ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 8

Август 2023

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

www.sciencejournals.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 8, 2023

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1007–1021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ С ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–АДВЕКЦИИ С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Н. Н. Нефедов, А. О. Орлов

Изучается краевая задача для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения реакции–диффузии–адвекции с содержащей градиент искомой функции в квадрате KPZ-нелинейностью. Рассматривается случай существования внутреннего переходного слоя в некритическом и критическом случаях. Строится асимптотическое приближение решения и определяется асимптотика для точки переходного слоя. Для доказательства теорем существования используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Асимптотическая устойчивость решений по Ляпунову доказывается с помощью метода сужающихся барьеров. Теоремы о неустойчивости доказываются с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений.

DOI: 10.31857/S0374064123080010, EDN: IMWTXB

1. Введение. Постановка задачи. В работах [1, 2] рассматривалась задача

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=f\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x\right),\quad x\in(-1,1),\quad u(\pm1,\varepsilon)=u^{(\pm)}\tag{1}$$

и были получены условия, при которых её решения типа ступеньки существуют в некритическом и критическом случаях, а также условия существования контрастной структуры типа всплеска. Теоремы существования решений доказываются с использованием метода сшивания, широко применяемого в одномерных задачах, однако вопросы устойчивости не затрагиваются.

Периодические задачи для уравнения реакции–диффузии–адвекции, содержащего в правой части слабую адвекцию (слагаемое вида $\varepsilon A(u,x)\partial u/\partial x$), рассмотрены в работах [3–5]. В указанных статьях изучаются вопросы построения асимптотического приближения для контрастной структуры типа ступеньки, а также доказываются теоремы существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову такого решения как решения соответствующей начально-краевой параболической задачи с использованием метода дифференциальных неравенств [6].

Отметим также недавние работы, посвящённые новому классу задач с разрывными адвективным и реактивным членами в одномерной и двумерной постановках [7–9].

В данной статье рассматривается краевая задача для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения реакции–диффузии–адвекции, являющаяся специальным важным для приложений случаем задачи (1), позволяющим получить конструктивные условия существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову решения как стационарного решения соответствующей параболической задачи

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=\varepsilon^2A(u,x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+f(u,x,\varepsilon),\quad x\in(-1,1),\quad u'(\pm1,\varepsilon)=u^{(\pm)},\tag{2}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малый параметр.

Особенностью изучаемой задачи является слагаемое, содержащее градиент искомой функции в квадрате. Нелинейности такого типа носят название нелинейностей Кардари–Паризи–Жанга (KPZ-нелинейности) и широко используются при моделировании процессов популяционной динамики [10], роста свободной поверхности в теории полимеров, нелинейной теории теплопроводности (см. [11, 12] и библиографию в них). Отметим также и несомненный теоретический интерес к данному уравнению: квадрат является максимальным (предельным) показателем степени, при котором условия Бернштейна на рост нелинейности выполнены (нелинейность принадлежит классу функций Нагумо (см. [13–15]).

Основной целью настоящей работы являются доказательство существования и исследование устойчивости решений с внутренним переходным слоем, как решений соответствующих начально-краевых параболических задач. Рассмотрены некритический и критический случаи.

Итак, пусть выполнены следующие условия.

Условие (A1). Функция $f(u,x,\varepsilon)$ определена на множестве $\overline{\Omega_1} := (u,x,\varepsilon) \in I_u \times [-1,1] \times \times (0,\varepsilon_0]$, а $A(u,x)$ – на множестве $\overline{\Omega_2} := (u,x) \in I_u \times [-1,1]$; обе являются достаточно гладкими функциями своих аргументов.

Условие (A2). Вырожденное уравнение $f(u,x,0)=0$ имеет ровно три корня $u = \varphi^{(\pm,0)}(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x,0) < 0, \quad x \in [-1,1].$$

Введём присоединённую систему уравнений

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \tilde{v}, \quad \frac{d\tilde{v}}{d\xi} = A(\tilde{u},x)\left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right)^2 + f(\tilde{u},x,0), \quad -\infty < \xi < \infty. \tag{3}$$

Условие (A2) означает, что на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ присоединённой системы есть две точки покоя типа седло $(\varphi^{(\pm)}(x),0)$. Существуют сепаратрисы $v^{(\pm)}(\tilde{u},x)$, входящие, соответственно, в сёдла $(\varphi^{(\pm)}(x),0)$ при $\xi \to \pm\infty$. Выражения для этих сепаратрис имеют следующий вид:

$$\tilde{v}^{(\pm)}(\tilde{u},x) = \left(\int\limits_{\varphi^{(\pm)}(x)}^{\tilde{u}} 2f(s,x,0)\exp\left(2\int\limits_s^{\tilde{u}} A(\sigma,x)\,d\sigma\right)ds\right)^{1/2}.$$

Введём также функцию

$$H(x) := \tilde{v}^{(+)}(\varphi^{(0)}(x),x) - \tilde{v}^{(-)}(\varphi^{(0)}(x),x), \quad x \in (-1,1),$$

для которой справедливо представление

$$H(x) = -\frac{2}{\tilde{v}^{(-)}(0,x) + \tilde{v}^{(+)}(0,x)} \int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(s,x,0)\exp\left(2\int\limits_s^{\varphi^{(0)}(x)} A(\sigma,x)\,d\sigma\right)ds, \quad x \in (-1,1). \tag{4}$$

Определим положение точки переходного слоя условием пересечения решения и корня вырожденного уравнения $\varphi^{(0)}(x)$:

$$\varphi^{(0)}(x^*) = u(x^*,\varepsilon). \tag{5}$$

Рассмотрим решение, которое при $\varepsilon \to 0$ на части интервала $(-1,x^*(\varepsilon))$ стремится к корню $\varphi^{(-)}(x)$, а на другой части $(x^*(\varepsilon),1)$ – к другому корню $\varphi^{(+)}(x)$. В окрестности точки $x^*(\varepsilon)$ возникает область быстрого изменения решения – *внутренний переходный слой*. Такие решения называются *контрастными структурами*. Положение точки переходного слоя $x^*(\varepsilon)$ заранее неизвестно. Будем искать её в виде ряда по степеням ε:

$$x^*(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{6}$$

Оказывается, что нахождение коэффициентов ряда (6) для точки перехода зависит существенным образом от свойств функции $H(x)$. В п. 3 мы рассмотрим некритический и критический случаи и подробно опишем процедуру нахождения коэффициентов x_i, $i \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Некритическому случаю отвечает

Условие (A3). Уравнение $H(x) = 0$ имеет решение $x = x_0$, причём $-1 < x_0 < 1$. Выполнено неравенство

$$\frac{dH}{dx}(x_0) > 0.$$

Критический случай имеет место, если выполнено

Условие (A3′). Справедливо тождество $H(x) \equiv 0,\ \ x \in (-1, 1)$.

В данной работе мы не будем уделять внимание описанию поведения решения вблизи граничных точек $x = \pm 1$. Отметим только, что в случае граничных условий Неймана вблизи граничных точек $x = \pm 1$ возникают слабые (порядка ε) пограничные слои.

Замечание 1. В случае граничных условий Дирихле необходимо сформулировать условие принадлежности граничных значений $u^{(\pm)}$ области влияния соответствующих корней вырожденного уравнения

$$\int\limits_{\varphi^{(\pm)}(\pm 1)}^{\tilde{u}} f(s, \pm 1, 0) \exp\biggl(2\int\limits_{s}^{\tilde{u}} A(\sigma, \pm 1)\, d\sigma\biggr)\, ds > 0 \quad \text{для всех} \quad \tilde{u} \in (\varphi^{(\pm)}(\pm 1), u^{(\pm)}].$$

2. Асимптотическое представление решения. Опишем построение формального асимптотического приближения решения краевой задачи (2) по методу А.Б. Васильевой.

Для построения формальной асимптотики задача (2) разбивается на две [6]. Слева от переходного слоя в области $-1 < x < x^*(\varepsilon)$ рассматривается задача

$$L_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \varepsilon^2 A(u, x)\biggl(\frac{du}{dx}\biggr)^2 - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad -1 < x < x^*(\varepsilon),$$

$$u'(-1, \varepsilon) = u^{(-)}, \quad u(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*);$$

справа от переходного слоя в области $x^*(\varepsilon) < x < 1$ – задача

$$L_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \varepsilon^2 A(u, x)\biggl(\frac{du}{dx}\biggr)^2 - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad x^*(\varepsilon) < x < 1,$$

$$u(x^*(\varepsilon), \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad u'(1, \varepsilon) = u^{(+)}.$$

Далее для функций асимптотики в области $-1 < x < x^*(\varepsilon)$ используем обозначение “ $^{(-)}$ ”, в области $x^*(\varepsilon) < x < 1$ – “ $^{(+)}$ ”, а индекс “ $^{(\pm)}$ ” будем писать, подразумевая функции как для левой, так и для правой частей асимптотики. Построим асимптотику в виде ряда по степеням ε, не предполагая разложенной в такой ряд функцию $x^*(\varepsilon)$, которую считаем известной:

$$U^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \Pi^{(\pm)}(\tau, \varepsilon), \tag{7}$$

здесь регулярная часть

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \ldots + \varepsilon^n \bar{u}_n^{(\pm)}(x) + \ldots,$$

пограничная часть в окрестности $x = -1$ для $u^{(-)}$ и в окрестности $x = 1$ для $u^{(+)}$

$$\Pi^{(\pm)}(\tau, \varepsilon) = \Pi_0^{(\pm)}(\tau) + \varepsilon \Pi_1^{(\pm)}(\tau) + \ldots + \varepsilon^n \Pi_n^{(\pm)}(\tau) + \ldots,$$

где

$$\tau = \begin{cases} (x + 1)/\varepsilon, & x \leqslant x^*(\varepsilon), \\ (x - 1)/\varepsilon, & x > x^*(\varepsilon), \end{cases}$$

и часть внутреннего переходного слоя в окрестности точки $x^*(\varepsilon)$, $\xi = (x - x^*(\varepsilon))/\varepsilon$,

$$Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) + \ldots,$$

члены которой зависят не только от аргумента ξ, но и от ε. Отметим, что уравнения, из которых эти члены находятся, содержат функции, зависящие от $x^*(\varepsilon)$, что и объясняет наличие у членов Q_i аргумента ε. Для определённости рассматриваем переход от корня $\varphi^{(-)}$ к корню $\varphi^{(+)}$.

Метод пограничных функций [16] приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов (7), из которых, в частности, получим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi^{(+)}(x).$$

Функции $\bar{u}_i^{(\pm)}(x)$, $i \in \mathbb{N}$, а также пограничные функции $\Pi_i^{(\pm)}(\tau)$, $i \in \mathbb{N}_0$, строятся стандартным образом [16, 17], и мы это построение здесь рассматривать не будем.

Рассмотрим подробно построение функций внутреннего переходного слоя.

Члены $Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi^2} - A(\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*)\left(\frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi}\right)^2 = f(\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*, 0),$$

$$Q_0^{(\pm)}(0, \varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad Q_0^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Положим

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) := \varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}(\xi, \varepsilon), \quad \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) := \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi}.$$

В этих обозначениях задачи (8) будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - A(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*)\left(\frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi}\right)^2 = f(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*, 0),$$

$$\tilde{u}^{(\pm)}(0, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = \varphi^{(\pm)}(x^*).$$

Уравнения для функции $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ на каждой из полупрямых $\xi \leqslant 0$ и $\xi \geqslant 0$ эквивалентны уравнениям присоединённой системы (3). Используя представление для сепаратрис, можно получить решения задач (8) в виде квадратурных формул

$$\xi = \int\limits_{\varphi^{(0)}(x^*)}^{\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)} \left(\int\limits_{\varphi^{(\pm)}(x^*)}^{\varkappa} 2f(s, x^*, 0) \exp\left(2\int\limits_s^{\varkappa} A(\sigma, x^*)\right) d\sigma\, ds \right)^{-1/2} d\varkappa, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Замечание 2. Из вида уравнения (8) следует, что в функциях $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$, $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ можно перейти к другому набору аргументов (ξ, x^*). В дальнейшем будем пользоваться обоими наборами аргументов также и для функций внутреннего переходного слоя, для каждого конкретного случая выбирая наиболее удобный.

Функции $Q_1^{(\pm)}$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - 2\tilde{A}^* \frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial u}\left(\frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial u}\right) Q_1^{(\pm)} = r_1^{(\pm)},$$

$$Q_1^{(\pm)}(0, x^*) + \bar{u}_1^{(\pm)}(x^*) = 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, x^*) = 0,$$

$$r_1^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) := 2\tilde{A}^*\tilde{v}^{(\pm)}\frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx} + \left(\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial u}(\tilde{v}^{(\pm)})^2 + \frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial u}\right)\left(\frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx}\xi + \bar{u}_1^{(\pm)}\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial x}(\tilde{v}^{(\pm)})^2 + \frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial x}\right)\xi + \frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial\varepsilon}, \tag{9}$$

где символы “ $\sim$”, “ $*$” над и справа от функции означают, что её значение берётся при аргументе $(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,x^*),x^*,0)$.

Решения задач (9) находятся в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,x^*) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(x^*)\frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x^*)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,x^*)} -$$
$$-\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x^*)\int\limits_0^{\xi}\frac{1}{p^{(\pm)}(s,x^*)(\tilde{v}^{(\pm)}(s,x^*))^2}\int\limits_s^{\pm\infty}p^{(\pm)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*)r_1^{(\pm)}(\eta,\varepsilon)\,d\eta\,ds, \tag{10}$$

где

$$p^{(\pm)}(\xi,x^*) = \exp\left(-2\int\limits_0^{\xi}A(\tilde{u}^{(\pm)}(y,x^*),x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(y,x^*)dy\right).$$

Функции Q следующих порядков определяются из аналогичных уравнений. Для всех функций Q справедливы стандартные экспоненциальные оценки [17]

$$|Q_i^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)| < Ce^{-\varkappa|\xi|}, \quad \xi\in\mathbb{R}, \quad i\in\mathbb{N}_0,$$

где C, $\varkappa$ – положительные константы.

Поскольку функции A, f, $u^{(\pm)}$ достаточно гладкие, формальная асимптотика может быть построена до любого порядка n.

3. Построение асимптотики точки $x^*(\varepsilon)$ переходного слоя. Одной из ключевых проблем построения асимптотики является построение асимптотики точки перехода $x^*(\varepsilon)$.

Непрерывность асимптотики в точке $x^*(\varepsilon)$ выполняется за счёт согласованности асимптотик $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$ в силу условия (5). Потребуем также непрерывности первых производных асимптотики на этой кривой (условие C^1-сшивания):

$$\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x^*(\varepsilon)} - \varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x^*(\varepsilon)} = 0. \tag{11}$$

Подставив асимптотическое разложение (7) в условие (11), получим

$$\frac{\partial Q_0^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi} - \frac{\partial Q_0^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi} + \varepsilon\left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi}\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{d\bar{u}_1^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_2^{(+)}(0,\varepsilon)}{\partial\xi} - \frac{d\bar{u}_1^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_2^{(-)}(0,\varepsilon)}{\partial\xi}\right) + \ldots =:$$
$$=: H(x^*) + \varepsilon G_1(x^*) + \varepsilon^2 G_2(\varepsilon) + \ldots = 0.$$

Здесь мы обозначили

$$G_1(x^*) := \frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi},$$

$$G_i(\varepsilon) := \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_i^{(+)}(0,\varepsilon)}{\partial\xi} - \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_i^{(-)}(0,\varepsilon)}{\partial\xi}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Функция $H(x^*)$ была введена выше (см. (4)). С учётом (6) разложим выражение (11) в ряд по степеням ε:

$$\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial U^{(-)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x} = H(x_0) + \varepsilon\left(\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=x_0} x_1 + G_1|_{x=x_0}\right) +$$

$$+\varepsilon^2\left[\frac{x_1^2}{2}\frac{d^2H}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} + x_2\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=x_0} + x_1\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0} + G_2|_{\varepsilon=0}\right] + \ldots = 0. \tag{12}$$

Далее рассмотрим некритический и критический случаи.

3.1. Некритический случай. В силу условия (A3) слагаемое при ε^0 в разложении (12) равно нулю, таким образом определён нулевой порядок x_0 в разложении точки перехода $x^*(\varepsilon)$. Определим член x_1 в (12). Приравнивая к нулю слагаемое при ε^1, получаем

$$\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=x_0} x_1 + G_1|_{x=x_0} = 0. \tag{13}$$

Используя (10), выполним преобразования

$$G_1(x^*) := \frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi} =$$

$$= \frac{d\varphi^{(+)}(x^*)}{dx} - \frac{d\varphi^{(-)}(x^*)}{dx} - \bar{u}_1^{(+)}(x^*)\frac{\tilde{v}_\xi^{(+)}(0,x^*)}{\tilde{v}^{(+)}(0,x^*)} + \bar{u}_1^{(-)}(x^*)\frac{\tilde{v}_\xi^{(-)}(0,x^*)}{\tilde{v}^{(-)}(0,x^*)} -$$

$$-\frac{1}{\tilde{v}^{(+)}(0,x^*)}\int\limits_0^{+\infty} p^{(+)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(+)}(\eta,x^*)r_1^{(+)}(\eta,\varepsilon)\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{\tilde{v}^{(-)}(0,x^*)}\int\limits_0^{-\infty} p^{(-)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(-)}(\eta,x^*)r_1^{(-)}(\eta,\varepsilon)\,d\eta =$$

$$= \Bigg[-\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,x^*)}\Bigg(\int\limits_0^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*)\bigg(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}^{(\pm)},x^*)(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*))^2 +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}^{(\pm)},x^*,0)\bigg)\eta\,d\eta + \int\limits_0^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*)\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}(\tilde{u}^{(\pm)},x^*,0)\,d\eta\Bigg)\Bigg]_-^+. \tag{14}$$

Здесь $[\,\cdot\,]_-^+$ означает разность между выражениями, помеченными символами “ + ” и “ − ”. Отметим, что в силу условия (A3) $\tilde{v}^{(-)}(0,x_0) = \tilde{v}^{(+)}(0,x_0)$, а также $\tilde{u}^{(-)}(0,x_0) = \tilde{u}^{(+)}(0,x_0)$. Таким образом, $\tilde{v}(\xi,x_0)$, $\tilde{u}(\xi,x_0)$, $p(\xi,x_0)$ – непрерывные по ξ функции в рассматриваемой области. Поэтому далее индекс $(\pm)$ в выражениях для $\tilde{v}(\xi,x_0)$, $\tilde{u}(\xi,x_0)$, $p(\xi,x_0)$ можно опустить.

Подставив равенства (14) в (13), получим уравнение для нахождения x_1:

$$\frac{dH(x_0)}{dx}x_1 - \frac{1}{\tilde{v}(0,x_0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bigg[p(\xi,x_0)\tilde{v}(\xi,x_0)\bigg(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0)(\tilde{v}(\xi,x_0))^2\xi +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\xi+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\Bigg)\Bigg]\,d\xi=0. \tag{15}$$

Уравнение (15) разрешимо в силу условия (A3), таким образом, коэффициент 1-го порядка в разложении (6) определён.

Из уравнений, определяющих $Q_i^{(\pm)}$, и следующих приближений в соотношении (12) по стандартной схеме получим алгебраические задачи для x_i:

$$\frac{dH(x_0)}{dx}x_i+f_i=0,\quad i\geqslant 1,$$

где f_i – известные на i-м шаге величины.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций x_i для некритического случая.

3.2. Критический случай. Условие (A3′) коренным образом отличает некритический случай от критического, поскольку, как будет видно далее, оно изменяет алгоритм нахождения слагаемых в разложении (6).

Действительно, в силу условия (A3′) получаем, что $H(x^*)=0$, $x^*\in(-1,1)$. Тогда (12) примет вид

$$\frac{\partial U^{(+)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial U^{(-)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}=G_1(x^*)+\varepsilon G_2(\varepsilon)+\ldots=0.$$

Разлагая $x^*(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε, получаем для C^1-сшивания следующее выражение:

$$\frac{\partial U^{(+)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial U^{(-)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}=G_1|_{x=x_0}+\varepsilon\Bigg(x_1\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0}+G_2|_{\varepsilon=0}\Bigg)+\ldots=0. \tag{16}$$

Приравняем к нулю по очереди коэффициенты при степенях ε в (16). При ε получим

$$G_1|_{x=x_0}=0. \tag{17}$$

Потребуем, чтобы выполнялось

Условие (A4′). Уравнение $G_1(x)=0$ имеет решение $x=x_0$, причём $-1<x_0<1$. Выполнено неравенство

$$\frac{dG_1}{dx}(x_0)>0.$$

Подставив выражения (14) в равенство (17), получим нелинейное алгебраическое уравнение для отыскания нулевого приближения для точки переходного слоя

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(\xi,x_0)\tilde{v}(\xi,x_0)\Bigg(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0)(\tilde{v}(\xi,x_0))^2\xi+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\xi+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\Bigg)\,d\xi=0,$$

которое разрешимо в силу условия (A4′). Приравняв к нулю коэффициент при ε в (16), получим уравнение для определения коэффициента x_1:

$$\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0}x_1+G_2|_{\varepsilon=0}=0.$$

Оно также разрешимо в силу условия (A4′).

Из уравнений, определяющих $Q_i^{(\pm)}$, и следующих приближений в соотношении (17) получим алгебраические задачи для x_i:

$$\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0} x_i + f_i = 0, \quad i \geqslant 1,$$

где f_i – известные на i-м шаге величины.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций x_i для критического случая.

4. Обоснование построенной асимптотики. Обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ частичные суммы порядка n построенных асимптотических рядов, в которых аргумент ξ у Q-функций заменён на $\xi_n := (x - \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i)/\varepsilon$, а x^* – на $x_n^*(\varepsilon) := \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i$. На множествах $-1 \leqslant x \leqslant x^*$ и $x^* \leqslant x \leqslant 1$, на которые отрезок $[-1,1]$ разделяется точкой x_n^*, при построении $U_n(x,\varepsilon)$ используются функции $Q^{(-)}$ и $Q^{(+)}$ соответственно.

Для доказательства существования решения вида ступеньки в некритическом и критическом случаях используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [18, 19]. Построим непрерывные функции $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям.

1. *Условие упорядоченности*: $\alpha(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,\varepsilon)$, $x \in [-1,1]$.

2. *Действие оператора на верхнее и нижнее решения*:

$$\varepsilon^2\frac{d^2\beta}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\beta,x)\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 - f(\beta,x,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \varepsilon^2\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\alpha,x)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 - f(\alpha,x,\varepsilon)$$

для всех $x \in (-1,1)$, за исключением тех точек x, в которых функции $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ являются негладкими.

3. *Условия на границе*:

$$\alpha'(-1,\varepsilon) \geqslant u^{(-)} \geqslant \beta'(-1,\varepsilon), \quad \alpha'(1,\varepsilon) \leqslant u^{(+)} \leqslant \beta'(1,\varepsilon).$$

4. *Условия на скачок производных*:

$$\frac{d\beta}{dx}(\overline{x} - 0,\varepsilon) \geqslant \frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x} + 0,\varepsilon),$$

где $\overline{x}$ – точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x} - 0,\varepsilon) \leqslant \frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x} + 0,\varepsilon),$$

где $\underline{x}$ – точка, в которой нижнее решение является негладким.

Сформулируем и докажем теоремы существования для каждого случая.

4.1. Некритический случай. Имеет место

Теорема 1. *Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (2), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причём имеет место оценка*

$$|U_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1,1],$$

где C – положительная константа.

Доказательство. Верхнее и нижнее решения задачи (2) будем строить путём модификации членов асимптотического ряда

$$\beta_n(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \ldots + \varepsilon^{n+2}\bar{u}_{n+2}^{(\pm)}(x) + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, x_\beta) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{n+2}Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon) + \Pi_\beta(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)),$$

где $x_\beta(\varepsilon) = x_n^*(\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(x_{n+2} - \delta)$, $\gamma > 0$ – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение неравенства на оператор, $\delta > 0$ – постоянная, обеспечивающая неравенства для скачка производных, функции Π_β обеспечивают выполнение дифференциальных неравенств вблизи точек $x = -1$ и $x = 1$, их построение проводится стандартным образом (см. [17]). Здесь для функций асимптотики в области слева от точки $x_\beta(\varepsilon)$ используем обозначение $(-)$, а справа – $(+)$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ являются решением соответствующих краевых задач для $Q_i^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$, у которых везде функция $x^*(\varepsilon)$ заменена на $x_\beta(\varepsilon)$, а аргумент ξ – на ξ_β. Функции $q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ необходимы для устранения невязки в уравнении для $Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$, вносимой постоянной γ, и определяются из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - 2\tilde{A}_\beta^* \frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \frac{\partial q_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \tilde{A}_\beta^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial u} \right) q_\beta^{(\pm)} = r_\beta(\xi, \varepsilon),$$

$$q_\beta^{(\pm)}(0, \varepsilon) + \gamma = 0, \quad q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = 0, \tag{18}$$

где символы “ $\sim$ ”, “ $*$ ”, “ β ” над и справа от функции означают, что её значение берётся при аргументе $(\tilde{u}_\beta^{(\pm)}, x_\beta, 0)$. При этом

$$\tilde{u}_\beta^{(\pm)} = \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, x_\beta), \quad r_\beta(\xi, \varepsilon) = \gamma \left(\frac{\partial \tilde{A}_\beta^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, x_\beta, 0) \right).$$

Нижнее решение $\alpha_n(x, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенство на оператор проверяется прямым вычислением. Проверим его, например, для верхнего решения $\beta_n(x, \varepsilon)$:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \beta_n}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\beta_n, x, \varepsilon) \left(\frac{d\beta_n}{dx} \right)^2 - f(\beta_n, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+2} \bar{f}_u \gamma + O(\varepsilon^{n+3}) < 0,$$

где черта над функцией означает, что её значение берётся при аргументе $(\varphi^{(\pm)}(x_0), x_0, 0)$.

Неравенства в граничных точках $x \pm 1$ выполняются за счёт модификации погранслойных функций (см., например, [17]), и их проверка здесь не рассматривается.

Проверка упорядоченности проводится в точности также как и в статье [20].

Проверим неравенство на скачок производной

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \beta_n^{(+)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n^{(-)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} \right) = -\varepsilon^{n+2} \left(\frac{dH(x_0)}{dx} \delta + \gamma B(x_0) \right) + O(\varepsilon^{n+3}),$$

$$B(x_0) = \frac{1}{\tilde{v}(0, x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, x_0) \tilde{v}(\xi, x_0) \left(\frac{\partial A}{\partial u}(\tilde{u}^{(\pm)}, x_0, 0)(\tilde{v}(\xi, x_0))^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}^{(\pm)}, x_0, 0) - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, x_0, 0) \right) d\xi.$$

Все соответствующие неравенства для нижнего решения $\alpha_n(x, \varepsilon)$ проверяются аналогично. Нужный знак скачка производной обеспечивается в силу условия (A3) и выбора достаточно большого $\delta > 0$. Теорема доказана.

4.2. Критический случай.

Теорема 2. *Если выполнены условия (A1), (A2), (A3′), (A4′), то при достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причём имеет место оценка*

$$|U_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

где C – положительная константа.

Доказательство. Асимптотический метод дифференциальных неравенств позволяет обосновать построенную асимптотику. Верхнее и нижнее решения задачи (2) будем строить путём модификации членов асимптотического ряда в виде

$$\mathfrak{B}_n(x,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^{n+3}\bar{u}_{n+3}^{(\pm)}(x)+Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)+$$

$$+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^{n+3}Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)+\Pi_{\mathfrak{B}}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{n+3}(\gamma+q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)),$$

где $x_{\mathfrak{B}}(\varepsilon)=x_n^*(\varepsilon)+\varepsilon^{n+2}(x_{n+2}-\nu)$, $\gamma>0$ – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение неравенства на оператор, $\nu>0$ – постоянная, которая будет определена ниже, обеспечивающая неравенства для скачка производных в точке переходного слоя, функции Π_β обеспечивают выполнение неравенств вблизи точек $x=-1$ и $x=1$, их построение проводится стандартным образом (см. [17]). Здесь для функций асимптотики в области слева от точки $x_\beta(\varepsilon)$ используем обозначение $(-)$, а справа – $(+)$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)$ являются решением соответствующих краевых задач для $Q_i^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)$, у которых везде функции x^* заменены на x_β, а аргумент ξ – на ξ_β. Функции $q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)$ необходимы для устранения невязки в уравнении для $Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)$, вносимой постоянной γ, и определяются из задач (18). Нижнее решение $\mathfrak{A}_n(x,\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенство на оператор проверяется прямым вычислением. Например, проверим его для верхнего решения $\mathfrak{B}_n(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^2\frac{d^2\mathfrak{B}_n}{dx^2}-\varepsilon^2A(\mathfrak{B}_n,x,\varepsilon)\left(\frac{d\mathfrak{B}_n}{dx}\right)^2-f(\mathfrak{B}_n,x,\varepsilon)=-\varepsilon^{n+3}\bar{f}_u\gamma+O(\varepsilon^{n+4})<0,$$

где черта над функцией означает, что её значение берётся при аргументе $(\varphi^{(\pm)},x_0,0)$.

Неравенства в граничных точках $x=\pm1$ выполняются за счёт модификации погранслойных функций (см., например, [17]), и их проверка здесь не проводится.

Доказательство упорядоченности выполняется совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [21].

Для доказательства теоремы остаётся проверить условие для скачка производной:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta_n^{(+)}(x_\beta,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial\beta_n^{(-)}(x_\beta,\varepsilon)}{\partial x}\right)=-\varepsilon^{n+3}\left(\frac{dG(x_0)}{dx}\nu+\gamma B(x_0)\right)+O(\varepsilon^{n+4}).$$

Нужный знак скачка производной обеспечивается в силу условия (A4′) и выбора достаточно большого $\nu>0$. Таким образом, все необходимые условия известных теорем [22] о дифференциальных неравенствах выполнены. Теорема доказана.

5. Асимптотическая устойчивость решения. Решения задачи (2) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой параболической задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$L_t[v]:=\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\varepsilon^2A(v,x)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-f(v,x,\varepsilon)=0,$$

$$(x,t)\in D_{t+}:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:-1<x<1,\quad 0<t<\infty\},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\pm1,t,\varepsilon)=u^{(\pm)},\quad 0<t<\infty,$$

$$v(x,0,\varepsilon)=v^0(x,\varepsilon),\quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{19}$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$, где $u(x,\varepsilon)$ – решение задачи (2), то и задача (19) имеет решение $v(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств [6]. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (19) в виде

$$\alpha(x,t,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)), \quad \beta(x,t,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)),$$

где $\lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что упорядоченность, неравенства на границе и на скачок в точке x_0 для функций $\beta(x,t,\varepsilon)$, $\alpha(x,t,\varepsilon)$ выполняются в силу того, что $\beta_n(x,\varepsilon)$, $\alpha_n(x,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам (1), (3), (4), и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем из [22] достаточно проверить неравенства на оператор: $L_t[\beta] < 0$, $L_t[\alpha] > 0$. Нетрудно получить требуемые неравенства как для некритического, так и для критического случаев. В ходе доказательства нам потребуется

Лемма. *Пусть $u(x,\varepsilon)$ – решение, существование которого утверждает теорема 1. Тогда выполнены следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon) - \alpha_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n), \quad \left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon) - \beta_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n).$$

Из представлений верхнего и нижнего решений имеют место оценки

$$|U_n(x,\varepsilon) - \alpha_n(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \left|\frac{\partial(U_n(x,\varepsilon) - \alpha_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n),$$

$$|U_n(x,\varepsilon) - \beta_n(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \left|\frac{\partial(U_n(x,\varepsilon) - \beta_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n),$$

в силу которых имеем

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x,\varepsilon)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} + O(\varepsilon^n). \tag{20}$$

Аналогично

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} + O(\varepsilon^n).$$

Таким образом, из формулы (20) следует, что для доказательства леммы необходимо показать близость производной решения и производной асимптотики. Для этого сведём уравнение задачи (2) к нелинейной системе сингулярно возмущённых уравнений первого порядка

$$\varepsilon\frac{dv}{dx} = A(u,x)v^2 + f(u,x,\varepsilon), \quad \varepsilon\frac{du}{dx} = v, \quad u'(\pm 1,\varepsilon) = u^{(\pm)}. \tag{21}$$

Далее приведём результат из работы [1], в которой построена асимптотика и доказано существование решения типа ступенька–всплеск у системы (21) с помощью метода сшивания асимптотических разложений.

Теорема 3. *Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε существует решение $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ задачи (21), являющееся контрастной структурой типа ступенька–всплеск, причём имеет место оценка*

$$|U_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad |V_n(x,\varepsilon) - v(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

Из теоремы 3 следует, что

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n),$$

а значит,
$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial \alpha_n(x,\varepsilon)}{\partial x}=O(\varepsilon^n),\quad \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial \beta_n(x,\varepsilon)}{\partial x}=O(\varepsilon^n).$$
Лемма доказана.

Замечание 3. Сформулированный результат леммы остаётся справедливым и в критическом случае:
$$\left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon)-\mathfrak{A}_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right|=O(\varepsilon^n),\quad \left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon)-\mathfrak{B}_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right|=O(\varepsilon^n).$$
Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой существования решения типа ступенька–всплеск для системы (21) в критическом случае, доказанной в статье [2] при выполнении условий (A1), (A2), (A3′), (A4′).

Замечание 4. Отметим, что используемые нами теоремы из [1] и [2] доказаны при краевых условиях Дирихле. Однако не составляет труда провести доказательство и в случае условий Неймана.

Для удобства введём функцию
$$F(z,u,x,\varepsilon):=A(u,x)z^2+f(u,x,\varepsilon).$$
С учётом обозначения запишем операторы задач
$$L_t[\beta]:=\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial\beta}{\partial t}-F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right),\quad L_\varepsilon[\beta_n]:=\varepsilon^2\frac{d^2\beta_n}{dx^2}-F\left(\varepsilon\frac{d\beta_n}{dx},\beta_n,x,\varepsilon\right).$$
Проверим, например, неравенство $L_t[\beta]<0$ для верхнего решения:
$$L_t[\beta]:=\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial\beta}{\partial t}-F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right)=L_\varepsilon[u]+e^{-\lambda(\varepsilon)t}(L_\varepsilon[\beta_n]-L_\varepsilon[u])+\varepsilon^2\lambda(\beta_n-u_\varepsilon)e^{-\lambda(\varepsilon)t}+$$
$$+\left(F\left(\varepsilon\frac{d\beta_n}{dx},\beta_n,x,\varepsilon\right)-F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right)e^{-\lambda(\varepsilon)t}-\left(F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right)-F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right).$$
В силу построения функции $\beta_n(x,\varepsilon)$, а также учитывая результаты леммы и теоремы 3, верны равенства
$$L_\varepsilon[u]=0,\quad L_\varepsilon[\beta_n]=-\varepsilon^{n+2}\gamma\bar f_u(x)+O(\varepsilon^{n+3})<0,\quad |\beta_n-u|=O(\varepsilon^{n+1}),\quad \left|\frac{d\beta_n}{dx}-\frac{du}{dx}\right|=O(\varepsilon^n).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, преобразуем последние две скобки:
$$\left(F\left(\varepsilon\frac{d\beta_n}{dx},\beta_n,x,\varepsilon\right)-F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right)e^{-\lambda(\varepsilon)t}-\left(F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right)-F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right)=$$
$$=(\theta_2e^{-\lambda(\varepsilon)t}-\theta_1)e^{-\lambda(\varepsilon)t}\left[F^*_{uu}(\beta_n-u)^2+(F^*_{uz}+F^*_{zu})\varepsilon(\beta_n-u_\varepsilon)\left(\frac{d\beta_n}{dx}-\frac{du}{dx}\right)+F^*_{zz}\varepsilon^2\left(\frac{d\beta_n}{dx}-\frac{du}{dx}\right)^2\right].$$
Здесь под индексом “ * ” мы понимаем, что значения частных производных взяты в некоторой промежуточной точке (не обязательно одинаковой), например,
$$F^*_{zz}=F_{zz}\left(\varepsilon\frac{du}{dx}+\varepsilon\left(\frac{d\beta_n}{dx}-\frac{du}{dx}\right)(\theta_2e^{-\lambda(\varepsilon)t}+\theta_3(\theta_2e^{-\lambda(\varepsilon)t}-\theta_1)),\right.$$
$$\left.u+(\beta_n-u)(\theta_2e^{-\lambda(\varepsilon)t}+\theta_3(\theta_2e^{-\lambda(\varepsilon)t}-\theta_1))x,\varepsilon\right),$$
где $|\theta_i|<1$, $i=1,2,3.$ Окончательно имеем
$$L_t[\beta]=e^{-\lambda(\varepsilon)t}(-\varepsilon^{n+2}\gamma\bar f_u(x)+O(\varepsilon^{n+3})+O(\varepsilon^{2n+2})+\varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\beta_n-u_\varepsilon))<0$$
при $n\geqslant 0$ и $\lambda(\varepsilon)=\lambda_0>0$ – достаточно малой константе.

Следовательно, в некритическом случае построенное выше решение устойчиво с областью влияния, по крайней мере, $[\alpha_0(x,\varepsilon),\beta_0(x,\varepsilon)]$.

В критическом случае можно провести аналогичные вычисления и получить неравенство

$$L_t[\mathfrak{B}] = e^{-\lambda(\varepsilon)t}(-\varepsilon^{n+3}\gamma\bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+4}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\mathfrak{B}_n - u_\varepsilon)) < 0$$

при $n \geqslant 1$ и $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 > 0$.

Итак, построенное выше решение в критическом случае устойчиво с областью влияния, по крайней мере, $[\mathfrak{A}_1(x,\varepsilon),\mathfrak{B}_1(x,\varepsilon)]$.

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение задачи (19) с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x,\varepsilon),\beta_0(x,\varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x,\varepsilon)$ – единственное решение задачи (2) в этой области.*

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (A1), (A2), (A3′), (A4′). Тогда решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение задачи (19) с областью устойчивости, по крайней мере, $[\mathfrak{A}_1(x,\varepsilon),\mathfrak{B}_1(x,\varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x,\varepsilon)$ – единственное решение задачи (2) в этой области.*

6. Оценка главного собственного значения линеаризованного оператора. Неустойчивость. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для линеаризованного на решении $u(x,\varepsilon)$ оператора задачи (2):

$$L_{\text{lin}}[w] := \varepsilon^2\frac{d^2w}{dx^2} - 2\varepsilon^2A(u,x)\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} -$$
$$-\left(\varepsilon^2A_u(u,x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + f_u(u,x,\varepsilon)\right)w = \lambda w, \quad x\in(-1,1), \quad w'(\pm1,\varepsilon)=0.$$

Известно [23], что если главное собственное значение $\lambda_0 > 0$, то решение $u(x,\varepsilon)$ является неустойчивым. Доказательство неустойчивости решения типа контрастной структуры проводится с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений [24].

Введём функцию $\Psi(x,\varepsilon) = \beta_{\text{ust}}(x,\varepsilon) - \alpha_{\text{ust}}(x,\varepsilon)$, где $\beta_{\text{ust}}(x,\varepsilon)$, $\alpha_{\text{ust}}(x,\varepsilon)$ – верхнее и нижнее решения, полученные в п. 4.1, у которых δ заменена на $-\delta$. Нетрудно показать, что при такой замене на отрезке $x\in[x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon]$ будет нарушаться упорядоченность верхнего и нижнего решений [24].

Изменим также знак неравенства в условии (A3): $\dfrac{dH}{dx}(x_0) < 0$, обозначение условия при этом оставим прежним.

Рассмотрим сдвиг оператора:

$$L_{\text{shift}}[w] := \varepsilon^2\frac{d^2w}{dx^2} - 2\varepsilon^2A(u,x)\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - \left(\varepsilon^2A_u(u,x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + f_u(u,x,\varepsilon)\right)w - \varkappa\varepsilon w.$$

Выберем параметр $\varkappa > 0$ малым, чтобы выполнялись неравенства

$$L_{\text{shift}}[\Psi] < 0, \quad x\in(-1,1),$$

$$\Psi(x,\varepsilon) < 0, \quad x\in[x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon],$$

$$\left.\frac{d\Psi}{dx}\right|_{x=x_0+0} - \left.\frac{d\Psi}{dx}\right|_{x=x_0-0} < 0, \quad \Psi'(-1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \Psi'(1,\varepsilon).$$

Данные соотношения показывают, что $\Psi(x,\varepsilon)$ – верхнее негладкое решение однородной краевой задачи для оператора L_{shift}.

Используя технику из [24], можно провести процедуру сглаживания и получить гладкую функцию $\Psi^*(x,\varepsilon)$ – верхнее решение однородной краевой задачи, при этом $\Psi^*(x,\varepsilon) \leqslant \Psi(x,\varepsilon)$, $x\in[-1,1]$.

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для оператора L_{shift} задачи (2):

$$L_{\text{shift}}[w] = \mu w, \quad x \in (-1, 1), \quad w'(\pm 1, \varepsilon) = 0. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что собственные значения задач для операторов L_{lin} и L_{shift} связаны формулой $\lambda = \mu + \varepsilon\varkappa$. Поэтому для доказательства неустойчивости достаточно показать, что $\mu \geqslant 0$. Для этого нам понадобится теорема 2.4 из работы [25], являющаяся следствием теории Крейна–Рутмана.

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) главное собственное значение задачи (22) $\mu_0 < 0$;

2) любое решение задачи $L_{\text{shift}}[y(x,\varepsilon)] \leqslant 0$, $x \in (-1,1)$, $y'(-1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant y'(1,\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенству* $y(x,\varepsilon) \geqslant 0$.

Покажем, что $\mu_0 \geqslant 0$. Предположим противное: $\mu_0 < 0$. Тогда из того, что $\Psi^*(x,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче $L_{\text{shift}}[\Psi^*(x,\varepsilon)] \leqslant 0$, $x \in (-1,1)$, $\Psi^{*\prime}(-1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \Psi^{*\prime}(1,\varepsilon)$, последует, что $\Psi^*(x,\varepsilon) \geqslant 0$, $x \in [-1,1]$. Но при этом $\Psi^*(x,\varepsilon) \leqslant \Psi(x,\varepsilon) < 0$, $x \in [x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon]$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_0 \geqslant 0$, а значит, учитывая связь $\lambda = \mu + \varepsilon\varkappa$, имеет место неравенство $\lambda_0 \geqslant \varkappa\varepsilon$. Из [23] следует, что решение неустойчиво.

Теорема 7. *При выполнении условий (A1)–(A3) при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *стационарное решение* $u(x,\varepsilon)$ *задачи (19), для которого функция* $U_n(x,\varepsilon)$ *является равномерным асимптотическим приближением, неустойчиво.*

Изменим также знак неравенства в условии (A4$'$): $\dfrac{dG}{dx}(x_0) < 0$. Обозначение условия при этом оставим прежним. Аналогичным образом, с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений, полученных путём замены ν на $-\nu$ из представленных в п. 4.2, можно доказать теорему в критическом случае.

Теорема 8. *При выполнении условий (A1), (A2), (A3$'$), (A4$'$) при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *стационарное решение* $u(x,\varepsilon)$ *задачи (19), для которого функция* $U_n(x,\varepsilon)$ *является равномерным асимптотическим приближением, неустойчиво.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Давыдова М.А.* О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 938–947.
2. *Давыдова М.А.* Решение типа всплеска и критический случай ступеньки для сингулярно возмущённого уравнения второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 39. № 8. С. 1305–1316.
3. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L.* On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations // Russ. J. of Math. Phys. 2019. V. 26. № 1. P. 55–69.
4. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Моделирование и анализ информ. систем. 2018. Т. 25. № 1. С. 125–132.
5. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 708–722.
6. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
7. *Фэй П.Я., Мин К.Н., Давыдова М.А.* Контрастные структуры в задачах для стационарного уравнения реакция–диффузия–адвекция с разрывной нелинейностью // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 759–770.
8. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Existence of contrast structures in a problem with discontinuous reaction and advection // Russ. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 2. P. 214–224.
9. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Contrast structures in the reaction–diffusion–advection problem in the case of a weak reaction discontinuity // Russ. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 1. P. 81–90.

10. *Grimson M.J., Barker G.C.* Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. № 2. P. 1680–1688.
11. *Davydova M.A., Zakharova S.A.* Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // J. of Comput. and Appl. Math. 2022. V. 400. № 1. Art. 113731.
12. *Krug J., Spohn H.* Universality classes for deterministic surface growth // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. № 8. Art. 4271.
13. *Похожаев С.И.* Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ // Мат. сб. 1980. Т. 113. № 2. С. 324–338.
14. *Муравник А.Б.* Об убывании неотрицательных решений сингулярных параболических уравнений с KPZ-нелинейностями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 8. С. 1422–1427.
15. *Муравник А.Б.* О качественных свойствах решений некоторых квазилинейных параболических уравнений, допускающих вырождение на бесконечности // Уфимск. мат. журн. 2018. Т. 10. № 4. С. 77–84.
16. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
17. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–82.
18. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
19. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущённых задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1529–1537.
20. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // Russ. J. of Math. Phys. 2015. V. 22. P. 215–226.
21. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной нелинейности // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
22. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York; London, 1993.
23. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений М., 1985.
24. *Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* О неустойчивых контрастных структурах в одномерных задачах реакция–диффузия–адвекция с разрывными источниками // Теор. и мат. физика. 2023. Т. 215. № 2. С. 297–310.
25. *Lopez-Gomez J.* The strong maximum principle. Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity // CR Acad. Sci. Paris. 1990. V. 310. P. 49–52.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1022–1028

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

О СВОЙСТВЕ МОНОТОННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

© 2023 г. Л. И. Родина, М. С. Волдеаб

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ и решение данной системы $\varphi(t,x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Получены достаточные условия, при которых выполнено следующее свойство монотонности решений относительно начальных условий: если значения $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(0) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x(0) \leqslant y(0)$, то выполняется неравенство $\varphi(t,x(0)) \leqslant \varphi(t,y(0))$ для любого $t \geqslant 0$. Указанное свойство применяется для исследования задачи оценки средней временно́й выгоды для систем со случайными параметрами, выполненной с вероятностью, равной единице.

DOI: 10.31857/S0374064123080022, EDN: IMXZLD

Введение. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и её производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i,j = \overline{1,n})$ непрерывны. Обозначим через $\varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \ldots, \varphi_n(t,x))$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Для решения многих прикладных задач желательно, чтобы решения системы (1) обладали следующим свойством монотонности относительно начальных условий.

Свойство А. Пусть $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(0) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x(0) \leqslant y(0)$. Тогда имеет место неравенство

$$\varphi(t,x(0)) \leqslant \varphi(t,y(0)) \quad \text{для любого} \quad t \geqslant 0.$$

Здесь и далее неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать как неравенства $x_i \leqslant y_i$, $i = \overline{1,n}$. Аналогично $x < y$ означает, что $x_i < y_i$ для всех $i = \overline{1,n}$.

В статье получены условия на функцию $f(x)$, при которых данное свойство выполнено для системы дифференциальных уравнений (1). Показано, что оно справедливо для любого уравнения (1) (т.е. при $n = 1$). Приведены примеры моделей взаимодействия двух видов, обладающих свойством монотонности решений. Рассмотрена одна из задач, для исследования которой применяется указанное свойство, – задача оценки средней временно́й выгоды для систем со случайными параметрами, которая выполнена с вероятностью, равной единице.

1. Свойство монотонности решений относительно начальных условий для линейных систем с постоянными коэффициентами. Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, где A – постоянная $n \times n$-матрица. Известно, что решение данной системы можно записать в виде $\varphi(t,x) = e^{At}x$, где e^{At} – матричная экспонента. Матрица A называется *экспоненциально неотрицательной*, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Матрица A называется *матрицей Метцлера*, если её элементы удовлетворяют неравенствам $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$ (см. [1]).

Лемма [1]. *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано в работе Т. Важевского [2] в 1950 г. Из леммы очевидно следует, что если A – матрица Метцлера и $x \leqslant y$, то $\varphi(t,x) = e^{At}x \leqslant e^{At}y = \varphi(t,y)$ для любого $t \geqslant 0$. Также отсюда следует, что решение $\varphi(t,x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях, т.е. обладает свойством *квазиположительности* (см. [3, с. 34]).

Отметим, что свойство монотонности решений линейных систем имеет широкое применение в математической теории управления [4, 5] и теории линейных функционально-дифференциальных уравнений [6, 7].

2. Свойство монотонности решений относительно начальных условий для нелинейных автономных систем. Условия, при которых справедливо свойство монотонности решений системы (1), исследовались в работе [8]. Ниже получены менее обременительные условия для выполнения данного свойства.

Замечание 1. Отметим, что свойство A выполнено для дифференциального уравнения вида (1). Для этого нужно показать, что при любом фиксированном $t > 0$ функция $x \mapsto \varphi(t, x)$ возрастающая. Действительно, если это не так, то существуют такие x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, что $\varphi(t, x_1) \geqslant \varphi(t, x_2)$. Тогда найдётся точка $t_* \in (0, t]$, в которой $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения. Однако это свойство выполнено не для любой системы второго порядка и выше.

Напомним, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1), если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в D.

Условие A. Пусть множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы (1). Каждая из функций f_i является возрастающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 2. Если система (1) линейная и выполнено условие A, то матрица A данной системы является матрицей Метцлера.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие A. Тогда для значений* $x(0) \in D$ *и* $y(0) \in D$ *таких, что* $x(0) \leqslant y(0)$, *имеет место неравенство* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство теоремы разделим на две части.

1. Рассмотрим случай, когда $x(0) < y(0)$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $t_i^* > 0$ такие, что $\varphi_i(t_i^*, x(0)) > \varphi_i(t_i^*, y(0))$. Пусть $I \neq \varnothing$ – множество всех i, для которых выполнено последнее неравенство. Введём функции

$$R_i(t, x, y) \equiv \varphi_i(t, x) - \varphi_i(t, y), \quad i = \overline{1, n},$$

которые непрерывны по t как разность непрерывных функций. Пусть $i \in I$, тогда

$$R_i(0, x(0), y(0)) < 0, \quad R_i(t_i^*, x(0), y(0)) > 0,$$

поэтому для каждого $i \in I$ найдётся $t_i \in (0, t_i^*)$ такое, что $R_i(t_i, x(0), y(0)) = 0$. Пусть

$$\tau_i = \inf\{t \in (0, t_i^*) : R_i(t, x(0), y(0)) = 0\}, \quad \tau = \min_{i \in I}\{\tau_i\}.$$

Из выбора точки τ следует, что $\varphi_i(\tau, x(0)) \leqslant \varphi_i(\tau, y(0))$, причём существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$, при которых выполнено строгое неравенство, так как все траектории не могут прийти в одну точку за конечное время. Пусть $I(\tau) \neq \varnothing$ – множество всех i, при которых $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$, $J(\tau) \equiv \{1, \ldots, n\} \backslash I(\tau)$ – множество всех i, при которых $\varphi_i(\tau, x(0)) < \varphi_i(\tau, y(0))$, $J(\tau) \neq \varnothing$. Поскольку $\tau_i > 0$, то $\tau > 0$.

Перейдём от системы дифференциальных уравнений (1) к интегральным уравнениям

$$\varphi_i(t, x(0)) = x_i(0) + \int\limits_0^t f_i(\varphi(s, x(0)))\, ds, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Если $i \in I(\tau)$, то $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$, $x_i(0) < y_i(0)$ и из (2) получаем

$$\int\limits_0^\tau [f_i(\varphi(s, x(0))) - f_i(\varphi(s, y(0)))]\, ds = y_i(0) - x_i(0) > 0. \tag{3}$$

Далее $\varphi_i(\tau-\delta,x(0)) < \varphi_i(\tau-\delta,y(0))$ для любого $\delta\in(0,\tau)$, поэтому в силу (2) выполнено неравенство
$$\int\limits_0^{\tau-\delta}[f_i(\varphi(s,x(0)))-f_i(\varphi(s,y(0)))]\,ds < y_i(0)-x_i(0). \tag{4}$$
Из (3), (4) следует, что для любого $\delta\in(0,\tau)$ имеет место
$$\int\limits_{\tau-\delta}^{\tau}[f_i(\varphi(s,x(0)))-f_i(\varphi(s,y(0)))]\,ds > 0. \tag{5}$$
Отметим, что из непрерывности подынтегральной функции следует неравенство
$$f_i(\varphi(\tau,x(0)))\geqslant f_i(\varphi(\tau,y(0))),\quad i\in I(\tau). \tag{6}$$

Возможны два случая. В первом хотя бы одна из функций f_i, $i\in I(\tau)$, зависит от некоторой переменной x_j, $j\notin I(\tau)$, пусть это будет функция f_k, $k\in I(\tau)$. Тогда $\varphi_i(\tau,x(0)) = \varphi_i(\tau,y(0))$ для всех $i\in I(\tau)$, $\varphi_i(\tau,x(0))<\varphi_i(\tau,y(0))$ при $i\in J(\tau)$ и из условия A следует $f_k(\varphi(\tau,x(0)))<f_k(\varphi(\tau,y(0)))$. Получили противоречие с (6).

Во втором случае все функции f_i, $i\in I(\tau)$, не зависят от переменных x_i, $i\in J(\tau)$. Тогда
$$\varphi_i(\tau,x(0))=\varphi_i(\tau,y(0))\quad\text{для всех}\quad i\in I(\tau), \tag{7}$$
и можем выделить из исходной системы (1) отдельную подсистему, в которую входят только уравнения с x_i, $i\in I(\tau)$. Поэтому из (7) следует равенство
$$\varphi_i(t,x(0))=\varphi_i(t,y(0))\quad\text{для всех}\quad t\in\mathbb{R},\quad i\in I(\tau),$$
из которого получаем $f_i(\varphi(s,x(0)))-f_i(\varphi(s,y(0)))\equiv 0$, $i\in I(\tau)$, что противоречит (5).

2. Пусть $x_i(0)=y_i(0)$ при $i\in I(0)$ и $x_i(0)<y_i(0)$ при $i\in J(0)\equiv\{1,\ldots,n\}\setminus I(0)$; здесь $I(0)$ – любое непустое подмножество $\{1,\ldots,n\}$, множество $J(0)$ может быть пустым. Определим последовательность точек $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства $\mathbb{R}^n$ таким образом, что
$$y_i^{k+1}>y_i^k>y_i(0)=x_i(0),$$
$$\lim_{k\to\infty}y_i^k=y_i(0)\quad\text{при}\quad i\in I(0)\quad\text{и}\quad y_i^k=y_i(0)\quad\text{при}\quad i\in J(0),\quad k\in\mathbb{N}.$$
Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}y^k=y(0)$ и $x(0)<y^k$, $k\in\mathbb{N}$. Из первой части доказательства следует, что $\varphi(t,x(0))<\varphi(t,y^k)$ для всех $t\in[0,d]$, $k\in\mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в последнем неравенстве и используя свойство непрерывности функции $\varphi(t,x)$ по совокупности переменных, получаем, что
$$\varphi(t,x(0))\leqslant\lim_{k\to\infty}\varphi(t,y^k)=\varphi(t,y(0))\quad\text{для всех}\quad t\geqslant 0.$$
Теорема доказана.

3. Модели взаимодействия двух видов, обладающие свойством монотонности решений. Модели взаимодействия двух видов в классификации Е. Одума подробно описаны в книге Г.Ю. Ризниченко [9, с. 143–157]. Пусть численности видов равны x_1 и x_2, тогда данные модели могут быть описаны системой уравнений
$$\dot x_1=a_1x_1+b_{12}x_1x_2-c_1x_1^2,\quad \dot x_2=a_2x_2+b_{21}x_1x_2-c_2x_2^2. \tag{8}$$
Здесь параметры $a_i>0$ – постоянные собственной скорости роста видов, $c_i>0$ – постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), b_{ij} – постоянные взаимодействия видов, $i,j=1,2$. Знаки коэффициентов b_{ij} определяют тип взаимодействия.

Отметим, что свойством монотонности решений обладают, конечно, не все модели вида (8); данное свойство выполнено для таких моделей, как симбиоз (в этом случае $b_{12} > 0,\ b_{21} > 0$), комменсализм ($b_{12} > 0,\ b_{21} = 0$) и нейтрализм ($b_{12} = 0,\ b_{21} = 0$). Если хотя бы один из коэффициентов b_{ij} отрицательный, то свойство монотонности будет выполнено не для всех решений системы (8); это относится к таким моделям как хищник–жертва, конкуренция и аменсализм.

Замечание 3. Если для линейной системы (1) выполнено условие квазиположительности, то матрица A системы является матрицей Метцлера. Для нелинейной системы из условия квазиположительности не следует свойство монотонности решений. Например, условие квазиположительности имеет место для всех моделей взаимодействия двух видов, но свойство монотонности не выполняется для моделей хищник–жертва, конкуренция и аменсализм.

4. Условия монотонности решений системы по части начальных условий. Предположим, что в системе (1) найдётся подсистема из m уравнений, которая зависит только от переменных $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Пусть данная подсистема имеет вид

$$\dot{\widetilde{x}} = g(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{9}$$

В силу теоремы 1 если условие A выполнено для системы (9), то решение $\widetilde{\varphi}(t, x)$ этой системы монотонно по всем начальным условиям $\widetilde{x}(0) \in \mathbb{R}^m$; следовательно, решение $\varphi(t, x)$ системы (1) монотонно по части начальных условий $\widetilde{x}(0) \in \mathbb{R}^m$.

Примером системы, обладающей свойством монотонности по части начальных условий, для моделей взаимодействия двух видов является система, описывающая модель аменсализма. Напомним, что при взаимодействии типа аменсализм в системе (8) выполнены условия $b_{12} = 0,\ b_{21} < 0$. Тогда первое уравнение этой системы имеет вид $\dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1^2$ (не зависит от переменной x_2), и система (8) обладает свойством монотонности по начальному условию $x_1(0)$.

5. Оценки средней временно́й выгоды, выполненные с вероятностью единица. В данном пункте продолжаются рассуждения из работ [10, 11], в которых описываются вопросы оптимального сбора ресурса из стохастической популяции, заданной дифференциальным уравнением (1) (случай $n = 1$). Здесь мы рассматриваем модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (случай $n > 1$). Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой (1), а в моменты времени $\tau(k) = kd,\ d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

что приводит к резкому (мгновенному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, т.е. либо состоит из отдельных видов $x_1, \ \ldots, \ x_n$, либо разделён на n возрастных групп. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временны́е, а нижними индексами – пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими (не меньше, чем заданные значения $(u_1(k), \ldots, u_n(k)) = u(k) \in [0,1]^n$ в момент kd). В этом случае определённая часть ресурса сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора, и доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k) = (\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)) \in [0,1]^n, \quad \text{где} \quad \ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, динамика которой задана управляемой системой со случайными параметрами

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \quad x_i(kd) = (1 - \ell_i(k)) x_i(kd - 0), \tag{10}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ – количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i=\overline{1,n}$, $k\in\mathbb{N}$. Предполагаем, что решения системы (10) непрерывны справа.

Приведём описание *вероятностной модели,* заданной управляемой системой (10). Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega,\widetilde{\mathfrak{A}},\widetilde{\mu})$, где $\Omega\subseteq[0,1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – сигма-алгебра подмножеств Ω, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma\equiv\{\sigma:\sigma=(\omega(1),\ldots,\omega(k),\ldots)\}$, где $\omega(k)=(\omega_1(k),\ldots,\omega_n(k))\in\Omega\subseteq[0,1]^n$, $k\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порождённую цилиндрическими множествами

$$E_k\equiv\{\sigma\in\Sigma:\omega(1)\in A(1),\ldots,\omega(k)\in A(k)\},\quad \text{где}\quad A(j)\in\widetilde{\mathfrak{A}},\quad j=\overline{1,k},$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(E_k)=\widetilde{\mu}(A(1))\cdots\widetilde{\mu}(A(k))$. Тогда в силу теоремы А.Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma,\mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Пусть $X_i(k)=x_i(kd-0)$ – количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k\in\mathbb{N}$, зависящее от долей ресурса $\ell(1),\ \ldots,\ \ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i\geqslant 0$ – стоимость ресурса i-го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса равна $Y(k)=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i(k)\ell_i(k)$. Для любого $x(0)\in\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим функцию, введённую в статье [10]:

$$H_*(\overline{\ell},x(0))\equiv\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}Y(j)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}C_iX_i(j)\ell_i(j),\tag{11}$$

которая называется *средней временно́й выгодой* от извлечения ресурса. Если предел (11) существует, будем обозначать его $H(\overline{\ell},x(0))$.

В данной работе получены оценки функции (11), выполненные с вероятностью единица, для структурированной популяции в случае $n>1$. Описан способ добычи ресурса для режима сбора на бесконечном промежутке времени, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для её дальнейшего восстановления.

Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, заданную системой (10). Пусть $x(k)$ равно количеству ресурса после сбора в момент τ_k, тогда

$$X(k+1)=\varphi(d,x(k))\quad \text{и}\quad x(k)=(1-\ell(k))X(k).$$

Если $\ell_i(k)=u_i$ для всех $k\in\mathbb{N}$, то $X(k)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$X(k+1)=\varphi(d,(1-u)X(k)),\quad k\in\mathbb{N}.\tag{12}$$

Обозначим через $S(u)=(S_1(u),\ldots,S_n(u))$ неподвижную точку уравнения (12), тогда $S(u)=$ $=\varphi(d,(1-u)S(u))$. Пусть $s(u)\equiv(1-u)S(u)$; отметим, что

$$s_i(u)=(1-u_i)S_i(u),\quad \varphi_i(d,s(u))=S_i(u),\quad i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим случайные величины $\ell_i(k)=\min\{\omega_i(k),u_i\}$, $i=\overline{1,n}$, $k\in\mathbb{N}$, и обозначим через $M\ell_i=M\ell_i(k)$ их математическое ожидание.

Теорема 2. *Пусть выполнено свойство А. Тогда если $x(0)\geqslant s(u)$, то для почти всех $\sigma\in\Sigma$ справедлива оценка*

$$H_*(\overline{\ell},x(0))\geqslant\sum_{i=1}^{n}C_iS_i(u)M\ell_i.$$

Доказательство. Напомним, что через $X_i(k)$ и $x_i(k)$ обозначены количества ресурса i-го вида до сбора и после сбора в момент kd; тогда $x_i(k)=(1-\ell_i(k))X_i(k)$, $k\in\mathbb{N}$.

По свойству А если $x_i(0)\geqslant s_i(u)$, то $X_i(1)=\varphi_i(d,x(0))\geqslant\varphi_i(d,s(u))=S_i(u)$, $i=\overline{1,n}$. Из неравенств $\ell_i(k)\leqslant u_i$ получаем

$$x_i(1)=(1-\ell_i(1))X_i(1)\geqslant(1-u_i)X_i(1)\geqslant(1-u_i)S_i(u)=s_i(u),\quad i=\overline{1,n}.$$

Далее $X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geqslant \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$. Аналогично получаем, что $X_i(k) \geqslant S_i(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$. Дальнейшее доказательство следует из усиленного закона больших чисел Колмогорова и определения средней временно́й выгоды.

Пример. Рассмотрим модель взаимодействия двух видов типа симбиоз:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_1x_2 - cx_1^2, \quad \dot{x}_2 = ax_2 + bx_1x_2 - cx_2^2, \tag{13}$$

где $a > 0$, $c > b > 0$. Найдём оценку средней временно́й выгоды в предположении, что случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Отметим, что если функция распределения F случайной величины $\omega_i(k)$ абсолютно непрерывна, то математическое ожидание $\ell_i(k)$ равно

$$M\ell_i(k) = \int\limits_0^u tf(t)\,dt + u(1 - F(u)), \quad i = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где через f обозначена плотность данного распределения (см. [10]). Поскольку $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то их плотность $f(t) = 1$ при $t \in$ $\in [0, 1]$ и функция распределения $F(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, из (14) следует, что

$$M\ell_i(k) = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Решением системы (13), удовлетворяющим начальному условию $x_1(0) = x_2(0)$, является функция $\varphi(t, x(0)) = (\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0)))$, где

$$\varphi_1(t, x(0)) = \varphi_2(t, x(0)) = \frac{ax_1(0)e^{at}}{a + (c - b)x_1(0)(e^{at} - 1)}, \quad t \geqslant 0.$$

Пусть $u_1 = u_2 = u < 1 - e^{-ad}$, тогда уравнение (12) имеет неподвижную положительную точку с координатами

$$S_1(u) = S_2(u) = \frac{a(e^{ad}(1 - u) - 1)}{(c - b)(1 - u)(e^{ad} - 1)}.$$

В силу теоремы 2 и равенства (15) получаем, что при $x_i(0) \geqslant s_i(u) = (1 - u)S_i(u)$, $i = 1, 2$, для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$H_*(\overline{\ell}, x(0)) \geqslant \frac{a(C_1 + C_2)(e^{ad}(1 - u) - 1)}{(c - b)(1 - u)(e^{ad} - 1)}\left(u - \frac{u^2}{2}\right), \quad \text{где} \quad u < 1 - e^{-ad}.$$

В заключении отметим, что свойство монотонности решений систем относительно начальных условий можно применить для оценки других характеристик сбора ресурса, одной из которых является суммарный доход от эксплуатации популяции с учётом дисконтирования [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noutsos D., Tsatsomeros M.J.* Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM J. on Matrix Anal. and Appl. 2008. V. 30. № 2. P. 700–712.
2. *Wazewski T.* Systemes des equations et des inegalites differentieles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Ann. de la Societe Polonaise de Math. 1950. V. 23. P. 112–166.
3. *Кузенков О.А., Рябова Е.А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород, 2007.
4. *Zaslavsky B.G.* Eventually nonnegative realization of difference control systems // Dynamical Systems and Related Topics. Adv. Ser. Dynam. Systems. V. 9. New Jersey, 1991. P. 573–602.
5. *Angeli D., Sontag E.D.* Monotone control systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. V. 48. № 10. P. 1684–1698.

6. *Домошницкий А.И.* О покомпонентной применимости теоремы Чаплыгина к системе линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1699–1705.
7. *Agarval R.P., Domoshnitsky A.* On positivity of several components of solution vector for systems of linear functional differential equations // Glasgow Math. J. 2010. V. 52. P. 115–136.
8. *Мастерков Ю.В., Родина Л.И.* Оценка средней временнóй выгоды для стохастической структурированной популяции // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. С. 41–49.
9. *Ризниченко Г.Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1. Ижевск, 2002.
10. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 48–58.
11. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28. № 2. С. 213–221.
12. *Rodina L.I., Hammadi A.H.* Optimization problems for models of harvesting a renewable resourse // J. of Math. Sci. 2020. V. 25. № 1. P. 113–122.

Владимирский государственный университет
имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,
Национальный исследовательский
технологический университет “МИСиС”

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.
После доработки 15.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1029–1045

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.8

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ “СИЛЬНОЙ” ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© 2023 г. А. Г. Елисеев, Т. А. Ратникова, Д. А. Шапошникова

Исследованы сингулярно возмущённые задачи при наличии спектральных особенностей у предельного оператора с использованием метода регуляризации С.А. Ломова. В частности, построено регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущённой неоднородной смешанной задачи на полуоси для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота у предельного оператора. На основе идеи асимптотического интегрирования задач с нестабильным спектром показано, каким образом следует вводить регуляризирующие функции и дополнительные регуляризирующие операторы, подробно описан формализм метода регуляризации для такого вида особенности, проведено обоснование этого алгоритма и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

DOI: 10.31857/S0374064123080034, EDN: INDIPZ

Введение. С помощью метода регуляризации активно развивается общая теория сингулярных возмущений в условиях стабильности спектра предельного оператора [1–3], которые, если говорить кратко, обеспечивают такое же поведение спектральных характеристик оператора (равномерное по независимой переменной), как и при постоянном спектре. Задачи с нестабильным спектром начали изучать около 50 лет назад, были получены (с определённой долей искусственных приёмов) асимптотические решения неоднородных задач с точками поворота и других задач с нарушением условий стабильности спектра. В результате стало очевидно, что в условиях нестабильного спектра существенно особые сингулярности в неоднородных задачах определяются не только общим числом точек спектра предельного оператора, как это имеет место при стабильном спектре, но и числом нулей у отдельных точек спектра переменного оператора. Тщательный анализ имеющихся результатов привёл к разработке общей теории асимптотического интегрирования для задач, в которых переменный предельный оператор дискретно необратим (т.е. необратим в нулях точек спектра). Метод регуляризации классифицирует три группы точек поворота.

1. “Простая” точка поворота – собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга, одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль [4].

2. “Слабая” точка поворота – хотя бы два собственных значения пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остаётся гладким по t [5].

3. “Сильная” точка поворота – хотя бы два собственных значения пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис в точках пересечения теряет гладкость по t [6].

Классические точки поворота, которые изучали Г. Вентцель, Х. А. Крамерс и Л. Бриллюэн, относятся к “сильным” точкам поворота.

Данная статья развивает метод регуляризации для сингулярно возмущённой задачи Коши для параболического уравнения с “сильной” точкой поворота первого порядка у предельного оператора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2u + h(x,t), \quad t\in(0,T], \quad 0<x<+\infty,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0\leqslant x<+\infty,$$
$$u(0,t)=\psi(t),\quad t\in[0,T],$$
$$f(0)=\psi(0) \tag{1}$$

с условиями:

1) существует число $M>0$ такое, что для любых $k,n\in\mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+n}}{\partial x^k\partial t^n}h(x,t)\right|<M,\quad h(x,t)\in C^\infty(0,+\infty)\times[0,T];$$

2) существует число $M>0$ такое, что для любых $k\in\mathbb{N}$ имеет место оценка $|f^{(k)}(x)|<M$, $f(x)\in C^\infty(0,+\infty)$.

Классическим решением задачи (1) называется функция $u(x,t,\varepsilon)$, имеющая непрерывные производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$, $\partial^2u/\partial x^2$ в области $Q_T=\{(x,t): x\in(0,+\infty),\ t\in(0,T]\}$, непрерывная в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению и начальным условиям при $t=0$. Решение задачи (1) изучается при стремлении параметра $\varepsilon\to+0$, где ε принадлежит некоторой окрестности нуля, т.е. $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Замечание 1. Условия 1) и 2) избыточны для существования решения задачи (1). Они достаточны для построения регуляризованного асимптотического ряда для решения сингулярно возмущённой задачи (1).

Задача (1) относится к классической задаче с "сильной" точкой поворота. Действительно, если перевести уравнение в систему, предварительно сделав замену

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}=v,\quad \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}=x^2u+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-h(x,t),$$

то получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\x^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0&0\\\partial/\partial t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-h\end{pmatrix},$$

где матрица предельного оператора имеет вид

$$A(x)=\begin{pmatrix}0&1\\x^2&0\end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что при $x\neq0$ матрица диагонализируемая, и $e_1(x)=(1,x)^{\mathrm{т}}$, $e_2(x)=(1,-x)^{\mathrm{т}}$ – базис из собственных векторов. При $x=0$ матрица принимает жорданову форму и базисом являются векторы $e_1(0)=(1,0)^{\mathrm{т}}$, $e_1(0)=(0,1)^{\mathrm{т}}$. Базис разрывен в точке $x=0$. В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, используя каноническую форму оператора, зависящего от переменной x, к которой можно привести с помощью гладких преобразований [7]. В данном случае предельный оператор уже имеет каноническую форму, поэтому в построении базиса и канонической формы нет необходимости. Кроме того, оператор $A(x)$ в точке $x=0$ необратим, что приводит к построению дополнительных сингулярных операторов σ_0, σ_1, описывающих сингулярную зависимость решения неоднородных задач от параметра ε. Это связано с тем, что образ оператора $A(x)$ есть не всё пространство непрерывных функций, а подпространство, элементы которого обращаются в нуль, второго порядка в точке $x=0$.

2. Формализм метода регуляризации. Регуляризирующую функцию будем искать в виде $e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}$. Сделав замену $u(x,t)=e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}v(x,t)$ в однородном уравнении задачи (1), получим

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-x^2\right)v(x,t)+\varepsilon\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}v(x,t)+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)-\varepsilon^2\frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x^2}=0.$$

Выберем регуляризирующую функцию как решение задачи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-x^2=0,\quad \varphi(x,0)=0.$$

Начальное условие для функции $\varphi(x,t)$ выбрано так, чтобы в дальнейшем для $v(x,t,\varepsilon)$ оно не содержало сингулярной зависимости от ε. Кроме того, при таком выборе начальное условие для $v(x,t,\varepsilon)$ наследует начальное условие задачи (1).

Введём обозначения $p=\partial\varphi/\partial t$, $q=\partial\varphi/\partial x$, получим систему уравнений

$$p+q^2=x^2,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+2q\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial q}{\partial t}+2q\frac{\partial q}{\partial x}=2x,$$

$$\varphi(x,0)=0,\quad q(x,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,0)=0.$$

Запишем уравнения характеристик

$$dt=\frac{dx}{2q}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{2x}=\frac{d\varphi}{p+2q^2}.$$

Параметризуем ось Ox, $x=s$. Тогда $p=s^2$, $q^2=x^2-s^2$. Последовательно получаем серию решений

$$2t=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-s^2}}{s},\quad \varphi=\frac{x\sqrt{x^2-s^2}}{2}.$$

Из первого выражения находим параметр $s=x/\operatorname{ch}(2t)$. Подставив его во второе выражение, имеем

$$\varphi(x,t)=\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2}.$$

Отсюда запишем регуляризирующую функцию в виде

$$\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right).$$

Дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы, связанные с точечной необратимостью предельного оператора, строятся с помощью фундаментального решения [8]. Их задача – вложить правую часть уравнения в образ предельного оператора. Предельный оператор получается, если положить в уравнении задачи (1) $\varepsilon=0$. Фундаментальное решение (в литературе называется *ядро Мелера*) уравнения (1), согласно работе [8], имеет вид

$$K(x,\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\operatorname{sh}(2t)}}\exp\left(-\operatorname{cth}(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}+\frac{x\xi}{\varepsilon\operatorname{sh}(2t)}\right)$$

и обладает свойством $K(x,\xi,0)=\delta(x-\xi)$. Так как работа [8] труднодоступна, получим фундаментальное решение с помощью преобразования Фурье (см. п. 4).

Проинтегрировав ядро Мелера по переменной ξ, получим дополнительные регуляризирующие сингулярные операторы

$$\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t(\cdot)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi=\int\limits_0^t(\cdot)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau,$$

$$\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)=\int\limits_0^t(\cdot)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi=x\int\limits_0^t(\cdot)\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau.$$

Фактически сингулярные операторы $\sigma_0(x,t,\varepsilon)(\cdot)$, $\sigma_1(x,t,\varepsilon)(\cdot)$ являются решениями уравнения теплопроводности с правыми частями ε, εx. Действия операторов на функцию запишутся как

$$\sigma_0(f(t)) = \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau = f(t) * \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right),$$

$$\sigma_1(f(t)) = x \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right) d\tau =$$
$$= x f(t) * \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right).$$

Введём оператор $T_\varepsilon = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} - \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$. Тогда

$$T_\varepsilon(\sigma_0(f(t))) = \varepsilon f(t) + f(t) * T_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) = \varepsilon f(t),$$

$$T_\varepsilon(\sigma_1(f(t))) = \varepsilon x f(t) + f(t) * T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right) = \varepsilon x f(t).$$

Замечание 2. Доказательство того, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right) = 0, \quad T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right) = 0,$$

приведено в приложении 2.

Дополнительный сингулярный интегральный оператор для описания параболического пограничного слоя в точке $x = 0$ находится из решения задачи

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 1.$$

Граничный оператор в результате решения имеет вид

$$G(\Psi) = \int\limits_0^t \Psi(\tau) W(x, t-\tau, \varepsilon)\, d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(\sqrt{2\varepsilon \operatorname{th}(2t)})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}} \Psi\left(t - \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{2b}{1-b}\right)\right) e^{-z^2}\, dz,$$

где

$$W(x,t,\varepsilon) = \frac{4x}{\sqrt{\varepsilon\pi} \sqrt{2 \operatorname{sh}(2t)}^3} \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{cth}(2t)}{2\varepsilon}\right), \quad b = \frac{x^2}{2\varepsilon z^2}.$$

Отметим свойства оператора G:

$$T_\varepsilon G(\Psi) = 0, \quad G(\Psi)|_{x=0} = \Psi(t).$$

Регуляризованное решение задачи (1) ищем в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = v(x,t,\varepsilon) \exp\left(-\frac{x^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right) + G(\Psi(t,\varepsilon)) + \sigma_0(y(t,\varepsilon)) + \sigma_1(z(t,\varepsilon)) + w(x,t,\varepsilon). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и выделив слагаемые при регуляризирующих функциях, получим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \Psi(t,\varepsilon)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y(t,\varepsilon)*T_\varepsilon\biggl(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,\quad z(t,\varepsilon)*T_\varepsilon\biggl(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,$$

$$x^2w=h(x,t)-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\varepsilon y(t,\varepsilon)-\varepsilon xz(t,\varepsilon),\quad v(x,0)+w(x,0)=f(x),$$

$$v(0,t,\varepsilon)+\Psi(t,\varepsilon)+\int\limits_0^t\frac{y(s,\varepsilon)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-s))}}ds+w(0,t,\varepsilon)=\psi(t). \tag{3}$$

Разложив функции $v(x,t,\varepsilon)$, $\Psi(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$, $w(x,t,\varepsilon)$ из (2) по степеням ε:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{\infty}\varepsilon^k(v_k(x,t))e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}+G(\Psi_k(t))+\sigma_0(y_k(t))+\sigma_1(z_k(t))+w_k(x,t),$$

получим из системы (3) серию итерационных задач:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_k}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v_k=\frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2},\quad \Psi_k(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_k(t)*T_\varepsilon\biggl(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,\quad z_k(t)*T_\varepsilon\biggl(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,$$

$$x^2w_k=h(x,t)\delta_0^k-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}+\frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2}-y_{k-1}(t)-xz_{k-1}(t),$$

$$v_k(x,0)+w_k(x,0)=f(x)\delta_k^0,$$

$$v_k(0,t)+\Psi_k(t)+\int\limits_0^t\frac{y_k(s)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-s))}}ds+w_k(0,t)=\delta_k^0\psi(t),\quad k=\overline{-1,\infty}.$$

Здесь δ_k^0 – символ Кронекера: $\delta_0^0=1$, $\delta_k^0=0$ при $k\neq 0$.

Замечание 3. Разложение по ε начинается со степени -1, так как правая часть уравнения в общем случае не принадлежит образу предельного оператора умножения на функцию x^2.

Система на итерационном шаге $k=-1$ имеет вид

$$\frac{\partial v_{-1}}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_{-1}}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v_{-1}=0,\quad \Psi_{-1}(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_{-1}(t)*T_\varepsilon\biggl(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,$$

$$z_{-1}(t)*T_\varepsilon\biggl(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,$$

$$x^2w_{-1}=0,\quad v_{-1}(x,0)+w_{-1}(x,0)=0,$$

$$v_{-1}(0,t)+\Psi_{-1}(t)+\int\limits_0^t\frac{y_{-1}(s)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-s))}}+w_{-1}(0,t)=0.$$

Решения на итерационном шаге $k-1$ будут $v_{-1}(x,t)\equiv 0$, $w_{-1}(x,t)\equiv 0$, а $\Psi_{-1}(t)$, $y_{-1}(t)$, $z_{-1}(t)$ – произвольные функции. Для их определения рассмотрим итерационную задачу на шаге $k=0$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial v_0}{\partial x}+\mathrm{th}\,(2t)v_0=0,\quad \Psi_0(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_0(t)*T_\varepsilon\biggl(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,\quad z_0(t)*T_\varepsilon\biggl(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)=0,$$

$$x^2w_0=h(x,t)-y_{-1}(t)-xz_{-1}(t),\quad v_0(x,0)+w_0(x,0)=f(x),$$

$$v_0(0,t)+\Psi_0(t)+\int\limits_0^t\frac{y_0(\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\,d\tau+w_0(0,t)=\psi(t).\tag{4}$$

Функции $y_0(t)$, $z_0(t)$ на данном шаге произвольны. Для разрешимости уравнения относительно $w_0(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $y_{-1}(t)=h(0,t)$, $z_{-1}(t)=\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,t)$. Отсюда имеем

$$w_0(x,t)=\frac{1}{x^2}\biggl(h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\biggr)=h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)$ – гладкая функция. Определив $y_{-1}(t)$, найдём функцию $\Psi_{-1}(t)$ из граничного условия:

$$\Psi_{-1}(t)=-\int\limits_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\,d\tau.$$

Теперь можем записать решение на итерационном шаге $k=-1$:

$$u_{-1}(x,t)=G(\Psi_{-1}(t))+\int\limits_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))}}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau+$$

$$+\,x\int\limits_0^t\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}\frac{1}{(\sqrt{\mathrm{ch}\,(2(t-\tau))})^3}\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau.$$

Для решения уравнения относительно $v_0(x,t)$ сделаем замену $v_0(x,t)=\alpha(x,t)/\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}$. Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2x\,\mathrm{th}\,(2t)\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}=0.$$

Запишем уравнение характеристик

$$dt=\frac{dx}{2x\,\mathrm{th}\,(2t)}=\frac{d\alpha}{0}.$$

Первый интеграл соответственно равен $x/\mathrm{ch}\,(2t)=c_1$. Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x,t)=g_0(x/\mathrm{ch}\,(2t)),$$

где функция $g_0(x,t)$ определяется из начальных условий. Таким образом, общее решение $v_0(x,t)$ имеет вид

$$v_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\,g_0\biggl(\frac{x}{\mathrm{ch}\,(2t)}\biggr).$$

Из начального условия определим произвольную функцию $g_0(x,t)$. При $t=0$ имеем

$$g_0(x)+h_0(x,0)=f(x).$$

Отсюда $g_0(x)=f(x)-h_0(x,0)$ (здесь учитывается, что $\Psi_0(0)=0$). Или в развёрнутом виде

$$g_0(x,t)=f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)=$$

$$=f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)^{-2}\left(h\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)-h(0,0)-\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\right).$$

Для определения произвольных функций $y_0(t)$, $z_0(t)$ рассмотрим задачу на итерационном шаге $k=1$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+2x\operatorname{th}(2t)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\operatorname{th}(2t)v_1=\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2},\quad \Psi_1(t)*T_\varepsilon W(t,\varepsilon)=0,$$

$$y_1(t)*T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0,\quad z_1(t)*T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0,$$

$$x^2w_1=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t)-y_0(t)-xz_0(t),\quad v_1(x,0)+w_1(x,0)=0,$$

$$v_1(0,t)+\Psi_1(t)+\int\limits_0^t\frac{y_1(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\,d\tau+w_1(0,t)=0. \tag{5}$$

Для определения $w_1(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$y_0(t)=-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t),\quad z_0(t)=-\frac{\partial^2 h_0}{\partial x\partial t}(0,t).$$

Теперь из граничного условия задачи (4) определим функцию $\Psi_0(t)$. Для этого рассмотрим граничное условие при $x=0$:

$$\Psi_0(t)=\psi(t)-v_0(0,t)+\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\frac{\partial h_0}{\partial\tau}(0,\tau)\,d\tau-w_0(0,t).$$

Таким образом, на данном шаге найдено слагаемое на нулевом шаге, которое можно записать в виде

$$u_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\left[f\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-h_0\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)+G(\Psi_0(t))-$$

$$-\int\limits_0^t\frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial\tau}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau-$$

$$-x\int\limits_0^t\frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau+\frac{1}{x^2}\left(h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\right).$$

Теперь можно записать главный член асимптотики

$$u_{gl}(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\left[G(\Psi_{-1}(t))+\int\limits_0^t\frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau+\right.$$

$$
+\,x\int\limits_0^t \frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}\,\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau\biggr]+
$$

$$
+\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\biggl[f\biggl(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\biggr)-h_0\biggl(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\biggr)\biggr]\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\biggr)+G(\Psi_0(t))\,-
$$

$$
-\int\limits_0^t \frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial \tau}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau\,-
$$

$$
-\,x\int\limits_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)\,\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau+\frac{1}{x^2}\biggl(h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\biggr).
$$

Для практического использования можно воспользоваться леммой 1 (см. п. 3). Тогда формула главного члена упрощается:

$$
u_{gl}(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\biggl[\Psi_{-1}(t)\operatorname{erfc}\biggl(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\operatorname{th}(2t)}}\biggr)+\int\limits_0^t \frac{h(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau\,+
$$

$$
+\,x\int\limits_0^t \frac{\partial h(0,\tau)}{\partial x}\,\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau\biggr]+
$$

$$
+\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\biggl[f\biggl(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\biggr)-h_0\biggl(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\biggr)\biggr]\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\biggr)+
$$

$$
+\,\Psi_0(t)\operatorname{erfc}\biggl(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\operatorname{th}(2t)}}\biggr)-\int\limits_0^t \frac{\partial h_0(0,\tau)}{\partial \tau}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau\,-
$$

$$
-\,x\int\limits_0^t \frac{\partial^2 h_0}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)\,\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau\,+
$$

$$
+\,\frac{1}{x^2}\biggl(h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\biggr)+O(\varepsilon^\infty).
$$

Здесь

$$
\operatorname{erfc}\biggl(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\operatorname{th}(2t)}}\biggr)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\operatorname{th}(2t)}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz,
$$

а символом $O(\varepsilon^\infty)$ в асимптотическом анализе обозначается асимптотический нуль, т.е. слагаемые, убывающие быстрее любой степени ε.

Теперь можно записать решение $w_1(x,t)$ системы (5):

$$
w_1(x,t)=-\frac{1}{x^2}\biggl(\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t)-x\frac{\partial^2 h_0}{\partial t\partial x}(0,t)\biggr)=h_1(x,t),
$$

где $h_1(x,t)$ – гладкая функция.

Решим неоднородное относительно $v_1(x,t)$ уравнение

$$
\frac{\partial v_1}{\partial t}+2x\operatorname{th}(2t)\frac{\partial v_1}{\partial x}+\operatorname{th}(2t)v_1=\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}.
$$

Сделав замену $v_1(x,t)=\alpha(x,t)/\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}$ и вычислив $\partial^2 v_0/\partial x^2$, получим уравнение

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+2x\operatorname{th}(2t)\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}=\frac{g_0''(x/\operatorname{ch}(2t))}{\operatorname{ch}^2(2t)}.$$

Запишем уравнение характеристик

$$dt=\frac{dx}{2x\operatorname{th}(2t)}=\frac{\operatorname{ch}^2(2t)d\alpha}{g_0''(x/\operatorname{ch}(2t))}.$$

Первые интегралы соответственно равны

$$\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}=c_1,\quad \alpha(x,t)-\frac{1}{2}\operatorname{th}(2t)g_0''(c_1)=c_2.$$

Отсюда получим общее решение

$$\alpha(x,t)=\frac{1}{2}\operatorname{th}(2t)g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)+g_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right),$$

где функция g_1 определяется из начальных условий. Таким образом, решение $v_1(x,t)$ имеет вид

$$v_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\left[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2}g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)+g_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)\right].$$

Определим функцию $g_1(x/\operatorname{ch}(2t))$. Воспользуемся начальным условием $g_1(x)=-h_1(x,0)$. Следовательно,

$$v_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\left[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2}g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)-h_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)},0\right)\right].$$

Функции $y_1(t)$, $z_1(t)$ находятся на следующем итерационном шаге из условия разрешимости уравнения относительно $w_2(x,t)$:

$$y_1(t)=-\frac{\partial h_1}{\partial t}(0,t)+\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0,t),\quad z_1(t)=-\frac{\partial^2 h_1}{\partial t\partial x}(0,t)+\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0,t).$$

Таким образом, найдено слагаемое на шаге ε, которое можно записать следующим образом:

$$u_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2t)}}\left[\frac{\operatorname{th}(2t)}{2}g_0''\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)+g_1\left(\frac{x}{\operatorname{ch}(2t)}\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)+$$

$$+G(\Psi_1(t))-\int\limits_0^t\frac{\dfrac{\partial h_1}{\partial\tau}(0,\tau)-\dfrac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(0,\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau-$$

$$-x\int\limits_0^t\left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial\tau\partial x}(0,\tau)-\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}(0,\tau)\right)\frac{1}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\left(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\right)d\tau-$$

$$-\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial h_0}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial h_0}{\partial t}(0,t)-x\frac{\partial^2 h_0}{\partial t\partial x}(0,t)\right).$$

По этой схеме (по индукции) находятся следующие слагаемые асимптотического ряда.

3. Оценка остаточного члена. Пусть решены $N+1$ итерационных задач. Тогда решение задачи Коши можно представить в виде

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^k u_k(x,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \tag{6}$$

где $R_N(x,t,\varepsilon)$ – остаток, и слагаемые

$$u_k=v_k(x,t)e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}+G(\Psi_k(t))+\sigma_0(y_k(t))+\sigma_1(z_k(t))+w_k(x,t).$$

Подставив (6) в (1), получим задачу для остатка $R_N(x,t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon\frac{\partial R_N}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2}+x^2R_N=H(x,t,\varepsilon),\quad R_N(0,t,\varepsilon)=0,\quad R_N(x,0,\varepsilon)=0, \tag{7}$$

где

$$H(x,t,\varepsilon)=x^2w_{N+1}(x,t)+\varepsilon\biggl(\frac{\partial^2 v_N(x,t)}{\partial x^2}e^{-\varphi(x,t)/\varepsilon}+\frac{\partial^2 w_N(x,t)}{\partial x^2}\biggr).$$

Заметим, что так как итерационные задачи решены вплоть до ε^{N+1}, то слагаемое

$$x^2w_{N+1}(x,t)=O(x)$$

(см. приложение 3).

Теорема (оценка остаточного члена). *Пусть выполнены требования:*

1) условия 1) и 2) для задачи (1);

2) $H(x,t,\varepsilon)=O(x)$ *при любых* $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$ *и* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Тогда существует $C>0$ *такое, что* $|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant C$ *при всех* $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]$ *и* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Доказательство. Продолжим правую часть $H(x,t,\varepsilon)$ и начальное условие нулями на отрицательную полуось Ox. Используя фундаментальное решение Мелера, запишем решение задачи (7) в виде

$$R_N(x,t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H(\xi,\tau,\varepsilon)K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi.$$

Оценим с учётом условия 2) остаток по модулю:

$$|R_N(x,t,\varepsilon)|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|H(\xi,\tau,\varepsilon)|K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty}\xi K(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\biggl(\frac{\sqrt{\operatorname{sh}(2(t-\tau))}}{\operatorname{ch}(2(t-\tau))}\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{cth}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)+$$

$$+\frac{x}{(\sqrt{\operatorname{ch}(2(t-\tau))})^3}\exp\biggl(-\frac{x^2\operatorname{th}(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\biggr)\,d\tau\leqslant\frac{C_2}{\varepsilon}.$$

Запишем остаточный член в виде $R_N=u_{N+1}+\varepsilon R_{N+1}$. Тогда $|R_N|\leqslant|u_{N+1}|+\varepsilon C_2/\varepsilon\leqslant C$.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$G(\Psi(t))=\Psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\operatorname{th}(2t)}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz+O(\varepsilon^\infty),\quad\delta>0,\quad x\in[\delta,+\infty),\quad t\in[0,T].$$

Доказательство. Представим функцию в виде

$$G(\psi(t))=\psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz+\psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\biggl(\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}-1\biggr)e^{-z^2}\,dz+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}\biggl(\psi\biggl(t-\frac{1}{4}\ln\biggl(1+\frac{2b}{1-b}\biggr)\biggr)-\psi(t)\biggr)e^{-z^2}\,dz.$$

Оценим второе слагаемое

$$\biggl|\psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\biggl(\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}-1\biggr)e^{-z^2}\,dz\biggr|\leqslant$$

$$\leqslant M\biggl|\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\biggl(\frac{1}{\sqrt[4]{1-\mathrm{th}^2(2t)}}-1\biggr)e^{-z^2}\,dz\biggr|\leqslant M_1\exp\biggl(-\frac{x^2}{4\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}\biggr)=O(\varepsilon^\infty)$$

и третье слагаемое (в силу непрерывности $\psi(t)$ на $[0,T]$)

$$\biggl|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{\Bigl(\psi\Bigl(t-\frac{1}{4}\ln\Bigl(1+\frac{2b}{1-b}\Bigr)\Bigr)-\psi(t)\Bigr)e^{-z^2}}{\sqrt[4]{1-b^2}}\,dz\biggr|\leqslant$$

$$\leqslant 2M\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}e^{-z^2}\,dz\leqslant M_2\exp\biggl(-\frac{x^2}{4\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}\biggr)=O(\varepsilon^\infty).$$

Складывая эти оценки, получаем выражение

$$G(\Psi(t))=\Psi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz+O(\varepsilon^\infty),\quad \delta>0,\quad x\in[\delta,+\infty),\quad t\in[0,T].$$

Функция $(2/\sqrt{\pi})\int_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz$ имеет обозначение $\mathrm{erfc}\,(x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)})$. Тогда $G(\Psi(t))$ можно записать в виде

$$G(\Psi(t))=\Psi(t)\,\mathrm{erfc}\,\biggl(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}\biggr)+O(\varepsilon^\infty).$$

4. Фундаментальное решение Мелера. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2u=0,\quad u(x,0)=\delta(x-\xi).$$

Сделав замену $u(x,t)=e^{-x^2/(2\varepsilon)-t}v(x,t)$, запишем её как

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2x\frac{\partial v}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\quad v(x,0)=e^{\xi^2/(2\varepsilon)}\delta(x-\xi).$$

Применим в этой задаче преобразование Фурье $F(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t)e^{-i\lambda x}\,dx$ и получим относительно F задачу

$$\frac{\partial F}{\partial t}-2\lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda}=(-\varepsilon\lambda^2+2)F, \quad F(\lambda,0)=e^{\xi^2/(2\varepsilon)-i\lambda\xi},$$

решение которой имеет вид

$$F(\lambda,t)=\exp\biggl(2t+\frac{\xi^2}{2\varepsilon}-\frac{\varepsilon\lambda^2}{4}-i\lambda\xi e^{2t}\biggr).$$

После обратного преобразования Фурье с учётом замены $u(x,t)=v(x,t)e^{-x^2/(2\varepsilon)-t}$ найдём решение исходной задачи

$$u(x,t)=\exp\biggl(-\frac{x^2-\xi^2}{2\varepsilon}+t\biggr)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\biggl(\frac{\varepsilon\lambda^2}{4}(e^{4t}-1)-i\lambda(\xi e^{2t}-x)\biggr)\,d\lambda.$$

Выделив полный квадрат в показателе экспоненты и вычислив интеграл Пуассона, окончательно получим

$$K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\exp\biggl[-\mathrm{cth}\,(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}+\frac{x\xi}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}\biggr].$$

5. Построение граничного оператора. Решим смешанную задачу

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2u=0, \quad u(x,0)=0, \quad u(0,t)=1.$$

Сделаем замену $u(x,t)=e^{-x^2/(2\varepsilon)}v(x,t)$ и в результате получим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2x\frac{\partial v}{\partial x}+v=\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \quad v(x,0)=0, \quad v(0,t)=1.$$

Проведём синус-преобразование. Тогда будем иметь в пространстве образов задачу для линейного относительно F уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t}-2\lambda\frac{\partial F}{\partial \lambda}=(-\varepsilon\lambda^2+1)F+\varepsilon\lambda, \quad F(\lambda,0)=0, \tag{8}$$

где введено обозначение

$$F(\lambda,t)=\int\limits_0^{\infty} v(x,t)\sin(\lambda x)\,dx.$$

Запишем характеристическую систему для линейного уравнения в задаче (8):

$$dt=\frac{d\lambda}{-2\lambda}=\frac{dF}{(-\varepsilon\lambda^2+1)F+\varepsilon\lambda}.$$

Система первых интегралов для неё имеет вид

$$\lambda e^{2t}=C_1, \quad e^{-\varepsilon^2\lambda^2/4}\sqrt{\lambda}F-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty} e^{-\varepsilon\mu^2/4}\sqrt{\mu}\,d\mu=C_2.$$

Теперь несложно, учитывая начальное условие, получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda,t)=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\lambda}^{\lambda e^{2t}} e^{\varepsilon(\lambda^2-\mu^2)/4}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,d\mu.$$

Замена переменной $\mu=\lambda e^{2(t-\tau)}$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению

$$F(\lambda,t)=\varepsilon\int\limits_0^t \exp\biggl(-\frac{\varepsilon}{4}\lambda^2(e^{4(t-\tau)}-1)+3(t-\tau)\biggr)\,d\tau.$$

Осталось осуществить обратное синус-преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи:

$$v(x,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}F(\lambda,t)\sin(\lambda x)\,d\lambda=\frac{2\varepsilon}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\biggl(\int\limits_0^t \exp\biggl(-\frac{\varepsilon}{4}\lambda^2(e^{4(t-\tau)}-1)+3(t-\tau)\biggr)\,d\tau\biggr)\sin(\lambda x)\,d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования (что возможно в силу равномерной сходимости несобственного интеграла) и проделав несложные преобразования, получим

$$v(x,t)=\frac{4x}{\varepsilon\pi}\int\limits_0^t \frac{e^{-x^2/(\varepsilon a)}}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,(2(t-\tau))}^3}\,d\tau,$$

где $a=e^{4(t-\tau)}-1$. Отсюда найдём

$$u(x,t)=\frac{4x}{\varepsilon\pi}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,(2(t-\tau))}^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{cth}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau.$$

Решение для произвольного граничного условия $\psi(t)$ запишется в виде

$$u(x,t)=\frac{4x}{\varepsilon\pi}\int\limits_0^t \psi(\tau)\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,(2(t-\tau))}^3}\,\exp\biggl(-\frac{x^2\,\mathrm{cth}\,(2(t-\tau))}{2\varepsilon}\biggr)\,d\tau. \tag{9}$$

Дадим другое представление решения (9), предварительно сделав замену переменных $z^2=$ $=x^2(2\varepsilon)^{-1}\,\mathrm{cth}\,(2(t-\tau))$:

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{1-b^2}}\psi\biggl(t-\frac{1}{4}\ln\biggl(1+\frac{2b}{1-b}\biggr)\biggr)e^{-z^2}\,dz,\quad b=\frac{x^2}{2\varepsilon z^2}.$$

Заключение. Как уже было отмечено ранее, основной проблемой применения метода регуляризации С.А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра – достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного параболического уравнения со спектральной особенностью в виде “сильной” точки поворота задача построения регуляризованной асимптотики, как выяснилось, состоит из трёх частей:

1) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $t=0$;

2) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора;

3) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $x=0$.

В данной статье описанные проблемы разрешены путём введения регуляризирующей функции и трёх дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи преодолены, что подтверждается результатами наших исследований.

Приложение 1. Покажем, что функция

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\biggl(-\mathrm{cth}\,(2t)\frac{x^2+\xi^2}{2\varepsilon}+\frac{x\xi}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,2t}\biggr)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}+\frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]f(\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

где $f(x)$ – непрерывная ограниченная функция, удовлетворяет задаче

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2u,\quad u(x,0)=f(x).$$

Заметим, что интеграл (10) сходится равномерно в области $\{(x,t):x\in(0,+\infty),\ t\in[0,T]\}$. Действительно,

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}+\frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]|f(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}\right)\right]|f(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-z^2}|f(x\,\mathrm{ch}\,(2t)+z\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)})|\,dz\leqslant M,$$

так как $(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}=z,\ \ d\xi=\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}\,dz.$

Шаг 1. Формальное дифференцирование и подстановка формальных производных в уравнение. Найдём формально (т.е. не задумываясь над правомочностью этих действий) производные от функции $u(x,t)$, входящие в уравнение. Затем проверим, что полученный интеграл удовлетворяет однородному уравнению в задаче (1).

Вычислим входящие в уравнение частные производные

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl(-\varepsilon\,\mathrm{cth}\,(2t)+\frac{x^2+\xi^2-2x\xi\mathrm{ch}\,(2t)}{\mathrm{sh}^2(2t)}\biggr)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl(-\varepsilon\,\mathrm{cth}\,(2t)-x^2+\frac{(x\,\mathrm{ch}\,(2t)-\xi)^2}{\mathrm{sh}^2(2t)}\biggr)f(\xi)\,d\xi,$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl(-\varepsilon\,\mathrm{ch}\,(2t)+\frac{x^2\,\mathrm{ch}^2(2t)-2x\xi\mathrm{ch}\,(2t)+\xi^2}{\mathrm{sh}^2(2t)}\biggr)f(\xi)\,d\xi=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\left(-\varepsilon \operatorname{ch}(2t) + \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)}\right) f(\xi)\, d\xi.$$

Здесь многоточием обозначен показатель экспоненты фундаментального решения.

Подставив вычисленные производные u_t, u_{xx} в уравнение, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon \operatorname{sh}(2t)}} \int\limits_0^\infty \exp(\ldots)\biggl[-\varepsilon \operatorname{cth}(2t) - x^2 + \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)} +$$

$$+ \varepsilon \operatorname{ch}(2t) - \frac{(x \operatorname{ch}(2t) - \xi)^2}{\operatorname{sh}^2(2t)} + x^2\biggr] f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Шаг 2. Обоснование правомочности формальных действий. Для того чтобы показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению, нужно обосновать возможность дифференцирования по x и t под знаком интеграла при $t > 0$, $0 < x < +\infty$. Докажем этот факт при $t > t_0 > 0$, откуда в силу произвольности t_0 этот факт будет иметь место при $t > 0$. Заметим, что если $u(x,t)$ дифференцировать по x и t произвольное число раз, то будет выделяться множитель $(\xi - x\operatorname{ch}(2t))$ в положительной степени, а множитель $\operatorname{sh}(2t)$ – в отрицательной степени. Таким образом, вопрос сводится к равномерной сходимости интеграла

$$J = (\operatorname{sh}(2t))^{-k} 2t \int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x\operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right] (\xi - x\operatorname{ch}(2t))^m f(\xi)\, d\xi.$$

Оценим интеграл

$$|J| \leqslant (\operatorname{sh}(2t))^{-k} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x\operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)} + \frac{\xi^2 \operatorname{th}(2t)}{2\varepsilon}\right)\right] |\xi - x\operatorname{ch}(2t)|^m |f(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{sh}(2t))^{-k} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi - x\operatorname{ch}(2t))^2}{\varepsilon \operatorname{sh}(4t)}\right)\right] |\xi - x\operatorname{ch}(2t)|^m |f(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{sh}(2t))^{-k+(m+1)/2} \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2\varepsilon}\right) z^m |f(\sqrt{\operatorname{sh}(2t)}z + x\operatorname{ch}(2t))|\, dz,$$

где $(\xi - x\operatorname{ch}(2t))/\sqrt{\operatorname{sh}(2t)} = z$, $d\xi = \sqrt{\operatorname{sh}(2t)}\, dz$.

Учитывая, что $|f(x)| \leqslant M$, получаем

$$e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m |f(\sqrt{\operatorname{sh}(2t)}z + x\operatorname{ch}(2t))| \leqslant M e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m.$$

Но функция $e^{-z^2/(2\varepsilon)} z^m$ интегрируема на промежутке $(0, +\infty)$, поэтому интеграл J равномерно сходится при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда следует, что функция $u(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка по x и t при $t > 0$. Кроме того, поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно сходящимися по параметрам x, t в любом замкнутом прямоугольнике $(x,t) \in [0, L] \times [t_0, T]$, $t_0 > 0$, то их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по x и t сколь угодно раз.

Шаг 3. Начальное условие. Функция $u(x,t)$ не определена при $t = 0$. Однако её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, т.е. считать равной в момент

$t=0$ её пределу при $t\to+0$. Так как интеграл (10) сходится равномерно на множестве $(0,+\infty)\times[0,T]$, то возможен переход к пределу под знаком интеграла, т.е.

$$u(x,0)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))^2}{\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(4t)}+\frac{\xi^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right]f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x\,\mathrm{ch}\,(2t)/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}}^{\infty}\lim_{t\to+0}\exp\left(-\frac{z^2}{\mathrm{ch}\,(2t)}\right)f(x\,\mathrm{ch}\,(2t)+z\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)})\,dz=f(x),$$

здесь $(\xi-x\,\mathrm{ch}\,(2t))/\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}=z$, $d\xi=\sqrt{2\varepsilon\,\mathrm{sh}\,(2t)}\,dz$.

Таким образом, функция $u(x,t)$ действительно является решением задачи.

Приложение 2. Докажем, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\,\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0,$$

где $T_\varepsilon=\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}-\varepsilon^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2$.

Найдём производные

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\left(-\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2(2t)}-\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)\right),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\left(x^2\,\mathrm{th}^2(2t)-\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)\right),$$

тогда

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\left(-\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2(2t)}-\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)-x^2\,\mathrm{th}^2(2t)+\varepsilon\,\mathrm{th}\,(2t)+x^2\right)=0.$$

Аналогично доказывается, что

$$T_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,(2t)}^3}\exp\left(-\frac{x^2\,\mathrm{th}\,(2t)}{2\varepsilon}\right)\right)=0.$$

Приложение 3. Уравнение для определения частного решения w_0 имеет вид

$$x^2w_0(x,t)=h(x,t)-h(0,t)-x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t).$$

Отсюда

$$w_0(x,t)=\frac{h(x,t)-h(0,t)-x\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,t)}{x^2}=h_0(x,t),$$

где $h_0(x,t)$ – гладкая функция. Проведём цепочку оценок.

1. $|h_0(x,t)|=\left|0{,}5\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi,t)\right|\leqslant 0{,}5M<M$, где M – константа в задаче (1).

2. $\left|\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial h_0}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 h}{\partial x^3}(\xi_1,t)\right| \leqslant \dfrac{M}{6} < M$ и т.д., т.е. w_0 принадлежит классу ограниченных функций, для которых верна оценка $|w_0| \leqslant M$.

Отсюда следует, что и все частные решения w_k итерационных задач по индукции также принадлежат этому классу: так как

$$w_k = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial x^2} - y_{k-1}(t) - xz_{k-1}(t)\right), \quad k \geqslant 1,$$

то все эти оценки верны для любых w_k.

Оценим

$$|x^2 w_0| = \left|h(x,t) - h(0,t) - x\frac{\partial h}{\partial x}(0,t)\right| \leqslant 2xM,$$

т.е. $x^2 w_0 = O(x)$. Аналогично и $x^2 w_k = O(x)$, $k \geqslant 1$.

Результаты Елисеева А.Г. (постановка задачи, вывод уравнений для регуляризирующих функций, сингулярных операторов для регуляризации правых частей итерационных задач, граничного оператора для описания пограничного слоя в окрестности точки $x = 0$) были получены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSWF-2023-0012).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. *Eliseev A.G., Lomov S.A.* Asymptotic integration of singularly perturbed problems // London Math. Soc. Russ. Math. Surveys. 1988. V. 43. P. 1–63.
4. *Yeliseev A., Ratnikova T., Shaposhnikova D.* Regularized asymptotics of the solution of the singularly perturbed first boundary value problem on the semiaxis for a parabolic equation with a rational “simple” turning point // Mathematics. 2021. № 9. Art. 405.
5. *Елисеев А.Г., Кириченко П.В.* Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии “слабой” точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 733–746.
6. *Елисеев А.Г.* Пример решения сингулярно возмущённой задачи Коши для параболического уравнения при наличии “сильной” точки поворота // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 3. С. 46–59.
7. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 2 (158). С. 101–114.
8. *Mehler F.G.* Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen honerer Ordnung // J. fur die Reine und Angewandte Mathematik. 1866. S. 161–176.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 31.01.2023 г.
После доработки 18.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1046–1056

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.954

ЗАДАЧА О ДВУМЕРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2023 г. М. Б. Зверева

Исследована модель малых пространственных поперечных колебаний струны, когда отклонение любой её точки от положения равновесия характеризуется двумя координатами. При этом предполагается, что в процессе колебаний один из концов струны находится внутри ограниченного, замкнутого, выпуклого множества C, принадлежащего плоскости π, перпендикулярной к отрезку, вдоль которого натянута струна. В свою очередь, множество C может перемещаться в плоскости π, его движение задано отображением $C(t)$. Пока конец струны не соприкоснулся с границей множества $C(t)$, он остаётся свободным. При соприкосновении начинается их совместное перемещение. Получена формула представления решения начально-краевой задачи, описывающей этот колебательный процесс. Рассмотрена задача граничного управления колебательным процессом.

DOI: 10.31857/S0374064123080046, EDN: INHCCO

Введение. Задачам граничного управления и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Особенно можно выделить публикации В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их учеников [1–7], а также статьи А.И. Егорова, Л.Н. Знаменской [8, 9], А.В. Боровских [10], В.В. Провоторова [11]. При изучении таких задач, в первую очередь, исследуются условия, при которых колебательный процесс под воздействием некоторого граничного управления может быть переведен из состояния, определяемого начальными условиями, в заданное финальное состояние.

В настоящей работе изучается начально-краевая задача, описывающая пространственный колебательный процесс с нелинейным краевым условием. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны с ограничителем на перемещение одного из концов. Получена формула представления решения. Для случая, когда время колебаний не превышает длины струны, записан явный вид функции граничного управления.

1. Постановка задачи. Введём декартову систему координат $Oxyz$. Предположим, что вдоль отрезка $[0,l]$ оси Ox натянута струна (положение равновесия), и каждая её точка характеризуется координатой x этой оси. Один из концов струны жёстко закреплен. Другой находится внутри ограниченного, замкнутого, выпуклого множества C (ограничителя), принадлежащего плоскости π, параллельной zOy. Рассмотрим задачу о малых пространственных поперечных колебаниях струны, когда отклонение любой точки струны от положения равновесия в момент времени t описывается двумя координатами: $u^1(x,t)$ характеризует смещение вдоль оси Oy, $u^2(x,t)$ характеризует смещение вдоль оси Oz. Обозначим через $u(x,t)=(u^1(x,t),u^2(x,t))$ вектор перемещения. Условие жёсткого закрепления первого конца струны означает, что $u(0,t)=0$. Пусть множество C, внутри которого находится второй конец струны, может двигаться в плоскости π, и его перемещение описывается отображением $C(t)$. Тогда выполнено условие $u(l,t)\in C(t)$. Пока $u(l,t)$ является внутренней точкой $C(t)$, выполняется условие свободного конца, т.е. $u_x(l,t)=0$. Если происходит соприкосновение соответствующего конца струны с граничной точкой ограничителя, то в течении некоторого времени выполнено условие $u(l,t)=c(t)$, где $c(t)$ – граничная точка $C(t)$. При этом со стороны ограничителя дополнительно возникает сила реакции опоры. Таким образом, должно выполняться условие

$$-u_x(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t)),$$

где множество $N_{C(t)}(u(l,t))$ обозначает внешний нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l,t)\in C(t)$, определяемый как

$$N_{C(t)}(u(l,t))=\{\xi\in R^2:\langle\xi,c-u(l,t)\rangle\leqslant 0\ \text{ для любых }\ c\in C(t)\}.$$

Пусть начальная форма струны задана функцией $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \varphi^2(x))$. Начальная скорость предполагается нулевой.

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad -u_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t)),$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) \in C(t). \tag{1}$$

Всюду далее будем предполагать выполнение условий $\varphi(l) \in C(0)$, $\varphi(0) = 0$, $-\varphi'(l) \in \in N_{C(0)}(\varphi(l))$. В настоящей работе для задачи (1) получен аналог формулы Даламбера для представления решения. Также решена задача граничного управления колебательным процессом для случая, когда время колебаний $0 < t \leqslant T < l$. Задача о двумерных деформациях струны (не зависящая от t) под воздействием внешней силы была рассмотрена в работе [12]. Колебательный процесс на графе-звезде с ограничителями на движение концов струн изучался в статье [13].

2. Предварительные сведения. Приведём некоторые понятия и определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для замкнутого выпуклого множества $C \subset H$ множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x\rangle \leqslant 0 \ \text{ для любых } \ c \in C\}$$

обозначает внешний нормальный конус к C в точке $x \in C$. Заметим, что всегда $0 \in N_C(x)$, $N_{\{x\}}(x) = H$, и $N_C(x) = \{0\}$ для $x \in \operatorname{int} C$, где $\operatorname{int} C$ –множество внутренних точек C (предполагается, что $\operatorname{int} C \neq \varnothing$). Последнее соотношение показывает, что внешний нормальный конус нетривиален только при $x \in \partial C$, где ∂C – граница множества C.

Хаусдорфово расстояние $d_H(C_1, C_2)$ между замкнутыми множествами C_1 и C_2 задаётся формулой

$$d_H(C_1, C_2) = \max\left\{\sup_{x\in C_2} \operatorname{dist}(x, C_1), \sup_{x\in C_1} \operatorname{dist}(x, C_2)\right\},$$

где $\operatorname{dist}(x, C) = \inf\{\|x - c\|, c \in C\}$.

Рассмотрим процесс выметания, описанный в работе [14]:

$$-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(0) = u_0 \in C(0). \tag{3}$$

Функция $u : [0,T] \to H$ называется *решением задачи* (2), (3), если:

а) $u(0) = u_0$;

б) $u(t) \in C(t)$ для всех $t \in [0,T]$;

в) u дифференцируема для п.в. $t \in [0,T]$;

г) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Нам понадобятся следующие теоремы из статьи [14].

Теорема 1. *Предположим, что отображение $t \to C(t)$ удовлетворяет условию Липшица в смысле расстояния по Хаусдорфу, т.е.*

$$d_H(C(t), C(s)) \leqslant L|t - s|,$$

где $C(t) \subset H$ – непустое, замкнутое и выпуклое множество для всех $t \in [0,T]$. Пусть $u_0 \in \in C(0)$. Тогда существует решение $u : [0,T] \to H$ задачи (2), (3), которое удовлетворяет условию Липшица с константой L. При этом $|u'(t)| \leqslant L$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Теорема 2. *Решение (2), (3) единственно в классе абсолютно непрерывных функций.*

Далее будем применять классы функций, введённые В.А. Ильиным (см., например, [2]). Обозначим через Q_T прямоугольник $Q_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если $u(x,t)$ непрерывна в Q_T и имеет в этом прямоугольнике обе обобщённые частные производные $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2(0 \leqslant x \leqslant l)$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2(0 \leqslant t \leqslant T)$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

Будем говорить, что $\Phi(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, если функция $\Phi(x,t)$ и её частные производные первого порядка непрерывны в Q_T и если $\Phi(x,t)$ имеет в этом прямоугольнике все обобщённые частные производные второго порядка, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2(0 \leqslant x \leqslant l)$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2(0 \leqslant t \leqslant T)$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

3. Формула представления решения. *Решением задачи* (1) будем называть функцию $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ такую, что:

1) для всех $T > 0$ выполнены условия $u^i(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, $\ i = 1,2$;
2) для всех $t \geqslant 0$ выполнены условия $u(l,t) \in C(t)$, $\ u(0,t) = 0$;
3) для п.в. $t \geqslant 0$ выполнено условие $-u_x(l,t) \in N_{C(t)}(u(l,t))$;
4) условия $u^i(x,0) = \varphi^i(x)$ выполнены для всех $x \in [0,l]$, а условия $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0$ выполнены для п.в. $x \in [0,l]$, $\ i = 1,2$;
5) для любых $T > 0$ выполняются интегральные равенства

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u^i(x,t)\left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial x^2}(x,t)\right] dx\,dt + \int\limits_0^l \frac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,0)\varphi^i(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \left[u^i(l,t)\frac{\partial \Psi^i}{\partial x}(l,t) - \Psi^i(l,t)\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t)\right] dt = 0, \tag{4}$$

где произвольные функции $\Psi^i \in \widehat{W}_2^2(Q_T)$ такие, что $\Psi^i(0,t) = 0$, $\ \Psi^i(x,T) = 0$, $\ \dfrac{\partial \Psi^i}{\partial t}(x,T) = 0$, $i = 1,2$.

Рассмотрим функции Φ^i $\ (i = 1,2)$ следующего вида:
если $x \in [0,l]$, то $\Phi^i(x) = \varphi^i(x)$;
если $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$ и m – чётное число, то

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=0}^{m/2} g_{2k}^i(x - (m+1-2k)l) - \varphi^i((m+2)l - x);$$

если m – нечётное число, то

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{(m+1)/2} g_{2k-1}^i(x - (m+2-2k)l) + \varphi^i(x - (m+1)l);$$

$$\Phi^i(-x) = -\Phi^i(x).$$

Здесь функции $g_0(t) = (g_0^1(t), g_0^2(t))$ и $g_1(t) = (g_1^1(t), g_1^2(t))$ – решения задач

$$-\, g_0'(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)) + \varphi'(l-t), \quad t \in [0,l],$$

$$g_0(0) = \varphi(l)$$

и
$$-g_1'(t)\in N_{C(t)}(g_1(t))+\varphi'(t-l),\quad t\in[l,2l],$$
$$g_1(l)=g_0(l).$$
Функции $g_m(t)=(g_m^1(t),g_m^2(t))$, где $t\in[ml,(m+1)l]$, для чётных номеров $m\geqslant 2$ являются решениями задач
$$-g_m'(t)\in N_{C(t)}(g_m(t))+2\sum_{k=0}^{(m-2)/2}g_{2k}'(t-ml+2kl)+\varphi'(ml+l-t),$$
$$g_m(ml)=g_{m-1}(ml),$$
а для нечётных $m\geqslant 3$, где $t\in[ml,(m+1)l]$, – решениями задач
$$-g_m'(t)\in N_{C(t)}(g_m(t))+2\sum_{k=1}^{(m-1)/2}g_{2k-1}'(t-l-ml+2kl)+\varphi'(t-ml),$$
$$g_m(ml)=g_{m-1}(ml).$$

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi^i(x)$ $(i=1,2)$ и отображение $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения. Тогда решение задачи (1) может быть представлено в виде*
$$u^i(x,t)=\frac{\Phi^i(x-t)+\Phi^i(x+t)}{2},\tag{5}$$
где $i=1,2$.

Доказательство. Предположим формально, что решение задачи (1) имеет вид (5). Тогда $u^i(x,0)=\Phi^i(x)=\varphi^i(x)$, где $x\in[0,l]$, $i=1,2$. Из условия $u^i(0,t)=0$ следует, что функции $\Phi^i(x)$ должны определяться при $x<0$ нечётным образом. Поскольку $u_x^i(x,t)=(\Phi^{i'}(x-t)+\Phi^{i'}(x+t))/2$, $u_t^i(x,t)=(-\Phi^{i'}(x-t)+\Phi^{i'}(x+t))/2$, то $-u_t^i(l,t)=-u_x^i(l,t)+\Phi^{i'}(l-t)$ и, следовательно,
$$-u_t(l,t)=-u_x(l,t)+\Phi'(l-t),$$
где $\Phi'(l-t)=(\Phi_1'(l-t),\Phi_2'(l-t))$. Обозначим $g(t)=(g^1(t),g^2(t))=u(l,t)=(u^1(l,t),u^2(l,t))$. Заметим, что
$$-g'(t)\in N_{C(t)}(g(t))+\Phi'(l-t).$$
Рассмотрим случай, когда $0\leqslant t\leqslant l$. Тогда $\Phi'(l-t)=\varphi'(l-t)$. Введём функцию $g_0(t)$, равную $g(t)$ при $0\leqslant t\leqslant l$. Получим, что $g_0(t)$ – решение задачи
$$-g_0'(t)\in N_{C(t)}(g_0(t))+\varphi'(l-t),\quad t\in[0,l],$$
$$g_0(0)=\varphi(l).\tag{6}$$
Покажем, что данная задача имеет единственное решение, которое определено для всех $t\in\in[0,l]$.

Рассмотрим функцию $w(t)=g_0(t)+\int_0^t\varphi'(l-s)\,ds$, где
$$\int\limits_0^t\varphi'(l-s)\,ds=\biggl(\int\limits_0^t\varphi^{1'}(l-s)\,ds,\int\limits_0^t\varphi^{2'}(l-s)\,ds\biggr),$$
и множество $D(t)=C(t)+\int_0^t\varphi'(l-s)\,ds$. Так как функции $\varphi^i(x)$ и отображение $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица, то отображение $D(t)$ также удовлетворяет условию Липшица (в

смысле расстояния по Хаусдорфу). Заметим, что $N_{C(t)}(g_0(t)) = N_{D(t)}(w(t))$. Таким образом, получаем задачу

$$-\frac{d}{dt}w(t) \in N_{D(t)}(w(t)), \quad w(0) = \varphi(l) \in D(0), \quad t \in [0, l].$$

Согласно теоремам 1 и 2 эта задача имеет единственное решение $w(t)$, определённое на всём отрезке $[0, l]$. Функция $w(t)$ удовлетворяет условию Липшица, и её производная почти всюду ограничена. Тогда задача (6) имеет единственное решение $g_0(t)$, где $g_0(t) \in C(t)$, и $g_0(t)$ также удовлетворяет условию Липшица. Поскольку для $i = 1, 2$ имеют место равенства

$$\Phi^i(l-t) + \Phi^i(l+t) = 2g_0^i(t),$$

то получаем $\Phi^i(x) = 2g_0^i(x-l) - \varphi^i(2l-x)$, где $x \in [l, 2l]$. Заметим, что каждая функция $\Phi^i(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[l, 2l]$ и имеет почти всюду ограниченную производную. Таким образом, $\Phi^i \in W_2^1[l, 2l]$. Покажем, что $\Phi^i(l-0) = \Phi^i(l+0)$. Имеем $\Phi^i(l-0) = \varphi^i(l)$ и $\Phi^i(l+0) = 2g_0^i(0) - \varphi^i(l) = 2\varphi^i(l) - \varphi^i(l) = \varphi^i(l)$.

Пусть $t \in [l, 2l]$. Определим на данном отрезке функцию $g_1(t) = g(t)$. Рассмотрим задачу

$$-\frac{d}{dt}g_1(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \Phi'(l-t), \quad t \in [l, 2l],$$

$$g_1(l) = g_0(l).$$

Так как $\Phi(l-t) = -\varphi(t-l)$, то получаем задачу

$$-g_1'(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \varphi'(t-l), \quad t \in [l, 2l],$$

$$g_1(l) = g_0(l).$$

Аналогично (6) доказывается, что последняя задача имеет единственное решение $g_1(t)$, где $g_1(t) \in C(t)$ и $g_1(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, можем определить $\Phi^i(x)$, где $x \in [2l, 3l]$, как

$$\Phi^i(x) = 2g_1^i(x-l) + \varphi^i(x-2l).$$

Отметим, что $\Phi^i \in W_2^1[2l, 3l]$. Покажем, что $\Phi^i(2l-0) = \Phi^i(2l+0)$. Имеем равенства $\Phi^i(2l-0) = 2g_0^i(l) - \varphi^i(0) = 2g_0^i(l)$ и $\Phi^i(2l+0) = 2g_1^i(l) + \varphi^i(0) = 2g_0^i(l)$.

Аналогично рассмотрим случай, когда $t \in [2l, 3l]$. Определим функцию $g_2(t) = g(t)$, где $t \in [2l, 3l]$. Тогда функция $g_2(t)$ – решение задачи

$$-\frac{d}{dt}g_2(t) \in N_{C(t)}(g_2(t)) + 2g_0'(t-2l) + \varphi'(3l-t), \quad t \in [2l, 3l],$$

$$g_2(2l) = g_1(2l).$$

Теперь можем определить каждую функцию $\Phi^i(x)$ на отрезке $x \in [3l, 4l]$ как

$$\Phi^i(x) = 2g_2^i(x-l) + 2g_0^i(x-3l) - \varphi^i(4l-x).$$

Рассмотрим случай $t \in [3l, 4l]$. Определив $g_3(t) = g(t)$, получим, что $g_3(t)$ – решение задачи

$$-\frac{d}{dt}g_3(t) \in N_{C(t)}(g_3(t)) + 2g_1'(t-2l) + \varphi'(t-3l), \quad t \in [3l, 4l],$$

$$g_3(3l) = g_2(3l),$$

и при $x \in [4l, 5l]$ определим функции

$$\Phi^i(x) = 2g_3^i(x-l) + 2g_1^i(x-3l) + \varphi^i(x-4l).$$

Покажем, что при $x \in [(m+1)l, (m+2)l]$, где m – чётное число, функции $\Phi^i(x)$ имеют вид

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=0}^{m/2} g^i_{2k}(x - (m+1-2k)l) - \varphi^i((m+2)l - x);$$

если же m – нечётное число, то

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{(m+1)/2} g^i_{2k-1}(x - (m+2-2k)l) + \varphi^i(x - (m+1)l).$$

В свою очередь, функции $g_m(t)$, где $t \in [ml, (m+1)l]$, для чётных номеров $m \geqslant 2$ являются решениями задач

$$-g'_m(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum_{k=0}^{(m-2)/2} g'_{2k}(t - ml + 2kl) + \varphi'(ml + l - t),$$

$$g_m(ml) = g_{m-1}(ml),$$

а для нечётных $m \geqslant 3$ – решениями задач

$$-g'_m(t) \in N_{C(t)}(g_m(t)) + 2\sum_{k=1}^{(m-1)/2} g'_{2k-1}(t - l - ml + 2kl) + \varphi'(t - ml),$$

$$g_m(ml) = g_{m-1}(ml).$$

Для $m = 2, 3$ утверждение доказано. Предположим, что оно верно для $m \leqslant M$. Проверим справедливость утверждения для $m = M+1$. Рассмотрим случай, когда M – чётное число. Покажем, что

$$\Phi^i(x) = 2\sum_{k=1}^{(M+2)/2} g^i_{2k-1}(x - (M+3-2k)l) + \varphi^i(x - (M+2)l),$$

где $x \in [(M+2)l, (M+3)l]$. Определив $g(t) = g_{M+1}(t)$, где $t \in [(M+1)l, (M+2)l]$, получим

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + \Phi'(l-t), \quad \Phi = (\Phi^1, \Phi^2).$$

Поскольку

$$\Phi'(l-t) = 2\sum_{k=1}^{M/2} g'_{2k-1}(t - l - (M+1-2k)l) + \varphi'(t - l - Ml),$$

то

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + 2\sum_{k=1}^{M/2} g'_{2k-1}(t - 2l - Ml + 2kl) + \varphi'(t - l - Ml).$$

Заметим, что

$$g_{M+1}((M+1)l) = \frac{\Phi((2+M)l) - \Phi(Ml)}{2}.$$

Так как $\Phi((M+2)l) = 2\sum_{k=0}^{M/2} g_{2k}(l + 2kl)$ и $\Phi(Ml) = 2\sum_{k=0}^{(M-2)/2} g_{2k}(l + 2kl)$, то

$$g_{M+1}((M+1)l) = g_M((M+1)l).$$

Задача

$$-g'_{M+1}(t) \in N_{C(t)}(g_{M+1}(t)) + 2\sum_{k=1}^{M/2} g'_{2k-1}(t-2l-Ml+2kl) + \varphi'(t-l-Ml),$$

$$g_{M+1}((M+1)l) = g_M((M+1)l)$$

имеет единственное решение $g_{M+1}(t)$, определённое на промежутке $[(M+1)l,(M+2)l]$. Поскольку

$$g_{M+1}(t) = \frac{\Phi(l-t)+\Phi(l+t)}{2},$$

то

$$\Phi^i(x) = 2g^i_{M+1}(x-l) - \Phi^i(2l-x),$$

где $x \in [(M+2)l,(M+3)l]$. Так как

$$\Phi^i(2l-x) = -2\sum_{k=1}^{M/2} g^i_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl) - \varphi^i(x-2l-Ml),$$

то

$$\Phi^i(x) = 2g^i_{M+1}(x-l) + 2\sum_{k=1}^{M/2} g^i_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl) + \varphi^i(x-2l-Ml) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{(M+2)/2} g^i_{2k-1}(x-3l-Ml+2kl) + \varphi^i(x-2l-Ml),$$

что и требовалось. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, получено представление для функций $\Phi^i(x)$, $i=1,2$. Покажем, что функции $u^i(x,t)$, определённые равенством (5), составляют решение задачи (1). Заметим, что $u^i \in \widehat{W}^1_2(Q_T)$ для всех T, поскольку $\Phi_i(x)$ непрерывны на всей оси; $\Phi^i \in W^1_2(ml,(m+1)l)$ для $m=0,1,2,\ldots;$ при $x<0$ функции $\Phi^i(x)$ определены нечётным образом.

Так как $u(l,t)=g(t)$, где $g(t)=g_m(t)$ при $t\in[ml,(m+1)l]$, $g_m(ml)=g_{m-1}(ml)$ и $g_m(t) \in C(t)$, то $u(l,t)\in C(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Также условия $u^i(0,t)=0$ $(i=1,2)$ выполнены для всех $t\geqslant 0$; $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0)=0$ выполнены для п.в. $x\in[0,l]$; $u^i(x,0)=\varphi^i(x)$ выполнены для всех $x\in[0,l]$ $(i=1,2)$.

Поскольку почти всюду справедливы отношения

$$-u^i_x(l,t) = -\frac{1}{2}(\Phi^{i'}(l-t)+\Phi^{i'}(l+t)), \quad \Phi^{i'}(l+t) = 2g^{i'}(t)+\Phi^{i'}(l-t), \quad -g'(t)\in N_{C(t)}(g(t))+\Phi'(l-t),$$

то $-u_x(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t))$.

Покажем теперь, что для $i=1,2$ выполняется интегральное тождество. Интегральное равенство (4) может быть представлено в виде

$$\int_0^l\biggl(\int_0^T u^i(x,t)\Psi^i_{tt}(x,t)\,dt\biggr)dx - \int_0^T\biggl(\int_0^l u^i(x,t)\Psi^i_{xx}(x,t)\,dx\biggr)dt +$$

$$+\int_0^l \Psi^i_t(x,0)\varphi^i(x)\,dx - \int_0^T \Psi^i(l,t)u^i_x(l,t)\,dt + \int_0^T \Psi^i_x(l,t)u^i(l,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^l [u^i(x,T)\Psi_t^i(x,T) - u^i(x,0)\Psi_t^i(x,0)]\,dx - \int\limits_0^l \int\limits_0^T u_t^i(x,t)\Psi_t^i(x,t)\,dt\,dx -$$

$$- \int\limits_0^T [\Psi_x^i(l,t)u^i(l,t) - \Psi_x^i(0,t)u^i(0,t)]\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_x^i(x,t)\Psi_x^i(x,t)\,dx\,dt + \int\limits_0^l \Psi_t^i(x,0)\varphi^i(x)\,dx -$$

$$- \int\limits_0^T \Psi^i(l,t)u_x^i(l,t)\,dt + \int\limits_0^T \Psi_x^i(l,t)u^i(l,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_x^i(x,t)\Psi_x^i(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_0^l \int\limits_0^T u_t^i(x,t)\Psi_t^i(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_0^T \Psi^i(l,t)u_x^i(l,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^l [\Phi^{i'}(x-t) + \Phi^{i'}(x+t)]\Psi_x^i(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^l \int\limits_0^T [\Phi^{i'}(x+t) - \Phi^{i'}(x-t)]\Psi_t^i(x,t)\,dt\,dx - \sum_{i=1}^n \int\limits_0^T \Psi^i(l,t)u_x^i(l,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Psi_x^i(x,T)[-\Phi^i(x-T) + \Phi^i(x+T)]\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Psi_x^i(x,0)[-\Phi^i(x) + \Phi^i(x)]\,dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^l \Psi_{xt}^i(x,t)[\Phi^i(x+t) - \Phi^i(x-t)]\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Psi_t^i(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Psi_t^i(0,t)[\Phi^i(t) - \Phi^i(-t)]\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^l \int\limits_0^T \Psi_{tx}^i(x,t)[\Phi^i(x+t) - \Phi^i(x-t)]\,dx\,dt -$$

$$- \int\limits_0^T \Psi(l,t)u_x^i(l,t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T \Psi_t^i(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^T [\Phi^{i'}(l-t) + \Phi^{i'}(l+t)]\Psi^i(l,t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^T \Psi_t^i(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \Psi_t^i(l,t)[\Phi^i(l+t) - \Phi^i(l-t)]\,dt = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Задача (1) имеет единственное решение. Предположим, что $\varphi(l)$ является внутренней точкой множества $C(0)$. Тогда колебательный процесс осуществляется подобно процессу для струны с жёстко закреплённым и свободным концами до момента времени t_1, когда происходит соприкосновение с границей множества $C(t)$ (если соприкосновения не происходит, то правый конец струны остаётся свободным всё время). Таким образом, для $t \in [0, t_1]$ получаем задачи

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < t_1,$$

$$u^i(x,0) = \varphi^i(x), \quad \frac{\partial u^i}{\partial t}(x,0) = 0,$$

$$u^i(0,t) = 0, \quad u_x^i(l,t) = 0,$$

где $i=1,2$. Согласно [2] каждая из этих задач имеет единственное решение $u^i(x,t)$. Таким образом, для $t\in[0,t_1]$ функция $u(x,t)$ однозначно определена.

В момент времени t_1 происходит соприкосновение струны с ограничителем, т.е. $u(l,t)=$ $=c(t)=(c_1(t),c_2(t))$, где $c(t)\in C(t)$. Таким образом, $u_1(l,t)=c_1(t)$, $u_2(l,t)=c_2(t)$. И в течение временного промежутка $[t_1,t_2]$ происходит совместное перемещение конца струны с ограничителем, т.е. функции $u^i(x,t)$ являются решением задач

$$\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v^i}{\partial t^2},\quad 0<x<l,\quad t_1<t<t_2,$$

$$v^i(x,t_1)=u(x,t_1),\quad \frac{\partial v^i}{\partial t}(x,t_1)=u'_t(x,t_1),$$
$$v^i(0,t)=0,\quad v^i(l,t)=c^i(t).$$

Согласно [2] каждая из этих задач также имеет единственное решение $u^i(x,t)$, где $t\in[t_1,t_2]$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что исходная задача может иметь лишь единственное решение.

4. Задача граничного управления. Рассмотрим теперь задачу граничного управления колебательным процессом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<l,\quad 0<t<T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t)),\quad u(0,t)=\mu(t). \tag{7}$$

Требуется найти функцию $\mu(t)=(\mu^1(t),\mu^2(t))$, где $\mu^i(t)\in W_2^1[0,T]$, такую, что

$$u(x,T)=\varphi^*(x),\quad u_t(x,T)=\psi^*(x),$$

где $\varphi^{*i}\in W_2^1[0,l]$, $\psi^{*i}\in L^2[0,l]$, $i=1,2$, – заданные функции. Предполагаем, что функции $\varphi^i(x)$ и отображение $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица на своих областях определения.

Решением задачи (7) будем называть функцию $u(x,t)=(u^1(x,t),u^2(x,t))$ такую, что:

1) $u^i(x,t)\in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, $i=1,2$;

2) для всех $0\leqslant t\leqslant T$ выполнены условия $u(l,t)\in C(t)$, $u^i(0,t)=\mu^i(t)$;

3) для п.в. $0\leqslant t\leqslant T$ выполнено условие $-\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t)\in N_{C(t)}(u(l,t))$;

4) условия $u^i(x,0)=\varphi^i(x)$ выполнены для всех $x\in[0,l]$, а условия $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0)=0$ выполнены для п.в. $x\in[0,l]$, $i=1,2$;

5) для $i=1,2$ выполняются интегральные равенства

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u^i(x,t)\biggl[\frac{\partial^2\Psi^i}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2\Psi^i}{\partial x^2}(x,t)\biggr]\,dx\,dt+\int\limits_0^l\frac{\partial\Psi^i}{\partial t}(x,0)\varphi^i(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^T\biggl[u^i(l,t)\frac{\partial\Psi^i}{\partial x}(l,t)-\Psi^i(l,t)\frac{\partial u^i}{\partial x}(l,t)\biggr]\,dt-\int\limits_0^T\frac{\partial\Psi^i}{\partial x}(0,t)\mu^i(t)\,dt=0,$$

где произвольные функции $\Psi^i\in\widehat{W}_2^2(Q_T)$, $i=\overline{1,n}$, такие, что $\Psi^i(0,t)=0$, $\Psi^i(x,T)=0$, $\dfrac{\partial\Psi^i}{\partial t}(x,T)=0$.

Рассмотрим случай, когда $T < l$.

Теорема 4. *Для $T < l$ решение задачи (7) определено единственным образом. Функции $\mu^i(t)$ должны иметь вид*

$$\mu^i(t) = \frac{1}{2}(\varphi^i(t) - \widehat{\psi^{*i}}(T-t) + \varphi^{*i}(T-t)).$$

При этом для всех $i = 1, 2$ начальные и финальные данные должны быть связаны между собой равенствами

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) - \varphi^{*i}(x) + \varphi^i(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - \varphi^i(x+T) \equiv 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l-T,$$

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - 2g_0^i(T+x-l) + \varphi^i(2l-x-T) \equiv 0, \quad l-T \leqslant x \leqslant l.$$

Здесь для каждого $i = 1, 2$ через $\widehat{\psi^{*i}}$ обозначена первообразная для функции ψ^{*i}, удовлетворяющая равенству

$$\widehat{\psi^{*i}}(x_0) - \varphi^{*i}(x_0) + \varphi^i(x_0 - T) = 0,$$

$x_0 \in [T, l]$ *– фиксированная точка;* $g_0(t) = (g_0^1(t), g_0^2(t))$ *– решение задачи (6).*

Доказательство. Введём функции

$$\underline{\mu}^i(t) = \begin{cases} \mu^i(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через $v(x,t) = (v^1(x,t), v^2(x,t))$ решение задачи (1). Аналогично теореме 3 непосредственной проверкой устанавливается, что $u^i(x,t) = \underline{\mu}^i(t-x) + v^i(x,t)$, $i = 1, 2$, – решение задачи (7). Таким образом, получаем равенство

$$u^i(x,t) = \underline{\mu}^i(t-x) + \frac{\Phi^i(x-t) + \Phi^i(x+t)}{2}.$$

Тогда

$$\underline{\mu}^i(T-x) + \frac{\Phi^i(x-T) + \Phi^i(x+T)}{2} = \varphi^{*i}(x)$$

и, следовательно,

$$-\underline{\mu}^{i\prime}(T-x) + \frac{\Phi^{i\prime}(x+T) + \Phi^{i\prime}(x-T)}{2} = \varphi^{*i\prime}(x). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$\underline{\mu}^{i\prime}(T-x) + \frac{\Phi^{i\prime}(x+T) - \Phi^{i\prime}(x-T)}{2} = \psi^{*i}(x). \tag{9}$$

Вычитая из (9) равенство (8), получаем

$$2\underline{\mu}^{i\prime}(T-x) - \Phi^{i\prime}(x-T) = \psi^{*i}(x) - \varphi^{*i\prime}(x). \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда $T \leqslant x \leqslant l$. Воспользовавшись представлениями для функций $\underline{\mu}^i$ и Φ^i, имеем

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) - \varphi^{*i}(x) + \varphi^i(x-T) \equiv 0, \quad T \leqslant x \leqslant l,$$

где первообразную $\widehat{\psi^{*i}}(x)$ функции $\psi^{*i}(x)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\widehat{\psi^{*i}}(x_0) - \varphi^{*i}(x_0) + \varphi^i(x_0 - T) = 0,$$

где $x_0 \in [T, l]$ – фиксированная точка.

Рассмотрим равенство (10) для $0 \leqslant x \leqslant T$:

$$2\mu^i(T-x) = \varphi^i(T-x) - \widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x),$$

откуда для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ найдём $\mu^i(t) = (\varphi^i(t) - \widehat{\psi^{*i}}(T-t) + \varphi^{*i}(T-t))/2$. Сложив (8) и (9), получим соотношение $\Phi^{i'}(x+T) = \psi^{*i}(x) + \varphi^{*i'}(x)$.

Рассмотрим случай, когда $l-T \leqslant x \leqslant l$. Воспользовавшись полученными в теореме 3 представлениями для функций Φ^i, имеем тождество

$$\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - 2g_0^i(T+x-l) + \varphi^i(2l-x-T) \equiv 0.$$

Если же $0 \leqslant x \leqslant l-T$, то $\widehat{\psi^{*i}}(x) + \varphi^{*i}(x) - \varphi^i(x+T) \equiv 0$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (проект QRPK-2023-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60. № 6 (366). С. 89–114.
2. *Ильин В.А.* Избранные труды: в 2-х т. М., 2008.
3. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.
4. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А., Фролов А.А.* Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и её приложения. 2019. Т. 160. С. 74–84.
5. *Ильин В.А., Кулешов А.А.* Об эквивалентности двух определений обобщённого из класса Lp решения смешанной задачи для волнового уравнения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2014. Т. 284. С. 163–168.
6. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 151–158.
7. *Никитин А.А.* Граничное управление третьим краевым условием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 120–126.
8. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединённых объектов с распределёнными параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.
9. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределёнными и сосредоточенными параметрами в точке соединения // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 142–146.
10. *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 64–89.
11. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 1. С. 62–71.
12. *Zvereva M.* A two-dimensional model of string deformations with a nonlinear boundary condition // J. of Nonlin. and Convex Anal. 2022. V. 23. № 12. P. 2775–2793.
13. *Kamenskii M., Liou Y.C., Wen Ch.-F., Zvereva M.* On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions // Optimization: J. of Math. Program. and Oper. Res. 2020. V. 69. № 2. P. 283–304.
14. *Kunze M., Monteiro Marques M.* An introduction to Moreau's sweeping process // Lect. Notes in Phys. 2000. V. 551. P. 1–60.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.05.2023 г.
После доработки 06.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1057–1069

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.223+517.575

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

© 2023 г. В. В. Карачик

Определяется элементарное решение полигармонического уравнения, с помощью которого приводится явное представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре при всех размерностях пространства, за исключением некоторого конечного множества. На основе полученной функции Грина строится решение однородной задачи Дирихле в единичном шаре. В качестве примера найден явный вид решения однородной задачи Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения при простейшей полиномиальной правой части.

DOI: 10.31857/S0374064123080058, EDN: IOCEKI

Введение. Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Приведём только некоторые из них. Например, в двумерном случае в [1] на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [2–4], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений – в работах [5, 6]. Статьи [7–9] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, а в работе [10] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. В [11–13] приведён явный вид функций Грина для бигармонического и 3-гармонического уравнений в единичном шаре. В связи с бигармоническим уравнением отметим работы [14, 15], посвящённые условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В качестве наиболее общих результатов по обобщённой задаче Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях, отметим статью [16].

В работе [17] на основании интегрального представления функций $u \in C^4(D)\bigcap C^3(\bar{D})$ даются интегральные представления решений задач Навье [18] и Рикье–Неймана [19] для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач. В статьях [20, 21] эти результаты используются для полигармонического уравнения. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [22] исследована разрешимость четырёх краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией. Отметим также работы [23–26], где построены функции Грина различных краевых задач . Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в работах [27, 28].

Хорошо известно (см., например, [29, с. 50]), что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ при $n \geqslant 2$ имеет вид

$$G_2(x,\xi) = E(x,\xi) - E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right), \tag{1}$$

где

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}|x-\xi|^{2-n}, & n > 2, \\ -\ln|x-\xi|, & n = 2, \end{cases} \tag{2}$$

– элементарное решение уравнения Лапласа. По аналогии с этим в работе [11] было определено элементарное решение

$$E_4(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4,\quad n=3,\\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4,\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi|-1), & n=2,\end{cases}\tag{3}$$

бигармонического уравнения и доказано, что при $n\geqslant 3$ функция вида

$$G_4(x,\xi)=E_4(x,\xi)-E_4\biggl(\frac{x}{|x|},|x|\xi\biggr)-\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E\biggl(\frac{x}{|x|},|x|\xi\biggr)\tag{4}$$

является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S. Далее, в статье [13] была введена функция

$$E_6(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{|x-\xi|^{6-n}}{2\cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n\geqslant 3,\quad n\neq 4,6,\\ -\dfrac{1}{64}\ln|x-\xi|, & n=6,\\ \dfrac{|x-\xi|^2}{32}\biggl(\ln|x-\xi|-\dfrac{3}{4}\biggr), & n=4,\\ -\dfrac{|x-\xi|^4}{64}\biggl(\ln|x-\xi|-\dfrac{3}{2}\biggr), & n=2,\end{cases}\tag{5}$$

которая, по аналогии с функциями $E(x,\xi)$ из (2) и $E_4(x,\xi)$ из (3), названа *элементарным решением* 3-гармонического уравнения. При $\xi\neq x$ справедливо равенство $\Delta_\xi E_6(x,\xi)=$ $=-E_4(x,\xi)$. Функция Грина в этом случае при $n\geqslant 3$ и $n\neq 4$ представлена в виде

$$G_6(x,\xi)=E_6(x,\xi)-E_6\biggl(\frac{x}{|x|},|x|\xi\biggr)-\frac12\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E_4\biggl(\frac{x}{|x|},|x|\xi\biggr)-$$
$$-\frac14\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}E\biggl(\frac{x}{|x|},|x|\xi\biggr).$$

В настоящей работе исследуется представление решений однородной задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре $S=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$

$$\Delta^m u(x)=f(x),\quad x\in S,\tag{6}$$

$$u|_{\partial S}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial S}=0,\quad \ldots,\quad \left.\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\right|_{\partial S}=0.\tag{7}$$

В статье [7] показано, что функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ этой задачи имеет вид (формула Боджио)

$$G_{2m}(x,\xi)=k_m|x-\xi|^{2m-n}\int\limits_1^{g(x,\xi)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}\,dt,$$

где

$$g(x,\xi)=\frac{1}{|x-\xi|}\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|,\quad k_m=\frac{1}{\omega_n((2m-2)!)^2},$$

а в [30] построена функция $G_{2m}(x,\xi)$ в случае $n=2$. В работе [9] находится явное представление функции $G_{2m}(x,\xi)$ в зависимости от чётности n и положительности величины $2m-n$.

1. Элементарное решение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \bigcup (2\mathbb{N}+1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \ldots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ конечное, то $\mathbb{N}_m$ бесконечное. Очевидно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Определим элементарное решение m-гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ в виде

$$E_{2m}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m (2,2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \dfrac{(-1)^m |x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)^*_m (2,2)_{m-1}} \left(\ln|x-\xi| - \displaystyle\sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c, \end{cases} \tag{8}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+kb-b)$ – обобщённый символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$, а символ $(a,b)_k^*$ означает, что если среди сомножителей a, $(a+b)$, $\ldots$, $(a+kb-b)$, входящих в $(a,b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2,2)_3^* = (-2)\cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (8), верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю.

Замечание 1. В работе [21] установлено, что функция $E_{2m}(x,\xi)$ совпадает с элементарными функциями из (2), (3) и (5) при $m=1$, $m=2$ и $m=3$ соответственно.

Замечание 2. Элементарная функция $E_{2m}(x,\xi)$ незначительно отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$, рассматриваемого С.Л. Соболевым [31, с. 521]. При $n \in \mathbb{N}_m$ отличие в множителе $(-1)^m$, а при $n \in \mathbb{N}_m^c$ различие более заметно. Это связано со следующим ниже свойством функции $E_{2m}(x,\xi)$, которого у функций $G_{m,n}(x)$ при $n \in \mathbb{N}_m^c$ нет.

Введём обозначения

$$E^*_{2m}(x,\xi) = E_{2m}\left(\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right), \quad h(x,\xi) = |x-\xi|^2, \quad h_*(x,\xi) = \left|\frac{x}{|x|} - |x|\xi\right|^2. \tag{9}$$

Очевидно, что $h(x,\xi)$ и $h_*(x,\xi)$ – многочлены второго порядка. Относительно функций $E_{2m}(x,\xi)$ и $E^*_{2m}(x,\xi)$ необходимы некоторые утверждения.

Лемма 1. *1. Симметричая функция $E_{2m}(x,\xi)$, определённая при $x \neq \xi$, удовлетворяет равенствам*

$$\Delta_x E_{2m}(x,\xi) = -E_{2(m-1)}(x,\xi), \quad \Delta_x E_2(x,\xi) = 0.$$

2. Симметричная функция $E^*_{2m}(x,\xi)$ при $x \in S$ и $\xi \in \bar{S}$ удовлетворяет равенствам

$$\Delta_x E^*_{2m}(x,\xi) = -|\xi|^2 E^*_{2m-2}(x,\xi), \quad \Delta_x E^*_2(x,\xi) = 0,$$

а значит, является m-гармонической по $x \in S$ при $\xi \in \bar{S}$.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы доказана в [20, лемма 2.1]. Для доказательства второй части заметим, что $|x/|x| - |x|\xi| \geqslant |x/|x|| - |x||\xi| = 1 - |x||\xi| \geqslant 1 - |x| > 0$ при $x \in S$, $\xi \in \bar{S}$, и значит, функция $E^*_{2m}(x,\xi)$ определена и дифференцируема при заданных значениях x и ξ. Симметричность $E^*_{2m}(x,\xi)$ следует из равенства $|x/|x| - |x|\xi|^2 = 1 - 2x\xi + |x|^2|\xi|^2 = |\xi/|\xi| - |\xi|x|^2$. Далее нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(-x|\xi| + \frac{\xi}{|\xi|}\right) = -|\xi| f_i\left(-x|\xi| + \frac{\xi}{|\xi|}\right),$$

где $f_i(x)$ – производная функции $f(x)$ по i-й переменной. При $f(x) = |x|^{2m-n}(c_1 \ln|x| + c_2)$ производная $f_i(x)$ существует, если $|x| > 0$. В нашем случае $|x/|x| - |x|\xi| > 0$, а значит, производные любого порядка функции $f(x)$ существуют. Поэтому в силу первого утверждения леммы

$$\Delta E^*_{2m}(x,\xi) = \Delta(E_{2m}(-x|\xi| + \xi/|\xi|)) = (-|\xi|)^2 \Delta(E_{2m}(-x|\xi| + \xi/|\xi|)) = -|\xi|^2 E^*_{2m-2}(x,\xi).$$

Отсюда также следует, что $\Delta_x E_2^*(x,\xi)=0.$ Второе утверждение леммы доказано.

Исследуем произведение полигармонических функций. Известно, что произведение гармонических функций может быть как гармонической функцией, так и функцией, которая не m-гармоническая ни при каком $m\in\mathbb{N}$, например, uv и u^2 при $u(x_1,x_2)=e^{x_1}\cos x_2$, $v(x_1,x_2)=e^{x_1}\sin x_2$. Кроме того, по известной формуле Альманси функция $|x|^{2m-2}u(x)$ является m-гармонической функцией, если $u(x)$ – гармоническая. Введём оператор

$$\Lambda u(x)=\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}, \tag{10}$$

для которого верно равенство $\Delta\Lambda u=(\Lambda+2)\Delta u.$ Из этого равенства следует, что $\Delta^m\Lambda u=(\Lambda+2m)\Delta^m u,$ а поэтому, если функция $u(x)$ является m-гармонической, функция Λu тоже m-гармоническая, хотя в её представлении есть слагаемые вида $x_iu_{x_i}$.

Для следующего результата необходима небольшая модификация метода математической индукции:

Утверждение. *Пусть даны утверждения $A_{n,m}$ при $n,m\in\mathbb{N}$ и для них выполнены следующие условия:*

1) утверждения $A_{n,1}$ и $A_{1,m}$ верны при $n,m\in\mathbb{N}$;

2) из справедливости утверждений $A_{n-1,m}$ и $A_{n,m-1}$, индекс которых принадлежит $\mathbb{N}^2$, следует справедливость $A_{n,m}$.

Тогда утверждения $A_{n,m}$ верны при всех $n,m\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть при выполненных условиях 1) и 2) найдутся утверждения $A_{n,m}$, которые не верны. Выберем среди них такое A_{n^*,m^*}, у которого сумма индексов n^*+m^* наименьшая. По условию 1) для A_{n^*,m^*} не может быть ни $n^*=1$, ни $m^*=1$. Тогда по условию 2) не должно быть выполнено либо утверждение A_{n^*-1,m^*}, либо утверждение A_{n^*,m^*-1}. Для этих утверждений сумма индексов равна n^*+m^*-1, чего не может быть по выбору утверждения A_{n^*,m^*}. Значит все утверждения $A_{n,m}$ верны. Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть $k_1,k_2\in\mathbb{N}_0$, $k_3\in\mathbb{N}$ и $k=k_1+k_2+k_3$. Тогда функция*

$$h^{k_1}(x,\xi)h_*^{k_2}(x,\xi)E_{2k_3}^*(x,\xi)$$

является k-гармонической по $x\in S$ при $\xi\in\bar S$.

Доказательство. 1°. Докажем, что функция $F_{k_2,k_3}(x,\xi)\equiv h_*^{k_2}(x,\xi)E_{2k_3}^*(x,\xi)$ при $k_2\in\mathbb{N}_0$, $k_3\in\mathbb{N}$ является (k_2+k_3)-гармонической по $x\in S$. Пусть сначала $n\in\mathbb{N}_{k_2+k_3}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $n\in\mathbb{N}_{k_3}$, и тогда из (8) получим

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi)=C_{k_3}h_*^{k_3-n/2+k_2}(x,\xi)=\frac{C_{k_3}}{C_{k_2+k_3}}E_{2k_2+2k_3}^*(x,\xi),$$

где C_{k_3} – числовой коэффициент при $|x-\xi|^{2k_3-n}$ в E_{2k_3}, когда $n\in\mathbb{N}_{k_3}$. Поэтому, в силу леммы 1, функция $F_{k_2,k_3}(x,\xi)$ является (k_2+k_3)-гармонической по $x\in S$. Если же $n\in\mathbb{N}_{k_2+k_3}^c$, но $n\in\mathbb{N}_{k_3}$, то найдётся натуральное s такое, что $k_3+1\leqslant s\leqslant k_2+k_3$ и $2s=n$. В этом случае

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi)=C_{k_3}h_*^{k_3+k_2-s}(x,\xi).$$

Далее нетрудно подсчитать, что

$$\Delta\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|^{\alpha}=\alpha(\alpha+n-2)|\xi|^2\left|\frac{x}{|x|}-|x|\xi\right|^{\alpha-2}, \tag{11}$$

и поскольку $1\leqslant k_3+k_2-s+1\leqslant k_2$, то полином $F_{k_2,k_3}(x,\xi)$ будет (k_2+1)-гармоническим по $x\in S$. Так как $k_2+1\leqslant k_2+k_3$, то утверждаемое верно.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}^c_{k_3}$. Тогда найдётся натуральное $s \leqslant k_3$ такое, что $2s = n$, а поэтому полином $h_*^{k_3-s}(x,\xi)$, аналогично предыдущему случаю, является $(k_3 - s + 1)$-гармоническим. Из формулы (8) найдём

$$E^*_{2k_3}(x,\xi) = C_{k_3} h_*^{k_3-s}(x,\xi) \ln |x/|x| - |x|\xi| - C_{k_3} L_{k_3} h_*^{k_3-s}(x,\xi),$$

где C_{k_3} – числовой множитель при $|x-\xi|^{2k_3-n}$, а L_{k_3} – числовое слагаемое при логарифме в E_{2k_3}, когда $n \in \mathbb{N}^c_{k_3}$. Поэтому

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi) = C_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x,\xi) \ln |x/|x| - |x|\xi| - C_{k_3} L_{k_3} h_*^{k_3+k_2-s}(x,\xi).$$

Так как $n \in \mathbb{N}^c_{k_2+k_3}$, то из (8) следует

$$h_*^{k_2+k_3-s}(x,\xi) \ln |x/|x| - |x|\xi| = C^{-1}_{k_2+k_3} E^*_{2k_2+2k_3}(x,\xi) + L_{k_2+k_3} h_*^{k_2+k_3-s}(x,\xi)$$

и, значит,

$$F_{k_2,k_3}(x,\xi) = C_{k_3} C^{-1}_{k_2+k_3} E^*_{2k_2+2k_3}(x,\xi) + C_{k_3}(L_{k_2+k_3} - L_{k_3}) h_*^{k_2+k_3-s}(x,\xi).$$

Первое слагаемое в полученном равенстве согласно лемме 1 является $(k_2 + k_3)$-гармонической функцией по $x \in S$, а второе слагаемое – $(k_2 + k_3 - s + 1)$-гармоническим полиномом. Так как $s \geqslant 1$, то утверждение 1° выполнено.

2°. Теперь докажем, что функция $G_{k_1,k_2'}(x,\xi) = h^{k_1}(x,\xi) F_{k_2'}(x,\xi)$, где $F_{k_2'}(x,\xi)$ – произвольная k_2'-гармоническая функция по $x \in S$ и $k_1 \in \mathbb{N}_0$, $k_2' \in \mathbb{N}$, является $(k_1 + k_2')$-гармонической по $x \in S$. Доказательство проведём методом индукции, сформулированном выше в утверждении, по двум индексам $k_1 \in \mathbb{N}_0$ и $k_2' \in \mathbb{N}$.

1. Если $k_1 = 0$, то $G_{0,k_2'}(x,\xi) = F_{k_2'}(x,\xi)$, и значит, $G_{0,k_2'}(x,\xi)$ является k_2'-гармонической по условию. Если $k_2' = 1$, то $G_{k_1,1}(x,\xi) = h^{k_1}(x,\xi) F_1(x,\xi)$, и поскольку $h(x,\xi) = |x-\xi|^2$, то согласно формуле Альманси функция $G_{k_1,1}(x,\xi)$ является $(k_1 + 1)$-гармонической.

2. Предположим, что функции вида $h^{k_1-1}(x,\xi) F_{k_2'}(x,\xi)$ и $h^{k_1}(x,\xi) F_{k_2'-1}(x,\xi)$ являются $(k_1 + k_2' - 1)$-гармоническими по $x \in S$. Так как ввиду (9)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h^{k_1}(x,\xi) = 2k_1 (x_i - \xi_i) h^{k_1-1}(x,\xi),$$

то, использовав оператор Λ из (10), получим

$$\Delta_x G_{k_1,k_2'}(x,\xi) = F_{k_2'}(x,\xi) \Delta_x h^{k_1}(x,\xi) + 4k_1 h^{k_1-1}(x,\xi) \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \frac{\partial F_{k_2'}(x,\xi)}{\partial x_i} +$$

$$+ h^{k_1}(x,\xi) \Delta_x F_{k_2'}(x,\xi) = 2k_1(2k_1 + n - 2) h^{k_1-1}(x,\xi) F_{k_2'}(x,\xi) +$$

$$+ 4k_1 h^{k_1-1}(x,\xi)(\Lambda_x F_{k_2'}(x,\xi) - \xi \cdot \nabla_x F_{k_2'}(x,\xi)) + h^{k_1}(x,\xi) \Delta_x F_{k_2'}(x,\xi). \tag{12}$$

В последнем равенстве было использовано тождество, аналогичное (11):

$$\Delta_x h^{k_1}(x,\xi) = 2k_1(2k_1 + n - 2) h^{k_1-1}(x,\xi).$$

По предположению индукции и свойству оператора Λ каждое слагаемое в правой части (12) является $(k_1 + k_2' - 1)$-гармонической функцией по $x \in S$. Поэтому функция $G_{k_1,k_2'}(x,\xi)$ будет $(k_1 + k_2')$-гармонической по $x \in S$. Теперь выберем $F_{k_2'}(x,\xi) = F_{k_2,k_3}(x,\xi)$, где $k_2' = k_2 + k_3$. Это возможно, поскольку, во-первых, по лемме 1 функция $F_1(x,\xi) = F_{0,1}(x,\xi) = E_2^*(x,\xi)$ гармоническая по $x \in S$, а во-вторых, по утверждению 1° леммы функция $F_{k_2,k_3}(x,\xi)$ является k_2'-гармонической по $x \in S$, когда $\xi \in \bar{S}$. Лемма доказана.

2. Функция Грина. Исследуем случай, когда $n \in \mathbb{N}_{m-1}$, т.е. для почти всех n, за исключением конечного множества $\mathbb{N}^c_{m-1}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле (6), (7) при $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ может быть записана в виде суммы элементарного решения $E_{2m}(x,\xi)$ и m-гармонической функции*

$$G_{2m}(x,\xi) = E_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E_{2m-2k}\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right). \tag{13}$$

Функция $G_{2m}(x,\xi)$ является m-гармонической по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$, и удовлетворяет равенствам

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu}\bigg|_{x\in\partial S} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_{x\in\partial S} = 0, \quad \xi \in S. \tag{14}$$

Доказательство. 1. Нетрудно видеть, что при $m=1$ из (13), учитывая обозначения (9), равенство $E(x,\xi) = E_2(x,\xi)$ и условие $(a,b)_0 = 1$, следует формула (1), а при $m=2$ из (13) получаем

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{2\cdot 2} E_2^*(x,\xi),$$

что совпадает с (4) при $n \geqslant 3$. Если же $m=3$, то (13) даёт

$$G_6(x,\xi) = E_6(x,\xi) - E_6^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4\cdot 2} E_4^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2(|\xi|^2-1)^2}{8\cdot 8} E_2^*(x,\xi),$$

что соответствует функции $G_6(x,\xi)$.

2. Проверим m-гармоничность функции $G_{2m}(x,\xi)$ из (13) по $x \in S$, $x \neq \xi \in \bar{S}$. Для этого заметим, что в соответствии с обозначениями (9) верны равенства

$$h_*(x,\xi) - h(x,\xi) = 1 - 2x\cdot\xi + |x|^2|\xi|^2 - |x|^2 + 2x\cdot\xi - |\xi|^2 = (|x|^2-1)(|\xi|^2-1),$$

а поэтому формулу (13) можно записать в виде

$$G_{2m}(x,\xi) = E_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h_*(x,\xi) - h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k}(x,\xi). \tag{15}$$

В силу леммы 1 достаточно проверить m-гармоничность функций под знаком суммы в (15), но это сразу следует из леммы 2.

3. Теперь проверим выполнение граничных условий (14). Внешняя единичная нормальная производная к сфере радиуса $|x| < 1$ от функции $G_{2m}(x,\xi)$ равна

$$\frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial G_{2m}(x,\xi)}{\partial x_i} = \frac{1}{|x|}\Lambda_x G_{2m}(x,\xi),$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_x^2} = \left(\frac{1}{|x|}\Lambda_x \frac{1}{|x|}\Lambda_x\right) G_{2m}(x,\xi) = \frac{1}{|x|^2}\Lambda_x(-1+\Lambda_x) G_{2m}(x,\xi).$$

Значит, используя обозначение $\Lambda^{[k]} = \Lambda(\Lambda-1)\cdots(\Lambda-k+1)$, можно записать

$$\frac{\partial^k G_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_x^k} = \left(\frac{1}{|x|}\Lambda_x\right)^k G_{2m}(x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{|x|^k}\Lambda_x(\Lambda_x-1)\cdots(\Lambda_x-k+1) G_{2m}(x,\xi) = \frac{1}{|x|^k}\Lambda_x^{[k]} G_{2m}(x,\xi). \tag{16}$$

Таким образом, для выполнения граничных условий (14) нужно доказать справедливость равенств

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \Lambda_x G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \ldots,\quad \Lambda_x^{[m-1]}G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0.$$

Нетрудно видеть, что эти равенства эквивалентны следующим:

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \Lambda_x G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0,\quad \ldots,\quad \Lambda_x^{m-1}G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=0. \tag{17}$$

Докажем, что они верны, а значит, выполняются и граничные условия (14). Если в (15) положить $x\in\partial S$, т.е. $|x|=1$, то при $\xi\in S$, учитывая, что $E_{2m}(x,\xi)=E^*_{2m}(x,\xi)$ и $h(x,\xi)=$ $=h_*(x,\xi)$ на ∂S, получаем

$$G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}=E_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S}-\frac{E_{2m}(x,\xi)}{(2m-2,-2)_0(2,2)_0}\bigg|_{x\in\partial S}=0 \tag{18}$$

для любого $m\geqslant 1$.

Исследуем другие граничные условия из (17). Верно равенство

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi)=\Lambda_x E_{2m}(x,\xi)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}\Lambda_x E^*_{2m-2k}(x,\xi)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m-1}k\Lambda_x(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^{k-1}}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi). \tag{19}$$

Рассмотрим последний член в первой сумме в (19), имеющий вид

$$\varepsilon_{m-2}(x)\equiv\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^{m-1}}{(2m-2,-2)_{m-1}(2,2)_{m-1}}\Lambda_x E^*_2(x,\xi).$$

По лемме 2 эта функция m-гармоническая в S. Поскольку $h_*(x,\xi)=h(x,\xi)$ при $x\in\partial S$, то после применения к функции $\varepsilon_{m-2}(x)$ операторов Λ_x^k, $k=\overline{0,m-2}$, пределы при $x\to\partial S$ всех полученных при этом функций обратятся в нуль. Нижний индекс у $\varepsilon_{m-2}(x)$ указывает на максимальный порядок оператора Λ_x, при котором это свойство выполнено. Поэтому в дальнейшем изложении все функции, обладающие таким свойством, будем обозначать как $\varepsilon_{m-2}(x)$. Эти функции на выполнение граничных условий (17) не влияют. Кроме того, заметим, что при $n\in\mathbb{N}_m$, в соответствии с (8), верны равенства

$$\Lambda_x E_{2m}(x,\xi)=\Lambda_x\frac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m(2,2)_{m-1}}=\frac{(-1)^m}{(2-n,2)_m(2,2)_{m-1}}\Lambda_x h^{m-n/2}(x,\xi)=$$

$$=(m-n/2)\frac{-E_{2m-2}(x,\xi)}{(2m-n)(2m-2)}\Lambda_x h(x,\xi)=-\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)}E_{2m-2}(x,\xi).$$

Если же $n=2m$, то опять, в соответствии с (8), имеем

$$\Lambda_x E_{2m}(x,\xi)=\Lambda_x\frac{(-1)^m\ln|x-\xi|}{(2-2m,2)^*_m(2,2)_{m-1}}=\frac{(-1)^m}{(-1)^{m-1}(2,2)_{m-1}(2,2)_{m-1}}\frac{1}{2}\Lambda_x\ln h(x,\xi)=$$

$$=\frac{-E_{2m-2}(x,\xi)}{2(2m-2)}\Lambda_x h(x,\xi)=-\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)}E_{2m-2}(x,\xi).$$

Аналогично проделанным вычислениям нетрудно получить для $n\in\mathbb{N}_{m-1}$

$$\Lambda_x E^*_{2m}(x,\xi)=-\frac{\Lambda_x h_*(x,\xi)}{2(2m-2)}E^*_{2m-2}(x,\xi).$$

Исходя из сказанного, равенство (19) запишем в виде

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x,\xi) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} \frac{\Lambda_x h_*(x,\xi)}{2(2m-2k-2)} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi) + \varepsilon_{m-2}(x) -$$

$$-\sum_{k=0}^{m-2} (k+1)\Lambda_x(h_*(x,\xi)-h(x,\xi)) \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_{k+1}(2,2)_{k+1}} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi). \qquad (20)$$

Заметим, что в последней сумме была сделана замена индекса $k \to k+1$. Объединив две последние суммы, имеющие одинаковые верхние и нижние индексы, в одну сумму

$$\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi) \left(\frac{\Lambda_x h_*(x,\xi)}{2(2m-2k-2)} - \frac{(k+1)\Lambda_x(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))}{(2m-2k-2)(2k+2)} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k} \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2k-2)} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi),$$

а затем использовав равенство

$$(2m-2,-2)_{k+1} = (2m-2,-2)_k(2m-2k-2) = (2m-2)(2m-4,-2)_k,$$

запишем

$$\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-4,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2m-2k-2}(x,\xi).$$

Таким образом, (20) преобразуется к виду

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} E_{2m-2}(x,\xi) +$$

$$+\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{2(2m-2)} \sum_{k=0}^{(m-1)-1} \frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2(m-1)-2,-2)_k(2,2)_k} E^*_{2(m-1)-2k}(x,\xi) + \varepsilon_{m-2}(x),$$

откуда получаем

$$\Lambda_x G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x,\xi) + \varepsilon_{m-2}(x). \qquad (21)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Lambda_x^2 G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x,\xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x,\xi) - \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)} \Lambda_x G_{2m-2}(x,\xi) + \Lambda_x \varepsilon_{m-2}(x).$$

В силу равенства (21), взятого при $m=m-1$, и с учётом равенств

$$\Lambda_x \varepsilon_{m-2}(x) = \varepsilon_{m-3}(x), \quad -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)} \varepsilon_{m-3}(x) = \varepsilon_{m-3}(x),$$

а также $\varepsilon_{m-3}(x)+\varepsilon_{m-3}(x) = \varepsilon_{m-3}(x)$, можем записать

$$\Lambda_x^2 G_{2m}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x,\xi)}{4(m-1)} G_{2m-2}(x,\xi) + \frac{(\Lambda_x h(x,\xi))^2}{4^2(m-1)(m-2)} G_{2m-4}(x,\xi) + \varepsilon_{m-3}(x).$$

Основываясь на этом соотношении и учитывая (21), предположим, что при некотором $1 < k < m-1$ верно равенство

$$\Lambda_x^{k-1} G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi) + \varepsilon_{m-k}(x),$$

где $g_{2i}^{(k)}(x,\xi)$ – некоторые полиномы степени $2i$ от x. Например,

$$g_2^{(1)}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-1)}, \quad g_2^{(2)}(x,\xi) = -\frac{\Lambda_x^2 h(x,\xi)}{4(m-1)}, \quad g_4^{(2)}(x,\xi) = \frac{(\Lambda_x h(x,\xi))^2}{16(m-1)(m-2)}.$$

Используя (21) при $m = m-i$, запишем

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k-1} \Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi) - \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i-1)} \times$$

$$\times G_{2m-2i-2}(x,\xi) + \sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \varepsilon_{m-i-2}(x) + \Lambda_x \varepsilon_{m-k}(x).$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i-1)} G_{2m-2i-2}(x,\xi) = \sum_{i=2}^{k} g_{2i-2}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i)} G_{2m-2i}(x,\xi),$$

получим равенство

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k} \left(\Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) - g_{2i-2}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i)} \right) G_{2m-2i}(x,\xi) + \varepsilon_{m-k-1}(x),$$

где следует считать, что $g_{2i}^{(k)} = 0$ при $i = 0$ или $i > k$. Кроме того, здесь было учтено, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) \varepsilon_{m-i-2}(x) + \Lambda_x \varepsilon_{m-k}(x) = \varepsilon_{m-k-1}(x),$$

так как наименьший индекс у функций $\varepsilon_k(x)$ под знаком суммы равен $m-k-1$. Очевидно, что в предыдущем равенстве функция

$$g_{2i}^{(k)}(x,\xi) = \Lambda_x g_{2i}^{(k-1)}(x,\xi) - g_{2i-2}^{(k-1)}(x,\xi) \frac{\Lambda_x h(x,\xi)}{4(m-i)}$$

является полиномом степени $2i$ по x, так как $\deg g_{2i}^{(k)}(x,\xi) = 2i$ при $k = 1,2$. Таким образом, при $1 \leqslant k \leqslant m-1$ справедлива формула

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi) = \sum_{i=1}^{k} g_{2i}^{(k)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi) + \varepsilon_{m-k-1}(x).$$

Если здесь воспользоваться равенством (18), то с учётом определения функций $\varepsilon_k(x)$ будем иметь

$$\Lambda_x^k G_{2m}(x,\xi)|_{x\in\partial S} = \sum_{i=1}^{k} g_{2i}^{(k)}(x,\xi) G_{2m-2i}(x,\xi)|_{x\in\partial S} + \varepsilon_{m-k-1}(x)|_{x\in\partial S} = 0$$

для $k = \overline{0, m-1}$. Это означает выполнение граничных условий (17) и, следовательно, (14). Теорема доказана.

Замечание 3. Если $n \in \mathbb{N}^c_{m-1}$, то функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле может иметь вид, несколько отличный от вида функции, полученной в теореме 1. Например, при $n = 4$ и $m = 3$ имеем $4 \in \mathbb{N}^c_2$. Для этого случая в работе [13, теорема 2] было получено представление

$$G_6(x,\xi) = E_6(x,\xi) - E^*_6(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{8}\left(E^*_4(x,\xi) + \frac{1}{16}\right) - \frac{(|x|^2-1)^2(|\xi|^2-1)^2}{64}E^*_2(x,\xi).$$

Если же $n = 2$ и $m = 2$, а поэтому $2 \in \mathbb{N}^c_1$, то в соответствии с [11, теорема 2.3] имеем

$$G_4(x,\xi) = E_4(x,\xi) - E^*_4(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)(|\xi|^2-1)}{4}\left(E^*_2(x,\xi) + \frac{1}{2}\right).$$

3. Решение однородной задачи Дирихле. В качестве продолжения исследований по построению решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения из работы [10] приведём следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.

Теорема 2. *Решение однородной задачи Дирихле (6), (7) для полигармонического уравнения в единичном шаре S при $f \in C^1(\bar S)$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ можно представить в виде*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int\limits_S G_{2m}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{22}$$

где ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Вычислим значение оператора Δ^{m-1} от функции, задаваемой равенством (22). Для этого заметим, что интегралы типа потенциала $\int_S \rho(\xi)|x-\xi|^{-\alpha}\,d\xi$ являются функциями класса $C^p(\mathbb{R}^n)$ при ограниченной и интегрируемой функции $\rho(x)$, и дифференцирование порядка $p \in \mathbb{N}_0$ возможно под знаком интеграла при всяком p таком, что $\alpha + p < n$ [32, с. 25]. В нашем случае для сингулярного слагаемого функции $G_{2m}(x,\xi)$ из (13) имеем $\alpha = n - 2m + 1$ при $n \in \mathbb{N}_{m-1}$, а значит, для интеграла

$$u_1(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int\limits_S E_{2m}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

$p = 2m-2$ и поэтому $u_1 \in C^{2m-2}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, оператор Δ^{m-1} можно внести под знак интеграла. В силу леммы 1 функция $E_{2m}(x,\xi)$ обладает следующим свойством: $\Delta_x E_{2m}(x,\xi) = -E_{2(m-1)}(x,\xi)$. Отсюда при $x \in S$ имеем равенства

$$\Delta^{m-1}u_1(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int\limits_S \Delta^{m-1}_x E_{2m}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

и по свойству объёмного потенциала получим

$$\Delta^m u_1(x) = \Delta\left(-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi\right) = f(x), \quad x \in S.$$

Условия $f \in C^1(\bar S)$ достаточно для выполнения в S равенства $\Delta(\Delta^{m-1}u_1(x)) = f(x)$ [29]. В лемме 2, с учётом обозначения $(|x|^2-1)(|\xi|^2-1) = h_*(x,\xi) - h(x,\xi)$ из теоремы 1, было доказано, что функция вида

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(h_*(x,\xi)-h(x,\xi))^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi)$$

является m-гармонической по x в S при любом $\xi \in \bar{S}$ и её можно дифференцировать по x под знаком интеграла по ξ любое число раз. Обозначим интеграл по $\xi \in S$ от этой функции, умноженной на $(-1)^m/\omega_n f(\xi)$, через $u_2(x)$. Тогда будем иметь

$$\Delta^m u_2(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_S \Delta_x^m \frac{(|x|^2-1)^k (|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k (2,2)_k} E^*_{2m-2k}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Поэтому, учитывая (13), функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет уравнению (6):

$$\Delta^m u(x) = \Delta^m u_1(x) - \Delta^m u_2(x) = f(x), \quad x \in S.$$

В силу того, что для функции $u(x)$ из (21) в итоге имеем включение $u \in C^{2m-2}(\bar{S})$, предельный переход $x \to \partial S$ для функций $\Lambda_x^{[k]} u(x)$ можно внести под знак интеграла. С помощью (17) и (16) найдём

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\bigg|_{\partial S} = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int\limits_S \Lambda_x^{[k]} G_{2m}(x,\xi)|_{x \in \partial S} f(\xi)\, d\xi = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$$

а значит, функция $u(x)$ из (22) удовлетворяет всем граничным условиям (7). Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай простейшей полиномиальной правой части уравнения (6).

Теорема 3. *Пусть в уравнении (6)* $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$, *где* $H_k(x)$ *– однородный гармонический полином степени* $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ *и* $n \in \mathbb{N}_{m-1}$. *Тогда решение задачи Дирихле (6), (7) имеет вид*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|<1} G_{2m}(x,\xi) |x|^{2l} H_k(\xi)\, d\xi =$$

$$= \left(|x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2-1)^i \right) \frac{H_k(x)}{(2l+2,2)_m (2l+2k+n,2)_m}, \tag{23}$$

где $(a,b)_m$ *– обобщённый символ Похгаммера, определённый в (8).*

Доказательство. Пусть $m = 3$. В [13, следствие 2] было установлено, что решение задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения при $f(x) = |x|^{2l} H_m(x)$ можно записать как

$$u(x) = \frac{|x|^{2l+6} - 1 - (l+3)(|x|^2-1) - (l+2)(l+3)(|x|^2-1)^2/2}{(2l+2,2)_3 (2l+2k+n,2)_3} H_k(x).$$

В силу единственности решения задачи Дирихле [33, с. 39] и равенства (22) без труда получаем формулу (23) при $m = 3$. Равенство (23) обобщает эту формулу на произвольное $m \in \mathbb{N}$. Проверим, что функция $u(x)$, задаваемая правой частью (23), является решением однородной задачи Дирихле с правой частью $f(x) = |x|^{2l} H_k(x)$. Нетрудно видеть, что поскольку

$$\Delta |x|^{2l} H_k(x) = 2l(2l+2k+n-2)|x|^{2l-2} H_k(x),$$

то из (23), учитывая, что функции $|x|^{2k} H_k(x)$ при $k \leqslant m-1$ являются m-гармоническими полиномами, находим

$$\Delta^m u(x) = \frac{(2l+2m)\cdots(2l+2)(2l+2m+2k+n-2)\cdots(2l+2k+n)}{(2l+2,2)_m (2l+2k+n,2)_m} |x|^{2l} H_k(x) = |x|^{2l} H_k(x),$$

т.е. $u(x)$ удовлетворяет уравнению (6).

Проверим выполнение граничных условий (7). Сначала выделим из функции $u(x)$ постоянный множитель, т.е. представим эту функцию в виде $u(x) = (2l+2,2)_m (2l+2k+n,2)_m u^*(x)$.

Очевидно, что если $u^*(x)$ удовлетворяет условиям (17), то функция $u(x)$ тоже им удовлетворяет, а значит удовлетворяет и условиям (7). Далее представим функцию $u^*(x)$ в виде произведения двух полиномов $u^*(x) = R_m(x)H_k(x)$, где

$$R_m(x) = |x|^{2l+2m} - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{l+m}{i} (|x|^2-1)^i.$$

Легко видеть, что $R_m(x)|_{|x|=1} = 0$ при $m \geqslant 1$, а значит, $u^*(x)|_{|x|=1} = 0$. Вычислим $\Lambda u^*(x)$. Имеем

$$\Lambda u^*(x) = H_k(x)\Lambda R_m(x) + R_m(x)\Lambda H_k(x) =$$

$$= \left((2l+2m)|x|^{2l+2m} - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l+m}{i} 2i|x|^2(|x|^2-1)^{i-1}\right) H_k(x) + kR_m(x)H_k(x) =$$

$$= (2l+2m)\left(|x|^{2l+2m-2} - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{l+m-1}{i-1} (|x|^2-1)^{i-1}\right)|x|^2 H_k(x) + kR_m(x)H_k(x) =$$

$$= (2l+2m)R_{m-1}(x)H_{k+2}(x) + kR_m(x)H_k(x),$$

откуда следует, что $\Lambda u^*|_{|x|=1} = 0$ при $m \geqslant 2$. Здесь $H_{k+2}(x) = |x|^2 H_k(x)$. Если применить оператор Λ к полученному равенству, то аналогично проделанному выше получим

$$\Lambda(R_{m-i}(x)H_{k+j}(x)) = (2m-2i)R_{m-i-1}(x)|x|^2 H_{k+j}(x) + (k+j)R_{m-i}(x)H_{k+j}(x),$$

где $m-i-1 \geqslant 1$. Поэтому, выделив в функции $\Lambda^s u^*(x)$ слагаемое с наименьшим индексом у функции $G_i(x)$ отдельно, а остальные слагаемые с более высоким индексом у $G_i(x)$ обозначив как $O_i(x)$, можно записать

$$\Lambda^s u^*(x) = (2l+2m)\cdots(2l+2m-2s+2)G_{m-s}(x)H_{k+2s}(x) + O_{m-s}(x),$$

где $H_{k+2s}(x) = |x|^{2s}H_k(x)$ и $m-1 \geqslant s$. Поскольку $R_i(x)|_{|x|=1} = 0$ при $i \geqslant 1$, а значит, $O_{m-s}(x)|_{|x|=1} = 0$, то из полученного равенства следует, что $\Lambda^s u^*(x)|_{|x|=1} = 0$ для $s = \overline{0, m-1}$.

Таким образом, граничные условия (7) для функции $u^*(x)$, а значит и для функции (23), выполнены. Из единственности решения задачи Дирихле и равенства (22) следует справедливость (23). Теорема доказана.

Замечание 4. Полином из правой части (23) является решением задачи задачи Дирихле (6), (7) при всех $n \geqslant 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // Le Matematiche. 2006. V. 61. P. 395–405.
2. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
3. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
4. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // Adv. in Pure and Appl. Math. 2019. V. 10. № 3. C. 203–214.
5. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
6. *Ying Wang.* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // Complex Variables and Elliptic Equat. 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
7. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green d'ordine m // Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97–135.
8. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y.* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equat. 2008. V. 53. P. 177–183.

9. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 435–438.
10. *Karachik V.V.* Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2021. V. 9. № 16. Art. 1907.
11. *Karachik V.V.* Green's function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 9. P. 1500–1521.
12. *Карачик В.В.* О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 1. С. 71–86.
13. *Карачик В.В.* Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 87–105.
14. *Карачик В.В., Торебек Б.Т.* О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51.
15. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Мат. тр. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
16. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
17. *Карачик В.В.* Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 673–686.
18. *Sweers G.* A survey on boundary conditions for the biharmonic // Complex Variables and Elliptic Equat. 2009. V. 54. P. 79–93.
19. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
20. *Karachik V.V.* The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // J. of Math. Sci. 2023. V. 269. № 2. P. 189–204.
21. *Karachik V.V.* Riquier–Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball // Mathematics. 2023. V. 11. № 4. Art. 1000.
22. *Karachik V., Turmetov B., Yuan H.* Four boundary value problems for a nonlocal biharmonic equation in the unit ball // Mathematics. 2022. V. 10. № 7. Art. 1158.
23. *Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B.* Remark on Robin problem for Poisson equation // Complex Variables and Elliptic Equat. 2017. V. 62. № 10. P. 1589–1599.
24. *Akel M., Begehr H.* Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains // Math. Nachrichten. 2017. Bd. 290. H. 4. S. 490–506.
25. *Lin H.* Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs // Complex Variables and Elliptic Equat. 2020. V. 67. P. 79–95.
26. *Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H.* Harmonic Green functions for the Almaty apple // Complex Variables and Elliptic Equat. 2020. V. 65. № 11. P. 1814–1825.
27. *Grebenkov D.S., Traytak S.D.* Semi-analytical computation of Laplacian Green functions in three-dimensional domains with disconnected spherical boundaries // J. of Comput. Phys. 2019. V. 379. P. 91–117.
28. *Hsu C.-W., Hwu C.* Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions // Proc. of the Royal Soc. A: Math., Phys. and Eng. Sci. 2020. V. 476. № 2233. Art. 20190437.
29. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
30. *Begerh H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X.* Polyharmonic Dirichlet problems // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 19–40.
31. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
32. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
33. *Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G.* Polyharmonic Boundary Value Problems. Berlin, 2010.

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
г. Челябинск

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 30.03.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1070–1083

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ КВАДРАНТЕ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в криволинейном квадранте, рассматривается смешанная задача с условиями Коши на пространственной полуоси и условием Дирихле на нехарактеристической кривой. Решение задачи строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение интегральных уравнений. Исследуется разрешимость этих уравнений в зависимости от начальных данных и их гладкости. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. В случае недостаточно гладких данных задачи строится слабое решение.

DOI: 10.31857/S037406412308006X, EDN: IOVDQE

Введение. Многие задачи математической физики решаются в областях с подвижными границами, например, течение со свободной поверхностью, течение жидкости в средах с ёмкостями в стенках, течение жидкости, связанное с аккрецией/эрозией, течение жидкости через деформируемые пористые среды, экструзия жидкостей, деформация и колебания пузырьков и капель, формование стекла, затвердевание, электроосаждение [1]. Эффекты движущихся границ часто вносят значительный вклад в изучаемые явления, и поэтому важно находить точные решения таких задач.

При решении этих задач появляется возможность сделать замену координат, чтобы выровнять область. Однако это приводит к изменению и усложнению вида уравнения и граничных условий. Также задача усложняется формой области, ведь многие функциональные методы, такие как преобразования Фурье или Лапласа и подобные, требуют определённого вида области и граничных условий. В случае же неограниченных областей ещё часто приходится добавлять условия роста на бесконечности, чтобы интегралы от искомых функций сходились. Несмотря на перечисленные выше недостатки, данные методы применяются для решения смешанных задач с движущимися границами (см., например, работы [2–11]). Но следует отметить, что в этих работах не указываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решений, а либо приводятся достаточные условия, либо решения строятся формально, так как доказательство существования слабых решений в этих случаях весьма нетривиально [9].

Однако для решения таких задач можно применять классические методы, такие как метод характеристик и метод функции Римана, которые ранее были использованы для решения подобных задач [12, 13]. Как правило, такие методы приводят к эквивалентным интегральным уравнениям вместо дифференциальных.

В данной статье, используя метод характеристик, строится решение первой смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с нелинейным потенциалом в неограниченном квадранте с подвижной границей. Для этого записываются эквивалентные интегральные уравнения и методом последовательных приближений доказывается существование и единственность их решения. Выводятся необходимые и достаточные условия, при которых существует классическое решение. В случае невыполнения однородных условий согласования рассматривается задача с условиями сопряжения на характеристике, а в случае недостаточно гладких функций строится слабое решение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения

$$\Box u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x) \tag{1}$$

в криволинейной области $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,\infty),\ \ x \in (\gamma(t),\infty)\}$.

Область Q ограничена следующими кривыми: $t = 0$ – нижняя граница области, $x = \gamma(t)$ – боковая граница. Полагаем, что функция γ, определяющая боковую границу области Q, удовлетворяет условиям

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma \in C^1([0,\infty)), \quad \gamma'(t) \in (-a,a), \quad t \in [0,\infty),$$
$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) + at = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) - at = -\infty. \tag{2}$$

К уравнению (1) добавим начальные

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{3}$$

и граничное

$$u(t,\gamma(t)) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{4}$$

условия.

В (1)–(4) использованы следующие обозначения: $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ – оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости); F – заданная на множестве $\overline{Q}$ функция; φ, ψ и μ – функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$; f – функция, заданная на множестве $\overline{Q}\times\mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k(t,x) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$.

В работе [10] была изучена задача (1), (3) и (4) в случае безразмерного волнового уравнения ($a = 1$ и $f \equiv 0$) в классе затухающих кусочно-гладких функций. В [11] было формально построено кусочно-заданное решение задачи (1), (3) и (4) в случае уравнения Клейна–Гордона–Фока, а именно $a = 1$ и $f(t,x,u) = -u$.

В статье [14] изучалась первая смешанная задача для волнового уравнения в криволинейной полуполосе, откуда, в силу конечной скорости распространения, могут быть получены результаты о существовании и единственности классического решения задачи (1), (3) и (4) в случае $f \equiv 0$. В работе [12] также была изучена первая смешанная задача в криволинейной полуполосе для более общего линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока с первыми производными и с переменными коэффициентами

$$u_{tt}(t,x) - a^2(t,x)u_{xx}(t,x) + a^{(1)}(t,x)u_t(t,x) + a^{(2)}(t,x)u_x(t,x) + a^{(0)}(t,x)u(t,x) = F(t,x),$$

где коэффициент $a(t,x)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Поэтому в [12], опять же в силу конечной скорости распространения, задача (1), (3) и (4) была изучена в линейном случае $f(t,x,u) = a^{(0)}(t,x)u$. Однако там предполагалась ортогональность кривых $t = 0$ и $x = \gamma(t)$ в их точке пересечения $(0,0)$, т.е. налагалось дополнительное условие $\gamma'(0) = 0$. Мы же будем исследовать в настоящей работе задачу (1), (3) и (4) без этого предположения.

2. Криволинейный квадрант. Поскольку смешанная задача (1), (3) и (4) задаётся в области Q, отличающейся от стандартных, то представляется необходимым исследовать её свойства.

Заметим, что функция γ в силу ограниченности производной удовлетворяет условию Липшица с константой a. Из геометрических свойств липшицевых функций и условия $\gamma'(t) \in (-a,a)$, $t \in [0,\infty)$, из (2) заключаем, что для любого неотрицательного действительного числа t верно неравенство $-at < \gamma(t) < at$. Тогда для любой точки (t_0,x_0) области Q величина $x_0 + at_0$ принимает только положительные значения. Сформулируем два утверждения относительно разрешимости некоторых уравнений, содержащих функцию γ.

Утверждение 1. *Пусть $\alpha \in [0,\infty)$. Тогда уравнение $\gamma(t) + at = \alpha$ имеет единственное решение при выполнении условий (2).*

Доказательство. Введём функцию $\gamma_+(t) = \gamma(t) + at$. Очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_+(t) = +\infty$ и $\gamma_+(0) = 0$. Значит, решение уравнения $\gamma(t) + at = \alpha$ существует на множестве $[0,\infty)$ и может быть найдено методом бинарного поиска. Оно единственно, поскольку функция γ_+ возрастающая, так как $\gamma_+' = \gamma' + a > 0$.

Утверждение 2. *Пусть* $\alpha \in (-\infty, 0]$. *Тогда уравнение* $\gamma(t) - at = \alpha$ *имеет единственное решение при выполнении условий (2).*

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

Следствие. *Пусть выбрана некоторая точка* $(t_0, x_0) \in \{(t,x) : (t,x) \in Q,\ \ x - at \leqslant 0\}$. *Тогда кривая* $(t, \gamma(t))$ *пересекает прямые* $x - at = x_0 - at_0$ *и* $x + at = x_0 + at_0$ *в одной точке при выполнении условий (2).*

Для доказательства следствия необходимо составить системы уравнений для определения координат точек пересечения кривой с характеристическими кривыми и воспользоваться утверждениями 1 и 2.

Рассмотрим функцию $\gamma_- : (\infty, 0] \ni t \mapsto \gamma(t) - at$. В дальнейшем нам понадобится обратная к данной функция, которую будем обозначать символом Φ, т.е. $\Phi(\gamma(t) - at) = t$. Такая функция существует согласно утверждению 2. Из теоремы об обратной функции устанавливаются формулы

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\gamma'(\Phi(t)) - a}, \quad \Phi''(t) = -\frac{\gamma''(\Phi(t))}{(\gamma'(\Phi(t)) - a)^3}, \quad t \in (\infty, 0]. \tag{5}$$

Подставив $t = 0$ в (5), находим значения

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = \frac{1}{\gamma'(0) - a}, \quad \Phi''(0) = -\frac{\gamma''(0)}{(\gamma'(0) - a)^3}. \tag{6}$$

Заметим, что из представлений (5) и условия (2) следует, что Φ – убывающая функция.

3. Интегральное уравнение. Разделим область Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t,x) \in Q : (-1)^j(at - x) > 0\}$, $j = 1, 2$. Введём функции $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, как решения задачи (1), (3) и (4) на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$. Обозначим

$$u(t,x) = u^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

На множестве $\overline{Q^{(1)}}$, в силу начальных условий (3), справедливо равенство [15]

$$u^{(1)}(t,x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\biggl[F\biggl(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\biggr) +$$

$$+ f\biggl(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\biggl(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\biggr)\biggr)\biggr]\,dy, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}, \tag{8}$$

или эквивалентное ему [16]

$$u^{(1)}(t,x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}[F(\tau,\xi) + f(\tau,\xi,u^{(1)}(\tau,\xi))]\,d\xi, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}.$$

На множестве $\overline{Q^{(2)}}$ решение $u^{(2)}$ задачи (1), (3) и (4) найдём, используя тождество характеристического параллелограмма [17]. Пусть выбрана точка $P = (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}$. Построим характеристический параллелограмм $PP_\mu P_\phi P^{(1)}$ такой, что $P_\mu \in \{(t,x) : x = \gamma(t),\ \ t \in (0,\infty)\}$, $P_\phi \in \{(t,x) : x = at,\ \ t \in (0,\infty)\}$ и $P^{(1)} \in \{(t,x) : x = at,\ \ t \in (0,\infty)\}$.

Координаты точки $P_\mu(t_\mu, x_\mu)$ находятся как решение системы уравнений

$$x_\mu - at_\mu = x - at, \quad x_\mu = \gamma(t_\mu)$$

и имеют вид $t_\mu = \Phi(x - at)$, $x_\mu = \gamma(t_\mu)$.

Аналогично координаты точки $P_\phi(t_\phi, x_\phi)$ являются решением системы уравнений

$$x_\phi + at_\phi = x_\mu + at_\mu, \quad x_\phi = at_\phi$$

и имеют вид

$$t_\phi = \frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2a}, \quad x_\phi = \frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2}.$$

Заметим, что отрезок $P_\phi P_\mu$ принадлежит подмножеству $\overline{Q^{(2)}}$ в силу утверждения 1. Это значит, что весь параллелограмм $PP_\mu P_\phi P^{(1)}$ является подмножеством $\overline{Q^{(2)}}$.

Рассуждая таким же образом, координаты точки $P^{(1)}(t_1, x_1)$ находятся как решение системы уравнений

$$x_1 + at_1 = x + at, \quad x_1 = at_1$$

и имеют вид $t_1 = (x + at)/(2a)$ и $x_1 = (x + at)/2$.

Теперь, применив правило характеристического параллелограмма, получим

$$u(P) = u(P_\mu) + u(P^{(1)}) - u(P_\phi) - \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}.$$

Отсюда имеем

$$u^{(2)}(t,x) = \mu(\Phi(x-at)) + u^{(1)}\left(\frac{x+at}{2a}, \frac{x+at}{2}\right) -$$

$$- u^{(1)}\left(\frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2a}, \frac{\gamma(\Phi(x-at)) + a\Phi(x-at)}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(2)}}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$. *Функция* u *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворяет уравнению (1), условиям Коши (3) и условию Дирихле (4) тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнений (8) и (9) и выполняются условия согласования*

$$\mu(0) - \varphi(0) = 0, \tag{10}$$

$$\mu'(0) - \gamma'(0)\varphi'(0) - \psi(0) = 0, \tag{11}$$

$$\mu''(0) - (a^2 + (\gamma'(0))^2)\varphi''(0) - f(0,0,\varphi(0)) - F(0,0) - 2\gamma'(0)\psi'(0) - \gamma''(0)\varphi'(0) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (4). Тогда, согласно статье [15], имеет место представление (8). Формула (9) выводится из тождества характеристического паралелограмма [17]. Из начальных условий (3) и граничного условия (4) следуют величины $\partial_t^k\partial_x^p u(0,0)$, где k, p – целые неотрицательные числа, $0\leqslant k+$ $+p\leqslant 2$. Продифференцировав условие (4) по переменной t дважды, получим

$$\mu'(t)=u_t(t,\gamma(t))+\gamma'(t)u_x(t,\gamma(t)),\quad t\in[0,\infty),$$

$$\mu''(t)=u_{tt}(t,\gamma(t))+2\gamma'(t)u_{tx}(t,\gamma(t))+(\gamma'(t))^2u_{xx}(t,\gamma(t))+\gamma''(t)u_x(t,\gamma(t)),\quad t\in[0,\infty). \tag{13}$$

Аналогично, дифференцируя условия Коши (3) по переменной x, будем иметь

$$u_x(0,x)=\varphi'(x),\quad u_{xx}(0,x)=\varphi''(x),\quad u_{tx}(0,x)=\psi'(x),\quad x\in[0,\infty). \tag{14}$$

Из выражений (3), (14) и уравнения (1) при $t=0$ и $x=0$ получим

$$u(0,0)=\varphi(0),\quad u_t(0,0)=\psi(0),$$

$$u_x(0,0)=\varphi'(0),\quad u_{xx}(0,0)=\varphi''(0),\quad u_{tx}(0,0)=\psi'(0),$$

$$u_{tt}(0,0)=a^2u_{xx}(0,0)+f(0,0,u(0,0))+F(0,0)=a^2\varphi''(0)+f(0,0,\varphi(0))+F(0,0). \tag{15}$$

Подставив (15) в представления (13) и краевое условие (4) при $t=0$, имеем

$$\mu(0)=\varphi(0),\quad \mu'(0)=\psi(0)+\gamma'(0)\varphi'(0),$$

$$\mu''(0)=a^2\varphi''(0)+f(0,0,\varphi(0))+F(0,0)+2\gamma'(0)\psi'(0)+(\gamma'(0))^2\varphi''(0)+\gamma''(0)\varphi'(0). \tag{16}$$

Формулы (16) представляют собой условия согласования (10)–(12).

2. Предположим, что имеют место представления функции u в виде (8) и (9) и выполнены условия (10)–(12). В силу условий гладкости $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$ и $\gamma\in C^2([0,\infty))$ заключаем, что $u^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j=1,2$. Подставив (8) и (9) в уравнение (1) и условия (3), (4), убеждаемся, что функция $u^{(j)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в $\overline{Q^{(j)}}$ и краевым условиям. Чтобы при этом функция u принадлежала классу $C^2(\overline{Q})$, необходимо и достаточно совпадений на характеристике $x=at$ значений функций $u^{(j)}$, их производных первого и второго порядков, т.е.

$$\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,x)|_{x=at}=\partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,x)|_{x=at}, \tag{17}$$

где k, p – целые неотрицательные числа, $0\leqslant k+p\leqslant 2$.

Найдём значения функции $u^{(2)}$ на характеристике $x-at=0$. С учётом (6) имеем

$$u^{(2)}(t,x)|_{x=at}=u^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u^{(1)}\left(\frac{a\Phi(0)+\gamma(\Phi(0))}{2a},\frac{a\Phi(0)+\gamma(\Phi(0))}{2}\right)+\mu(\Phi(0))=$$

$$=u^{(1)}(t,at)-u^{(1)}(0,0)+\mu(\Phi(0))=u^{(1)}(t,at)+\mu(0)-\varphi(0). \tag{18}$$

Из (18) и (10) следует (17) при $k=p=0$.

Вычисляем производные первого и второго порядков функций $u^{(j)}$ в $\overline{Q^{(j)}}$, $j=1,2$. Затем на характеристике $x-at=0$ рассмотрим с учётом (6) разность их предельных значений:

$$u_t^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_t^{(2)}(t,x)|_{x=at}=\frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\left[f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\right]dz+\frac{a(\gamma'(0)\varphi'(0)-\mu'(0)+\psi(0))}{a-\gamma'(0)}=$$

$$=-a(u_x^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_x^{(2)}(t,x)|_{x=at}).$$

Так как выполнены условия (11) и (17) при $k=p=0,$ то это влечёт за собой истинность (11) при $k+p=1.$

Далее вычисляем в областях $\overline{Q^{(j)}},$ $j=1,2,$ производные второго порядка по t функций $u^{(j)}$ и рассматриваем с учётом (6) их разность на характеристике $x-at=0$:

$$u_{tt}^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_{tt}^{(2)}(t,x)|_{x=at}=\frac{1}{2}\biggl(\frac{f(0,0,\varphi(0))(a^2+\gamma'(0)^2)}{(a-\gamma'(0))^2}+(a-\gamma'(0))^{-3}\times$$

$$\times(2a^2(aF(0,0)-F(0,0)\gamma'(0)+\varphi''(0)(a-\gamma'(0))(a^2+\gamma'(0)^2)+$$

$$+a\gamma''(0)\varphi'(0)+2a\gamma'(0)\psi'(0)-a\mu''(0)+\gamma''(0)(\psi(0)-\mu'(0))+\gamma'(0)\mu''(0)-2\gamma'(0)^2\psi'(0)))+$$

$$+\frac{f(0,0,\mu(0))(a+\gamma'(0))}{a-\gamma'(0)}+f(t,at,u^{(1)}(t,at))-f(t,at,u^{(2)}(t,at))\biggr)+$$

$$+\frac{1}{8a^2}\biggl(\int\limits_0^{2at}\biggl[\biggl(u_t^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)-au_x^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)\partial_y f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=u^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)-$$

$$-af_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)+f_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)-aF_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)+F_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr]\,dz-$$

$$-\int\limits_0^{2at}\biggl[\biggl(u_t^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)-au_x^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)\partial_y f\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=u^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)-$$

$$-af_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)+f_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr)-aF_x\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)+F_t\biggl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\biggr)\biggr]dz\biggr). \qquad (19)$$

Аналогично вычисляем разности $u_{xx}^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_{xx}^{(2)}(t,x)|_{x=at}$ и $(u_{xt}^{(1)}(t,x)-u_{xt}^{(2)}(t,x)).$ В результате получаем

$$u_{tt}^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_{tt}^{(2)}(t,x)|_{x=at}=f(t,x,u^{(1)}(t,x))-f(t,x,u^{(2)}(t,x))+a^2(u_{xx}^{(1)}(t,x)-u_{xx}^{(2)}(t,x)),$$

$$u_{tt}^{(1)}(t,x)|_{x=at}-u_{tt}^{(2)}(t,x)|_{x=at}=$$

$$=\frac{1}{2}(f(t,x,u^{(1)}(t,x))-f(t,x,u^{(2)}(t,x)))-a(u_{xt}^{(1)}(t,x)-u_{xt}^{(2)}(t,x)). \qquad (20)$$

Воспользовавшись (12) и ранее установленными условиями (17) при $k+p\leqslant 1,$ получаем, что из равенств (19) и (20) следует условие (17) при $k+p\leqslant 2.$ Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\in C([0,\infty)),$ $\psi\in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty)),$ $\mu\in C([0,\infty)),$ $f\in C(\overline{Q}\times\mathbb{R}),$ $F\in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),$ $\gamma\in C^1([0,\infty)),$ *функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$ *Тогда решения уравнений (8) и (9) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство теоремы проведём, следуя схеме, изложенной в работах [12, 15, 18–20]. Для определённости рассмотрим уравнение (8) для функции $u^{(1)},$ которое будем решать методом последовательных приближений. Обозначим

$$G(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}F\biggl(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\biggr)\,dy.$$

Возьмём начальное приближение $u^{(1,0)}=G.$ Тогда каждое следующее приближение будет вычисляться по формуле

$$u^{(1,m)}(t,x)=G(t,x)+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,m-1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{21}$$

Найдём оценки для последовательных приближений. Пусть $\widetilde{x}>0$, множество

$$\mathcal{A}=\operatorname{Conv}\{(0,0),(0,\widetilde{x}),(\widetilde{x}/(2a),\widetilde{x}/2)\}\subset\overline{Q^{(1)}},$$

$$M_G=\max_{(t,x)\in\mathcal{A}}|G(t,x)|,\quad K=\sup_{(t,x)\in\mathcal{A}}\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left|k\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|^2dy\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$|u^{(1,1)}(t,x)-u^{(1,0)}(t,x)|\leqslant\mathcal{M}\equiv|u^{(1,1)}-u^{(1,0)}|_{C(\mathcal{A})},$$

$$|(u^{(1,2)}-u^{(1,1)})(t,x)|\leqslant\left|\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4a^2}\left|\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}k\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\left|u^{(1,1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)-u^{(1,0)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4a^2}\left|\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left|k\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|^2dy\right)^{1/2}\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\mathcal{M}^2\,dy\right)^{1/2}\right|\leqslant\frac{K\mathcal{M}t}{2\sqrt{2}a},\quad (t,x)\in\mathcal{A}.$$

Далее методом математической индукции, в качестве базы в которой здесь выбирается последнее неравенство, несложно доказывается, что имеет место оценка

$$|(u^{(1,i+1)}-u^{(1,i)})(t,x)|\leqslant\frac{K^i\mathcal{M}t^i}{2^ia^i\sqrt{(2i)!}},\quad (t,x)\in\mathcal{A}. \tag{22}$$

Заметим, что $u^{(1,m)}=u^{(1,0)}+\sum_{j=0}^{m-1}(u^{(1,j+1)}-u^{(1,j)})$. Из оценки (22) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $u^{(1,\infty)}=u^{(1,0)}+\sum_{j=0}^{\infty}(u^{(1,j+1)}-u^{(1,j)})$ на множестве $\mathcal{A}$, поскольку его члены мажорируются по абсолютной величине членами равномерно сходящегося ряда

$$\mathcal{M}+M_G+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{K^i\mathcal{M}t^i}{2^ia^i\sqrt{(2i)!}}\leqslant M\left(1+\exp\left(\frac{Kt}{2a}\right)\right),$$

где $M=\mathcal{M}+M_G$. Таким образом, последовательные приближения непрерывных функций $u^{(1,m)}$ равномерно сходятся на множестве $\mathcal{A}$ к непрерывной в $\mathcal{A}$ функции $u^{(1)}:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q^{(1)}}\supset\supset\mathcal{A}\ni(t,x)\to u^{(1)}(t,x)\in\mathbb{R}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – к непрерывной в $\overline{Q^{(1)}}$ функции $u^{(1)}:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q^{(1)}}\ni(t,x)\to u^{(1)}(t,x)\in\mathbb{R}$. Переходя в равенстве (21) к пределу при $m\to\infty$, получаем, что функция $u^{(1)}$ является решением уравнения (8) на множестве $\overline{Q^{(1)}}$.

Докажем единственность решения уравнения (8) от противного. Пусть уравнение (8) имеет два решения: $u^{(1)}$ и $\widetilde{u}^{(1)}$. Обозначим $U=u^{(1)}-\widetilde{u}^{(1)}$. Тогда

$$U(t,x)=\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z} f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},\widetilde{u}^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{23}$$

Функция U является непрерывной, значит $|U(t,x)|\leqslant M_U$ при условии $(t,x)\in\mathcal{A}$, где M_U – некоторая константа. Из равенства (23) с учётом условия типа Липшица–Каратеодори и неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует, что

$$|U(t,x)|\leqslant\frac{1}{4a^2}\left(K^2\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}M_U^2\,dy\right)^{1/2}\leqslant\frac{KM_Ut}{2\sqrt{2}a},\quad (t,x)\in\mathcal{A}.$$

Применяя метод математической индукции, придём к следующей оценке:

$$|U(t,x)|\leqslant\frac{K^iM_Ut^i}{2^ia^i\sqrt{(2i)!}}$$

для любого положительного целого числа i и любой пары (t,x) из $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $U\equiv 0$ на множестве $\mathcal{A}$, а в силу произвольности $\widetilde{x}$ – что $U\equiv 0$ на множестве $\overline{Q^{(1)}}$. Таким образом, доказано существование единственного непрерывного решения уравнения (8).

Чтобы доказать непрерывную зависимость решения от начальных данных, рассмотрим, наряду с уравнением (8), возмущённое уравнение

$$(u^{(1)}+\Delta u)(t,x)=(G+\Delta G)(t,x)-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{24}$$

и разность возмущённого (24) и невозмущённого (8) уравнений

$$\Delta u(t,x)=\Delta G(t,x)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},(u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}. \tag{25}$$

Для уравнения (25) относительно возмущения Δu справедлива следующая оценка модуля возмущения:

$$|\Delta u(t,x)|\leqslant M_{\Delta G}+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}k\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\left|\Delta u\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right|dy,$$

где $M_{\Delta G}=\max\limits_{(t,x)\in\mathcal{A}}|\Delta G(t,x)|$. Применяя многомерную лемму Гронуолла [21, гл. 13] к предыдущему неравенству, получаем $|\Delta u(t,x)|\leqslant C^{(1)}M_{\Delta G}$, где $C^{(1)}$ – некоторая положительная константа, зависящая только от множества $\mathcal{A}$, функции k и числа a. Из полученного неравенства вытекает, что какое бы малое возмущение ΔG, $M_{\Delta G}=\varepsilon$, мы не взяли, для возмущения решения выполняется неравенство $|\Delta u(t,x)|=\delta\leqslant\varepsilon C^{(1)}$ на множестве $\mathcal{A}$. В силу произвольности $\widetilde{x}$ получаем, что решение $u^{(1)}$ уравнения (8) непрерывно зависит от исходных данных.

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (9) для функции $u^{(2)}$ доказывается аналогично – для оценки приближений в этом случае можно применить неравенство

$$\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{\gamma(\Phi(x-at))+a\Phi(x-at)}^{x+at} |\Theta(y,z)|\,dz \leqslant \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_0^{x+at} |\Theta(y,z)|\,dz,$$

где функцию Θ можно считать дополненной нулём или продолженной по непрерывности вне множества $\overline{Q^{(2)}}$. Теорема доказана.

4. Классическое решение. Фактически теоремы 1 и 2 гарантируют существование и единственность классического решения задачи (1), (3) и (4).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (10)–(12).*

Доказательство следует из теорем 1 и 2.

5. Неоднородные условия согласования. Подобно тому как это было сделано в работах [15, 22–26], рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда условия согласования (10)–(12) частично или полностью не выполняются.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u или её производных, или всё вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 3. *Если для заданных функций* μ, φ, ψ, γ, f, F *не выполняются однородные условия согласования (10)–(12), то какими бы гладкими не были функции* f, F, μ, φ *и* ψ, *задача (1), (3) и (4) не имеет классического решения, определённого на* $\overline{Q}$.

Доказательство следует из теоремы 1.

Пусть заданные функции уравнения (1) и условий (3), (4) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 3: $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q}\times{}$ $\times\mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\gamma \in C^2([0,\infty))$. Так как условия согласования (10)–(12), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывные производные функции u:

$$[(u)^+ - (u)^-](t,x)|_{x=at} = \varphi(0) - \mu(0),$$

$$[(u_t)^+ - (u_t)^-](t,x)|_{x=at} = \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\left(f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\right)dz +$$
$$+\frac{a(\gamma'(0)\varphi'(0)-\mu'(0)+\psi(0))}{a-\gamma'(0)} = -a[(u_x)^+-(u_x)^-](t,x)|_{x=at},$$

$$[(u_{tt})^+ - (u_{tt})^-](t,x)|_{x=at} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(0,0,\varphi(0))(a^2+\gamma'(0)^2)}{(a-\gamma'(0))^2} + (a-\gamma'(0))^{-3}\times\right.$$
$$\times(2a^2(aF(0,0)-F(0,0)\gamma'(0)+\varphi''(0)(a-\gamma'(0))(a^2+\gamma'(0)^2)+$$
$$+a\gamma''(0)\varphi'(0)+2a\gamma'(0)\psi'(0)-a\mu''(0)+\gamma''(0)(\psi(0)-\mu'(0))+\gamma'(0)\mu''(0)-2\gamma'(0)^2\psi'(0)))+$$
$$\left.+\frac{f(0,0,\mu(0))(a+\gamma'(0))}{a-\gamma'(0)} + f(t,at,(u)^+(t,at)) - f(t,at,(u)^-(t,at))\right)+$$
$$+\frac{1}{8a^2}\left(\int\limits_0^{2at}\left[\left((u_t)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)-a(u_x)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-\right.\right.$$

$$- af_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) + f_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) - aF_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right) + F_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\Bigg]\,dz -$$

$$-\int\limits_0^{2at}\Bigg[\left((u_t)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right) - a(u_x)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) -$$

$$- af_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) + f_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) - aF_x\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right) + F_t\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\Bigg]\,dz\Bigg) =$$

$$= f(t,x,(u)^+(t,x)) - f(t,x,(u)^-(t,x)) + a^2[(u_{xx})^+ - (u_{xx})^-] =$$

$$= \frac{1}{2}(f(t,x,(u)^+(t,x)) - f(t,x,(u)^-(t,x))) - a[(u_{tx})^+ - (u_{tx})^-]. \tag{26}$$

Здесь было использовано обозначение $(\cdot)^\pm$ – предельные значения функции u и её частных производных с разных сторон на характеристике $x-at=0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^\pm(t,x)|_{x=at} = \lim_{\delta\to 0+}\partial_t^p u(t, at\pm\delta).$$

Обозначим $\widetilde{Q} = \overline{Q}\setminus\{(t,x): x-at=0\}$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\gamma\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\widetilde{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26).*

Доказательство теоремы следует из предыдущих рассуждений.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\gamma\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26) и (10).*

Доказательство следует из теорем 1–3 и рассуждений выше. Действительно, если $\varphi(0) = \mu(0)$, то решение u на множестве $\{(t,x): x-at=0\}$ является непрерывным в силу (26). Следовательно, кроме того, что решение $u\in C^2(\widetilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$, $u\in C(\overline{Q})$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\gamma\in C^2([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное решение* u, *определённое формулами (7)–(9), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26), (10) и (11).*

Доказательство легко следует из теорем 1–5 и формул (26), так как в этом случае u является непрерывной на $\{(t,x): x-at=0\}$, но в силу (26), (10) и (11) имеет непрерывные производные первого порядка.

Замечание 1. Если заданные функции задачи (1), (3) и (4) не удовлетворяют однородным условиям согласования (10)–(12), то решение задачи (1), (3) и (4) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x-at=0$.

В качестве условий сопряжения могут быть выбраны условия (26). Теперь задачу (1), (3) и (4) можно сформулировать, используя условия сопряжения (26) следующим образом.

Задача (1), (3) и (4) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (3), граничному условию (4), условиям сопряжения (26).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

6. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (1), (3) и (4) в случае, когда функции μ, φ, ψ, γ, f, F не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. *Функцию u, представимую в виде (7)–(9), назовём слабым решением задачи (1), (3) и (4).*

Определение 1 вводит понятие слабого решения. Однако в литературе такие решения называют также *решениями в широком смысле* [27, с. 56; 28], *обобщёнными решениями* [29], *слабыми слабыми* (“*weak*”) *решениями* [30, с. 19; 31, с. 69, 185, 189], *слабыми* (“*mild*”) *решениями* [32–34].

Наша мотивация введения слабого решения именно таким образом состоит в том, что представление (7)–(9) корректно определено, даже если функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ не дифференцируемы, что побуждает обобщить классическое решение с помощью “слабого” решения, которое должно быть только непрерывным. Это примерно та же самая мотивация, которая побуждает искать решения в различных пространствах Соболева [35–38] или в смысле обобщённых функций [39]. Более того, во многих случаях линейных абстрактных задач Коши понятия слабого (“mild”) и слабого слабого (“weak”) (в двойственном смысле, смысле распределений) решений эквивалентны[*)].

Замечание 2. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также слабым решением этой задачи.

Также очевидно, что если выполнены дополнительные условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ и условия согласования (10)–(12), то слабое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть выполняются условия $\varphi \in C([0,\infty))$, $\psi \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\gamma \in C^1([0,\infty))$ и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что $|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$. Первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное слабое решение u из класса $C(\widetilde{Q})$.*

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (8), (9) и принадлежность их решений классу непрерывных функций следует из теоремы 1.

Для слабого решения условия сопряжения (26), вообще говоря, не выполняются. Можно гарантировать только выполнение условия $[(u)^+ - (u)^-](t,x)|_{x=at} = \varphi(0) - \mu(0)$ на характеристике $x - at = 0$, исходя из представлений (8), (9).

Также мы можем сопоставить слабое решение в смысле определения 1 с другими определениями обобщённого решения. Так, например, следуя А.Н. Тихонову и А.А. Самарскому [40, с. 81], можно ввести следующее

Определение 2. Пусть функции φ и μ кусочно-гладкие, функции ψ и F – кусочно-непрерывные и f – непрерывная. Тогда назовём *обобщённым решением* задачи (1), (3) и (4) функцию u, кусочно-гладкую на множестве $\overline{Q}$, удовлетворяющую начальным условиям (3), граничному условию (4) и уравнению

$$\oint\limits_{\partial C} a^2 u_x(t,x)\,dt + u_t(t,x)\,dx + \int\limits_C [F(t,x) + f(t,x,u(t,x))\,dt\,dx = 0 \tag{27}$$

для любой области $C \subset \overline{Q}$ со стандартно ориентированным кусочно-гладким краем ∂C.

Утверждение 4. *Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также обобщённым решением этой задачи.*

[*)] https://mathoverflow.net/questions/320300/what-mild-solution-means-and-how-to-find-it.

Для доказательства утверждения необходимо проинтегрировать уравнение (1) по области $C \subset \overline{Q}$ и применить теорему Грина.

Утверждение 5. *Любое дважды непрерывно дифференцируемое обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим решением этой задачи.*

Доказательство. Рассмотрим множество $C = [t_1, t_2] \times [x_1, x_2] \subset \overline{Q}$, применим теорему Грина к равенству (27) и получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} [u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) - f(t,x,u(t,x)) - F(t,x)]\,dt\,dx = 0. \tag{28}$$

Воспользовавшись теоремой о среднем для интеграла в (28), будем иметь

$$[u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) - f(t,x,u(t,x)) - F(t,x)]\Delta t\,\Delta x = 0, \tag{29}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и (t,x) – некоторая точка, принадлежащая множеству C. Разделив обе части (29) на $\Delta t \Delta x$, перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$ и получим дифференциальное уравнение (1), что заканчивает доказательство.

Повторяя рассуждения, изложенные в [40, с. 81–83], приходим к тому, что обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) также представляется в виде (7)–(9), т.е. является слабым. Отсюда сразу вытекает единственность обобщённого решения. С помощью непосредсвенной подстановки нетрудно убедиться в том, что функция типа (7)–(9), где φ – кусочно-гладкая, ψ, μ и F – кусочно-непрерывные, f – непрерывная, удовлетворяет уравнению (27), начальным условиям (3) и граничному условию (4). Это доказывает теорему существования. Таким образом, показана в некотором виде эквивалентность слабого и обобщённого решений задачи (1), (3) и (4). Но следует отметить, что обобщённое решение требует бóльшую гладкость данных.

Следуя С.С. Харибегашвили и О.М. Джохадзе [41], также рассмотрим следующее обобщение классического решения.

Определение 3. Пусть функции $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$ удовлетворяют условиям согласования (10) и (11). Тогда назовём *сильным обобщённым решением* задачи (1), (3) и (4) функцию u, если $u \in C(\overline{Q})$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{Q})$, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\Box u(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot)) - F(\cdot), 0)_{C(\overline{Q})} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u)_{C(\overline{Q})} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \rho(u_n(\,\cdot, \gamma(\cdot)), \mu)_{C([0,\infty))} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n(0,\cdot), \varphi)_{C^1([0,\infty))} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(0,\cdot), \psi\right)_{C([0,\infty))} = 0,$$

где $\rho(x_1, x_2)_X$ – расстояние между элементами $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ в метрическом пространстве X.

Аналогично статье [41] могут быть установлены следующие замечания.

Замечание 3. Любое классическое решение задачи (1), (3) и (4) является также сильным обобщённым решением этой задачи.

Замечание 4. Если выполнены дополнительные условия гладкости $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^2([0,\infty))$ и условие согласования второго порядка (12), то сильное обобщённое решение задачи (1), (3) и (4) является классическим.

Утверждение 6. *Пусть выполняются условия гладкости $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$ и условия согласования (10) и (11). Тогда функция u является сильным обобщённым решением задачи (1), (3) и (4) тогда и только тогда, когда функция u является слабым решением задачи (1), (3) и (4).*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [41].

Теорема 8. *Пусть выполняются условия гладкости* $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$, *условия согласования (10), (11) и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что* $|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$. *Тогда первая смешанная задача (1), (3) и (4) имеет единственное непрерывно дифференцируемое сильное обобщённое решение* u, *представимое в виде (7)–(9).*

Доказательство. Согласно утверждению 6 имеют место представления (7)–(9) сильного обобщённого решения u. Непрерывные функции $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ однозначно определяются в силу теоремы 2, а из условий гладкости, указанных в данной теореме, следует, что $u^{(1)} \in C^1(\overline{Q^{(1)}})$ и $u^{(2)} \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$. Из первых двух равенств (26) и условий согласования (10) и (11) заключаем, что $u \in C^1(\overline{Q})$. Теорема доказана.

Заключение. В статье были сформулированы достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в криволинейном квадранте для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всём криволинейном квадранте. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристике. В случае недостаточной гладкости исходных данных построены слабое, обобщённое и сильное обобщённое решения начальной задачи и доказана их единственность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ben Q.Li.* Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer. London, 2006.
2. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближённого метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 188–199.
3. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Журн. Средне-Волжского мат. о-ва. 2020. Т. 22. № 2. С. 188–199.
4. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2012. Вып. 3. С. 145–151.
5. *Litvinov V.L.* Solution of model boundary value problems on oscillations of mechanical systems with moving boundaries by the Duhamel method // J. of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1392. Art. 012015.
6. *Tao L.N.* A method for solving moving boundary problems // SIAM J. on Appl. Math. 1986. V. 46. № 2. P. 254–264.
7. *Davis G.B., Hill J.M.* A moving boundary problem for the sphere // IMA J. of Appl. Math. 1982. V. 29. № 1. P. 99–111.
8. *Rodrigo M.R., Thamwattana N.* A unified analytical approach to fixed and moving boundary problems for the heat equation // Mathematics. 2021. V. 9. № 7. Art. 749.
9. *Čanić S.* Moving boundary problems // Bull. Amer. Math. Soc. 2021. V. 58. P. 79–106.
10. *Pelloni B., Pinotsis D.A.* Moving boundary value problems for the wave equation // J. of Comput. and Appl. Math. 2010. V. 234. № 6. P. 1685–1691.
11. *Pelloni B., Pinotsis D.A.* The Klein–Gordon equation in a domain with time-dependent boundary // Studies in Appl. Math. 2008. V. 121. № 3. P. 291–312.
12. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.
13. *Остапенко В.А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в области с подвижной границей // Вестн. Днепропетровского ун-та. Сер. Моделирование. 2011. Вып. 3. № 8. С. 30–54.
14. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н.* Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 99–109.

15. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 174–184.
16. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
17. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order // arXiv:2204.09408.
18. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М., 2021.
19. *Корзюк В.И., Ковнацкая О.А., Севастюк В.А.* Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.
20. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
21. *Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M.* Inequalities Involving Functions and their Integrals and Derivatives. Dordrecht, 1991.
22. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.
23. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–21.
24. *Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П.* Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. № 3. С. 287–297.
25. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений. Ч. 2. Минск, 2017.
26. *Моисеев Е.И., Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1373–1385.
27. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.
28. *Friedrichs K.O.* Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables // Amer. J. of Math. 1948. V. 70. № 3. P. 555–589.
29. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22. № 3. С. 322–331.
30. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
31. *DiBenedetto E.* Partial Differential Equations. Boston, 2010.
32. *Ikeda M., Inui T., Wakasugi Y.* The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data // Nonlin. Differ. Equat. Appl. 2017. V. 50. № 2. Art. № 10.
33. *Iwamiya T.* Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces // Hiroshima Math. J. 1986. V. 50. P. 499–530.
34. *Byszewski L.* Existence and uniqueness of a classical solution to a functional-differential abstract nonlocal Cauchy problem // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 1999. V. 12. № 1. P. 91–97.
35. *Демиденко Г.В., Кудрявцев А.А.* Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея–Бишопа // Мат. заметки Северо-Вост. федерал. ун-та. 2021. Т. 28. № 3. С. 5–18.
36. *Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В., Пинтус Г.М.* Задача Коши для одной псевдогиперболической системы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 626–638.
37. *Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В.* Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости // Мат. тр. 2020. Т. 24. № 2. С. 3–23.
38. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661.
39. *Егоров Ю.В.* К теории обобщённых функций // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
40. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
41. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. сб. 2014. Т. 205. № 4. С. 121–148.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 04.01.2023 г.
После доработки 26.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1084–1088

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2+517.929.2

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ И ДИАМЕТРЫ ИХ РЕШЕНИЙ

© 2023 г. А. С. Войделевич

В пространстве выпуклых компактов с операцией сложения по Минковскому и операцией умножения матрицы на множество рассмотрены линейные рекуррентные уравнения первого порядка. Дано полное описание таких уравнений, все решения которых имеют постоянный диаметр. Для уравнений специального вида вычислены показатели Ляпунова последовательностей диаметров их решений.

DOI: 10.31857/S0374064123080071, EDN: IOVIRW

Введение. Дифференциальные уравнения с производной Хукухары, введённые в статье [1], рассматривались во многих работах (см., например, [2–4]) и вызывают определённый интерес у специалистов по дифференциальным уравнениям. Поэтому, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет смысл, наряду с дифференциальными уравнениями с производной Хукухары, рассмотреть и их дискретные аналоги, поскольку дифференциальные уравнения – предельный случай дискретных уравнений.

В работе рассматриваются линейные рекуррентные уравнения в пространстве выпуклых компактов. Решения таких уравнений представляют собой последовательности компактных выпуклых множеств пространства $\mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, а значит, обладают нетривиальными геометрическими характеристиками, совокупность которых по существу определяет свойства самих решений. Некоторые геометрические характеристики решений дифференциальных уравнения с производной Хукухары рассматривались в статьях автора [5–7].

1. Основные определения и формулировки теорем. Прежде чем сформулировать полученные результаты, введём необходимые обозначения и приведём ряд определений.

Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать семейство всех непустых ограниченных подмножеств векторного пространства $\mathbb{R}^d$, а через $K_{\rm c}(\mathbb{R}^d)$ – его подсемейство, состоящее из всех непустых выпуклых компактных подмножеств. *Диаметром* $\operatorname{diam} X$ множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется число $\sup\limits_{a,b\in X} \|b-a\|$, здесь и ниже через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма.

Суммой Минковского $Z = X+Y$ двух непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \overset{\rm def}{=} \{x+y\colon x\in X,\ y\in Y\}$. Для действительной матрицы A, состоящей из d столбцов, и множества $X \subset \mathbb{R}^d$ через AX обозначим множество $\{Ax\colon x\in X\}$. В том частном случае, когда $A = \operatorname{diag}[\alpha,\ldots,\alpha]$, вместо AX пишем αX. Отметим, что для произвольных действительных матриц A, B и множества $X\subset\mathbb{R}^d$, вообще говоря, $(A+B)X \neq AX+BX$.

Итак, на совокупности непустых выпуклых компактов определены операции сложения (по Минковскому) и умножения на матрицу. Семейство $K_{\rm c}(\mathbb{R}^d)$ замкнуто относительно указанных операций, а значит, мы можем рассмотреть линейное рекуррентное уравнение

$$X(t+1) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}X(t-j), \quad X(0), X(1), \ldots, X(m-1) \in K_{\rm c}(\mathbb{R}^d), \quad t \geqslant m-1, \tag{1}$$

где d, m и n – фиксированные натуральные числа, A_{ij} – действительные $d\times d$-матрицы, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, суммирования – это операции сложения по Минковскому. Уравнение (1) в соответствии с общепринятой математической терминологией будем называть *линейным рекуррентным однородным уравнением m-го порядка размерности d и ранга n с постоянными* *коэффициентами в пространстве выпуклых компактов* (в уравнение (1) при некотором фиксированном j может входить меньше, чем n слагаемых (пусть k), в этом случае считаем, что матрицы A_{ij}, $i=\overline{k+1,n}$, нулевые).

Определение. *Решением* $X(\cdot)$ линейного уравнения (1) называется последовательность $(X(t))_{t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$, при подстановке которых в (1) получается при каждом натуральном $t\geqslant m-1$ верное равенство; множества $X(0),\ \ldots,\ X(m-1)$ называются *начальными множествами* уравнения (1). *Диаметром* решения $X(\cdot)$ назовём числовую последовательность $(\operatorname{diam}X(t))_{t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}$. Будем говорить, что у уравнения (1) все решения *постоянного диаметра*, если из того, что начальные множества решения имеют один и тот же диаметр, следует, что и все остальные элементы решения имеют тот же диаметр, т.е.

$$\operatorname{diam}X(t)=\operatorname{diam}X(0)=\operatorname{diam}X(1)=\ldots=\operatorname{diam}X(m-1)$$

при любом натуральном $t\geqslant m$.

Естественно возникает задача получить необходимое и достаточное условие того, что у уравнения (1) все решения постоянного диаметра. В работе найдено полное решение этой задачи для уравнения (1) первого порядка, т.е. для уравнения

$$X(t+1)=\sum_{i=1}^{n}A_iX(t),\quad X(0)\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),\quad t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) понятие решения постоянного диаметра упрощается и равносильно выполнению равенства $\operatorname{diam}X(t)=\operatorname{diam}X(0)$ при всех $t\in\mathbb{N}$. Необходимое и достаточное условие того, что у уравнения (2) все решения постоянного диаметра, даёт следующая

Теорема 1. *У уравнения (2) тогда и только тогда все решения постоянного диаметра, когда существуют такие действительные числа* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ *и ортогональная* $d\times d$*-матрица* A, *что* $\sum_{i=1}^n|\alpha_i|=1$ *и* $A_i=\alpha_iA$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Рассмотрим частный случай уравнения (2):

$$X(t+1)=\alpha X(t)+AX(t),\quad X(0)\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d),\quad t\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{3}$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$ и $A\in M_d(\mathbb{R})$. Через $\mu(A)$ обозначим максимальное по модулю собственное значение матрицы A. *Показатель Ляпунова* $\lambda[x]$ произвольной последовательности $x(0),\ x(1),\ \ldots$ действительных чисел определяется по формуле

$$\lambda[x]\overset{\text{def}}{=}\varlimsup_{t\to+\infty}|x(t)|^{1/t}.$$

Показатель Ляпунова $\lambda[x]$ называется *строгим*, если существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)|^{1/t}$. Вычислены показатели Ляпунова диаметров решений уравнения (3), которые при $t=0$ обладают непустой внутренностью, а именно, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $X_0\in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, а* $X(\cdot)$ *– такое решение уравнения (3), что* $X(0)=X_0$. *Тогда показатель Ляпунова* $\lambda[\operatorname{diam}X]$ *диаметра решения* $X(\cdot)$ *является строгим и равен* $|\alpha|+|\mu(A)|$.

2. Доказательства теорем. Докажем несколько вспомогательных утверждений. Через $\mathbb{S}^{d-1}\overset{\text{def}}{=}\{x\in\mathbb{R}^d\colon \|x\|=1\}$ обозначим единичную $(d-1)$-мерную сферу с центром в нуле.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{B}=\{B_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ *– множество действительных* $d\times d$*-матриц. Если для каждого вектора* $v\in\mathbb{S}^{d-1}$ *найдётся индекс* $i=i(v)$ *такой, что* $B_iv\in\mathbb{S}^{d-1}$, *то множество* $\mathcal{B}$ *содержит хотя бы одну ортогональную матрицу.*

Доказательство. Обозначим $F_i=\{v\in\mathbb{S}^{d-1}\colon B_iv\in\mathbb{S}^{d-1}\}$, $i\in\mathbb{N}$. Множества F_i замкнутые и $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i=\mathbb{S}^{d-1}$. По теореме Бэра о категориях [8, с. 78] одно из множеств, скажем F_1, содержит единичный вектор v вместе с некоторой его окрестностью на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Покажем, что B_1 – ортогональная матрица. Выберем какой-либо вектор $u\in\mathbb{S}^{d-1}$, ортогональный вектору v. Покажем, что $\|B_1u\| = 1$ и $B_1v \perp B_1u = 0$. Найдётся такой угол $\varphi_0 > 0$, что $v\cos\varphi + u\sin\varphi \in F_1$ при всех $\varphi \in (0, \varphi_0)$. Следовательно,

$$(v\cos\varphi + u\sin\varphi)^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 (v\cos\varphi + u\sin\varphi) =$$
$$= \cos^2\varphi + u^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u \sin^2\varphi + v^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u \sin(2\varphi) = 1, \quad \varphi \in (0, \varphi_0). \tag{4}$$

Продифференцировав тождество (4) по переменной φ, получим

$$(u^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u - 1)\sin(2\varphi) + 2v^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u \cos(2\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi_0),$$

а значит, $u^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u = 1$ и $v^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} B_1 u = 0$.

Произвольный вектор $w \in \mathbb{R}^d$ представи́м в виде линейной комбинации $w = \alpha v + \beta u$, где $\|u\| = 1$ и $v \perp u$. Поэтому $\|B_1 w\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \|w\|^2$, т.е. B_1 – ортогональная матрица. Лемма доказана.

Опорной функцией произвольного ограниченного множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется функция $s(X, \cdot)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $s(X, v) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{x \in X} v^{\mathrm{T}} x$. Несложно видеть, что для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^d$ верны соотношения $s(\mathbb{S}^{d-1}, v) = s(\mathbb{B}^d, v) = \|v\|$, где через $\mathbb{B}^d \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| \leqslant 1\}$ обозначен замкнутый шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Лемма 2. *Для любого* $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *верно равенство* $\operatorname{diam} X = \max\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} (s(X, v) + s(X, -v))$.

Доказательство. Выберем произвольно вектор $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Так как X – компактное множество, то найдутся такие точки $p, q \in X$, что $s(X, v) = v^{\mathrm{T}} p$ и $s(X, -v) = -v^{\mathrm{T}} q$. Поэтому $s(X, v) + s(X, -v) = v^{\mathrm{T}}(p - q) \leqslant \|p - q\| \leqslant \operatorname{diam} X$. Так как v – произвольный единичный вектор, то $\sup\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} (s(X, v) + s(X, -v)) \leqslant \operatorname{diam} X$.

Утверждение леммы очевидно выполнено для одноэлементного множества X, поэтому далее без нарушения общности будем считать, что множество X содержит хотя бы две точки. Из компактности множества X следует существование таких точек a и $b \in X$, что $\operatorname{diam} X = \|b - a\| \neq 0$. Пусть $v = (b - a)/\|b - a\|$. Тогда

$$s(X, v) + s(X, -v) \geqslant v^{\mathrm{T}} b - v^{\mathrm{T}} a = v^{\mathrm{T}}(b - a) = \|b - a\| = \operatorname{diam} X,$$

а значит, $\max\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} (s(X, v) + s(X, -v)) = \operatorname{diam} X$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ *– центрально-симметричное относительно нуля множество, т.е.* $X = -X$, *тогда* $\operatorname{diam} X = 2 \max\limits_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} s(X, v)$.

Далее для упрощения будем писать $\alpha X - \beta X$ вместо $\alpha X + (-\beta) X$.

Лемма 3. *Пусть* α *и* β *– неотрицательные действительные числа. Равенство* $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(\alpha X - \beta X)$ *верно для любого* $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, *если и только если* $\alpha + \beta = 1$.

Доказательство. Если $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(\alpha X - \beta X)$ при всех $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathrm{R}^d)$, то, в частности, получаем $2 = \operatorname{diam} \mathbb{B}^d = \operatorname{diam}(\alpha \mathbb{B}^d - \beta \mathbb{B}^d) = \operatorname{diam}(\alpha + \beta)\mathbb{B}^d = 2(\alpha + \beta)$, т.е. $\alpha + \beta = 1$.

Докажем, что если $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $\alpha + \beta = 1$, то $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(\alpha X - \beta X)$ при всех $X \in K_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Выберем произвольно две точки $p_1, p_2 \in \alpha X - \beta X$. Для некоторых точек $a_i, b_i \in X$ верно равенство $p_i = \alpha a_i - \beta b_i$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\|p_2 - p_1\| = \|\alpha(a_2 - a_1) - \beta(b_2 - b_1)\| \leqslant \alpha\|a_2 - a_1\| + \beta\|b_2 - b_1\| \leqslant (\alpha + \beta)\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} X.$$

Поэтому $\operatorname{diam}(\alpha X - \beta X) \leqslant \operatorname{diam} X$.

Пусть $\operatorname{diam} X = \|b - a\|$, где $a, b \in X$. Тогда обе точки $\alpha a - \beta b$ и $\alpha b - \beta a$ принадлежат множеству $\alpha X - \beta X$, а значит, $\operatorname{diam}(\alpha X - \beta X) \geqslant \|\alpha b - \beta a - \alpha a + \beta b\| = (\alpha + \beta)\|b - a\| = \operatorname{diam} X$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $A_i = \alpha_i A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для некоторой ортогональной матрицы A и действительных чисел α_1, α_2, $\ldots$, α_n таких, что $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$.

Обозначим $S = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon \alpha_i > 0\}$ и, поскольку операция сложения по Минковскому коммутативна, преобразуем уравнение (2) к виду

$$X(t+1) = \left(\sum_{i\in S}\alpha_i\right)AX(t) - \left(\sum_{i\notin S}-\alpha_i\right)AX(t).$$

Так как $\sum_{i\in S}\alpha_i + \sum_{i\notin S}-\alpha_i = \sum_{i=1}^n|\alpha_i| = 1,$ то согласно лемме 3 все решения уравнения (2) постоянного диаметра.

Предположим, что все решения уравнения (2) постоянного диаметра. Через

$$[p,q] \overset{\text{def}}{=} \{p + t(q-p) \colon t \in [0,1]\}$$

обозначим отрезок с концами $p, q \in \mathbb{R}^d$. Выберем произвольно вектор $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ и рассмотрим решение $X(\cdot)$ уравнения (2) с начальным условием $X(0) = [0, v]$. Тогда $X(1)$ – выпуклая оболочка точек вида $\sum_{i\in I}A_iv,$ где $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $\operatorname{diam}X(1) = \operatorname{diam}X(0) = 1,$ то $\|(\sum_{i\in I}A_i - \sum_{j\in J}A_j)v\| = 1$ для некоторых непересекающихся подмножеств $I,$ J индексов. Ввиду леммы 1 для некоторой пары непересекающихся подмножеств $(I, J) \subset \{1, 2, \ldots, n\}^2$ матрица $\sum_{i\in I}A_i - \sum_{j\in J}A_j$ ортогональна.

Теперь рассмотрим решение $X(\cdot)$ уравнения (2) с начальным значением $X(0) = \mathbb{B}^d$. Тогда, согласно следствию 1, получаем равенства

$$2 = \operatorname{diam}X(1) = 2\max_{v\in\mathbb{S}^{d-1}} s\left(\sum_{i=1}^n A_i\mathbb{B}^d, v\right) = 2\max_{v\in\mathbb{S}^{d-1}}\sum_{i=1}^n s(\mathbb{B}^d, A_i^{\mathrm{т}}v) = 2\max_{v\in\mathbb{S}^{d-1}}\sum_{i=1}^n\|A_i^{\mathrm{т}}v\|.$$

Отсюда вытекает, что для произвольного вектора $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ верны соотношения

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^n\|A_i^{\mathrm{т}}v\| \geqslant \left\|\left(\sum_{i\in I}A_i - \sum_{j\in J}A_j\right)^{\mathrm{т}}v\right\| = 1.$$

Следовательно, для произвольного вектора $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ векторы $A_1^{\mathrm{т}}v,$ $A_2^{\mathrm{т}}v,$ $\ldots,$ $A_n^{\mathrm{т}}v$ коллинеарны. Поэтому найдутся такие действительные числа $\alpha_1,$ $\alpha_2,$ $\ldots,$ α_n и матрица $A,$ для которых $A_i = \alpha_iA,$ $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку матрица $\sum_{i\in I}A_i - \sum_{j\in J}A_j$ ортогональная, то матрица A также может быть выбрана ортогональной. Так как $\sum_{i=1}^n\|A_i^{\mathrm{т}}\| = 1,$ то $\sum_{i=1}^n|\alpha_i| = 1.$ Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть $X(\cdot)$ – решение уравнения (3) такое, что $X(0) = \mathbb{B}^d$. Тогда показатель Ляпунова $\lambda[\operatorname{diam}X]$ диаметра решения $X(\cdot)$ является строгим и равен $|\alpha| + |\mu(A)|$.*

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ верно равенство $X(t) = \sum_{k=0}^t C_t^k\alpha^{t-k}A^k\mathbb{B}^d$. Следовательно, $s(X(t), v) = \sum_{k=0}^t C_t^k|\alpha|^{t-k}\|(A^{\mathrm{т}})^kv\|,$ $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Так как матрицы A и $A^{\mathrm{т}}$ подобны, то $\mu(A^{\mathrm{т}}) = \mu(A)$. Согласно формуле Гельфанда справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty}\|(A^{\mathrm{т}})^k\|^{1/k} = |\mu(A)|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая постоянная $c_\varepsilon > 0,$ что $\|(A^{\mathrm{т}})^k\| \leqslant c_\varepsilon(|\mu(A) + \varepsilon)^k$ при всех $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Таким образом, имеем

$$s(X(t), v) \leqslant \sum_{k=0}^t C_t^k|\alpha|^{t-k}\|(A^{\mathrm{т}})^k\| \leqslant c_\varepsilon\sum_{k=0}^t C_t^k|\alpha|^{t-k}(|\mu(A)| + \varepsilon)^k =$$

$$= c_\varepsilon(|\alpha| + |\mu(A)| + \varepsilon)^t, \quad v \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Поэтому в силу следствия 1 верно соотношение

$$\lambda[\operatorname{diam} X] = \varlimsup_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} X(t))^{1/t} \leqslant |\alpha| + |\mu(A)| + \varepsilon.$$

Устремив в последнем неравенстве ε к нулю, получим, что $\lambda[\operatorname{diam} X] \leqslant |\alpha| + |\mu(A)|$.

Пусть $v = x + iy$ – единичный собственный вектор матрицы $A^{\text{т}}$, соответствующий собственному значению $\mu(A)$. Тогда $\|(A^{\text{т}})^k x\| + \|(A^{\text{т}})^k y\| \geqslant \|(A^{\text{т}})^k v\| = |\mu(A)|^k$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Следовательно, $s(X(t), x) + s(X(t), y) \geqslant (|\alpha| + |\mu(A)|)^t$ при $t \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Так как $\|x\| \leqslant 1$ и $\|y\| \leqslant 1$, то $\operatorname{diam} X(t) \geqslant (|\alpha|+|\mu(A)|)^t$, а значит, $\varliminf_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} X(t))^{1/t} \geqslant |\alpha|+|\mu(A)|$. Последнее и ранее установленные неравенства означают, что показатель Ляпунова $\lambda[\operatorname{diam} X]$ является строгим и равен $|\alpha| + |\mu(A)|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Выберем два шара $p_1 + r_1\mathbb{B}^d$ и $p_2 + r_2\mathbb{B}^d$ таких, что

$$r_1 > 0 \quad \text{и} \quad p_1 + r_1\mathbb{B}^d \subset X_0 \subset p_2 + r_2\mathbb{B}^d.$$

Рассмотрим решения $Y(\cdot)$, $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ уравнения (3) с начальными условиями $Y(0) = \mathbb{B}^d$, $X_1(0) = p_1 + r_1\mathbb{B}^d$ и $X_2(0) = p_2 + r_2\mathbb{B}^d$. Несложно видеть, что $X_i(t) = (\alpha E + A)^t p_i + r_i Y(t)$ при всех $t \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Согласно лемме 4 верно равенство $\lim_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} Y(t))^{1/t} = |\alpha| + |\mu(A)|$. Так как $X_1(t) \subset X(t) \subset X_2(t)$ и $\operatorname{diam} X_i(t) = r_i \operatorname{diam} Y(t)$, то

$$r_1 \operatorname{diam} Y(t) \leqslant \operatorname{diam} X(t) \leqslant r_2 \operatorname{diam} Y(t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{N}\bigcup\{0\},$$

поэтому $\lim_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} X(t))^{1/t} = \lim_{t\to+\infty} (\operatorname{diam} Y(t))^{1/t} = |\alpha| + |\mu(A)|$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hukuhara M.* Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.
2. *Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. London, 2006.
3. *Очеретнюк Е.В., Слынько В.И.* Качественный анализ решений нелинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве $\operatorname{conv}\mathbb{R}^2$ // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1004–1018.
4. *Атамась И.В., Слынько В.И.* Формула Лиувилля–Остроградского для некоторых классов дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1452–1464.
5. *Войделевич А.С.* Стационарные линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие многогранники // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1695–1698.
6. *Войделевич А.С.* Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 572–576.
7. *Войделевич А.С.* Линейные дифференциальные уравнения с производной Хукухары, сохраняющие свойство постоянства ширины // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 17–22.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2009.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
После доработки 21.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1089–1097

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.28

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ И РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2023 г. **Ю. Г. Смирнов, О. В. Кондырев**

Рассматривается скалярная трёхмерная краевая задача дифракции волны для уравнения Гельмгольца с условиями сопряжения, предполагающими наличие бесконечно тонкого материала на границе сред. Доказываются теоремы единственности и существования решения. Исходная задача сводится к системе интегральных уравнений по поверхности раздела сред. Приводятся расчётные формулы для системы линейных алгебраических уравнений, полученные после применения метода коллокации, и численные результаты решения задачи, когда область является шаром с определёнными условиями сопряжения.

DOI: 10.31857/S0374064123080083, EDN: IPHEJN

Введение. Краевые задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца встречаются во многих разделах математической физики: акустике, механике, электродинамике. В частности, это задачи дифракции акустических или электромагнитных волн на препятствиях. Основные типы этих задач исследованы достаточно подробно (см., например, [1–4]). Однако в последнее время появился интерес к краевым задачам со специальными условиями сопряжения, которые предполагают наличие бесконечно тонкого слоя материала на поверхности раздела сред. В качестве примера можно рассмотреть случай графена, покрывающего диэлектрик [5, 6]. Поскольку графен имеет толщину в один атом, то его можно считать бесконечно тонким. Но его наличие на поверхности раздела сред изменяет условия сопряжения. В общем случае графен проявляет нелинейность в инфракрасном и терагерцовом диапазонах частот [7], однако во многих важных для приложений случаях нелинейностью можно пренебречь (формула Кубо–Хансена [8]). В настоящей статье будут рассмотрены линейные условия сопряжения.

Одним из наиболее популярных методов решения задач сопряжения является метод сведения к системе интегральных уравнений. Такой подход не только позволяет исследовать свойства и разрешимость задачи, но и ориентирован на её численное решение. При решении многих задач переход к интегральным уравнениям приводит к понижению размерности решаемой задачи, что очень важно при реализации вычислительного алгоритма с точки зрения быстродействия и памяти компьютера. Кроме того, вычислительные алгоритмы, построенные для решения интегральных уравнений, легко распараллеливаются, что позволяет использовать суперкомпьютеры для их решения.

В настоящей статье будут изучены вопросы единственности решения задачи сопряжения, разрешимости системы интегральных уравнений и представлены результаты численного решения задачи сопряжения в одном конкретном случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу дифракции на теле (в области) Q с границей ∂Q класса гладкости C^2, расположенном в однородном пространстве $\mathbb{R}^3$, характеризующимся постоянным волновым числом k_0.

Пусть $u_0 = e^{ik_0x_3}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, – падающая плоская волна. Выбор источника в виде плоской волны не является принципиальным и будет использован только при численном решении конкретной задачи.

В области Q среда однородна и характеризуется волновым числом $k \neq k_0$. На границе ∂Q будем определять только предельное значение волнового числа с разных сторон поверхности. Требуется определить решение задачи сопряжения (полное поле), где искомая функция должна удовлетворять условиям гладкости

$$u \in C^2(Q) \bigcap C^1(\bar{Q}) \bigcap C^1(\overline{\mathbb{R}^3 \backslash Q}), \tag{1}$$

уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = 0, \quad k^2(x) = \begin{cases} k_0^2, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \\ k^2, & x \in Q, \end{cases} \tag{2}$$

условию излучения Зоммерфельда для рассеянного поля $u_s = u - u_0$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_0 u_s = o(1/r), \quad r = |x| \to \infty, \tag{3}$$

и условиям сопряжения на границе ∂Q

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial Q} = [\gamma u]_{\partial Q}, \tag{4}$$

где $[\,\cdot\,]_{\partial Q}$ означает разность следов функции с разных сторон ∂Q. Здесь n – внешняя нормаль к области Q, а вещественный коэффициент γ равен γ_1 вне области Q и γ_2 внутри неё.

2. Единственность решения задачи сопряжения.

Лемма (Реллиха) [9, с. 50]. *Пусть $u(x)$ – регулярное вне сферы S_{r_0}, $|x| = r > r_0$, решение уравнения Гельмгольца. Если*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{S_r} |u|^2\, dS = 0,$$

где S_r – сфера радиуса r (с центром в нуле), то $u \equiv 0$ при $r > r_0$.

Запишем решение задачи в следующем виде:

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \\ u_-(x), & x \in Q. \end{cases}$$

Теорема 1. *Решение задачи*

$$\Delta u_+(x) + {k_0}^2 u_+(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q},$$

$$\Delta u_-(x) + k^2 u_-(x) = 0, \quad x \in Q,$$

$$u_+|_{\partial Q} = u_-|_{\partial Q}, \quad \left.\frac{\partial u_+}{\partial n}\right|_{\partial Q} - \left.\frac{\partial u_-}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \gamma_1 u_+|_{\partial Q} - \gamma_2 u_-|_{\partial Q}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s = o(1/r), \quad r \to \infty, \tag{5}$$

удовлетворяющее условию (1), где $u_s = u_+ - u_0$, единственно.

Доказательство. Так как поставленная задача линейна, достаточно рассмотреть соответствующую однородную задачу и показать, что она имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u_s(x) + {k_0}^2 u_s(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q},$$

$$\Delta u_- + k^2 u_- = 0, \quad x \in Q,$$

$$u_s|_{\partial Q} = u_-|_{\partial Q}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial n}\right|_{\partial Q} - \left.\frac{\partial u_-}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \gamma_1 u_s|_{\partial Q} - \gamma_2 u_-|_{\partial Q}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s = o(1/r), \quad r \to \infty. \tag{8}$$

Вместе с функциями u_s и u_- будем рассматривать комплексно-сопряжённые им $\bar{u}_s$ и $\bar{u}_-$. Они удовлетворяют тем же однородным уравнениям и условиям сопряжения на границе ∂Q. Условия на бесконечности примут следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} + ik\bar{u}_s = o(1/r), \quad r \to \infty. \tag{9}$$

Применим вторую формулу Грина к функциям u_- и $\bar{u}_-$ в области Q:

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_1} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_1} \right) dS = 0,$$

где n_1 – единичная нормаль к поверхности ∂Q, направленная во внешность тела.

Пусть Σ_R – сфера такого радиуса R, что содержит в себе область Q. Тогда, применив формулу Грина к функциям u_s и $\bar{u}_s$ в области между Σ_R и ∂Q, получим

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n_2} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial n_2} \right) dS + \int\limits_{\Sigma_R} \left(u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0,$$

где n_2 – единичная нормаль к поверхности интегрирования и $n_2 = -n_1$ на ∂Q.

Сложим два предыдущих равенства:

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_1} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_1} \right) dS + \int\limits_{\partial Q} \left(u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n_2} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial n_2} \right) dS + \int\limits_{\Sigma_R} \left(u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

Воспользуемся условием (6) и его аналогом для сопряжённой функции и приведём к одному вектору нормали. В результате получим

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u_- \left(\frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_1} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n_1} \right) + \bar{u}_- \left(\frac{\partial u_s}{\partial n_1} - \frac{\partial u_-}{\partial n_1} \right) \right) dS + \int\limits_{\Sigma_R} \left(u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

Из условия (7) имеем равенство

$$\int\limits_{\partial Q} (u_-(\gamma_2 \bar{u}_- - \gamma_1 \bar{u}_s) + \bar{u}_-(\gamma_1 u_s - \gamma_2 u_-))\, dS + \int\limits_{\Sigma_R} \left(u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

В нём первое слагаемое в силу условия (6) равно нулю. Второе слагаемое преобразуем с помощью условий (8) и (9) на бесконечности. При $R \to \infty$ будем иметь

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Sigma_R} |u_s|^2\, dS = 0.$$

Воспользовавшись леммой получаем, что $u_s \equiv 0$ всюду вне сферы $\sum_R$. Тогда, аналитически продолжая u_s вплоть до границы ∂Q (в силу аналитичности решения однородного уравнения Гельмгольца с постоянным коэффициентом), находим, что $u_s \equiv 0$ всюду вне Q.

Из условий сопряжения для функции u_- получаем однородную переопределённую задачу в области Q

$$\Delta u_- + k^2 u_- = 0, \quad x \in Q,$$

$$u_-|_{\partial Q} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_-}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0,$$

откуда, применяя третью формулу Грина [4, с. 80] для решения однородного уравнения Гельмгольца, заключаем, что функция u_- тождественно равна нулю.

3. Сведение задачи к системе интегральных уравнений. Обозначим

$$G = G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad G_0 = G_0(x,y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Функции u_s и u_- будем искать в виде потенциалов простого слоя:

$$u_s(x) = \int\limits_{\partial Q} G_0(x,y)\phi(y)\,ds_y, \tag{10}$$

$$u_-(x) = \int\limits_{\partial Q} G(x,y)\psi(y)\,ds_y, \tag{11}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Падающая волна имеет вид $u_0(x) = e^{ik_0x_3}$. Итак, на контуре ∂Q будут выполняться два условия:

$$u_0 + u_s = u_-, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u_-}{\partial n} = \gamma_1(u_0 + u_s) - \gamma_2 u_-. \tag{13}$$

Запишем условия (12) и (13) с учётом (10) и (11). Воспользуемся теоремой о производной потенциала простого слоя по направлению нормали [4, с. 65] и получим

$$u_0|_{\partial Q} + \int\limits_{\partial Q} G_0(x,y)\phi(y)\,ds_y = \int\limits_{\partial Q} G(x,y)\psi(y)\,ds_y, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} - \frac{1}{2}(\phi(x) + \psi(x)) + \int\limits_{\partial Q}\biggl(\frac{\partial}{\partial n_x}G_0(x,y)\phi(y) - \frac{\partial}{\partial n_x}G(x,y)\psi(y)\biggr)\,ds_y =$$

$$= \gamma_1\biggl(u_0|_{\partial Q} + \int\limits_{\partial Q} G_0(x,y)\phi(y)\,ds_y\biggr) - \gamma_2\int\limits_{\partial Q} G(x,y)\psi(y)\,ds_y. \tag{15}$$

Систему интегральных уравнений (14) и (15) запишем в операторном виде

$$S_{11}\phi - S_{12}\psi = f_1, \quad (I + S_{21})\phi + (I + S_{22})\psi = f_2, \tag{16}$$

где

$$S_{11}\phi = \int\limits_{\partial Q} G_0(x,y)\phi(y)\,ds_y, \quad S_{12}\psi = \int\limits_{\partial Q} G(x,y)\psi(y)\,ds_y,$$

$$S_{21}\phi = 2\gamma_1\int\limits_{\partial Q} G_0(x,y)\phi(y)\,ds_y - 2\int\limits_{\partial Q}\frac{\partial}{\partial n_x}G_0(x,y)\phi(y)\,ds_y,$$

$$S_{22}\psi = 2\int\limits_{\partial Q}\frac{\partial}{\partial n_x}G(x,y)\psi(y)\,ds_y - 2\gamma_2\int\limits_{\partial Q} G(x,y)\psi(y)\,ds_y,$$

$$f_1 = -u_0|_{\partial Q}, \quad f_2 = 2\biggl(\frac{\partial u_0}{\partial n}\bigg|_{\partial Q} - \gamma_1 u_0|_{\partial Q}\biggr).$$

4. Существование решения системы интегральных уравнений. Пусть $\tilde{\varphi} = \phi + \psi$, $\tilde{\psi} = \phi - \psi$. Тогда система (16) примет вид

$$\frac{1}{2}(S_{11} - S_{12})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{11} + S_{12})\tilde{\psi} = f_1, \quad \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} + S_{22})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} - S_{22})\tilde{\psi} = f_2. \tag{17}$$

Будем искать решения системы интегральных уравнений в пространствах Гёльдера $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$, $f_1 \in C^{1,\alpha}(\partial Q)$, $f_2 \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$, где $0 < \alpha < 1$.

Линейные ограниченные операторы $S_{21}, S_{22} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{0,\alpha}(\partial Q)$ компактны [4, с. 73], следовательно, компактны операторы $S_{21} + S_{22}, S_{21} - S_{22} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{0,\alpha}(\partial Q)$.

Пусть $k_1 > 0$ такое число, при котором внутренняя задача Неймана для уравнения Гельмгольца с волновым числом k_1 в области Q имеет только тривиальное решение. Тогда [10, с. 43] ограниченный оператор $T_1 : C^{1,\alpha}(\partial Q) \to C^{0,\alpha}(\partial Q)$, определённый по формуле

$$T_1 f = \frac{\partial}{\partial n_x} \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y)\, ds_y,$$

непрерывно обратим, т.е. имеет ограниченный обратный оператор ${T_1}^{-1} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{1,\alpha}(\partial Q)$.

Далее пусть оператор $S_1 : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{1,\alpha}(\partial Q)$ определён по формуле

$$S_1 f = \int\limits_{\partial Q} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y)\, ds_y.$$

Тогда имеет место равенство [10, с. 44]

$$4T_1 S_1 = 4{K_1}^2 - I, \tag{18}$$

где I – тождественный оператор, а $K_1 : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{0,\alpha}(\partial Q)$ – компактный оператор, определённый формулой

$$K_1 f = \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y)\, ds_y.$$

Подействуем на левую и правую части первого уравнения в (17) оператором T_1 и получим

$$\frac{1}{2}T_1(S_{11} - S_{12})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}T_1(S_{11} + S_{12})\tilde{\psi} = \tilde{f}_1, \tag{19}$$

где $\tilde{f}_1 = T_1 f_1$. Операторы $S_{11}, S_{12} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{1,\alpha}(\partial Q)$ являются ограниченными [10, с. 43], а оператор $K_0 = S_{11} - S_{12} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{1,\alpha}(\partial Q)$ – компактным, так как ядро интегрального оператора и его производная не имеют особенности:

$$G_0(x,y) - G(x,y) = i(k_0 - k)/4\pi + O(|x-y|),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(G_0(x,y) - G(x,y)) = O(1) \quad \text{при} \quad |x-y| \to 0.$$

Рассмотрим оператор $S_{11} + S_{12} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{1,\alpha}(\partial Q)$. Имеем

$$S_{11} + S_{12} = 2S_1 + (S_{11} - S_1) + (S_{12} - S_1).$$

Операторы $S_{11} - S_1, S_{12} - S_1 : C^{0,\alpha}(\partial Q) \to C^{1,\alpha}(\partial Q)$ будут компактными (доказательство аналогично приведённому выше). Тогда, учитывая формулу (18), уравнение (19) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}T_1 K_0 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}T_1(S_{11} - S_1)\tilde{\psi} + \frac{1}{2}T_1(S_{12} - S_1)\tilde{\psi} + \frac{1}{2}{K_1}^2\tilde{\psi} - \frac{1}{4}\tilde{\psi} = \tilde{f}_1, \tag{20}$$

где все операторы (за исключением $I/4$), входящие в (20) и действующие в $C^{0,\alpha}(\partial Q) \to$ $\to C^{0,\alpha}(\partial Q)$, компактны.

В результате имеем систему интегральных уравнений второго рода в пространстве $C^{0,\alpha}(\partial Q)$

$$-2T_1K_0\tilde{\varphi} - 2T_1(S_{11} + S_{12} - 2S_1)\tilde{\psi} - 2{K_1}^2\tilde{\psi} + \tilde{\psi} = -4\tilde{f}_1,$$

$$\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} + S_{22})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} - S_{22})\tilde{\psi} = f_2. \tag{21}$$

Заметим, что все преобразования и переходы от одной системы к другой эквивалентны, т.е. допускают обратные преобразования (именно для этого выбирался обратимый оператор T_1). Таким образом, система уравнений (21) эквивалентна системе (17).

Система уравнений (21) определяет фредгольмов оператор как сумму единичного и компактного операторов. Следовательно, для системы (21) справедлива альтернатива Фредгольма.

Теорема 2. *Решения систем интегральных уравнений (16), (17), (21) существуют и единственны.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ – нетривиальное решение $(|\tilde{\varphi}| + |\tilde{\psi}| \not\equiv 0)$ однородной системы (21) (при $\tilde{f}_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$). Так как оператор T_1 имеет ограниченный обратный, то эти функции являются решением однородной системы (17). По формулам $\phi = (\tilde{\varphi} + \tilde{\psi})/2$, $\psi = (\tilde{\varphi} - \tilde{\psi})/2$ определим функции ϕ, ψ, которые будут нетривиальным решением однородной системы (16). Далее по формулам (10), (11) определяем функции u_s и u_-, которые, как нетрудно проверить, дают нетривиальное решение однородной задачи (5) (с $u_0 \equiv 0$). Но это решение в силу теоремы 1 должно быть тривиальным. Полученное противоречие доказывает, что однородная система (21) может иметь только тривиальное решение.

Из фредгольмовости оператора системы (21), пользуясь альтернативой Фредгольма, заключаем, что решение системы (21) существует и единственно. Из эквивалентности систем (21), (17), (16) получаем существование и единственность решений и для систем (17) и (16).

Теорема 3. *Решение краевой задачи (1)–(4) существует и единственно.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что построенное с помощью решений системы (21) по формулам (10), (11) решение краевой задачи удовлетворяет (2)–(4). Остаётся проверить условия гладкости решения (1). Потенциалы (10), (11), очевидно, бесконечно дифференцируемы в областях Q и $\mathbb{R}^3\backslash\bar{Q}$. Известно [4, с. 62], что первые производные потенциала простого слоя с равномерно непрерывной по Гёльдеру плотностью можно продолжить с сохранением непрерывности по Гёльдеру вплоть до границы области, если граница ∂Q класса гладкости C^2. Отсюда заключаем, что условие (1) также выполняется.

Теоремы 1–3 полностью обосновывают решение краевой задачи через потенциалы простого слоя, а также сводят решение краевой задачи (1)–(4) к одной из интегральных систем (16), (17) и (21).

5. Метод коллокации. Построим схему для решения системы интегральных уравнений (16) методом коллокации.

Будем считать, что Q – шар радиуса R с центром в начале координат. Перейдём к сферической системе координат, точка в пространстве теперь определяется следующим образом:

$$x = (\varphi_x, \theta_x, \rho_x), \quad y = (\varphi_y, \theta_y, \rho_y).$$

На $\partial Q = \{x : 0 < \varphi < 2\pi, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; \rho = R\}$ в сферических координатах введём прямоугольную сетку

$$\Pi_{kl} = \{x : x_{1,k} < \varphi < x_{1,k+1}, \;\; x_{2,l} < \theta < x_{2,l+1}, \;\; \rho = R\},$$

$$h_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad h_2 = \frac{\pi}{n}, \quad x_{1,k} = h_1 k, \quad x_{2,l} = h_2 l,$$

где $k, l = \overline{0, n-1}$.

Определим кусочно-постоянную на сетке функцию

$$\chi_{kl}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{kl}, \\ 0, & x \notin \Pi_{kl}. \end{cases}$$

Перенумеруем базисные функции и их носители с помощью одного индекса $\chi_I(x)$, $I = \overline{1, N}$, $N = n^2$. Теперь функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ можно определить следующим образом:

$$\phi(x) = \sum_{I=1}^{N} \alpha_I \chi_I(x), \quad \psi(x) = \sum_{I=1}^{N} \beta_I \chi_I(x),$$

где $\chi_I(x)$ – базисные кусочно-постоянные функции, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^{\text{т}}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)^{\text{т}}$ – вектор-столбцы неизвестных коэффициентов.

После применения метода коллокации получим систему линейных алгебраических уравнений

$$A_{11}\alpha - A_{12}\beta = B_1, \quad A_{21}\alpha + A_{22}\beta = B_2, \tag{22}$$

элементы матриц A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} и вектор-столбцов B_1, B_2 определяются формулами

$$A_{11}^{ij} = \int\limits_{\Pi_j} G_0(x_i, y)\, ds_y, \quad A_{12}^{ij} = \int\limits_{\Pi_j} G(x_i, y)\, ds_y,$$

$$A_{21}^{ij} = \delta_{ij} + 2\gamma_1 \int\limits_{\Pi_j} G_0(x_i, y)\, ds_y - 2\int\limits_{\Pi_j} \frac{\partial}{\partial n} G_0(x_i, y)\, ds_y,$$

$$A_{22}^{ij} = \delta_{ij} + 2\int\limits_{\Pi_j} \frac{\partial}{\partial n} G(x_i, y)\, ds_y - 2\gamma_2 \int\limits_{\Pi_j} G(x_i, y)\, ds_y,$$

$$B_1^i = -u_0(x_i), \quad B_2^i = 2\left(\frac{\partial}{\partial n} u_0(x_i) - \gamma_1 u_0(x_i)\right),$$

где координаты точек коллокации

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, R), \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2,$$

а δ_{ij} – символ Кронекера.

Решив систему линейных алгебраических уравнений (22), найдём приближённое решение поставленной задачи. Интегралы в коэффициентах матрицы вычислялись по квадратурным формулам с учётом особенностей ядер интегральных операторов.

Заметим, что можно было решать систему интегральных уравнений второго рода (21) (с учётом того, что действие оператора T_1 на операторы S_{11} и S_{12} вычисляется аналитически по формулам (18)).

В этой статье мы не будем доказывать сходимость метода коллокации. Доказательство сходимости этого метода для таких систем интегральных уравнений, а также оценки скорости сходимости, см. в [11]. Некоторой трудностью при доказательстве сходимости является то обстоятельство, что базисные функции не вложены в пространство решений, однако она преодолевается с помощью понятия дискретной сходимости [12].

6. Численные результаты. Пусть радиус рассматриваемого тела $R = 0.006$ м, параметр $k_0 = 1846\,\text{м}^{-1}$, а $k = 1.5k_0$. Условия сопряжения следующие:

$$u_0 + u_s = u^-, \quad \frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} = 5000(u_0 + u_s) - u^-. \tag{23}$$

Применим метод коллокации и решим полученную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На рис. 1 изображены найденные функции плотности $\phi(x)$ (а) и $\psi(x)$ (б).

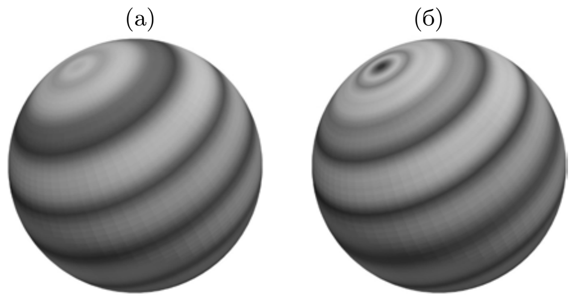

Рис. 1. Модуль функций плотности $\phi(x)$ и $\psi(x)$.

Рассмотрим внутреннюю сходимость приближённого решения. Для этого построим решения задачи с сеткой 10×10 (а), 20×20 (б), 30×30 (в) и 70×70 (г) (рис. 2).

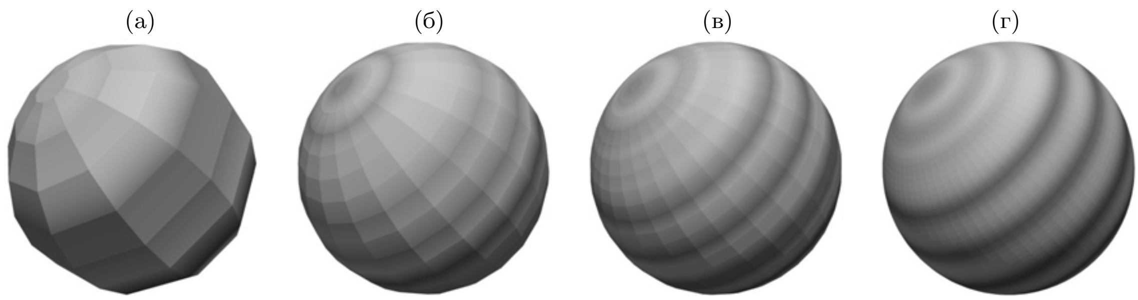

Рис. 2. Сходимость функции плотности $\phi(x)$.

Зная функции плотности, можно построить полное поле (рис. 3) в выбранной области при помощи введённых ранее потенциалов простого слоя (10) и (11).

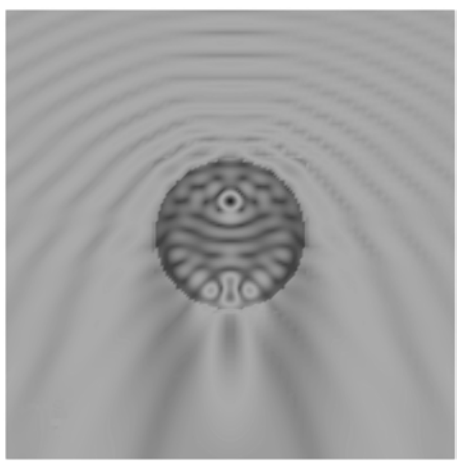

Рис. 3. Модуль полного поля в сечении плоскостью $x = 0$.

При реализации вычислительного алгоритма применялось распараллеливание вычисления коэффициентов матрицы и решения СЛАУ на 10 процессов.

Заключение. В работе рассмотрена краевая задача для уравнения Гельмгольца со специальными условиями сопряжения. С помощью потенциалов простого слоя (10) и (11) исходная задача сведена к исследованию системы интегральных уравнений по границе области ∂Q. Доказаны единственность и существование решения как системы интегральных уравнений, так и задачи сопряжения. Существование решения обосновано с помощью теоремы единственности для решения задачи сопряжения и фредгольмовости оператора системы интегральных уравнений.

Для численного решения системы интегральных уравнений применён метод коллокации. Рассмотрен пример, когда область есть шар. Выполнен переход к сферической системе координат и получена блочная система линейных алгебраических уравнений с кусочно-постоянными базисными функциями на прямоугольной сетке. Представлены численные результаты для плотностей при определённых условиях сопряжения. Рассмотрена внутренняя сходимость решения и построено полное поле внутри и вне области Q.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
3. *Nedelec J.-C.* Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems. New York, 2001.
4. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
5. *Лерер А.М.* Численная оценка погрешности метода возмущения при решении задачи об отражении электромагнитной волны от нелинейного графенового слоя // Радиотехника и электроника. 2022. Т. 67. № 9. С. 855–858.
6. *Смирнов Ю.Г., Тихов С.В., Гусарова Е.В.* О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2022. № 3. С. 11–18.
7. *Mikhailov S.A.* Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. № 8. Art. 085403.
8. *Hanson G.W.* Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. of Appl. Phys. 2008. V. 103. № 6. Art. 064302.
9. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики и акустики. М., 1991.
10. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. New York, 2013.
11. *Vainikko G.* Multidimensional Weakly Singular Integral Equation. Berlin; Heidelberg, 1993.
12. *Вайникко Г.М., Карма О.О.* О сходимости приближённых методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 828–837.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 26.05.2023 г.
После доработки 26.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1098–1109

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.55

ВНУТРЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМОЙ

© 2023 г. М. В. Балашов

Изучена зависимость радиуса шара с центром в нуле, вписанного в значения интеграла от многозначного отображения, от верхнего предела интегрирования. Для некоторых типов интегралов найдены точные асимптотики радиуса по верхнему пределу, когда верхний предел стремится к нулю. Рассмотрены примеры нахождения этого радиуса. Полученные результаты применены для вывода новых достаточных условий равномерно непрерывной зависимости минимального времени и решения-точки в линейной задаче быстродействия от начальных данных. Также рассмотрены приложения в некоторых алгоритмах со множеством достижимости линейной управляемой системы.

DOI: 10.31857/S0374064123080095, EDN: IPXHTM

Введение. Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество, $0\in U$, $F(s)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица с гладкими компонентами. Рассмотрим интеграл от многозначного отображения $F(s)U$

$$\mathcal{F}(t)=\int\limits_0^t F(s)U\,ds. \tag{1}$$

Многозначный интеграл здесь и далее мы будем понимать в смысле интеграла Аумана [1]

$$\int\limits_0^t F(s)U\,ds=\biggl\{\int\limits_0^t F(s)u(s)\,ds: u(s)\in U\biggr\},$$

где $u(s)$ – измеримый селектор. По теореме Ляпунова о векторной мере значение интеграла (1) есть выпуклое и замкнутое множество [2]. Теорию интегралов от многозначных отображений можно найти в монографии [3] (см. также библиографию в ней).

Одно из важных приложений интеграла – описание множества достижимости управляемой системы, в первую очередь линейной. Пусть линейная управляемая система задана в виде включения

$$x'\in Ax+U,\quad x(0)=x_0, \tag{2}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $0\in U\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт. Пусть $\mathcal{R}(x(0),t)$ – множество достижимости этой системы. Напомним, что для всякого $t\geqslant 0$ множество достижимости $\mathcal{R}(x(0),t)$ для системы (2) есть множество всех точек $x(t)$ по всем решениям $x(\cdot)$ системы (2). Множество достижимости выпукло и замкнуто [4, гл. 2, § 2.2, теорема 1]. Легко получить представление множества достижимости в виде интеграла

$$\mathcal{R}(x(0),t)=e^{At}x(0)+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}U\,ds=e^{At}x_0+\int\limits_0^t e^{As}U\,ds. \tag{3}$$

Обозначим $\mathcal{R}_0(t)=\mathcal{R}(0,t)=\int_0^t e^{As}U\,ds$.

Включение $0 \in U$ обеспечивает монотонность интеграла (1): $\mathcal{F}(t_1) \subset \mathcal{F}(t_2)$ при $t_1 \leqslant t_2$. Также заметим, что в силу аддитивности интеграла Аумана справедливо

$$\mathcal{F}(t_2) = \mathcal{F}(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} F(s)U\,ds, \quad t_1 \leqslant t_2.$$

Введём необходимые определения. Через (x,y) будем обозначать скалярное произведение (x,y) для всех $x,y \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $B_R(x)$ замкнутый шар с центром x радиуса $R > 0$. Для множества $\mathcal{M}$ обозначим через $\operatorname{cl}\mathcal{M}$ и $\partial\mathcal{M}$ замыкание и границу множества $\mathcal{M}$ соответственно. Определим функцию расстояния

$$\varrho_{\mathcal{M}}(x) = \inf_{y\in\mathcal{M}} \|x-y\|.$$

Расстоянием в метрике Хаусдорфа между компактными множествами $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$h(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) = \max\Big\{\max_{x\in\mathcal{M}_1}\varrho_{\mathcal{M}_2}(x), \max_{x\in\mathcal{M}_2}\varrho_{\mathcal{M}_1}(x)\Big\}.$$

Полунормой компакта $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\|\mathcal{M}\| = h(M,\{0\}) = \max\limits_{x\in\mathcal{M}}\|x\|$.

Через $\operatorname{co}\mathcal{M}$ будем обозначать выпуклую оболочку множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$.

Для замкнутого множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим *конус Булигана* в точке $x \in \mathcal{M}$ через $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x) = \{v \in \mathbb{R}^n\colon$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\lambda_k \to +0$ такие, что $B_\varepsilon(v)\bigcap(\mathcal{M}-x)/\lambda_k \neq$ $\neq \varnothing\}$. Если множество $\mathcal{M}$ ещё и выпукло, то $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(x) = \operatorname{cl}\bigcup_{\lambda>0}(\mathcal{M}-x)/\lambda$ [5, с. 174, формула (13)].

Будем обозначать $f \asymp g$ при $t \to +0$, если существуют числа $C_2 > C_1 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что при всех $t \in (0,t_0)$ выполнены неравенства $C_1 \leqslant f(t)/g(t) \leqslant C_2$.

Опорной функцией множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ называется $s(p,\mathcal{M}) = \sup\limits_{x\in\mathcal{M}}(p,x)$. Отметим, что для множества $\mathcal{F}(t) = \int_0^t F(s)U\,ds$ легко вычислить опорную функцию. В силу линейности многозначного интеграла

$$s(p,\mathcal{F}(t)) = \int\limits_0^t s(p,F(t)U)\,ds = \int\limits_0^t s(F^T(s)p,U)\,ds.$$

Будем говорить, что выпуклое компактное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно выпукло*, если существует строго возрастающая функция $\delta : [0,\operatorname{diam}\mathcal{M}] \to [0,+\infty)$, *модуль равномерной выпуклости*, такая, что для всех $x,y \in \mathcal{M}$ выполнено включение [6]

$$(x+y)/2 + B_{\delta(\|x-y\|)}(0) \subset \mathcal{M}.$$

Например, $\mathcal{M}$ является пересечением замкнутых евклидовых шаров радиуса $R > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ равномерно выпукло с модулем $\delta(t) = t^2/(8R)$. Отметим, что любой строго выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$ является равномерно выпуклым с некоторым модулем δ. Будем говорить, что неограниченное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ локально равномерно выпукло, если для всякого $R > 0$ множество $\mathcal{M}\bigcap B_R(0)$ равномерно выпукло с модулем δ_R. Любое строго выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ является локально равномерно выпуклым.

В силу теоремы Дэя–Нордлендера [7, гл. 3, § 3] максимальный модуль равномерной выпуклости среди центрально-симметричных тел диаметра $2R$ имеет евклидов шар, для него

$$\delta(t) = R - \sqrt{R^2 - \frac{t^2}{4}} \geqslant \frac{t^2}{8R}.$$

Рассмотрим пример задачи быстродействия с системой (2). Через $T_0(x_i)$ будем обозначать минимальное время, за которое решение с начальным условием $x(0)=x_i$ попадает на целевое множество $\mathcal{M}$.

Пример 1. Пусть в задаче (2)

$$x\in\mathbb{R}^2,\quad A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad e^{As}=\begin{pmatrix}\cos s&-\sin s\\ \sin s&\cos s\end{pmatrix},\quad U=\mathrm{co}\,(\pm e_1).$$

Пусть $\mathcal{M}=\{x_2\geqslant 4\}$. Рассмотрим начальные условия $x_0=(0,0)$ и $x_1=(0,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Для $p=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi)$, имеем

$$s(p,\mathcal{R}_0(t))=\int\limits_0^t|\cos(s-\varphi)|\,ds.$$

При $t<2\pi$ $s(p,\mathcal{R}_0(t))<4$ и $s(p,\mathcal{R}_0(2\pi))=4=s(p,B_4(0))$ для всякого $\|p\|=1$. Поэтому $\mathcal{R}_0(2\pi)=B_4(0)$ и оптимальное время $T_0(x_0)=2\pi$.

Для второго начального условия

$$\mathcal{R}(x_1,t)=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\varepsilon+\mathcal{R}_0(t),\quad s(p,\mathcal{R}(x_1,t))=\varepsilon\sin(\varphi-t)+\int\limits_0^t|\cos(s-\varphi)|\,ds.$$

Для $\varphi=\pi/2$ имеем для некоторого $t\in(3\pi/2,2\pi)$

$$4=\varepsilon\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\int\limits_0^t|\cos(s-5\pi/2)|\,ds=\varepsilon\cos t+2-\int\limits_\pi^t\sin s\,ds.$$

Отсюда находим

$$\cos T_0(x_1)=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad T_0(x_1)=2\pi-\tau,$$

где $\tau\in(0,\pi/2)$,

$$\cos(2\pi-\tau)=\cos\tau=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad \tau=\arccos\frac{1}{1+\varepsilon}\sim 2\sqrt{\varepsilon},\quad \varepsilon\to+0.$$

Поэтому $T_0(x_1)\sim 2\pi-2\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon\to+0$, и

$$T_0(x_0)-T_0(x_1)\sim 2\sqrt{\varepsilon}=2\sqrt{\|x_0-x_1\|},\quad \varepsilon=\|x_0-x_1\|\to+0.$$

Отметим, что при малом $t>0$ множество $\mathcal{R}_0(t)$ имеет ширину порядка t^2 в направлении вектора e_2, что и обуславливает условие Гёльдера с показателем $1/2$ по начальным данным в примере 1, более того, легко видеть, что радиус вписанного в $\mathcal{R}_0(t)$ шара с центром в нуле имеет порядок t^2 при $t\to 0$. Это и подобные наблюдения приводят нас к следующему условию.

Условие (I). Для интеграла (1) существует строго возрастающая функция $r:[0,+\infty)\to\to[0,+\infty)$ такая, что $r(0)=0$, $r(t)>0$ при $t>0$ и $B_{r(t)}(0)\subset\mathcal{F}(t)$ при $t\geqslant 0$.

Для функции r будем понимать обратную функцию r^{-1} следующим образом. Если $\mu==r(t)$ и t – точка непрерывности r, то $r^{-1}(\mu)=t$. Если пределы $r(t\pm 0)=\lim\limits_{s\to t\pm 0}r(s)$ не равны и $\mu\in[r(t-0),r(t+0)]$, то $r^{-1}(\mu)=r(t+0)$.

Определим

$$m_T=\max_{s\in[0,T]}\|F(s)\|\quad\text{и}\quad \mu_T=\min_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}}\|F(s)h\|.$$

Условие (I) есть по сути аналитическая форма условия управляемости, в частности N-управляемости из работы [8]. Простейший пример выполнения условия (I) реализуется при существовании такого $d>0$, что $B_d(0)\subset U$, т.е. нуль – внутренняя точка U. В этом случае $r(t)=\mu_T td$ при условии, что матрица $F(s)$ не вырождена на отрезке $[0,T]$.

В работе нас будут главным образом интересовать ситуации, когда нуль есть граничная точка множества U, что часто возникает в приложениях, когда размерность множества управлений в (2) меньше размерности фазового пространства, например, U есть отрезок, содержащий нуль. Другая ситуация, которую мы рассмотрим, – это множество U с $C^{1,1}$ гладкой границей, т.е. когда единичная нормаль к U в точке границы ∂U зависит липшицево от точки границы. Этот случай сводится к изучению внутренности интеграла со множеством $U=B_1(p_0)$, $\|p_0\|=1$.

Статья организована следующим образом. В п. 1 оценим $r(t)$ для интеграла (1) когда $0\in\in\partial U$. Будут рассмотрены случаи, когда $0\in[-u,u]\subset\partial U$ для некоторого вектора $u\neq 0$, а также случай, когда $0\in\partial U$ – точка $C^{1,1}$ гладкости. Последнее означает, что существует шар радиуса $\rho>0$ с центром $x_0\in U$ из U такой, что $0\in\partial B_\rho(x_0)$. В первом случае покажем, что $r(t)$ по порядку не менее t^n при $t\to 0$. Во втором случае получим достаточные условия на матрицу $F(s)$ весьма общего вида, при которых $r(t)\asymp t^3$, $t\to 0$, независимо от размерности n пространства. В п. 2 будут получены новые условия равномерной непрерывности минимального времени и точки-решения задачи быстродействия системы (2) с условием $t\to\min$, для которого $x(t)\in\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – терминальное множество. В п. 3 рассмотрим приложение результатов к некоторым задачам оптимизации со множеством достижимости линейной управляемой системы.

1. Оценка $r(t)$ в условии (I).

Теорема 1. *Пусть* $u\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $U=\operatorname{co}\{\pm u\}$, $t_0>0$. *Предположим, что матрица* $F(s)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $n-1$ *раз непрерывно дифференцируема и* $F^{(n-1)}(s)$ *непрерывна по Липшицу при* $s\in[0,t_0]$. *Пусть* $\operatorname{rank}(F(s)u,F'(s)u,\ldots,F^{(n-1)}(s)u)=n$ *для всех* $s\in[0,t_0]$. *Тогда* $B_{r(t)}(0)\subset\int_0^t F(s)U\,ds$ *и* $r(t)\asymp t^n$, $t\to 0$. *При этом порядок* $r(t)\asymp t^n$ *точный.*

Доказательство. Определим для произвольного единичного вектора p функцию $g(s,p)==(p,F(s)u)$, $g_s^{(l)}(s,p)=(p,F^{(l)}(s)u)$, $l\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Заметим, что $|g(s,p)|=s(p,F(s)U)$.

Покажем, что найдутся такие числа $\beta>0$ и $t_1\in(0,t_0)$, что для любого $\|p\|=1$ и любого $s\in(0,t_1)$ выполняется неравенство

$$\sum_{l=0}^{n-1}|g_s^{(l)}(s,p)|\geqslant\beta. \tag{4}$$

Предположим, что условие (4) неверно. Тогда найдутся последовательность $s_i\to 0$ и векторы $\|p_i\|=1$ такие, что $\sum_{l=0}^{n-1}|g_s^{(l)}(s_i,p_i)|<1/i$. Без ограничения общности из компактности единичной сферы следует $p_i\to p_0$, $\|p_0\|=1$. Переходя к пределу по i, имеем $\sum_{l=0}^{n-1}|g_s^{(l)}(0,p_0)|=0$. Отсюда $(p_0,F^{(l)}(0)u)=0$ для всех $l=\overline{0,n-1}$, что противоречит условию полного ранга. Условие (4) доказано.

Из [9, следствие 2.1] в силу формулы (4) вытекает существование абсолютной константы $c>0$ такой, что $\int_0^t|g(s,p)|\,ds\geqslant ct^n$ для всех $\|p\|=1$. Кроме того, $ct^n=s(p,B_{ct^n}(0))$ для всех $\|p\|=1$. Поскольку последний интеграл есть опорная функция множества $\int_0^t F(s)U\,ds$, то $B_{ct^n}(0)\subset\int_0^t F(s)U\,ds$. Отметим, что условие полного ранга при всех $s\in[0,t_0]$ и условия гладкости на $F(s)$ требуются для доказательства указанного выше следствия 2.1 из [9].

Пусть p_0 такой произвольный единичный вектор, что $(p_0,F^{(l)}(0)u)=0$, $l=\overline{0,n-2}$. Тогда по формуле Тейлора

$$(p_0,F(s)u)=\frac{(p_0,F^{(n-1)}(0)u)}{(n-1)!}s^{n-1}+o(s^{n-1}).$$

Найдётся такое число $t_2 \in (0,t_1)$, что для всех $s \in (0,t_2)$ выполнена оценка

$$|o(s^{n-1})| < \frac{|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{(n-1)!}s^{n-1}.$$

Отсюда при $0 < t < t_2$ имеем

$$s\left(p_0, \int\limits_0^t F(s)U\,ds\right) = \int\limits_0^t |g(s,p_0)|\,ds \leqslant 2\int\limits_0^t \frac{|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{(n-1)!}s^{n-1}\,ds = \frac{2|(p_0, F^{(n-1)}(0)u)|}{n!}t^n.$$

Теорема доказана.

Пусть в системе (2) множество U содержит отрезок ненулевой длины с центром в нуле, удовлетворяющий условию полного ранга из теоремы 1 для матрицы $F(s) = e^{As}$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{R}_0(t)$ с радиусом $r(t) \geqslant ct^n$.

Теорема 2. *Пусть* $U = B_1(p_0) \subset \mathbb{R}^n$, $\|p_0\| = 1$. *Предположим, что матрица* $F(s) \in \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *удовлетворяет в окрестности нуля условию*

$$F^T(s) = F_0 + F_1 s + F_2 s^2 + o(s^2), \quad s \to 0,$$

где F_i, $i = 0,1,2$, *– фиксированные* $n\times n$*-матрицы,* $F_0 = I$ *– единичная* $n \times n$*-матрица и* $\|F_1p_0\| > |(p_0, F_1p_0)|$. *Тогда выполнено включение* $B_{r(t)}(0) \subset \int_0^t F(s)B_1(p_0)\,ds$, *и* $r(t) \asymp t^3$, $t \to 0$.

Доказательство. Для всякого вектора $\|p\| = 1$ имеем

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \int\limits_0^t s(F^T(s)p, p_0 + B_1(0))\,ds = \int\limits_0^t ((F^T(s)p, p_0) + \|F^T(s)p\|)\,ds,$$

$$\|F^T(s)p\|^2 = 1 + s^2\|F_1p\|^2 + 2s(p, F_1p) + 2s^2(p, F_2p) + o(s^2),$$

при этом легко видеть, что функция $o(s^2)/s^2$, где $o(s^2)$ – последнее o-малое, равномерно бесконечно малая по $\|p\| = 1$. Отсюда следует, что

$$\|F^T(s)p\| = \sqrt{1 + s^2\|F_1p\|^2 + 2s(p, F_1p) + 2s^2(p, F_2p) + o(s^2)} =$$

$$= 1 + s(p, F_1p) + \frac{1}{2}s^2(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + s^2(p, F_2p) + o(s^2),$$

причём последнее o-малое обладает тем же свойством $o(s^2)/s^2 \to 0$ при $s \to 0$ равномерно по $\|p\| = 1$. В результате получаем, что

$$\int\limits_0^t \|F^T(s)p\|\,ds = t + \frac{t^2}{2}(p, F_1p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + \frac{t^3}{3}(p, F_2p) + o(t^3),$$

и функция $o(t^3)/t^3$ также равномерно по $\|p\| = 1$ бесконечно малая. Заметим сразу, что ниже стереотипно во всех дальнейших разложениях по малому параметру t встречающиеся функции $o(1) = o(t^3)/t^3$ по $\|p\| = 1$ являются равномерно бесконечно малыми.

Таким образом,

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \frac{t}{2}\|p + p_0\|^2 + \frac{t^2}{2}(p + p_0, F_1p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + \frac{t^3}{3}(p + p_0, F_2p) + o(t^3). \quad (5)$$

Подставляя $p = -p_0$, получаем, что для любой матрицы F с $F_0 = I$ порядок $s(-p_0, \mathcal{F}(t))$ по t при $t \to 0$ не менее трёх.

Определим

$$C_0 = 1 + \|F_1\| + \frac{\|F_2\|}{3}, \quad h_p = p - \left(p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p\right)\left\|p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p\right\|^{-1}.$$

Пусть

$$\varphi(h) = \frac{t}{2}\|h\|^2 + \frac{t^2}{2}(h, F_1p) + \frac{t^3}{3}(h, F_2p).$$

Заметим, что h_p есть точка минимума $\varphi(h)$ при условии $\|h-p\| = 1$. Также из (5) следует, что

$$s(p, \mathcal{F}(t)) = \varphi(p + p_0) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o(t^3),$$

где $o(t^3)$ из формулы (5).

Зафиксируем такое число $t_0 \in (0, 1)$, что для всякого $t \in (0, t_0]$ выполнены условия:

(i) $\|o(t^3)\| \leqslant t^3/4$ для всех $\|p\| = 1$;

(ii) если $C \in (0, C_0]$ и $\|p + p_0\| = Ct$, то $\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2 \geqslant (\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2)/2$;

(iii) $\varphi(h_p) + t^3(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2)/6 = t^3(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2)/24 + o_1(t^3)$ (равенство будет доказано ниже) и для $\varepsilon(t) = o(t^3) + o_1(t^3)$ выполнено $\|\varepsilon(t)\| \leqslant t^3(\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2)/96$ для всех $\|p\| = 1$.

(Функция $o(t^3)$ в условиях (i), (iii) из (5)).

Отметим, что $h_p \asymp t$, $t \to 0$, и $t^3(h_p, F_2p) \asymp t^4$ при $t \to 0$ равномерно по $\|p\| = 1$.

Зафиксируем $t \in (0, t_0]$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $\|p + p_0\| = Ct$ и $C > C_0$. Из (5) тогда вытекает

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant \frac{C^2t^3}{2} - \frac{Ct^3}{2}\|F_1\| - \frac{Ct^4}{6}\|F_2\| + o(t^3) \geqslant \frac{Ct^3}{2}\left(C - \|F_1\| - \frac{\|F_2\|}{3}\right) + o(t^3) \geqslant \frac{t^3}{2} + o(t^3),$$

и с учётом (i) $t^3/2 + o(t^3) \geqslant t^3/4$. Таким образом, $s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant t^3/4$ для любого единичного вектора p.

Случай 2: $\|p + p_0\| = Ct$ и $0 \leqslant C \leqslant C_0$. Функция $\varphi(h)$ при условии $\|h - p\| = 1$ имеет глобальный минимум в точке

$$h_p = p - \left(p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p\right)\left\|p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p\right\|^{-1}.$$

При этом

$$\varphi(h_p) = t + \frac{t^2}{2}(p, F_1p) + \frac{t^3}{3}(p, F_2p) - t\left\|p + \frac{t}{2}F_1p + \frac{t^2}{3}F_2p\right\| =$$

$$= t + \frac{t^2}{2}(p, F_1p) + \frac{t^3}{3}(p, F_2p) - t\sqrt{1 + t(p, F_1p) + \frac{t^2}{4}\|F_1p\|^2 + \frac{2t^2}{3}(p, F_2p) + \tilde{o}(t^2)} =$$

$$= -\frac{t^3}{8}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o_1(t^3),$$

$$\varphi(h_p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) = \frac{t^3}{24}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o_1(t^3).$$

Отсюда для всякого единичного вектора p имеем

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant \varphi(h_p) + \frac{t^3}{6}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + o(t^3) = \frac{t^3}{24}(\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2) + \varepsilon(t).$$

Из условия (ii) $\|F_1p\|^2 - (p, F_1p)^2 \geqslant (\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2)/2$, и значит,

$$s(p, \mathcal{F}(t)) \geqslant \frac{t^3}{48}(\|F_1p_0\|^2 - (p_0, F_1p_0)^2) + \varepsilon(t).$$

С учётом условия (iii)

$$s(p,\mathcal{F}(t)) \geqslant \frac{t^3}{96}(\|F_1p_0\|^2-(p_0,F_1p_0)^2).$$

Теорема доказана.

Если множество U содержит шар $B_\rho(p_0)\subset U$ и $0\in\partial B_\rho(p_0)\bigcap\partial U,$ то порядок $r(t)$ по t в условии (I) для интеграла $\mathcal{F}(t)$ не менее $t^3.$ Если дополнительно $U\subset B_R(Rp_0)$ для некоторого $R>0,$ то порядок $r(t)$ в точности $t^3.$

Если в формуле (5) взять больше членов разложения, то можно получить следующий результат.

Замечание 1. Пусть $F(s)$ – $n\times n$ матрица с C^∞ компонентами в окрестности нуля. Если $\|F_1p_0\|=|(p_0,F_1p_0)|$ (т.е. p_0 есть собственный вектор F_1), то при малых $t>0$ для некоторой константы $C>0$ выполнено неравенство $r(t)\leqslant Ct^5.$ Порядок $r(t)\asymp t^4$ при $t\to 0$ у функции $s(p,\mathcal{F}(t))$ исключается, поскольку коэффициент при t^4 разложения $s(p,\mathcal{F}(t))$ по t при $p=-p_0$ равен нулю.

Следствие. *Пусть в теореме 2* $F(s)=e^{As}$ *и* $\|A^Tp_0\|>|(p_0,A^Tp_0)|.$ *Тогда множество достижимости* $\mathcal{R}_0(t)=\int_0^t e^{As}B_1(p_0)\,ds$ *содержит шар* $B_{r(t)}(0)$ *и* $r(t)\asymp t^3,$ $t\to 0.$

2. Оценки модуля непрерывности в задаче быстродействия. Пусть $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ – замкнутое подмножество и $T>0.$ Будем рассматривать задачу быстродействия для системы (2) в постановке

$$\min_{t\in[0,T]} t \quad \text{при условии} \quad \mathcal{R}(x(0),t)\bigcap\mathcal{M}\neq\varnothing. \tag{6}$$

В дальнейшем предполагаем, что решение задачи (6) со всеми рассматриваемыми начальными условиями существует на отрезке $[0,T].$

Пусть $T_0(x_0)$ – оптимальное время в (6) для $x(0)=x_0.$ Поскольку $\mathcal{R}(x(0),T_0(x_0))$ – выпуклый компакт, то при условии строгой выпуклости $\mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}(x(0),T_0(x_0))\bigcap\mathcal{M}=$ $=\{w_0(x_0)\}$ одноточечно. Отметим, что в некоторых типичных случаях множество $\mathcal{R}_0(t)$ является строго выпуклым [9, теорема 3.1] и решение $\mathcal{R}(x(0),T_0(x_0))\bigcap\mathcal{M}$ также одноточечно для произвольного выпуклого замкнутого множества $\mathcal{M}.$

Одна из первых работ, где исследовалась непрерывность функции Беллмана в задаче (6) со множеством $\mathcal{M}=\{0\},$ – работа [10]. Насколько известно автору, впервые необходимые и достаточные условия локальной липшицевости T_0 были получены в статьях [11, 12] для множества $\mathcal{M}=\{0\}.$ В дальнейшем они были обобщены в работе [13] для случая замкнутого множества $\mathcal{M}.$ Дифференцируемость T_0 изучалась в [14–16]. Достаточные условия гладкости, непрерывности функции Беллмана и соответствующие примеры были рассмотрены в [17].

Равномерная непрерывность, а именно условие Гёльдера с показателем $\alpha\in(0,1)$ функции $T_0,$ исследовалась в работах [8, 18] и в [19] для систем специального вида. В [8] было показано, что для линейной системы со множеством управлений специального вида и $\mathcal{M}=\{0\}$ функция Беллмана равномерно непрерывна, а в [18] доказана равномерная непрерывность T_0 для нелинейной системы на плоскости. Упомянем также статью [20], где получены достаточные условия для выполнения условия Гёльдера функции T_0 с показателем $1/2$ при условии, что $\mathcal{M}$ есть C^1-гладкое многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n.$

Получим зависимость модуля непрерывности функции T_0 и точки-решения w_0 задачи (6) от начального условия x_0 через геометрические свойства многозначного интеграла $\mathcal{R}_0(t)$ и множества $\mathcal{M}.$ Для получения зависимости T_0 от x_0 мы используем радиус $r(t)$ шара с центром в нуле, вписанного в $\mathcal{R}_0(t)$ (если такой существует), который зависит от $t.$ Покажем, что модуль непрерывности T_0 есть обратная функция к $r(\cdot),$ причём эта оценка в общем случае неулучшаема. Множество $\mathcal{M}$ на этом шаре будем считать замкнутым.

Оценка $w_0(\cdot)$ получена из условия равномерной выпуклости $\mathcal{M}$ или $\mathcal{R}_0(t).$ Здесь нам нужна строгая выпуклость $\mathcal{M}$ либо выпуклость $\mathcal{M}$ и строгая выпуклость $\mathcal{R}_0(t).$

Полученные оценки не вытекают из цитируемых в работе результатов.

Лемма 1. *Рассмотрим систему (2) с начальными условиями* $x(0)=x_0$ *и* $x(0)=x_1,$ $h=x_1-x_0.$ *Пусть* $U_0=U+Ax_0$ *и множество* $\mathcal{M}$ *замкнуто. Предположим, что условие*

(I) выполнено для $\mathcal{R}_0(t) = \int_0^t e^{As}U_0\,ds$ *с функцией* r, $T > 0$, $m_T\|h\| < r(T)$, *и в задаче (6)* $T_0(x_0), T_0(x_1) \in [0, T]$. *Тогда*

$$|T_0(x_0) - T_0(x_1)| \leqslant r^{-1}\left(\frac{m_T}{\mu_T}\|h\|\right). \tag{7}$$

Пусть множество $\mathcal{M}$ *дополнительно строго выпукло и шар* $B_R(0)$ *содержит множества* $\mathcal{R}(x_i, T_0(x_i))$, $i = 0, 1$, δ_R *– модуль равномерной выпуклости множества* $\mathcal{M} \bigcap B_R(0)$. *Тогда*

$$|w_0(x_0) - w_0(x_1)| \leqslant 2\omega(h) + \delta_R^{-1}(\omega(h)), \tag{8}$$

где $\omega(h) = m_T(\|h\| + r^{-1}(m_T\|h\|/\mu_T)\operatorname{diam} U)$, $m_T = \max\limits_{s\in[0,T]} \|e^{As}\|$, $\mu_T = \min\limits_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}} \|e^{As}h\|$.

Доказательство. Предположим, что $T_0(x_0) \leqslant T_0(x_1)$. Сделав замену $z = x - x_0$, получим систему $z' \in Az + U_0$ с начальными условиями $z(0) = 0$ и $z(0) = h$. Переобозначим $\mathcal{M} := \mathcal{M} - x_0$.

Пусть $w_0 = w_0(0) = z(T_0(0)) \bigcap \mathcal{M}$, $u = w_0 + e^{AT_0(h)}h$, $\Delta t = T_0(h) - T_0(0)$. Тогда

$$u \in e^{AT_0(h)}h + \int\limits_0^{T_0(h)} e^{As}U_0\,ds,$$

и поскольку выполнено неравенство $\mathcal{M} \bigcap (e^{AT_0(h)}h + \mathcal{R}(T_0(h))) \neq \varnothing$, то величина $r(\Delta t)$ из условия

$$e^{AT_0(0)}B_{r(\Delta t)}(0) \subset e^{AT_0(0)} \int\limits_0^{\Delta t} e^{As}U_0\,ds = \int\limits_{T_0(0)}^{T_0(h)} e^{As}U_0\,ds$$

должна удовлетворять неравенству $\mu_T r(\Delta t) \leqslant \|u - w_0\|$. В противном случае мы получаем включение $w_0 \in e^{AT_0(h)}h + \int_0^{T_0(h)} e^{As}U_0\,ds$. Кроме того, $\|u - w_0\| \leqslant m_T\|h\|$. Отсюда вытекает оценка (7). Случай $T_0(x_1) < T_0(x_0)$ рассматривается аналогично.

Имеем следующую цепочку соотношений:

$$h(\mathcal{R}(x_0, T_0(x_0)), \mathcal{R}(x_1, T_0(x_1))) \leqslant m_T\|h\| + h\left(\{0\}, \int\limits_{T_0(0)}^{T_0(h)} e^{As}U\,ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant m_T\|h\| + m_T|T_0(h) - T_0(0)|\operatorname{diam} U = m_T\left(\|h\| + r^{-1}\left(\frac{m_T}{\mu_T}\|h\|\right)\operatorname{diam} U\right) = \omega(h),$$

где $\operatorname{diam} U$ – диаметр множества U. Определим $F_1(x) = \mathcal{M} \bigcap B_R(0)$ и $F_2(x) = \mathcal{R}(x, T_0(x))$ в окрестности нуля. Множество F_1 равномерно выпукло с модулем δ_R и равномерно непрерывно с модулем $\omega_1 = 0$, а F_2 имеет выпуклые компактные значения и равномерно непрерывно с модулем $\omega_2(h) = \omega(h)$. Оценка (8) для решения-точки вытекает из работы [21, теорема 3.1]. Заметим, что в доказательстве теоремы 3.1 точки t_1 и t_2 фиксированы, в нашем случае нужно взять $t_1 = 0$ и $t_2 = h$. Лемма доказана.

Для выполнения условия (I) для $\int_0^t e^{As}U_0\,ds$ необходимо включение $0 \in U_0 = Ax_0 + U$. Таким образом, лемма 1 даёт оценку модуля непрерывности решения (6) в нуле.

Теорема 3. *Рассмотрим систему (2) с начальными условиями* $x(0) = x_0$ *и* $x(0) = x_1$, $h = x_1 - x_0$. *Пусть* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *– замкнутое множество и выполнено условие* $e^{-At}\mathcal{M} \subset e^{-At_1}\mathcal{M}$ *для всех* $0 \leqslant t \leqslant t_1$. *Пусть выполнено условие (I) для* $\int_0^t e^{-As}U\,ds$: $B_{r_-(t)}(0) \subset \int_0^t e^{-As}U\,ds$ *для* $t \geqslant 0$ *и* $\|h\| \leqslant r_-(T)$ *для некоторого* $T > 0$. *Тогда для системы* $z(t) \in z(0) + \int_0^t e^{-As}U\,ds$ *с* *начальными условиями* $z(0)=x_0$ *и* $z(0)=x_1$ *минимальное время попадания на множество* $e^{-At}\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию*

$$|T_0(x_0)-T_0(x_1)| \leqslant r_-^{-1}\left(\frac{\|h\|}{\mu_T^-}\right), \quad \mu_T^- = \min_{\substack{\|h\|=1\\ s\in[0,T]}} \|e^{-As}h\|.$$

Доказательство. В системе (2) сделаем замену $x(s)=e^{As}z(s)$. Без ограничения общности считаем, что $T_0(x_0)\leqslant T_0(x_1)$. Для $t=T_0(x_0)$ имеем

$$\left(e^{At}x_0+\int\limits_0^t e^{As}U\,ds\right)\bigcap\mathcal{M}\neq\varnothing, \quad \left(x_0+\int\limits_0^t e^{A(s-t)}U\,ds\right)\bigcap(e^{-At}\mathcal{M})\neq\varnothing,$$

$(x_0+\int_0^t e^{-As}U\,ds)\bigcap(e^{-At}\mathcal{M})=\{w_0\}$, $u=w_0+h$. Далее доказательство повторяет доказательство леммы 1 с учётом того, что если $w_0\in e^{-AT_0(x_0)}\mathcal{M}$, то $w_0\in e^{-As}\mathcal{M}$ при $s>T_0(x_0)$. Заметим, что $T_0(x_i)$, $i=0,1$, является также оптимальным временем для задачи (6). Теорема доказана.

Замечание 2. Оценка по точке для задачи (6) с системой (2) в условиях теоремы 3 вытекает из формулы (8) с функцией r_- из теоремы 3. Пусть $\mathcal{M}$ дополнительно строго выпукло и шар $B_R(0)$ содержит множества $\mathcal{R}(x_i,T_0(x_i))$, $i=0,1$, δ_R – модуль равномерной выпуклости множества $\mathcal{M}\bigcap B_R(0)$. Тогда справедливо неравенство

$$|w_0(x_0)-w_0(x_1)| \leqslant 2\omega(h)+\delta_R^{-1}(\omega(h)), \tag{9}$$

где $\omega(h)=m_T(\|h\|+r_-^{-1}(\|h\|/\mu_T^-)\operatorname{diam}U)$, $m_T=\max\limits_{s\in[0,T]}\|e^{As}\|$.

Замечание 3. Заметим, что множества $\mathcal{R}_0(t)$ могут быть равномерно выпуклыми [9, теорема 3.1]. Тогда при выпуклости $\mathcal{M}$ в оценках (8) и (9) вместо модуля δ_R можно брать функцию δ, которая равна минимуму из модулей выпуклости множеств $\mathcal{R}_0(t)$ при $t = T_0(x_0), T_0(x_1)$.

Если $\mathcal{M}=\{0\}$, то мы получаем известный результат о локальной равномерной непрерывности функции T_0. Отметим также, что для доказательства равномерной непрерывности T_0 нам не нужна выпуклость $\mathcal{M}$, она требуется для доказательства равномерной непрерывности по точке-решению.

Условие монотонного возрастания по включению множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t\geqslant 0}$ в теореме 3 можно заменить на условие включения точки $w_0\in e^{-As}\mathcal{M}$ для всех $s\in[T_0(x_0),T_1]$, где $T_1>T_0(x_1)$. Также это условие можно сформулировать с использованием касательного конуса $\mathcal{C}_\mathcal{M}$.

Лемма 2. *Пусть в обозначениях теоремы 3* $w_1=e^{AT_0(x_0)}w_0\in\mathcal{M}$. *Тогда при выполнении условия*

$$Ax\in\mathcal{C}_\mathcal{M}(x) \tag{10}$$

для любых $x\in\partial\mathcal{M}$ *справедливо включение* $e^{As}w_1\in\mathcal{M}$ *при всех* $s\geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши $y'=Ay$, $y(0)=w_1\in\mathcal{M}$. В силу теоремы Нагумо [5, с. 174] условие (10) гарантирует включение $y(s)=e^{As}w_1\in\mathcal{M}$ для всех $s\geqslant 0$. Лемма доказана.

Приведём пример выполнения условия (10). Пусть $\mathcal{M}=B_1(0)$ и $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ такая (не обязательно симметричная) матрица, что $(x,Ax)\leqslant 0$ при всех $\|x\|=1$. Последнее, как легко видеть, эквивалентно условию $Ax\in\mathcal{C}_\mathcal{M}(x)$ для всех $\|x\|=1$. Поэтому для системы (2) с указанной матрицей и при выполнении условия (I) можно применить теорему 3.

Легко привести и другие примеры матриц A и множеств $\mathcal{M}$, когда выполнено условие монотонного возрастания множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t\geqslant 0}$ по включению. Для этого для конкретной матрицы A и множества $\mathcal{M}$ достаточно выполнения условия $Ax\in\mathcal{C}_\mathcal{M}(x)$ для всех $x\in\partial\mathcal{M}$. Например, если $\mathcal{M}$ задано в виде $\{x\in\mathbb{R}^n : \varphi(x)\leqslant 1\}$, где $\varphi\in C^1$, то достаточно выполнения неравенства $(\varphi'(x),Ax)\leqslant 0$ для всех $x\in\partial\mathcal{M}$, где $\varphi'(x)$ – градиент φ в точке x.

Отметим, что можно привести примеры, когда без требования монотонности множеств $\{e^{-At}\mathcal{M}\}_{t\geqslant 0}$ функция T_0 в задаче (6) разрывна. В этих примерах в соответствующей задаче (2) можно взять множество $U = B_\gamma(0)$, $\gamma > 0$.

Замечание 4. Пусть в системе (2) множество U содержит отрезок ненулевой длины с центром в нуле, удовлетворяющий условию полного ранга из теоремы 1 для $F(s) = e^{As}$. Тогда $B_{r(t)}(0) \subset \mathcal{R}_0(t)$ с радиусом $r(t) \geqslant ct^n$. Отсюда, в случае выполнения условия (10), вытекает, что решение T_0 задачи (6) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем не менее $1/n$. Результат об условии Гёльдера функции Беллмана с показателем $1/n$ был ранее получен в работе [8] для $\mathcal{M} = \{0\}$ при условии, что U есть линейный образ гипероктаэдра со $\{\pm e_i\}_{i=1}^m \subset \subset \mathbb{R}^m$, где m может быть как меньше, так и больше n.

Пример 2. В условиях сформулированного следствия определим вектор $\|p_0\| = 1$ из равенств $(p_0, A^l u) = 0$, $l = \overline{0, n-2}$. Пусть

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_0, x) \geqslant 0\}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -\varepsilon p_0, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда в системе (2) с начальными условиями x_0, x_1 имеем $T_0(x_0) = 0$, $T_0(x_1) \asymp \varepsilon^{1/n}$. Заметим, что в силу аналитичности $g(s,p)$ и условия полного ранга уравнение $g(s,p) = 0$ имеет конечное число корней для каждого $\|p\| = 1$ и, следовательно, $\mathcal{R}(x_1, t)$ есть строго выпуклый компакт при всех $t > 0$ с модулем выпуклости $\delta(\tau) \asymp \tau^\alpha$, $\tau \to +0$, а $\alpha \geqslant 1/n$ [9, теорема 3.1].

Пример 3. Пусть в $\mathbb{R}^2$ матрица A и множество управлений U такие же, как в примере 1, а $\mathcal{M} = B_1(0)$. Рассмотрим задачу (6) с начальными условиями $x_0 = (0, -1)$ и $x_1 = (0, -1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Условия теоремы 3 выполняются, в частности $e^{As}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ при всех $s \geqslant 0$. Поэтому по теореме 3 $|T_0(x_0) - T_0(x_1)| \leqslant \mathrm{const}\sqrt{\varepsilon}$, при этом $T_0(x_0) = 0$.

Из примера 1 для $p = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ имеем

$$s(p, \mathcal{R}(x_1, t)) = -(1+\varepsilon)\sin(\varphi - t) + \int_0^t |\cos(s-\varphi)|\, ds.$$

Пусть $t > 0$ – первый момент, когда $\mathcal{R}(x_1, t) \bigcap \mathcal{M} \neq \varnothing$, т.е. $t = T_0(x_1)$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ вектор p_0, отделяющий $\mathcal{R}(x_1, t)$ и $\mathcal{M}$, задаётся углом $\varphi_0 = \pi/2 + \theta$, где $0 \leqslant \theta \leqslant ct$ для некоторого $c > 0$. Значит,

$$s(p_0, \mathcal{R}(x_1, t)) = -(1+\varepsilon)\cos(\theta - t) + \int_0^t |\sin(s-\theta)|\, ds = -1,$$

откуда следует, что $t^2 \asymp \varepsilon$, $\varepsilon \to +0$. Поэтому оценка теоремы 3 в этом примере точна.

Рассмотрим в примере 3 множество управлений $U = B_1(-e_2)$. Тогда

$$\mathcal{R}(x_1, t) = e^{At}x_1 - \int_0^t e^{As}e_2\, ds + \int_0^t e^{As}B_1(0)\, ds = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + B_t(0).$$

Решение $t = T_0(x_1)$ есть время $t > 0$, при котором шар радиуса t с центром в точке $((1+\varepsilon)\sin t + 1 - \cos t, -(1+\varepsilon)\cos t - \sin t)^{\mathrm{т}}$ касается шара $\mathcal{M} = B_1(0)$. Из этого условия приходим к уравнению

$$f(t) = 2t + t^2 + 2\cos t - 2\sin t - 2\varepsilon\sin t = 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Пусть $t(c) = c\varepsilon^{1/3}$. С помощью разложений функций по степеням t по формуле Тейлора легко убедиться в том, что при малых $\varepsilon > 0$ и $c > \sqrt[3]{6}$ имеем $f(t(c)) > 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$, а при $c < \sqrt[3]{6}$ имеем $f(t(c)) < 2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$. Поэтому $T_0(x_1) \sim \sqrt[3]{6\varepsilon}$ при $\varepsilon \to +0$.

С учётом теоремы 2 теорема 3 в рассматриваемой ситуации также даёт порядок $T_0(x_1) \asymp \asymp \varepsilon^{1/3}$, $\varepsilon \to +0$.

Замечание 5. Полученными в работе оценками для T_0 имеет смысл пользоваться, когда неприменимы стандартные условия Липшица для функции минимального времени T_0 из задачи (6), например, обобщение условия Петрова (H3) из статьи [13].

3. Приложение к оценкам приближённого решения задач со множеством достижимости. Рассмотрим задачу для линейной управляемой системы (2)

$$\min_{t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^n} t \quad \text{при условии} \quad x + \mathcal{R}_0(t) \supset \mathcal{M}. \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{M}$ – выпуклый компакт, а множество $\mathcal{R}_0(t) = \mathcal{R}_0(0,t)$ (см. (3)). Смысл задачи состоит в том, чтобы найти минимальное время $T_0 > 0$ и начальное условие $x(0) = e^{-AT_0}x_0$, где (x_0, T_0) – решение (11), для которых множество $\mathcal{R}(x(0),t)$ за минимальное время $t = T_0$ накрывает множество $\mathcal{M}$. Для решения этой задачи в фазовом пространстве небольшой размерности предложен алгоритм [22].

Будем считать, что решение $T_0 \leqslant T$. Дискретный вариант задачи (11) имеет вид

$$\min_{k,\ x\in\mathbb{R}^n} t_k \quad \text{при условии} \quad x + \hat{\mathcal{R}}_0(t_k) \supset \hat{\mathcal{M}}, \tag{12}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_K = T$ – некоторое разбиение отрезка $[0,T]$, а $\hat{}$ над множеством означает его внешнюю многогранную аппроксимацию на сетке единичных векторов $\mathbb{G} = \{p_i\}_{i=1}^I$, например,

$$\hat{\mathcal{M}} = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_i, x) \leqslant s(p_i, \mathcal{M}), \quad p_i \in \mathbb{G}\}.$$

Ищем минимальное k, для которого система из (12), т.е. $(p_i, x) + s(p_i, \mathcal{R}_0(t_k)) \geqslant s(p_i, \mathcal{M})$, $i = \overline{1, I}$, имеет решение. Последняя задача легко решается симплекс-методом. Пусть $\varepsilon > 0$ – погрешность аппроксимации $\mathcal{R}_0(t_k)$ (детали см. в [22, теорема 1]), а k – найденный номер. Тогда оптимальное время T_0 удовлетворяет условию $t_{k-1} < T_0 \leqslant \tau$, где τ – минимальное время, для которого (см. [22, формула (20)])

$$\int_{t_i}^{\tau} e^{As} U\, ds \supset B_\varepsilon(0). \tag{13}$$

Из формулы (13) получаем, что $t_{k-1} < T_0 \leqslant t_k + r^{-1}(\varepsilon/\mu_T)$, где

$$\mu_T = \min_{\substack{\|h\|=1 \\ s\in[0,T]}} \|e^{As}h\|.$$

Таким образом, функция r^{-1} связывает погрешность аппроксимации ε по пространству и ошибку по времени в алгоритме решения задачи (11).

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/ в ИПУ имени В.А. Трапезникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // J. of Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. № 1. P. 1–12.
2. *Ляпунов А.А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478.
3. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М., 2014.
4. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. New York, 1967.
5. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions. Berlin; Heidelberg, 1984.

6. *Поляк Б.Т.* Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 2. С. 287–290.
7. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Киев, 1980.
8. *Ливеровский А.А.* Некоторые свойства функции Беллмана для линейных и симметричных полисистем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 414–423.
9. *Veliov V.M.* On the convexity of integrals of multivalued mappings: application in control theory // J. of Optim. Theory and Appl. 1987. V. 54. P. 541–563.
10. *Кириллова Ф.М.* О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 113–126.
11. *Петров Н.Н.* О непрерывности обобщённой функции Беллмана // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 373–374.
12. *Петров Н.Н.* О функции Беллмана для задачи оптимального быстродействия // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. № 5. С. 820–826.
13. *Cannarsa P., Sinestrary C.* Convexity properties of the minimum time function // Calc. Var. 1995. V. 3. P. 273–298.
14. *Кун Л.А., Пронозин Ю.Ф.* К регуляризации метода Беллмана в задачах оптимального быстродействия // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 6. С. 1294–1297.
15. *Сатимов Н.Ю.* О гладкости функции Беллмана для линейной задачи оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2176–2179.
16. *Тынянский Н.Т., Арутюнов А.В.* Линейные процессы оптимального быстродействия // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 1979. Вып. 2. С. 32–37.
17. *Арутюнов А.В.* Об одном классе линейных процессов оптимального быстродействия // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 555–560.
18. *Ливеровский А.А.* О гёльдеровости функции Беллмана плоских систем управления // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 604–613.
19. *Evans L.C., Janaes M.R.* The Hamilton–Jacobi–Bellman equation for time optimal control // SIAM J. Control Optim. 1989. V. 27. P. 1477–1489.
20. *Soravia P.* Hölder continuity of the minimum-time function for C^1-manifold targets // J. of Optim. Theory and Appl. 1992. V. 75. P. 401–421.
21. *Balashov M.V., Repovs D.* Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. of Math. Anal. Appl. 2009. V. 360. № 1. P. 307–316.
22. *Балашов М.В., Камалов Р.А.* Оптимизация множества достижимости линейной системы по отношению к другому множеству // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 739–759.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 25.04.2023 г.
После доработки 25.04.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1110–1122

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, описываемой линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто, на минимум квадратичного терминально-интегрального показателя качества. Предлагается и обосновывается конструкция оптимальной обратной связи (синтеза оптимальных управлений), которая для любого начального состояния системы порождает соответствующее оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0374064123080101, EDN: IQHXOO

Введение. В статье рассматривается задача оптимального управления на конечном промежутке времени, в которой движение динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (1/2, 1)$ (см., например, [1–3]), а целью управления является минимизация квадратичного терминально-интегрального показателя качества. Отличительная особенность систем дробного порядка состоит в присущем им эффекте памяти (определённого вида), обусловленном наследственным характером дробных производных. Эта особенность выступает одной из основных причин для использования таких систем при математическом моделировании реальных процессов, обладающих подобными эффектами (см., например, обзорные статьи [4–7]). С другой стороны, она указывает на то, что такие системы являются, по существу, бесконечномерными. Данное обстоятельство осложняет анализ поведения систем дробного порядка, в том числе в части разработки схем управления такими системами по принципу обратной связи.

Различные вопросы, связанные с линейно-квадратичными задачами оптимального управления системами дробного порядка, близкими к рассматриваемой в настоящей статье постановке, изучались, например, в работах [8–18]. В [9, 12] были найдены необходимые условия оптимальности программных управлений и даны некоторые их следствия. В [10, 14] исследование задачи проводилось в рамках частотного подхода. Статьи [8, 11, 13, 15, 17] посвящены разработке численных методов решения. В [8, 13] аппроксимируется двухточечная краевая задача, являющаяся выражением необходимых условий оптимальности. В [11] применяется прямой метод, базирующийся на аппроксимации основных параметров задачи многочленами Лежандра. В [15, 17] предлагаются методы, нацеленные непосредственно на приближённое построение оптимальной обратной связи.

Отдельно отметим работу [16], в которой исследовалась линейно-квадратичная задача оптимального управления для слабо сингулярного интегрального уравнения Вольтерры, более общая по сравнению с задачей, рассматриваемой в настоящей статье. В частности, было показано, что оптимальное управление (в классе интегрируемых с квадратом функций) существует и единственно. Для отыскания этого управления были применены и модифицированы конструкции классического вариационного исчисления и принципа максимума Понтрягина. Кроме того, было замечено, что ввиду специфических свойств динамики (которые присущи также и системам дробного порядка) данные конструкции не позволяют напрямую извлечь из них оптимальную обратную связь (синтез оптимальных управлений). Для того чтобы преодолеть эту сложность, было предложено при построении управления дополнительно использовать специальную вспомогательную траекторию.

С другой стороны, в статье [18] для нахождения оптимальных позиционных стратегий управления в рассматриваемой задаче были развиты конструкции принципа динамического программирования и соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана (см. также [19]). В частности, с опорой на результаты работы [16] были разработаны процедуры управления по принципу обратной связи, которые позволяют для любого начального состояния системы в дискретной по времени схеме формировать ε-оптимальные управления (в классе существенно ограниченных функций) для всякого наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$.

В настоящей статье, продолжающей исследования [16, 18], для рассматриваемой линейно-квадратичной задачи оптимального управления системой дробного порядка в явном виде построена оптимальная обратная связь, которая при непосредственной подстановке в уравнение движения для любого начального состояния системы порождает соответствующее оптимальное управление. Подчеркнём, что в каждый момент времени значение оптимальной обратной связи, по существу, зависит от всей истории движения системы, сложившейся к этому моменту, и, кроме того, данная зависимость является линейной.

1. Обозначения. Основные используемые в статье обозначения являются стандартными. Для чисел $n, m \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{R}^n$ обозначается линейное пространство n-мерных векторов со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и евклидовой нормой $\|\cdot\|$, а через $\mathbb{R}^{n\times m}$ – линейное пространство $n\times m$-матриц с соответствующей подчинённой (операторной) нормой, для которой также используется обозначение $\|\cdot\|$.

Для числа $T \geqslant 0$ рассматриваются следующие пространства функций, определённых на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$: банахово пространство $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций $x\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$ с равномерной нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} = \max_{\tau\in[0,T]} \|x(\tau)\|, \quad x(\cdot)\in C([0,T],\mathbb{R}^n),$$

линейное пространство $L_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ всех измеримых (отрезок $[0,T]$ рассматривается с мерой Лебега) функций $f\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\|f(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_0^T \|f(\tau)\|^2\,d\tau\right)^{1/2} < \infty,$$

и линейное пространство $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)\subset L_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ всех измеримых и существенно ограниченных функций $f\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$.

Далее пусть $\alpha\in(1/2,1)$. Напомним, что для функции $f(\cdot)\in L_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ левосторонним дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка α называется следующая величина (см., например, [1, определение 2.1]):

$$(I^\alpha f)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\tau \frac{f(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi, \quad \tau\in[0,T], \tag{1}$$

где Γ – гамма-функция. Через $AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство всех функций $x\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$, каждая из которых для некоторой своей функции $f(\cdot)\in L_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ представима в виде (см., например, [1, определение 2.3])

$$x(\tau) = x(0) + (I^\alpha f)(\tau), \quad \tau\in[0,T]. \tag{2}$$

Учитывая, что $AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)\subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$ (см., например, [1, теорема 3.6]), пространство $AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ рассматривается с равномерной нормой $\|\cdot\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)}$. Согласно, например, [1, теорема 2.4; 2, леммы 2.21 и 2.22] для каждой функции $x(\cdot)\in AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ при почти всех (п.в.) $\tau\in[0,T]$ существует левосторонняя дробная производная Капуто порядка α, определяемая по правилу (см., например, [2, п. 2.4; 3, гл. 3])

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\tau \frac{x(\xi)-x(0)}{(\tau-\xi)^\alpha}\,d\xi. \tag{3}$$

Кроме того, если для некоторой функции $f(\cdot) \in L_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ выполнено соотношение (2), то $({}^C D^\alpha x)(\tau) = f(\tau)$ при п.в. $\tau \in [0,T]$. В частности, имеет место равенство

$$x(\tau) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{({}^C D^\alpha x)(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [0,T]. \tag{4}$$

Рассмотрим множество

$$G_2 = \bigcup_{t\in[0,T]} (\{t\} \times AC_2^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)) = \{(t,w(\cdot))\colon t \in [0,T], \quad w(\cdot) \in AC_2^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)\},$$

на котором введём метрику

$$\operatorname{dist}((t_1,w_1(\cdot)),(t_2,w_2(\cdot))) = |t_1-t_2| + \max_{\tau\in[0,T]} \|w_1(\min\{\tau,t_1\}) - w_2(\min\{\tau,t_2\})\| \tag{5}$$

для всех $(t_1,w_1(\cdot)),(t_2,w_2(\cdot)) \in G_2$. Отметим, что если $x(\cdot) \in AC_2^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ и $t \in [0,T]$, то $(t,x_t(\cdot)) \in G_2$, где $x_t(\cdot)$ – сужение функции $x(\cdot)$ на отрезок $[0,t]$, т.е.

$$x_t(\tau) = x(\tau), \quad \tau \in [0,t]. \tag{6}$$

Более того, следующее отображение непрерывно:

$$[0,T] \times AC_2^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) \ni (t,x(\cdot)) \mapsto (t,x_t(\cdot)) \in G_2. \tag{7}$$

Наконец, через $AC_\infty^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n) \subset AC_2^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство всех функций $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде (2) для некоторой своей функции $f(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, и положим

$$G_\infty = \{(t,w(\cdot)) \in G_2\colon w(\cdot) \in AC_\infty^\alpha([0,t],\mathbb{R}^n)\}, \quad G_\infty^0 = \{(t,w(\cdot)) \in G_\infty\colon t < T\}. \tag{8}$$

2. Постановка задачи. Пусть зафиксированы числа $n,m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и $\alpha \in (1/2,1)$. Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) \tag{9}$$

при начальном условии

$$x(0) = x_0, \tag{10}$$

на минимум квадратичного терминально-интегрального показателя качества

$$J(x_0,u(\cdot)) = \langle x(T), Px(T)\rangle + \int\limits_0^T (\langle x(\tau), Q(\tau)x(\tau)\rangle + \langle u(\tau), R(\tau)u(\tau)\rangle)\, d\tau. \tag{11}$$

Здесь $\tau \in [0,T]$ – время, $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ и $u(\tau) \in \mathbb{R}^m$ – состояние системы и управляющее воздействие в момент времени τ соответственно, $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ – левосторонняя дробная производная Капуто порядка α (см. (3)), $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – начальное состояние системы. Функции $A\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и $R\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{m\times m}$ непрерывны. Матрицы $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Q(\tau)$ для всех $\tau \in [0,T]$ симметричны и неотрицательно определены, матрицы $R(\tau)$ для всех $\tau \in [0,T]$ симметричны и положительно определены. Допустимыми управлениями считаем функции $u(\cdot) \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$. Под движением системы (9) при начальном условии (10), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$, понимаем функцию $x(\cdot) \in AC_2^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условию (10) и дифференциальному уравнению (9) при п.в. $\tau \in [0,T]$. Согласно, например, [20, теорема 5.1] такое движение $x(\cdot) = x(\cdot \mid x_0,u(\cdot))$

существует и единственно. Это движение $x(\cdot)$ есть единственное в пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ решение линейного (слабо сингулярного) интегрального уравнения Вольтерры

$$x(\tau) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{A(\xi)x(\xi) + B(\xi)u(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [0,T]. \tag{12}$$

Определим величину оптимального результата в задаче (9)–(11) равенством

$$\rho(x_0) = \inf_{u(\cdot)\in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)} J(x_0, u(\cdot)). \tag{13}$$

Управление $u^\circ(\cdot) \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$, на котором достигается нижняя грань в данном выражении, назовём оптимальным (для начального значения x_0). Из результатов работы [16] следует, что оптимальное управление $u^\circ(\cdot)$ существует и единственно (с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега). Целью настоящей статьи является построение оптимальной обратной связи, которая при подстановке в уравнение движения для любого начального значения $x_0 \in \mathbb{R}^n$ порождает соответствующее оптимальное управление $u^\circ(\cdot)$.

3. Основной результат. Проведём необходимые для формулировки основного результата построения, корректность которых установлена в статье [18].

Обозначим $\Omega = \{(\tau,\xi) \in [0,T]\times[0,T] \colon \tau \geqslant \xi\}$ и рассмотрим непрерывную функцию $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, которая при каждом зафиксированном $\tau \in [0,T]$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерры

$$\Phi(\tau,\xi) = \frac{I_{n\times n}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_\xi^\tau \frac{\Phi(\tau,\eta)A(\eta)}{(\tau-\eta)^{1-\alpha}(\eta-\xi)^{1-\alpha}}\, d\eta, \quad \xi \in [0,\tau],$$

где $I_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – единичная матрица. Функция Φ играет роль фундаментальной матрицы решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (9).

Определим непрерывную функцию $K\colon [0,T]\times[0,T] \to \mathbb{R}^{m\times m}$ равенством

$$K(\tau,\xi) = B(\tau)^{\mathrm{т}}\Phi(T,\tau)^{\mathrm{т}}P\Phi(T,\xi)B(\xi) +$$

$$+ (T-\tau)^{1-\alpha}(T-\xi)^{1-\alpha}B(\tau)^{\mathrm{т}} \int\limits_{\max\{\tau,\xi\}}^T \frac{\Phi(\eta,\tau)^{\mathrm{т}}Q(\eta)\Phi(\eta,\xi)}{(\eta-\tau)^{1-\alpha}(\eta-\xi)^{1-\alpha}}\, d\eta B(\xi)$$

для всех $\tau,\xi \in [0,T]$. Верхний индекс $^{\mathrm{т}}$ обозначает транспонирование.

Пусть $\Theta = \{(\tau,\xi,t) \in [0,T]\times[0,T]\times[0,T] \colon \tau \geqslant t,\ \ \xi \geqslant t\}$. Рассмотрим непрерывную функцию $\Theta \ni (\tau,\xi,t) \mapsto M(\tau,\xi \mid t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, которая для любых фиксированных $t \in [0,T]$ и $\xi \in [t,T]$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Фредгольма

$$R(\tau)M(\tau,\xi \mid t) + \int\limits_t^T \frac{K(\tau,\eta)M(\eta,\xi \mid t)}{(T-\eta)^{2-2\alpha}}\, d\eta = -K(\tau,\xi)R(\xi)^{-1}, \quad \tau \in [t,T],$$

где $R(\xi)^{-1}$ – матрица, обратная к матрице $R(\xi)$. Данное интегральное уравнение выступает аналогом дифференциального уравнения Риккати.

Для каждой точки $(t,w(\cdot)) \in G^0_\infty$ (см. (8)) положим

$$a(\tau \mid t, w(\cdot)) = \begin{cases} w(\tau), & \text{если } \ \tau \in [0,t], \\ w(0) + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^t \frac{(^C D^\alpha w)(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, & \text{если } \ \tau \in (t,T], \end{cases} \tag{14}$$

и

$$b(\tau \mid t, w(\cdot)) = \begin{cases} w(\tau), & \text{если} \ \ \tau \in [0,t], \\ a(\tau \mid t, w(\cdot)) + \displaystyle\int\limits_t^\tau \frac{\Phi(\tau,\xi)A(\xi)a(\xi \mid t, w(\cdot))}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi, & \text{если} \ \ \tau \in (t,T]. \end{cases}$$

С содержательной точки зрения функции $a(\cdot) = a(\,\cdot \mid t, w(\cdot))$ и $b(\cdot) = b(\,\cdot \mid t, w(\cdot))$ суть единственные функции из пространства $AC^\alpha_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют соответственно начальным условиям $a(\tau) = w(\tau)$ и $b(\tau) = w(\tau)$ при всех $\tau \in [0,t]$ и дифференциальным уравнениям $({}^C D^\alpha a)(\tau) = 0$ и $({}^C D^\alpha b)(\tau) = A(\tau)b(\tau)$ при п.в. $\tau \in [t,T]$.

Наконец, определим отображение $U^\circ\colon G^0_\infty \to \mathbb{R}^m$ по правилу

$$U^\circ(t, w(\cdot)) = -\frac{1}{(T-t)^{1-\alpha}}\left(R(t)^{-1}c(t \mid t, w(\cdot)) + \int\limits_t^T \frac{M(t,\xi \mid t)c(\xi \mid t, w(\cdot))}{(T-\xi)^{2-2\alpha}}\, d\xi\right) \tag{15}$$

для всех $(t, w(\cdot)) \in G^0_\infty$, где для каждого $\tau \in [t,T]$ обозначено

$$c(\tau \mid t, w(\cdot)) = B(\tau)^{\mathrm{T}}\Phi(T,\tau)^{\mathrm{T}}Pb(T \mid t, w(\cdot)) + (T-\tau)^{1-\alpha}B(\tau)^{\mathrm{T}}\int\limits_\tau^T \frac{\Phi(\xi,\tau)^{\mathrm{T}}Q(\xi)b(\xi \mid t, w(\cdot))}{(\xi-\tau)^{1-\alpha}}\, d\xi.$$

Отметим, что отображение U° непрерывно (напомним, что множество G^0_∞ снабжено метрикой dist из (5)), для каждого зафиксированного $t \in [0,T)$ отображение

$$AC^\alpha_\infty([0,t],\mathbb{R}^n) \ni w(\cdot) \mapsto U^\circ(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^m \tag{16}$$

линейно, и существует число $\mu_{U^\circ} \geqslant 0$ такое, что справедлива оценка

$$\|U^\circ(t, w(\cdot))\| \leqslant \frac{\mu_{U^\circ}\|w(\cdot)\|_{C([0,t],\mathbb{R}^n)}}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad (t, w(\cdot)) \in G^0_\infty. \tag{17}$$

Отображение U° будем использовать для формирования управления в системе (9) по принципу обратной связи, при этом вместо аргумента $w(\cdot)$ будем подставлять историю $x_t(\cdot)$ движения этой системы, сложившуюся к моменту времени t (см. (6)).

Рассмотрим систему (9), замкнутую обратной связью U°:

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)U^\circ(\tau, x_\tau(\cdot)), \tag{18}$$

где $\tau \in [0,T]$. В соответствии с п. 2 движение замкнутой системы (18), отвечающее начальному значению $x_0 \in \mathbb{R}^n$, определим как функцию $x(\cdot) \in AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию (10) и дифференциальному уравнению (18) при п.в. $\tau \in [0,T]$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Для любого начального значения $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное движение $x^\circ(\cdot)$ замкнутой системы (18). При этом реализующееся управление*

$$u^\circ(\tau) = U^\circ(\tau, x^\circ_\tau(\cdot)), \quad \tau \in [0,T) \tag{19}$$

является оптимальным в задаче (9)–(11).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сделаем ряд замечаний.

1. Для произвольных функции $x(\cdot) \in AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ и момента времени $\tau \in [0,T)$ величина $U^\circ(\tau, x_\tau(\cdot))$ в правой части уравнения (18) может быть не определена, поскольку сужение $x_\tau(\cdot)$ этой функций на отрезок $[0,\tau]$ может не принадлежать пространству $AC^\alpha_\infty([0,\tau],\mathbb{R}^n)$.

Тем не менее эту проблему удаётся обойти, например, следующим образом. Определим уже на всём множестве G_2 отображение

$$U^*(t,w(\cdot)) = \begin{cases} U^\circ(t,w(\cdot)), & \text{если} \quad (t,w(\cdot)) \in G^0_\infty, \\ 0, & \text{если} \quad (t,w(\cdot)) \in G_2 \setminus G^0_\infty, \end{cases} \tag{20}$$

и рассмотрим систему (9), замкнутую обратной связью U^*:

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)U^*(\tau, x_\tau(\cdot)), \tag{21}$$

где $\tau \in [0,T]$. Возьмём движение $x(\cdot) \in AC^\alpha_2([0,T],\mathbb{R}^n)$ замкнутой системы (21), отвечающее начальному значению $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда, вводя обозначения

$$\mu_A = \max_{\tau\in[0,T]} \|A(\tau)\|, \quad \mu_B = \max_{\tau\in[0,T]} \|B(\tau)\| \tag{22}$$

и выбирая число μ_{U° согласно (17), выводим оценку

$$\|({}^C D^\alpha x)(\tau)\| \leqslant \mu_A \|x(\tau)\| + \mu_B \frac{\mu_{U^\circ}\|x_\tau(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^n)}}{(T-\tau)^{1-\alpha}}$$

при п.в. $\tau \in [0,T]$. Стало быть, имеем $x_\tau(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0,\tau],\mathbb{R}^n)$ для любого $\tau \in [0,T)$, а значит, $U^*(\tau,x_\tau(\cdot)) = U^\circ(\tau,x_\tau(\cdot))$ при всех $\tau \in [0,T)$ в силу (20). Таким образом получаем, что в действительности $x(\cdot)$ – движение замкнутой системы (18) с обратной связью U°, отвечающее начальному значению x_0. Подчеркнём, что сама функция $x(\cdot)$ при этом может не принадлежать пространству $AC^\alpha_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$. Отметим также, что величину $U^*(t,w(\cdot))$ для всех $(t,w(\cdot)) \in G_2 \setminus G^0_\infty$ при $t < T$ можно было бы определить по исходной формуле (15), однако проверка необходимых свойств построенного таким образом отображения U^* потребовала бы дополнительных усилий.

2. В определении (15) величины $U^\circ(t,w(\cdot))$ для момента времени $t \in [0,T)$ и функции $w(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$ участвуют значения дробной производной Капуто $({}^C D^\alpha w)(\tau)$ при п.в. $\tau \in [0,t]$ (см. (14)), что не позволяет напрямую задать величину $U^\circ(t,w(\cdot))$ для произвольной функции $w(\cdot) \in C([0,t],\mathbb{R}^n)$ с сохранением необходимых свойств отображения U°. Это обстоятельство препятствует тому, чтобы при изучении вопроса о существовании и единственности решений дифференциального уравнения (18) стандартным образом перейти к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерры в пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ (см. (12)). С другой стороны, исследование разрешимости этого интегрального уравнения непосредственно в пространстве $AC^\alpha_\infty([0,t],\mathbb{R}^n)$ осложняется тем, что данное пространство не является полным. Чтобы избежать указанных трудностей, уравнение (18) удобно рассматривать не как дифференциальное уравнение относительно функции $x(\cdot)$, а как функциональное уравнение относительно её дробной производной Капуто $f(\cdot) = ({}^C D^\alpha x)(\cdot)$. Такой подход ранее применялся, например, в работе [21].

3. Поскольку правая часть дифференциального уравнения (18) в момент времени $\tau \in [0,T]$ зависит от значений $x(\xi)$ искомого решения при всех $\xi \in [0,\tau]$, это уравнение можно классифицировать как дифференциальное уравнение с дробной производной Капуто и каузальным оператором. Дифференциальные включения такого типа рассматривались, например, в [22].

4. Обоснование оптимальности управления $u^\circ(\cdot)$ (см. (19)) опирается на результаты, полученные в работе [18], где в качестве пространства допустимых управлений было выбрано пространство $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$. В связи с этим подчеркнём, что оптимальное (в смысле пространства $L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$) управление в задаче (9)–(11) может неограниченно расти при приближении к терминальному моменту времени T (см. (15) и (17)) и, как следствие, может не принадлежать пространству $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$. В частности, с целью обработки данного эффекта в доказательстве теоремы вводится малый параметр $\delta \in (0,T)$ и уравнение (18) изучается сначала на промежутке времени $[0, T-\delta]$.

4. Доказательство теоремы. Зафиксируем начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим замкнутую систему (18) на промежутке времени $[0, T-\delta]$, где $\delta \in (0, T)$.

Лемма 1. *Каково бы ни было число* $\delta \in (0, T)$, *существует единственная функция* $y^{(\delta)}(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$, *которая удовлетворяет начальному условию* $y^{(\delta)}(0) = x_0$ *и дифференциальному уравнению*

$$({}^C D^\alpha y^{(\delta)})(\tau) = A(\tau) y^{(\delta)}(\tau) + B(\tau) U^\circ(\tau, y^{(\delta)}_\tau(\cdot))$$

при п.в. $\tau \in [0, T-\delta]$.

Доказательство. Выберем число $k > 0$ из условия $k^\alpha > \mu_A + \mu_B \mu_{U^\circ}/\delta^{1-\alpha}$, где числа μ_{U° и μ_A, μ_B определяются согласно (17) и (22). Рассмотрим линейное пространство $C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ всех непрерывных функций $f\colon [0, T-\delta] \to \mathbb{R}^n$ со взвешенной нормой (также называемой нормой Билецкого)

$$\|f(\cdot)\|_k = \max_{\tau \in [0, T-\delta]} (\|f(\tau)\| e^{-k\tau}), \quad f(\cdot) \in C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n).$$

Отметим, что норма $\|\cdot\|_k$ эквивалентна равномерной норме $\|\cdot\|_{C([0,T-\delta],\mathbb{R}^n)}$, а значит пространство $C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ банахово.

Для каждой функции $f(\cdot) \in C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ определим функцию

$$(Mf)(\tau) = x_0 + (I^\alpha f)(\tau), \quad \tau \in [0, T-\delta],$$

где $(I^\alpha f)(\tau)$ – левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α (см. (1)). Для любых функций $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ при всех $\tau \in [0, T-\delta]$ имеем неравенства

$$\|(Mf_1)(\tau) - (Mf_2)(\tau)\| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{\|f_1(\xi) - f_2(\xi)\|}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|_k}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{e^{k\xi}}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} \, d\xi \leqslant \frac{\|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|_k e^{k\tau}}{k^\alpha}$$

и, следовательно,

$$\max_{\xi \in [0, \tau]} \|(Mf_1)(\xi) - (Mf_2)(\xi)\| \leqslant \frac{\|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|_k e^{k\tau}}{k^\alpha}. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь оператор $N\colon C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n) \to C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$, который каждой функции $f(\cdot) \in C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие функцию

$$(Nf)(\tau) = A(\tau)(Mf)(\tau) + B(\tau) U^\circ(\tau, (Mf)_\tau(\cdot)), \quad \tau \in [0, T-\delta],$$

где $(Mf)_\tau(\cdot)$ – сужение функции $(Mf)(\cdot)$ на отрезок $[0, \tau]$. Отметим, что определение оператора N корректно, поскольку $(Mf)(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ по построению и отображения A, B, U° и (7) непрерывны.

Для любых функций $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$, принимая во внимание линейность отображения (16) и оценку (23), выводим оценку

$$\|(Nf_1)(\tau) - (Nf_2)(\tau)\| \leqslant \left(\mu_A + \frac{\mu_B \mu_{U^\circ}}{\delta^{1-\alpha}}\right) \frac{\|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|_k e^{k\tau}}{k^\alpha}, \quad \tau \in [0, T-\delta],$$

а значит,

$$\|(Nf_1)(\cdot) - (Nf_2)(\cdot)\|_k \leqslant \left(\mu_A + \frac{\mu_B \mu_{U^\circ}}{\delta^{1-\alpha}}\right) \frac{\|f_1(\cdot) - f_2(\cdot)\|_k}{k^\alpha}.$$

Таким образом, учитывая выбор числа k, заключаем, что оператор N сжимающий и, стало быть, имеет единственную неподвижную точку $f^*(\cdot) \in C_k([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$.

Положим $y^*(\tau) = (Mf^*)(\tau) = x_0 + (I^\alpha f^*)(\tau)$ для любого $\tau \in [0, T-\delta]$. Тогда получаем $y^*(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$, $y^*(0) = x_0$, и при п.в. $\tau \in [0, T-\delta]$

$$({}^C D^\alpha y^*)(\tau) = f^*(\tau) = (Nf^*)(\tau) = A(\tau) y^*(\tau) + B(\tau) U^\circ(\tau, y^*_\tau(\cdot)).$$

Остаётся доказать единственность. Пусть функция $y(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$ такова, что $y(0) = x_0$, и при п.в. $\tau \in [0, T-\delta]$ имеет место равенство

$$({}^C D^\alpha y)(\tau) = A(\tau) y(\tau) + B(\tau) U^\circ(\tau, y_\tau(\cdot)).$$

Рассмотрим функцию $f(\tau) = A(\tau) y(\tau) + B(\tau) U^\circ(\tau, y_\tau(\cdot))$ для любого $\tau \in [0, T-\delta]$. Заметим, что $f(\cdot) \in C_e([0, T-\delta], \mathbb{R}^n)$. Кроме того, так как $({}^C D^\alpha y)(\tau) = f(\tau)$ при п.в. $\tau \in [0, T-\delta]$, то $y(\tau) = (Mf)(\tau)$ при всех $\tau \in [0, T-\delta]$ согласно (4). Следовательно, $f(\cdot)$ – неподвижная точка оператора N, а значит, $f(\tau) = f^*(\tau)$ для любого $\tau \in [0, T-\delta]$. Таким образом, имеем

$$y(\tau) = (Mf)(\tau) = (Mf^*)(\tau) = y^*(\tau), \quad \tau \in [0, T-\delta],$$

что завершает доказательство леммы.

Для каждого числа $\delta \in (0, T)$ возьмём функцию $y^{(\delta)}(\cdot)$ из леммы 1 и уже на всём промежутке времени $[0, T]$ определим управление $u^{(\delta)}(\cdot) \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ по правилу

$$u^{(\delta)}(\tau) = \begin{cases} U^\circ(\tau, y^{(\delta)}_\tau(\cdot)), & \text{если } \tau \in [0, T-\delta], \\ 0, & \text{если } \tau \in (T-\delta, T]. \end{cases} \tag{24}$$

Через $x^{(\delta)}(\cdot) = x(\cdot \mid x_0, u^{(\delta)}(\cdot))$ обозначим соответствующее движение системы (9). Отметим, что $x^{(\delta)}(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$ и

$$x^{(\delta)}(\tau) = y^{(\delta)}(\tau), \quad u^{(\delta)}(\tau) = U^\circ(\tau, x^{(\delta)}_\tau(\cdot)), \quad \tau \in [0, T-\delta]. \tag{25}$$

Лемма 2. *Существует число $\mu_x \geqslant 0$ такое, что*

$$\|x^{(\delta)}(\cdot)\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} \leqslant \mu_x, \quad \delta \in (0, T). \tag{26}$$

Доказательство. Определим числа μ_{U° и μ_A, μ_B в соответствии с (17) и (22), обозначим $\mu = \mu_A T^{1-\alpha} + \mu_B \mu_{U^\circ}$ и положим $\mu_x = \|x_0\| E_{2\alpha-1}(\mu \Gamma(2\alpha-1) T^{2\alpha-1}/\Gamma(\alpha))$, где $E_{2\alpha-1}$ – функция Миттаг-Лёффлера (см., например, [2, п. 1.8; 3, гл. 4]).

Зафиксируем число $\delta \in (0, T)$. При п.в. $\tau \in [0, T-\delta]$ имеем неравенства

$$\|({}^C D^\alpha x^{(\delta)})(\tau)\| \leqslant \mu_A \|x^{(\delta)}(\tau)\| + \frac{\mu_B \mu_{U^\circ} \|x^{(\delta)}_\tau(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^n)}}{(T-\tau)^{1-\alpha}} \leqslant \frac{\mu \|x^{(\delta)}_\tau(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^n)}}{(T-\tau)^{1-\alpha}}$$

и, аналогично, при п.в. $\tau \in [T-\delta, T]$ получаем

$$\|({}^C D^\alpha x^{(\delta)})(\tau)\| \leqslant \mu_A \|x^{(\delta)}(\tau)\| \leqslant \frac{\mu \|x^{(\delta)}_\tau(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^n)}}{(T-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Тогда, учитывая (4), для любого $\tau \in [0, T]$ выводим

$$\|x^{(\delta)}(\tau)\| \leqslant \|x_0\| + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{\|x^{(\delta)}_\xi(\cdot)\|_{C([0,\xi],\mathbb{R}^n)}}{(T-\xi)^{1-\alpha}(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\, d\xi \leqslant \|x_0\| + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{\|x^{(\delta)}_\xi(\cdot)\|_{C([0,\xi],\mathbb{R}^n)}}{(\tau-\xi)^{2-2\alpha}}\, d\xi.$$

Замечая, что последний интеграл в данном выражении есть неубывающая функция переменной τ (см., например, [23, утверждение 2]), приходим к оценке

$$\|x^{(\delta)}_\tau(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^n)} \leqslant \|x_0\| + \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\tau \frac{\|x^{(\delta)}_\xi(\cdot)\|_{C([0,\xi],\mathbb{R}^n)}}{(\tau-\xi)^{2-2\alpha}}\, d\xi, \quad \tau \in [0, T].$$

В итоге, после применения соответствующего аналога неравенства Гронуолла (см., например, [3, лемма 6.19]), имеем

$$\|x_\tau^{(\delta)}(\cdot)\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^n)} \leqslant \|x_0\| E_{2\alpha-1}\biggl(\frac{\mu\Gamma(2\alpha-1)\tau^{2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\biggr) \leqslant \mu_x, \quad \tau\in[0,T].$$

Лемма доказана.

Отметим, что если $\delta_1,\delta_2\in(0,T)$ и $\delta_1\geqslant\delta_2$, то по построению $u^{(\delta_1)}(\tau)=u^{(\delta_2)}(\tau)$ при всех $\tau\in[0,T-\delta_1]$. Следовательно, можно определить функцию $u^\circ\colon[0,T)\to\mathbb{R}^m$ таким образом, чтобы для каждого $\delta\in(0,T)$ имело место равенство

$$u^\circ(\tau)=u^{(\delta)}(\tau), \quad \tau\in[0,T-\delta]. \tag{27}$$

Учитывая, что в силу (17) и (26) справедлива оценка

$$\|u^{(\delta)}(\tau)\|\leqslant\frac{\mu_{U^\circ}\mu_x}{(T-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \tau\in[0,T-\delta], \quad \delta\in(0,T),$$

выводим

$$\|u^\circ(\tau)\|\leqslant\frac{\mu_{U^\circ}\mu_x}{(T-\tau)^{1-\alpha}}, \quad \tau\in[0,T). \tag{28}$$

Тогда, принимая во внимание измеримость функции $u^\circ(\cdot)$ на промежутке $[0,T)$ и формально полагая $u^\circ(T)=0$, получаем $u^\circ(\cdot)\in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$, т.е. $u^\circ(\cdot)$ – допустимое управление в задаче (9)–(11).

Рассмотрим соответствующее движение $x^\circ(\cdot)=x(\cdot\mid x_0,u^\circ(\cdot))$ системы (9). Для каждого $\delta\in(0,T)$ имеем

$$x^\circ(\tau)=x^{(\delta)}(\tau), \quad \tau\in[0,T-\delta],$$

и, далее,

$$u^\circ(\tau)=u^{(\delta)}(\tau)=U^\circ(\tau,x_\tau^{(\delta)}(\cdot))=U^\circ(\tau,x_\tau^\circ(\cdot)), \quad \tau\in[0,T-\delta].$$

Поскольку данное свойство выполняется для любого $\delta\in(0,T)$, заключаем, что справедливо равенство (19) и, стало быть, функция $x^\circ(\cdot)$ является движением замкнутой системы (18) при начальном условии (10).

Возьмём теперь произвольное движение $x(\cdot)\in AC_2^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$ замкнутой системы (18) при начальном условии (10). Зададим число $\delta\in(0,T)$ и определим функцию $y(\tau)=x(\tau)$ для любого $\tau\in[0,T-\delta]$. Тогда $y(\cdot)\in AC_\infty^\alpha([0,T-\delta],\mathbb{R}^n)$ (см. замечание 1 после формулировки теоремы), $y(0)=x_0$, и при п.в. $\tau\in[0,T-\delta]$

$$({}^CD^\alpha y)(\tau)=({}^CD^\alpha x)(\tau)=A(\tau)x(\tau)+B(\tau)U^\circ(\tau,x_\tau(\cdot))=A(\tau)y(\tau)+B(\tau)U^\circ(\tau,y_\tau(\cdot)).$$

Применяя лемму 1, получаем $y(\tau)=y^{(\delta)}(\tau)$ при всех $\tau\in[0,T-\delta]$. Следовательно, имеем $x(\tau)=x^{(\delta)}(\tau)=x^\circ(\tau)$ при всех $\tau\in[0,T-\delta]$. Так как это соотношение выполнено для любого $\delta\in(0,T)$ и функции $x(\cdot)$ и $x^\circ(\cdot)$ непрерывны, выводим $x(\tau)=x^\circ(\tau)$ при всех $\tau\in[0,T]$. Итак, движение замкнутой системы (18) при начальном условии (10) существует и единственно.

Докажем оптимальность управления $u^\circ(\cdot)$. С этой целью рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для динамической системы (9) при начальном условии (10) на минимум показателя качества (11), но при выборе в качестве класса допустимых управлений пространства $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$. Определим величину оптимального результата в этой задаче

$$\rho_\infty(x_0)=\inf_{u(\cdot)\in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)} J(x_0,u(\cdot)). \tag{29}$$

В соответствии с результатами работы [18] (см. также [19]) существуют функционал $\varphi\colon G_\infty\to\mathbb{R}$ и отображения $\partial_t^\alpha\varphi\colon G_\infty^0\to\mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha\varphi\colon G_\infty^0\to\mathbb{R}^n$ со следующими свойствами:

1) для любой точки $(t, w(\cdot)) \in G^0_\infty$ справедливо равенство

$$\partial^\alpha_t \varphi(t, w(\cdot)) + \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), A(t)w(t)\rangle + \langle w(t), Q(t)w(t)\rangle -$$
$$- \frac{1}{4}\langle B(t)^{\mathrm{T}} \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), R(t)^{-1} B(t)^{\mathrm{T}} \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))\rangle = 0; \tag{30}$$

2) отображения U° и $\nabla^\alpha \varphi$ связаны соотношением

$$U^\circ(t, w(\cdot)) = -\frac{1}{2} R(t)^{-1} B(t)^{\mathrm{T}} \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G^0_\infty;$$

3) какова бы ни была функция $x(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$, функция $\kappa(\tau) = \varphi(\tau, x_\tau(\cdot))$, где $\tau \in [0,T]$, удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, T-\delta]$ для любого числа $\delta \in (0,T)$, выполнены краевые условия

$$\kappa(0) = \rho_\infty(x(0)), \quad \kappa(T) = \langle x(T), Px(T)\rangle,$$

и при п.в. $\tau \in [0,T]$ имеет место равенство

$$\frac{d\kappa(\tau)}{d\tau} = \partial^\alpha_t \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) + \langle \nabla^\alpha \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)), ({}^C D^\alpha x)(\tau)\rangle;$$

4) существует число $\mu_\varphi \geqslant 0$ такое, что, каковы бы ни были функция $x(\cdot) \in AC^\alpha_\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ и число $\delta \in (0,T)$, справедлива оценка

$$|\varphi(T, x(\cdot)) - \varphi(T-\delta, x_{T-\delta}(\cdot))| \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{2\alpha-1} \mu_\varphi \bigg(\|x(\cdot)\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} + \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in [T-\delta, T]} \|({}^C D^\alpha x)(\tau)\| \bigg) \|x(\cdot)\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)}.$$

С содержательной точки зрения φ есть функционал оптимального результата во вспомогательной задаче оптимального управления, отображения $\partial^\alpha_t \varphi$ и $\nabla^\alpha \varphi$ суть его дробные коинвариантные производные порядка α, а равенство (30) представляет собой отвечающее этой задаче уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

С опорой на приведённые выше свойства покажем, что управление $u^{(\delta)}(\cdot)$ (см. (24) и (25)) является ε-оптимальным во вспомогательной задаче при достаточно малом значении параметра $\delta \in (0,T)$.

Лемма 3. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_* \in (0,T)$ такое, что для всякого числа $\delta \in (0, \delta_*]$ выполнено неравенство*

$$J(x_0, u^{(\delta)}(\cdot)) \leqslant \rho_\infty(x_0) + \varepsilon. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем число $\delta_* \in (0,T)$, исходя из условия

$$\delta_*^{2\alpha-1} \mu_\varphi (1 + \mu_A) \mu_x^2 + \delta_* \mu_Q \mu_x^2 \leqslant \varepsilon,$$

где числа μ_φ, μ_x и μ_A определяются согласно свойству 4), лемме 2 и соотношению (22) и $\mu_Q = \max\limits_{\tau \in [0,T]} \|Q(\tau)\|$. Для числа $\delta \in (0, \delta_*]$ рассмотрим соответствующие управление $u^{(\delta)}(\cdot)$ и движение $x^{(\delta)}(\cdot) = x(\cdot \mid x_0, u^{(\delta)}(\cdot))$ системы (9). Определим функцию

$$\omega(\tau) = \varphi(\tau, x^{(\delta)}_\tau(\cdot)) - \int\limits_\tau^T (\langle x^{(\delta)}(\xi), Q(\xi) x^{(\delta)}(\xi)\rangle + \langle u^{(\delta)}(\xi), R(\xi) u^{(\delta)}(\xi)\rangle)\, d\xi, \quad \tau \in [0,T].$$

В силу свойства 3) функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, T-\delta]$ и при п.в. $\tau \in [0, T]$ справедливо равенство

$$\frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = \partial_t^\alpha \varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot)) + \langle \nabla^\alpha \varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot)), A(\tau)x^{(\delta)}(\tau) + B(\tau)u^{(\delta)}(\tau)\rangle +$$

$$+ \langle x^{(\delta)}(\tau), Q(\tau)x^{(\delta)}(\tau)\rangle + \langle u^{(\delta)}(\tau), R(\tau)u^{(\delta)}(\tau)\rangle.$$

Для каждого $\tau \in [0, T-\delta]$, принимая во внимание свойство 2), получаем

$$u^{(\delta)}(\tau) = U^\circ(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot)) = -\frac{1}{2}R(\tau)^{-1}B(\tau)^{\mathrm{T}}\nabla^\alpha\varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot))$$

и, следовательно,

$$\langle \nabla^\alpha \varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot)), B(\tau)u^{(\delta)}(\tau)\rangle + \langle u^{(\delta)}(\tau), R(\tau)u^{(\delta)}(\tau)\rangle =$$

$$= \min_{u\in\mathbb{R}^m}(\langle \nabla^\alpha \varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot)), B(\tau)u\rangle + \langle u, R(\tau)u\rangle) =$$

$$= -\frac{1}{4}\langle B(\tau)^{\mathrm{T}}\nabla^\alpha\varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot)), R(\tau)^{-1}B(\tau)^{\mathrm{T}}\nabla^\alpha\varphi(\tau, x_\tau^{(\delta)}(\cdot))\rangle.$$

Таким образом, учитывая свойство 1), выводим $d\omega(\tau)/d\tau = 0$ при п.в. $\tau \in [0, T-\delta]$, а значит, $\omega(T-\delta) = \omega(0)$.

Далее, поскольку $u^{(\delta)}(\tau) = 0$ при всех $\tau \in (T-\delta, T]$, имеем $\|({}^CD^\alpha x^{(\delta)})(\tau)\| \leqslant \mu_A\mu_x$ при п.в. $\tau \in [T-\delta, T]$. Тогда ввиду свойства 4) имеем

$$|\omega(T) - \omega(T-\delta)| \leqslant |\varphi(T, x^{(\delta)}(\cdot)) - \varphi(T-\delta, x_{T-\delta}^{(\delta)}(\cdot))| + \int\limits_{T-\delta}^{T} \langle x^{(\delta)}(\xi), Q(\xi)x^{(\delta)}(\xi)\rangle\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{2\alpha-1}\mu_\varphi(\mu_x + \mu_A\mu_x)\mu_x + \delta\mu_Q\mu_x^2 \leqslant \varepsilon.$$

Стало быть, выполняется оценка $\omega(T) \leqslant \omega(0) + \varepsilon$, которая в силу краевых условий из свойства 3) приводит к неравенству (31). Лемма доказана.

Подчеркнём, что предельное управление $u^\circ(\cdot)$ (см. (27)) может иметь особенность в терминальный момент времени T и поэтому может не принадлежать пространству $L_\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$, т.е. не быть допустимым во вспомогательной задаче.

Установим непрерывную зависимость значения показателя качества $J(x_0, u(\cdot))$ (см. (11)) от изменения управления $u(\cdot) \in L_2([0,T], \mathbb{R}^m)$.

Лемма 4. *Пусть* $\{u_i(\cdot)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset L_2([0,T], \mathbb{R}^m)$ *и* $u(\cdot) \in L_2([0,T], \mathbb{R}^m)$. *Предположим, что* $\|u_i(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^m)} \to 0$ *при* $i \to \infty$. *Тогда* $J(x_0, u_i(\cdot)) \to J(x_0, u(\cdot))$ *при* $i \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим движения $x_i(\cdot) = x(\cdot \mid x_0, u_i(\cdot))$ для каждого $i \in \mathbb{N}$ и $x(\cdot) = x(\cdot \mid x_0, u(\cdot))$ системы (9) при начальном условии (10). Учитывая (12), для каждого $i \in \mathbb{N}$ при всех $\tau \in [0, T]$ выводим неравенства

$$\|x_i(\tau) - x(\tau)\| \leqslant \frac{\mu_A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\tau \frac{\|x_i(\xi) - x(\xi)\|}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi + \frac{\mu_B}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\tau \frac{\|u_i(\xi) - u(\xi)\|}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\tau \frac{\|x_i(\xi) - x(\xi)\|}{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}\,d\xi + \frac{\mu_B T^{\alpha-1/2}\|u_i(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^m)}}{\Gamma(\alpha)(2\alpha-1)^{1/2}},$$

где числа μ_A и μ_B определяются согласно (22). Тогда, применяя соответствующий аналог неравенства Гронуолла (см., например, [3, лемма 6.19]), получаем

$$\|x_i(\tau) - x(\tau)\| \leqslant \frac{\mu_B T^{\alpha-1/2}E_\alpha(\mu_A T^\alpha)\|u_i(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^m)}}{\Gamma(\alpha)(2\alpha-1)^{1/2}}, \quad \tau \in [0,T], \quad i \in \mathbb{N},$$

где E_α – функция Миттаг-Лёффлера (см., например, [2, п. 1.8; 3, гл. 4]). Поскольку по предположению $\|u_i(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^m)} \to 0$ при $i \to \infty$, имеем $\|x_i(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([0,T],\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $i \to \infty$ и, далее, $J(x_0, u_i(\cdot)) \to J(x_0, u(\cdot))$ при $i \to \infty$. Лемма доказана.

Так как для любой функции $u(\cdot) \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$ и любого числа $\zeta > 0$ существует функция $u_*(\cdot) \in L_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$, для которой $\|u_*(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^m)} \leqslant \zeta$, то по лемме 4 из определений (13) и (29) вытекает равенство $\rho(x_0) = \rho_\infty(x_0)$. Тогда по лемме 3 для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta_* \in (0,T)$ такое, что

$$J(x_0, u^{(\delta)}(\cdot)) \leqslant \rho(x_0) + \varepsilon, \quad \delta \in (0, \delta_*].$$

Замечая, что $\|u^{(\delta)}(\cdot) - u^\circ(\cdot)\|_{L_2([0,T],\mathbb{R}^m)} \to 0$ при $\delta \to +0$ в силу соотношений (24), (27) и (28), применяя лемму 4 и учитывая определение (13), приходим к равенству $J(x_0, u^\circ(\cdot)) = \rho(x_0)$. Таким образом, управление $u^\circ(\cdot)$ является оптимальным в задаче (9)–(11). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01483-23-00 (проект FEWS-2020-0010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
3. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: an Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, 2010.
4. *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. 2013. № 4. С. 3–42.
5. *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. 2013. № 5. С. 3–34.
6. *Sun H., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y.* A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2018. V. 64. P. 213–231.
7. *Tarasov V.E.* On history of mathematical economics: application of fractional calculus // Mathematics. 2019. V. 7. № 6. Art. 509.
8. *Agrawal O.P.* A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems // J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 2008. V. 130. № 1. Art. 011010.
9. *Li Y., Chen Y.* Fractional order linear quadratic regulator // Proc. of the 2008 IEEE/ASME Intern. Conf. on Mechtronic and Embedded Systems and Applications. Beijing, 2008. P. 363–368.
10. *Liang S., Wang S.-G., Wang Y.* Representation and LQR of exact fractional order systems // Proc. of the 53rd IEEE Conf. on Decision and Control. Los Angeles, 2014. P. 6908–6913.
11. *Bhrawy A.H., Doha E.H., Machado J.A.T., Ezz-Eldien S.S.* An efficient numerical scheme for solving multi-dimensional fractional optimal control problems with a quadratic performance index // Asian J. Control. 2015. V. 17. № 6. P. 2389–2402.
12. *Idczak D., Walczak S.* On a linear-quadratic problem with Caputo derivative // Opuscula Math. 2016. V. 36. № 1. P. 49–68.
13. *Baghani O.* Solving state feedback control of fractional linear quadratic regulator systems using triangular functions // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2019. V. 73. P. 319–337.
14. *Zhou B., Speyer J.L.* Fractional linear quadratic regulators using Wiener–Hopf spectral factorization // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. № 6. P. 4011–4032.
15. *Dabiri A., Chahrogh L.K., Machado J.A.T.* Closed-form solution for the finite-horizon linear-quadratic control problem of linear fractional-order systems // Proc. American Control Conf. New Orleans, 2021. P. 3864–3869.
16. *Han S., Lin P., Yong J.* Causal state feedback representation for linear quadratic optimal control problems of singular Volterra integral equations // Math. Control Relat. Fields. 2023. V. 13. № 4. P. 1282–1317.
17. *Malmir I.* Novel closed-loop controllers for fractional linear quadratic time-varying systems // Numer. Algebra, Control. Optim. 2022. DOI: 10.3934/naco.2022032.

18. *Gomoyunov M.I.* Value functional and optimal feedback control in linear-quadratic optimal control problem for fractional-order system // Math. Control Relat. Fields. 2023. DOI: 10.3934/mcrf.2023002.
19. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. V. 58. № 6. P. 3185–3211.
20. *Bourdin L.* Weighted Hölder continuity of Riemann–Liouville fractional integrals – application to regularity of solutions to fractional Cauchy problems with Carathéodory dynamics // Fract. Calc. Appl. Anal. 2019. V. 22. № 3. P. 722–749.
21. *Idczak D., Kamocki R.* On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in $\mathbb{R}^n$ // Fract. Calc. Appl. Anal. 2011. V. 14. № 4. P. 538–553.
22. *Обуховский В.В., Кулманакова М.М., Боровикова М.М.* Задача разрешимости для управляемой системы с дробной производной и каузальным оператором // Таврический вестн. информатики и математики. 2021. № 4. С. 85–105.
23. *Gomoyunov M.I.* Approximation of fractional order conflict–controlled systems // Progr. Fract. Differ. Appl. 2019. V. 5. № 2. P. 143–155.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1123–1138

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. О. Б. Цехан

Для линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем (ЛНСВС) с квазидифференцируемыми коэффициентами и малым параметром при некоторых производных рассматривается задача равномерной наблюдаемости. Доказаны независящие от малого параметра необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости множества выходных функций, построены независящие от малого параметра матрицы наблюдаемости связанных с ЛНСВС медленной и семейства быстрых подсистем, установлена связь между ними и матрицей наблюдаемости исходной системы. На основе полной декомпозиции исходной ЛНСВС относительно действия группы линейных невырожденных преобразований доказаны ранговые, независящие от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений, достаточные условия равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Условия выражены через матрицы наблюдаемости медленной и семейства быстрых подсистем, имеющих меньшие размерности, чем исходная ЛНСВС.

DOI: 10.31857/S0374064123080113, EDN: IQNKAJ

Введение. Наблюдаемость, наряду с устойчивостью, управляемостью и стабилизируемостью, является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении возможности однозначного восстановления состояний системы по результатам наблюдений, что равносильно взаимно-однозначному соответствию между множеством выходных функций и множеством начальных (или текущих) состояний системы. При этом важно понимать, в каком виде представлена информация о выходных функциях системы наблюдения (например, известны значения выходной функции в фиксированные моменты времени, в произвольно выбранные моменты, известны значения производных и т.п.). Понятие наблюдаемости впервые сформулировано Р. Калманом в работе [1]; там же приведён и критерий наблюдаемости линейных стационарных систем. В нестационарном случае известные необходимые и достаточные условия наблюдаемости [2, с. 66, 67] имеют неявный характер, поскольку требуют знания фундаментальной матрицы. Существующие коэффициентные признаки наблюдаемости основаны на высокой степени гладкости либо коэффициентов [3, с. 303–306], либо выходных сигналов [4, с. 20; 5, с. 191, 192]. Отметим, что для нестационарных систем наблюдения рассматриваются различные понятия наблюдаемости (см. [2–10] и цитированную в них литературу), которые отличаются рядом особенностей и в общем случае не эквивалентны.

В данной работе при исследовании наблюдаемости вместо дифференцируемости выходов используется квазидифференцируемость по некоторой нижнетреугольной матрице $P(t)$ [10, 11], что позволяет установить явные условия наблюдаемости, существенно усиливающие известные.

Сингулярно возмущённые системы (СВС) являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных, поведение которых может быть описано в стандартной форме системами дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных. Для таких систем можно рассматривать различные постановки задач наблюдения, в частности, в зависимости от доступной информации о малом параметре. Одним из "наивных" подходов к исследованию СВС является рассмотрение таких систем при каждом фиксированном значении малого параметра, что позволяет применять условия наблюдаемости и методы восстановления состояний, разработанные для систем без параметра. Однако такой подход приводит к анализу систем большой размерности, возникают значительные вычислительные трудности, связанные, например, с обращением плохообусловленных матриц. Кроме того, результаты при таком подходе зависят от величины малого параметра, т.е. не являются робастными по этому параметру. Как правило, в реальных прикладных задачах значения малого параметра точно не известны. Поэтому для СВС стремятся получать условия наличия различных её свойств, независящие от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений. Такие формулировки характерны для исследований СВС в рамках теории сингулярных возмущений [12]. Наличие тех или иных структурных свойств СВС управления при всех достаточно малых значениях параметра обеспечивает возможность асимптотического (по малому параметру) решения соответствующих задач управления и наблюдения СВС [13, 14]. Отметим ряд работ, посвящённых изучению свойства наблюдаемости СВС [14–22] (см. также литературу в обзорах [12, 23]). При исследовании свойств систем, имеющих место при всех возможных реализациях параметра, используется термин "робастные свойства" [24].

При исследовании структурных свойств СВС и разработке способов управления и наблюдения ими одним из эффективных методов является процедура декомпозиции, которая может быть выполнена различными способами. Например, в [14, 25] к СВС применяется невырожденное расщепляющее преобразование, эквивалентным образом сводящее исходную двухтемповую систему к разделённым по темпам подсистемам меньшей размерности, асимптотически (по малому параметру) близким к системам, независящим от малого параметра. При использовании [12] декомпозиционного подхода представляют интерес условия, при выполнении которых утверждения о наличии свойств для исходных систем высокого порядка вытекают из факта наличия этих свойств для некоторых подсистем меньшего порядка. Такие условия позволяют выводить суждения о структурных свойствах СВС при всех достаточно малых значениях параметра из аналогичных свойств у связанных с ней независящих от малого параметра систем меньшей размерности.

В данной работе для линейных нестационарных СВС с квазидифференцируемыми коэффициентами и малым параметром при некоторых производных рассматривается задача равномерной наблюдаемости. Для линейных нестационарных систем наблюдения без малого параметра равномерная наблюдаемость исследовалась в [6–10].

1. Квазидифференцируемость. Основные результаты, полученные в данной работе, используют понятие квазипроизводной [11] и некоторые простые факты, связанные с ним.

Пусть $T=[t_0,t_1]$ – отрезок действительной оси $\mathbb{R}$, m – заданное целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных $(m+1)\times(m+1)$-матриц $P(t)$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$, $i,k=\overline{0,m}$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t)\neq 0$ при $t\in T$, $k=\overline{0,m}$. Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_m(T)$. Квазипроизводные ${}^{0}_{P}w(t)$, ${}^{1}_{P}w(t)$, …, ${}^{m}_{P}w(t)$ порядка от 0 до m относительно матрицы $P(t)$ непрерывной функции $w:T\to\mathbb{R}$ определяются по следующим рекуррентным правилам:

$$
{}^{0}_{P}w(t)=p_{00}(t)w(t),\quad {}^{1}_{P}w(t)=p_{11}(t)\frac{d({}^{0}_{P}w(t))}{dt}+p_{10}(t)({}^{0}_{P}w(t)),\quad \ldots
$$

$$
\ldots,\quad {}^{k}_{P}w(t)=p_{kk}(t)\frac{d({}^{k-1}_{P}w(t))}{dt}+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)({}^{i}_{P}w(t)),\quad k=\overline{2,m}. \tag{1}
$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (1) выполнимы и приводят к непрерывным функциям.

Очевидно, что всякая m раз непрерывно дифференцируемая функция квазидифференцируема по единичной матрице E_{m+1}. Однако несложные примеры (см. [8, с. 15]) показывают, что недифференцируемая в обычном смысле функция может быть m раз квазидифференцируема по некоторой матрице $P\in\mathcal{U}_m(T)$.

Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными (1) относительно заданной матрицы $P\in\mathcal{U}_m(T)$, обозначим через $C^m_P(T)$. Очевидно, $C^m_P(T)$ – векторное пространство над полем действительных чисел.

2. Описание системы наблюдения. Рассмотрим на отрезке $T=[t_0,t_1]$ линейную нестационарную сингулярно возмущённую систему

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=A_1(t)x(t)+A_2(t)y(t),\quad x\in\mathbb{R}^{n_1},\\ \mu\dot{y}(t)=A_3(t)x(t)+A_4(t)y(t),\quad y\in\mathbb{R}^{n_2},\\ x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0\end{gathered}\tag{2}$$

со скалярной выходной функцией

$$v(t)=c_1(t)x(t)+c_2(t)y(t),\quad t\in T.\tag{3}$$

Здесь μ – малый параметр, $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0\ll 1$; $x(t)$ – вектор медленных переменных; $y(t)$ – вектор быстрых переменных; $v(t)$ – выходная функция системы; $A_i(t)$, $i=\overline{1,4}$, – непрерывные на T матричные функции соответствующих размерностей; $c_j(t)$, $j=1,2$, – непрерывные на T функции, записанные как вектор-строки.

Обозначим $n=n_1+n_2$, $z^{\mathrm{т}}(t)=(x^{\mathrm{т}}(t),y^{\mathrm{т}}(t))$, $z_0^{\mathrm{т}}=(x_0^{\mathrm{т}},y_0^{\mathrm{т}})$, ${}^{\mathrm{т}}$ – символ транспонирования. Чтобы подчеркнуть зависимость решения системы (2) от параметра μ и начальных условий (в зависимости от контекста), будем использовать одну из записей: $z(t)$, $z(t,\mu)$, $z(t,\mu,x_0,y_0)$, $z(t,\mu,z_0)$. Определим по параметрам ЛНСВС (2), (3) вектор-функцию $c(t)=(c_1(t),c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu>0$ матричную функцию

$$A(t,\mu)=\begin{pmatrix}A_1(t) & A_2(t)\\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu\end{pmatrix}.$$

Тогда систему наблюдения (2), (3) можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{gathered}\dot{z}(t)=A(t,\mu)z(t),\quad z\in\mathbb{R}^n,\quad t\in T,\quad z(t_0)=z_0,\\ v(t)=c(t)z(t),\quad v\in\mathbb{R},\quad t\in T.\end{gathered}\tag{4}$$

Отождествим систему (4) с парой (A_μ,c), состоящей из матричных функций $A(t,\mu)$ и $c(t)$, а совокупность всех таких пар с непрерывными на T компонентами обозначим Σ_μ, $\mu\in\in(0,\mu^0]$. С целью анализа свойств систем из Σ_μ, справедливых для всех достаточно малых значений параметра μ, представим матрицу $A(t,\mu)$ в виде

$$A(t,\mu)=A^0(t)+\frac{1}{\mu}A^1(t),\quad A^0(t)=\begin{pmatrix}A_1(t) & A_2(t)\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A^1(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ A_3(t) & A_4(t)\end{pmatrix}.\tag{5}$$

В силу (5) систему (4), определяемую тройкой матричных функций A^0, A^1, c и малым параметром $\mu\in(0,\mu^0]$, отождествим также со множеством $\{A^0,A^1,c,\mu\}$. Если параметр μ принимает всевозможные значения из полуинтервала $(0,\mu^0]$, то получаем μ-параметрическое семейство систем $\{A^0,A^1,c\}_{\mu^0}$. Фиксированное $\mu\in(0,\mu^0]$ выделяет из семейства $\{A^0,A^1,c\}_{\mu^0}$ конкретную систему (A_μ,c).

Пусть в системе (2) реализовались некоторые фиксированное $\mu\in(0,\mu^0]$ и неизвестное начальное состояние $z_0=z(t_0)$, которые породили в силу (2), (3) процесс $z(t,\mu)=z(t,\mu,z_0)$, $t\in T$, и выходную функцию $v(t,\mu)=v(t,\mu,z_0)$, $t\in T$. Для системы (A_μ,c) обозначим через

$$\mathcal{V}_\mu=\{(v(t,\mu,z_0),t\in T),\quad z_0\in\mathbb{R}^n\}$$

множество выходных функций.

Пусть задана некоторая матрица $P\in\mathcal{U}_m(T)$.

Определение 1. При фиксированном $\mu\in(0,\mu^0]$ *система* (A_μ,c) *имеет* P*-класс* m (записываем как $(A_\mu,c)\in\{P,m\}$), если всякая её выходная функция $v(t,\mu,z_0)$, $t\in T$, из множества $\mathcal{V}_\mu$ имеет непрерывные квазипроизводные относительно матрицы P до порядка m включительно.

Будем говорить, что *семейство систем* $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0}$ *имеет* P*-класс* m, если любая система из этого семейства имеет P-класс m.

При заданном положительном m обозначим через $\mathcal{P}_m(A_\mu, c)$ подмножество множества $\mathcal{U}_m(T)$, состоящее из таких матриц P, относительно которых система (A_μ, c) имеет класс m. Пусть выбрана некоторая независящая от μ матрица $P\in\mathcal{P}_m(A_\mu, c)$.

Укажем условия, при выполнении которых система (A_μ, c) имеет P-класс m. Применение к системе (4) леммы 2.1 из [8, с. 32] показывает, что при фиксированном $\mu\in(0,\mu^0]$ указанная система имеет P-класс m тогда и только тогда, когда для всех $k=\overline{1,m}$ существуют и непрерывны функции-строки

$$s_0(t,\mu)=p_{00}(t)c(t),\quad s_k(t,\mu)=p_{kk}(t)(s_{k-1}(t,\mu)A(t,\mu)+\dot s_{k-1}(t,\mu))+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_i(t,\mu). \tag{6}$$

С целью выяснения структуры зависимости функции $s_k(t,\mu)$ от параметра μ по рекуррентным формулам (6) с учётом структуры матриц (5) определим n-вектор-функции строки $s_k^0(t),\ s_k^1(t),\ \ldots,\ s_k^k(t),\ k=\overline{0,m}$, следующим образом:

$$s_0^0(t)=p_{00}(t)c(t),\quad s_0^1(t)=0,\quad s_0(t,\mu)=s_0^0(t),$$

$$s_1^0(t)=p_{11}(t)(s_0^0(t)A^0(t)+\dot s_0^0(t))+p_{10}(t)s_0^0(t),\quad s_1^1(t)=p_{11}(t)s_0^0(t)A^1(t),\quad s_1(t,\mu)=s_1^0(t)+\frac{1}{\mu}s_1^1(t),$$

$$s_2^0(t)=p_{22}(t)(s_1^0(t)A^0(t)+\dot s_1^0(t))+\sum_{j=0}^{1}p_{2j}(t)s_j^0(t),\quad s_0^2(t)=0,$$

$$s_2^1(t)=p_{22}(t)(s_1^0(t)A^1(t)+s_1^1(t)A^0(t)+\dot s_1^1(t))+\sum_{j=0}^{1}p_{2j}(t)s_j^1(t),\quad s_2^2(t)=p_{22}(t)s_1^1(t)A^1(t),$$

$$s_2(t,\mu)=s_2^0(t)+\frac{1}{\mu}s_2^1(t)+\frac{1}{\mu^2}s_2^2(t)=\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{\mu^j}s_2^j(t),\quad \ldots,$$

$$s_k(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\mu^j}(s_{k-1}^j(t)A^0(t)+\dot s_{k-1}^j(t))+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\mu^{j+1}}s_{k-1}^j(t)A^1(t)\biggr)+\sum_{j=0}^{k-1}p_{kj}(t)\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{\mu^i}s_j^i(t)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\mu^j}\biggl(p_{kk}(t)(s_{k-1}^j(t)A^0(t)+s_{k-1}^{j-1}(t)A^1(t)+\dot s_{k-1}^j(t))+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_i^j(t)\biggr)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\mu^j}s_k^j(t).$$

Здесь n-вектор-функции $s_k^j(t),\ j=\overline{0,k},\ k=\overline{0,m}$, определены по рекуррентным формулам

$$s_k^j(t)=p_{kk}(t)(s_{k-1}^j(t)A^0(t)+\dot s_{k-1}^j(t)+s_{k-1}^{j-1}(t)A^1(t))+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_i^j(t)$$

с учётом того, что $s_k^i(t)=0$ при $i<0$ или $i>k$.

Обозначим через $C^1(T,\mathbb{R})$ множество непрерывно дифференцируемых на отрезке T скалярных функций.

Лемма 1. *Для заданных скалярных функций* $a_i(t),\ t\in T,\ i=\overline{0,\theta}$ (θ *– заданное целое неотрицательное число), их линейная комбинация*

$$f(t,\mu)=\sum_{i=0}^{\theta}\frac{a_i(t)}{\mu^i},\quad t\in T, \tag{7}$$

непрерывно дифференцируема на отрезке T *при любом* $\mu > 0$ *тогда и только тогда, когда каждая из функций* $a_i(t)$, $i = \overline{0,\theta}$, *непрерывно дифференцируема на* T.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как свойство непрерывной дифференцируемости функций сохраняется при умножении их на ненулевую константу.

Необходимость. Зададим $\theta + 1$ различных положительных действительных чисел μ_0, μ_1, $\ldots$, μ_θ и, используя обозначение $\xi_j = 1/\mu_j$, запишем, исходя из формулы (7), равенства

$$f(t,\mu_j) = \sum_{i=0}^{\theta} \frac{1}{\mu_j^i} a_i(t) = \sum_{i=0}^{\theta} \xi_j^i a_i(t), \quad t \in T, \quad j = \overline{0,\theta},$$

которые можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f(t,\mu_0) \\ f(t,\mu_1) \\ \ldots \\ f(t,\mu_\theta) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \ldots \\ a_\theta(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $(\theta+1)\times(\theta+1)$-матрица V является невырожденной матрицей Вандермонда [26, с. 43, 44]

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \ldots & \xi_0^\theta \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \xi_\theta & \xi_\theta^2 & \ldots & \xi_\theta^\theta \end{pmatrix}.$$

Значит, существует обратная матрица V^{-1} и справедливо равенство

$$V^{-1} \begin{pmatrix} f(t,\mu_0) \\ f(t,\mu_1) \\ \ldots \\ f(t,\mu_\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \ldots \\ a_\theta(t) \end{pmatrix},$$

из которого следует непрерывная дифференцируемость на T функций $a_i(t)$, $i = \overline{0,\theta}$. Лемма доказана.

Из определения квазипроизводных (1) относительно матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$ для функции $f(t,\mu)$ вида (7) следует представление

$$\overset{k}{_P} f(t,\mu) = \sum_{j=0}^{\theta} \frac{\overset{k}{_P} a_j(t)}{\mu^j}, \quad k = \overline{0,m},$$

с учётом которого из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Функция* $f(t,\mu)$ *вида (7) имеет при любом* $\mu > 0$ *непрерывную квазипроизводную порядка* k, $k \leqslant m$, *относительно матрицы* P *тогда и только тогда, когда каждая из функций* $a_j(t)$, $j = \overline{0,\theta}$, *имеет непрерывную квазипроизводную порядка* k *относительно* P.

Используя лемму 2.1 из [8], лемму 1 и следствие 1, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для независящей от параметра* μ *матрицы* $P \in \mathcal{U}_m(T)$ *система* (A_μ, c) *имеет* P*-класс* $n-1$ *при каждом* $\mu \in (0,\mu^0]$ *тогда и только тогда, когда* n*-вектор-функции* $s_k^j(t)$, $k = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,k}$, *непрерывно дифференцируемы на* T. *При этом для функций* $s_k(t,\mu)$ *справедливо представление в виде*

$$s_k(t,\mu) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\mu^j} s_k^j(t).$$

Следствие 2. *Любое семейство* $\{A^0, A^1, c\}_\mu$, $\mu > 0$, *имеет имеет* P*-класс* n *тогда и только тогда, когда верны предположения теоремы 1.*

3. Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость. Пусть для заданной матрицы P из множества $\mathcal{U}_{n-1}(T)$ и фиксированного $\mu \in (0, \mu^0]$ система $(A_\mu, c) \in \{P, n-1\}$. Тогда на множестве $\mathcal{V}_\mu$ выходных функций системы (A_μ, c) правила (1) задают оператор, который каждой функции $v(\,\cdot\,, \mu, z_0) \in \mathcal{V}_\mu$ ставит в соответствие n-вектор-строку

$$({}_P^0 v(t, \mu, z_0), {}_P^1 v(t, \mu, z_0), \ldots, {}_P^{n-1} v(t, \mu, z_0)), \quad t \in T. \tag{8}$$

В соответствии с соотношением для выхода системы (4) любая функция $v(\,\cdot\,, \mu, z_0) \in \mathcal{V}_\mu$ является образом некоторого процесса $z(t, \mu, z_0)$, $t \in T$, поэтому композиция отображений (1) и (4) определяет линейное отображение из множества процессов $Z(\mu) = \{(z(t, \mu, z_0), t \in T)$, $z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ во множество n-векторов $V_P(\mu) = \{(V_P(t, \mu, z_0), t \in T),\ z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ квазипроизводных выходных функций и при каждом $t \in T$ задаёт отображение из множества $\{z(t, \mu, z_0), z_0 \in \in \mathbb{R}^n\}$ векторов состояния во множество $\{V_P(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}$ векторов квазипроизводных выходных функций в точке $t \in T$.

Следуя работе [6], введём определение P-равномерной наблюдаемости ЛНСВС (2), (3).

Определение 2. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ *система (2), (3) класса* $\{P, n-1\}$ называется *P-равномерно наблюдаемой на T*, если для каждого $t \in T$ отображение

$$\{z(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\} \to \{V_P(t, \mu, z_0), z_0 \in \mathbb{R}^n\}, \tag{9}$$

задаваемое системой (4) и правилами (1), является инъекцией.

Семейство систем $\{A^0, A^1, c\}_{\mu^0} \in \{P, n-1\}$ называется *P-равномерно наблюдаемым на* T, если любая система семейства P-равномерно наблюдаема на T.

P-равномерная наблюдаемость системы (A_μ, c) при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ означает, что в каждый момент времени $t \in T$ по известному μ и известным в этот момент времени выходной функции $v(t)$ и её последовательным квазипроизводным ${}_P^k v(t)$, $k = \overline{0, n-1}$, состояние $z(t, \mu)$ системы (2), (3) можно определить однозначно.

P-равномерная наблюдаемость семейства систем $(A^0, A^1, c)_{\mu^0}$ означает, что такое восстановление состояния возможно при любом $\mu \in (0, \mu^0]$. В силу линейности отображения из определения 2 это равносильно тому, что при любом $z_0 \in \mathbb{R}^n$ μ-параметрическому семейству векторов квазипроизводных $\mathbf{V}_P \equiv \{(V_P(t, \mu, z_0), t \in T),\ \mu \in (0, \mu^0]\}$ однозначно соответствует процесс $z(t, \mu)$ как функция от (t, μ) на $T \times (0, \mu^0]$, т.е. при любом $\mu \in (0, \mu^0]$ совпадающим вектор-функциям $(V_P(t, \mu), t)$, $t \in T$, соответствуют совпадающие процессы $z(t, \mu)$, $t \in T$.

Приведём пример, который показывает зависимость инъективности отображения (9) от параметра $\mu > 0$. Для этого рассмотрим систему (2), (3) второго порядка с матрицами

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.01\mu^{-1} & -\mu^{-1} \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t & t \end{pmatrix}, \quad n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1,$$

для случая дифференцируемых выходов (т.е. квазидифференцируемых по матрице $P = E_2$).

Несложно показать, что для начальных условий $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ решение данной системы имеет вид

$$x(t, \mu, x_0, y_0) = e^t x_0, \quad y(t, \mu, x_0, y_0) = 1.01 x_0 (1 + \mu)^{-1} (e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0,$$

а соответствующая выходная функция и её первая производная равны

$$v(t, \mu, x_0, y_0) = t(e^t x_0 + 1.01 x_0 (1 + \mu)^{-1} (e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0),$$

$$\begin{aligned} \dot v(t, \mu, x_0, y_0) = e^t x_0 + 1.01 x_0 (1 + \mu)^{-1} (e^{-t/\mu} - e^t) + e^{-t/\mu} y_0 + \\ + t(e^t x_0 - 1.01 x_0 (1 + \mu)^{-1} (\mu^{-1} e^{-t/\mu} + e^t) - \mu^{-1} e^{-t/\mu} y_0). \end{aligned}$$

При $t=0$ и любом $\mu>0$ начальные состояния $(x_0^1, y_0^1)=(0,1)$ и $(x_0^2, y_0^2)=(1,0)$ неразличимы по информации (8), так как $v(0,\mu,0,1)=v(0,\mu,1,0)=0$, $\dot v(0,\mu,0,1)=\dot v(0,\mu,1,0)=1$.

Если $\mu=0.01$, то для начальных состояний вида $(x_0^3, y_0^3)=(-a,a)$ и $(x_0^4, y_0^4)=(-b,b)$, $a\neq b$, текущие состояния $z(t,0.01,-a,a)$ и $z(t,0.01,-b,b)$ при любом $t\in T$ неразличимы, так как $v(t,0.01,-a,a)=v(t,0.01,-b,b)\equiv 0$, $t\in T$. Для $t\neq 0$ и $\mu\neq 0.01$ отображение (9) инъективно.

Далее найдём условия на матрицы системы (2), (3), при выполнении которых она P-равномерно наблюдаема для всех достаточно малых значений $\mu>0$.

Несложно показать, что для системы $(A_\mu, c)\in\{P, n-1\}$ справедливы соотношения

$$s_j(t,\mu)z(t,\mu)={}^{\,j}_{P}v(t,\mu),\quad j=\overline{0,n-1},$$

которые с учётом обозначений

$$S_P(t,\mu)=\begin{pmatrix} s_0(t,\mu)\\ s_1(t,\mu)\\ \dots\\ s_{n-1}(t,\mu)\end{pmatrix}\tag{10}$$

приводят к системе уравнений $S_P(t,\mu)z(t,\mu)=V_P(t,\mu,z_0)$ относительно вектора состояния $z(t,\mu)$, $t\in T$, явным образом задающей отображение из определения 2.

Очевидно, что для каждой матрицы $P\in\mathcal{P}_{n-1}(A_\mu,c)$ можно определить матрицу наблюдаемости $S_P(t,\mu)$ по формулам (6), (10). Из леммы 2.5 [8, с. 54] следует, что при каждом $\mu>0$ и каждом $t\in T$ все матрицы наблюдаемости $S_P(t,\mu)$, $P\in\mathcal{P}_{n-1}(A_\mu,c)$ одновременно либо вырождены, либо невырождены. Инъективность отображения (9) в определении 2 определяется невырожденостью матрицы наблюдаемости $S_P(t,\mu)$ при $t\in T$ и не зависит от выбора матрицы $P\in\mathcal{P}_{n-1}(A_\mu,c)$.

Применив к системе (4) при фиксированном $\mu>0$ критерий P-равномерной наблюдаемости [8, с. 38], получим утверждение.

Теорема 2. *Система (2), (3) класса $\{P,n-1\}$ P-равномерно наблюдаема на T при фиксированном $\mu>0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} S_P(t,\mu)=n$ при каждом $t\in T$.*

Для линейных стационарных СВС можно показать, что если её матрица наблюдаемости является матрицей полного ранга хотя бы при одном $\mu>0$, то она является матрицей полного ранга при всех достаточно малых $\mu>0$. Для линейных нестационарных СВС это не так, т.е. существуют линейные нестационарные СВС, для которых матрица наблюдаемости $S_P(t,\mu)$ является матрицей полного ранга при некотором $\mu^*>0$, но не является матрицей полного ранга при всех достаточно малых $\mu>0$.

Продемонстрируем этот факт на примере системы (2), (3) с параметрами

$$A(t,\mu)=\begin{pmatrix}-10 & -0.2\\ 0 & -1/\mu\end{pmatrix},\quad c(t)=\begin{pmatrix}-1 & t\end{pmatrix},\quad n_1=n_2=1,\quad t\in T=[0,2].$$

Для этой системы классическая матрица наблюдаемости имеет вид

$$S(t,\mu)=\begin{pmatrix}-1 & t\\ 10 & 1.2-t/\mu\end{pmatrix},$$

а её определитель $\det S(t,\mu)=\ -1.2+t/\mu-10t$. Тогда при $\mu_1=0.1$ $\det S(t,\mu_1)=-1.2\neq 0$ для всех $t\in T$. Однако для $\mu=t(1.2+10t)^{-1}$, где $t\in T$, имеем $\det S(t,\mu)=0$. Поэтому очевидно, что при всех $\mu\in(0,2/21.2]$ в точках $t=1.2\mu(1-10\mu)^{-1}\in T$ определитель $\det S(t,\mu)=0$.

Следствие 3. *Существуют ЛНСВС (2), (3) класса $\{P,n-1\}$, которые P-равномерно наблюдаемы на отрезке T при некотором фиксированном $\mu^*>0$, но при этом любое семейство $\{A^0,A^1,c\}_\mu$, $\mu>0$, не является P-равномерно наблюдаемым на T.*

4. Декомпозиция системы (2), (3) и описание её подсистем. С системой (2), (3) связаны [14] независящие от параметра μ вырожденная система (ВС) и система пограничного слоя (СПС), которые формально получаются из СВС, если рассмотреть её отдельно в "быстрой" и "медленной" временных шкалах при $\mu = 0$.

Предположим, что $\det A_4(t) \neq 0,\ t \in T$. Тогда ВС (медленная подсистема) имеет вид

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = A_s(t)\overline{x}(t), \quad \overline{x}(t_0) = x_0, \quad v_s(t) = c_s(t)\overline{x}(t), \quad t \in T,$$

$$A_s(t) \equiv A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad c_s(t) \equiv c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \tag{11}$$

и является линейной нестационарной n_1-мерной системой. Отождествим её с парой (A_s, c_s).

СПС (или "быстрая" подсистема) для системы (2), (3) записывается следующим образом:

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau), \quad v_f(\tau) = c_2(t_0)\tilde{y}(\tau), \quad \tau = \frac{t-t_0}{\mu} \in T_\mu \equiv \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \tag{12}$$

$$\tilde{y}(\tau) = y(t_0 + \mu\tau) - A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \equiv y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0.$$

Она является линейной стационарной n_2-мерной системой, которую отождествим с парой матриц $(A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Наряду со стационарной СПС (12), введём t-семейство $(A_4, c_2)(t)$ быстрых подсистем вида (12) с матрицами $A_4(t)$, $c_2(t)$, где $t \in T$ рассматривается как параметр семейства стационарных систем (по терминологии А.Н. Тихонова [27] – *присоединённая система*).

Заметим, что ВС (11), СПС (12) и t-семейство быстрых подсистем определяются сразу для всего семейства $(A^0, A^1, c)_{\mu^0}$ при любом $\mu^0 > 0$.

Обозначим через $\lambda(A(t))$ корни характеристического уравнения матрицы $A(t)$, а символ $O(\mu)$ будем использовать для описания бесконечно малых величин порядка малости μ.

Следующее утверждение, доказательство которого следует из работ [14, 28], позволяет установить связь между исходной системой (2), (3) и системами (11), (12).

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\lambda(A_4(t)) \leqslant -\alpha < 0$ *при всех* $t \in T$ *и матричные функции* $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, *непрерывно дифференцируемы на* T. *Тогда существует невырожденное линейное нестационарное преобразование фазовых переменных*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K(t,\mu)\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

с матрицей $K(t,\mu)$ *следующей структуры:*

$$K(t,\mu) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu H(t,\mu) \\ -L(t,\mu) & E_{n_2} - \mu L(t,\mu)H(t,\mu) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\det K(t,\mu) \neq 0$ *для любых* $\mu > 0$ *и* $t \in T$, *которое преобразует систему (2), (3) в систему с разделёнными переменными*

$$\dot{\xi}(t) = A_\xi(t,\mu)\xi(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\mu\dot{\eta}(t) = A_\eta(t,\mu)\eta(t), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T,$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} c_\xi(t,\mu) & c_\eta(t,\mu) \end{pmatrix}, \quad t \in T. \tag{14}$$

При этом матричные функции $L(t,\mu)$, $H(t,\mu)$ *в формуле (13) являются непрерывно дифференцируемыми на* T *с ограниченными производными и справедливы представления*

$$L(t,\mu) = L_0(t) + \mu R_L(t,\mu), \quad L_0(t) = A_4^{-1}(t)A_3(t),$$

$$H(t,\mu) = H_0(t) + \mu R_H(t,\mu), \quad H_0(t) = A_2(t)A_4^{-1}(t). \tag{15}$$

Матричные функции $R_L(t,\mu)$, $R_H(t,\mu)$ *в (15) ограничены на* T, *а для матриц системы (14) имеет место равномерная по* t *асимптотика с точностью порядка* μ:

$$A_\xi(t,\mu) \equiv A_1(t) - A_2(t)L(t,\mu) = A_s(t) + \mu A_2 R_L(t,\mu) = A_s(t) + O(\mu),$$

$$A_\eta(t,\mu) \equiv A_4(t) + \mu L(t,\mu)A_2(t) = A_4(t) + O(\mu),$$

$$c_\xi(t,\mu) \equiv c_1(t) - c_2(t)L(t,\mu) = c_s(t) - \mu c_2 R_L(t,\mu) = c_s(t) + O(\mu),$$

$$c_\eta(t,\mu) \equiv c_2(t) + \mu c_1(t)H(t,\mu) - \mu c_2(t)L(t,\mu)H(t,\mu) = c_2(t) + O(\mu). \tag{16}$$

Доказательство. Условия данной теоремы гарантируют выполнение условий теоремы 3.1 из работы [14]. Поэтому существует преобразование $K(t,\mu)$ вида (13), где $L(t)$, $H(t)$ – ограниченные непрерывно дифференцируемые матрицы с ограниченными на T производными. Кроме того, матричные функции $A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $A_2(t)A_4^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T. Поэтому существуют и ограничены производные $\dot{L}_0(t)$, $\dot{H}_0(t)$. Следовательно, матричные функции $R_L(t,\mu)$, $R_H(t,\mu)$ ограничены на T и справедливы аппроксимации [14, с. 212]

$$L(t,\mu) = L_0(t) + O(\mu), \quad H(t,\mu) = H_0(t) + O(\mu). \tag{17}$$

Из формул (17), (15) и (11) вытекает справедливость представлений (16).

Следствие 4. *Матричные функции* $A_\xi(t,\mu)$, $A_\eta(t,\mu)$, $c_\xi(t,\mu)$, $c_\eta(t,\mu)$ *системы (14) являются* $O(\mu)$*-возмущениями матриц вырожденной системы* (A_s,c_s) *(11) и* t*-семейства быстрых подсистем* $(A_4,c_2)(t)$, *связанных с (12).*

5. Класс $\{P,m\}$ для подсистем ЛНСВС. Пусть задана нижнетреугольная матрица $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, а матрица $\bar{P}$ есть её верхний левый блок размерности $n_1 \times n_1$. Заметим, что $\bar{P} \in \mathcal{U}_{n_1-1}(T)$. Для вырожденной системы (11) понятие класса $\{P,m\}$ вводится, как и в [8]. Так как система пограничного слоя и любая система из t-семейства быстрых подсистем стационарны, то они являются системами класса $\{\tilde{P},m\}$ при любом целом неотрицательном m и любой матрице $\tilde{P} \in \mathcal{U}_m(T)$.

Лемма 2. *Если* $(A_\mu,c) \in \{P,n-1\}$ *при любом* $\mu > 0$, *то* $(A_s,c_s) \in \{P,n-1\}$ *и* $(A_s,c_s) \in \in \{\bar{P},n_1-1\}$, *где* $\bar{P}$ *образует верхний левый блок матрицы* P.

Доказательство. Из формул (11)–(17) следует, что для выходной функции (3) справедливо представление

$$v(t,\mu,z_0) = c_s(t)x_s(t) + c_2(t)\tilde{y}_f(\tau) + O(\mu). \tag{18}$$

Так как для любого $t \in T$ система $(A_4(t),c_2(t))$ является системой класса $\{\tilde{P},m\}$ при любой матрице $\tilde{P} \in \mathcal{U}_m(T)$ и любом целом неотрицательном m, то выход быстрой подсистемы $v_f(\tau) = c_2(t)\tilde{y}_f(\tau)$ имеет непрерывные квазипроизводные любого порядка относительно матрицы P. Тогда из представления выхода $v(t,\mu,z_0)$ в виде суммы (18) и следствия 1 вытекает принадлежность системы (A_s,c_s) классу $\{P,n-1\}$. Очевидно, что $C_P^{n-1}(T) \subset C_{\bar{P}}^{n_1-1}(T)$ и из $(A_s,c_s) \in \{P,n-1\}$ следует $(A_s,c_s) \in \{\bar{P},n_1-1\}$, что и завершает доказательство леммы.

Однако из принадлежности $(A_s,c_s) \in (\bar{P},n_1-1)$ в общем случае не следует существования матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, для которой матрица $\bar{P}$ образует её верхний левый блок и при этом $(A_\mu,c) \in \{P,n-1\}$ хотя бы для одного $\mu > 0$. Продемонстрируем это на примере системы (2), (3) с матрицами

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \gamma(t)/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t)+1 & -1 \end{pmatrix}, \quad n_1 = n_2 = m = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 2,$$

где $\gamma(t)$ – непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция на T. Легко показать, что $A_s = a_1 + \gamma(t)a_2$, $c_s = 1$ и ВС принадлежит классу $(\bar{P},0)$ при $\bar{P} = E_1$. Вместе с тем данная система не принадлежит классу $(P,1)$ ни при какой матрице P с верхним левым блоком $\bar{P}$, ни при каком $\mu > 0$, так как $c(t)$ не дифференцируема.

6. Связь матриц наблюдаемости ЛНСВС и её подсистем.

Определение 3. Вырожденная система (11) класса $\{\bar{P}, n_1-1\}$ называется *$\bar{P}$-равномерно наблюдаемой* на T, если для каждого $t\in T$ и любого $x_0\in\mathbb{R}^{n_1}$ отображение
$$\bar{x}(t)\to({}^0_{\bar{P}}v_s(t), {}^1_{\bar{P}}v_s(t), \ldots, {}^{n_1-1}_{\bar{P}}v_s(t)), \quad v_s(t)=v_s(t,x_0),$$
задаваемое системой (11) и правилами (1), инъективно.

Пусть $(A_s, c_s)\in\{\bar{P}, n_1-1\}$. Определим $n_1\times n_1$-матрицу наблюдаемости вырожденной системы (A_s, c_s):
$$\bar{S}_{\bar{P}}(t)=\begin{pmatrix}\bar{s}_0(t)\\ \bar{s}_1(t)\\ \ldots\\ \bar{s}_{n_1-1}(t)\end{pmatrix}, \quad t\in T, \tag{19}$$
где n_1-вектор-строки $\bar{s}_j(t)$, $j=1,2,\ldots,$ определяются по формулам
$$\bar{s}_0(t)=\bar{p}_{00}(t)c_s(t), \quad \bar{s}_j(t)=\bar{p}_{jj}(t)(\bar{s}_{j-1}(t)A_s(t)+\dot{\bar{s}}_{j-1}(t))+\sum_{i=0}^{j-1}\bar{p}_{ji}(t)\bar{s}_i(t). \tag{20}$$

Применяя к линейной нестационарной системе (11) условия из [8], убеждаемся, что справедлива

Теорема 4. *Вырожденная система класса $\{\bar{P}, n_1-1\}$ $\bar{P}$-равномерно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\bar{S}_{\bar{P}}(t)=n_1$ для любого $t\in T$.*

Пусть задана некоторая матрица $\tilde{P}\in\mathcal{U}_{n_2-1}(T)$.

Определение 4. Система пограничного слоя (12) называется *$\tilde{P}$-равномерно наблюдаемой на T_μ*, если для каждого $\tau\in T_\mu$ и любого $\tilde{y}_0\in\mathbb{R}^{n_2}$ отображение
$$\tilde{y}(\tau)\to({}^0_{\tilde{P}}v_f(\tau), {}^1_{\tilde{P}}v_f(\tau), \ldots, {}^{n_2-1}_{\tilde{P}}v_f(\tau)), \quad v_f(\tau)=v_f(\tau,\tilde{y}_0),$$
задаваемое системой (12) и правилами (1), инъективно.

Будем говорить, что *t-семейство быстрых подсистем* $(A_4, c_2)(t)$ *$\tilde{P}$-равномерно наблюдаемо на T_μ*, если каждая подсистема из этого семейства $\tilde{P}$-равномерно наблюдаема.

Так как система (12) является стационарной системой, то для неё условия $\tilde{P}$-равномерной, равномерной, полной и дифференциальной наблюдаемости совпадают. Поэтому справедлива

Лемма 3. *При любой матрице $\tilde{P}\in\mathcal{U}_{n_2-1}(T)$ t-семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ $\tilde{P}$-равномерно наблюдаемо на T_μ тогда и только тогда, когда каждая система из этого семейства полностью наблюдаема.*

Наблюдаемость t-семейства быстрых подсистем соответствует понятию “сильной наблюдаемости замороженного объекта” в терминологии статьи [29].

Определим $n_2\times n_2$-матрицу наблюдаемости семейства $(A_4, c_2)(t)$, $t\in T$:
$$\tilde{S}(t)=\begin{pmatrix}\tilde{s}_0(t)\\ \tilde{s}_1(t)\\ \ldots\\ \tilde{s}_{n_2-1}(t)\end{pmatrix}, \tag{21}$$
где n_2-вектор-строки $\tilde{s}_0(t)$, $\tilde{s}_1(t)$, $\ldots$ определяются по формулам
$$\tilde{s}_j(t)=\tilde{s}_{j-1}(t)A_4(t), \quad \tilde{s}_0(t)=c_2(t). \tag{22}$$
Заметим, что $\tilde{S}(t_0)$ совпадает с матрицей наблюдаемости стационарной СПС (12).

Записывая для системы (12) условия из [8], убеждаемся, что справедлива

Теорема 5. *При любой матрице $\tilde{P}\in\mathcal{U}_{n_2}(T)$ система пограничного слоя (12) $\tilde{P}$-равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\tilde{S}(t_0)=n_2$, а t-семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ $\tilde{P}$-равномерно наблюдаемо тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\tilde{S}(t)=n_2$ для любого $t\in T$.*

7. Условия P-равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Пусть задана нижнетреугольная матрица $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, а матрица $\bar{P}$ есть её верхний левый блок размерности $n_1 \times n_1$.

Теорема 6. *Пусть матричные функции $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, непрерывно дифференцируемы на отрезке T и $\operatorname{Re}\lambda(A_4(t)) \leqslant -\alpha < 0$ для любого $t \in T$. Если $n \geqslant 2$, то считаем матричные функции $s_j^m(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$, непрерывно дифференцируемыми на T. Если вырожденная система (A_s, c_s) $\bar{P}$-равномерно наблюдаема на T и t-семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ полностью наблюдаемо на T, то найдётся такое $\hat{\mu} \in (0, \mu^0]$, что семейство $\{A^0, A^1, c\}_{\hat{\mu}}$ систем (2), (3) P-равномерно наблюдаемо на T.*

Доказательство. Из условий теоремы 6 следует, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Из теоремы 3 вытекает, что существует невырожденное преобразование $K(t,\mu)$, которое преобразует систему (2), (3) в систему (14). Свойство P-равномерной наблюдаемости системы (2), (3) инвариантно относительно преобразования $K(t,\mu)$ [8, с. 66]. Поэтому система (2), (3) и система (14) одновременно являются P-равномерно наблюдаемыми или нет. Из теоремы 1 следует, что система (A_μ, c) имеет класс $\{P, n-1\}$ для любого $\mu > 0$. Так как [8, с. 44, следствие 2.1] для любого $m > 0$ множество систем класса $\{P, m\}$ инвариантно относительно преобразования $K(t,\mu)$, то система (14) также является системой класса $\{P, n-1\}$ при любом $\mu > 0$. Тогда для неё определена матрица наблюдаемости

$$S_{\xi\eta}(t,\mu) = \begin{pmatrix} h_0(t,\mu) \\ h_1(t,\mu) \\ \dots \\ h_{n-1}(t,\mu) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

составленная из n-вектор-строк $h_j(t,\mu)$, $j = \overline{0, n-1}$, определённых по формулам

$$h_j(t,\mu) = p_{jj}(t)(h_{j-1}(t,\mu)A_{\xi\eta}(t,\mu) + \dot{h}_{j-1}(t,\mu)) + \sum_{i=0}^{j-1} p_{ji}(t)h_i(t,\mu), \quad h_0(t,\mu) = p_{00}(t)c_{\xi\eta}(t,\mu).$$

В силу диагонального вида матрицы $A_{\xi\eta}(t,\mu)$ матрица наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ системы (14) имеет блочную структуру

$$S_{\xi\eta}(t,\mu) = (S_\xi(t,\mu) \,\vdots\, S_\eta(t,\mu)), \tag{23}$$

где

$$S_\xi(t,\mu) = \begin{pmatrix} s_{\xi 0}(t,\mu) \\ s_{\xi 1}(t,\mu) \\ \dots \\ s_{\xi n-1}(t,\mu) \end{pmatrix}, \quad S_\eta(t,\mu) = \begin{pmatrix} s_{\eta 0}(t,\mu) \\ s_{\eta 1}(t,\mu) \\ \dots \\ s_{\eta n-1}(t,\mu) \end{pmatrix},$$

$$s_{\xi k}(t,\mu) = p_{kk}(t)(s_{\xi,k-1}(t,\mu)A_\xi(t,\mu) + \dot{s}_{\xi,k-1}(t,\mu)) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_{\xi i}(t,\mu),$$

$$s_{\eta k}(t,\mu) = p_{kk}(t)\left(s_{\eta,k-1}(t,\mu)\frac{A_\eta(t,\mu)}{\mu} + \dot{s}_{\eta,k-1}(t,\mu)\right) + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)s_{\eta i}(t,\mu), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$s_{\xi 0}(t,\mu) = p_{00}(t)c_\xi(t,\mu), \quad s_{\eta 0}(t,\mu) = p_{00}(t)c_\eta(t,\mu). \tag{24}$$

Докажем, что в условиях теоремы 6 для матрицы наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ системы (14) справедливо представление

$$S_{\xi\eta}(t,\mu) = \left(\begin{array}{c|c} \bar{s}_0(t) + O(\mu) & p_{00}(t)\tilde{s}_0(t) + O(\mu) \\ \bar{s}_1(t) + O(\mu) & \dfrac{1}{\mu}(p_{11}(t)p_{00}(t)\tilde{s}_1(t) + O(\mu)) \\ \dots & \dots \\ \bar{s}_{n-1}(t) + O(\mu) & \dfrac{1}{\mu^{n-1}}\left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} p_{n-1-j,n-1-j}(t)\tilde{s}_{n-1}(t) + O(\mu)\right) \end{array}\right), \tag{25}$$

где $\bar{s}_j(t)$, $\tilde{s}_j(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, вычисляются по формулам (20), (22).

Отметим, во-первых, что согласно лемме 2 функции $\bar{s}_j(t)$, $j=\overline{0,n-1}$, определены.

Методом математической индукции докажем формулы

$$s_{\xi j}(t,\mu)=\sum_{m=0}^{j+1}\mu^m f_j^m(t,\mu),\quad s_{\eta j}(t,\mu)=\frac{1}{\mu^j}\biggl(\sum_{m=0}^{j+1}\mu^m g_j^m(t,\mu)\biggr),\quad j=\overline{0,n-1},\tag{26}$$

где ограниченные на T функции $f_j^m(t,\mu)$, $g_j^m(t,\mu)$, $j=0,1,\ldots,$ определены рекуррентными соотношениями:

$$f_j^m(t,\mu)=p_{jj}(t)(f_{j-1}^m(t,\mu)A_s(t)+f_{j-1}^{m-1}(t,\mu)A_2(t)R_L(t,\mu)+\dot f_{j-1}^m(t,\mu))+\sum_{i=m}^{j-1}p_{ji}(t)f_{i-1}^m(t,\mu),\tag{27}$$

$$f_0^0(t,\mu)=p_{00}(t)c_s(t),\quad f_0^1(t,\mu)=-p_{00}(t)c_2(t)R_L(t,\mu),\quad f_j^m(t,\mu)=0,\quad m<0\ \text{ или }\ m>j+1,$$

$$g_j^m(t,\mu)=p_{jj}(t)(g_{j-1}^m(t,\mu)A_4(t)+g_{j-1}^{m-1}(t,\mu)L(t,\mu)A_2(t)+\dot g_{j-1}^{m-1}(t,\mu))+\sum_{i=m}^{j-1}p_{ji}(t)g_{i-1}^m(t,\mu),\tag{28}$$

$$g_0^0(t,\mu)=p_{00}(t)c_2(t),\quad g_0^1(t,\mu)=p_{00}(t)(c_1(t)H(t,\mu)+c_2L(t,\mu)H(t,\mu)),$$
$$g_j^m(t,\mu)=0,\quad m<0\ \text{ или }\ m>j+1.$$

Справедливость формул (26) для $j=0$ следует из (24), (16), (27), (28). Пусть (26) верны для $j\leqslant k-1$. Поскольку $(A_{\xi\eta}(t,\mu),c_{\xi\eta})\in\{P,n-1\}$ при любом $\mu>0$, то $h_j(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $j=\overline{0,n-2}$, откуда в силу (23) следует $s_{\xi j}(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $s_{\eta j}(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $j=\overline{0,n-2}$, для любых $\mu>0$. Тогда согласно лемме 1 имеем $f_j^m(\,\cdot\,,\mu)\in C^1(T,\mathbb{R})$, $j=\overline{0,k-1}$.

Докажем первую формулу из (26) для $j=k$. Действительно, из (24) имеем

$$s_{\xi k}(t,\mu)=p_{kk}(t)(s_{\xi,k-1}(t,\mu)A_\xi(t,\mu)+\dot s_{\xi,k-1}(t,\mu))+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_{\xi,i}(t,\mu)=$$

$$=p_{kk}(t)\biggl(\sum_{m=0}^{k}\mu^m f_{k-1}^m(t,\mu)(A_s(t)+\mu A_2(t)R_L(t,\mu))+\sum_{m=0}^{k}\mu^m\dot f_{k-1}^m(t,\mu)\biggr)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)\sum_{m=0}^{i}\mu^m f_{i-1}^m(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(\sum_{m=0}^{k}\mu^m f_{k-1}^m(t,\mu)A_s(t)+\sum_{m=1}^{k+1}\mu^m f_{k-1}^{m-1}(t,\mu)A_2(t)R_L(t,\mu)+$$

$$+\sum_{m=0}^{k}\mu^m\dot f_{j-1}^m(t,\mu)\biggr)+\sum_{m=0}^{k-1}\mu^m\sum_{i=m}^{k-1}p_{ki}(t)f_{i-1}^m(t,\mu)=\sum_{m=0}^{k}\mu^m f_k^m(t,\mu).$$

Аналогично доказывается вторая формула из (26). Пусть она верна для $j\leqslant k-1$. Докажем её для $j=k$. Действительно, из (24) имеем

$$s_{\eta k}(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(s_{\eta,k-1}(t,\mu)\frac{1}{\mu}A_\eta(t,\mu)+\dot s_{\eta,k-1}(t,\mu)\biggr)+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)s_{\eta,i}(t,\mu)=$$

$$=p_{kk}(t)\biggl(\frac{1}{\mu^k}\sum_{m=0}^{k}\mu^m g_{j-1}^m(t,\mu)\biggl(A_4(t)+\frac{1}{\mu^{k-1}}L(t,\mu)A_2(t)\biggr)+\sum_{m=0}^{k}\mu^m\dot g_{k-1}^m(t,\mu)\biggr)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}p_{ki}(t)\sum_{m=0}^{i}\mu^m g_{i-1}^m(t,\mu)=p_{kk}(t)\biggl(\frac{1}{\mu^k}\biggl(\sum_{m=0}^{k}\mu^m g_{k-1}^m(t,\mu)A_4(t)+$$

$$+\sum_{m=1}^{k+1}\mu^m g_{k-1}^{m-1}(t,\mu)L(t,\mu)A_2(t)+\sum_{m=0}^{k}\mu^m \dot g_{k-1}^{m}(t,\mu)\Big)\Big)+\sum_{m=0}^{k-1}\mu^m\sum_{i=m}^{k-1}p_{ki}(t)g_{i-1}^m(t,\mu)=$$

$$=\frac{1}{\mu^k}\sum_{m=0}^{k}\mu^m g_k^m(t,\mu).$$

Таким образом, формулы (26) доказаны. Из (26) с учётом (27), (28) для $j=\overline{0,n-1}$ легко получить соотношения

$$s_{\xi j}(t,\mu)=\bar s_j(t)+\mu\sum_{m=0}^{j}\mu^m f_j^{m+1}(t,\mu),\quad s_{\eta j}(t,\mu)=\frac{1}{\mu^j}\Big(c_2(t)A_4^j(t)+\mu\sum_{m=0}^{j}\mu^m g_j^{m+1}(t,\mu)\Big). \quad (29)$$

При выполнении условий теоремы 6 для любого $j=\overline{0,n-1}$ верно $h_j(\,\cdot\,,\mu)\in C(T,\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из леммы 2 имеем $(A_s,c_s)\in\{P,n-1\}$, а значит, определены и ограничены на T векторные функции $\bar s_j(t)$, $j=\overline{0,n-1}$. Поэтому функции $s_{\xi j}(t)-\bar s_j(t)$, $\mu^j s_{\eta j}(t)-c_2(t)A_4^j(t)$ для $j=\overline{0,n-1}$ ограничены на T и из (29) следуют равенства

$$s_{\xi j}(t,\mu)=\bar s_j(t)+O(\mu),\quad s_{\eta j}(t,\mu)=\frac{1}{\mu^j}\Big(\prod_{p=0}^{j}p_{j-p,j-p}(t)c_2(t)A_4^j(t)+O(\mu)\Big),$$

т.е. формулы для матрицы (25) справедливы.

Умножим слева матрицу $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ на невырожденную матрицу

$$M_P=\operatorname{diag}\Big\{E_{n_1},\mu^{n_1}\Big(\prod_{i=0}^{n_1}p_{j-i,j-i}(t)\Big)^{-1},\ldots,\mu^{n_1+n_2-1}\Big(\prod_{i=0}^{n_1+n_2-1}p_{j-i,j-i}(t)\Big)^{-1}\Big\}.$$

В результате получим блочную матрицу вида

$$\bar S_{\xi\eta}(t,\mu)=\left(\begin{array}{c|c}\bar S_{\bar P}(t)+O(\mu) & * \\ \hline O(\mu)* & \tilde S(t)A_4^{n_1}+O(\mu)*\end{array}\right),$$

где $\bar S_{\bar P}(t)$, $\tilde S(t)$ определены в (19), (21), а $*$, $O(\mu)*$ – некоторые матрицы подходящих размерностей, при этом элементы матриц $O(\mu)*$ являются бесконечно малыми величинами порядка малости μ при любом $t\in T$. Ранг матрицы $\bar S_{\xi\eta}(t,\mu)$ равен рангу матрицы $S_{\xi\eta}(t,\mu)$ при всех $t\in T$.

Рассмотрим матрицу

$$S_{sf}(t)=\left(\begin{array}{c|c}\bar S_{\bar P}(t) & * \\ \hline 0 & \tilde S(t)\end{array}\right),$$

которая получается из матрицы $S_{\xi\eta}(t)$ умножением её справа на невырожденную матрицу $\operatorname{diag}\{E_{n_1},(A_4^{n_1})^{-1}\}$ и отбрасыванием членов $O(\mu)$. При выполнении условий теоремы 6 с учётом теоремы 4 верхний левый блок $\bar S_{\bar P}(t)$ полученной матрицы имеет полный ранг по столбцам для любого $t\in T:$ $\operatorname{rank}\bar S_{\bar P}(t)=n_1$. С учётом теоремы 5 нижний правый блок этой матрицы также имеет полный ранг по столбцам $\operatorname{rank}\tilde S(t)=n_2$, $t\in T$. Поскольку оба диагональных блока $\bar S_{\bar P}(t)$ и $\tilde S(t)$ матрицы $S_{sf}(t)$ имеют полный ранг по столбцам, то матрица $S_{sf}(t)$ также имеет полный ранг по столбцам для любых $t\in T$. Действительно, если это не так, то существует n_1+n_2-вектор-столбец $(g_1^{\mathrm T},g_2^{\mathrm T})^{\mathrm T}$, $g_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, $g_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, $\|g_1\|+\|g_2\|\ne 0:$ $S_{sf}(t)(g_1^{\mathrm T},g_2^{\mathrm T})^{\mathrm T}=0$, что равносильно $\bar S_{\bar P}(t)g_1+*g_2=0$, $\tilde S(t)g_2=0$. Из последнего равенства в силу полноты ранга матрицы $\tilde S(t)$ следует $g_2=0$, тогда из первого равенства имеем

$\bar{S}_{\bar{P}}(t)g_1 = 0$, $g_1 \neq 0$, что противоречит полноте ранга $\bar{S}_{\bar{P}}(t)$. Таким образом, $\operatorname{rank} S_{sf}(t) = n$ при всех $t \in T$.

С учётом сохранения полноты ранга при малых аддитивных возмущениях матрицы для достаточно малых $\mu > 0$ справедливо $\operatorname{rank} \bar{S}_{\xi\eta}(t,\mu) = \operatorname{rank} S_{\xi\eta}(t,\mu) = n$ для любого $t \in T$, откуда с учётом связи между матрицами наблюдаемости $S_{\xi\eta}(t,\mu) = S_{A_\mu,c}(t,\mu)K(t,\mu)$ систем (2), (3) и (14) следует $\operatorname{rank} S_{A_\mu,c}(t,\mu) = n$ для любого $t \in T$ для всех достаточно малых $\mu > 0$, что согласно теореме 2 завершает доказательство теоремы 6.

8. Пример. Рассмотрим на отрезке $T = [0,2]$ систему

$$\dot{x}_1(t) = \gamma(t)x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \gamma(t)x_2(t) + (1-\gamma(t))y(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_1(t) + \gamma(t)x_3(t) + y(t),$$

$$\mu\dot{y}(t) = x_1(t) + x_2(t) - y(t) \tag{30}$$

с выходной функцией $v(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + y(t)$.

Здесь вещественная функция $\gamma(t)$, $t \in T$, непрерывно дифференцируема, но её производная $\phi(t) = \dot{\gamma}(t)$ не является дифференцируемой на T, $1-\gamma(t) \neq 0$, $t \in T$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 4$. Матрицы системы наблюдения (30) имеют вид

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 1 & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\gamma(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4(t) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться в том, что для этой системы выполнены условия теоремы 6, но матричная функция

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 & 1-\gamma(t) \\ 1 & 0 & \gamma(t) & 1 \\ \mu^{-1} & \mu^{-1} & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

не является дважды непрерывно дифференцируемой на T. Заметим, что система (30) имеет класс $\{P,3\}$ относительно матрицы

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Вырожденная система для системы (30) записывается следующим образом:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \gamma(t)\bar{x}_1(t), \quad \dot{\bar{x}}_2(t) = (1-\gamma(t))\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t), \quad \dot{\bar{x}}_3(t) = 2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + \gamma(t)\bar{x}_3(t),$$

$$\bar{v}_s(t) = \bar{x}_3(t), \quad t \in T,$$

$$A_s(t) = \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 1-\gamma(t) & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad c_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Она имеет класс $\{\bar{P},2\}$ относительно матрицы

$$\bar{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma(t) & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

с матрицей наблюдаемости

$$\bar{S}_{\bar{P}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1-\gamma(t) & 1-\gamma(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для системы (30) t-семейство быстрых подсистем имеет вид

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{33}$$

Так как $\det \bar{S}_{\bar{P}}(t) = 1-\gamma(t) \neq 0$, $t \in T$, то $\operatorname{rank} \bar{S}_{\bar{P}}(t) = 3 = n_1$, $\operatorname{rank} \tilde{S}(t) = 1 = n_2$, $t \in T$, и согласно теоремам 4, 5 ВС (31) и t-семейство быстрых подсистем (33) $\bar{P}$- и $\tilde{P}$-равномерно наблюдаемы соответственно. Так как выполнены условия теоремы 6, то существует $\hat{\mu} > 0$ такое, что ЛНСВС (30) P-равномерно наблюдаема для всех $\mu \in (0, \hat{\mu}]$ относительно любой матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, для которой матрица $\bar{P}$ (32) есть верхний левый блок размерности 3×3 и для неё выполнены условия теоремы 6.

Применение теоремы 3 к системе (30) даёт $\det S_P(t,\mu) = \mu^{-3}(-1+\gamma(t)) \neq 0$, $t \in T$, что подтверждает вывод о равномерной наблюдаемости системы (30) для $\mu > 0$.

Заключение. Для ЛНСВС доказаны независящие от малого параметра необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости множества выходных функций. На основе полной декомпозиции исходной ЛНСВС относительно действия группы линейных невырожденных преобразований доказаны ранговые независящие от малого параметра и справедливые для всех достаточно малых его значений достаточные условия P-равномерной наблюдаемости ЛНСВС. Условия выражены через матрицы наблюдаемости связанных с ЛНСВС медленной и семейства быстрых подсистем, имеющих размерности меньшие, чем исходная ЛНСВС.

Используемый в данной работе подход, основанный на понятии P-равномерной наблюдаемости [8, с. 38] линейных нестационарных систем и декомпозиции СВС [14, 28], позволяет существенно ослабить известные требования на гладкость коэффициентов при построении наблюдателей состояний [15] и обеспечить их робастность по малому параметру.

Результаты настоящей работы применимы для нахождения преобразований, приводящих ЛНСВС к каноническим формам, решения задач наблюдаемости нестационарных СВС с помощью динамического фильтра, построения композитных управлений типа обратной связи, экспоненциальных оценивателей состояния системы.

Автор выражает благодарность проф. А.И. Астровскому за ценные советы и замечания, сделанные при подготовке этой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ “Конвергенция-2025”, задание 1.2.04).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. I конгресса ИФАК. Т. 2. М., 1961. С. 521–547.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 1971.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
4. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999.
5. *Астровский А.И.* Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Минск, 2007.
6. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 370–379.
7. *Astrovskii A.I., Gaishun I.V.* Observability of linear time-varying systems with quasiderivative coefficients // SIAM J. Control and Optimization. 2019. V. 57. № 3. P. 1710–1729.
8. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск, 2013.
9. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1567–1576.

10. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 3–13.
11. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 1999. Вып. 1. № 16. С. 3–105.
12. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
13. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущённых динамических систем. Минск, 2000.
14. *Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. New York, 1999.
15. *O'Reilly J.* Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems // Int. J. of Control. 1979. V. 30. № 5. P. 745–756.
16. *Копейкина Т.Б.* Наблюдаемость линейных стационарных сингулярно возмущённых систем в пространстве состояний // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. № 6. С. 22–32.
17. *Копейкина Т.Б.* Относительная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущённых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 24–30.
18. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* К теории наблюдаемости линейных сингулярно возмущённых систем // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 22–27.
19. *Glizer V.Y.* Observability of singularly perturbed linear time-dependent differential systems with small delay // J. of Dynamical and Control Systems. 2004. № 10. P. 329–363.
20. *Цехан О.Б.* Условия полной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущённых систем второго порядка с запаздыванием // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. 2014. № 1 (170). С. 53–64.
21. *Цехан О.Б.* Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущённых систем с запаздыванием // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 138–148.
22. *Tsekhan O., Pawluszewicz E.* Observability of singularly perturbed linear time-varying systems on time scales // 26th Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). 2022. P. 116–121.
23. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
24. *Гайшун, И.В., Горячкин В.В.* Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.
25. *Kopeikina T.B.* Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems // Systems Sci. 1995. V. 21. № 1. P. 17–36.
26. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
27. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
28. *Chang K.* Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. 1972. V. 3. № 3. P. 520–526.
29. *Зубер И.Е.* Синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для линейных нестационарных систем с одним выходом // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 5. С. 42–49.

Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы

Поступила в редакцию 29.04.2023 г.
После доработки 06.07.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1139–1142

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.5

СРАВНЕНИЕ СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

 А. Х. Сташ

Изучены показатели колеблемости дифференциальных систем. Установлено отсутствие зависимости между спектрами показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения, а именно, построена двумерная нелинейная система, спектры показателей колеблемости сужения которой на любую открытую окрестность нуля фазовой плоскости состоят из всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а спектры линейной системы её первого приближения – только из одного элемента.

DOI: 10.31857/S0374064123080125, EDN: IRCYRW

Введение. Для изучения колебательных свойств движения И.Н. Сергеевым были введены сначала *характеристические частоты* [1], а затем и показатели *колеблемости, вращаемости* и *блуждаемости* [2, 3].

Все перечисленные показатели, как и *линейные* (см. [4]), оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определённым на всей положительной полуоси времени. Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [4] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели. В статьях [5, 6] были анонсированы результаты исследования этих показателей по первому приближению.

В настоящей работе изучаются *линейные показатели колеблемости* нелинейной системы и системы её первого приближения. Установлено существование нелинейной системы со счётными спектрами линейных показателей колеблемости, в то время как спектры соответствующей линейной системы её первого приближения состоят ровно из одного неотрицательного числа.

1. Базовые понятия. Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_{\prime}(t,x), \quad A(t) = f'_x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

при условии

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,x) - f_{\prime}(t,x)| = o(x), \quad x \to 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1), через $x_f(\,\cdot\,, x_0)$ – то из них, которое удовлетворяет начальному условию $x_f(0,x_0) = x_0$, а через G_*, G_δ или $G_{\delta,\gamma}$ – множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих соответственно условиям $x_0 \neq 0$, $|x_0| = \delta$ или $\delta < |x_0| < \gamma$.

Сначала дадим основные определения.

Определение 1 [1]. Будем говорить, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция

y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (соответственно неположительные) значения.

Определение 2 [2, 3]. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x_f(\,\cdot\,,x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ через $\nu^\alpha(f,x_0,m,t)$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно обозначим:

– число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\,\cdot\,,x_0),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

– число точек *нестрогой смены знака* скалярного произведения $\langle x_f(\,\cdot\,,x_0),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

– число *нулей* функции $\langle x_f(\,\cdot\,,x_0),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

– число *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) функции $\langle x_f(\,\cdot\,,x_0),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

– число *гиперкорней* функции $\langle x_f(\,\cdot\,,x_0),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$, где в процессе подсчёта этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз, независимо от его фактической кратности.

Определение 3 [2–4]. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x_f(\,\cdot\,,x_0) \in \mathcal{S}_*(f)$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(f,x_0) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f,x_0,m,t) \quad \Big(\check\nu^\alpha_\bullet(f,x_0) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f,x_0,m,t)\Big),$$

$$\hat\nu^\alpha_\circ(f,x_0) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f,x_0,m,t) \quad \Big(\check\nu^\alpha_\circ(f,x_0) \equiv \varliminf_{t\to+\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(f,x_0,m,t)\Big).$$

В случае совпадения какого-либо нижнего показателя с аналогичным верхним будем называть его *точным*, убирая в его обозначении знаки “ ˇ ” и “ ˆ ”. В случае совпадения какого-либо слабого показателя с аналогичным сильным будем называть его *абсолютным*, убирая в его обозначении знаки “ $_\circ$ ” и “ $_\bullet$ ”.

Для каждого показателя колеблемости $\varkappa = \hat\nu^\alpha_\bullet,\check\nu^\alpha_\bullet,\hat\nu^\alpha_\circ,\check\nu^\alpha_\circ$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ введём обозначение $\varkappa(f,M) \equiv \{\varkappa(f,x_0) \mid x_0 \in M\}$.

2. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема. *При $n=2$ и $G=\mathbb{R}^2$ существуют две системы с устойчивым по Ляпунову нулевым решением, первая из которых, линейная вида (2) и служащая системой первого приближения для другой, удовлетворяет соотношениям*

$$\nu^-(f_\prime,G_*) = \nu^\sim(f_\prime,G_*) = \{0\}, \tag{3}$$

$$\nu^0(f_\prime,G_*) = \nu^+(f_\prime,G_*) = \nu^*(f_\prime,G_*) = \{1\}, \tag{4}$$

а вторая система вида (1) – при любом $\varepsilon > 0$ соотношению

$$\varkappa(f,G_{0,\varepsilon}) = [0,1]\bigcap\mathbb{Q}, \quad \varkappa = \nu^-,\nu^\sim,\nu^0,\nu^+,\nu^*. \tag{5}$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *При $n=2$ и $G=\mathbb{R}^2$ для некоторой линейной системы вида (2) с условиями (3), (4) при любых $q\in[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ и $0<\alpha<\beta\leqslant 1$ найдётся возмущённая система*

$$\dot x = A(t)x + B(x,t) \equiv f(t,x), \quad |B(x,t)| \leqslant |x|^2, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

обладающая свойствами

$$\nu^-(f,G_\alpha) = \nu^-(f,G_\beta) = \nu^\sim(f,G_\alpha) = \nu^\sim(f,G_\beta) = \{0\},$$

$$\nu^0(f,G_\alpha) = \nu^0(f,G_\beta) = \nu^+(f,G_\alpha) = \nu^+(f,G_\beta) = \nu^*(f,G_\alpha) = \nu^*(f,G_\beta) = \{1\},$$

$$\nu^-(f,G_{\alpha,\beta}) = \nu^\sim(f,G_{\alpha,\beta}) = \nu^0(f,G_{\alpha,\beta}) = \nu^+(f,G_{\alpha,\beta}) = \nu^*(f,G_{\alpha,\beta}) = \{q\}.$$

Доказательство леммы. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (2), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ в виде

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f_\prime(t,x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2}\cos t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in G_*$ за время t равен

$$\varphi(t, x_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0)) = \frac{\pi}{2}\sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x_{f_\prime}(t_k, x_0) = (-1)^{k-1}x_{f_\prime}(t_1,x_0), \quad t_k \equiv \pi k - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0)$, совершая поворот на угол π, будет ортогонально в одной точке заданному ненулевому вектору. Принимая во внимание, что угол между векторами $x_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0)$ и x_0 заключён в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и функция $\dot{x}_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0)$ обнуляется только в точках t_k, приходим к отсутствию нестрогих смен знака у скалярной функции $\langle x_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0), x_0\rangle$. Следовательно, при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\nu^-(f_\prime, x_0, x_0, t) = \nu^\sim(f_\prime, x_0, x_0, t) = 0$, откуда следует свойство (3). Для любого вектора m, не коллинеарного вектору x_0, функция $\langle x_{f_\prime}(\,\cdot\,,x_0), m\rangle$ не имеет кратных нулей и на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$ длины π имеет один нуль, а значит, выполняется свойство (4).

2. На отрезке $r \in [0,1]$ для выбранных $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ зададим функции

$$\psi_\pm(r) \equiv 1 \pm \frac{r^2(r-\alpha)^2(r-\beta)^2}{(r^2+2)^2} \in (0,2).$$

Для нелинейной периодической системы вида (1) с правой частью $g(t,x) = \psi_-(|x|)f_\prime(t,x)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\varphi(t, x_g(\,\cdot\,,x_0)) = \frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|)\sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|), \frac{\pi}{2}\psi_-(|x_0|)\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

Скалярное произведение решения $x_g(\,\cdot\,,x_0)$, совершающего поворот менее чем на π, и вектора x_0 отлично от нуля. Поэтому для значения $q = 0$ выберем нелинейную систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \alpha \ \text{ или } \ |x| \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_-(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Для нелинейной периодической системы вида (1) с правой частью $h(t,x) = \psi_+(|x|)f_\prime(t,x)$ будем иметь

$$\{\varphi(t, x_h(\,\cdot\,,x_0)) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset \left(-\frac{\pi}{2}\psi_+(|x_0|), \frac{\pi}{2}\psi_+(|x_0|)\right) \supset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_h(\,\cdot\,,x_0)$, совершая поворот не менее чем на π (но менее чем на 2π), будет ортогонально в одной или двух точках наперёд заданному ненулевому вектору. Следовательно, для значения $q = 1$ выберем систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \alpha \ \text{ или } \ |x| \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

а для значения $q = l_1/(l_1+l_2)$ – систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0 < |x| \leqslant \alpha \ \text{ или } \ |x| \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [0, 2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|)f_\prime(t,x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [2\pi l_1, 2\pi(l_1+l_2)], \end{cases}$$

где в кольце $\alpha < |x| < \beta$ функция $f(t, x)$ периодически (с периодом $T = 2\pi(l_1 + l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Лемма доказана.

Теперь перейдём к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы. Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0, 1]$ натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем следующую

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \ldots; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k; \ldots,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Единичный круг $|x| \leqslant 1$ разобьем на счётное число колец вида

$$\alpha_{k+1} < |x| < \alpha_k, \quad \alpha_k = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Далее выберем линейную систему (6) и на основании леммы достроим её в каждом кольце (7) так, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнялись равенства

$$\varkappa(f, G_{\alpha_{k+1},\alpha_k}) = \{q_k\}, \quad \varkappa = \nu^-, \nu^\sim, \nu^0, \nu^+, \nu^*.$$

В кольце $1 \leqslant |x| < +\infty$ и на каждой окружности $|x| = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, линейную систему (6) оставляем без изменения, поэтому

$$\nu^-(f, G_{\alpha_k}) = \nu^-(f, G_{1,+\infty}) = \nu^\sim(f, G_{\alpha_k}) = \nu^\sim(f, G_{1,+\infty}) = \{0\},$$

$$\nu^0(f, G_{\alpha_k}) = \nu^0(f, G_{1,+\infty}) = \nu^+(f, G_{\alpha_k}) = \nu^+(f, G_{1,+\infty}) = \nu^*(f, G_{\alpha_k}) = \nu^*(f, G_{1,+\infty}) = \{1\}.$$

Таким образом, из условия $\alpha_k \to 0$ при $k \to +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ следует справедливость соотношения (5). Теорема доказана.

Заключение. Полученный результат показывает отсутствие связи в общем случае между спектрами показателей колеблемости нелинейной системы и системы её первого приближения. Интересным остаётся вопрос о возможности нахождения условий на коэффициенты линейной системы, позволяющих однозначно восстановить спектр какого-либо показателя колеблемости нелинейной системы.

Автор выражает искреннюю признательность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы// Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
3. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 171–183.
4. *Сергеев И.Н.* Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.
5. *Сергеев И.Н.* Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.
6. *Сергеев И.Н.* О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 856–858.

Адыгейский государственный университет,
г. Майкоп

Поступила в редакцию 07.05.2023 г.
После доработки 25.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1143–1154

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2023. Т. 59. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064123080137, EDN: ISASRE

Н. А. Изобов (Минск, ИМ НАН Беларуси), **А. В. Ильин** (Москва, Россия, ВМК МГУ) "Вариант антиперроновского эффекта смены показателей Ляпунова у двумерных дифференциальных систем при возмущениях высшего порядка малости" (20.02.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080149, EDN: ISDLNW

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, являющимися линейными приближениями для нелинейных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

У этих систем m-возмущения $f(t, y)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по всем переменным и имеют порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её:

$$\|f(t, y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \mathrm{const} > 0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [1; 2, с. 50, 51] состоит в смене отрицательных характеристических показателей системы (1) на положительные значения у части решений системы (2) (с $m = 2$) и сохранении отрицательных показателей у решений оставшейся непустой части. Исследованию этого эффекта Перрона, в том числе и полного его варианта, посвящена серия наших работ (и, в частности, совместных с С.К. Коровиным), завершившаяся полным описанием [3, 4] суслинскими множествами совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2) с возмущением (3).

Следует отметить, что суслинские множества впервые были использованы Е.А. Барабановым [5] для описания совокупностей нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем (их существование мощности континуума и даже положительной меры Лебега было установлено ранее одним из авторов настоящего сообщения).

Для возможных приложений представляет интерес противоположный антиперроновский эффект существования дифференциальных систем с линейным приближением со всеми положительными характеристическими показателями и малым возмущением из определенного

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

класса, имеющих нетривиальные решения с отрицательными показателями Ляпунова. Этот эффект исследован нами в случае экспоненциально убывающих [6] и исчезающих на бесконечности [7] линейных возмущений.

В настоящем сообщении предложен простейший вариант антиперроновского эффекта для возмущений высшего порядка малости.

Введём октанты

$$R_1^2 \equiv \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0\}, \quad R_2^2 \equiv \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0\},$$

$$R_3^2 \equiv \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leqslant 0, \quad y_2 \leqslant 0\}, \quad R_4^2 \equiv \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \leqslant 0\}$$

пространства $\mathbb{R}^2$.

Справедлива следующая

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0$, $m > \theta > 1$ *существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2$;

2) бесконечно дифференцируемое по $t \geqslant t_0$ *и* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ m*-возмущение (3)*

$$f(t, y)\colon [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

такое, что нелинейная возмущённая система (2) имеет решения

$$Y_i(t) \in R_i^2, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad i = \overline{1, 4},$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda[Y_i] = -\frac{(1 + \theta)(m\lambda_1 + \theta\lambda_2)}{m^2 - \theta^2} < 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006. 3. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472. 4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589. 5. Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853. 6. Изобов Н.А., Ильин А.В. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457. 7. Изобов Н.А., Ильин А.В. Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1443–1452.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (МГУ ВМК, Москва, Россия) “Оптимизация с помощью управления весовой и начальной функциями в параболической экстремальной задаче с точечным наблюдением” (20.03.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080150, EDN: ISEPGM

Рассматривается смешанная задача для параболического уравнения:

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T), \quad T > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad u(x,0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

с гладкими коэффициентами a, b, h в области $\overline{Q}_T$. Кроме того, предполагается, что граничные функции φ и ψ принадлежат пространству $W_2^1(0,T)$, а начальная функция ξ –

пространству $L_2(0,1)$. Исследуется следующая задача управления с точечным наблюдением: фиксируя функции ξ, ψ и управляя температурой φ на левом конце отрезка, стараемся добиться того, чтобы температура $u(x_0,\cdot)$ в заданной точке $x_0\in(0,1)$ оставалась интегрально близкой с некоторым весом ρ к заданной функции $z(\cdot)$ на всём интервале времени $(0,T)$. Таким образом, рассматривается задача минимизации интегрального функционала качества по φ. Продолжая исследования [1–4], мы изучаем также задачу об экстремуме полученного значения по некоторому классу весовых функций ρ.

Различные типы экстремальных задач с финальным или распределённым наблюдениями для параболических уравнений изучались в работах [5, 6].

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)}+\|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение $[0,T]\to L_2(0,1)$, действующее по правилу $t\mapsto u(\,\cdot\,,t)$, непрерывно [7, с. 15]. Через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ обозначим множество функций $\eta\in W_2^1(Q_T)$, для которых $\eta(\,\cdot\,,T)=\eta(0,\cdot\,)=0$. *Слабым решением* задачи (1), (2) будем называть функцию $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot\,)=\varphi$ и для всех $\eta\in\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(a(x,t)u_x\eta_x-b(x,t)u_x\eta-h(x,t)u\eta-u\eta_t)\,dx\,dt=\int\limits_0^1\xi(x)\eta(x,0)\,dx+\int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\,\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [8]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём существует такая константа C (не зависящая от φ, ψ, ξ), что выполняется неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}\leqslant C(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)}+\|\psi\|_{W_2^1(0,T)}+\|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi\subset W_2^1(0,T)$ – множество управляющих функций φ, которое далее считаем непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, а $Z\subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим функционал

$$J[z,\rho,\varphi]=\int\limits_0^T(u_\varphi(x_0,t)-z(t))^2\rho(t)\,dt,\quad \varphi\in\Phi,\quad z\in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1), (2) с заданной управляющей функцией φ, а ρ – весовая функция из множества $P=\{\rho\in L_\infty(0,T):\operatorname*{ess\,inf}_{t\in(0,T)}\rho(t)>0\}$. Зафиксировав функции z и ρ, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi]=\inf_{\varphi\in\Phi}J[z,\rho,\varphi].$$

Теорема 2 [3, 8, 9]. *Для любых функций $z\in L_2(0,T)$ и $\rho\in P$ существует единственная функция $\varphi_0\in\Phi$, для которой*

$$m[z,\rho,\Phi]=J[z,\rho,\varphi_0].$$

Для чисел $\rho_2>\rho_1>0$ введём подкласс $\widetilde{P}\subset\{\rho\in P:\operatorname*{ess\,inf}_{t\in(0,T)}\rho(t)\geqslant\rho_1,\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\rho(t)\leqslant\rho_2\}$ и поставим задачу нахождения величин

$$M_1[z,\widetilde{P},\Phi]=\inf_{\rho\in\widetilde{P}}m[z,\rho,\Phi]\quad\text{и}\quad M_2[z,\widetilde{P},\Phi]=\sup_{\rho\in\widetilde{P}}m[z,\rho,\Phi].$$

Определение [10]. Подмножество $Y\subset X^*$ пространства, сопряжённого к банахову пространству X, называется *регулярно выпуклым*, если для любого $y\in X^*\setminus Y$ существует такое $x_0\in X$, что $\sup_{f\in Y}f(x_0)<y(x_0)$.

Теорема 3. *Если множество* $\widetilde{P}$ *регулярно выпукло в* $L_\infty(0,T)$*, то для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существуют функции* $\rho_i \in \widetilde{P}$ *и* $\varphi_i \in \Phi$*,* $i = 1, 2$*, для которых*

$$M_i[z, \widetilde{P}, \Phi] = J[z, \rho_i, \varphi_i]. \tag{3}$$

В доказательстве теоремы 3 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [10, теорема 10]. *Если* X *– сепарабельное банахово пространство, то множество* $Y \subset X^*$ *регулярно выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло и* $*$*-слабо замкнуто.*

Лемма 2 [11, гл. 8, § 7]. *Для любой ограниченной последовательности* $\rho_1, \rho_2, \ldots \in L_\infty(0,T)$ *существуют подпоследовательность* $(\rho_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *и такая функция* $\rho_0 \in L_\infty(0,T)$*, что при любой функции* $\zeta \in L_1(0,T)$ *выполнено равенство*

$$\lim_{j\to+\infty} \int\limits_0^T \rho_{k_j}(t)\zeta(t)\,dt = \int\limits_0^T \rho_0(t)\zeta(t)\,dt.$$

Замечание. Отметим, что равенство (3) теоремы 3 при $i = 1$ установлено в работе [4].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 2. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 3. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 4. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об одной задаче двойного экстремума в параболической задаче управления с точечным наблюдением // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1583–1585. 5. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications (Graduate Studies in Mathematics). V. 112. Providence, 2010. 6. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 9. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. № 1. С. 28–31. 10. Krein M., Šmuljan V. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space // Ann. of Math. 1940. V. 41. № 3. P. 556–583. 11. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск, 2001.

А. И. Астровский (БГЭУ, Минск, Беларусь) “О преобразовании линейных нестационарных систем наблюдения к стационарному виду” (27.03.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080162, EDN: ISNQON

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ линейную нестационарную систему наблюдения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

у которой $x(t)$ – n-вектор-столбец состояния в момент t, а $n{\times}n$-матричная функция $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T. Отождествим систему наблюдения (1) с парой матричных функций (A, c), а совокупность всех таких пар с непрерывными элементами обозначим через Σ_n.

Пусть $\mathcal{G}$ – группа, состоящая из невырожденных при каждом $t \in T$ $n \times n$-матричных функций с непрерывно дифференцируемыми элементами. Действие “ $*$ ” группы $\mathcal{G}$ на множестве Σ_n определим стандартным образом:

$$G * (A, c) := (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG), \quad G \in \mathcal{G}, \quad (A, c) \in \Sigma_n.$$

Через $\mathcal{O}(A,c)$ обозначим порождённую парой (A,c) орбиту действия группы $\mathcal{G}$, а множество орбит действия группы $\mathcal{G}$ на множестве Σ_n обозначим через $\Sigma_n/\mathcal{G}$. Орбиту, в которой существует стационарная система (т.е. система (1), у которой матрица $A(t)$ и вектор-строка $c(t)$ постоянны при $t\in T$), будем называть *стационарной*. Опишем условия на матрицы системы (1), при выполнении которых её орбита будет стационарной.

Пусть $\mathcal{Y}_T(A,c)$ – множество всех выходных функций системы (1), т.е.

$$\mathcal{Y}_T(A,c)=\{y\in C(T,\mathbb{R}): y(t)=c(t)F_A(t,t_0)x_0,\ \ t\in T,\ \ x_0\in\mathbb{R}^n\},$$

где $F_A(t,t_0)$ – матрица Коши системы (1).

Несложно видеть [1, с. 42–44, лемма 2.3], что две системы (A,c) и (B,d) из множества Σ_n принадлежат одной и той же орбите относительно действия группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда их множества выходов $\mathcal{Y}_T(A,c)$ и $\mathcal{Y}_T(B,d)$ совпадают. Отсюда следует, что задаваемое системой (A,c) отображение $H\colon\mathbb{R}^n\to\mathcal{Y}_T(A,c)$, $x_0\mapsto H(x_0):=\{y(t)=c(t)F_A(t,t_0)x_0 : t\in\in T\}$, инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}$. Однако построение этого отображения непосредственно по параметрам исходной системы в общем случае невозможно, так как равносильно интегрированию линейной дифференциальной системы в (1). Ниже укажем полный инвариант действия группы $\mathcal{G}$ на множестве равномерно наблюдаемых систем.

Говорят [2, с. 225, 226], что система (1) *равномерно наблюдаема* на T, если каждая её выходная функция $y\in\mathcal{Y}_T(A,c)$ является $n-1$ раз непрерывно дифференцируемой на T и отображение $x(t)\mapsto(y(t),y^{(1)}(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))$, задаваемое системой (1), инъективно для любого $t\in T$. Множество равномерно наблюдаемых систем из Σ_n обозначим через $\mathcal{R}$.

Пусть орбита $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\Sigma_n$ является стационарной. Тогда, поскольку, как отмечено выше, множество выходных функций для каждой системы из орбиты одно и то же, каждая выходная функция из множества $\mathcal{Y}_T(A,c)$ бесконечно дифференцируема. Следовательно [1, с. 35, 36], для этой пары (A,c) можно по следующему рекуррентному правилу определить n-вектор-строки:

$$s_0(t)=c(t),\quad s_i(t)=s_{i-1}(t)A(t)+\dot{s}_{i-1}(t),\quad i\in\mathbb{N},\tag{2}$$

и построить по первым n из них для пары (A,c) матрицу наблюдаемости

$$S(A,c)(t):=\operatorname{col}(s_0(t),\ldots,s_{n-1}(t)).$$

Для бесконечно дифференцируемых выходных функций пары $(A,c)\in\Sigma_n$ методом математической индукции несложно показать, что $y^{(i)}(t)=s_i(t)x(t)$, $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Так как для двух систем (A,c) и (B,d) из одной орбиты их матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ и $S(B,d)(t)$ связаны равенством $S(A,c)(t)=G(t)S(B,d)(t)$ для некоторой $G\in\mathcal{G}$, то если система (A,c) принадлежит стационарной орбите, ранг её матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ для всех $t\in T$ принимает одно и то же значение.

Доказано [1, с. 38], что ранг матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ равен n при любом $t\in\in T$ для каждой пары (A,c) из множества $\mathcal{R}$ равномерно наблюдаемых систем. Поэтому, как следует из предыдущего, матрица $G(t)$, связывающая две равномерно наблюдаемые системы (A,c) и (B,d) из одной орбиты, имеет вид $G(t)=S^{-1}(A,c)(t)S(B,d)(t)$.

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество равномерно наблюдаемых систем, у которых каждая выходная функция непрерывно дифференцируема не менее n раз (это гарантирует существование n-вектор-строки $s_n(t)$). Доказано [1, с. 66], что отображение

$$f\colon\mathcal{R}_n\to C(T,\mathbb{R}^n),\quad f(A,c)(t):=s_n(t)S^{-1}(A,c)(t),\tag{3}$$

является полным инвариантом действия группы $\mathcal{G}$ на множестве $\mathcal{R}_n$. Другими словами, отображение f, определённое соотношением (3), принимает одно и то же значение на орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\mathcal{R}_n$ и имеет разные значения на различных орбитах.

Пусть $\mathcal{R}_n^c$ – подмножество множества $\mathcal{R}_n$, для каждой системы (A,c) которого полный инвариант $f(A,c)(t)=\operatorname{col}(f_1(A,c)(t),\ldots,f_n(A,c)(t))$ является не изменяющейся по времени функцией, т.е. $\mathcal{R}_n^c := \{(A,c) \in \mathcal{R}_n : f_j(A,c)(t) \equiv \gamma_j,\ \ \gamma_j \in \mathbb{R},\ \ j = \overline{1,n}\}$. Понятно, что множество стационарных наблюдаемых систем вида (1) является подмножеством множества $\mathcal{R}_n^c$ и полный инвариант для таких систем совпадает с вектором из последовательных коэффициентов характеристического многочлена их матрицы коэффициентов.

Сказанное выше позволяет сформулировать следующие утверждения.

Теорема 1. *Равномерно наблюдаемая пара* $(A,c) \in \Sigma_n$ *обладает стационарной орбитой относительно группы* $\mathcal{G}$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству* $\mathcal{R}_n^c$.

Теорема 2. *В орбите* $\mathcal{O}(A,c)$ *пары* $(A,c) \in \Sigma_n$ *имеется стационарная наблюдаемая пара тогда и только тогда, когда каждая выходная функция системы* (A,c) *бесконечно дифференцируема и существуют такие действительные числа* $\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$, *что для всех* $t \in T$ *выполняется равенство*

$$s_n(t) = \alpha_0 s_0(t) + \ldots + \alpha_{n-1} s_{n-1}(t).$$

Приведём способ построения эквивалентной стационарной системы наблюдения для линейной нестационарной равномерно наблюдаемой системы (1), если такая имеется.

1. Для заданной пары $(A,c) \in \Sigma_n$ по рекуррентным формулам (2) находим n-вектор-строки $s_i(t)$, $i = \overline{0, n-1}$. Если их нельзя построить, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ нет.

2. Формируем матрицу наблюдаемости $S(A,c)(t)$. Если ранги матрицы $S(A,c)(t)$ при разных $t \in T$ не совпадают, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ нет. Это следует из равенства $S(A,c)(t) = G(t)S(B,d)(t)$ для систем из одной орбиты и того факта, что для стационарной системы ранг матрицы наблюдаемости не зависит от $t \in T$.

Далее алгоритм работает только для случая равномерно наблюдаемой пары, т.е. когда $\operatorname{rank} S(A,c)(t) = n$ для всех $t \in T$. Поэтому проверяем невырожденность матрицы $S(A,c)(t)$ при всех $t \in T$.

3. Вычисляем полный инвариант $f(A,c)(t)$ по формуле (3). Если его значение равно некоторому постоянному вектору, то пара (A,c) преобразуется к стационарной системе при помощи преобразования $G(t) = S^{-1}(A,c)(t)$. Если значения полного инварианта зависят от переменной t, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ нет.

Отметим, что в отличие от классического, введённого А.М. Ляпуновым, понятия приводимости для линейных дифференциальных систем на бесконечном промежутке времени, свойство приводимости для систем наблюдения (1) означает возможность одновременного преобразования матричных функций $A(t)$ и $c(t)$ к стационарным (постоянным) матрицам на конечном промежутке T. Множество приводимых по Ляпунову систем является важным классом линейных нестационарных систем, так как многие свойства таких систем (устойчивость, стабилизируемость и др.) изучаются посредством стационарных систем. Н.П. Еругин [3] заложил основы общей теории приводимых систем, доказал ряд необходимых и достаточных условий приводимости линейных дифференциальных систем и описал некоторые подклассы таких систем.

Литература. 1. Астровский А.И., Гайшун И.В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск, 2013. 2. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999. 3. Еругин Н.П. Приводимые системы // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1946. Т. 13. С. 3–96.

В. А. Зайцев, И. Г. Ким (УдГУ, Ижевск, Россия) “Назначение конечного спектра и стабилизация билинейных систем с сосредоточенным и распределённым запаздываниями” (10.04.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080174, EDN: ISSNVD

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{K}\}$ – линейное n-мерное пространство над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ – пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n(\mathbb{K})$ – единичная матрица; $\operatorname{Sp} H$ – след матрицы H.

Рассмотрим билинейную стационарную дифференциальную систему с сосредоточенным и распределённым запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + u_1 A_1 x(t) + \ldots + u_r A_r x(t) + B_0 x(t-h) + v_1 B_1 x(t-h) + \ldots + v_s B_s x(t-h) +$$

$$+\int\limits_{-h}^{0}(C_0(\tau)+w_1(\tau)C_1+\ldots+w_\ell(\tau)C_\ell)x(t+\tau)\,d\tau,\quad t>0, \tag{1}$$

с начальным условием $x(\tau)=\zeta(\tau)$, $\tau\in[-h,0]$, где $\zeta\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^n$ – непрерывная функция; здесь $A_j,B_\mu,C_\xi\in M_n(\mathbb{K})$, $j=\overline{0,r}$, $\mu=\overline{0,s}$, $\xi=\overline{1,\ell}$; $C_0\colon[-h,0]\to M_n(\mathbb{K})$ – интегрируемая функция; $h>0$ – постоянное запаздывание; $x\in\mathbb{K}^n$ – вектор состояния, $u=\operatorname{col}(u_1,\ldots,u_r)\in\mathbb{K}^r$ и $v=\operatorname{col}(v_1,\ldots,v_s)\in\mathbb{K}^s$ – векторы управления, $w=\operatorname{col}(w_1,\ldots,w_\ell)\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^\ell$ – интегрируемая функция управления.

Обозначим характеристическую функцию системы (1) через $\varphi(\lambda)$, т.е.

$$\varphi(\lambda)=\det\biggl[\lambda I-\biggl(A_0+\sum_{j=1}^{r}u_jA_j\biggr)-e^{-\lambda h}\biggl(B_0+\sum_{\mu=1}^{s}v_\mu B_\mu\biggr)-\int\limits_{-h}^{0}\biggl(C_0(\tau)+\sum_{\xi=1}^{\ell}w_\xi(\tau)C_\xi\biggr)e^{\lambda\tau}\,d\tau\biggr].$$

Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda)=0$ системы (1) имеет вид

$$\lambda^n+\gamma_1(\lambda)\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_{n-1}(\lambda)\lambda+\gamma_n(\lambda)=0, \tag{2}$$

где

$$\gamma_i(\lambda)=\sum_{j=0}^{i}\delta_{i0j}\exp(-\lambda jh)+\sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{j=0}^{i-\alpha}\int\limits_{-h}^{0}\cdots\int\limits_{-h}^{0}\delta_{i\alpha j}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)\exp\biggl(\lambda\biggl(\sum_{\nu=1}^{\alpha}\tau_\nu-jh\biggr)\biggr)\,d\tau_1\cdots d\tau_\alpha, \tag{3}$$

$i=\overline{1,n}$. Здесь числа δ_{i0j}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,i}$, и функции $\delta_{i\alpha j}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)$, $\tau_\nu\in[-h,0]$, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,i}$, $j=\overline{0,i-\alpha}$, $\nu=\overline{1,\alpha}$, зависят от коэффициентов A_j $(j=\overline{0,r})$, B_μ $(\mu=\overline{0,s})$, C_ξ $(\xi=\overline{1,\ell})$, $C_0(\tau)$ $(\tau\in[-h,0])$, векторов u, v и функции $w(\tau)$ $(\tau\in[-h,0])$ управления системы (1).

Множество $\sigma=\{\lambda\in\mathbb{C}:\varphi(\lambda)=0\}$ корней характеристического уравнения (2), (3) называется *спектром* системы (1). В общем случае спектр σ системы (1) состоит из бесконечного числа точек. Если в уравнении (2) числа δ_{i0j} равны нулю для всех $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,i}$, и функции $\delta_{i\alpha j}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)$ тождественно нулевые, $\tau_\nu\in[-h,0]$, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,i}$, $j=\overline{0,i-\alpha}$, $\nu=\overline{1,\alpha}$, то характеристическая функция представляет собой полином, и спектр σ является конечным множеством.

Рассмотрим задачу назначения произвольного конечного спектра σ для системы (1).

Определение. Для системы (1) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра*, если для любых $\gamma_i\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, существуют постоянные векторы $u\in\mathbb{K}^r$, $v\in\mathbb{K}^s$ и интегрируемая функция $w\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^\ell$ такие, что характеристическая функция системы (1) удовлетворяет равенству $\varphi(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$.

Предположим, что коэффициенты системы (1) имеют следующий специальный вид: матрица A_0 имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для некоторого $p\in\{1,\ldots,n\}$ первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матрицы A_j, $j=\overline{1,r}$, равны нулю, т.е.

$$A_0=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&0&\ldots&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\ldots&0\\\hdotsfor{5}\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\ldots&\ldots&a_{n-1,n}\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&\ldots&a_{nn}\end{bmatrix},\quad a_{i,i+1}\neq0,\quad i=\overline{1,n-1}; \tag{4}$$

$$A_j=\begin{bmatrix}0&0\\\widehat{A}_j&0\end{bmatrix},\quad \widehat{A}_j\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad j=\overline{1,r}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что матрицы B_μ $(\mu=\overline{0,s})$, C_ξ $(\xi=\overline{1,\ell})$, $C_0(\tau)$ $(\tau\in[-h,0])$ системы (1) также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов этих матриц равны нулю, т.е.

$$B_\mu=\begin{bmatrix}0&0\\ \widehat{B}_\mu&0\end{bmatrix},\quad \widehat{B}_\mu\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad \mu=\overline{0,s}, \tag{6}$$

$$C_0(\tau)=\begin{bmatrix}0&0\\ \widehat{C}_0(\tau)&0\end{bmatrix},\quad C_\xi=\begin{bmatrix}0&0\\ \widehat{C}_\xi&0\end{bmatrix},\quad \widehat{C}_0(\tau),\widehat{C}_\xi\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad \xi=\overline{1,s},\quad \tau\in[-h,0]. \tag{7}$$

Здесь число p то же самое, что и в (4).

По системе (1) построим матрицы $\varGamma_0\in M_{n,r}(\mathbb{K})$, $\varGamma_1\in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $\varGamma_2\in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ и $\varLambda_1,\varLambda_2(\tau)\in$ $\in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\varGamma_0=[\mathrm{Sp}\,(A_jA_0^{i-1})]_{i,j=1}^{n,r},\quad \varGamma_1=[\mathrm{Sp}\,(B_jA_0^{i-1})]_{i,j=1}^{n,s},\quad \varGamma_2=[\mathrm{Sp}\,(C_jA_0^{i-1})]_{i,j=1}^{n,\ell}, \tag{8}$$

где i – номер строки, j – номер столбца,

$$\Lambda_1=\mathrm{col}\,[\mathrm{Sp}\,B_0,\mathrm{Sp}\,(B_0A_0),\ldots,\mathrm{Sp}\,(B_0A_0^{n-1})],$$

$$\Lambda_2(\tau)=\mathrm{col}\,[\mathrm{Sp}\,C_0(\tau),\mathrm{Sp}\,(C_0(\tau)A_0),\ldots,\mathrm{Sp}\,(C_0(\tau)A_0^{n-1})], \tag{9}$$

и матрицы $\varDelta_1=[\varGamma_1,\varLambda_1]\in M_{n,s+1}(\mathbb{K})$, $\varDelta_2(\tau)=[\varGamma_2,\varLambda_2(\tau)]\in M_{n,\ell+1}(\mathbb{K})$.

Теорема 1. *Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4)–(7). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра для системы (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(C1) $\mathrm{rank}\,\varGamma_0=n$;

(C2) $\mathrm{rank}\,\varGamma_1=\mathrm{rank}\,\varDelta_1$;

(C3) $\mathrm{rank}\,\varGamma_2=\mathrm{rank}\,\varDelta_2(\tau)$ *для п.в.* $\tau\in[-h,0]$.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (1): требуется построить векторы $u\in\mathbb{K}^r$, $v\in$ $\in\mathbb{K}^s$ и интегрируемую функцию $w\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^\ell$ такие, чтобы система (1) была асимптотически устойчивой. Система (1) является асимптотически устойчивой, если её спектр σ лежит в левой полуплоскости $\omega:=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,\lambda<0\}$. Если задача назначения произвольного конечного спектра разрешима, то, выбирая многочлен $\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, $\gamma_i\in\mathbb{K}$, таким, чтобы его корни лежали в области ω, приходим к асимптотически устойчивой системе (1). Таким образом, из теоремы 1 вытекает очевидное

Следствие 1. *Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4)–(7) и выполнены условия (C1)–(C3). Тогда система (1) асимптотически стабилизируема.*

Рассмотрим теперь систему (1), когда матрицы C_ξ $(\xi=\overline{1,\ell})$ являются переменными ($C_\xi\colon[-h,0]\to M_n(\mathbb{K})$ – непрерывные функции, $\xi=\overline{1,\ell}$):

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+u_1A_1x(t)+\ldots+u_rA_rx(t)+B_0x(t-h)+v_1B_1x(t-h)+\ldots+v_sB_sx(t-h)+$$

$$+\int\limits_{-h}^{0}(C_0(\tau)+w_1(\tau)C_1(\tau)+\ldots+w_\ell(\tau)C_\ell(\tau))x(t+\tau)\,d\tau,\quad t>0. \tag{10}$$

Будем предполагать, что матрицы системы (10) имеют специальный вид (4)–(6) и

$$C_\xi(\tau)=\begin{bmatrix}0&0\\ \widehat{C}_\xi(\tau)&0\end{bmatrix},\quad \widehat{C}_\xi(\tau)\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad \xi=\overline{0,s},\quad \tau\in[-h,0]. \tag{11}$$

Построим матрицы $\varGamma_0$ и $\varGamma_1$ (см. (8)), матрицу $\varPsi_2(\tau)=[\mathrm{Sp}\,(C_\xi(\tau)A_0^{i-1})]_{i,\xi=1}^{n,\ell}$, $\tau\in[-h,0]$, и матрицы (9).

Теорема 2. *Пусть матрицы системы (10) имеют специальный вид (4)–(6), (11). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра для системы (10) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия (C1), (C2) и следующее условие:*

(C4) для почти всякого $\tau \in [-h, 0]$ *система линейных уравнений* $\Psi_2(\tau)X(\tau) = \Lambda_2(\tau)$ *разрешима относительно* $X(\tau) \in \mathbb{K}^\ell$, *и решение* $X(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$, *является интегрируемой на* $[-h, 0]$ *функцией.*

Следствие 2. *Условия теоремы 2 являются достаточными условиями стабилизации системы (10).*

Приведённые в докладе результаты обобщают результаты работы [1] на билинейные системы, содержащие распределённое запаздывание.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01483-23-00 (проект FEWS-2020-0010).

Литература. 1. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в билинейных системах с запаздыванием в состоянии // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 19–28.

Е. С. Можегова, Н. Н. Петров (УдГУ, Ижевск, Россия) “Об одной задаче конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов во временны́х шкалах” (17.04.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080186, EDN: ISSNXZ

Определение 1. Непустое замкнутое множество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup\{t : t \in \mathbb{T}\} = +\infty$, называется *временно́й шкалой.*

Определение 2 [1]. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-*дифференцируемой в точке* $t \in \mathbb{T}$, если существует число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in \mathbb{T}\bigcap(t - \delta, t + \delta)$, где $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$. Число γ в этом случае называется Δ-*производной* функции f в точке t. Будем обозначать Δ-производную функции f в точке t через $f^\Delta(t)$.

Пусть задана некоторая временна́я шкала $\mathbb{T}$ и точка $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$ с законами движения вида

$$x_i^\Delta = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j^\Delta = v_j, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad u_i, v_j \in W.$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, $W = \{w \in \mathbb{R}^k : \|w\| \leqslant 1\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I$, $j \in J$.

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы “переловить” всех убегающих. Цель группы убегающих – помешать этому, т.е. предоставить возможность хотя бы одному из убегающих уклониться от встречи (точные определения приводятся ниже).

Убегающие используют кусочно-программные стратегии, преследователи – кусочно-программные контрстратегии. Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z^0)$.

Определение 3. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит *уклонение от встречи*, если существуют кусочно-программные стратегии $V_1, \ldots, V_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ такие, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ найдётся номер $p \in J$, при котором для всех $i \in I$ и $t \in \mathbb{T}$ выполнено соотношение $y_p(t) \neq x_i(t)$, где $y_p(t)$ – реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E_p.

Определение 4. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит *поимка*, если для некоторого момента $T > t_0$, $T \in \mathbb{T}$, при любых кусочно-программных стратегиях $V_1, \ldots, V_m$ убегающих $E_1, \ldots$ $\ldots, E_m$ существуют кусочно-программные контрстратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей P_1, $\ldots, P_n$ такие, что найдутся моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T]\bigcap\mathbb{T}$ и номера $s_1, \ldots, s_m \in I$, для которых выполнены равенства $y_j(\tau_j) = x_{s_j}(\tau_j)$, $j \in J$, где $x_i(t)$, $i \in I$, и $y_j(t)$, $j \in J$, – реализовавшиеся в данной ситуации траектории игроков P_i, $i \in I$, и E_j, $j \in J$, соответственно.

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел* $p, m \geqslant p \cdot 2^p + 2$ *в игре* $\Gamma(2^p + 1, m, z^0)$ *происходит уклонение от встречи из произвольных начальных позиций* z^0.

Теорема 2. *Для любого натурального числа* p *в игре* $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$ *происходит поимка при некотором векторе начальных позиций* z^0.

Определим функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ условием $f(n) = \min\{m\colon$ в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи из произвольных начальных позиций $z^0\}$.

Теорема 3. *Существуют положительные константы* C_1 *и* C_2 *такие, что для всех натуральных* n, $n \neq 1$, *справедливо неравенство*

$$C_1 n \ln n \leqslant f(n) \leqslant C_2 n \ln n.$$

Отметим, что результаты работы [2] являются следствием приведённых в докладе результатов при $\mathbb{T} = \mathbb{R}^1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

Литература. 1. Guseinov G.S. Integration on time scales // J. of Math. Anal. Appl. 2003. V. 285. № 1. P. 107–127. 2. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре “казаки-разбойники” // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.

В.Е. Хартовский (ГрГУ, Гродно, Беларусь) “Условия асимптотической наблюдаемости линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием” (15.05.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080198, EDN: ISVQOF

В работе [1] для линейных автономных систем запаздывающего типа введено понятие асимптотической наблюдаемости, предполагающее возможность однозначного восстановления неустойчивой части решения по результатам наблюдаемого выхода, а также предложена конструкция наблюдателей, формирующих асимптотическую оценку решения асимптотически наблюдаемых систем. Важным аспектом такого подхода является отсутствие требования спектральной наблюдаемости у исходного объекта. В статье [2] свойство асимптотической наблюдаемости используется для формирования асимптотической оценки решения систем нейтрального типа.

В докладе идеи работ [1, 2] обобщаются на вполне регулярные линейные автономные дифференциально-алгебраические системы с соизмеримыми запаздываниями, имеющие вид

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Здесь $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{k\times n}[\lambda]$ – множество полиномиальных матриц переменной λ); λ_h – оператор сдвига, определённый для заданного $h > 0$ правилом $\lambda_h f(t) = f(t-h)$; функция $y(t)$, $t > 0$, – наблюдаемый выходной сигнал. Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0] \quad (m = \deg A(\lambda)),$$

где η – кусочно-непрерывная функция такая, что функция $D\eta$ непрерывна. Далее предполагаем, что функция η неизвестна. Условие полной регулярности уравнения (1) имеет вид

$$\deg|pD - A(0)| = n_1, \tag{3}$$

здесь и ниже $n_1 = \operatorname{rank} D$, $n_1 \leqslant n$. Заметим, что множество дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием (1), удовлетворяющих условию полной регулярности (3), включает в себя класс систем нейтрального типа, кроме того, к таким системам в ряде случаев сводится анализ непрерывно-дискретных систем.

Один и тот же выход $y(t)$, $t > t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$, может порождаться различными решениями $x(t)$, $t > t_0$, уравнения (1). Каждое такое решение $x(t)$, $t > t_0$, будем называть *совместимым* с выходом $y(t)$, $t > t_0$.

Определение. Систему (1), (2) назовём *асимптотически наблюдаемой*, если для любых двух решений x^1 и x^2 уравнения (1), совместимых с выходами y^1 и y^2 соответственно, выполняется условие: если при некотором $t_0 > 0$ выполняется тождество $y^1(t) \equiv y^2(t)$, $t > t_0$, то $\|x^1(t) - x^2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Очевидно, что введённое этим определением свойство асимптотической наблюдаемости равносильно выполнению условия: $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех решений системы (1), совместимых с нулевым выходом $y(t) \equiv 0$, $t > t_0$.

Введём множество

$$\mathbf{P} = \left\{ p \in \mathbb{C} : \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} < n \right\},$$

где $W(p, \lambda) = Dp - A(\lambda)$. Если множество $\mathbf{P}$ является пустым, то при $t > t_1$ $(t_1 > 0$ – некоторое число) существует взаимно однозначное соответствие между множеством решений уравнения (1) и множеством выходов (2) (см. [3, 4]).

Пусть $n_2 = n - n_1$, а $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ и $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ – матрицы фундаментальных систем решений линейных алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно. В статье [4] показано, что условие

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda) \Gamma_2 \end{pmatrix} = n_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

необходимо для существования $t_1 > 0$ и непрерывной (в частности, не зависящей от производных выхода (2)) операции $\mathfrak{L}$ восстановления “отрезка” одного из решений $x(t)$, $t \in [t_1 - mh, t_1]$, уравнения (1), совместимого с выходом (2), $\mathfrak{L}\colon \{y(t) : t \in [0, t_1]\} \mapsto \{x(t) : t \in [t_1 - mh, t_1]\}$. Если одновременно выполняется условие (4) и множество $\mathbf{P}$ пусто, то система (1), (2) является финально наблюдаемой [3, 4]. В этом случае указанная выше непрерывная операция $\mathfrak{L}$ позволяет определить единственную функцию $x(t)$, $t \in [t_1 - mh, t_1]$, совместимую с наблюдаемым выходом (2). Предположим, что множество $\mathbf{P}$ не пусто и выполнено условие (4). Доказана следующая

Теорема. *Если для системы (1)–(3) выполняется условие (4), то она является асимптотически наблюдаемой тогда и только тогда, когда множество* $\mathbf{P}$ *конечно и лежит в левой открытой полуплоскости.*

Для асимптотически наблюдаемой системы (1)–(3), удовлетворяющей условиям приведённой теоремы, разработана схема формирования асимптотической оценки $z(t)$ решения $x(t)$ такой, что $\|x(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$. Реализация этой схемы заключается в следующей последовательности действий.

1. В силу условий (3), (4) существует линейное преобразование переменных $x = P\widetilde{x}$ с неособой матрицей $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $\widetilde{x} = \operatorname{col}[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2]$, $\widetilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\widetilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, такое, что при некотором $t_2 > 0$ функция $\widetilde{x}_1$ определяется системой

$$\dot{\widetilde{x}}_1(t) = L(\lambda_h)\widetilde{x}_1(t) + \widehat{L}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_2, \tag{5}$$

с наблюдаемым выходом

$$\widehat{R}(\lambda_h)y(t) = R(\lambda_h)\widetilde{x}_1(t), \quad t > t_2, \tag{6}$$

а функция $\widetilde{x}_2$ – соотношением

$$\widetilde{x}_2(t) = M(\lambda_h)\widetilde{x}_1(t) + \widehat{M}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_2. \tag{7}$$

Здесь $L(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}[\lambda]$, $R(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times n_1}[\lambda]$ $(r_1 \geqslant r)$, $M(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_1}[\lambda]$, $\widehat{L}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times r}[\lambda]$, $\widehat{R}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1\times r}[\lambda]$, $\widehat{M}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times r}[\lambda]$. Способ построения матрицы P и соотношений (5)–(7) описан в работе [4, формулы (69)–(71)].

2. Методом от противного показывается, что если система (1)–(3) асимптотически наблюдаема, то и система (5), (6) также асимптотически наблюдаема. Строим асимптотическую оценку $\widetilde{z}_1(t)$ решения $\widetilde{x}_1(t)$ системы (5), (6), $\|\widetilde{x}_1(t) - \widetilde{z}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$. Один из подходов к формированию оценки $\widetilde{z}_1(t)$ при помощи конечной цепочки наблюдателей предложен в статье [2] (если систему (5), (6) можно преобразовать к асимптотически наблюдаемой системе со скалярным выходом, то можно воспользоваться результатами работы [1]).

3. Предположим, что найдена оценка $\widetilde{z}_1(t)$. Вследствие соотношения (7) полагаем

$$\widetilde{z}_2(t) = M(\lambda_h)\widetilde{z}_1(t) + \widehat{M}(\lambda_h)y(t).$$

После этого формируем окончательную оценку $z(t)$ решения $x(t)$ системы (1), (2), используя равенство $z(t) = P\widetilde{z}(t)$, $\widetilde{z} = \operatorname{col}[\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2]$.

Литература. 1. Ильин А.В., Буданова А.В., Фомичев В.В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402. 2. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716. 3. Метельский А.В., Минюк С.А. Полная управляемость и полная конструктивная идентифицируемость вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 3. С. 303–317. 4. Хартовский В.Е. О некоторых задачах управляемости и наблюдаемости для дифференциально-алгебраических систем с последействием // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 126–137.