O\left(\frac{1}{t}\right),$$

тогда в (3) получаем

$$F(s,\mathbf{n})=\lim_{t\to\infty}[ctu((ct+s)\mathbf{n},t)]=-\frac{1}{2c}\lim_{t\to\infty}\ln(ct)=-\infty.$$

Утверждение 2. *Функция (5) имеет конечную энергию.*

Действительно, $u_t=V=O(R^{-2})$ при $R\to\infty$ и, следовательно, $|u_t|^2$ суммируема. Аналогичные элементарные выкладки показывают, что производные от u функции по пространственным переменным имеют порядок $O(R^{-2}\ln R)$, откуда вытекает суммируемость $|\nabla u|^2$.

Таким образом, показано, что решение волнового уравнения в важном классе функций с конечной энергией может не иметь асимптотики (3). Вопрос о необходимых условиях существования такой асимптотики остаётся открытым.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Санкт-Петербургского международного математического института имени Леонарда Эйлера по соглашению № 075-15-2022-289.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благовещенский, А.С. О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения / А.С. Благовещенский // Тр. V Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. — Л. : Наука, 1971. — С. 29–35.
2. Moses, R.N. Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations / R.N. Moses, H.E. Prosser // SIAM J. Appl. — 1990. — V. 50, № 5. — P. 1325–1340.
3. Благовещенский, А.С. О поведении на бесконечности решения обобщённой задачи Коши для волнового уравнения / А.С. Благовещенский, А.А. Новицкая // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — Т. 285. — С. 33–38.
4. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения. Обзор / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. — 2007. — Т. 102, № 4. — С. 697–717.
5. Friedlander, F.G. On the radiation field of pluse solution of the wave equation. II / F.G. Friedlander // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci. — 1964. — V. 279, № 1378. — P. 386–394.
6. Плаченов, А.Б. Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях / А.Б. Плаченов // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2020. — Т. 493. — С. 269–287.
7. Плаченов, А.Б. Однонаправленные импульсы: относительно неискажающиеся квазисферические волны, интегралы Фурье–Бесселя и разложения по плоским волнам / А.Б. Плаченов, А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. — 2024. — Т. 132, № 4. — С. 429–433.
8. Ziolkowski, R.W. Exact solutions of the wave equation with complex source locations / R.W. Ziolkowsky // J. Math. Phys. — 1985. — V. 26, № 4. — P. 861–863.

FINITE-ENERGY SOLUTION OF THE WAVE EQUATION THAT DOES NOT TEND TO A SPHERICAL WAVE AT INFINITY

© 2024 / A. B. Plachenov[1], A. P. Kiselev[2]

[1]MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia
[2]St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of RAS, St. Petersburg, Russia
[2]Institute of Mechanical Engineering of RAS, St. Petersburg, Russia
e-mail: [1]a_plachenov@mail.ru, [2]aleksei.kiselev@gmail.com

A solution of the wave equation with three spatial variables is given, which has a finite energy integral, but does not tend to a spherical wave at infinity.

Keywords: wave equation, energy integral, spherical wave

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Saint Peterburg International Mathematical Institute named after Leonhard Euler under agreement no. 075-15-2022-289.

REFERENCES

1. Blagoveshchenskii, A.S. On some new correct problems for the wave equation, in: *Proc. 5th All-Union Symp. on Wave Diffr. Propag.*, Leningrad: Nauka, 1971, pp. 29–35.
2. Moses, R.N. and Prosser, H.E. Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations, *SIAM J. Appl.*, 1990, vol. 50, no. 5, pp. 1325–1340.

3. Blagoveshchenskii, A.S. and Novitskaya, A.A., On behavior of the solution of a generalized Cauchy problem for the wave equation at infinity, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2004, vol. 122, no. 5, pp. 3470–3472.
4. Kiselev, A.P., Localized light waves: paraxial and exact solutions of the wave equation (a review), *Optics and Spectroscopy*, 2007, vol. 102, no. 4, pp. 603–622.
5. Friedlander, F.G., On the radiation field of pluse solution of the wave equation. II, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci.*, 1964, vol. 279, no. 1378, pp. 386–394.
6. Plachenov, A.B., Energy of waves (acoustic, electromagnetic, elastic) via their far-field asymptotics at large time, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2023, vol. 277, no. 4, pp. 653–665.
7. Plachenov, A.B. and Kiselev, A.P., Unidirectional pulses: relatively undistorted quasi-spherical waves, Fourier–Bessel integrals, and plane-waves decompositions, *Optics and Spectroscopy*, 2024, vol. 132, no. 4, pp. 394–398.
8. Ziolkowski, R.W., Exact solutions of the wave equation with complex source locations, *J. Math. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 4, pp. 861–863.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 11, с. 1566–1584

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*

Ниже публикуются аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференциальные уравнения”. 2024. Т. 60. № 6).**

А. Н. Ветохин (Москва) “К задаче Миллионщикова о классе Бэра миноранты старшего показателя Ляпунова” (27 сентября 2024 г.).

Для любых $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ в пространстве линейных систем вида

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0;+\infty),$$

с непрерывными ограниченными матрицами A и показателями Ляпунова $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$ максимальная полунепрерывная снизу миноранта k-го показателя Ляпунова задаётся формулой

$$\underline{\lambda}_k(A)\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}\inf_{\|B\|<\varepsilon}\lambda_k(A+B),\quad \|B\|\equiv\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|B(t)\|.$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и непрерывному ограниченному отображению

$$A\colon \mathcal{M}\times\mathbb{R}_+\to\operatorname{End}\mathbb{R}^n \qquad (1)$$

построим функцию

$$\mu\mapsto\underline{\lambda}_k(A(\mu,\cdot)). \qquad (2)$$

В.М. Миллионщиков поставил вопрос [1] о точном классе Бэра функции (2). Он же установил, что при любом $n\in\mathbb{N}$ миноранта младшего показателя Ляпунова совпадает с нижним центральным показателем [2], принадлежащим 3-му классу Бэра. В работе [3] было доказано, что при $n=3$ функции $\underline{\lambda}_2$ и $\underline{\lambda}_3$ принадлежат 3-му классу Бэра. Оказалось [4], что аналогичный результат справедлив и для произвольных $n\geqslant 3$ и $k\in\{2,\ldots,n\}$.

В статье [5] в случае когда $\mathcal{M}$ является множеством $\mathcal{B}$ иррациональных чисел с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, при $n\geqslant 2$ и $k\in\{1,\ldots,n\}$ установлено существование отображения (1), для которого функция (2) не принадлежит 3-му классу Бэра. В [6] для любых $n\geqslant 2$, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ и метрического пространства $\mathcal{M}$, содержащего множество типа $F_{\sigma\delta}$, но не типа $G_{\delta\sigma}$, построено такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$. Этот результат дополняет

Теорема 1. *Для каждого $n\geqslant 2$, $k=n$ и метрического пространства $\mathcal{M}$, содержащего множество типа $F_{\sigma\delta}$, но не типа $G_{\delta\sigma}$, существует такое отображение (1), что функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}$.*

---

* Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара — И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара — В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

** Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Дополним теорему 1 конструктивными примерами метрических пространств $\mathcal{M}$ и семейств неавтономных динамических систем, для которых справедливо её заключение. Пусть $\mathcal{M}\subset[0;1]$ и $n\geqslant 2$. Тогда по произвольной непрерывной функции $\alpha\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ построим последовательность функций

$$\alpha_m(\mu)=\max{}^{-1}\big\{1/m,\ \alpha^{\circ[\log_2(m+1)]}(\mu)\big\},\quad m=1,2,\ldots$$

(где $[\cdot]$ — целая часть числа), и систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\mathrm{diag}(a(\mu,t),-a(\mu,t),0,\ldots,0)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$a(\mu,t)\equiv\begin{cases}0, & \tau_m\leqslant t<t_m,\\ \sin\dfrac{\pi(t-t_m)}{\tau_{m+1}-t_m}, & t_m\leqslant t<\tau_{m+1},\end{cases}$$

$$t_m\equiv\sum_{i=1}^{m}(i^2+i),\quad \tau_m\equiv t_m-\alpha_m(\mu),\quad m\in\mathbb{N}.$$

На основании результатов [7] получена

Теорема 2 [5]. *Если $k=n$, пространство $\mathcal{M}$ — множество иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$ и $\alpha(\mu)=\{1/\mu\}$ (где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа), то для системы (3) функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Из результатов диссертации [8, с. 114] выводятся

Теорема 3. *Если $k=n$, $\mathcal{M}=[0,1]$ и*

$$\alpha(\mu)=\begin{cases}0, & \mu=0,\\ \dfrac{\mu}{2}\left(1-\sin\dfrac{1}{\mu}\right), & 0<\mu\leqslant 1,\end{cases}$$

то для системы (3) функция (2) принадлежит 2-му, но не 1-му классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Теорема 4. *Если $k=n$, $\mathcal{M}=[0,1]$ и*

$$\alpha(\mu)=\begin{cases}0, & \mu=0,\\ \mu\left(1-\sin\dfrac{1}{\mu}\right), & 0<\mu\leqslant 1,\end{cases}$$

то для системы (3) функция (2) не принадлежит 2-му классу Бэра на $\mathcal{M}$.

Литература. 1. Миллионщиков, В.М. Задачи о минорантах показателей Ляпунова / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 11. — С. 2014–2015. **2.** Миллионщиков, В.М. Доказательство достижимости центральных показателей / В.М. Миллионщиков // Сиб. мат. журн. — 1969. — Т. 10, № 1. — С. 99–104. **3.** Сергеев, И.Н. К задаче о классе Бэра минорант показателей Ляпунова / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 9. — С. 1600–1601. **4.** Быков, В.В. О классе Бэра минорант показателей Ляпунова / В.В. Быков, Е.Е. Салов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 1. — С. 33–40. **5.** Ветохин, А.Н. Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова / А.Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 34, № 10. — С. 1313–1317. **6.** Ветохин, А.Н. К задаче Миллионщикова о классе Бэра минорант показателей Ляпунова спустя 30 лет / А.Н. Ветохин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 11. — С. 1576–1577. **7.** Baire, R. Sur la representation des functions discontinues / R. Baire // Acta. Math. — 1906. — V. 30. — P. 1–48. **8.** Шарковский, А.Н. Аттракторы траекторий и их бассейны. Киев : Наукова думка, 2013. — 319 с.

А. Х. Сташ (Майкоп) “Об отсутствии непосредственной зависимости между спектрами показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы её первого приближения” (4 октября 2024 г.).

Для заданного натурального $n>1$ и заданной открытой окрестности G нуля в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря, нелинейную систему вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in G,\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G),\tag{1}$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её первого приближения

$$\dot{x}=A(t)x\equiv f_{\prime}(t,x),\quad A(t)=f'_x(t,0),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad x\in\mathbb{R}^n,\tag{2}$$

с условием $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|f(t,x)-f_{\prime}(t,x)|=o(x)$ при $x\to 0$.

Через $x_f(\cdot,x_0)$ будем обозначать *непродолжаемое* решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0)=x_0$, а через G_* и G_{γ_1,γ_2} — множества всех значений $x_0\in G$, удовлетворяющих соответственно неравенствам $x_0\neq 0$ и $\gamma_1<|x_0|<\gamma_2$. Для каждого из определяемых ниже показателей колеблемости $\varkappa=\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet},\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet},\hat{\nu}^{\alpha}_{\circ},\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}$ при $\alpha=-,\sim,0,+,*$ введём обозначение $\varkappa(f,M)\equiv\{\varkappa(x_f(\cdot,x_0))\colon x_0\in M\}$.

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t>0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–4]. Для вектора $m\in\mathbb{R}^n_*\equiv\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и вектор-функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$ обозначим:

$\nu^-(x,m,t)$ — число точек *строгой смены знака* функции $\langle x,m\rangle$ (скалярного произведения) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^{\sim}(x,m,t)$ — число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(x,m,t)$ — число *нулей* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(x,m,t)$ — число *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(x,m,t)$ — число *гиперкорней* функции $\langle x,m\rangle$ на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нестрогих знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n_*)$ зададим соответственно при $\alpha=-,\sim,0,+,*$ формулами

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\quad\left(\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(x)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\right),$$

$$\hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x)\equiv\varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\quad\left(\check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(x)\equiv\varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(x,m,t)\right)$$

и условимся о следующем:

— если одноимённые верхний и нижний показатели колеблемости имеют одинаковое значение, то будем называть его *точным*, записывая без знаков ˆ и ˇ;

— если одноимённые слабый и сильный показатели колеблемости имеют одинаковое значение, то будем называть его *абсолютным*, записывая без знаков $\circ$ и $\bullet$.

Замечание. Вычисление любого показателя колеблемости непродолжаемого решения нелинейной системы возможно только в случае, когда это решение определено на всей полуоси.

В 1930 г. О. Перрон [5] открыл эффект инверсии знака показателей Ляпунова для решений специальных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений и их первых приближений: им была построена нелинейная система, у которой почти все решения имели положительные показатели, а у системы её первого приближения — отрицательные. В 2003 г. [6] был открыт антиперроновский эффект смены знака показателей: решение системы первого приближения имело положительный показатель, а решение исходной системы с теми же начальными данными — отрицательный. Различные модификации контрпримера О. Перрона изучались в работах [7–10], в частности, в [8] доказано существование двумерной нелинейной дифференциальной системы с континуальным спектром и линейным приближением, имеющим произвольно заданные отрицательные показатели.

В связи с этим возникает естественный вопрос: насколько произвольными могут быть спектры показателей колеблемости нелинейной системы при фиксированном спектре системы её первого приближения? Ответ на него уже в двумерном случае дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого непустого подмножества $X\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$ существуют системы (1) и (2) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, удовлетворяющие условиям*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|f(t,x)-f_\prime(t,x)|\leqslant|x|^2,\quad x\in G\equiv\mathbb{R}^2, \tag{3}$$

$$\nu^\alpha(f_\prime,G_*)=\begin{cases}\{0\}, & \alpha=-,\sim,\\ \{1\}, & \alpha=0,+,*,\end{cases}\qquad \nu^\alpha(f,G_*)=\begin{cases}X\cup\{0\}, & \alpha=-,\sim,\\ X\cup\{1\}, & \alpha=0,+,*,\end{cases} \tag{4}$$

причём при каждых $\alpha=-,\sim,0,+,*$ и $\varepsilon>0$ множества $\nu^\alpha(f,G_{0,\varepsilon})$ и $\nu^\alpha(f,G_*)$ совпадают.

Теорема 2. *Для любого $X=(a,b)\subset[0,1]$ или $X=[0,1]$ существуют системы (1) и (2) с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, удовлетворяющие условиям (3) и (4), причём при каждых $\alpha=-,\sim,0,+,*$ и $\varepsilon>0$ множество $\nu^\alpha(f,G_{0,\varepsilon})$ имеет мощность континуума.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-03-2024-074/5).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2006. — № 25. — С. 249–294. **2.** Сергеев, И.Н. Определение полных частот решений линейной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 908. **3.** Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138. **4.** Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2016. — № 31. — С. 177–219. **5.** Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Zeitschr. — 1930. — Bd. 32, Hf. 1. — S. 703–728. **6.** Леонов, Г.А. Об одной модификации контрпримера Перрона / Г.А. Леонов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1566–1567. **7.** Ильин, А.В. Бесконечный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей дифференциальных систем / А.В. Ильин, Н.А. Изобов // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 2. — С. 147–151. **8.** Изобов, Н.А. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1427–1439. **9.** Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472. **10.** Барабанов, Е.А. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, экспоненциально убывающих к нулю на бесконечности / Е.А. Барабанов, В.В. Быков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 31–43.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы”' (11 октября 2024 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (при $n>1$) с мерой Лебега mes рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad f(t,0)=0,\quad 0,x\in G,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G). \tag{1}$$

Через $x_f(\cdot,x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0)=x_0$, а через B_δ — множество начальных значений x_0, удовлетворяющих неравенствам $0<|x_0|<\delta$.

Определение 1 [1]. Каждому значению $t\in\mathbb{R}_+$ и непрерывно-дифференцируемой функции $u\colon[0,t]\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ поставим в соответствие значения *функционалов* $\mathrm{K}=\mathrm{P},\mathrm{N},\Theta$ *блуждаемости, колеблемости* и *вращаемости* (*неопределённые*, если функция u определена не на всём отрезке $[0,t]$):

а) $\mathrm{K}(t,u)=\mathrm{P}(t,u)$ — *вариация следа* функции u на единичной сфере за время t, задаваемая формулой

$$\mathrm{P}(t,u)\equiv\int\limits_0^t|(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}|\,d\tau;$$

б) $\mathrm{K}(t,u)=\mathrm{N}(t,u)$ — *нормированное* (т. е. умноженное на π) *число нулей* на промежутке $(0,t]$ функции P_1u, где P_1 — ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$, причём если хотя бы один из нулей $\tau\in[0,t]$ *кратен* (т. е. является нулём ещё и производной $(P_1u)^{\cdot}$), то считаем выражение $\mathrm{N}(t,u)$ *неопределённым*;

в) $\mathrm{K}(t,u)=\Theta(t,u)\equiv|\varphi(t,P_2u)|$ — модуль *ориентированного угла* $\varphi(t,P_2u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0,P_2u)=0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, где P_2 — ортогональный проектор на фиксированную плоскость в $\mathbb{R}^n$, причём если $P_2u(\tau)=0$ хотя бы при одном $\tau\in[0,t]$, то считаем выражение $\Theta(t,u)$ *неопределённым.*

С помощью этих функционалов определяются показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости как линейных [1], так и нелинейных [2] дифференциальных систем. Известны и другие функционалы, отвечающие за аналогичные свойства решений, не связанные с их нормой [1, 3, 4], например, за *неориентированную, частотную* или *плоскую вращаемость*, а также за *поворачиваемость* данного *ранга.*

Определение 2. Для системы (1):

а) *мерой блуждаемости, колеблемости* или *вращаемости* назовём соответственно такое наибольшее число

$$\mu_\varkappa(f)\in[0,1],\quad \varkappa=\rho,\nu,\theta,$$

что для каждого $\mu<\mu_\varkappa(f)$ при некоторых $\varepsilon>0$ и $T\in\mathbb{R}_+$ имеют место оценки снизу для *шаровой меры* соответственно *блуждаемости, колеблемости* или *вращаемости*

$$\mu_\varkappa(f,\varepsilon,t)\equiv\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)}{\operatorname{mes}B_\delta}>\mu,\quad t>T,$$

где $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)$ — множество всех значений $x_0\in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему условию

$$\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t)>\varepsilon t,\quad \mathrm{K}=\mathrm{P},\mathrm{N},\Theta; \tag{2}$$

б) *мерой неблуждаемости, неколеблемости* или *невращаемости* назовём соответственно такое наибольшее число

$$\mu_{\bar\varkappa}(f)\in[0,1],\quad \varkappa=\rho,\nu,\theta,$$

что для каждых $\mu<\mu_{\bar\varkappa}(f)$ и $\varepsilon>0$ при некотором $T\in\mathbb{R}_+$ имеют место оценки снизу для *шаровой меры* соответственно *неблуждаемости, неколеблемости* или *невращаемости*

$$\mu_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t)\equiv\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}\mathrm{M}_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)}{\operatorname{mes}B_\delta}>\mu,\quad t>T,$$

где $\mathrm{M}_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)$ — множество всех значений $x_0\in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему (противоположному (2)) условию

$$\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t)\leqslant\varepsilon t,\quad \mathrm{K}=\mathrm{P},\mathrm{N},\Theta.$$

Корректность введённых в определении 1 понятий обосновывает

Теорема 1. *Для любой системы (1) и любых* $\mathrm{K}=\mathrm{P},\mathrm{N},\Theta$, $t>0$, $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ *и ненулевого* $x_0\in G$ *величина* $\mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t)$ *если определена, то конечна, а при любых* $\varkappa=\rho,\nu,\theta$, $\varepsilon>0$ *и всех достаточно малых* $\delta>0$ *множества* $M_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)$, $M_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)$ *измеримы по Лебегу и удовлетворяют равенствам*

$$M_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)\cup M_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)=B_\delta,\quad \operatorname{mes}M_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)+\operatorname{mes}M_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)=\operatorname{mes}B_\delta.$$

Конкретные формулы для всех мер свойств из определения 2 даёт

Теорема 2. *Меры блуждаемости, колеблемости и вращаемости любой системы (1) задаются соответственно формулами*

$$\mu_\varkappa(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{t\to+\infty}\mu_\varkappa(f,\varepsilon,t),\quad \varkappa=\rho,\nu,\theta, \tag{3}$$

а меры неблуждаемости, неколеблемости и невращаемости —

$$\mu_{\bar\varkappa}(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{t\to+\infty}\mu_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t),\quad \varkappa=\rho,\nu,\theta, \tag{4}$$

причём в формулах (3) предел при $\varepsilon\to+0$ *можно заменить точной верхней гранью по* $\varepsilon>0$, *а в формулах (4) — аналогичной нижней.*

Для мер из определения 2 имеют место естественные неравенства и даже отдельные равенства (тесно связанные с результатами работы [5]), которые демонстрирует

Теорема 3. *Для любой системы (1) справедливы соотношения*

$$0\leqslant\mu_\theta(f)\leqslant\mu_\nu(f)=\mu_\rho(f)\leqslant1,\quad 1\geqslant\mu_{\bar\theta}(f)\geqslant\mu_{\bar\nu}(f)=\mu_{\bar\rho}(f)\geqslant0,$$
$$0\leqslant\mu_\varkappa(f)+\mu_{\bar\varkappa}(f)\leqslant1,\quad \varkappa=\rho,\nu,\theta.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-03-2024-074/5).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2016. — № 31. — С. 177–219. **2.** Сергеев, И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2021. — № 3. — С. 41–46. **3.** Сергеев, И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2019. — № 32. — С. 325–348. **4.** Сергеев, И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1353–1361. **5.** Сергеев, И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 1. — С. 119–138.

И. Н. Сергеев (Москва) “Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы” (18 октября 2024 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ рассмотрим дифференциальную (нелинейную, вообще говоря) систему вида

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in G,\quad f(t,0)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G). \tag{1}$$

Пусть $B_\delta\equiv\{x_0\in\mathbb{R}^n\colon 0<|x_0|\leqslant\delta\}$, а $S_\delta(f)$ и $S_{\delta,x_0}(f)\subset S_\delta(f)$ — множества непродолжаемых решений системы (1) с начальными значениями $x(0)\in B_\delta$ и, соответственно, с дополнительным ограничением $x(0)=cx_0$, $c>0$.

Определение [1]. Скажем, что система (1) (точнее, её *нулевое решение*, о чём мы в дальнейшем не будем упоминать) обладает *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что любое решение $x\in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|\leqslant\varepsilon,\quad \varliminf_{t\to+\infty}|x(t)|\leqslant\varepsilon,\quad \varlimsup_{t\to+\infty}|x(t)|\leqslant\varepsilon \tag{2}$$

(предполагающему по умолчанию, что это решение определено на всём луче $\mathbb{R}_+$, в противном случае считаем это требование невыполненным);

2) *асимптотической устойчивостью*:

— *перроновской* или *верхнепредельной*, если существует такое $\delta>0$, что любое решение $x\in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему условию (2) при $\varepsilon=0$;

— *ляпуновской*, если система обладает одновременно ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

3) *полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon,\delta>0$, что любое решение $x\in S_\delta(f)$ не удовлетворяет соответствующему условию (2);

4) *радиальной устойчивостью, радиальной асимптотической устойчивостью* или *радиальной полной неустойчивостью* в *направлении* вектора $x_0\in\mathbb{R}^n_*$, если она обладает соответствующим свойством из 1)–3) с заменой в их описании всюду множества $S_\delta(f)$ множеством $S_{\delta,x_0}(f)$;

5) *тотальным радиальным* свойством: *устойчивостью, асимптотической устойчивостью* или *полной неустойчивостью*, если она обладает этим свойством в каждом направлении.

Наличие по меньшей мере односторонней логической связи между свойствами 1)–3) и их тотальными радиальными аналогами из 5) показывает

Теорема 1. *Если система (1) обладает устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает соответственно и тотальным радиальным свойством того же типа: устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью.*

В одномерном и линейном случаях теорема 1 допускает усиление, в смысле справедливости обратной импликации, которую и демонстрируют следующие утверждения.

Теорема 2. *Если при $n=1$ система (1) обладает тотальным радиальным свойством какого-либо типа: устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью, то она обладает соответственно и устойчивостью, асимптотической устойчивостью или полной неустойчивостью того же типа.*

Теорема 3. *Если линейная система (1) обладает тотальной радиальной асимптотической устойчивостью какого-либо типа, то она обладает и асимптотической устойчивостью того же типа.*

Теорема 4. *Если линейная система (1) обладает тотальной радиальной полной неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и полной неустойчивостью того же типа.*

Теорема 5. *Если линейная система (1) обладает тотальной радиальной устойчивостью ляпуновского или верхнепредельного типа, то она обладает и устойчивостью обоих этих типов сразу.*

Замечание. Доказательство теоремы 5 опирается на равносильность и ляпуновской, и верхнепредельной устойчивости линейной системы наличию у неё фундаментальной системы ограниченных решений. Вопрос о возможности распространить утверждение этой теоремы также и на аналогичные свойства 1) и 5) устойчивости перроновского типа пока остаётся открытым.

Литература. 1. Сергеев, И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2023. — № 33. — С. 353–423.

А. А. Бондарев (Москва) “Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами” (25 октября 2024 г.).

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ (с нормой $|\cdot|$ и мерой Лебега mes) рассматриваем автономные системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

с правой частью $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad f(0) = 0. \tag{2}$$

Условия (2) обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Пусть $\mathcal{S}_*(f)$ и $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ — множества всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1) и, значит, удовлетворяющих дополнительному условию $|x(0)| < \delta$.

В дополнение к определению из доклада [1] дадим

Определение. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение) обладает:

1) *частичной крайней* (*перроновской*) *неустойчивостью* [2, 3], если для любого $\delta > 0$ существует решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty; \tag{3}$$

2) *почти устойчивостью, почти асимптотической устойчивостью* или *почти полной неустойчивостью ляпуновского, перроновского* или *верхнепредельного* типа [4], если условия 1)–3) определения из [1] выполнены соответственно для *почти* любых (не обязательно для любых) решений $x \in S_\delta(f)$, т.е. с почти всеми начальными значениями $x(0) \in B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^2\colon 0 < |x_0| \leqslant \delta\}$ с точностью до множества нулевой меры mes.

Замечание 1. Приведённое в определении свойство частичной крайней неустойчивости представляет собой разновидность её крайней неустойчивости [2]:

– усиленную тем, что предел (3) в ней является бесконечным;

– ослабленную тем, что условие (3) здесь, в отличие от полной крайней неустойчивости, выполнено не обязательно для всех, а хотя бы для одного решения $x \in S_\delta(f)$.

Обратная импликация в формулировке теоремы 1 из [1], вообще говоря, не имеет места, как показывают (см. также контрастные примеры [5]) следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует система (1), обладающая одновременно и тотальной радиальной асимптотической устойчивостью всех трёх типов, и частичной крайней неустойчивостью, но не обладающая почти устойчивостью никакого типа.*

Теорема 2. *Существует система (1), обладающая одновременно и тотальной радиальной полной неустойчивостью всех трёх типов, и частичной крайней неустойчивостью, но не обладающая почти полной неустойчивостью никакого типа.*

Теорема 1 допускает некоторое усиление, состоящее в добавлении свойств почти устойчивости, что и осуществляет

Теорема 3. *Существует система (1), обладающая одновременно и тотальной радиальной асимптотической устойчивостью всех трёх типов, и частичной крайней неустойчивостью, а также перроновской и верхнепредельной почти асимптотической устойчивостью.*

Замечание 2. Усилить теорему 3 добавлением в ней почти устойчивости ещё и ляпуновского типа не представляется возможным, поскольку из ляпуновской почти устойчивости системы вытекает её ляпуновская устойчивость (см. теорему 3 в [4]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект 22-8-10-3-1).

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 11. — С. 1572–1573. **2.** Сергеев, И.Н. Определение и свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 858–859. **3.** Бондарев, А.А. Два примера неодномерных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью / А.А. Бондарев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 859–861. **4.** Сергеев И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем / И.Н. Сергеев // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2023. — № 33. — С. 353–423. **5.** Бондарев, А.А. Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств / А.А. Бондарев, И.Н. Сергеев // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 25–29.

Н. В. Денисов, В. Д. Васильев (Москва) "Реализуемость неединичной суммы мер устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы и их непрерывность по начальному моменту" (25 октября 2024 г.).

Для произвольных $n\in\mathbb{N}$ и области G (содержащей нуль) евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега mes рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}=f(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times G, \tag{1}$$

правая часть которой удовлетворяет условиям

$$f(t,0)\equiv 0,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad f,f'_x\in C(\mathbb{R}_+\times G),$$

обеспечивающим наличие нулевого решения, а также существование и единственность решения $x(\cdot,x_0)$ задачи Коши с произвольным начальным значением $x(0,x_0)=x_0\in G$.

Пусть $B_\delta\equiv\{x_0\in\mathbb{R}^n\colon 0<|x_0|\leqslant\delta\}$, а $M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$ (или $M_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,\delta)$) — множество значений $x_0\in B_\delta$, удовлетворяющих (или, наоборот, не удовлетворяющих, в частности, когда решение $x(\cdot,x_0)$ определено не на всём временно́м луче) одному из следующих условий:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t,x_0)|<\varepsilon,\quad \varliminf_{t\to+\infty}|x(t,x_0)|<\varepsilon,\quad \varlimsup_{t\to+\infty}|x(t,x_0)|<\varepsilon,$$

ассоциируемому с соответствующим значением $\varkappa=\lambda,\pi,\sigma$.

Определение 1 [1]. *Ляпуновскую, перроновскую* и *верхнепредельную меры устойчивости* и *неустойчивости* системы (1) (точнее, её *нулевого* решения) зададим соответственно при ассоциированном значении $\varkappa=\lambda,\pi,\sigma$ формулами

$$\mu_\varkappa(f)\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}M_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes}B_\delta},\quad \mu_{\bar\varkappa}(f)\equiv\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}M_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes}B_\delta}. \tag{2}$$

Многие свойства введённых в определении 1 мер подробно изучены в работе [2]. Однако, несмотря на очевидное равенство $\operatorname{mes} M_{\varkappa}(f,\varepsilon,\delta)+\operatorname{mes} M_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,\delta)=\operatorname{mes} B_{\delta}$, возникает естественный вопрос, может ли сумма мер (2) устойчивости и неустойчивости какого-либо типа оказаться меньшей единицы. Положительный ответ на него уже в автономном двумерном случае даёт

Теорема 1. *При $n=2$ существует автономная система (1), все меры (2) которой удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_{\lambda}(f)=\mu_{\sigma}(f)=\mu_{\pi}(f),\quad \mu_{\bar\lambda}(f)=\mu_{\bar\sigma}(f)=\mu_{\bar\pi}(f),\qquad \mu_{\varkappa}(f)+\mu_{\bar\varkappa}(f)<1,\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma.$$

Определение 2 [3]. *Ляпуновскую, перроновскую* и *верхнепредельную меры устойчивости* и *неустойчивости* системы (1) с *начальным моментом* $t_0\in\mathbb{R}_+$ зададим соответственно формулами

$$\mu_{\varkappa}(f,t_0)\equiv\mu_{\varkappa}(f_{t_0}),\quad \mu_{\bar\varkappa}(f,t_0)\equiv\mu_{\bar\varkappa}(f_{t_0}),\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma, \tag{3}$$

где $f_{t_0}(t,x)\equiv f(t-t_0,x)$ — правая часть *сдвинутой* системы (1) (её начальный момент фактически сдвинут в точку t_0).

Введённая в определении 2 зависимость мер устойчивости и неустойчивости фиксированной системы от выбора начального момента оказывается довольно содержательной (по крайней мере в неодномерном нелинейном неавтономном случае [4]). Но тогда особенно интересным становится вопрос, может ли у какой-либо системы какая-то из этих мер терпеть разрыв в какой-нибудь начальной точке. На него однозначно, причём отрицательно, отвечает

Теорема 2. *Для каждой системы (1) все функции (3) непрерывны по $t_0\in\mathbb{R}_+$.*

Литература. 1. Сергеев, И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 851–852. **2.** Сергеев, И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 6. — С. 895–904. **3.** Сергеев, И.Н. О возможной зависимости мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы от начального момента / И.Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 6. — С. 853–854. **4.** Сергеев, И.Н. Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы / И.Н. Сергеев // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2024. — Т. 34, № 1. — С. 80–90.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “О гладкой управляемости в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (8 ноября 2024 г.).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t=(a(x)u_x)_x+b(x)u_x+h(x)u,\quad (x,t)\in Q_T\equiv(0,1)\times(0,T),\quad T>0, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u_x(1,t)=\psi(t),\quad 0<t<T,\quad u(x,0)=0,\quad 0<x<1, \tag{2}$$

с достаточно гладкими в $\overline{Q}_T$ коэффициентами a, b, h, граничными функциями $\varphi,\psi\in W_2^2(0,T)$, где $0<a_1\leqslant a(x)\leqslant a_2<+\infty$, $x\in[0,1]$.

Различные экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в многочисленных работах (см. обзоры [1, 2]), при этом наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. Мы изучаем задачу управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка при фиксированной функции ψ, стараемся приблизить температуру $u(x_0,t)$ в некоторой точке $x_0\in(0,1)$ к заданной функции $z\in W_2^1(0,T)$ при всех $t\in(0,T)$. Продолжая исследования [3–5], рассматриваем некоторый специальный функционал качества, востребованный в приложениях, обеспечивающий, в том числе, равномерную близость решения к целевой функции и реализуемый нормой в пространстве $W_2^1(0,T)$, где

$$\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} \equiv \big(\|\varphi'\|^2_{L_2(0,T)} + \|\varphi\|^2_{L_2(0,T)}\big)^{1/2}.$$

Поскольку в прикладных задачах время T управления и наблюдения достаточно велико, влияние начальной функции относительно мало́ и им можно пренебречь, положив начальную функцию равной нулю.

Напомним основные обозначения и определения: $V_2^{1,0}(Q_T)$ — банахово пространство функций $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых $t\mapsto u(\cdot,t)$ — непрерывное отображение $[0,T]\to L_2(0,1)$ [6, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ — множество функций $\eta\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T)=0$, $\eta(0,t)=0$.

Слабым решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,t)=\varphi(t)$ и интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\big(a(x)u_x\eta_x - b(x)u_x\eta - h(x)u\eta - u\eta_t\big)\,dx\,dt = a(1)\int\limits_0^T \psi(t)\,\eta(1,t)\,dt, \quad \eta\in\widetilde{W}_2^1(Q_T).$$

Теорема 1. *Если $\varphi,\psi\in W_2^2(0,T)$ и $\varphi(0)=\psi(0)=0$, то задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём $u_t\in V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедливо неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} + \|u_t\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C\big(\|\varphi\|_{W_2^2(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^2(0,T)}\big),$$

где постоянная C не зависит от функций φ и ψ.

Обозначим через $\Phi\subset W_2^2(0,T)$ некоторое множество управляющих функций φ, удовлетворяющих условию $\varphi(0)=0$, а через $Z\subset W_2^1(0,T)$ — множество целевых функций z, удовлетворяющих условию $z(0)=0$. Рассмотрим функционал

$$J[z,\varphi] = \|u_\varphi(x_0,\cdot) - z(\cdot)\|^2_{W_2^1(0,T)}, \quad \varphi\in\Phi, \quad z\in Z,$$

где u_φ — решение задачи (1), (2) с заданной управляющей функцией φ. Считая функцию z фиксированной, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\Phi] \equiv \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\varphi]. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если множество Φ замкнуто, выпукло и ограничено в $W_2^2(0,T)$, то для любого $z\in W_2^1(0,T)$ существует единственная такая функция $\varphi_0\in\Phi$, что $m[z,\Phi]=J[z,\varphi_0]$.*

Будем говорить, что задача (1)–(3) *плотно управляема* из множества Φ во множество Z (см. [7, 8]), если для всех $z\in Z$ выполнено равенство $m[z,\Phi]=0$.

Теорема 3. *Задача (1)–(3) плотно управляема из множества $\Phi=\{\varphi\in W_2^2(0,T)\colon \varphi(0)=0\}$ во множество $Z=\{z\in W_2^1(0,T)\colon z(0)=0\}$.*

Параболические экстремальные задачи с функционалом качества другого вида, в том числе в неограниченных классах управлений, рассматривались в работах [4, 9–11].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch, F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications / F. Troltzsch. — Providence : AMS, 2010. — 408 p. **2.** Lurie, K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems / K.A. Lurie. — Berlin : Springer, 2013. — 511 p. **3.** Astashova, I.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy // Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — V. 71. — P. 9–25. **4.** Astashova, I.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy // Opuscula Math. — 2019. — V. 39, № 5. — P. 595–609. **5.** Astashova, I. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation / I. Astashova, A. Filinovskiy, D. Lashin // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. — 2021. — V. 16. — P. 187–192. **6.** Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с. **7.** Асташова, И.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией / И.В. Асташова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2019. — Т. 80, № 2. — С. 258–274. **8.** Асташова, И.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения / И.В. Асташова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 504. — С. 28–31. **9.** Astashova, I.V. On properties of the control function in an control problem with a point observation for a parabolic equation / I.V. Astashova, A.V. Filinovskiy, D.A. Lashin // Funct. Differ. Equat. — 2021. — V. 28, № 3–4. — P. 99–102. **10.** Astashova, I. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation / I. Astashova, A. Filinovskiy, D. Lashin // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. — 2021. — V. 16. — P. 187–192. **11.** Асташова, И.В. О задачах экстремума и оценках управляющей функции для параболического уравнения / И.В. Асташова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2024. — № 1. — С. 40–50.

В. В. Башуров (Москва) “О колеблемости решений одного дифференциального уравнения нейтрального типа” (15 ноября 2024 г.).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа с постоянными запаздываниями

$$(y(t)-py(t-\tau))''+q(t)f(y(t-\sigma))=0, \quad t\in[t_0,+\infty), \tag{1}$$

где $0<p<1$, $\tau,\sigma>0$, $q\in C[t_0,+\infty)$, $q\geqslant 0$.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) будем называть удовлетворяющую ему функцию $y\in C[t_0-\rho,+\infty)$, $\rho\equiv\max\{\tau,\sigma\}$, при условии $y(\cdot)-py(\cdot-\tau)\in C^2[t_0,+\infty)$.

Определение 2. *Решение* y уравнения (1) называется *колеблющимся*, если для любого $t_1\geqslant t_0$ существует такое $t_2>t_1$, что $y(t_2)=0$.

Определение 3. Скажем, что функция f, для которой $f'(y)\geqslant 0$, $y\in\mathbb{R}$, и $yf(y)>0$, $y\neq 0$, удовлетворяет условию:

— *суперлинейности*, если при любом $\varepsilon>0$ верны оценки

$$0<\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{dy}{f(y)}<+\infty, \quad 0<-\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}<+\infty;$$

— *сублинейности*, если при любом $\varepsilon>0$ справедливы оценки

$$0<\int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}<+\infty, \quad 0<-\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\frac{dy}{f(y)}<+\infty.$$

В случае когда $p=\tau=\sigma=0$ и $f(y)=|y|^\gamma\operatorname{sgn}y$, уравнение (1) является уравнением типа Эмдена–Фаулера

$$y''+q(t)|y|^\gamma\operatorname{sgn}y=0. \tag{2}$$

Известны следующие критерии колеблемости всех его решений.

Теорема Аткинсона [1]. *Если $q\in C[0,+\infty)$, $q\geqslant 0$ и $\gamma=2n-1$, $n>1$, $n\in\mathbb{N}$, то все решения уравнения (2) являются колеблющимися тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0^{+\infty} tq(t)\,dt=+\infty. \tag{3}$$

Теорема Белогорца [2]. *Если $q_j\in C[0,+\infty)$, $q_j\geqslant 0$ и $\gamma_j=p_j/r_j\in(0,1)$, где p_j и r_j — натуральные нечётные числа, $j\in\mathbb{N}$, то все решения уравнения*

$$y''+\sum_{j=1}^n q_j(t)y^{\gamma_j}=0$$

являются колеблющимися тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{+\infty}\sum_{j=1}^n t^{\gamma_j}q_j(t)\,dt=+\infty.$$

Усиление теоремы Аткинсона для всех действительных $\gamma>1$ доказано в [3], колеблемость решений уравнений типа Эмдена–Фаулера высоких порядков исследована в [4]. Более общий случай уравнения (2) был рассмотрен в [5].

В работе [6] доказаны критерии колеблемости всех решений уравнения (1) в случаях суперлинейности и сублинейности функции f. Ниже представлены результаты, дополняющие и уточняющие эти критерии.

Теорема 1. *Пусть функция $f\in C(\mathbb{R})$ суперлинейна. Тогда:*

1) если выполнено условие (3), то любое решение уравнения (1) либо является колеблющимся, либо стремится к нулю на бесконечности;

2) если все решения уравнения (1) колеблющиеся, то выполнено условие (3).

Замечание. Условие (3) не гарантирует (вопреки утверждению из [6]) колеблемости всех решений уравнения (1). Например, функция $y(t)=e^{-t}$ является частным решением уравнения

$$(y(t)-y(t-1)/2)''+(e/2-1)e^{2t-3}y^3(t-1)=0,$$

причём $\lim_{t\to+\infty}y(t)=0$ и выполнено условие (3), где $q(t)\equiv t(e/2-1)e^{2t-3}$.

Теорема 2. *Пусть функция $f\in C(\mathbb{R})$ сублинейна и $f(uv)\geqslant f(u)f(v)$ при $uv\geqslant 0$. Тогда:*

1) если

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)q(t)\,dt=+\infty, \tag{4}$$

то любое решение уравнения (1) либо является колеблющимся, либо стремится к нулю на бесконечности;

2) если все решения уравнения (1) колеблющиеся, то выполнено условие (4).

Теорема 3. *Если функция $f\in C(\mathbb{R})$ сублинейна, $\sigma>\tau$ и $\int_0^{+\infty}q(t)\,dt=+\infty$, то все решения уравнения (1) являются колеблющимися.*

Литература. 1. Atkinson, F.V. On second order nonlinear oscillation / F.V. Atkinson // Pacific J. Math. — 1955. — P. 643–647. **2.** Belohorec, S. Oscillatory solutions of certain nonlinear differential equations of second order / S. Belohorec // Mat. Fyz. Casopis Sloven Akad. Vied. — 1961. — P. 250–255. **3.** Кигурадзе, И.Т. Об условиях колеблемости решений уравнения $u''+a(t)|u|^n\operatorname{sgn}u=0$ / И.Т. Кигурадзе // Cas. Pest. Mat. — 1962. — V. 87, № 4. — P. 492–495. **4.** Кигурадзе, И.Т. О колеблемости решений уравнения $d^mu/dt^m+a(t)|u|^n\operatorname{sgn}u=0$ / И.Т. Кигурадзе // Мат. сб. — 1964. — Т. 65, № 2. — С. 172–187.

5. Astashova, I. On existence of nonoscillatory solutions to quasilinear differential equations / I. Astashova // Georgian Math. J. — 2007. — V. 14, № 2. — P. 223–238. **6.** Wong, J.S.W. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second-order neutral differential equations / J.S.W. Wong // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — P. 342–352.

Д. А. Габидуллин (Москва) “Об условиях устойчивости некоторой нелинейной биологической модели развития эпидемий” (22 ноября 2024 г.).

Рассматривается динамическая система

$$\frac{dS}{dt}=(1-p)a-dS-\frac{\beta IS}{1+\sigma I^k}+\delta V,\quad \frac{dE}{dt}=\frac{\beta IS}{1+\sigma I^k}-(d+\varepsilon+\eta)E,$$
$$\frac{dI}{dt}=\varepsilon E-(d+\tau)I,\quad \frac{dV}{dt}=pa+\tau I+\eta E-(d+\delta)V, \tag{1}$$

возникающая в эпидемиологической математической модели с учётом инкубационного периода и вре́менного иммунитета. В этой модели всё население N делится на 4 категории: восприимчивые S, инфицированные E, заражённые I и вакцинированные/выздоровевшие V. Все параметры системы (1) неотрицательны, а их биологическое значение интерпретируется следующим образом: люди рождаются со скоростью a и вступают в класс S, а доля новорождённых эффективно вакцинируется со скоростью p, восприимчивые люди заражаются со скоростью β, временный иммунитет (вызванный идеальной вакциной, болезнью и бессимптомными инфекциями) уменьшается со скоростью δ, все люди в каждом классе имеют одинаковую естественную смертность d, люди из класса E могут переходить в класс I со скоростью ε, а также в класс V со скоростью η (из-за приобретения естественного иммунитета), инфицированные люди эффективно выздоравливают со скоростью τ, параметры σ и k описаны ниже.

Модели SEIVS, SIRS с различными показателями инцидентности изучались в работах [1–8]: в [1–4] к моделям SEIVS применялся геометрический подход для установления асимптотической устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости положений равновесия в зависимости от контрольного числа репродукции R_c, в [5] обобщён геометрический критерий глобальной асимптотической устойчивости; в [6, 7] учтены диффузионные эффекты распространения эпидемий в популяции для моделей SIRS, в [8] исследована такая модель с инфекционной силой специального вида.

Пусть новая инфекционная сила определяется по формуле

$$\varphi(I)\equiv\frac{\beta I}{1+\sigma I^k},$$

где параметры σ и k оценивают ингибирующие или психологические эффекты, обусловленные информационными кампаниями, проводимыми в популяции.

Система (1) при любых значениях параметров имеет положение равновесия

$$Q_0=(S_0,0,0,V_0),\quad S_0\equiv\frac{a((1-p)d+\delta)}{d(d+\delta)},\quad V_0\equiv\frac{pa}{d+\delta},$$

соответствующее отсутствию заболевших в популяции. Система (1) допускает биологически возможную область

$$\mathcal{D}=\{(S,E,I,V)\in\mathbb{R}^4_+ : S\leqslant S_0,\ \ V\leqslant V_0,\ \ E+I\leqslant S_0+V_0,\ \ S+E+I+V\leqslant a/d\},$$

являющуюся положительно инвариантной. Введём зависящее от параметров модели контрольное репродуктивное число

$$R_c\equiv\frac{\varepsilon S_0\varphi'(0)}{(d+\tau)(d+\varepsilon+\eta)}.$$

Определение. Положение равновесия x^* называется:

— *асимптотически устойчивым*, если все начинающиеся достаточно близко к нему решения не только всё время остаются вблизи x^*, но и стремятся к нему при неограниченном росте времени;

— *глобально асимптотически устойчивым*, если каждое решение, независимо от начального условия, стремится к x^* при неограниченном росте времени.

Теорема 1. *Положение равновесия Q_0 системы (1) является глобально асимптотически устойчивым при $R_c \leqslant 1$ и неустойчивым при $R_c > 1$.*

Доказательство теоремы 1 базируется на построении функции Ляпунова системы (1) и применении принципа инвариантности [9].

Теорема 2. *Если $R_c > 1$, то система (1) имеет в области $\mathcal{D}$ ещё одно, отличное от Q_0, положение равновесия Q^*, которое асимптотически устойчиво.*

Доказательство теоремы 2 основывается на линеаризации в окрестности особой точки системы (1) и исследовании корней характеристического уравнения матрицы коэффициентов соответствующей линейной системы.

Положение равновесия Q^* называется *эндемическим* (в популяции остаются заражённые и инфицированные).

Литература. 1. Cai, L.M. Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate / L.M. Cai, X.Z. Li // Appl. Math. Model. — 2009. — V. 33, № 7. — P. 2919–2926. **2.** Sahu, G.P. Analysis of an SEIVS epidemic model with partial temporary immunity and saturation incidence rate / G.P. Sahu, J. Dhar // Appl. Math. Model. — 2012. — V. 36, № 3. — P. 908–923. **3.** Li, M.Y. A geometric approach to the global-stability problems / M.Y. Li, J.S. Muldowney // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — V. 27, № 4. — P. 1070–1083. **4.** Liu, J.L. Global stability for a tuberculosis model / J.L. Liu, T.L. Zhang // Math. Comput. Model. — 2011. — V. 54. — P. 836–845. **5.** Lu, G.C. Geometric approach to global asymptotic stability for the SEIRS models in epidemiology / G.C. Lu, Z.Y. Lu // Nonlin. Anal. Real World Appl. — 2017. — V. 36. — P. 20–43. **6.** Astashova, I. Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PhaPI / I. Astashova, V. Chebotaeva, A. Cherepanov // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. — 2018. — V. 15, № 12. — P. 112–118. **7.** Chebotaeva, V. Erlang-distributed SEIR epidemic models with cross-diffusion / V. Chebotaeva, P.A. Vasquez // Mathematics. — 2023. — V. 11, № 9. — Art. 2167. **8.** Xiao, D. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate / D. Xiao, S. Ruan // Math. Biosci. — 2007. — V. 208. — P. 419–429. **9.** LaSalle, J.P. The Stability of Dynamical Systems / J.P. LaSalle. — Philadephia ; Pennsylvania : SIAM, 1976. — 81 p.

В. В. Алексеев (Ярославль) "Периодическое решение уравнения Мэки–Гласса и анализ его сходимости к решению соответствующего предельного релейного уравнения" (29 ноября 2024 г.).

Рассмотрим уравнение Мэки–Гласса [1, 2]

$$\dot{v} = -bv + \frac{a\theta^\gamma v_\tau}{\theta^\gamma + (v_\tau)^\gamma}, \tag{1}$$

где $v = v(t) > 0$ — скалярная функция, $v_\tau(t) \equiv v(t-\tau)$, $a, b, \theta, \tau, \gamma > 0$ — параметры, причём τ задаёт запаздывание по времени, а γ определяет форму нелинейности.

После замен $v(t)/\theta = u(t/\tau)$, $a\tau = \alpha$, $b\tau = \beta$, $\ln u = x$ и переобозначения величины t/τ (нормированного времени) через t уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} = -\beta + \alpha \frac{e^{x_1 - x}}{1 + e^{\gamma x_1}}, \quad \alpha, \beta > 0, \tag{2}$$

а при $\gamma\to+\infty$ будет иметь вид *релейного* уравнения

$$\dot{x}=-\beta+\alpha e^{x_1-x}H(e^{x_1}),\quad H(u)\equiv\lim_{\gamma\to+\infty}\frac{1}{1+u^\gamma}=\begin{cases}0, & u>1,\\ 1/2, & u=1,\\ 1, & u<1.\end{cases} \tag{3}$$

Изучим вопрос о существовании периодического решения уравнения (3) и сходимости решения уравнения (2) к соответствующему решению уравнения (3).

Определение. *Точками переключения* решения уравнения (3) будем называть моменты времени t, для которых $x_1(t)=0$ (т.е. множитель $H(e^{x_1})$ меняет значение).

Будем искать периодическое решение уравнения (3) с наименьшим числом точек переключения на периоде. В качестве множества начальных функций рассмотрим множество

$$S\equiv\{\varphi\in\mathrm{C}[-1,0]\colon \varphi(0)=x_0>0,\ \ 0<p\leqslant\varphi(t)\leqslant q<+\infty,\ \ t\in[-1,0]\}, \tag{4}$$

где x_0, p, q — положительные параметры.

Теорема 1 [3]. *Если $\alpha>e^\beta+e^{-\beta}$, $t_0=x_0/\beta+1$ и $t_2=t_0+T$, где*

$$T=\beta^{-1}\ln\bigl(\alpha^2e^{2\beta}(t_1-t_0-1)^2/2+\alpha e^\beta(t_1-t_0)+1\bigr),$$

$t_1>t_0$ — корень уравнения $e^{\beta(t_1-t_0)}=\alpha e^\beta(t_1-t_0-1)+1$, то уравнение (3) с начальной функцией из множества (4) имеет T-периодическое решение

$$x^*(t)=\begin{cases}x_0-\beta t, & t\in[0,t_0],\\ x_0-\beta t+\ln\left(\alpha e^\beta(t-t_0)+1\right), & t\in[t_0,t_0+1],\\ x_0-\beta t+\ln\left(\alpha^2e^{2\beta}(t-t_0-1)^2/2+\alpha e^\beta(t-t_0)+1\right), & t\in[t_0+1,t_1],\\ x_0-\beta t+\ln\left(\alpha^2e^{2\beta}(t_1-t_0-1)^2/2+\alpha e^\beta(t_1-t_0)+1\right), & t\in[t_1,t_2].\end{cases}$$

На основе данного результата найдём асимптотические формулы, описывающие решение уравнения (2), и покажем его близость к решению релейного уравнения (3). Для краткости формулировки основного результата введём обозначения

$$\xi\equiv-\beta+\frac{\alpha e^\beta}{\alpha e^\beta(t_1-t_0-1)+1},\quad \zeta\equiv\frac{\alpha^2}{2}e^{2\beta}(t_1-t_0-1)^2+\alpha e^\beta(t_1-t_0)+1,$$

$$w_0(s)\equiv-\beta s+\frac{\alpha e^\beta}{\beta}\ln(e^{\beta s}+1),\quad w_1(s)\equiv-\beta s-\frac{\alpha e^\beta(\alpha e^\beta(t_1-t_0-1)+1)}{\xi\zeta}\ln(e^{-\xi s}+1).$$

Теорема 2. *Если $\alpha>e^\beta+e^{-\beta}$, $\beta>0$, $\gamma\gg1$, $\sigma=\gamma^{-\nu}$ и $\nu\in(1/2,1)$, то уравнение (2) с произвольной начальной функцией φ из класса (4) имеет решение $x^*_\gamma(t)$, представимое при $\gamma\to+\infty$ в виде*

$$x^*_\gamma(t)=\begin{cases}x_0-\beta t+O(\gamma^{-1}e^{-\beta\sigma\gamma}), & t\in[0,t_0-\sigma],\\ -\beta+\gamma^{-1}w_0(\gamma(t-t_0))+O(\gamma^{-2\nu}), & t\in[t_0-\sigma,t_0+\sigma],\\ x_0-\beta t+\ln\left(\alpha e^\beta(t-t_0)+1\right)+O(\gamma^{-2\nu}), & t\in[t_0+\sigma,t_0+1],\\ x_0-\beta t+\ln\left(\alpha^2e^{2\beta}(t-t_0-1)^2/2+\alpha e^\beta(t-t_0)+1\right)+O(\gamma^{-2\nu}), & t\in[t_0+1,t_1-\sigma],\\ x_0-\beta t_1+\ln\zeta+\gamma^{-1}w_1(\gamma(t-t_1))+O(\gamma^{1-3\nu}), & t\in[t_1-\sigma,t_1+\sigma],\\ x_0-\beta t+\ln\zeta+O(\gamma^{1-3\nu}), & t\in[t_1+\sigma,t_2-\sigma],\end{cases}$$

где остаточные члены равномерны по $\varphi \in S$ *и* t *из соответствующих промежутков. Более того, существуют такие* x_0, p, q *и такое (достаточно большое)* γ_0, *что для произвольной начальной функции из множества (4) и каждого* $\gamma > \gamma_0$ *уравнение (2) обладает периодическим решением* x^*_γ *с периодом* T_γ, *причём*

$$\lim_{\gamma\to+\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant T_\gamma} |x^*_\gamma(t) - x^*(t)| = 0, \qquad \lim_{\gamma\to+\infty} T_\gamma = T.$$

Метод доказательства теоремы 2 описан в работах [4, 5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

Литература. 1. Mackey, M.C. Oscillation and chaos in physiological control systems / M.C. Mackey, L. Glass // Science. — 1977. — V. 197, № 4300. — P. 287–289. **2.** Glass, L. From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life / L. Glass, M. Mackey. — Princeton : Princeton Univ. Press, 1988. — 248 p. **3.** Алексеев, В.В. Анализ асимптотической сходимости периодического решения уравнения Мэки–Гласса к решению предельного релейного уравнения / В.В. Алексеев, М.М. Преображенская // Теор. и мат. физика. — 2024. — Т. 220, № 2. — С. 1297–1317. **4.** Колесов, А.Ю. Об одной модификации уравнения Хатчинсона / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2099–2112. **5.** Глызин, С.Д. Об одном способе математического моделирования химических синапсов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 10. — С. 1227–1244.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Старший показатель Ляпунова параметрических семейств двумерных линейных дифференциальных гамильтоновых систем как функция параметра” (6 декабря 2024 г.).

Для заданного чётного натурального числа $n = 2m$ обозначим через $\mathcal{H}_n$ класс линейных дифференциальных гамильтоновых систем

$$\dot{x} = JB(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = B^{\mathrm{T}}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами, а показатели Ляпунова [1, с. 27; 2, с. 21] системы (1) обозначим через $\lambda_1(JB) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(JB)$.

Пусть M — метрическое пространство. Рассмотрим класс $\mathcal{H}_n(M)$ таких параметрических семейств линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M, \tag{2}$$

что при каждом $\mu \in M$ система (2) имеет непрерывные ограниченные коэффициенты и является гамильтоновой, причём отображение $\mu \mapsto A(\cdot, \mu)$ непрерывно в топологии равномерной на полуоси $\mathbb{R}_+$ сходимости коэффициентов, т.е. выполнено равенство

$$\lim_{\nu\to\mu} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|A(t,\nu) - A(t,\mu)\| = 0.$$

Отождествляя семейство (2) и матрицу его коэффициентов, будем писать $A \in \mathcal{H}_n(M)$, а показатели Ляпунова системы (2) обозначим через $\lambda_1(\mu, A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\mu, A)$.

Поставим задачу полного описания класса $\lambda_i\mathcal{H}_n(M) \equiv \{\lambda_i(\,\cdot\,, A) : A \in \mathcal{H}_n(M)\}$, состоящего из функций $\lambda_i(\,\cdot\,, A)\colon M \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, определяемых семействами (2) для произвольного чётного n, номера $i \in \{1, \ldots, n\}$ и метрического пространства M. Аналогичная задача для семейств (2) более общих линейных систем, т.е. обладающих теми же свойствами, но задаваемых не обязательно гамильтоновыми матрицами $A(t,\mu)$, решена ранее в работах [3, 4].

Напомним [5, с. 223–224], что функция $h\colon M\to\mathbb{R}$ принадлежит классу $({}^*,G_\delta)$, если для каждого $r\in\mathbb{R}$ прообраз $h^{-1}([r,+\infty))$ полуинтервала $[r,+\infty)$ является G_δ-множеством в метрическом пространстве M. В частности, класс $({}^*,G_\delta)$ является собственным подклассом второго класса Бэра [5, с. 249]. Полное описание класса $\lambda_2\mathcal{H}_2(M)$ содержит следующая

Теорема. *Для каждого метрического пространства M функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ принадлежит классу $\lambda_2\mathcal{H}_2(M)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет трём условиям:*

1) при всех $\mu\in M$ неотрицательна;

2) имеет непрерывную мажоранту;

3) принадлежит классу $({}^*,G_\delta)$.

Литература. 1. Ляпунов, А.М. Собрание сочинений. Т. 2 / А.М. Ляпунов. — М. : Изд-во Академии наук СССР, 1956. — 473 с. **2.** Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 576 с. **3.** Быков, В.В. Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси / В.В. Быков // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1579–1592. **4.** Барабанов, Е.А. Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси / Е.А. Барабанов, В.В. Быков, М.В. Карпук // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 12. — С. 1579–1588. **5.** Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф ; под ред. и с доп. П.С. Александрова и А.Н. Колмогорова. — М.–Л. : ОНТИ. Глав. ред. техн.-теоретич. лит-ры, 1937. — 304 с.

Н. А. Изобов (Минск), **А. В. Ильин** (Москва) “О числе экспоненциально убывающих решений возмущённой дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте” (13 декабря 2024 г.).

Антиперроновский эффект [1–3] (противоположный известному перроновскому [4, 5]) предполагает смену всех положительных характеристических показателей $\lambda_1(A)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n(A)$ линейного приближения

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на отрицательные у некоторых нетривиальных решений дифференциальной системы

$$\dot{y}=A(t)y+f(t,y),\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемой вектор-функцией f из известных классов малых возмущений. Этот эффект представляет интерес своими возможными приложениями по построению с помощью малых возмущений устойчивых или условно устойчивых дифференциальных систем с вполне неустойчивым линейным приближением.

При реализации антиперроновского эффекта в классе линейных экспоненциально убывающих возмущений

$$f(t,y)\equiv Q(t)y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant t_0,\quad \lambda[Q]\equiv\varlimsup_{t\to\infty}t^{-1}\ln\|Q(t)\|<0,$$

установлено [1], что необходимые экспоненциально убывающие решения системы (2) образуют $(n-1)$-мерное линейное подпространство всего множества решений рассматриваемой линейной системы (2).

Для линейных исчезающих на бесконечности возмущений f доказано [2] существование необходимых линейных систем (1) и (2) с характеристическими показателями: младшим $\lambda_1(A)>0$ системы (1) и старшим $\lambda_n(A+Q)<0$ линейной системы (2).

В более сложном случае возмущений высшего порядка $m>1$ — так называемых m-возмущений, определяемых условием

$$|f(t,y)|\leqslant C_f|y|^m,\quad m>1,\quad C_f=\mathrm{const},\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant t_0,$$

двумерный антиперроновский эффект реализован [3] на системе (1) с совпадающими показателями $\lambda_1(A)=\lambda_2(A)=\lambda>0$ и *единственном* построенном решении $Y(t)$ системы (2) с показателем $\lambda[Y]=-\lambda(\theta+1)/(m\theta-1)<0,\ \theta>1$. Поэтому возникает вопрос о реализации антиперроновского эффекта смены показателей в классе возмущений высшего порядка на *большем* числе решений возмущённой системы (2) с отрицательными показателями. Ответ на него содержит приведённая ниже теорема.

Для векторов $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ и временно́й полуоси $T_0=[t_0,+\infty),\ t_0\geqslant 0$, определим пространственно-временные октанты

$$\mathbb{R}^2_1=\{y\in\mathbb{R}^2\colon y_1,y_2\geqslant 0\}\times T_0,\quad \mathbb{R}^2_2=\{y\in\mathbb{R}^2\colon y_1\leqslant 0\leqslant y_2\}\times T_0,$$
$$\mathbb{R}^2_3=\{y\in\mathbb{R}^2\colon y_1,y_2\leqslant 0\}\times T_0,\quad \mathbb{R}^2_4=\{y\in\mathbb{R}^2\colon y_1\geqslant 0\geqslant y_2\}\times T_0.$$

Теорема. *Для любых параметров $\lambda>0$, $m_4\geqslant m_3\geqslant m_2\geqslant m_1>1$ и $\theta>1$ существуют двумерная линейная система (1) с показателями $\lambda_1(A)=\lambda_2(A)=\lambda>0$ и бесконечно дифференцируемое m_1-возмущение $f\colon[t_0,+\infty]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, одновременно являющееся m_i-возмущением в октанте $\mathbb{R}^2_i$ при $i=\overline{1,4}$, такие, что возмущённая система (2) имеет решения $Y_i\subset\mathbb{R}^2_i$ с показателями $\lambda[Y_i]=-\lambda_1(\theta+1)/(m_i\theta-1)<0,\ i=\overline{1,4}$.*

Замечание. Выбором величины m_i можно получить соответствующие различные отрицательные значения показателей $\lambda[Y_i]$.

Литература. **1.** Изобов, Н.А. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1450–1457. **2.** Изобов, Н.А. Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1443–1452. **3.** Изобов, Н.А. Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1599–1605. **4.** Perron, O. Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Mathematische Zeitschrift. — 1930. — Bd. 32, H. 5. — S. 702–728. **5.** Леонов, Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения / Г.А. Леонов. — М. : Ин-т компьют. исследований ; Ижевск : R&C Dynamics, 2006. — 167 с.