ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 9 Сентябрь 2023

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

www.sciencejournals.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 9, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1157–1171

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

© 2023 г. В. С. Климов

Изучаются интегрально ограниченные решения дифференциального уравнения $\mathscr{A}(x)=z$, где $\mathscr{A}$ – линейный дифференциальный оператор порядка l, определённый на функциях $x\colon \mathbb{R}\to H$ $(\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, H – конечномерное евклидово пространство). Правая часть z – интегрально ограниченная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в H, удовлетворяющая неравенству $(\psi(t),z(t))\geqslant\delta|z(t)|$, $t\in\mathbb{R}$, $\delta>0$. Приводятся условия на оператор $\mathscr{A}$ и функцию $\psi\colon\mathbb{R}\to H$, гарантирующие для рассматриваемых решений x обратное неравенство вида

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+1}|x^{(l)}(t)|\,dt\leqslant c\int\limits_{\tau-1}^{\tau+2}|x(t)|\,dt,$$

в котором постоянная c не зависит от выбора действительного числа τ и функции x.

DOI: 10.31857/S0374064123090017, EDN: WOMIXW

Введение. В работе изучаются решения дифференциального уравнения $\mathscr{A}(x)=z$ порядка l. При некоторых предположениях относительно дифференциального выражения $\mathscr{A}$ и правой части z рассматриваемого уравнения для решений x устанавливаются обратное неравенство

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau}^{\tau+1}|x^{(l)}(t)|\,dt\leqslant c_0\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int\limits_{\tau}^{\tau+1}|x(t)|\,dt$$

и некоторые его модификации, где c – положительная константа.

В п. 1 статьи содержатся определения различных функциональных классов, приводятся сведения о клиньях и конусах, основное внимание при этом уделяется случаю конечномерного пространства. В п. 2 устанавливается основной результат работы – обратные функциональные неравенства, позволяющие оценивать нормы старших производных решений через аналогичные нормы исходных решений. Правая часть z при этом предполагается интегрально ограниченной и удовлетворяющей некоторому неравенству. Обсуждению и модификациям полученных результатов посвящён п. 3.

Основу работы составляют одномерные варианты теорем вложения [1, 2] и конусные методы исследования систем дифференциальных неравенств [3–5]. Используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Через $H={}$ $=\mathbb{R}^m$ означим m-мерное действительное арифметическое пространство; скалярное произведение двух векторов $u=(u_1,\ldots,u_m)$, $v=(v_1,\ldots,v_m)$ из $\mathbb{R}^m$ определено равенством $(u,v)=u_1v_1+\ldots+u_mv_m$, $|u|=\sqrt{(u,u)}$ – евклидова норма вектора u.

Все банаховы пространства рассматриваются над полем действительных чисел. Если Z – банахово пространство и $v\in E$, то $\|v;Z\|$ – норма элемента v в пространстве Z, Z^* – сопряжённое к Z пространство, $\sigma(Z,Z^*)$ и $\sigma(Z^*,Z)$ – слабые топологии в пространствах Z и Z^* соответственно. Запись $Z_1\to Z_2$ означает непрерывность оператора вложения банахова пространства Z_1 в банахово пространство Z_2; если же оператор вложения вполне непрерывен, то для этого используется запись $Z_1\Rightarrow Z_2$. Далее будет применяться следующее утверждение.

Предложение 1 [6, с. 126]. *Пусть Z, Z_1, Z_0 – банаховы пространства, причём $Z_1\Rightarrow Z$ и $Z\to Z_0$. Тогда существует такая функция $\chi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$, что для каждого элемента $f\in Z_1$ и любого положительного числа η справедливо неравенство Эрлинга*

$$\|f;Z\|\leqslant\eta\|f;Z_1\|+\chi(\eta)\|f;Z_0\|.$$

1. Функциональные пространства и конусы. Пусть $J=[a,b]$ – отрезок на действительной прямой $\mathbb{R}$, H – конечномерное евклидово пространство. Через $L(J,H)$ обозначается пространство измеримых функций на отрезке J со значениями в H, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u;L_1(J)\| = \int\limits_J |u(t)|\,dt;$$

как обычно, совпадающие почти всюду (относительно одномерной лебеговой меры mes_1) функции отождествляются; здесь и далее в обозначениях нормы символ H опускается. Наряду с $L_1(J,H)$, далее будут применяться аналогично определяемые пространства Лебега $L_p(J,H)$, а также пространства Орлича $L_\Phi(J,H)$, $E_{\Phi^*}(J,H)$, порождаемые N-функцией Φ и сопряжённой к ней функцией Φ^* [7, гл. 2].

Функцию $g\colon J\to H$ называют *абсолютно непрерывной на отрезке* $J=[a,b]$, если

$$g(t) = g(a) + \int\limits_a^t f(s)\,ds,$$

где $f\in L_1(J,H)$. В этом случае функция $g(t)$ почти всюду на J дифференцируема и $g'(t) = f(t)$. Вместе с тем функция f является производной в смысле Соболева функции g. Класс абсолютно непрерывных функций $g\colon J\to H$ образует банахово пространство $W^1(J,H)$ с нормой

$$\|g;W^1(J)\| = \|g;L_1(J)\| + \|g';L_1(J)\|.$$

Если $k\in\mathbb{N}$ и $k>1$, то через $W^k(J,H)$ обозначается совокупность всех функций $g\colon J\to H$, производные которых (до порядка $k-1$ включительно) принадлежат классу $W^1(J,H)$. Для каждой функции g из $W^k(I,H)$ имеет смысл и конечна норма

$$\|g;W^k(J)\| = \sum_{i=0}^{k} \|g^{(i)};L_1(J)\|,$$

относительно которой $W^k(J,H)$ – банахово пространство, представляющее собой одномерный вариант классических пространств Соболева [1, 2].

Наряду с $W^k(J,H)$, ниже будет рассматриваться банахово пространство $C^k(J,H)$, состоящее из функций $x\colon J\to H$, имеющих на отрезке J непрерывные производные до порядка $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ включительно. Норма в $C^k(J,H)$ определяется стандартным образом:

$$\|g;C^k(J)\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in J} |x^{(i)}(t)|.$$

Для единообразия иногда будут применяться обозначения

$$L(J,H)\equiv W^0(J,H), \quad C(J,H)\equiv C^0(J,H).$$

Предложение 2. *Пусть* $l\geqslant 1$. *Тогда:*

1) пространство $W^l(J,H)$ *непрерывно вложено в пространство* $C^{l-1}(J,H)$ *и компактно вложено в пространство* $W^{l-1}(J,H)$;

2) оператор дифференцирования $x\to x^{(l-1)}$ *действует и вполне непрерывен из* $W^l(J,H)$ *в пространство Орлича* $E^{\Phi^*}(J,H)$ *для любой* N*-функции* Φ.

Предложение 2 есть одномерный вариант теорем вложения (см., например, [1, с. 74–78; 2, с. 69–78].

Лемма 1. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, l-1}$, $P_i(t)$ *–* $m \times m$*-матрица, элементы которой при* $i < l-1$ *суммируемы на отрезке* J, *а при* $i = l-1$ *принадлежат некоторому пространству Орлича* $L^{\Phi}(J)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|P_i x^{(i)}; L(J)\| \leqslant \eta \|x; W^l(J)\| + k_0(\eta)\|x; L(J)\|,$$

в котором η *– произвольная положительная постоянная,* $k_0(\eta)$ *– убывающая положительная и не зависящая от* x *функция.*

Равносильное лемме 1 предложение доказано в статье [5]. Там же установлено следующее утверждение.

Предложение 3. *Для любого натурального числа* k *найдётся такое положительное число* λ_k, *что для произвольной вещественной функции* v *класса* $C^k[a,b]$ *имеет место неравенство*

$$\min_{t\in[a,b]} |v^{(k)}(t)| \leqslant \frac{\lambda_k}{(b-a)^k} \int\limits_a^b |v(t)|\, dt.$$

Перейдём к пространствам векторных функций, определённых на всей действительной оси. Положим $J_\tau = [\tau, \tau+1]$, $\tau \in \mathbb{R}$. Функцию $z\colon \mathbb{R} \to H$ назовём *интегрально ограниченной*, если её сужение на любой отрезок J_τ принадлежит пространству $L(J_\tau, H)$ и число

$$\|z; M_1\| = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|z; L_1(J_\tau)\| < \infty. \tag{1}$$

Совокупность интегрально ограниченных векторных функций с нормой (1) образует банахово пространство $M_1(\mathbb{R})$. Аналогичная конструкция применима и к другим пространствам функций. Например, через $M_1^l(\mathbb{R})$ обозначается пространство функций $x\colon \mathbb{R} \to H$, сужения которых на любой отрезок J_τ принадлежит $W^l(J_\tau)$, причём

$$\|x; M_1^l\| = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|x; W^l(J_\tau)\| < \infty;$$

далее $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, – пространство функций $x\colon \mathbb{R} \to H$, сужения которых на любой отрезок J_τ принадлежат $C^l(J_\tau)$, при этом норма

$$\|x; C^k\| = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|x; C^k(J_\tau)\| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R})$ обозначается совокупность ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x\colon \mathbb{R} \to H$. Класс $C_0(\mathbb{R})$ составляет замкнутое подпространство пространства $C^0(\mathbb{R})$.

Лемма 2. *Пусть* $\psi \in C_0(\mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* ψ_1 *класса* $C_0(\mathbb{R})$, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\|\psi - \psi_1; C^0\| < \varepsilon$;

2) функция ψ_1 *имеет ограниченные производные любого порядка, т.е.*

$$|\psi_1^{(i)}(t)| \leqslant \beta_i < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Доказательство основано на стандартной процедуре усреднения (см., например, [1, 2]). Пусть $\omega(t)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция на $\mathbb{R}$, $\omega(t) \geqslant 0$ и $\|\omega; L_1\| = 1$. Положим $\omega_\delta(t) = \delta^{-1}\omega(t/\delta)$, $\delta > 0$. Свёртка

$$(\psi \circ \omega_\delta)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\delta(t-s)\psi(s)\, ds$$

при любом $\delta > 0$ есть бесконечно дифференцируемая функция, производные которой любого порядка равномерно ограничены на $\mathbb{R}$. При малых $\delta > 0$ выполняется условие

$$\|\psi - (\psi \circ \omega_\delta); C^0\| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы.

Напомним определения и примеры, относящиеся к теории конусов в действительном банаховом пространстве Z. Далее используется терминология, принятая в [3, 4].

Замкнутое множество K пространства Z называют *клином*, если для любых $x, y \in K$ и неотрицательного числа α $x + y \in K$ и $\alpha x \in K$. Если K – клин, то множество $K \bigcap (-K)$ называют его *лезвием*. Клин K называют *конусом*, если его лезвие состоит лишь из одной точки. В дальнейших построениях замкнутость клина не используется, поэтому вопрос о замкнутости изучаемых клиньев не обсуждается.

Клин $K \subset Z$ называют *телесным*, если он содержит шар ненулевого радиуса. Линейный функционал Λ на Z называют *положительным*, если $\Lambda(x) \geqslant 0$ при $x \in K$. Совокупность положительных функционалов образует клин K^* в сопряжённом к Z пространстве Z^*. Если клин K не совпадает со всем пространством Z, то клин K^* содержит ненулевые элементы. Функционал Λ является внутренним элементом K^* в том и только том случае, если при некотором $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\Lambda(x) \geqslant \delta\|x\|, \quad x \in K. \tag{3}$$

В этой ситуации функционал Λ называют *равномерно положительным*, а клин K^* является телесным. Равномерно положительный функционал есть внутренний элемент клина K^*. Действительно, если выполнено неравенство (3), $\Lambda_1 \in E^*$ и $\|\Lambda_1 - \Lambda; E^*\| < \delta$, то

$$\Lambda_1(x) = \Lambda(x) + (\Lambda_1 - \Lambda)(x) \geqslant (\delta - \|\Lambda - \Lambda_1; E^*\|)\|x\|, \quad x \in K.$$

Равномерно положительные функционалы на конусе K пространства Z существуют не всегда. Например, если $Z = L_p[0, 1]$, а K – конус неотрицательных почти всюду функций, то равномерно положительные функционалы существуют лишь при $p = 1$. Однако в любом банаховом пространстве Z можно указать такой конус K, относительно которого существуют равномерно положительные функционалы, а сопряжённый конус телесен. Действительно, пусть Λ_0 – ненулевой функционал на Z и $0 < \delta_0 < \|\Lambda_0\|$. Введём в рассмотрение множество

$$K(\Lambda_0, \delta_0) = \{x \in Z : \Lambda_0(x) \geqslant \delta_0\|x\|\}.$$

Нетрудно видеть, что множество $K(\Lambda_0, \delta_0)$ есть конус в пространстве Z. Если $\Lambda \in Z^*$ и $\|\Lambda - \Lambda_0; Z^*\| < \delta_0$, то для всех x из конуса $K(\Lambda_0, \delta_0)$ выполнено неравенство

$$\Lambda(x) \geqslant (\delta_0 - \|\Lambda - \Lambda_0; E^*\|)\|x\|,$$

поэтому Λ – равномерно положительный на $K(\Lambda_0, \delta_0)$ функционал.

Приведём ещё один вариант предшествующей конструкции. Пусть F – замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства Z, не содержащее нуля θ пространства Z. Через $K(F)$ обозначим множество элементов вида αx, где $\alpha \geqslant 0$ и $x \in F$. Множество $K(F)$ – конус [4, с. 11]. Выпуклое множество D называют [8, с. 35] *базой конуса* K, если каждый ненулевой элемент из K допускает единственное представление $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$, $y \in D$. Например, если Λ – равномерно положительный на конусе K функционал, то при любом $h > 0$ множество $D(\Lambda, h) = \{x \in K : \Lambda(x) = h\}$ образует базу конуса K. Если $K = K(F)$, то существует равномерно положительный на конусе K функционал [4, с. 40; 8, с. 21].

Подробно обсудим этот вопрос в частном случае, когда Z совпадает с конечномерным евклидовым пространством H. В этой ситуации сопряжённое к $Z = H$ пространство Z^* можно отождествить с H. Введём обозначения: $Kv(H)$ – совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств пространства H; $\mathbb{B} = \{v \in H : |v| \leqslant 1\}$ – шар единичного радиуса с центром в нуле θ; если $F_1, F_2 \in Kv(H)$, то $h_0(F_1, F_2) = \min\{t \geqslant 0 : F_2 \subset F_1 + t\mathbb{B}\}$ –

уклонение множества F_2 от множества F_1. Вообще говоря, $h_0(F_1,F_2)\neq h_0(F_2,F_1)$. Если $v_0\in H$, $F\in Kv(H)$, то

$$h_0(v_0,F)=\min_{v\in F}|v-v_0|,\quad h_0(F,v_0)=\max_{v\in F}|v-v_0|.$$

Число $h(F_1,F_2)=\max\{h_0(F_1,F_2),h_0(F_2,F_1)\}$ называют *расстоянием* (по Хаусдорфу) между F_1, F_2. Относительно метрики Хаусдорфа $Kv(H)$ есть полное метрическое пространство.

Метрической проекцией нуля θ *на множество* F *класса* $Kv(H)$ называют такой элемент $v=\mathrm{Pr}(F)$ из F, что $|v|=\min\{|y|:y\in F\}$. Проекция определяется однозначно и непрерывно зависит от F. Более точно, справедливо неравенство

$$|\mathrm{Pr}(F_1)-\mathrm{Pr}(F_2)|\leqslant 2\sqrt{2R}(h(F_1,F_2))^{1/2},$$

где $R=\max\{h_0(F_1,\theta),h_0(F_2,\theta)\}$ [9, с. 186, 187]. Таким образом, проекция $\mathrm{Pr}(F)$ удовлетворяет локальному условию Гёльдера порядка $1/2$.

Лемма 3. *Пусть* $F\in Kv(H)$, $\theta\notin F$, $\psi=\mathrm{Pr}(F)$, $r=|\psi|$, $R=h_0(F,\theta)=\max\{|v|:v\in F\}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$(\psi,z)\geqslant\frac{r^2}{R}|z|,\quad z\in K(F).$$

Доказательство. Поскольку $\psi=\mathrm{Pr}(F)$, то

$$(\psi,v-\psi)\geqslant 0,\quad v\in F.$$

Следовательно, $(\psi,v)\geqslant(\psi,\psi)=r^2$, $v\in F$. Если $z\in K(F)$, то $z/t\in F$ при некотором положительном t. Отсюда следуют оценки

$$r\leqslant\frac{|z|}{t}\leqslant R,\quad \left(\psi,\frac{z}{t}\right)\geqslant r^2,\quad (\psi,z)\geqslant r^2t\geqslant\frac{r^2}{R}|z|.$$

Лемма доказана.

В лемме 3 указывается вполне определённый способ построения равномерно положительного функционала Λ на конусе $K(F)$. Соответствие $K(F)\to\Lambda=\mathrm{Pr}(F)$ не только однозначно, но и квалифицированно непрерывно.

Пусть ψ – ненулевой элемент из H, $0<\delta<|\psi|$, $K(\psi,\delta)=\{z\in H:(\psi,z)\geqslant\delta|z|\}$. Множество $K(\psi,\delta)$ называют *эллиптическим конусом* в пространстве H. Из леммы 3 следует, что любой конус $K(F)$ принадлежит более широкому эллиптическому конусу. Так как в конечномерном пространстве любой конус совпадает с некоторым конусом $K(F)$ (см., например, [4, с. 40; 8, с. 23], то любой конус в H есть часть некоторого эллиптического конуса.

2. Обратные неравенства. Пусть $l\in\mathbb{N}$ и $l>1$. Как и выше, $M_1(\mathbb{R})$ и $M_1^l(\mathbb{R})$ – пространства функций $f:\mathbb{R}\to H$, наделённые соответствующими нормами. Введём в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\mathscr{L}_0(x)=x^{(l)},\quad \mathscr{L}_1(x)=\sum_{i=0}^{l-1}P_ix^{(i)},\quad \mathscr{L}(x)=\mathscr{L}_0(x)+\mathscr{L}_1(x).$$

Здесь P_i, $i=\overline{0,l-1}$, – $m\times m$-матрицы, удовлетворяющие условиям леммы 1 на каждом отрезке J_τ с константами, не зависящими от τ. Более точно, если v – элемент матрицы P_i, то верны оценки

$$\|v;L_1(I_\tau)\|\leqslant R_0,\quad i=\overline{0,l-2},$$

$$\|v;L^\Phi(J_\tau)\|\leqslant R_0,\quad i=l-1,$$

константа R_0 и N-функция Φ не зависят от τ. Предположение относительно матрицы $P_{l-1}(t)$ эквивалентно следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_T \|P_{l-1}(\tau + t)\|\,dt < \varepsilon$$

для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и всякого измеримого множества $T \subset [0,1]$, $\operatorname{mes}_1 T < \delta$ (см., например, [10, с. 171])*). Из леммы 1 следует оценка

$$\|\mathscr{L}_1(x); L(J)\| \leqslant \eta \|x; W^l(J)\| + k(\eta)\|x; L_1(J)\|, \tag{4}$$

константа η может быть любой положительной величиной, функция $k(\eta)$ может зависеть от J, однако для отрезков $J = [a,b]$, длины которых удовлетворяют условиям $0 < d_1 \leqslant b - a \leqslant d_2 < \infty$, d_1, d_2 – фиксированные положительные числа, функцию $k(\eta)$ можно взять одной и той же. Из оценки (4) следует неравенство коэрцитивности.

Лемма 4. *Для функций x из $M_1^l(R)$ справедливо неравенство*

$$c_1(J)\|x; W^l(J)\| \leqslant \|\mathscr{L}(x); L_1(J)\| + \|x; L_1(J)\|,$$

где положительное число $c_1(J)$ зависит от J, однако для отрезков J, длины которых расположены между двумя положительными числами, это число можно взять постоянным.

Доказательство следует из неравенства треугольника

$$\|\mathscr{L}(x); L_1(J)\| \geqslant \|x^{(l)|}; L_1(J)\| - \|\mathscr{L}_1(x); L(J)\|$$

и вытекающей из (4) оценки

$$\|\mathscr{L}_1(x); L_1(J)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x; W_1^l(J)\| + k\left(\frac{1}{2}\right)\|x; L_1(J)\|.$$

Пусть ниже $\psi(t)$ – функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

1) $\psi \in C_0(\mathbb{R})$;
2) $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)| > 0$.

Таким образом, функция $\psi\colon \mathbb{R} \to H$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и равномерно ограничена от 0 и ∞:

$$0 < r_0 \leqslant |\psi(t)| \leqslant R_0 < \infty.$$

Сопоставим функции $\psi(t)$ и постоянной $\delta \in (0, r_0)$ переменный эллиптический конус

$$K(\psi(t), \delta) = \{v \in H : (\psi(t), v) \geqslant \delta |v|\}.$$

Функцию $\psi(t)$ для дальнейшего удобно считать достаточно гладкой. Это позволяет сделать следующая

Лемма 5. *Для любого переменного эллиптического конуса $K(\psi(t), \delta)$ существует содержащий его переменный эллиптический конус $K(\psi_1(t), \delta_1)$, для которого $\psi_1 \in C_0(\mathbb{R}) \bigcap C^\infty(\mathbb{R})$ и справедливы оценки (2).*

Лемма 5 следует из леммы 2.

Сопоставим переменному эллиптическому конусу $K(\psi, \delta)$ множество $\tilde{K}(\psi, \delta)$ функций z класса $M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих почти при всех t неравенству

$$(\psi(t), z(t)) \geqslant \delta |z(t)|. \tag{5}$$

Условие (5) означает, что $z(t) \in K(\psi(t), \delta)$ почти при всех t.

*) Норма $\|P\|$ матрицы P размерности $m \times m$ определяется равенством $\|P\| = \max\{|Pv| : v \in H,\ |v| \leqslant 1\}$.

Через $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{L}(x)\in\in\tilde{K}(\psi,\delta)$. Множество $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верны обратные неравенства.

Теорема 1. *Существует такая постоянная $c=c(\mathscr{L},\psi,\delta)$, что для всех функций x класса $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верно неравенство*

$$\|x;M_1^l\|\leqslant c(\mathscr{L},\psi,\delta)\|x;M_1\|. \tag{6}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция ψ бесконечно дифференцируема и выполнены аналогичные (2) условия ограниченности производных

$$|\psi^{(i)}(t)|\leqslant\beta_i<\infty,\quad t\in\mathbb{R},\quad i\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Если $x\in K(\mathscr{L},\psi,\delta)$, то сужение функции $v(t)=(x(t),\psi(t))$ на любой отрезок J принадлежит классу $C^{l-1}(J)$. Зафиксируем действительное число τ. Применив к функции $v(t)$ и отрезкам $[\tau-1,\tau]$ и $[\tau+1,\tau+2]$ предложение 3, получим соотношения

$$\min_{t\in[\tau-1,\tau]}|v^{(l-1)}(t)|\leqslant\lambda_{l-1}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}|v(t)|\,dt,\quad \min_{t\in[\tau+1,\tau+2]}|v^{(l-1)}(t)|\leqslant\lambda_{l-1}\int\limits_{\tau+1}^{\tau+2}|v(t)|\,dt. \tag{8}$$

Ввиду (8) существуют такие числа $t_0\in[\tau-1,\tau]$ и $t_1\in[\tau+1,\tau+2]$, что выполнены неравенства

$$|v^{l-1}(t_0)|\leqslant\lambda_{l-1}\int\limits_{\tau-1}^{\tau}|v(t)|\,dt,\quad |v^{l-1}(t_1)|\leqslant\lambda_{l-1}\int\limits_{\tau+1}^{\tau+2}|v(t)|\,dt. \tag{9}$$

Введём отрезок $J=[t_0,t_1]$, длина t_1-t_0 которого $1\leqslant t_1-t_0\leqslant 3$. Поскольку $x\in\in K(\mathscr{L},\psi,\delta)$, то почти при всех t справедлива оценка

$$(\psi(t),\mathscr{L}(x)(t))\geqslant\delta|\mathscr{L}(x)(t)|. \tag{10}$$

Интегрируя (10) по отрезку J, приходим к соотношению

$$Q:=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),\mathscr{L}(x)(t))\,dt\geqslant\delta\|\mathscr{L}(x);L_1(J)\|. \tag{11}$$

Из неравенства коэрцитивности следует оценка

$$\|x;W^l(J)\|\leqslant c_1(Q+\|x;L_1(J)\|). \tag{12}$$

Теперь оценим правую часть (12) сверху. Очевидно, что

$$\|x;L_1(J)\|\leqslant\|x;L_1(\tau_1,\tau+2)\|.$$

Более трудно оценить сверху определяемое из (11) число Q. Поскольку $\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}_0(x)+\mathscr{L}_1(x)$, то $Q=Q_0+Q_1$, где

$$Q_0:=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),x^{(l)}(t))\,dt,\quad Q_1:=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),\mathscr{L}_1(x)(t))\,dt.$$

Интегрирование по частям влечёт за собой равенство

$$Q_0=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),x^{(l)}(t))\,dt=Q_{01}-Q_{02},$$

в котором

$$Q_{01} = (\psi(t), x^{(l-1)}(t))|_{t_0}^{t_1}, \quad Q_{0,2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\psi'(t), x^{(l-1)}(t))\,dt.$$

Таким образом,

$$Q = Q_{01} - Q_{02} + Q_1.$$

Правило дифференцирования произведения приводит к равенству

$$Q_{01} = (\psi(t), x(t))^{(l-1)}|_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=0}^{l-2} \binom{l-1}{i} (\psi^{(l-1-i)}(t), x^{(i)}(t))|_{t_0}^{t_1} = I_1 + I_2. \tag{13}$$

Для оценки первого слагаемого I_1 в правой части (13) применим соотношения (9), связанные со специальным выбором чисел t_0, t_1, и получим

$$|I_1| = |(\psi(t), x(t))^{(l-1)}|_{t_0}^{t_1}| \leqslant c_1 \int\limits_{\tau-1}^{\tau+2} |x(t)|\,dt, \tag{14}$$

где c_1 – некоторая постоянная. Второе слагаемое I_2 оценивается следующим образом:

$$|I_2| \leqslant \eta\|x; W^l(J)\| + k_1(\eta)\|x; L_1(J)\|. \tag{15}$$

Для доказательства (15) достаточно учесть неравенства (7) и полную непрерывность оператора вложения пространства $W^l(J)$ в пространство $C^k(J)$ при $k < l-1$. Постоянная η может быть взята сколь угодно малой в силу неравенства Эрлинга. Аналогичными рассуждениями устанавливается оценка интегрального слагаемого $-Q_{02} + Q_1$:

$$|-Q_{02} + Q_1| \leqslant \eta\|x; W^l\| + k_2(\eta)\|x; L_1(J)\|,$$

из которой и неравенств (14), (15) следует соотношение

$$|Q| \leqslant 2\eta\|x; W^l(J)\| + k(\eta)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

где постоянная $k(\eta)$ не зависит от x и τ.

Объединив (12) с полученной выше оценкой сверху числа $|Q|$, имеем неравенство

$$\|x; W^l(J)\| \leqslant \varepsilon\|x; W^l(J)\| + C(\varepsilon)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

где $\varepsilon = 2c_1\eta$. Постоянная ε за счёт малости η может быть сделана сколь угодно малой. Положив $\varepsilon = 0,5$, приходим к неравенству

$$\|x; W^l(J)\| \leqslant 2C(1/2)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|,$$

которое (так как $J_\tau \subset J = [t_0, t_1]$) влечёт за собой оценку

$$\|x; W^l(J_\tau)\| \leqslant 2C(1/2)\|x; L_1(\tau-1, \tau+2)\|. \tag{16}$$

Ввиду произвольности τ из оценки (16) следует неравенство (6). Теорема доказана.

В определённом смысле оценка (16) более информативна, чем вытекающее из неё неравенство (6).

3. Модификации и обобщения. Обсудим модификации теоремы 1 для случая, когда вместо дифференциального оператора $\mathscr{L}$ рассматривается дифференциальный оператор

$$\mathscr{A}(x) = \sum_{i=0}^{l} P_i x^{(i)}.$$

Коэффициенты P_i при $i < l$ – квадратные матрицы размеров $m \times m$, элементы которых удовлетворяют требованиям теоремы 1. Квадратная матрица $P_l(t)$ при каждом t обратима, причём $P_l(t)$ и обратная к ней матрица $P_l^{-1}(t)$ равномерно непрерывны и равномерно ограничены на $\mathbb{R}$, т.е

$$\|P_l(t)\| + \|P_l^{-1}(t)\| < a_1 < \infty.$$

Пусть $K(\psi(t), \delta)$ – переменный эллиптический конус в пространстве H. Сопоставим конусу $K(\psi(t), \delta)$ множество $\tilde{K}(\psi, \delta)$ функций z класса $M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющих почти при всех t неравенству (5). Через $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{A}(x) \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Множество $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ верны обратные неравенства.

Теорема 2. *Существует такая постоянная $c = c(\mathscr{A}, \psi, \delta)$, что для всех функций x класса $K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$ верно неравенство*

$$\|x; M_1^l\| \leqslant c(\mathscr{A}, \psi, \delta)\|x; M_1\|.$$

Доказательство. Пусть $x \in K(\mathscr{A}, \psi, \delta)$. Тогда $\mathscr{A}(x) = z$, где $z \in \tilde{K}(\psi, \delta)$. Это равносильно равенству $\mathscr{A}_1(x) = z_1$, где

$$\mathscr{A}_1(x) = x^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} P_l^{-1} P_i x^{(i)}, \quad z_1 = P_l^{-1} z.$$

Положим $\psi_1(t) = P_l^*(t)\psi(t)$. Из определения ψ_1 вытекает, что функция $\psi_1(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и равномерно ограничена от нуля и ∞. Верны соотношения

$$(\psi_1(t), z_1(t)) = (\psi(t), z(t)) \geqslant \delta|z(t)|.$$

Проведённые рассуждения влекут за собой равенство $K(\mathscr{A}, \psi, \delta) = K(\mathscr{A}_1, \psi_1, \delta)$. Следовательно, справедливо доказываемое обратное неравенство, в котором $c(\mathscr{A}, \psi, \delta) = c(\mathscr{A}_1, \psi_1, \delta)$. Теорема доказана.

Приведём более "геометричный" вариант теоремы 2. Обозначим через $F(t)$ мультиотображение $F\colon \mathbb{R} \to Kv(H)$, удовлетворяющее условиям: f_1) отображение F из $\mathbb{R}$ в $Kv(H)$ равномерно непрерывно; f_2) справедливы неравенства

$$0 < r \leqslant h_0(\theta, F(t)), \quad h_0(F(t), \theta) \leqslant R < \infty, \tag{17}$$

постоянные r и R не зависят от t.

В силу (17) при любом t компакт $F(t)$ отстоит от θ на расстояние не меньшее, чем $r > 0$. Вместе с тем $F(t)$ содержится в шаре $R\mathbb{B} = \{v \in H : |v| \leqslant R\}$. Введём в рассмотрение функцию $\psi(t) = \Pr(F(t))$ – метрическую проекцию θ на $F(t)$. Функция $\psi(t)$ равномерно ограничена от θ и ∞: $0 < r \leqslant |\psi(t)| \leqslant R < \infty$. Отсюда вытекает оценка

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant 2\sqrt{2R}(h(F(t_1), F(t_2)))^{1/2},$$

из которой в силу условия f_1) следует равномерная непрерывность функции $\psi(t)$.

Пусть $K(F(t))$ – переменный конус в пространстве H, порождаемый множеством $F(t)$. Из леммы 2 следует неравенство

$$(\psi(t), z) \geqslant \frac{r^2}{R}|z|, \quad z \in K(F(t)),$$

которое эквивалентно включению

$$K(F(t)) \subset K\biggl(\psi(t), \frac{r^2}{R}\biggr).$$

Таким образом, при выполнении условий $f_1)$ и $f_2)$ переменный конус $K(F(t))$ составляет часть переменного эллиптического конуса вида $K(\psi(t),\delta)$.

Обозначим через $K(\mathscr{A},K(F(t)))$ совокупность функций x класса $M^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{A}(x)(t)\in K(F(t))$ почти при всех действительных t. Из проведённых выше рассуждений следует включение

$$K(\mathscr{A},K(F(t)))\subset K(\mathscr{A},\psi,\delta)$$

при $\delta=r^2/R$.

Теорема 3. *Пусть мультиотображение $F(t)$ удовлетворяет условиям $f_1)$, $f_2)$. Тогда существует такая постоянная $c=c(\mathscr{A},F(t))$, что для функций x класса $K(\mathscr{A},K(F(t)))$ имеет место неравенство*

$$\|x;M_1^l\|\leqslant c(\mathscr{A},F(t))\|x;M_1\|.$$

Доказательство следует из включения $K(\mathscr{A},K(F(t)))\subset K(\mathscr{A},\psi,\delta)$ при $\delta=r^2/R$ и теоремы 2.

Теоремой 3 удобно пользоваться в тех случаях, когда переменный конус $K(t)$, фигурирующий в теоремах 1–3, порождается множеством $F(t)$. Такого рода построение часто используется (см., например, [3]) и, по существу, является универсальным в конечномерном пространстве H.

Остановимся на обобщениях теоремы 1, относящихся к случаю, когда $z=\mathscr{L}(x)$ есть векторная мера. С этой целью заменим локальное условие типа $z(t)\in K(\psi(t),\delta)$ его интегральным вариантом. Вместо конуса $K(\psi(t),\delta)$ рассмотрим конус

$$K_1(\psi(t),\delta):=\left\{z\in M_1(\mathbb{R}):\int\limits_{t_0}^{t_1}(\psi(t),z(t))\,dt\geqslant\delta\|z;L_1[t_0,t_1]\|\right\}. \tag{18}$$

В равенстве (18) t_0, t_1 – произвольные действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $1\leqslant t_1-t_0\leqslant 3$, функция $\psi(t)$ и постоянная $\delta>0$ не зависят от t_0, t_1. Через $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ обозначим совокупность функций x класса $M_1^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{L}(x)\in K_1(\psi(t),\delta)$. Множество $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ образует клин в пространстве $M_1^l(\mathbb{R})$. Для элементов клина $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верны обратные неравенства (6), (16). Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что они сохраняют силу при замене клина $K(\mathscr{L},\psi,\delta)$ клином $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$. Сформулируем вариант оценки (16).

Теорема 4. *Существует такая постоянная $c_1=c_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$, что для функций x класса $K_1(\mathscr{L},\psi,\delta)$ верно неравенство*

$$\|x;W^l(J_\tau)\|\leqslant c_1(\mathscr{L},\psi,\delta)\|x;L_1(\tau-1,\tau+2)\|.$$

Вариацией вектор-функции $g\colon J\to H$ на отрезке $J=[a,b]$ называется число

$$V_a^b g=\sup\sum_{i=1}^n|g(s_i)-g(s_{i-1})|,$$

где точная верхняя грань берётся по всем возможным разбиениям отрезка J точками

$$s_0=a<s_1<\ldots<s_{n-1}<s_n=b.$$

Совокупность вектор-функций $g\colon J\to H$ с ограниченной вариацией на отрезке J образует линейное пространство, обозначаемое символом $BV(J,H)$. Абсолютно непрерывная на отрезке J функция g принадлежит классу $BV(J,H)$. Имеет место равенство

$$V_a^b g=\|g';L(J)\|.$$

Если $g(t)$ – первообразная функции $z(t)$ класса $M_1(\mathbb{R})$, то неравенство, фигурирующее в (18), эквивалентно оценке

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), dg(t)) \geqslant \delta V_{t_0}^{t_1} g. \tag{19}$$

В левой части (19) находится интеграл от функции $\psi(t)$ по векторной мере $dg(t)$, в правой части (19) фигурирует вариация абсолютно непрерывной функции $g(t)$ по отрезку $[t_0, t_1]$. От абсолютной непрерывности функции $g(t)$ можно отказаться, однако при этом придётся рассматривать дифференциальные неравенства и уравнения в некотором обобщённом смысле.

Согласно теореме Ф. Рисса любой линейный функционал Λ на пространстве $E = C(J, H)$ допускает интегральное представление

$$\Lambda(\varphi) = \int_J \varphi(t) dg(t), \quad \varphi \in C(J, H), \tag{20}$$

где g – функция класса $BV(J, H)$. Будем предполагать, что функция g непрерывна справа; в этом случае функционал Λ определяет функцию g с точностью до постоянной. Пространство $E^* = (C(J))^*$, сопряжённое к $E = C(J, H)$, можно отождествить с пространством $BV(J)$. В пространстве E^* можно обычным образом ввести сильную и слабую топологии. Справедливо равенство

$$\|\Lambda; E^*\| = V_a^b g,$$

где функционал Λ и функция g связаны равенством (20). Сходимость $\Lambda_n \to \Lambda$ в слабой топологии $\sigma(E^*, E)$ означает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi) = \Lambda(\varphi), \quad \varphi \in E = C(J, H).$$

Каждая функция z класса $L(J, H)$ порождает линейный функционал

$$\Lambda(\varphi) = \int_J (\varphi(t), z(t))\, dt$$

класса E^*. Подобный функционал Λ будем называть *абсолютно непрерывным*, а функцию z, определяемую им с точностью до эквивалентности, *плотностью* Λ. Это позволяет идентифицировать пространство $L(J, H)$ с некоторым подпространством пространства E^*.

Пространство $L(J, H)$ составляет собственную часть пространства E^*. Вместе с тем имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *Для любого функционала Λ класса E^* существует такая слабо сходящаяся к Λ последовательность абсолютно непрерывных функционалов Λ_n, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n; E^*\| = \|\Lambda; E^*\|.$$

Предложение 4 установлено в работе [5].

Введём некоторые функциональные пространства. Пусть l – натуральное число. Если функция $x(t)$ класса $L(J, H)$ такова, что для некоторого функционала Λ класса E^* и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(J, H)$ справедливо соотношение

$$\int_J (x(t)\varphi^{(l)}(t))\, dt = (-1)^l \Lambda(\varphi),$$

то будем говорить, что l-я обобщённая производная функции $x(t)$ есть функционал Λ (или соответствующая векторная мера Радона): $x^{(l)} = \Lambda$. Через $V^l(J, H)$ обозначим совокупность суммируемых по отрезку J функций $x \in L_1(J,H)$, для которых $x^{(l)} \in E^*$. Линейное пространство $V^l(J,H)$ есть дифференциальная надстройка над $E^*(J)$. Равенство

$$\|x; V^l(J)\| = \|x; L(J)\| + \|x^{(l)}; E^*\| \tag{21}$$

определяет норму в $V^l(J,H)$, относительно которой $V^l(J,H)$ – банахово пространство. Справедливо строгое вложение $W^l(J) \subset V^l(J,H)$, позволяющее идентифицировать множество $W^l(J)$ с некоторым собственным подпространством пространства $V^l(J,H)$.

Разумеется, в пространстве $V^l(J,H)$ можно ввести нормы, отличные от (21). Вопрос об эквивалентности различных норм связан с теоремами вложения. Пространство $V^1(J,H)$ совпадает с пространством $BV(J,H)$ функций $x\colon J \to H$, имеющих ограниченное изменение на отрезке $J=[a,b]$. Норму в $BV(J)$ можно определить равенством

$$\|x; BV\| = \|x; L(J)\| + V_a^b x.$$

Отсюда вытекает непрерывность оператора вложения $V^1(J,H)$ в пространство $L_\infty(J,H)$ и компактность вложения $V^1(J,H)$ в пространство $L(J,H)$. Функция x класса $V^1(J,H)$ имеет конечное или счётное число точек разрыва, а в каждой точке $\tau \in [a,b)$ (соответственно $(a,b]$) существуют односторонние пределы

$$x(\tau+0) = \lim_{t\to\tau+0} x(t), \quad x(\tau-0) = \lim_{t\to\tau-0} x(t).$$

Если $x \in V^l(J,H)$ и $1 \leqslant k < l$, то $x^{(k)} \in V^{l-k}(J,H)$ и оператор дифференцирования $D^k = x^{(k)}$ непрерывен. В частности, при $l>1$ оператор D^{l-1} действует и непрерывен из $V^l(J,H)$ в $BV(J,H)$. Это позволяет свести вопрос о теоремах вложения для пространства $V^l(J,H)$ к аналогичному вопросу для $BV(J,H)$. Если $x \in V^l(J,H)$ и $l>1$, то при $0 \leqslant k < < l-1$ функция $D^k x$ непрерывна на J, а в каждой точке $\tau \in [a,b)$ (соответственно $(a,b]$) существуют односторонние пределы

$$D^{l-1}x(\tau+0) = \lim_{t\to\tau+0} D^{(l-1)}x(t), \quad D^{l-1}x(\tau-0) = \lim_{t\to\tau-0} D^{(l-1)}x(t).$$

Лемма 6. *Пусть x_n – ограниченная в пространстве $V^l(J,H)$ последовательность. Тогда существуют такая её подпоследовательность x_{i_n} и такая функция x из $V^l(J,H)$, что*

$$D^l x_{i_n} \to D^l x \ \ \textit{в} \ \ \sigma(C_0^*(J), C_0(J)) \quad \textit{и} \quad D^k x_{i_n} \to D^k x \ \ \textit{в} \ \ L(J) \ \ \textit{при} \ \ k<l.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Алаоглу–Бурбаки [11, с. 118] о слабой компактности поляры и замкнутости оператора дифференцирования. Второе утверждение вытекает из теорем вложения. Лемма доказана.

Следствие 1. *В условиях леммы 6 справедливы соотношения*

$$\|x; V^l(J)\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_{i_n}; V^l(J)\|, \quad \|x; L(J)\| = \lim_{n\to\infty} \|x_{i_n}; L(J)\|.$$

Обозначим через $V^l(J,a)$ подпространство $V^l(J)$, состоящее из функций x, удовлетворяющих условиям

$$x^{(i)}(a+0) = 0, \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Очевидно, что коразмерность пространства $V^l(J,a)$ равна lm. Пространство $V^l(J,H)$ есть прямая сумма $V^l(J,a)$ и ядра $\operatorname{Ker}(\mathscr{L})$ оператора

$$\mathscr{L} : V^l(J,H) = V^l(J,a) \bigoplus \operatorname{Ker}(\mathscr{L}).$$

В силу хорошо известных результатов о задаче Коши для импульсных систем (см., например, [12, гл. 4]) сужение оператора $\mathscr{L}$ на $V^l(I,\tau)$ задаёт гомеоморфизм пространств $V^l(J,a)$ и E^*. Верно следующее утверждение.

Предложение 5 [12, с. 163–167]. *Пусть коэффициенты дифференциального оператора $\mathscr{L}$ суммируемы по отрезку $J = [a,b]$. Тогда для любого функционала $\Lambda \in E^*$ существует единственное решение задачи Коши*

$$\mathscr{L}(x) = \Lambda, \quad x^{(i)}(a+0) = 0, \quad i = \overline{0, l-1}. \tag{22}$$

Оператор $\mathscr{B}$, сопоставляющий мере функционала Λ решение задачи Коши (22), действует из E^* в $V^l(J,a)$ и непрерывен. Существует такая константа $c(J)$, что

$$\|u; V^l(J)\| \leqslant c(J)\|\mathscr{L}(u); C_0^*(J)\|, \quad u \in V^l(J,a). \tag{23}$$

Неравенство коэрцитивности (23) эквивалентно оценке

$$\|\mathscr{B}(\Lambda); V^l(J)\| \leqslant c(J)\|\Lambda; E^*\|, \quad \Lambda \in E^*.$$

Лемма 7. *Пусть* $\Lambda_n \in E^*$, $u_n = \mathscr{B}(\Lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть*

$$\Lambda_n \to \Lambda \ \text{ в } \ \sigma(E^*, E) \quad \text{и} \quad u = \mathscr{B}(\Lambda).$$

Тогда

$$D^l u_n \to D^l u \ \text{ в } \ \sigma(E^*, E), \quad D^i u_n \to D^i u \ \text{ в } \ L_1(J,H), \quad i = \overline{0, l-1}.$$

Доказательство. Сходимость $D^l u_n \to D^l u$ в $\sigma(E^*, E)$ следует из замкнутости оператора D^l относительно топологии $\sigma(E^*, E)$. Второе утверждение леммы вытекает из теорем вложения. Лемма доказана.

Введём банахово пространство $MV(\mathbb{R}, H)$, состоящее из функций $g \colon \mathbb{R} \to H$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|g; MV\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} V_\tau^{\tau+1} g.$$

Сужение каждой функции g класса $MV(\mathbb{R}, H)$ на любой отрезок $J = [a,b]$ имеет ограниченную вариацию на J и порождает на пространстве $E = C(J,H)$ линейный функционал Λ. Его норма в пространстве E^*, сопряжённом к пространству E, совпадает с вариацией функции g на отрезке $J = [a,b]$. Далее, $MV^l(\mathbb{R})$ – банахово пространство функций $x \colon \mathbb{R} \to H$, сужения которых на любой отрезок $J_\tau = [\tau, \tau+1]$ принадлежат $V^l(J_\tau)$, и имеет смысл и конечна норма

$$\|x; MV^l\| = \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|x; V^l(J_\tau)\|.$$

Пусть ψ – функция класса $C_0(\mathbb{R})$, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < r_0 \leqslant |\psi(t)| \leqslant R_0 < \infty \quad \text{и} \quad 0 < \delta < r_0.$$

Обозначим через $K_2(\psi, \delta)$ часть класса $MV(\mathbb{R}, H)$, состоящую из функций $g \colon \mathbb{R} \to H$, удовлетворяющих неравенству

$$\int_a^b (\psi(t), dg(t)) \geqslant \delta V_a^b g, \tag{24}$$

где a и b – произвольные действительные числа, удовлетворяющие оценкам $1 \leqslant b - a \leqslant 3$. В случае $a = t_0$, $b = t_1$ и абсолютно непрерывной на отрезке $J = [a,b]$ функции $g(t)$ неравенство (24) совпадает с фигурирующим в определении (18) неравенством.

Включение $K_1(\psi, \delta) \subset K_2(\psi, \delta)$ является строгим. Через $K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$ обозначим совокупность функций x класса $MV^l(\mathbb{R})$, для которых $\mathscr{L}(x) \in K_2(\psi(t), \delta)$. Множество $K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$ образует клин в пространстве $MV^l(\mathbb{R})$, содержащий клин $K_1(\mathscr{L}, \psi, \delta)$ в качестве собственной части. Вместе с тем аналоги обратных неравенств (6), (16) справедливы и для клина $K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$.

Теорема 5. *Существует такая постоянная* $c_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$, *что для всех функций* x *класса* $K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$ *верно неравенство*

$$\|x; V^l(J_\tau)\| \leqslant c_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)\|x; L_1(\tau - 1, \tau + 2)\|. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $x \in K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $a = \tau - 1$, $b = \tau + 2$, $J = [a, b]$. Обозначим через v решение задачи Коши

$$\mathscr{L}(v) = 0, \quad v^{(i)}(a) = x^{(i)}(a + 0), \quad i = \overline{0, l - 1}.$$

Функция $u = x - v$ принадлежит пространству $V^l(J, H)$ и $\mathscr{L}(u) = \mathscr{L}(x) = \Lambda$. Функционал Λ принадлежит пространству E^*, сопряжённому к пространству $E = C(J)$. Выберем слабо сходящуюся к Λ последовательность абсолютно непрерывных функционалов Λ_n так, что справедливо заключение предложения 4. Поскольку $x \in K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$, то справедливо неравенство

$$\Lambda(\psi) \geqslant \delta\|\Lambda; E^*\|,$$

следствием которого является оценка

$$\Lambda_n(\psi) \geqslant \frac{\delta}{2}\|\Lambda; E^*\|, \quad n > n_0,$$

где n_0 – достаточно большое натуральное число.

Положим

$$u_n = \mathscr{B}(\Lambda_n), \quad x_n = u_n + v.$$

Очевидно, что $x_n \in \mathscr{K}_1(\mathscr{L}, \psi, \delta/2)$. Применив к функциям x_n теорему 4, приходим к оценкам

$$\|x_n; W^l(J_\tau)\| \leqslant c_1(\mathscr{L}, \psi, \delta/2)\|x_n; L_1(a, b)\|. \tag{26}$$

Согласно лемме 7 справедливы соотношения

$$D^i x_n \to D^i x \ \text{ в } \ \sigma(E^*, E), \quad i = \overline{0, l}, \quad \text{и} \quad x_n \to x \ \text{ в } \ L(J).$$

Переходя в (26) к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство (25), в котором

$$c_2(\mathscr{L}, \psi, \delta) = c_1(\mathscr{L}, \psi, \delta/2).$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для всех функций* x *класса* $K_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)$ *верно неравенство*

$$\sup_{\tau \in R}\|x; V^l(J_\tau)\| \leqslant 3c_2(\mathscr{L}, \psi, \delta)\sup_{\tau \in \mathbb{R}}\|x; L_1(J_\tau)\|.$$

Сюрьективность дифференциальных операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{A}$ в рассматриваемых выше функциональных пространствах не предполагалась. К данному кругу вопросов можно добавить проблему обратимости этих операторов, интегральное представление операторов $\mathscr{L}^{-1}$, $\mathscr{A}^{-1}$, положительность функции Грина относительно переменных конусов. Применительно к пространствам почти периодических функций ряд важных результатов в указанных направлениях установлен в [3, гл. 1, 2]. Интересные приложения конусных методов к задачам автоматического регулирования приведены в книге [4, гл. 4].

Аналогичные вопросы рассматривались в работе [5]. Новизна представленных выше результатов связана с двумя обстоятельствами: в отличие от [5] рассматривается переменный, а не постоянный конус $\mathbb{R}^m_+$ в пространстве $\mathbb{R}^m$; обратные неравенства из [5] имеют характер внутренних оценок решений дифференциальных неравенств.

Установленные в статье результаты охватывают пространства функций, определённых на всей действительной оси $\mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
2. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
3. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М., 1970.
4. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. М., 1985.
5. *Климов В.С.* Внутренние оценки решений линейных дифференциальных неравенств // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1034–1044.
6. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
7. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
8. *Вулих Б.З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах. Калинин, 1978.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2007.
10. *Богачёв В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. М.; Ижевск, 2011.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1977.
12. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М., 1971.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.
После доработки 24.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1172–1180

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.4

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. В. Е. Круглов

Решена система рекуррентных соотношений третьего порядка, связывающих коэффициенты полиномиальных собственных функций (ПСФ) дифференциального уравнения. Получены рекуррентное соотношение для трёх последовательных ПСФ и формула дифференцирования ПСФ. Рассмотрены дифференциальные уравнения, одно из которых обобщает дифференциальные уравнения Эрмита и Лагерра, а другое является обобщением дифференциального уравнения Якоби. Для этих уравнений построены функции, приводящие их к самосопряжённому виду, и найдены условия, при которых эти функции становятся весовыми. Приведены примеры, когда для невесовых функций ПСФ не имеют действительных нулей.

DOI: 10.31857/S0374064123090029, EDN: WONVOB

1. Введение. Постановка задачи. В работе [1] строились полиномиальные решения типа

$$y_n(x) = e_0^{(n)} x^{\varepsilon_n} + e_1^{(n)} x^{\varepsilon_n - 1} + \ldots + e_n^{(n)} x^{\varepsilon_n - n}$$

следующего дифференциального уравнения:

$$x^2(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'' + x(A_2x^2 + B_2x + C_2)y' + (A_3x^2 + B_3x + C_3)y = 0. \tag{1}$$

Подставив $y_n(x)$ в это уравнение и приравняв к нулю коэффициенты при степенях x, получим систему рекуррентных соотношений, среди которых (из равенства нулю коэффициента при наименьшей степени x, определяющего уравнение [2, с. 215]) находим значения параметра ε_n, именно

$$(\varepsilon_n - n)(\varepsilon_n - n + 1)C_1 + (\varepsilon_n - n)C_2 + C_3 = 0, \tag{2}$$

а при наибольшей степени x справедливо равенство

$$\varepsilon_n(\varepsilon_n - 1)A_1 + \varepsilon_n A_2 + A_3 = 0. \tag{3}$$

В уравнении (1) положим $C_2 = C_3 = B_3 = 0$, $C_1 \neq 0$. Тогда из уравнения (2) следует $\varepsilon_n^{(1)} = n$, $\varepsilon_n^{(2)} = n - 1$. Выберем $\varepsilon_n = n$ и, учитывая (3), придём к уравнению

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0. \tag{4}$$

Получена, как указано в [3, с. 274], задача на нахождение собственных функций (решений уравнения (4)) вида

$$y_n(x) = e_0^{(n)} x^n + e_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + e_n^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

соответствующих собственным числам

$$\lambda_n = -n(A_2 + (n-1)A_1). \tag{6}$$

Заметим, что непосредственно из уравнения (4) следует $y_0(x) \equiv 1$, для дальнейшего положим $y_{-1}(x) \equiv 0$.

Функции (5) будем называть *полиномиальными собственными функциями* (ПСФ) уравнения (4).

Автору не удалось найти конкретную информацию о явном виде ПСФ уравнения (4), обычно указан способ их получения. В данной работе рассмотрены два способа получения явных формул ПСФ уравнения (4), приведены формулы ПСФ первой, второй и третьей степеней. Эти формулы совпадают с точностью до мультипликативной константы. Кроме того, получены формулы, линейно связывающие ПСФ $y_n(x)$, $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$; найдена формула дифференцирования ПСФ. Рассмотрены два частных случая уравнения (4): одно уравнение, обобщающее дифференциальные уравнения Эрмита и Лагерра; второе – обобщающее дифференциальное уравнение Якоби.

2. Два способа построения нестандартизованных ПСФ уравнения (4).

2.1. Использование формулы Родрига. Приведём уравнение (4) к самосопряжённому виду
$$[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)y_n']'+\lambda_n\rho(x)y_n=0,$$
где λ_n определено в (6), а функция $\rho(x)$, назовём её *приводящей* уравнение (4) к самосопряжённому виду, удовлетворяет [4, § 2] условию
$$(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho'(x)=[(A_2-2A_1)x+B_2-B_1]\rho(x). \tag{7}$$
Тогда ПСФ $y_n(x)$ находится по формуле Родрига
$$y_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^n\rho(x)]^{(n)},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Оказывается, что для нахождения $y_n(x)$ совершенно не требуется знать явный вид приводящей функции $\rho(x)$, а достаточно использовать равенство (7). Продемонстрируем это при нахождении ПСФ $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$:
$$y_1(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)]'=A_2x+B_2,$$
$$y_2(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x)]''=$$
$$=\frac{1}{\rho(x)}[(4A_1x+2B_1)(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)+(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho'(x)]'=$$
$$=\frac{1}{\rho(x)}\bigg[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)\bigg(4A_1x+2B_1+\frac{A_1x^2+B_1x+C_1}{\rho(x)}\rho'(x)\bigg)\bigg]'=$$
$$=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho(x)]'((A_2+2A_1)x+B_2+B_1)+(A_1x^2+B_1x+C_1)(A_2+2A_1)=$$
$$=(A_2+A_1)(A_2+2A_1)x^2+2(A_2+A_1)(B_2+B_1)x+B_2(B_2+B_1)+C_1(A_2+2A_1),$$
$$y_3(x)=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^3\rho(x)]'''=$$
$$=\frac{1}{\rho(x)}\bigg[(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x)\bigg(6A_1x+3B_1+\frac{(A_1x^2+B_1x+C_1)\rho'(x)}{\rho(x)}\bigg)\bigg]''=$$
$$=\frac{1}{\rho(x)}[(A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x)((A_2+4A_1)x+B_2+2B_1)]''=$$
$$=\frac{1}{\rho(x)}[((A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x))''((A_2+4A_1)x+B_2+2B_1)+2((A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x))'(A_2+4A_1)].$$

Подставим выражение для $y_2(x)$ вместо

$$((A_1x^2+B_1x+C_1)^2\rho(x))' = (A_1x^2+B_1x+C_1)((A_2+2A_1)x+B_2+B_1).$$

Тогда получим

$$y_3(x) = (A_2+2A_1)(A_2+3A_1)(A_2+4A_1)x^3 + (B_2+2B_1)(A_2+2A_1)(A_2+3A_1)(A_2+4A_1)x^2 + \\ + 3(A_2+2A_1)[(B_2+B_1)(B_2+2B_1)+C_1(A_2+4A_1)]x + B_2(B_2+B_1)(B_2+2B_1) + \\ + C_1[(B_2+2B_1)(A_2+2A_1)+2(B_2+B_1)(A_2+4A_1)].$$

2.2. Сведение к системе рекуррентных уравнений третьего порядка относительно коэффициентов полинома (5). Подставим полином (5) в уравнение (4). В результате получим систему рекуррентных уравнений третьего порядка

$$e_1^{(n)} = \frac{n(B_2+(n-1)B_1)}{A_2+(2n-2)A_1}e_0^{(n)},$$

$$e_k^{(n)} = \frac{(n-k+1)(B_2+(n-k)B_1)}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)}e_{k-1}^{(n)} + \frac{(n-k+1)(n-k+2)C_1}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)}e_{k-2}^{(n)}, \quad k=2,\ldots,n. \qquad (8)$$

На решении этой системы остановимся ниже.

3. Матричное решение рекуррентного уравнения третьего порядка. Так как рекуррентные соотношения третьего порядка справедливы для каждой системы ортогональных полиномов [5, теорема 3.2.1; 6, гл. 1, § 2], имеет смысл найти решение следующей системы рекуррентных соотношений:

$$f_1^{(n)} = p_0^{(n)}f_0^{(n)}, \quad f_k^{(n)} = p_{k-1}^{(n)}f_{k-1}^{(n)} + m_{k-2}^{(n)}f_{k-2}^{(n)}, \quad k=2,\ldots,n. \qquad (9)$$

Запишем систему (9) в матричном виде

$$D_{nn}\begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \\ \vdots \\ f_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0^{(n)} \\ m_0^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f_0^{(n)},$$

где

$$D_{nn} = \begin{pmatrix} 1 \\ -p_1^{(n)} & 1 \\ -m_1^{(n)} & -p_2^{(n)} & 1 \\ 0 & -m_2^{(n)} & -p_3^{(n)} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -m_{n-1}^{(n)} & -p_n^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

– нижнетреугольная тридиагональная квадратная матрица порядка n.

Для матрицы D_{ns}, $s=\overline{2,n}$,

$$D_{ns} = \begin{pmatrix} 1 \\ -p_1^{(n)} & 1 \\ -m_1^{(n)} & -p_2^{(n)} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m_{s-2}^{(n)} & -p_{s-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix}$$

обратная матрица D_{ns}^{-1} имеет нижнетреугольную структуру

$$D_{ns}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ p_1^{(n)} & 1 &&&&&& \\ d_{31}^{(n)} & p_2^{(n)} & 1 &&&&& \\ d_{41}^{(n)} & d_{42}^{(n)} & p_3^{(n)} & 1 &&&& \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{s1}^{(n)} & d_{s2}^{(n)} & d_{s3}^{(n)} & d_{s4}^{(n)} & \cdots & d_{s\,s-3}^{(n)} & d_{s\,s-2}^{(n)} & p_{s-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$d_{ii}^{(n)}=1, \quad d_{i\,i-1}^{(n)}=p_{i-1}^{(n)}, \quad d_{31}^{(n)}=m_1^{(n)}+p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \quad d_{41}^{(n)}=m_2^{(n)}p_1^{(n)}+p_3^{(n)}d_{31}^{(n)}, \quad d_{42}^{(n)}=m_2^{(n)}+p_2^{(n)}p_3^{(n)},$$

$$d_{sj}^{(n)} = m_{s-2}^{(n)}d_{s-2,j}^{(n)} + p_{s-1}^{(n)}d_{s-1,j}^{(n)}, \quad j=\overline{1,s-2}, \quad s=\overline{3,n}.$$

Проверка того, что D_{ns} и D_{ns}^{-1} – взаимно обратные матрицы, достаточно проста. Тогда

$$\begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \\ \vdots \\ f_s^{(n)} \end{pmatrix} = D_{ns}^{-1} \begin{pmatrix} p_0^{(n)} \\ m_0^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} f_0^{(n)},$$

и, следовательно, полагая $f_0^{(n)}=1$, получаем

$$f_1^{(n)} = p_0^{(n)}, \quad f_2^{(n)} = p_0^{(n)}p_1^{(n)} + m_0^{(n)},$$

$$f_3^{(n)} = d_{31}^{(n)}p_0^{(n)} + m_0^{(n)}p_2^{(n)} = m_0^{(n)}p_2^{(n)} + m_1^{(n)}p_0^{(n)} + p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)},$$

$$f_4^{(n)} = p_0^{(n)}d_{41}^{(n)} + m_0^{(n)}d_{42}^{(n)} = m_0^{(n)}m_2^{(n)} + m_0^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + m_1^{(n)}p_0^{(n)}p_3^{(n)} + m_2^{(n)}p_0^{(n)}p_1^{(n)} + p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)},$$

$$f_5^{(n)} = p_0^{(n)}d_{51}^{(n)} + m_0^{(n)}d_{52}^{(n)} = m_0^{(n)}m_2^{(n)}p_4^{(n)} + m_0^{(n)}m_3^{(n)}p_2^{(n)} + m_1^{(n)}m_3^{(n)}p_0^{(n)} +$$

$$+ m_0^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)}p_4^{(n)} + m_1^{(n)}p_0^{(n)}p_3^{(n)}p_4^{(n)} + m_2^{(n)}p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_4^{(n)} + m_3^{(n)}p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + p_0^{(n)}p_1^{(n)}p_2^{(n)}p_3^{(n)}p_4^{(n)},$$

$$\dots$$

$$f_s^{(n)} = d_{51}^{(n)}p_0^{(n)} + d_{52}^{(n)}m_0^{(n)}, \quad s=\overline{2,n}.$$

Отметим, что количество слагаемых, из которых состоит $f_s^{(n)}$, равно [7, формула (28)] s-му члену последовательности Фибоначчи.

Вернёмся к решению системы (8). Здесь

$$p_{k-1}^{(n)} = \frac{(n-k+1)(B_2+(n-k)B_1)}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)},$$

$$m_{k-2}^{(n)} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)C_1}{k(A_2+(2n-k-1)A_1)}, \quad m_{-1}^{(n)}=0, \quad k=\overline{1,n+1},$$

при $n=1$

$$y_1(x) = f_1^{(1)}x + xf_0^{(1)} = \left(x+\frac{B_2}{A_2}\right)f_0^{(1)},$$

при $n=2$

$$y_2(x) = f_0^{(2)}x^2 + f_1^{(2)}x + f_2^{(2)} =$$

$$= f_0^{(2)}\left[x^2 + \frac{2(B_2+B_1)}{A_2+2A_1}x + \frac{B_2(B_2+B_1)}{(A_2+2A_1)(A_2+A_1)} + \frac{C_1}{A_2+A_1}\right],$$

при $n=3$

$$y_3(x) = f_0^{(3)}x^3 + f_1^{(3)}x^2 + f_2^{(3)}x + f_3^{(3)} =$$

$$= f_0^{(3)}\left[x^3 + \frac{3(B_2+2B_1)}{A_2+4A_1}x^2 + \frac{3}{A_2+3A_1}\left(\frac{(B_2+B_1)(B_2+2B_1)}{A_2+4A_1} + C_1\right)x + \right.$$

$$\left. + \frac{B_2(B_2+B_1)(B_2+2B_1)}{(A_2+2A_1)(A_2+3A_1)(A_2+4A_1)} + \frac{C_1}{A_2+2A_1}\left(\frac{B_2}{A_2+3A_1} + \frac{2(B_2+2B_1)}{A_2+4A_1}\right)\right].$$

Ввиду громоздкости формул для $y_k(x)$, $k=4,5,\ldots,$ они здесь не приводятся. В дальнейшем положим $e_0^{(n)} = f_0^{(n)} = 1$, $n=1,2,\ldots,$ и полученные ПСФ имеют единичный старший коэффициент.

Несложно заметить, что свободный член ПСФ $y_n(x)$ среди прочих слагаемых содержит слагаемое

$$p_0^{(n)}p_1^{(n)}\cdots p_{n-1}^{(n)} = \frac{B_2(B_2+B_1)\cdots(B_2+(n-1)B_1)}{(A_2+(n-1)A_1)(A_2+nA_2)\cdots(A_2+(2n-2)A_1)}$$

и все другие слагаемые не добавляют в знаменателе новых множителей. Полагая

$$e_0^{(n)}[(A_2+(n-1)A_1)\cdots(A_2+(2n-2)A_1)]^{-1} = 1,$$

получаем ПСФ, первые два старших коэффициента которой равны $(A_2+(n-1)A_1)\cdots(A_2+$ $+(2n-2)A_1)$ и $n(B_2+(n-1)B_1)(A_2+(n-1)A_1)\cdots(A_2+(2n-2)A_1)\cdots(A_2+(2n-3)A_1)$.

Если в формуле для $y_3(x)$ привести все дроби к общему знаменателю, то кажущаяся разница в написании свободных членов ПСФ $y_3(x)$, полученной двумя способами, отсутствует. Для этого достаточно провести преобразования в свободном члене каждой ПСФ.

4. Одно свойство ПСФ.

Теорема 1. *Пусть $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ – ПСФ соответствующих дифференциальных уравнений*

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y_{n-1}'' + (A_2x + B_2)y_{n-1}' = (n-1)(A_2+(n-2)A_1)y_{n-1}, \tag{10}$$

$$(A_1x^2 + B_1x + C_1)y_{n-2}'' + (A_2x + B_2)y_{n-2}' = (n-2)(A_2+(n-3)A_1)y_{n-2}. \tag{11}$$

Функция

$$y_n(x) = (\alpha^{(n)} + x)y_{n-1}(x) + \beta^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n=1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\alpha^{(n)} = \frac{n(B_2+(n-1)B_1)}{A_2+(2n-2)A_1} - \frac{(n-1)(B_2+(n-2)B_1)}{A_2+(2n-4)A_1}, \tag{13}$$

$$\beta^{(n)} = \left[\frac{(n-1)(B_2+(n-2)B_1)}{A_2+(2n-4)A_1}\right]^2 - \frac{(n-1)(B_2+(n-2)B_1)}{2(A_2+(2n-4)A_1)} \times$$

$$\times\left[\frac{n(B_2+(n-1)B_1)}{A_2+(2n-3)A_1} + \frac{(n-2)(B_2+(n-3)B_1)}{A_2+(2n-5)A_1}\right] + \frac{(n-1)(A_2+(n-3)A_1)}{(A_2+(2n-3)A_1)(A_2+(2n-5)A_1)}C_1, \tag{14}$$

обращает в нуль выражение

$$I_n = (A_1x^2 + B_1x + C_1)y_n'' + (A_2x + B_2)y_n' - n(A_2+(n-1)A_1)y_n \tag{15}$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$R_n = (A_1x^2 + B_1x + C_1)y_{n-1}' + (n-1)\left(-A_1x + \frac{B_2A_1 - B_1A_2 - (n-2)A_1B_1}{A_2+(2n-4)A_1}\right)y_{n-1} -$$

$$- \beta^{(n)}(A_2+(2n-3)A_1)y_{n-2} = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Подставим в выражение для I_n функцию (12). В полученном выражении выделим левые части уравнений (10), (11), затем учтём (13), (14) и сгруппируем все элементы при y_{n-1} и y_{n-2}. В результате получим $I_n = 2R_n$. Пусть функция (12) обращает в нуль выражение (15), т.е. $I_n = 0$. Значит, $R_n = 0$.

Обратно, пусть $R_n = 0$. Тогда $I_n = 0$, т.е. функция (12) обращает в нуль выражение (15). Теорема доказана.

Формулу (16) назовём *формулой дифференцирования ПСФ дифференциального уравнения* (4).

В дальнейшем рассмотрим частные случаи уравнения (4) с тем отличием, что ПСФ этих уравнений будут иметь отличный от единицы старший коэффициент.

Положим в (4) $A_1 = 0$. Дифференциальное уравнение

$$(B_1x + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - nA_2y = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

при $B_1 = B_2 = 0$, $C_1 = 1$, $A_2 = -2$ становится эрмитовым; при $B_1 = -A_1 = 1$, $B_2 = \alpha + 1$, $C_1 = 0$ – лагерровым. Коэффициенты полинома (5) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$e_1^{(n)} = \frac{n(B_2 + (n-1)B_1)}{A_2} e_0^{(n)},$$

$$e_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{kA_2}[(B_2 + (n-k)B_1)e_{k-1}^{(n)} + (n-k+2)C_1e_{k-2}^{(n)}], \quad k = \overline{2, n}.$$

Полагая $e_0^{(n)} A_2^{-n} = 1$, получаем

$$y_1(x) = A_2x + B_2, \quad y_2(x) = A_2^2x^2 + 2(B_2 + B_1)A_2x + B_2(B_2 + B_1) + C_1A_2,$$

$$y_3(x) = A_2^3x^3 + 3(B_2 + 2B_1)A_2^2x^2 + 3A_2[(B_2 + B_1)(B_2 + 2B_1) + C_1A_2]x +$$
$$+ B_2(B_2 + B_1)(B_2 + 2B_1) + C_1A_2[B_2 + 2(B_2 + 2B_1)].$$

Покажем, что ПСФ $y_n(x)$, $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ уравнения (17) связаны рекуррентным соотношением

$$y_n(x) = (A_2x + B_2 + 2(n-1)B_1)y_{n-1}(x) -$$
$$- (n-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2)y_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ – ПСФ соответствующих дифференциальных уравнений*

$$(B_1x + C_1)y''_{n-1} + (A_2x + B_2)y'_{n-1} = (n-1)A_2y_{n-1}, \tag{19}$$

$$(B_1x + C_1)y''_{n-2} + (A_2x + B_2)y'_{n-2} = (n-2)A_2y_{n-2}, \tag{20}$$

функция (18) обращает в нуль выражение

$$I_n^{(1)} = (B_1x + C_1)y''_n + (A_2x + B_2)y'_n - nA_2y_n$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$R_n^{(1)} = (B_1x + C_1)y'_{n-1} - (n-1)B_1y_{n-1} + (n-1)(B_1B_2 - C_1A_2 + (n-2)B_1^2)y_{n-2} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Подставим в выражение для $I_n^{(1)}$ функцию (18). В полученном соотношении выделим левые части уравнений (19), (20). Затем сгруппируем все элементы при y_{n-1} и y_{n-2}. В результате получим $I_n^{(1)} = 2A_2R_n^{(1)}$. Пусть функция (18) обращает в нуль выражение $I_n^{(1)}$. Тогда $R_n^{(1)} = 0$. Обратно, пусть $R_n^{(1)} = 0$. Тогда $I_n^{(1)} = 0$, т.е. функция (18) обращает выражение $I_n^{(1)}$ в нуль. Теорема доказана.

Формулу (21) назовём *формулой дифференцирования ПСФ дифференциального уравнения* (17).

Положим в (4) $B_1 = 0$. Среди множества ПСФ полученного дифференциального уравнения

$$(A_1x^2 + C_1)y'' + (A_2x + B_2)y' - n(A_2 + (n-1)A_1)y = 0, \quad A_2 \neq 0, \tag{22}$$

есть нестандартизованные полиномы Якоби, если $C_1 = -A_1 = 1$, $B_2 = \beta - \alpha$, $A_2 = -(\alpha + \beta + 2)$, а также нестандартизованные полиномы Чебышёва первого и второго рода, Лежандра и Гегенбауэра, если $C_1 = -A_1 = 1$, $B_2 = 0$, $A_2 = -1, -3, -2, -(\alpha + 1)$ соответственно.

Для коэффициентов ПСФ уравнения (22) справедливы рекуррентные соотношения (8), в которых нужно положить $B_1 = 0$.

Приведём в качестве примера первые четыре нестандартизованные, с отличным от единицы старшим коэффициентом, ПСФ уравнения (22):

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = A_2x + B_2,$$

$$y_2(x) = (A_2 + A_1)(A_2 + 2A_1)x^2 + 2B_2(A_2 + A_1)x + B_2^2 + C_1(A_2 + 2A_1),$$

$$y_3(x) = (A_2 + 2A_1)(A_2 + 3A_1)(A_2 + 4A_1)x^3 + 3B_2(A_2 + 2A_1)(A_2 + 3A_1)x^2 + \\ + 3(A_2 + 2A_1)[B_2^2 + (A_2 + 4A_1)C_1]x + B_2^3 + B_2C_1(3A_2 + 10A_1). \tag{23}$$

Покажем, что три нестандартизованных, с отличным от единицы старшим коэффициентом, ПСФ уравнения (22) $y_n(x)$, $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ связаны рекуррентным линейным соотношением

$$y_n(x) = (\alpha_1^{(n)}x + \alpha_2^{(n)})y_{n-1}(x) + \beta^{(n)}y_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{A_2 + (n-2)A_1}, \quad \alpha_2^{(n)} = \frac{B_2(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 - 2A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)},$$

$$\beta^{(n)} = \frac{(n-1)A_1B_2^2(A_2 + (2n-2)A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)(A_2 + (2n-4)A_1)} + \frac{(n-1)C_1(A_2 + (2n-4)A_1)(A_2 + (2n-2)A_1)}{(A_2 + (n-2)A_1)}. \tag{25}$$

Теорема 3. *Пусть $y_{n-1}(x)$ и $y_{n-2}(x)$ – ПСФ соответствующих дифференциальных уравнений*

$$(A_1x^2 + C_1)y''_{n-1} + (A_2x + B_2)y'_{n-1} = (n-1)(A_2 + (n-2)A_1)y_{n-1}, \tag{26}$$

$$(A_1x^2 + C_1)y''_{n-2} + (A_2x + B_2)y'_{n-2} = (n-2)(A_2 + (n-3)A_1)y_{n-2}. \tag{27}$$

Функция (24) обращает в нуль выражение

$$I_n^{(2)} = (A_1x^2 + C_1)y''_n + (A_2x + B_2)y'_n - n(A_2 + (n-1)A_1)y_n$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$R_n^{(2)} = (A_1x^2 + C_1)y'_{n-1} - (n-1)\left(A_1x - \frac{B_2A_1}{A_2 + (2n-4)A_1}\right)y_{n-1} - \\ - (n-1)\left(\frac{A_1B_2^2}{A_2 + (2n-4)A_1} + (A_2 + (2n-4)A_1)C_1\right)y_{n-2} = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Подставим функцию (24) в выражение для $I_n^{(2)}$. В полученном выражении выделим левые части уравнений (26), (27). Затем, учитывая равенство (25), сгруппируем в нём все элементы при y_{n-1} и y_{n-2}. В результате получим

$$I_n^{(2)} = 2\alpha_1^{(n)}R_n^{(2)}, \quad \alpha_1^{(n)} \neq 0.$$

Пусть функция (24) обращает в нуль выражение $I_n^{(2)}$. Тогда $R_n^{(2)} = 0$. Обратно, пусть $R_n^{(2)} = 0$. Тогда $I_n^{(2)} = 0$, т.е. функция (24) обращает выражение $I_n^{(2)}$ в нуль. Теорема доказана.

Формулу (28) назовём *формулой дифференцирования ПСФ дифференциального уравнения* (22).

Функция $\rho(x)$, приводящая дифференциальное уравнение (22) к самосопряжённому виду, задана уравнением

$$[(A_1x^2 + C_1)\rho(x)]' = (A_2x + B_2)\rho(x),$$

и формула Родрига приводит с точностью до константы к формулам (23).

Пусть $A_1 < 0$, $C_1 > 0$ $(A_1C_1 < 0)$. Тогда $\rho(x)$ становится весовой функцией, определённой на промежутке $(-\sqrt{C_1/-A_1}, \sqrt{C_1/-A_1})$, и она равна

$$\rho(x) = (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}x)^{-t_1/\sqrt{-A_1}}(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}x)^{t_2/\sqrt{-A_1}},$$

$$t_1 = \frac{1}{2}((A_2 - 2A_1)/\sqrt{-A_1} + B_2/\sqrt{C_1}), \quad t_2 = \frac{1}{2}(B_2/\sqrt{C_1} - (A_2 - 2A_1)/\sqrt{-A_1}),$$

при этом нужно потребовать, чтобы $t_1 < 1$, а $t_2 > -1$.

Если $A_1 > 0$, $C_1 > 0$ $(A_1C_1 > 0)$, то $\rho(x)$ уже невесовая функция $((A_1x^2 + C_1) \neq 0)$, и ПСФ $y_2(x)$ имеет либо два различных действительных нуля, либо не имеет ни одного действительного нуля. Это следует из того, что дискриминант $(A_2 + A_1)(-A_1B_2^2 - C_1(A_2 + 2A_1)^2)$ полинома $y_2(x)$ положителен при $A_2 + A_1 < 0$ или отрицателен при $A_2 + A_1 > 0$.

Пусть $B_2 = 0$. Тогда из формул (8) следует, что коэффициенты $e_k^{(n)} = 0$ для любого нечётного числа k и

$$e_{2s}^{(n)} = \frac{n!C_1^s}{(n-2s)!2^s s!(A_2 + (2n-3)A_1)\cdots(A_2 + (2n-2s-1)A_1)},$$

и ПСФ уравнения (22) при $B_2 = 0$ со старшим коэффициентом, равным единице, определяется формулой

$$y_n(x) = x^n + n!\sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{C_1^s x^{n-2s}}{(n-2s)!s!2^s(A_2 + (2n-3)A_1)\ldots(A_2 + (2n-2s-1)A_1)},$$

при этом

$$y_n(x) = xy_{n-1}(x) + \frac{(n-1)(A_2 + (n-3)A_1)C_1}{(A_2 + (2n-3)A_1)(A_2 + (2n-5)A_1)}y_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а формула дифференцирования ПСФ $y_n(x)$

$$(A_1x^2 + C_1)y_n' - A_1nxy_n - \frac{n(A_2 + (n-2)A_1)C_1}{(A_2 + (2n-3)A_1)}y_{n-1} = 0.$$

Функция $\rho(x)$, приводящая дифференциальное уравнение (22) при $B_2 = 0$ к самосопряжённому виду, удовлетворяет уравнению

$$[(A_1x^2 + C_1)\rho(x)]' = A_2x\rho(x)$$

и равна

$$\rho(x) = (A_1x^2 + C_1)^{A_2/(2A_1-1)}.$$

Если $A_1 < 0$, $C_1 > 0$ и $A_2 < 0$, то она – весовая функция, определённая на промежутке $(-\sqrt{-C_1/A_1}, \sqrt{-C_1/A_1})$.

Если $A_1 < 0$, $C_1 > 0$ и $A_2 + A_1 > 0$, то $\rho(x)$ – невесовая функция, и ПСФ

$$y_2(x) = (A_2 + 2A_1)[(A_2 + A_1)x^2 + C_1]$$

не имеет действительных корней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Круглов В.Е.* Построение полиномиальных решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 999–1001.
2. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1939.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
4. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Е.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
5. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М., 1962.
6. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М., 1973.
7. *Круглов В.Е.* Построение фундаментальной системы решений линейного разностного уравнения конечного порядка // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61. № 6. С. 777–794.

Одесский национальный университет
имени И.И. Мечникова, Украина

Поступила в редакцию 22.03.2023 г.
После доработки 22.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1181–1190

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.957

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Р. Ч. Кулаев, А. А. Уртаева

Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка на сети, являющееся моделью системы стержней Эйлера–Бернулли. На основе метода монотонных итераций установлено существование решения краевой задачи на графе для этого уравнения, при этом использовались положительность функции Грина и принцип максимума для соответствующего линейного дифференциального уравнения. Приведён пример, иллюстрирующий полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064123090030, EDN: WOQOFU

Введение. Теория дифференциальных уравнений на графах возникла в 1980-х гг. Уравнения четвёртого порядка на графах впервые стали рассматривать лишь во второй половине 1990-х гг. Основные результаты в этом направлении были получены для линейных дифференциальных уравнений [1–4]. Что касается нелинейных уравнений на графах, то многие исследования в основном были сосредоточены на вопросах корректности и стабилизации [5, 6]. В статье [7] рассмотрено уравнение типа Ямабе на графах и установлено существование нетривиальных решений с помощью теоремы о горных перевалах Амбросети–Рабиновича. В [8] исследовано асимптотическое поведение задачи переноса на звёздообразных сетях упругих и термоупругих стержней. Имеется много работ, связанных с обратными задачами спектрального анализа, для дифференциальных операторов на произвольных компактных графах (см., например, [9, 10]). Вопросам распределения нулей решений, положительности функции Грина и принципу максимума в задачах четвёртого порядка на графах посвящены работы [11–15].

В данной статье изучен вопрос существования решения краевой задачи на геометрическом графе Γ для нелинейного уравнений четвёртого порядка

$$\frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) = f(x,u,p(x)u''), \quad x\in\Gamma,$$

$$u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Во внутренних точках рёбер производная $du/d\Gamma$ определяет классическую производную u' по направлению ребра, а в узловых точках графа дифференциальный оператор задаётся наборами условий согласования (как, например, в [11–15]). При изучении дифференциальных операторов четвёртого порядка на графах рассматривают условия согласования в зависимости от способов соединения стержней.

В нелинейном анализе для изучения такого типа задач применяются метод нижних и верхних решений, метод монотонных итераций, теорема Красносельского о неподвижной точке, теорема Лере–Шаудера и теория бифуркаций. На сегодняшний день проведены обширные исследования краевых задач на графе для нелинейных уравнений второго порядка (см., например, [8, 16–18] и приведённую в них библиографию). В частности, в [16] доказано существование решений уравнений теории среднего поля на произвольном связном конечном графе, с помощью вариационных принципов и метода верхних и нижних решений в статье [17] устанавливается существование по крайней мере одного решения уравнения Каздана–Уорнера. Отметим также работу [19], в которой изучены существование и единственность решения нелинейной дробной краевой задачи Капуто на звёздообразном графе.

В статьях [20–22] изучались двухточечные краевые задачи для нелинейных уравнений четвёртого порядка, а в [23–25] – многоточечные задачи. Нелинейные уравнения четвёртого порядка на графах практически не изучались. Здесь можно упомянуть работу [26], в которой для краевой задачи на графе с уравнением четвёртого порядка и условиями шарнирного сочленения получены условия существования неотрицательных решений. Обратим внимание, что в качественной теории уравнений на сетях условия согласования в узлах играют ключевую роль. Даже в линейном случае свойства решений (распределение нулей, положительность, принцип максимума) существенно разнятся для различных условий связи и даже для различных граничных условий [4, 27–31].

В данной работе рассматривается краевая задача для уравнения с так называемыми условиями дельта-типа в узловых вершинах графа [32, разд. 4.3] и условиями шарнирного закрепления на границе графа. Соответствующий дифференциальный оператор допускает факторизацию в виде композиции двух операторов второго порядка, что, в свою очередь, позволяет привлечь свойства оператора Штурма–Лиувилля на графе [11, гл. 4]. Как будет показано, для решений такой краевой задачи справедлив принцип максимума, позволяющий применить технику монотонных итераций. Отметим, что результаты данной статьи обобщают результаты работы [21], полученные для нелинейного уравнения четвёртого порядка на конечном интервале.

В п. 1 статьи даются некоторые определения и необходимая информация о изучаемом дифференциальном уравнении задачи (1). В п. 2 определяется функция Грина для задачи (1) и формулируется принцип максимума, который впоследствии используется для доказательства основного результата. В п. 3 представлен основной результат – теорема существования решения краевой задачи на графе для уравнения четвёртого порядка, и приводится пример задачи, демонстрирующий применимость полученных результатов.

1. Постановка задачи. В данной статье используется терминология и обозначения работ [2, 5]. $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек $E(\Gamma)$ рёбер графа. *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – концевая точка одного или нескольких рёбер. Рёбра графа обозначаются γ_i, вершины обозначаются a, b и т.д. Для любой $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов рёбер, инцидентных вершине a, и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Через $|\partial\Gamma|$ обозначаем число граничных вершин графа Γ. Предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma)\bigcup J(\Gamma)$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое непустое связное подмножество Γ, которое попадает под определение графа. Граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. Граф-дерево Γ называем *цепочкой*, если $|I(a)| = 2$ для любой вершины $a \in J(\Gamma)$.

Введём функциональные пространства

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \to \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\},$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \to \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$; обозначим его через $u_i(a)$. Обратим внимание, что $u_k(a)$ не обязательно равны $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$, $k \neq i$. Пространство непрерывных на графе Γ функций определяется равенством

$$C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] : u_i(a) = u(a) \text{ для любых } a \in J(\Gamma) \text{ и } i \in I(a)\}.$$

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i – длина γ_i. Положим $u_i'(x) := \lim\limits_{\gamma_i \ni y \to x} (u_i(y) - u_i(x))/(\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \overline{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) будем обозначать пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \in I(a)$, вдоль рёбер, смежных с a. Производные нечётного порядка зависят от ориентации рёбер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению "от вершины", которые будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Для чётной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u''_{i\nu}(a)$ пишем $u''_i(a)$.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$ вдоль графа Γ понимаем сумму интегралов по рёбрам:

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)\,dx = \sum_{\gamma \in E(\Gamma)} \int\limits_{\gamma} u(x)\,dx.$$

Под *дифференциальным уравнением на графе*, следуя [13, 14], понимаем систему дифференциальных уравнений на рёбрах и систему условий согласования во внутренних вершинах. Уравнения на рёбрах имеют вид

$$(p_i(x)u''_i)'' = f_i(x, u_i, p_i(x)u''_i), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma), \tag{2}$$

где $p(x) \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf\limits_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$. В каждой вершине $a \in J(\Gamma)$ накладываем следующие условия согласования, характерные для сочленённых стержней (см., например, [12; 33, разд. 4.3] или [3]):

$$u_i(a) = u(a), \quad (p_i u''_i)(a) = (p_k u''_k)(a), \quad i, k \in I(a),$$
$$\sum_{i \in I(a)} u'_{i\nu}(a) = 0, \quad \sum_{i \in I(a)} (p_i u''_i)'_\nu(a) = f(a, u(a), (pu'')(a)), \quad a \in J(\Gamma). \tag{3}$$

Здесь стоит отметить, что из условий для вторых производных следует, что вторая квазипроизводная $p(x)u''(x)$ допускает непрерывное продолжение с $E(\Gamma)$ на весь граф Γ. Поэтому в последнем условии в (3) мы полагаем $(pu'')(a) = (p_i u''_i)(a)$ с произвольным индексом $i \in I(a)$.

Уравнение (2), (3) имеет естественную физическую интерпретацию [3, 12, 32]. Оно моделирует малые деформации балок Эйлера–Бернулли: $u(x)$ обозначает смещение системы из состояния равновесия; эти смещения описываются уравнением (2); первые два равенства в (3) задают локальные условия связи в узлах – перемещения всех соединяемых рёбер непрерывны и изгибающие моменты также непрерывны, третье условие – геометрическое, а последнее – условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения (1) называется любая функция $u \in C(\Gamma) \bigcap C^4[\Gamma]$, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению (2) на каждом ребре графа Γ и условиям согласования (3) в каждой его внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$. *Краевая задача на графе* – это система (2), (3) вместе с граничными условиями.

Всюду далее будем считать, что выполнены следующие условия:

1) $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x \in \Gamma} p(x) > 0$;

2) $f : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; для любого компакта $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция f равномерно непрерывна на $E(\Gamma) \times \Omega$ и для любой вершины $a \in J(\Gamma)$ функция $f(a, \cdot, \cdot)$ непрерывна в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

3) $\partial\Gamma \neq \varnothing$.

2. Принцип максимума. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор L, соответствующий следующей краевой задаче:

$$(p_i(x)u''_i)'' = h_i(x), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma),$$

$$u_i(a) = u(a), \quad i \in I(a), \quad p_i(a)u''_i(a) = p_k(a)u''_k(a), \quad i, k \in I(a),$$

$$\sum_{i\in I(a)} u'_{i\nu}(a)=0, \quad \sum_{i\in I(a)} (p_i u''_i)'_\nu(a)=h(a), \quad a\in J(\Gamma),$$

где $h\in C[\Gamma]$.

Имея своей целью сформулировать принцип максимума для однородного дифференциального уравнения $Lu=0$, $x\in\Gamma$, покажем сначала, что оператор L с граничными условиями $u|_{\partial\Gamma}=u''|_{\partial\Gamma}=0$ положительно обратим. Точнее, покажем, что функция Грина $G(x,s)$ соответствующего оператора L строго положительна на $\Gamma\times\Gamma$.

Лемма 1. *Для любой функции* $h\in C[\Gamma]$ *краевая задача*

$$Lu=h(x), \quad x\in\Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma}=u''|_{\partial\Gamma}=0 \tag{4}$$

однозначно разрешима.

Доказательство. Очевидно, что задача (4) является однозначно разрешимой тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Пусть u – некоторое решение однородной задачи (4). Умножим функцию u на Lu и проинтегрируем полученное выражение по всему графу Γ. Дважды интегрируя по частям, получаем

$$0=\int\limits_\Gamma u\,Lu\,dx=\int\limits_\Gamma p(x)[u''(x)]^2\,dx+$$

$$+\sum_{a\in J(\Gamma)}\sum_{i\in I(a)}[(p_iu''_i)u'_{i\nu}-(p_iu''_i)'_\nu u_i]_{x=a}+\sum_{a\in\partial\Gamma}[(pu'')u'_\nu-(pu'')'_\nu u]_{x=a}.$$

Использовав условия согласования в вершине $a\in V(\Gamma)$, имеем

$$0=\int\limits_\Gamma p(x)[u''(x)]^2\,dx+\sum_{a\in J(\Gamma)}p(a)u''(a)\sum_{i\in I(a)}u'_{i\nu}(a)-$$

$$-\sum_{a\in J(\Gamma)}u(a)\sum_{i\in I(a)}(p_iu''_i)'_\nu(a)=\int\limits_\Gamma p(x)[u''(x)]^2\,dx.$$

Из условия $\inf\limits_{x\in\Gamma}p(x)>0$ следует, что $u''=0$ на Γ, т.е. u – линейная функция на каждом ребре графа. Из равенства $u|_{\partial\Gamma}=0$ заключаем, что существует внутренняя вершина $a_0\in J(\Gamma)$ такая, что $\max\limits_{x\in\Gamma}|u(x)|=|u(a_0)|$. Без потери общности можно считать, что $u(a_0)\geqslant 0$. Тогда $u'_{i\nu}(a_0)\leqslant 0$ для всех $i\in I(a_0)$. Но $\sum_{i\in I(a_0)}u'_{i\nu}(a_0)=0$. Следовательно, $u_i(x)\equiv\mathrm{const}\geqslant 0$ для всех $i\in I(a_0)$. Теперь легко видеть, что $u(x)\equiv\mathrm{const}\geqslant 0$ на Γ. Поскольку $u|_{\partial\Gamma}=0$, то $u(x)\equiv 0$ на графе Γ. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что функция Грина оператора L существует. Более того, $G(x,s)$ обладает следующими свойствами (см. [11, 14]).

1. Функция $G(x,s)$ и её производные по x до четвёртого порядка включительно непрерывны вплоть до границы на каждом из прямоугольников $\gamma_i\times\gamma_j$, $i\ne j$, и на каждом из треугольников, на которые квадрат $\gamma_i\times\gamma_i$ разбит диагональю $x=s$.

2. На диагонали $x=s$, $s\in\gamma\in E(\Gamma)$, третья квазипроизводная $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,s)\Big)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\frac{\partial^2}{\partial x^2}G\Big)(s+0,s)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\frac{\partial^2}{\partial x^2}G\Big)(s-0,s)=1,$$

где ориентация предельного перехода $s\pm 0$ и направление дифференцирования задаются метрической функцией, заданной на графе.

3. Для каждого $s\in\gamma\in E(\Gamma)$ функция $G(\,\cdot\,,s)$ является решением однородного уравнения $LG=0$ на $\Gamma\setminus\{s\}$ и обращается в нуль на $\partial\Gamma$.

4. Для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ функция $G(\,\cdot\,,a)$ является решением краевой задачи

$$LG = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad G(\,\cdot\,,a)|_{\partial\Gamma} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\,\cdot\,,a)\Big|_{\partial\Gamma} = 0,$$

где $h(x) = 0$ для $x \in \Gamma \setminus \{a\}$ и $h(a) = 1$.

5. Решение задачи (4) можно представить в виде

$$u(x) = \int\limits_\Gamma G(x,s)h(s)\,ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} G(x,a)h(a). \tag{5}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\mathcal{L}u = h(x)$, порождённое следующими выражениями:

$$u_i'' = h_i(x), \quad x \in \gamma_i \in E(\Gamma),$$
$$u_i(a) = u(a), \quad \sum_{i\in I(a)} u_{i\nu}'(a) = h(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad i \in I(a).$$

Далее нам потребуются следующие результаты.

Теорема 1 [12]. *Краевая задача*

$$\mathcal{L}u = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{6}$$

однозначно разрешима для любой правой части $h \in C[\Gamma]$. *Если* $\mathcal{G}(x,s)$ *– соответствующая функция Грина, то*

(i) $\mathcal{G}(x,s) < 0$ *на* $\Gamma \times \Gamma$;

(ii) решение задачи (6) даётся формулой

$$u(x) = \int\limits_\Gamma \mathcal{G}(x,s)h(s)\,ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} \mathcal{G}(x,a)h(a).$$

Лемма 2 [12]. *Всякое нетривиальное решение краевой задачи*

$$\mathcal{L}u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} \geqslant 0 \tag{7}$$

положительно на Γ.

Теорема 2. *Пусть* $G(x,s)$ *– функция Грина краевой задачи (4), а* $\mathcal{G}(s,x)$ *– функция Грина задачи (6). Тогда* $G(x,s) > 0$ *на* $\Gamma \times \Gamma$ *и выполнено равенство*

$$G(x,s) = \int\limits_\Gamma \mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(\xi,s)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}w = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad w|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{8}$$

Из определения функции Грина следует, что решение $w(x)$ задачи (8) может быть представлено в виде

$$w(x) = \int\limits_\Gamma \mathcal{G}(x,s)h(s)\,ds + \sum_{a\in J(\Gamma)} \mathcal{G}(x,a)h(a). \tag{9}$$

Введём функцию

$$u(x) = \int\limits_\Gamma \mathcal{G}(x,\xi)\frac{w(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi. \tag{10}$$

Используя равенства (9) и (7), получаем

$$u(x)=\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(\xi,s)h(s)\,ds\,\frac{d\xi}{p(\xi)}+\sum_{a\in J(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(\xi,a)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}h(a)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(s,\xi)\frac{d\xi}{p(\xi)}h(s)\,ds+\sum_{a\in J(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\mathcal{G}(x,\xi)\mathcal{G}(\xi,a)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}h(a)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}G(x,s)h(s)\,ds+\sum_{a\in J(\Gamma)}G(x,a)h(a).$$

Для завершения доказательства остаётся показать, что функция $u(x)$ удовлетворяет (2), (3) и граничным условиям

$$u|_{\partial\Gamma}=u''|_{\partial\Gamma}=0.$$

Из теоремы 1 и (10) делаем вывод, что $u(x)$ является решением задачи

$$u_i''=\frac{w_i(x)}{p_i(x)},\quad x\in\gamma_i\subset E(\Gamma),$$

$$u_i(a)=u(a),\quad \sum_{i\in I(a)}u_{i\nu}'(a)=0,\quad a\in J(\Gamma),\quad i\in I(a),$$

$$u(b)=0,\quad b\in\partial\Gamma.$$

Из равенств $p(x)u(x)''=w(x)$, (9) и теоремы 1 следует, что

$$(p_i(x)u_i'')''=h_i(x),\quad x\in\gamma_i\subset E(\Gamma),$$

$$p_i(a)u_i''(a)=p_k(a)u_k''(a),\quad i,k\in I(a),\quad \sum_{i\in I(a)}(p_iu_i'')_\nu'(a)=h(a),\quad a\in J(\Gamma),$$

$$u''(b)=0,\quad b\in\partial\Gamma.$$

Наконец, неравенство $G(x,s)>0$ следует из утверждения (i) теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие. *Дифференциальный оператор* L *можно представить в виде композиции двух операторов второго порядка* $\mathcal{L}\circ(p\mathcal{L})$.

Лемма 3. *Пусть* $u(x)\in C(\Gamma)\bigcap C^4[\Gamma]$ *– решение краевой задачи*

$$Lu=0,\quad u|_{\partial\Gamma}\geqslant 0,\quad u''|_{\partial\Gamma}=0.$$

Тогда $u(x)\geqslant 0$ *на* Γ.

Доказательство. Пусть $v=u''$. Тогда v – решение задачи

$$\mathcal{L}v=0,\quad v|_{\partial\Gamma}=0.$$

Из теоремы 1 следует, что $v\equiv 0$ на Γ. Применив следствие и лемму 2, получим, что $u\geqslant 0$ на Γ. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $u(x)\in C(\Gamma)\bigcap C^4[\Gamma]$ *– решение краевой задачи*

$$Lu=0,\quad u|_{\partial\Gamma}=0,\quad u''|_{\partial\Gamma}\leqslant 0.$$

Тогда $u(x)\geqslant 0$ *на* Γ.

Доказательство. Пусть $v=u''$. Поскольку v – решение задачи

$$\mathcal{L}v=0,\quad v|_{\partial\Gamma}\leqslant 0,$$

из леммы 2 следует, что $v \leqslant 0$ на Γ. Ввиду следствия 1 и теоремы 1 получаем, что $u \geqslant 0$ на Γ. Лемма доказана.

Теперь из лемм 3, 4 следует принцип максимума.

Теорема 3. *Всякое нетривиальное решение краевой задачи*

$$Lu \geqslant 0, \quad u|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \quad u''|_{\partial\Gamma} \leqslant 0$$

положительно на графе Γ.

3. Существование решения. Далее методом монотонных итераций установим существование решения краевой задачи (1).

Определение 1. Функция $\alpha \in C^4[\Gamma]$ называется *нижним решением* задачи (1), если

$$L\alpha \leqslant f(x, \alpha, p\alpha''), \quad x \in \Gamma, \quad \alpha|_{\partial\Gamma} \leqslant 0, \quad \alpha''|_{\partial\Gamma} \geqslant 0.$$

Определение 2. Функция $\beta \in C^4[\Gamma]$ называется *верхним решением* задачи (1), если

$$L\beta \geqslant f(x, \beta, p\beta''), \quad x \in \Gamma, \quad \beta|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \quad \beta''|_{\partial\Gamma} \leqslant 0.$$

Введём в пространстве $C(\Gamma)$ отношение частичного порядка и рассмотрим некоторый порядковый отрезок $[\alpha, \beta]$ в $C(\Gamma)$. Решение u задачи (1) называем *минимальным* (или *максимальным*) решением задачи (1) в порядковом промежутке $[\alpha, \beta]$, если $u(x) \leqslant v(x)$ (или $v(x) \leqslant u(x)$) на Γ для любого решения $v \in [\alpha, \beta]$ краевой задачи (1).

В следующей теореме устанавливается существование экстремальных решений задачи (1).

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) существуют нижнее α *и верхнее* β *решения задачи (1), удовлетворяющие условиям*

$$\alpha(x) \leqslant \beta(x) \ \ \text{для всех} \ \ x \in \Gamma, \quad \beta''(x) \leqslant \alpha''(x) \ \ \text{для всех} \ \ x \in E(\Gamma);$$

(ii) функция f *удовлетворяет условиям*

$$f(x, s, v) - f(x, t, v) \leqslant 0 \ \ \text{для} \ \ \alpha(x) \leqslant s \leqslant t \leqslant \beta(x), \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma,$$

$$f(x, u, s) - f(x, u, t) \geqslant 0 \ \ \text{для} \ \ \beta''(x) \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha''(x), \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда существуют две монотонные последовательности: неубывающая $\{\alpha_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$ *и невозрастающая* $\{\beta_{[k]}\}_{k=0}^{\infty}$, $\alpha_{[0]} = \alpha$ *и* $\beta_{[0]} = \beta$, *которые сходятся равномерно к экстремальным решениям задачи (1) из порядкового отрезка* $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Пусть $F = \{u \in C(\Gamma) \bigcap C^2[\Gamma] : pu'' \in C(\Gamma)\}$. Для любой функции $\eta \in F$ рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f(x, \eta, p\eta''), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = u''|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{11}$$

Из леммы 1 следует, что задача (11) имеет единственное решение u. Обозначим через $G : F \to C^4[\Gamma]$ интегральный оператор, обращающий краевую задачу (11). Тогда $u = G\eta$.

Дальнейшее доказательство разобьем на три шага.

Шаг 1. Покажем, что $GF_1 \subseteq F_1$, где $F_1 = \{\eta \in F : \alpha \leqslant \eta \leqslant \beta, \ \beta'' \leqslant \eta'' \leqslant \alpha''\}$.

Зафиксируем $\zeta \in F_1$ и положим $w = G\zeta$. Из определений решений α и β следует

$$L(w - \alpha) \geqslant f(x, \zeta, p\zeta'') - f(x, \alpha, p\alpha'') \geqslant 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$(w - \alpha)|_{\partial\Gamma} \geqslant 0, \quad (w - \alpha)''|_{\partial\Gamma} \leqslant 0.$$

Используя теорему 3, получаем $w - \alpha \geqslant 0$ на Γ.

Аналогично можно показать, что $\beta - w \geqslant 0$ на Γ.

Положим теперь $z = p(w - \alpha)''$. Тогда $\mathcal{L}z \geqslant 0$, $z|_{\partial\Gamma} \leqslant 0$. Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что $z \leqslant 0$ на графе Γ. Следовательно, $w'' \leqslant \alpha''$ на графе Γ.

Аналогично можно доказать, что $\beta'' \leqslant w''$ на Γ. Таким образом, $G\zeta \in F_1$.

Шаг 2. Рассмотрим пару функций $\eta_{[1]}, \eta_{[2]} \in F_1$ таких, что $\alpha \leqslant \eta_{[1]} \leqslant \eta_{[2]} \leqslant \beta$ и $\beta'' \leqslant \eta''_{[2]} \leqslant \eta''_{[1]} \leqslant \alpha''$. Пусть $u_{[1]} = G\eta_{[1]}$, $u_{[2]} = G\eta_{[2]}$. Покажем, что $u_{[1]} \leqslant u_{[2]}$ и $u''_{[2]} \leqslant u''_{[1]}$. Действительно,

$$L(u_{[2]} - u_{[1]}) \geqslant f(x, \eta_{[2]}, p\eta''_{[2]}) - f(x, \eta_{[1]}, p\eta''_{[1]}) \geqslant 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$(u_{[2]} - u_{[1]})|_{\partial\Gamma} = (u_{[2]} - u_{[1]})''|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Используя теорему 2, получаем, что $u_{[1]} \leqslant u_{[2]}$ на Γ.

Положив $v = p(u_{[2]} - u_{[1]})''$, имеем

$$\mathcal{L}v \geqslant 0, \quad v|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Теперь из теоремы 1 следует, что $u''_{[2]} \leqslant u''_{[1]}$ на Γ.

Шаг 3. Определим две рекуррентные последовательности:

$$\alpha_{[0]} = \alpha, \quad \alpha_{[k+1]} = G\alpha_{[k]}, \quad \beta_{[0]} = \beta, \quad \beta_{[k+1]} = G\beta_{[k]}, \quad k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Из результатов, полученных на предыдущих шагах, следует, что при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\alpha = \alpha_{[0]} \leqslant \alpha_{[1]} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{[k]} \leqslant \beta_{[k]} \leqslant \ldots \leqslant \beta_{[1]} \leqslant \beta_{[0]} = \beta,$$

$$\beta'' = \beta''_{[0]} \leqslant \beta''_{[1]} \leqslant \ldots \leqslant \beta''_{[k]} \leqslant \alpha''_{[k]} \leqslant \ldots \leqslant \alpha''_{[1]} \leqslant \alpha''_{[0]} = \alpha''.$$

С учётом свойств функции Грина задачи (4) (см. п. 2) имеем

$$\alpha^{(j)}_{[k+1]}(x) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,s) f(s, \alpha_{[k]}(s), (p\alpha''_{[k]})(s))\, ds + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,a) f(a, \alpha_{[k]}(a), (p\alpha''_{[k]})(a))$$

при $0 \leqslant j \leqslant 3$. Более того, если

$$M = \sup_\Pi |f(x,u,v)|,$$

$$\Pi = \{(x,u,v) : x \in \Gamma, \ \ \inf_{x\in\Gamma} \alpha(x) \leqslant u \leqslant \sup_{x\in\Gamma} \beta(x), \ \ \inf_{x\in\Gamma} (p\beta'')(x) \leqslant v \leqslant \sup_{x\in\Gamma} (p\alpha'')(x)\},$$

то

$$|\alpha^{(j)}_{[k+1]}(x)| \leqslant M \int\limits_\Gamma \left|\frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,s)\right| ds + M \sum_{a\in J(\Gamma)} \left|\frac{\partial^j G}{\partial x^j}(x,a)\right| \leqslant C,$$

где константа C не зависит от k и j.

Теперь, учитывая тот факт, что обе последовательности $\{\alpha_{[k]}\}_{k=0}^\infty$ и $\{\beta_{[k]}\}_{k=0}^\infty$ ограничены в $C^3[\Gamma]$, получаем, что $\alpha_{[k]} \rightrightarrows \alpha_*$ и $\beta_{[k]} \rightrightarrows \beta^*$ на Γ, где α_* и β^* – решения задачи (1) на Γ. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим планарный граф $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из трёх рёбер $\gamma_i = (a_i, b)$, $i = 1,2,3$, с общим концом b (внутренняя вершина графа). Будем считать, что все рёбра направлены к внутренней вершине, длины γ_i всех рёбер равны 1. Пусть $\mu(x)$ – метрическая функция на графе (см. п. 1), тогда $\mu_i : (a_i, b) \to (0,1)$, $\mu(a_i) = 0$ и $\mu_i(b) = 1$.

На графе Γ рассмотрим краевую задачу (1) с коэффициентными функциями

$$p(x) = \begin{cases} 3, & x \in \gamma_1, \\ 3, & x \in \gamma_2, \\ 3/4, & x \in \gamma_3, \end{cases} \quad f(x, u, p(x)u'') = \begin{cases} u_1^3 - \left(\dfrac{9u_1''}{\pi^2}\right)^5 + \sin\dfrac{\pi\mu_1(x)}{3}, & x \in \gamma_1, \\ u_2^3 - \left(\dfrac{9u_2''}{\pi^2}\right)^5 + \sin\dfrac{\pi\mu_2(x)}{3}, & x \in \gamma_2, \\ u_3^3 - \left(\dfrac{9u_3''}{4\pi^2}\right)^5 + \sin\dfrac{2\pi\mu_3(x)}{3}, & x \in \gamma_3, \\ 0, & x = b. \end{cases}$$

Тогда равенства (2), (3) примут вид

$$
3u_i^{(IV)} = u_i^3 - \left(\frac{9u_i''}{\pi^2}\right)^5 + \sin\frac{\pi\mu_i(x)}{3}, \quad x \in \gamma_1 \bigcup \gamma_2,
$$

$$
\frac{3}{4}u_3^{(IV)} = u_3^3 - \left(\frac{9u_3''}{4\pi^2}\right)^5 + \sin\frac{2\pi\mu_3(x)}{3}, \quad x \in \gamma_3,
$$

$$
u \in C(\Gamma), \quad u_1''(b) = u_2''(b) = \frac{1}{4}u_3''(b),
$$

$$
u_{1\nu}'(b) + u_{2\nu}'(b) + u_{3\nu}'(b) = 0, \quad u_{1\nu}'''(b) + u_{2\nu}'''(b) + \frac{1}{4}u_{3\nu}'''(b) = 0,
$$

$$
u(a_i) = u''(a_i) = 0. \tag{12}
$$

Легко проверить, что функции

$$
\alpha(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \beta(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi\mu_1(x)}{3}, & x \in \gamma_1, \\ \sin\dfrac{\pi\mu_2(x)}{3}, & x \in \gamma_2, \\ \sin\dfrac{2\pi\mu_3(x)}{3}, & x \in \gamma_3, \\ \sqrt{3}/2, & x = b, \end{cases}
$$

являются верхним и нижним решениями задачи (12) соответственно. Очевидно, что все условия теоремы 3 выполнены. Таким образом, задача (12) имеет хотя бы одно решение $u(x)$, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant u(x) \leqslant \beta(x)$, $x \in \Gamma$. Очевидно, что $u \not\equiv 0$ на Γ. А поскольку $\beta''(x) \leqslant u''(x) \leqslant 0$, то $f(x, u, pu'') \geqslant 0$ на Γ и $f(x, u, pu'') \not\equiv 0$, и в силу формулы (5) и теоремы 2 получаем, что $u(x) > 0$, $x \in \Gamma$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 075-02-2023-939.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 730–732.
2. *Borovskikh A.V., Lazarev K.P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. of Math. Sci. 2004. V. 119. № 6. P. 719–738.
3. *Dekoninck B., Nicase S.* The eigenvalue problem for network of beams, in generalized functions // Linear Algebra Appl. 2000. V. 314. № 1–3. P. 165–189.
4. *Покорный Ю.В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвёртого порядка на графе // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2. С. 75–82.
5. *Ammari K., Bchatnia A., Mehenaoui N.* Exponential stability for the nonlinear Schródinger equation on a star-shaped network // Z. Angew. Math. Phys. 2021. Bd. 72. S. 1–19.
6. *Cerpa E., Crepeau E., Moreno C.* On the boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation on a star-shaped network // IMA J. of Math. Control and Inf. 2020. V. 37. № 1. P. 226–240.
7. *Grigor'yan A., Lin Y., Yang Y.* Existence of positive solutions to some nonlinear equations on locally finite graphs // Sci. China Math. 2017. V. 60. P. 1311–1324.
8. *Han Zh-J., Zuazua E.* Decay rates for elastic-thermoelastic star-shaped networks // Networks and Heterogeneous Media. 2017. V. 12. № 3. P. 461–488.
9. *Bondarenko N.P.* A partial inverse Sturm–Liouville problem on an arbitrary graph // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 8. P. 6896–6910.
10. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 3 (429) С. 149–196.

11. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2007.
12. *Кулаев Р.Ч.* О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. вузов. Математика. 2013. № 2. С. 56–66.
13. *Кулаев Р.Ч.* Неосцилляция уравнения четвёртого порядка на графе // Мат. сб. 2015. Т. 206. № 12. С. 79–118.
14. *Кулаев Р.Ч.* Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 4. С. 445–458.
15. *Kulaev R.Ch.* The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // Mediterr. J. Math. 2022. V. 19. Art. 73.
16. *Huang A., Lin Y., Yau H.* Existence of solutions to mean field equations on graphs // Comm. in Math. Phys. 2019. V. 377. P. 613–621.
17. *Ge H.* Kazdan–Warner equation on graph in the negative case // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 453. № 2. P. 1022–1027.
18. *Lin Y., Wu Y.* Blow-up problems for nonlinear parabolic equations on locally finite graphs // Acta Math. Scientia. 2018. V. 38. № 3. P. 843–856.
19. *Mehandiratta V., Mehra M., Leugering G.* Existence and uniqueness results for a nonlinear Caputo fractional boundary value problem on a star graph // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 477. № 2. P. 1243–1264.
20. *Harjani J., Sadarangani K.* Existence and uniqueness of positive solutions for a nonlinear fourth-order boundary value problem // Positivity. 2010. V. 14. P. 849–858.
21. *Ma R., Zhang J., Fu Sh.* The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 215. № 1. P. 415–422.
22. *Song W., Gao W.* A fourth-order boundary value problem with one-sided Nagumo condition // Bound. Value Probl. 2011. Art. 569191.
23. *Graef J.R., Qian Ch., Yang B.* A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 187. № 1. P. 217–233.
24. *Wei Z., Pang C.* Positive solutions and multiplicity of fourth-order m-point boundary value problems with two parameters // Nonlin. Anal. 2007. V. 67. № 5. P. 1586–1598.
25. *Zhang Q., Chen S., Lú J.* Upper and lower solution method for fourth-order four-point boundary value problems // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 196. № 2. P. 387–393.
26. *Мустафокулов Р.* Положительные решения нелинейных краевых задач для уравнения четвертого порядка на графе // Докл. НАН Таджикистана. 1999. Т. 42. № 3. С. 40–46.
27. *Кулаев Р.Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 1. С. 85–97.
28. *Кулаев Р.Ч.* Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 2. С. 161–173.
29. *Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А.* Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвертого порядка на графе // Мат. заметки. 2022. Т. 112. № 6. С. 977–981.
30. *Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A.* Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // Math. Meth. Appl. Sci. 2023. P. 1–21.
31. *Li Y., Gao Y.* Existence and uniqueness results for the bending elastic beam equations // Appl. Math. Lett. 2019. V. 95. P. 72–77.
32. *Xu G.Q., Mastorakis N.E.* Differential Equations on Metric Graph. WSEAS Press, 2010.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН,
Северо-Осетинский государственный университет
имени К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.
После доработки 21.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1191–1198

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5+517.927

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Д. К. Потапов

Рассматривается непрерывная аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом доказывается теорема о близости решений аппроксимирующей и исходной задач. Полученная теорема применяется к одномерным моделям Гольдштика и Лаврентьева об отрывных течениях.

DOI: 10.31857/S0374064123090042, EDN: WORAIG

Введение. Проблема исследования вопроса близости решений аппроксимирующей задачи с непрерывной нелинейностью и решений исходной задачи с разрывной нелинейностью была поставлена в работе [1] и, безусловно, является актуальной. Для эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями данная проблема изучалась в статьях [2–4]. Аппроксимация основных краевых задач для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью исследовалась в работах [5–8]. Аппроксимация задачи с разрывной нелинейностью последовательностью задач с непрерывной нелинейностью для оператора Лапласа на конкретных примерах склейки вихревых и потенциальных течений рассматривалась в [9]. Непрерывным аппроксимациям задачи Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости посвящены статьи [10, 11]. В данной работе, являющейся продолжением этих исследований, рассматриваются непрерывные аппроксимации задачи Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной нелинейностью.

Проблема существования решений задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью изучалась в работах [12–18], а обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с разрывными правыми частями исследовались в [19–28].

В отличие от работ [2–4], в данной статье изучаемые задачи содержат спектральный параметр, в работах [3, 4] рассматривался другой вид аппроксимаций нелинейности. Кроме того, в отличие от работ [2–10], рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, а не уравнения с частными производными. По сравнению с работами [12–14, 17] в данной статье ослабляются ограничения на множество точек разрыва нелинейности, изучаются полуправильные решения, исследуется проблема близости решений аппроксимирующей и исходной задач.

1. Постановка задачи. Определения и обозначения. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, кривые $S_i = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], u = \varphi_i(x)\}$, $\varphi_i \in W_q^2((a,b))$, $q > 1$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются. Будем считать, что $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ для любого $x \in [a,b]$ и $i = \overline{1,m-1}$. Существует число $d > 0$ такое, что для любого $x \in [a,b]$ отрезки $[\varphi_i(x)-d, \varphi_i(x)+d]$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются.

Кривые S_i, $i = \overline{1,m}$, разбивают область $D = (a,b) \times \mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти $D_0 = \{(x,u) \in D : u < \varphi_1(x)\}$, $D_i = \{(x,u) \in D : \varphi_i(x) < u < \varphi_{i+1}(x)\}$, $i = \overline{1,m-1}$, $D_m = \{(x,u) \in D : u > \varphi_m(x)\}$.

На множествах $\overline{D_i}$ заданы каратеодориевы функции $g_i(x,u)$ такие, что для почти всех (п.в.) $x \in (a,b)$ и любого u верны неравенства

$$|g_i(x,u)| \leqslant \alpha(x), \quad (x,u) \in \overline{D_i}, \tag{1}$$

где $\alpha \in L_q((a,b))$, $q > 1$, $i = \overline{0,m}$.

Функция $g:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x,u)$, причём для п.в. $x\in(a,b)$, если $(x,u)\in S_i$, $g(x,u)$ принадлежит отрезку с концами $g_{i-1}(x,u)$ и $g_i(x,u)$, $i=\overline{1,m}$. Будем предполагать, что для п.в. $x\in(a,b)$ справедливо равенство

$$g(x,0)=0 \tag{2}$$

и

$$g_{i-1}(x,u)\leqslant g_i(x,u),\quad \text{если}\quad (x,u)\in S_i,\quad i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Зафиксируем последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$, сходящуюся к нулю и ограниченную сверху определённым выше числом d.

Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $\{g^k(x,u)\}$ таких, что для п.в. $x\in(a,b)$ выполняются следующие условия:

(i) $g^k(x,u)=g(x,u)$, если $|u-\varphi_i(x)|>\delta_k$ для любого $i=\overline{1,m}$;

(ii) для любого $u\in\mathbb{R}$

$$|g^k(x,u)|\leqslant\alpha(x), \tag{4}$$

где функция α из оценки (1).

Исходная задача Штурма–Лиувилля с разрывной по фазовой переменной u нелинейностью $g(x,u)$ имеет вид

$$Lu(x)=\lambda g(x,u(x)),\quad x\in(a,b), \tag{5}$$

$$u(a)=u(b)=0. \tag{6}$$

Здесь $Lu(x)\equiv-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x)$ – дифференциальный оператор с коэффициентами $p\in C_{1,\beta}([a,b])$, $q\in C_{0,\beta}([a,b])$, $0<\beta\leqslant 1$, λ – положительный параметр.

Нам потребуются следующие определения.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (5), (6) называется функция $u\in W_q^2((a,b))$, $q>1$, удовлетворяющая для п.в. $x\in(a,b)$ уравнению (5) и граничным условиям (6).

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (5), (6) называется такое сильное её решение u, значение которого $u(x)$ для п.в. $x\in(a,b)$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Определение 3. *Прыгающим разрывом* функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется такое $u\in\mathbb{R}$, что $f(u-)<f(u+)$, где $f(u\pm)=\lim\limits_{s\to u\pm}f(s)$.

Отметим, что в силу равенства (2) функция, почти всюду на интервале (a,b) равная нулю, является сильным решением задачи (5), (6), а из неравенства (3) следует, что для п.в. $x\in(a,b)$ точки разрыва функции $g(x,\cdot)$ прыгающие.

Пусть $X=H_\circ^1((a,b))$. С задачей (5), (6) свяжем функционал J^λ, определённый на функциональном пространстве X, следующим образом: $J^\lambda(u)=J_1(u)-\lambda J_2(u)$, где

$$J_1(u)=\frac12\int\limits_a^b p(x)(u'(x))^2\,dx+\frac12\int\limits_a^b q(x)u^2(x)\,dx,\quad J_2(u)=\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)} g(x,s)\,ds.$$

Будем предполагать, что выполнено условие

(iii) найдётся $\hat u\in X$, для которого $J_2(\hat u)>0$.

В дальнейшем рассматриваются два случая: коэрцитивный и резонансный.

В коэрцитивном случае $(J_1(u)\geqslant\gamma\|u\|^2$, $u\in X$, γ – положительная константа, независящая от $u)$ из теоремы в работе [15] следует существование $\lambda_0>0$ такого, что $\inf\limits_{v\in X}J^\lambda(v)<0$ для любого $\lambda>\lambda_0$, найдётся $\hat u_0\in X$, для которого $J^\lambda(\hat u_0)=\inf\limits_{v\in X}J^\lambda(v)$, и любое такое $\hat u_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (5), (6).

Если ядро дифференциального оператора с соответствующими граничными условиями ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предположим выполнение условия

(iv) линейное пространство $N(L)$ решений задачи

$$Lu = 0, \quad x \in (a,b),$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

одномерно и $\psi(x)$ – базисная функция этого подпространства.

Кроме того, пусть для базисной функции ψ пространства $N(L)$ выполнены условия Ландесмана–Лазера

$$\int\limits_{\psi<0} g_-(x)\psi(x)\,dx + \int\limits_{\psi>0} g_+(x)\psi(x)\,dx < 0 < \int\limits_{\psi>0} g_-(x)\psi(x)\,dx + \int\limits_{\psi<0} g_+(x)\psi(x)\,dx, \tag{7}$$

где $g_\pm(x) = \lim\limits_{u\to\pm\infty} g(x,u)$.

Известно [29], что условия Ландесмана–Лазера влекут за собой равенство

$$\lim_{u\in N(L),\|u\|\to+\infty} J_2(u) = -\infty.$$

Поэтому если дополнительно потребовать неотрицательность $J_1(u)$ на X, то из теоремы 4 в работе [30] следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что $\inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$, найдётся $\hat u_0 \in X$, для которого $J^\lambda(\hat u_0) = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v)$, и любое такое $\hat u_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (5), (6).

Зафиксируем $\lambda > \lambda_0$, и пусть числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ сходится к λ, $\lambda_k > 0$. Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Lu(x) = \lambda_k g^k(x,u(x)), \quad x \in (a,b), \tag{8}$$

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{9}$$

где аппроксимирующая последовательность каратеодориевых функций $\{g^k(x,u)\}$ определена выше.

Положим

$$J^k(u) = J_1(u) - \lambda_k \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{u(x)} g^k(x,s)\,ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По построению функция $g^k(x,u)$ каратеодориева и для неё при п.в. $x \in (a,b)$ верна оценка (4) с функцией α из (1).

Согласно теореме из [15] (коэрцитивный случай) и теореме 4 из [30] (резонансный случай) для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $u_k \in X$ такое, что $J^k(u_k) = \inf\limits_{v\in X} J^k(v)$, причём любое такое $u_k \in W_q^2((a,b))$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

2. Основной результат. Теорема о близости решений аппроксимирующей задачи (8), (9) к решениям исходной задачи (5), (6) является основным результатом данной работы.

Теорема. *Пусть выполнены оценка (1), равенство (2), неравенство (3), оценка (4), условие (iii) и дополнительно коэффициент $q(x)$ оператора L неотрицателен на (a,b) (в коэрцитивном случае), функционал $J_1(u)$ неотрицателен на X, выполнены условия (iv) и (7) (в резонансном случае). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) последовательность $\{u_k\}$ решений аппроксимирующих задач (8), (9), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала J^λ на X;

2) последовательность $\{u_k\}$ содержит подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$, сходящуюся в равномерной метрике $C_1([a,b])$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (5), (6), для которого $J^\lambda(u_0) = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v)$;

3) если инфимум J^λ на X достигается в единственной точке u_0, то $u_k \to u_0$ в $C_1([a,b])$.

Доказательство. Пусть $|\lambda_k-\lambda|<\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k\to+0$ при $k\to\infty$. Для $u\in X$ и $k\in\mathbb{N}$ имеем соотношения

$$|J^k(u)-J^\lambda(u)| = \left|\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}(-\lambda_k g^k(x,s)+\lambda g(x,s))\,ds\right| \leqslant \int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}|\lambda_k g^k(x,s)-\lambda g(x,s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}(|\lambda_k-\lambda||g^k(x,s)|+|\lambda||g^k(x,s)-g(x,s)|)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_k\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}|g^k(x,s)|\,ds+|\lambda|\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}|g^k(x,s)-g(x,s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_k\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{u(x)}\alpha(x)\,ds+|\lambda|\sum_{i=1}^m\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_k}^{\varphi_i(x)+\delta_k}|g^k(x,s)-g(x,s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_k\int\limits_a^b \alpha(x)|u(x)|\,dx+|\lambda|\sum_{i=1}^m\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_k}^{\varphi_i(x)+\delta_k}(\alpha(x)+\alpha(x))\,ds =$$

$$= \varepsilon_k\int\limits_a^b \alpha(x)|u(x)|\,dx+4|\lambda|m\delta_k\int\limits_a^b\alpha(x)\,dx.$$

Для любого $u\in X$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b\alpha(x)|u(x)|\,dx\leqslant M\|u\|,$$

где постоянная M равна произведению $\|\alpha\|_{L_q((a,b))}$ на норму оператора вложения X в пространство $L_p((a,b))$, $p=q/(q-1)$, $q>1$. Таким образом,

$$|J^k(u)-J^\lambda(u)|\leqslant\varepsilon_k M\|u\|+4|\lambda|m\delta_k\int\limits_a^b\alpha(x)\,dx,\quad u\in X.$$

Поскольку в коэрцитивном случае коэффициент $q(x)$ оператора L неотрицателен на (a,b), то для любого решения u задачи (5), (6) имеем

$$\chi\|u\|^2\leqslant(Lu,u)=\int\limits_a^b\lambda g(x,u(x))u(x)\,dx\leqslant|\lambda|\bigg(\int\limits_a^b|g(x,u(x))|^q\,dx\bigg)^{1/q}\bigg(\int\limits_a^b|u(x)|^p\,dx\bigg)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda|\|\alpha\|_{L_q((a,b))}\bigg(\int\limits_a^b|u(x)|^p\,dx\bigg)^{1/p}\leqslant|\lambda|M\|u\|,$$

где χ – положительная константа, независящая от u, $\|u\|$ – норма в пространстве X. Из этого следует, что $\|u\| \leqslant |\lambda|M/\chi$.

Аналогично доказывается, что

$$\|u_k\| \leqslant \frac{|\lambda_k|M}{\chi}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где u_k – решение аппроксимирующей задачи (8), (9). В резонансном случае ограниченность последовательности $\{u_k\}$ доказывается от противного по схеме, предложенной в работе [5].

Пусть постоянная $N > 0$ из неравенства $\|u\| \leqslant N$ (например, в коэрцитивном случае $N = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|M/\chi)$. Тогда

$$|J^k(u) - J^\lambda(u)| \leqslant \varepsilon_k MN + 4|\lambda| m\delta_k \int\limits_a^b \alpha(x)\,dx = F_k, \tag{10}$$

если u или решение задачи (5), (6), или решение одной из аппроксимирующих задач (8), (9).

Отсюда следует $(d_\lambda = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v),\ \ J^\lambda(\hat{u}_0) = d_\lambda)$

$$d_\lambda - F_k \leqslant J^\lambda(u_k) - F_k \leqslant J^k(u_k) \leqslant J^k(\hat{u}_0) \leqslant J^\lambda(\hat{u}_0) + F_k = d_\lambda + F_k,$$

что влечёт неравенство $|J^k(u_k) - d_\lambda| \leqslant F_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, с учётом (10), имеем

$$|J^\lambda(u_k) - d_\lambda| \leqslant |J^\lambda(u_k) - J^k(u_k)| + |J^k(u_k) - d_\lambda| \leqslant 2F_k \tag{11}$$

для любого натурального k.

Из того что $\varepsilon_k \to +0$, $\delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$ следует, что $F_k \to 0$. Поэтому (11) влечёт $\lim\limits_{k\to\infty} J^\lambda(u_k) = d_\lambda$, и, значит, $\{u_k\}$ – минимизирующая последовательность для функционала J^λ на X.

В коэрцитивном случае имеем

$$\|Lu_k\|_{L_q((a,b))} = \left(\int\limits_a^b |\lambda_k g^k(x, u_k(x))|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant |\lambda_k|\|\alpha\|_{L_q((a,b))} < (\varepsilon_k + \lambda)\|\alpha\|_{L_q((a,b))}$$

в силу оценки (4). Поскольку $\varepsilon_k \to +0$ при $k \to \infty$, то существует константа $K > 0$ такая, что для произвольного k справедливо неравенство $\varepsilon_k < K$ и, значит, верна оценка

$$\|Lu_k\|_{L_q((a,b))} \leqslant (K + \lambda)\|\alpha\|_{L_q((a,b))}, \quad k \in \mathbb{N},$$

что приводит к ограниченности последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $W_q^2((a,b))$ при сделанных выше предположениях относительно оператора L. В резонансном случае ограниченность последовательности $\{u_k\}$ в $W_q^2((a,b))$ доказана в статье [5].

Пространство $W_q^2((a,b))$ рефлексивно, значит последовательность $\{u_k\}$ содержит слабо сходящуюся к некоторому u_0 в $W_q^2((a,b))$ подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$. Учитывая компактность вложения $W_q^2((a,b))$ в $C_1([a,b])$, получаем, что $\{u_{k_l}\}$ сильно сходится к u_0 в X и $C_1([a,b])$.

Функционал J^λ непрерывен на X, поэтому $J^\lambda(u_0) = \lim\limits_{l\to\infty} J^\lambda(u_{k_l})$. С другой стороны, $\lim\limits_{l\to\infty} J^\lambda(u_{k_l}) = d_\lambda$. Следовательно, $J^\lambda(u_0) = d_\lambda$. Из этого и теоремы из [15] (коэрцитивный случай), теоремы 4 из [30] (резонансный случай) заключаем, что u_0 – полуправильное решение задачи (5), (6).

Если инфимум J^λ на X достигается в единственной точке $u_0 \in X$, то $u_k \to u_0$ в $C_1([a,b])$, поскольку в этом случае из любой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сильно сходится к u_0 в равномерной метрике $C_1([a,b])$. Теорема доказана.

3. Приложения. В качестве приложения установленной теоремы можно рассматривать, например, непрерывные аппроксимации одномерного аналога математической модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости [11]. Действительно, одномерная задача Гольдштика имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{13}$$

Здесь параметр $\omega > 0$ – завихрённость, а нелинейность

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } \ u < x-1, \\ 0, & \text{если } \ u \geqslant x-1. \end{cases}$$

Прямая

$$S = \{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \quad u = x-1\}$$

разбивает область $D = (0,1)\times\mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти

$$D_0 = \{(x,u) \in D : u < x-1\}, \quad D_1 = \{(x,u) \in D : u > x-1\}.$$

На $\overline{D_i}$, $i = 0,1$, заданы каратеодориевы функции $g_i(x,u)$, функция $g : (0,1)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x,u)$, причём для п.в. $x \in (0,1)$, если $(x,u) \in S$, $g(x,u)$ принадлежит отрезку с концами $g_0(x,u)$ и $g_1(x,u)$. Положим $g_0(x,u) = -1$, $g_1(x,u) = 0$.

Краевой задаче (12), (13) сопоставим заданный на пространстве $H^1_\circ((0,1))$ функционал $J^\omega(u) = J_1(u) - \omega J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2\,dx, \quad J_2(u) = \int_0^1 dx \int_0^{u(x)} g(x,s)\,ds.$$

В статье [15] отмечено, что существует $\omega_0 > 0$ такое, что $\inf\limits_{v\in H^1_\circ((0,1))} J^\omega(v) < 0$ для любого $\omega > \omega_0$, найдётся $\hat u_0 \in H^1_\circ((0,1))$, для которого $J^\omega(\hat u_0) = \inf\limits_{v\in H^1_\circ((0,1))} J^\omega(v)$, и любое такое $\hat u_0$ является ненулевым полуправильным решением задачи (12), (13).

Зафиксируем $\omega > \omega_0$ и пусть числовая последовательность $\{\omega_k\}$, $\omega_k > 0$, сходится к ω. Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $\{g^k(x,u)\}$. Имеем

$$-u'' = \omega_k g^k(x, u(x)), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где

$$g^k(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } \ u < -\varepsilon + x - 1, \\ (u+1-x)/\varepsilon, & \text{если } \ -\varepsilon + x - 1 \leqslant u \leqslant x-1, \\ 0, & \text{если } \ u \geqslant x-1. \end{cases}$$

Функция $g^k(x,u)$ непрерывная и зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$, в пределе при $\varepsilon \to +0$ получается разрывная нелинейность $g(x,u)$.

Проверим, что для одномерной задачи Гольдштика выполнены все условия полученной в данной работе теоремы.

Для п.в. $x \in (0,1)$ выполнена оценка $|g_i(x,u)| \leqslant 1$ для любого u с $(x,u) \in \overline{D_i}$, где $1 \in \in L_q((0,1))$, $q > 1$, $i = 0,1$; верны равенство $g(x,0) = 0$ и неравенство $g_0(x,u) \leqslant g_1(x,u)$, если $(x,u) \in S$; справедлива оценка $|g^k(x,u)| \leqslant 1$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $1 \in L_q((0,1))$, $q > 1$. Покажем, что выполнено условие (iii). Возьмём отрезок $F \subset (0,1)$. Тогда существует интервал $G \supset F$ такой, что $\overline{G} \subset (0,1)$. Пусть функция $h \in C_\infty([0,1])$ равна единице на F, нулю вне G и $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ на $G \backslash F$. Имеем

$$J_2(u) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)\,ds = \int\limits_{\{x\in(0,1):\ u(x)<x-1\}} (x - 1 - u(x))\,dx.$$

Положим $u(x) = \hat{u}(x) = 2(x-1)h(x)$. Тогда

$$J_2(\hat{u}) = \int\limits_{\{x\in(0,1):\ \hat{u}(x)<x-1\}} (x - 1 - \hat{u}(x))\,dx = \int\limits_{\{x\in(0,1):\ h(x)>1/2\}} (x-1)(1-2h(x))\,dx > 0.$$

Таким образом, найдётся $\hat{u} \in H^1_\circ((0,1))$, для которого $J_2(\hat{u}) > 0$. Условие (iii) выполняется. Далее имеем

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u'^2\,dx = \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Существует постоянная $\gamma \in (0, 1/2]$ (например, $\gamma = 1/4$), для которой $J_1(u) \geqslant \gamma\|u\|^2$ для всех $u \in H^1_\circ((0,1))$, т.е. имеет место коэрцитивный случай. Коэффициент $q(x) \equiv 0$ (функция при $u(x)$ в дифференциальном операторе $Lu = -u''$) неотрицателен.

Итак, для одномерной задачи Гольдштика выполнены все условия теоремы и, значит, справедливы её утверждения.

Совершенно аналогично в качестве приложения можно рассмотреть одномерную модель Лаврентьева об отрывных течениях [31], для которой также будут выполнены условия доказанной теоремы. Поэтому утверждения теоремы будут справедливы и для одномерной задачи Лаврентьева.

Установленная теорема проиллюстрирована прикладными задачами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Уравнения с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 5. С. 1056–1059.
2. *Павленко В.Н., Искаков Р.С.* Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51. № 2. С. 224–233.
3. *Лепчинский М.Г., Павленко В.Н.* Аппроксимация резонансных краевых задач эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 1. С. 139–148.
4. *Лепчинский М.Г., Павленко В.Н.* Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 124–138.
5. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 49–55.
6. *Потапов Д.К.* Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2005. Т. 9. № 1–2. С. 159–165.
7. *Потапов Д.К.* Аппроксимация задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 1002–1003.

8. *Потапов Д.К.* Аппроксимация однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями в резонансном случае // Мат. заметки. 2011. Т. 90. Вып. 3. С. 467–469.
9. *Вайнштейн И.И., Юровский В.К.* Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1976. № 5. С. 98–100.
10. *Потапов Д.К.* Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Мат. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 2. С. 262–266.
11. *Потапов Д.К.* Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сиб. журн. вычислит. математики. 2011. Т. 14. № 3. С. 291–296.
12. *Carl S., Heikkila S.* On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm–Liouville boundary value problems // J. Inequal. Appl. 2005. № 4. P. 403–412.
13. *Bonanno G., Bisci G.M.* Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities // Bound. Value Probl. 2009. Art. 670675.
14. *Bonanno G., Buccellato S.M.* Two point boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities // Taiwanese J. Math. 2010. V. 14. № 5. P. 2059–2072.
15. *Потапов Д.К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
16. *Потапов Д.К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
17. *Bonanno G., D'Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. V. 1. № 1. P. 125–143.
18. *Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челябинский физ.-мат. журн. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
19. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелин. колебания. 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
20. *Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side // Phys. D: Nonlin. Phenom. 2012. V. 241. № 22. P. 2003–2009.
21. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2014. № 221. P. 1–6.
22. *Llibre J., Teixeira M.A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // J. Singularities. 2014. V. 10. P. 183–190.
23. *Самойленко А.М., Нижник И.Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67. № 4. С. 517–554.
24. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 4. P. 1–8.
25. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
26. *Bensid S., Diaz J.I.* Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions // Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. V. 22. № 5. P. 1757–1778.
27. *Da Silva C.E.L., da Silva P.R., Jacquemard A.* Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40. № 14. P. 5295–5306.
28. *Da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Contr. Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
29. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 43–58.
30. *Павленко В.Н., Потапов Д.К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 911–919.
31. *Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Lavrent'ev problem for separated flows with an external perturbation // Electron. J. Differ. Equat. 2013. № 255. P. 1–6.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.
После доработки 15.01.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1199–1204

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ БЕСКОНЕЧНОГО СПЕКТРА ЗАТУХАЮЩИХ ВЫТЕКАЮЩИХ ТЕ-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН ОТКРЫТОГО НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, ПОКРЫТОГО СЛОЕМ ГРАФЕНА

© 2023 г. Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин

Рассматривается задача о вытекающих волнах неоднородной волноведущей структуры, покрытой слоем графена, которая сводится к краевой задаче для продольных компонент электромагнитного поля в пространствах Соболева. Для определения решения используется вариационная формулировка задачи. Вариационная задача сводится к изучению оператор-функции. Исследуются свойства оператор-функции, необходимые для анализа её спектральных свойств. Доказываются теоремы о дискретности спектра и о распределении характеристических чисел оператор-функции на комплексной плоскости.

DOI: 10.31857/S0374064123090054, EDN: WORJJJ

Введение. Появление новых материалов, таких как графен, приводит к необходимости рассмотрения краевых задач электродинамики нового типа, когда условия сопряжения на границе диэлектриков содержат бесконечно тонкий проводящий слой графена [1–4]. При этом требуются как теоретическое исследование свойств задачи, так и разработка численных методов для её решения и проведение практически важных расчётов для конкретных структур.

Нами рассматривается металлодиэлектрический слой кругового поперечного сечения, покрытый слоем графена и расположенный в свободном пространстве. Цель исследования – изучить спектр собственных вытекающих волн, которые могут существовать в структуре. Основным теоретическим результатом в таких задачах обычно является теорема о дискретности спектра [5, 6]. Именно этот результат будет доказан ниже для металлодиэлектрического слоя, покрытого слоем графена. Насколько известно авторам, подобные результаты для этой задачи ранее не были получены.

В статье рассматривается задача о спектре вытекающих волн, которые растут при удалении от волновода. Вариационным методом задача сводится к исследованию оператор-функции в пространстве Соболева. Доказывается дискретность спектра задачи.

Важно отметить, что помимо доказательства теоремы о дискретности спектра получена и изучена система вариационных уравнений, к которой сводится краевая задача на собственные значения. Эта система уже может решаться численно. Некоторые результаты о распространении поляризованных электромагнитных волн в диэлектрической пластине, покрытой графеном, имеются в работах [7–9].

1. Задача о вытекающих волнах. Рассмотрим трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $O\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 \equiv \mathrm{const}$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещён цилиндрический диэлектрический волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leqslant \rho \leqslant r, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси Oz, и с круговым поперечным сечением. Волновод неограниченно продолжается в направлении z. Сечение волновода, перпендикулярное его оси, представляет собой кольцо с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r (рисунок). Границы $\rho = r_0$ – проекция поверхности идеально проводящего, бесконечно тонкого экрана, $\rho = r$ – проекция поверхности соприкосновения диэлектриков. Волновод заполнен неоднородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon_0\varepsilon(\rho)$.

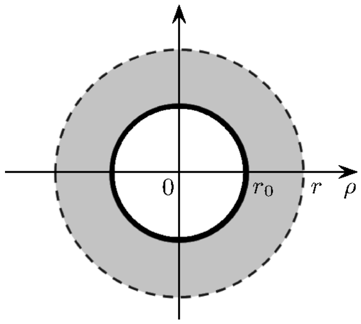

Рисунок. Сечение волновода.

Задача о вытекающих ТЕ-поляризованных волнах диэлектрического волновода состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z, вдоль которой структура регулярна:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\mathbf{H},$$

$$\mathbf{E} = (0, E_\varphi(\rho)e^{i\gamma z}, 0), \quad \mathbf{H} = (H_\rho(\rho)e^{i\gamma z}, 0, H_z(\rho)e^{i\gamma z}), \tag{1}$$

где $\mathbf{H}$ – напряжённость магнитного поля, $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля, γ – постоянная распространения, причём должны выполняться следующие условия: энергия поля в любом конечном объёме волновода ограничена, на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$E_\varphi|_{\rho=r_0} = 0; \tag{2}$$

для касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$E_\varphi|_{r+0} - E_\varphi|_{r-0} = 0, \quad H_z|_{r+0} - H_z|_{r-0} = -\sigma E_\varphi|_{r+0}, \tag{3}$$

здесь σ – проводимость графена (постоянная комплексная величина такая, что $\sigma' = \operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ и $\sigma'' = \operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$); а также условие излучения на бесконечности для вытекающих волн [6, с. 63].

Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Перейдём к безразмерным величинам [5]:

$$k_0\rho \to \rho, \quad \gamma \to \frac{\gamma}{k_0}, \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E},$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, ω – круговая частота, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума (временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен).

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве равна

$$\widetilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon(\rho), & r_0 \leqslant \rho \leqslant r, \\ 1, & \rho > r. \end{cases}$$

Среда предполагается изотропной и немагнитной. Пусть также $\varepsilon(\rho)$ – вещественная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[r_0, r]$.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$i\gamma H_\rho - H_z' = -i\widetilde{\varepsilon}E_\varphi, \quad -i\gamma E_\varphi = iH_\rho, \quad \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' = iH_z. \tag{4}$$

Выразим функции H_ρ и H_z через E_φ из второго и третьего уравнений системы (4) и получим

$$H_\rho = -\gamma E_\varphi, \quad H_z = -i\frac{(\rho E_\varphi)'}{\rho},$$

откуда следует, что поле ТЕ-волны может быть представлено в виде скалярной функции

$$u := iE_\varphi(\rho).$$

Тем самым задача сводится к нахождению функции u. Всюду $(\,\cdot\,)'$ обозначает дифференцирование по переменной ρ.

Из первого уравнения системы (4) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u + (\widetilde{\varepsilon} - \gamma^2)u = 0. \tag{5}$$

Граничные условия (2) и условия сопряжения (3) примут вид

$$u(r-0)=u(r+0), \quad u'(r-0)=u'(r+0)+i\sigma u(r+0), \tag{6}$$

где $[f]|_{\rho_0}=\lim\limits_{\rho\to\rho_0-0}f(\rho)-\lim\limits_{\rho\to\rho_0+0}f(\rho)$.

При $\rho>r$ имеем $\widetilde{\varepsilon}=1$, тогда из (5) получаем

$$u''+\frac{1}{\rho}u'-\frac{1}{\rho^2}u-\lambda^2u=0,$$

где $\lambda^2=\gamma^2-1$.

Учитывая условие на бесконечности для вытекающих волн, выберем решение последнего уравнения в виде

$$u(\rho;\gamma)=CI_1(\lambda\rho), \tag{7}$$

где I_1 – модифицированная функция Бесселя (функция Инфельда) [10], C – некоторая постоянная.

При $r_0\leqslant\rho\leqslant r$ имеем $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon(\rho)$, и из (5) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$Lu:=(\rho u')'-\frac{1}{\rho}u+\rho(\varepsilon-1-\lambda^2)u=0. \tag{8}$$

Определение. Если существует нетривиальная функция u, отвечающая некоторому $\lambda\in\in\mathbb{C}$ и удовлетворяющая условиям (6), которая при $\rho>r$ определяется формулой (7), а при $r_0\leqslant\rho\leqslant r$ является решением уравнения (8), то λ называется *характеристическим числом* задачи (6)–(8).

Задача о вытекающих волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра λ.

2. Задача о спектре оператор-функции. Будем искать решения u задачи в пространстве Соболева [11] $H_0^1(r_0,r;\rho)$ со скалярным произведением и нормой

$$(f,g)_1=\int\limits_{r_0}^{r}\rho(f'\overline{g}'+f\overline{g})\,d\rho, \quad \|f\|_1^2=(f,f)_1=\int\limits_{r_0}^{r}\rho(|f'|^2+|f|^2)\,d\rho.$$

Замечание. Здесь использовано обозначение пространства Соболева $H_0^1(r_0,r;\rho)$, не совпадающее со стандартным (в нашем случае $f|_{r_0}=0$, но, вообще говоря, $f|_r\neq0$).

Дадим вариационную формулировку задачи. Умножим уравнение (8) на произвольную пробную функцию v, считая её пока непрерывно дифференцируемой на отрезке $[r_0,r]$. Использовав формулу Грина для уравнения (8) на отрезке $[r_0,r]$, получим

$$\lambda^2\int\limits_{r_0}^{r}\rho u\overline{v}\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\rho u'\overline{v}'\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}-\varepsilon-1\right)u\overline{v}\,d\rho-ru'(r-0)\overline{v}(r-0)=0. \tag{9}$$

Зная решение (7), выразим из формул (6) значения производной в точке $\rho=r$ следующим образом:

$$u'(r+0)=\lambda\frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}u(r+0). \tag{10}$$

Из (9) с учётом (10) имеем

$$\lambda^2\int\limits_{r_0}^{r}\rho u\overline{v}\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\rho(u'\overline{v}'+u\overline{v})\,d\rho+\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\varepsilon\right)u\overline{v}\,d\rho-\lambda\frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}u(r)\overline{v}(r)-i\sigma ru(r)\overline{v}(r)=0. \tag{11}$$

Вариационное соотношение (11) получено для гладких функций v и распространяется на любые функции $v \in H_0^1(r_0, r; \rho)$ по непрерывности.

Интегралы, входящие в (11), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на $H_0^1(r_0, r; \rho)$, от аргументов u, v. Эти формы определяют [12] некоторые линейные ограниченные операторы $\mathrm{T} : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ по формуле

$$\mathrm{t}(u, v) = (\mathrm{T}u, v), \quad v \in \widetilde{H}_0^1,$$

при условии, что сами формы ограничены: $|\mathrm{t}(u, v)| \leqslant C\|u\|\|v\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$\|\mathrm{T}u\|^2 = \mathrm{t}(u, \mathrm{T}u) \leqslant C\|u\|\|\mathrm{T}u\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$\mathrm{k}(u, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \rho u\overline{v}\, d\rho = (\mathrm{K}u, v), \quad \widetilde{\mathrm{k}}(u, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \left(\frac{1}{\rho} - \rho\varepsilon\right) u\overline{v}\, d\rho = (\widetilde{\mathrm{K}}u, v),$$

$$\mathrm{a}(u, v) := \int\limits_{r_0}^{r} \rho(u'\overline{v}' + u\overline{v})\, d\rho = (\mathrm{I}u, v), \quad \mathrm{s}(u, v) := u(r)\overline{v}(r) = (\mathrm{S}u, v),$$

где $v \in H_0^1(r_0, r; \rho)$.

Ограниченность формы $\mathrm{a}(u, v)$ очевидна. Ограниченность форм $\mathrm{k}(u, v)$ и $\widetilde{\mathrm{k}}(u, v)$ следует из теоремы Соболева–Кондрашева [11, с. 44]. Ограниченность формы $\mathrm{s}(u, v)$ показана в статье [13].

Теперь вариационную задачу (11) можно записать в операторном виде

$$(\mathrm{N}(\lambda)u, v) = 0, \quad u \in \widetilde{H}_0^1,$$

или в эквивалентном

$$\mathrm{N}(\lambda)u := (\lambda^2\mathrm{K} + \mathrm{I} + \widetilde{\mathrm{K}} - s(\lambda)\mathrm{S} - i\sigma\mathrm{S})u = 0, \tag{12}$$

где

$$s(\lambda) = \lambda \frac{I_1'(\lambda r)}{I_1(\lambda r)}.$$

Уравнение (12) – операторная запись вариационного соотношения (11).

3. Свойства оператор-функции. Справедливы следующие свойства операторов [13].

Лемма 1. *Ограниченные операторы* K*и*$\widetilde{\mathrm{K}} : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *являются компактными и* $\mathrm{K} > 0$.

Лемма 2. *Оператор* $\mathrm{S} : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *является компактным конечномерным оператором.*

Лемма 3. *Функция* $s(\lambda)$ *является мероморфной функцией с полюсами в точках из множества* $\Lambda_0 := \{\lambda : I_1(\lambda r) = 0\}$.

Доказательство мероморфности заключается в проверке свойств указанной функции. Согласно [14, с. 191] функция $s(\lambda)$ имеет только простые полюсы в качестве особых точек, лежащие на мнимой оси. Совокупность всех полюсов функции $s(\lambda)$ совпадает с Λ_0.

Теорема 1. *Оператор-функция* $\mathrm{N}(\gamma) : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *является конечно-мероморфной и фредгольмовой в поле* $\mathbb{C}$.

Доказательство. В $\mathbb{C}$ функция $\mathrm{N}(\lambda)$ является конечно-мероморфной [15] (как функция от λ) в силу леммы 3. Из лемм 1 и 2 следует, что оператор-функция $\mathrm{N}(\lambda)$ является фредгольмовой, как сумма обратимого I и компактных K, $\widetilde{\mathrm{K}}$ и S операторов. Теорема доказана.

Лемма 4. *Существует* $\lambda \in \mathbb{R}$ *такое, что оператор* $\mathrm{N}(\lambda)$ *непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество* $\varrho(\mathrm{N}) := \{\lambda :$ *существует* $\mathrm{N}^{-1}(\lambda) : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)\}$ *оператор-функции* $\mathrm{N}(\lambda)$ *не пусто;* $\varrho(\mathrm{N}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Для доказательства непустоты резольвентного множества $\varrho(\mathrm{N})$ оператор-функции $\mathrm{N}(\lambda)$ достаточно найти такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что из $\mathrm{N}(\lambda_0)u = 0$ будет следовать $u = 0$. Тогда из альтернативы Фредгольма получим, что оператор $\mathrm{N}(\lambda)$ непрерывно обратим. Рассмотрим следующую форму:

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{N}(\lambda)u, u) = 2\lambda'\lambda'' \int\limits_{r_0}^{r} \rho|u|^2\, d\rho - \mathrm{Im}\, s(\lambda)|u(r)|^2 - \sigma''|u(r)|^2, \tag{13}$$

где $\lambda_0 = \lambda' + i\lambda''$. Учтём, что функции $I_0(\lambda r)$ и $I_1(\lambda r)$ вещественнозначные на мнимой оси, все нули функций $I_0(\lambda r)$ и $I_1(\lambda r)$ перемежаются [14, с. 191]. Выберем $\lambda_0 = i\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta} \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\beta} > 0$, так, что $I_0(\lambda_0 r) = 0$. Тогда в окрестности точки λ_0 найдутся такие $\lambda_1 = i\beta_1$ и $\lambda_2 = i\beta_2$, что $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \beta_1 < \widetilde{\beta} < \beta_2$ и

$$\frac{I_0(\lambda_1 r)}{I_1(\lambda_1 r)} \frac{I_0(\lambda_2 r)}{I_1(\lambda_2 r)} < 0.$$

Следовательно, выражения $\mathrm{Im}\, s(\lambda_1)$ и $\mathrm{Im}\, s(\lambda_2)$ имеют разные знаки. Пусть для определённости $\mathrm{Im}\, s(\lambda_1) > 0$. Функция $s(\lambda)$ непрерывна в окрестности λ_1. Поэтому в δ-окрестности точки λ_1 она сохраняет знак при достаточно малом $\delta > 0$ (при $|\lambda - \lambda_1| < \delta$). Выберем $\lambda_0 = \lambda' + i\lambda''$ так, что $\lambda'' = \beta_1 > 0$, $\lambda' < 0$ и $|\lambda_0 - \lambda_1| < \delta$. Получаем, что все слагаемые в правой части (13) неположительны, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{N}(\lambda_0)u, u) \leqslant 0$. Далее, равенство $\mathrm{Im}\,(\mathrm{N}(\lambda_0)u, u) = 0$ необходимо влечёт за собой

$$\int\limits_{r_0}^{r} \rho|u|^2\, d\rho = 0,$$

откуда находим, что $u \equiv 0$ (как элемент пространства $H_0^1(r_0, r; \rho)$). Лемма доказана.

Теорема 2. *Спектр оператор-функции* $\mathrm{N}(\lambda) : H_0^1(r_0, r; \rho) \to H_0^1(r_0, r; \rho)$ *является дискретным в поле* $\mathbb{C}$, *т.е. имеет конечное число характеристических чисел конечной алгебраической кратности в любом компакте* K_0.

Утверждение теоремы 2 является следствием теоремы 1, леммы 4 и теоремы о конечномероморфной оператор-функции [15].

Заключение. В статье рассмотрена задача на собственные значения о распространении электромагнитных волн в металлодиэлектрическом волноводе кругового поперечного сечения, покрытом графеном. Вариационным методом краевая задача на собственные значения сведена к изучению спектра оператор-функции в пространстве Соболева. Доказаны фредгольмовость и конечно-мероморфность оператор-функции на комплексной плоскости, а также дискретность спектра оператор-функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Geim A.K., Novoselov K.S.* The rise of graphene // Nature Materials. 2007. V. 6. P. 183–191.
2. *Hanson G.W.* Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. of Appl. Phys. 2008. V. 103. Art. 064302.
3. *Falkovsky L.A.* Optical properties of graphene // J. of Phys.: Conf. Ser. 2008. V. 129. Art. 012004.
4. *Mikhailov S.A.* Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. Art. 085403.
5. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.

6. *Shestopalov Y., Smirnov Y., Smolkin E.* Optical Waveguide Theory. Mathematical Models, Spectral Theory and Numerical Analysis. Springer Ser. in Optical Sciences. V. 237. Singapore, 2022.
7. *Hajian H., Rukhlenko I.D., Leung P.T., Caglayan H., Ozbay E.* Guided plasmon modes of a graphene-coated Kerr slab // Plasmonics. 2016. V. 11. P. 735–741.
8. *Smirnov Y., Tikhov S.* The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene // Photonics. 2023. V. 10. P. 523.
9. *Смирнов Ю.Г., Тихов С.В., Гусарова Е.В.* О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2022. № 3. С. 11–18.
10. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1978.
11. *Adams R.* Sobolev Spaces. New York, 1975.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
13. *Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.* О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1298–1309.
14. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
15. *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84 (126). № 4. С. 607–629.

Пензенский государственный университет,
Университет Евле, Швеция

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.
После доработки 02.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1205–1221

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

РЕГУЛЯРНОСТЬ ФУНКЦИИ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

© 2023 г. Е. В. Амосова

Изучена нестационарная система уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. На основе регуляризованной задачи, учитывающей релаксацию поля скоростей в соленоидальное поле, обосновано существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для решений из класса Хопфа. С помощью предложенной регуляризации доказано существование более регулярных слабых решений исходной задачи без ограничений малости на исходные данные. В двумерном случае доказана теорема единственности.

DOI: 10.31857/S0374064123090066, EDN: WOUEAU

Введение. При доказательстве корректности начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса обычно используется регуляризация дифференциальных уравнений несжимаемой жидкости. Способы регуляризации, как правило, направлены на добавление слагаемых с малым параметром ε от искомых функций, компенсирующих производную по времени от давления [1]. Далее методом априорных оценок доказываются теоремы существования и единственности решений регуляризованной задачи и выполняется предельный переход по $\varepsilon \to 0$ в регуляризованных уравнениях.

Отметим, что все регуляризованные модели строятся чисто математически, для получения априорных оценок обобщённых решений. В работах [2–4] проведён численный анализ регуляризованных уравнений Навье–Стокса, где малый параметр регуляризации характеризует время релаксации векторного поля скоростей к соленоидальному. При этом появляется естественное условие

$$(\nabla p - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

связывающее градиент функции давления p с вектор-функцией правых частей $\mathbf{f}$ на границе, которое означает отсутствие гидродинамических колебаний на стенке.

В данной работе регуляризованная система дифференциальных уравнений получена добавлением малой поправки к правой части уравнения неразрывности и добавлением граничных условий для функции давления и скорости. Предложенная аппроксимация рассматривается впервые и гарантирует существование функции давления для решения класса Хопфа. На основе новых априорных оценок установлена корректность аппроксимационной задачи. Найденные априорные оценки позволяют обосновать предельный переход регуляризованной задачи к системе уравнений Навье–Стокса с однородными краевыми условиями в нужных функциональных пространствах и установить существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для решения класса Хопфа. Стандартная техника использования неравенства Соболева при получении априорных оценок не позволяет доказать единственность полученного решения в трёхмерном случае. Опираясь на результаты А.В. Фурсикова, доказана регулярность функции давления в двумерном случае в классе слабых решений Хопфа для системы уравнений Навье–Стокса при неоднородных краевых условиях. Доказанное свойство регулярности функции давления играет важную роль при изучении корректности краевых задач динамики вязкого газа, которые описываются нелинейными уравнениями Навье–Стокса для сжимаемых сред.

Для формулировки основного результата введём необходимые функциональные пространства. Через $H^l(\Omega)$, l – натуральное число, обозначим пространство Соболева функций, суммируемых с квадратом вместе с производными до порядка $l > 0$. Пусть $H^1_0(\Omega)$ – замыкание

$C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ – сопряжённое с $H_0^1(\Omega)$ пространство. Норму в пространстве $L^2(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение элементов в $L^2(\Omega)$. Через $X(\Omega;\mathrm{Ker}\,\{\mathrm{div}\})$ обозначим пространство соленоидальных вектор-функций из X. Пространства функций, состоящие из l раз непрерывно дифференцируемых функций на $\bar\Omega$, обозначим $C^l(\bar\Omega)$.

Введём пространства: $H^\ell = H^\ell(\Omega)$ для скалярных функций, $\mathbf{H}^\ell = \mathbf{H}^\ell(\Omega)$, $\ell \in \mathbb{R}$; для векторных полей

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1\colon (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0, \ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\},$$

$$\widehat{\mathbf{V}} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1\colon (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \widetilde{H}^2_R = \{h \in H^2\colon (\nabla h\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Обозначим $\widetilde{H}^{-2}_R = (\widetilde{H}^2_R)'$, $\bar{H}^{-\ell} = (H^\ell)'$, $\bar{\mathbf{H}}^{-\ell} = (\mathbf{H}^\ell)'$. Очевидно, что имеют место включения

$$\mathbf{V} \subset \widehat{\mathbf{V}} \subset \mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^2(\Omega) = (\mathbf{L}^2(\Omega))', \quad \widetilde{H}^2_R \subset H^2 \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))'.$$

Непрерывные вложения по двойственности дают следующие непрерывные вложения:

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = (\mathbf{L}^2(\Omega))' \subset \bar{\mathbf{H}}^{-1} \subset \widehat{\mathbf{V}}' \subset \mathbf{V}', \quad L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \bar{H}^{-2} \subset \widetilde{H}^{-2}_R.$$

Через $L^2(0,T;X)$ $(C^l(0,T;X))$ обозначим пространство измеримых функций (пространство непрерывных функций, имеющих непрерывные на $[0,T]$ производные до порядка l), отображающих интервал $(0,T)$ (отрезок $[0,T]$) в пространство X, таких что

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;X)} = \int\limits_0^T \|f\|^2_X\,dt < \infty, \quad \|f\|^2_{C(0,T;X)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|f\|^2_X\,dt < \infty.$$

Обозначим через

$$s = \begin{cases} 2, & \text{если} \ \ n = 2, \\ 8/7, & \text{если} \ \ n = 3, \end{cases} \tag{1}$$

размерность пространства.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $Q = (0,T)\times\Omega$, $\Sigma = (0,T)\times\partial\Omega$, $T > 0$, – боковая поверхность цилиндрического тела Q.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Навье–Стокса, описывающих движения вязкой однородной несжимаемой жидкости:

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \quad (t,\mathbf{x}) \in Q, \tag{2}$$

$$\mathbf{v}|_\Sigma = 0, \quad (t,\mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{3}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4}$$

где $\mathbf{f}$ – внешние массовые силы, Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор градиента.

Предполагается, что известные функции обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}), \quad \mathbf{v}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (\mathbf{v}_0,\nabla q) = 0, \quad q \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Обозначим

$$E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0) = \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1})} + \|\mathbf{v}_0\|^2. \tag{6}$$

Определение 1. *Слабым решением задачи* (2)–(4) назовём элемент

$$\mathbf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega;\mathrm{Ker}\{\mathrm{div}\})),$$

удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T [-(\mathbf{v},\partial_t\mathbf{w}) + \langle(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v},\mathrm{rot}\,\mathbf{w})]\,dt = \int\limits_0^T \langle\mathbf{f},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt$$

для любой вектор-функции $\mathbf{w}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega;\mathrm{Ker}\{\mathrm{div}\}))$ такой, что $\partial_t\mathbf{w}\in L^2(Q)$, $\mathbf{w}|_{t=T}=0$.

В этом случае элемент $\mathbf{v}$ называют *решением задачи* (2)–(4) *класса Хопфа* [5], про функцию давления ничего не сказано [1, с. 214].

Следуя терминологии, взятой из [1, с. 246], решение класса Хопфа, или решение в смысле определения 1, будем называть “*очень слабым решением*”.

Известно, что в двумерном случае существует единственное решение задачи (2)–(4) класса Хопфа [1, 6]. В трёхмерном случае единственность очень слабого решения установлена либо на малом промежутке времени [7, 8], либо в более узком пространстве, чем в котором установлено существование [7, 8].

В случае когда $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ каждому слабому решению задачи (2)–(4) можно сопоставить соответствующее “поле давления” как распределение [9]. В статье [10] найдены условия на область Ω, при которых обосновано существование функции давления. При ограниченной области регулярность давления зависит от выбора правой части. Так, в [11] показано, что существует по крайней мере одно слабое решение задачи (2)–(4), для которого $p \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, если $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. В работе [12] для стохастических уравнений Навье–Стокса найдены априорные оценки на функцию давления без какого-либо предположения о регулярности вектора скорости. Подобные результаты были получены в [13, 14].

В теории гладкости слабых решений уравнений Навье–Стокса важную роль играет свойство частичной регулярности решений, когда решения являются достаточно гладкими всюду, за исключением, быть может, некоторого замкнутого множества. В статье [15] найдены достаточные условия локальной регулярности подходящих слабых решений (хотя бы одно слабое решение Хопфа принадлежит этому классу) нестационарных трёхмерных уравнений Навье–Стокса. Для таких решений в [16] получены достаточные условия того, что точка пространственно-временного цилиндра является регулярной точкой поля скоростей. Доказано, что в зависимости от внешних условий в окрестности регулярной точки поле скоростей может иметь ограниченную осцилляцию или быть непрерывным по Гёльдеру. Показатель непрерывности в данном случае определяется классом функции давления. Полная внутренняя регулярность решений двумерных уравнений системы Навье–Стокса, описывающих течение обобщённой ньютоновской жидкости, исследована в [17]. В работе [18] рассматривается подход к изучению локальной регулярности слабых решений уравнений Навье–Стокса, основанный на сведении вопросов локальной гладкости исходных решений к доказательству теорем лиувиллевского типа для ограниченных обратных по времени решений, соответствующих локальным особенностям исходной задачи.

Известно, что при дополнительной гладкости данных решение задачи (2)–(4) будет регулярным и единственным. Однако вопрос регулярности решения Хопфа при отсутствии дополнительной регулярности на исходные данные остаётся нерешённым со времён работы [5]. Вопрос о гладкости функции давления решения Хопфа задачи (2)–(4) обсуждается в [19].

В данной статье получена новая априорная оценка функции давления для задачи (2)–(4).

Определение 2. *Слабым решением задачи* (2)–(4) назовём пару $(\mathbf{v};p)$ такую, что $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\bigcap L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega;\mathrm{Ker}\,\{\mathrm{div}\}))$, $p \in L^s(0,T;L^2(\Omega))$, удовлетворяющую интегральным тождествам

$$\int_0^T [\langle \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathrm{rot}\,\mathbf{u}) - (p, \mathrm{div}\,\mathbf{u})]\,dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt,$$

$$\int_\Omega p\,dx = 0, \quad \int_0^T (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, q)\,dx = 0 \tag{7}$$

для произвольных $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$ и условию (4) почти всюду в Ω.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Для любых функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_0$, *удовлетворяющих условиям (5), существует слабое решение в смысле определения 2 задачи (2)–(4), для которого выполняется оценка*

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int\limits_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \|p\|^s)\,dt \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ *определена в (6), параметр* s *определён в (1). Причём если* $n=2$, *то решение задачи (2)–(4) единственно.*

Доказательство теоремы проводится методом регуляризации.

В п. 1 статьи исследуется регуляризованная задача, учитывающая релаксацию поля скоростей в соленоидальное со специально выбранными краевыми условиями. Обосновывается сходимость слабых решений при $\varepsilon \to 0$. Используя предложенную регуляризацию краевой задачи, выводится новая априорная оценка функции давления, гарантирующая ограниченность p почти всюду в данной области. В п. 2 рассматривается система уравнений Навье–Стокса с неоднородными краевыми условиями для данного класса решений.

1. Регуляризованные уравнения Навье–Стокса. Для доказательства разрешимости будем аппроксимировать задачу (2)–(4) регуляризованной задачей. Пусть $\varepsilon > 0$ и выполняются условия (5). Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти пару функций $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$, определённых на $Q = \Omega \times (0,T)$, такую, что

$$\partial_t \mathbf{v}_\varepsilon + (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{v}_\varepsilon = \Delta \mathbf{v}_\varepsilon - \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon + \mathbf{f}, \tag{8}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon = \varepsilon \Delta p_\varepsilon, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_\varepsilon \times \mathbf{n}), \quad (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (t,\mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{10}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{11}$$

Слагаемое $(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon/2$ в уравнении (8) называется *стабилизирующим* и введено в [1, с. 335].

Определение 3. *Слабым решением задачи* (8)–(11) назовём пару $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$ такую, что

$$\mathbf{v}_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\widehat{\mathbf{V}}), \quad p_\varepsilon \in L^s(0,T;\widetilde{H}^2_R),$$

удовлетворяющую тождеству

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} + (\nabla \mathbf{v}_\varepsilon, \nabla \mathbf{u}) - (p_\varepsilon, \operatorname{div}\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{u})\,d\sigma =$$

$$= -\left\langle (\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u} \right\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0,T), \tag{12}$$

для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in \widehat{\mathbf{V}}$, уравнению (9) почти всюду на $(0,T)$ и условию (11) в $(C_0^\infty(\Omega))'$.

Точно также как в [1, с. 335] можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\widehat{\mathbf{V}})$. *Тогда функция*

$$t \mapsto \left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} \right) \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}') \tag{13}$$

и справедлива оценка

$$\int\limits_0^T \left\| (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} \right\|^s_{\widehat{\mathbf{V}}'} dt \leqslant C\|\mathbf{u}\|^{2s/s'}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;\widehat{\mathbf{V}})},$$

где параметр s *определён в (1).*

Доказательство. Обозначим через s' сопряжённый показатель к s, $s' = 1/(1-1/s)$. Пусть $\mathbf{w} \in L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})$ – произвольная вектор-функция. Согласно вложениям $\widehat{\mathbf{V}} \subset \mathbf{H}^1 \subset$ $\subset L^4(\Omega)$ при $n = 2, 3$

$$u_i \in L^2(0,T;L^4(\Omega)), \quad (\mathbb{D}_i u_j) \in L^2(Q), \quad w_j \in L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}}),$$

здесь $\mathbb{D}_i = \partial/\partial x_i$ – дифференциальный оператор. В силу неравенства Гёльдера $u_i(\mathbb{D}_i u_j)w_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, принадлежит $L^1(Q)$. Поэтому

$$I(t) = \int\limits_\Omega \left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\right)\mathbf{w}\,dx \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \tag{14}$$

для п.в. $t \in (0,T)$. Ограниченность выражения, стоящего в правой части (14), зависит от размерности пространства. Для его оценки применим неравенства Соболева [20]:

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^4(\Omega)} \leqslant \beta(\Omega)\|\mathbf{u}\|(\|\mathbf{u}\| + \|\nabla\mathbf{u}\|), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad n = 2, \tag{15}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \beta(\Omega)\|\mathbf{u}\|^{1/4}(\|\mathbf{u}\| + \|\nabla\mathbf{u}\|)^{3/4}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad n = 3. \tag{16}$$

Подставив (15) или (16) в (14) и проинтегрировав по переменной t от 0 до T, найдём

$$\int\limits_0^T I(t)\,dt \leqslant C\int\limits_0^T (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^{1/2}\|\mathbf{u}\|^3_{\mathbf{H}^1(\Omega)})^{1/2}\|\mathbf{w}\|^{1/2}\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{\widehat{\mathbf{V}}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mathbf{w}\|^{1/2}_{L^2(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}\|\mathbf{u}\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{3/2}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}, \quad n = 2,$$

$$\int\limits_0^T I(t)\,dt \leqslant C\int\limits_0^T (\|\mathbf{u}\|^{4/3}\|\mathbf{u}\|^{4/3}_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^{1/3}\|\mathbf{u}\|^{7/3}_{\mathbf{H}^1(\Omega)})^{3/4}\|\mathbf{w}\|_{\widehat{\mathbf{V}}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mathbf{w}\|_{L^8(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}\|\mathbf{u}\|^{1/4}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{7/4}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}, \quad n = 3.$$

Получим необходимую оценку

$$\left\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\right\|_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} = \sup_{\|\mathbf{w}\|_{L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}=1} \left\langle(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{w}\right\rangle_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')\times L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})} \leqslant$$

$$\leqslant C\sup_{\|\mathbf{w}\|_{L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}=1}\{\|\mathbf{w}\|_{L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}})}\|\mathbf{u}\|^{2/s'}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\mathbf{u}\|^{2/s}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}\} \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mathbf{u}\|^{2/s'}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla\mathbf{u}\|^{2/s}_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любых $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_0$, удовлетворяющих (5), существует слабое решение задачи (8)–(11), причём если $n = 2$, то это решение единственно.*

Доказательство. Для фиксированного параметра $\varepsilon > 0$ докажем разрешимость задачи (8)–(11), применяя метод Галёркина. Рассмотрим базис пространства $\widehat{\mathbf{V}}$, состоящий из элементов $\mathbf{u}_j \in \mathbf{H}^1$, определяемых из условий:

$$(\nabla\mathbf{u}_j, \nabla\mathbf{w}) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega}(\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{w})\,d\sigma = \lambda_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{w}), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{w} \in \widehat{\mathbf{V}}.$$

Здесь число $\varepsilon > 0$ фиксировано.

Рассмотрим скалярный базис пространства H^1 из функций $r_j \in H^1$, удовлетворяющих следующей спектральной задаче Неймана:

$$-\Delta r_j = \mu_j(r_j - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(r_j, 1)), \quad (\nabla r_j \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Для каждого m определим приближённое решение задачи (8)–(11) $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε соотношениями

$$\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\mathbf{u}_j, \quad p_{\varepsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} s_{jm}(t) r_j.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных g_{jm}, s_{jm}, $j = \overline{1,m}$:

$$(\partial_t \mathbf{v}_{\varepsilon m}, \mathbf{u}_k) + (\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}, \nabla \mathbf{u}_k) - (p_{\varepsilon m}, \operatorname{div} \mathbf{u}_k) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_{\varepsilon m} \cdot \mathbf{u}_k)\, d\sigma =$$

$$= -\left((\mathbf{v}_{\varepsilon m} \cdot \nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon m} + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{v}_{\varepsilon m})\mathbf{v}_{\varepsilon m}, \mathbf{u}_k\right) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_k), \tag{17}$$

$$(\mathbf{v}_{\varepsilon m}, \nabla r_l) = \varepsilon(\nabla p_{\varepsilon m}, \nabla r_l), \quad (p_{\varepsilon m}, 1) = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,m}, \tag{18}$$

$$\mathbf{v}_{\varepsilon m}(0) = \mathbf{v}_{0m}, \tag{19}$$

где $\mathbf{v}_{0m} = \mathrm{P}_m \mathbf{v}_0$, $\mathrm{P}_m \colon \mathbf{L}^2(\Omega) \mapsto \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ – оператор проектирования.

Уравнения (17), (18) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций g_{1m}, g_{2m}, $\ldots$, g_{mm}, s_{1m}, s_{2m}, $\ldots$, s_{mm}. Заметим, что нелинейность задачи Коши (17)–(19) гладкая. Повторяя рассуждения [1, с. 227], можно показать, что существует решение, определённое на некотором промежутке $[0, t_m)$, а приводимые ниже априорные оценки показывают, что фактически $t_m = T$.

Умножим (17) на $g_{jm}(t)$, а (18) на $s_{jm}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. Учитывая (9), найдём

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon m}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)} =$$

$$= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\varepsilon m}) \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + C\|\mathbf{f}\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}}. \tag{20}$$

Перенося первое слагаемое правой части (20) влево и интегрируя от 0 до t, получаем априорную оценку

$$\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \int\limits_0^t \left(\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon m}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\right) ds \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0). \tag{21}$$

Здесь постоянная C не зависит от ε, m.

Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности $\mathbf{v}_{\varepsilon m}$ в пространстве $L^2(Q)$. Обозначим

$$\Phi(t) = C\left(\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \|\mathbf{f}(t)\|^2_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\right), \quad t \in (0, T).$$

Умножим (17) на $g_{jm}(t)$, затем умножим на $(-g_{jm}(\tau))$, просуммируем по $j = \overline{1,m}$, где $\tau, t \in$ $\in (0, T)$. Складывая получившиеся выражения и учитывая (18), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t) - \mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|^2 \leqslant \Phi(t) + \Phi(\tau) + \|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m}(t)\|\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t на отрезке $[\tau,\tau+h]$ и по τ на отрезке $[0,T-h]$. Учитывая (21), точно так же как и в [21] имеем оценку равностепенной непрерывности для последовательности $\mathbf{v}_{\varepsilon m}$:

$$\int\limits_0^{T-h} \|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h)-\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant Ch^{1/2}. \tag{22}$$

Как следствие неравенства (21) из (18) получим оценку равностепенной непрерывности для последовательности $\nabla p_{\varepsilon m}$. Рассмотрим выражение

$$\varepsilon\int\limits_0^{T-h} \|\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau =$$

$$=\varepsilon\int\limits_0^{T-h}(\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h))\,d\tau+\varepsilon\int\limits_0^{T-h}(\nabla p_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau -$$

$$-2\varepsilon\int\limits_0^{T-h}(\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau =$$

$$=\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h))\,d\tau+\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h))\,d\tau-\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau =$$

$$=\int\limits_0^{T-h}(\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h)-\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau),\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau))\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^{T-h}\|\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau+h)-\mathbf{v}_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{T-h}\|\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau.$$

Перенеся последнее слагаемое влево, найдём

$$\varepsilon^2\int\limits_0^{T-h}\|\nabla p_{\varepsilon m}(\tau+h)-\nabla p_{\varepsilon m}(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant Ch^{1/2}. \tag{23}$$

Отметим, что в оценках (21)–(23) постоянная C не зависит от m и ε, а $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6).

Перейдём к пределу при $m\to\infty$ в (17)–(19), используя оценки (21)–(23).

Существует последовательность $m'\to\infty$ такая, что

$$\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\to\mathbf{v}_\varepsilon \quad \text{слабо в } L^2(0,T;\mathbf{H}^1), \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в } \mathbf{L}^2(Q),$$

$$p_{\varepsilon m'}\to p_\varepsilon \quad \text{слабо в } L^2(0,T;H^2), \quad \text{сильно в } L^2(0,T;H^1). \tag{24}$$

Пусть $\psi \in C[0,T]$, $\psi(T)=0$. Умножим (17), (18) на $\psi(t)$ и проинтегрируем от 0 до T:

$$-\int_0^T (\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \mathbf{u}_k \psi'(t))\,dt + (\mathbf{v}_{0m'}, \mathbf{u}_k\psi(0)) +$$

$$+\int_0^T [(\nabla \mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \nabla \mathbf{u}_k \psi(t)) - (p_{\varepsilon m'}, \operatorname{div}\mathbf{u}_k\psi(t))]\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot \mathbf{u}_k)\,d\sigma\,dt =$$

$$= -\int_0^T \left((\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon m'} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \mathbf{u}_k\psi(t)\right)dt + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_k\psi(t))\,dt, \tag{25}$$

$$\int_0^T (\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, r_l\psi(t))\,dt = -\int_0^T \varepsilon(\nabla p_{\varepsilon m'}, \nabla r_l\psi(t))\,dt, \quad k=\overline{1,m}, \quad l=\overline{1,m}. \tag{26}$$

Используя (24), перейдём к пределу при $m'\to\infty$ в линейных слагаемых (25) и в (26). В нелинейных слагаемых (25) предельный переход осуществим следующим образом:

$$\int_0^T \left((\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon m'} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})\mathbf{v}_{\varepsilon m'}, \mathbf{u}_k\psi(t)\right)dt - \int_0^T \left((\mathbf{v}_{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathbf{v}_{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon})\mathbf{v}_{\varepsilon}, \mathbf{u}_k\psi(t)\right)dt =$$

$$= -\int_0^T [(\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{\varepsilon m'} - (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\varepsilon]\psi(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega [(\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})\mathbf{v}_{\varepsilon m'} - (\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon]\mathbf{u}_k\psi(t)\,dx\,dt =$$

$$= -\int_0^T [(\mathbf{v}_{\varepsilon m'}\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{\varepsilon m'} - (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_\varepsilon]\psi(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'} - \operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon\mathbf{u}_k\psi(t)\,dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{v}_{\varepsilon m'})(\mathbf{v}_{\varepsilon m'} - \mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{u}_k\psi(t)\,dx\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad m'\to\infty.$$

Мы показали, что $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$ – слабое решение задачи (8)–(11), удовлетворяющее оценке

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(t)\|^2 + \int_0^t \left(\|\nabla\mathbf{v}_\varepsilon\|^2 + \varepsilon\|\nabla p_\varepsilon\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\right)ds \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0). \tag{27}$$

Здесь постоянная C не зависит от ε, $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6).

Теперь если $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε удовлетворяют (12), (9), то согласно (13) уравнение (12) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} = -(\nabla\mathbf{v}_\varepsilon, \nabla\mathbf{u}) + (p_\varepsilon, \operatorname{div}\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega}(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\mathbf{u})\,d\sigma -$$

$$-\left\langle (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{u}\right\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}}$$

для любой $\mathbf{u}\in\widehat{\mathbf{V}}$.

Отсюда и из леммы 1.1 [1] следует, что $\partial_t \mathbf{v}_\varepsilon \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$, где параметр s определён в (1) и вектор-функция $\mathbf{v}_\varepsilon$ п.в. равняется некоторой непрерывной функции из $[0,T]$ в $\widehat{\mathbf{V}}'$. Таким образом, условие (11) имеет смысл.

В случае $n=2$ единственность слабого решения задачи (8)–(11) устанавливается аналогично [1]. Теорема доказана.

Получим дополнительную априорную оценку для p_ε. Во-первых, покажем, что p_ε удовлетворяет однородному начальному условию. В теореме 2 установлено, что условие (11) понимается в таком смысле:

$$\langle \mathbf{v}_\varepsilon(t), \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \to \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{u}\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \quad \text{при} \quad t\to 0$$

для произвольной $\mathbf{u}\in\widehat{\mathbf{V}}$.

Обозначим
$$\widetilde{H}^2 = \{h\in \widetilde{H}^2_R\colon (h,1)=0\}, \quad \widetilde{H}^{-2} = (\widetilde{H}^2)'.$$

Справедливы непрерывные вложения

$$\widetilde{H}^2 \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \widetilde{H}^{-2}.$$

Из теории разрешимости краевых эллиптических задач следует, что существует оператор

$$\mathrm{R}\colon \{r\in L^2(\Omega), \ \ (r,1)=0\} \mapsto \widetilde{H}^2$$

такой, что $b=\mathrm{R}(r)$, если

$$\Delta b = r, \quad (b,1)=0, \quad (\nabla b\cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0. \tag{28}$$

Тогда
$$\|\mathrm{R}(r)\|^2_{\widetilde{H}^2} \leqslant C\|r\|^2. \tag{29}$$

Пусть $g\in L^2(\Omega)$. Для функции $\pi\in\widetilde{H}^2$, удовлетворяющей условиям

$$\Delta\pi = g, \quad (\pi,1)=0, \quad (\nabla\pi\cdot\mathbf{n})|_{\partial\Omega}=0,$$

справедлива оценка
$$\|\pi\|^2 \leqslant C\|g\|^2_{\widetilde{H}^{-2}}. \tag{30}$$

Действительно. Пусть $r\in L^2(\Omega)$, а b – решение задачи (28). Применив формулу Грина, найдём

$$(\pi, r) = (g, b).$$

С учётом (29) получим

$$\|\pi\| = \sup_{\|r\|=1}(\pi,r) = \sup_{\|r\|=1}(g,b) = \sup_{\|r\|=1}\langle g,b\rangle_{\widetilde{H}^{-2}\times\widetilde{H}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|r\|=1}\{\|g\|_{\widetilde{H}^{-2}}\|b\|_{\widetilde{H}^2}\} \leqslant \sup_{\|r\|=1}\{C\|g\|_{\widetilde{H}^{-2}}\|r\|\} \leqslant C\|g\|_{\widetilde{H}^{-2}}.$$

Рассмотрим вариационную задачу. Пусть $g\in\widetilde{H}^{-2}$. Требуется определить функцию $\pi\in$ $\in L^2(\Omega)$ такую, что
$$(\pi,\Delta b) = \langle g,b\rangle_{\widetilde{H}^{-2}\times\widetilde{H}^2}, \quad b\in\widetilde{H}^2. \tag{31}$$

Лемма 2. *Для произвольной функции $g\in\widetilde{H}^{-2}$ задача (31) имеет единственное решение $\pi\in L^2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\|\pi\|^2 \leqslant C\|g\|^2_{\widetilde{H}^{-2}}.$$

Доказательство. Единственность следует непосредственно, если положить $g = 0$, а $\Delta b = \pi$ в (31). Докажем существование. Пусть $g \in \widetilde{H}^{-2}$. Вложение $(L^2(\Omega)/R) \subset \widetilde{H}^{-2}$ плотно. Следовательно, существует последовательность $\{g_n\} \in L^2(\Omega)$ такая, что $g_n \to g$ в $\widetilde{H}^{-2}$. Пусть $\pi_n \in \widetilde{H}^2$ удовлетворяет условиям:

$$\Delta\pi_n = g_n, \quad (\pi_n, 1) = 0, \quad (\nabla\pi_n \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0.$$

Справедлива оценка (30), из которой заключаем, что существует $\widetilde{\pi}$ и $\pi_n \to \widetilde{\pi}$ слабо в $L^2(\Omega)$. Переходя к пределу по $n \to \infty$ в равенстве

$$(\pi_n, r) = (g_n, b), \quad r \in L^2(\Omega),$$

где b – решение (28), и учитывая единственность задачи (31), получаем, что $\widetilde{\pi} = \pi$. Лемма доказана.

В теореме 2 установлено, что $\mathbf{v}_\varepsilon(t) \in \widehat{\mathbf{V}}'$ для всех $t \in [0, T]$. Отсюда заключаем, что $\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon(t) \in \widetilde{H}_R^{-2} \subset \widetilde{H}^{-2}$ для всех $t \in (0, T)$.

Пусть $r \in L^2(\Omega)$, b – решение (28). Умножив первое уравнение (9) на $b \in \widetilde{H}^2$ и применив формулу Грина, получим равенство

$$(\varepsilon\tilde{p}_\varepsilon(t), r) = \langle \operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon(t), b\rangle_{\widetilde{H}^{-2}\times\widetilde{H}^2}, \quad r \in L^2(\Omega), \tag{32}$$

где $\tilde{p}_\varepsilon = p_\varepsilon - (\mathrm{mes}\Omega)^{-1}(p_\varepsilon, 1)$. Вследствие леммы 2 из (32) заключаем, что $\tilde{p}_\varepsilon(t) \in L^2(\Omega)$. Из (32) также найдём

$$-(\varepsilon\tilde{p}_\varepsilon(t), r) = \langle \mathbf{v}_\varepsilon(t), \nabla b\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} \to (\mathbf{v}_0, \nabla b) = 0, \quad r \in L^2(\Omega),$$

где b – решение (28).

Мы показали, что

$$\tilde{p}_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{п.в. в} \ \ \Omega. \tag{33}$$

Далее покажем, что сужение на границу вектора вихря скорости $(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon \times \mathbf{n})|_\Sigma$ введено корректно в некотором функциональном пространстве.

Рассмотрим вспомогательную задачу: в области Q найти пару $(\mathbf{w}; \chi)$, удовлетворяющую условиям

$$\partial_t\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w} + \nabla\chi = \mathbf{z}, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \tag{34}$$

$$(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}) = 0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{w} \times \mathbf{n}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{35}$$

$$\mathbf{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{36}$$

Задача (34)–(36) является обратно-временнóй задачей Стокса.

Определение 4. Пусть $\mathbf{z} \in L^2(0, T; \widehat{\mathbf{V}}')$. *Слабым решением задачи* (34)–(36) назовём вектор-функцию $\mathbf{w} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$, которая удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) - (\operatorname{rot}\mathbf{w}, \operatorname{rot}\mathbf{y}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{V}. \tag{37}$$

Точно так же как в монографии [1] докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Для произвольной функции* $\mathbf{z} \in L^2(0, T; \widehat{\mathbf{V}}')$ *существует единственное слабое решение задачи (34)–(36) такое, что* $\partial_t\mathbf{w} \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ *и при этом* $\mathbf{w} \in C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$.

В дальнейшем нам понадобятся более регулярные свойства слабого решения задачи (34)–(36).

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{z} \in L^\ell(0, T; \widehat{\mathbf{V}}')$, $2 \leqslant \ell < \infty$. *Тогда слабым решением задачи (34)–(36) является функция* $\mathbf{w} \in L^\ell(0, T; \mathbf{V})$, $\partial_t\mathbf{w} \in L^\ell(0, T; \mathbf{V}')$, *и справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}\|^\ell_{L^\ell(0,T;\mathbf{V})} + \|\partial_t\mathbf{w}\|^\ell_{L^\ell(0,T;\mathbf{V}')} \leqslant C\|\mathbf{z}\|^\ell_{L^\ell(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')}.$$

Для доказательства леммы 3 умножим (37) на произвольную функцию $\xi \in L^{l/(l-1)}(0,T)$ такую, что $\xi' \in L^1(0,T)$, $\xi(0)=0$, и проинтегрируем получившееся выражение от 0 до T. Применяя неравенство Гёльдера [20] с сопряжёнными показателями l, $l \geqslant 2$ и $l' = l/(l-1)$, и учитывая (37), получаем требуемую оценку.

Будем искать векторное поле $\mathbf{a}$ из условий

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})|_\Sigma = 0. \tag{38}$$

Относительно разрешимости задачи (38) справедлива следующая

Теорема 4 [22]. *Пусть Ω – односвязная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Если $\mathbf{j} \in W_m^{l-1}(\Omega)$, $m>1$, то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{a}\|_{W_m^l(\Omega)} \leqslant C\|\mathbf{j}\|_{W_m^{l-1}}. \tag{39}$$

Пусть $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon$, тогда согласно (38), (39)

$$\|\mathbf{a}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1)} \leqslant C\|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L^2(Q)}.$$

Заметим, что вследствие (9), (38) векторное поле $\mathbf{a} \in L^2(0,T;\mathbf{V})$ определяется равенством

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_\varepsilon - \varepsilon\nabla p_\varepsilon. \tag{40}$$

Обозначим

$$\mathbf{s} = (\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon + \frac{1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \nabla\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{f}. \tag{41}$$

Согласно лемме 1 и условиям (5) функция $t \mapsto \mathbf{s}(t) \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$ и выполняется оценка

$$\|\mathbf{s}\|_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0), \tag{42}$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0)$ определена в (6).

Пусть $\mathbf{z} \in L^{s'}(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$ – произвольная вектор-функция, s' – сопряжённый показатель s, $s' = 1/(1-1/s)$, где параметр s определён в (1), и $\mathbf{w}$ – слабое решение задачи (34)–(36). Из (12) с учётом (37), (40), (41), применив формулу Грина и интегрирование по частям, получим равенство

$$\int_0^T \langle(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n}),\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)\times\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}\,dt = \int_0^T [\langle\mathbf{s},\mathbf{w}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} - \langle\mathbf{z},\mathbf{a}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}}]\,dt - (\mathbf{v}_0,\mathbf{w}(0)). \tag{43}$$

Мы показали, что существует след на границу области вектора вихря

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n})|_\Sigma\colon L^s(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \mapsto L^s(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)), \quad s>1,$$

определяемый формулой (43), для которого вследствие теоремы 3 и леммы 3 справедлива оценка

$$\|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n}\|^s_{L^s(0,T;\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega))} \leqslant C(\|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \|\mathbf{s}\|^s_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} + \|\mathbf{v}_0\|^2). \tag{44}$$

Рассмотрим вариационную задачу. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{h}$ – заданные вектор-функции. Найти пару $(\mathbf{g};\pi)$, удовлетворяющую условиям

$$(\operatorname{rot}\mathbf{g},\operatorname{rot}\mathbf{g}_1) - (\pi,\operatorname{div}\mathbf{g}_1) = -\langle\mathbf{s}_1,\mathbf{g}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} - \langle\mathbf{h},\mathbf{g}_1\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

$$\langle\nabla\pi_1,\mathbf{g}\rangle_{\mathbf{V}'\times\mathbf{V}} = 0, \quad \mathbf{g}_1 \in \widehat{\mathbf{V}}, \quad \pi_1 \in L^2(\Omega), \quad (\pi_1,1) = 0. \tag{45}$$

Теорема 5. *Если $\mathbf{s}_1 \in \widehat{\mathbf{V}}'$, $\mathbf{h} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, то существует обобщённое решение задачи (45) и справедлива априорная оценка*

$$\|\mathbf{g}\|_{\widehat{\mathbf{V}}} + \|\pi\|_{L^2(\Omega/\mathbb{R})} \leqslant C(\|\mathbf{s}_1\|_{\widehat{\mathbf{V}}'} + \|\mathbf{h}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}). \tag{46}$$

Доказательство теоремы 5 проводится аналогично доказательству теоремы 2 в работе [23].

Пусть $\mathbf{s}_1 \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$, $\mathbf{h} \in L^s(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))$, где параметр s определён в (1). Тогда условия (45), (46) останутся верными для п.в. $t \in (0,T)$. Учитывая (42), (44), выберем $(\mathbf{h} \times \times \mathbf{n}) = (\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon \times \mathbf{n})|_\Sigma$, $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$ в (45), (46). Запишем первое равенство (45) в следующем виде:

$$\langle \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{g}, \mathbf{g}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} - (\pi, \operatorname{div}\mathbf{g}_1) = -\langle \mathbf{s}, \mathbf{g}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}}, \quad \mathbf{g}_1 \in L^\infty(0,T;\widehat{\mathbf{V}}).$$

Используя формулу Грина и выбирая $\mathbf{g}_1 = \nabla q$, где $q \in L^\infty(0,T;\widetilde{H}^2_R)$ – произвольная функция, из последнего равенства найдём

$$\langle \Delta\pi + \operatorname{div}\mathbf{s}, q\rangle_{\widetilde{H}^{-2}_R\times\widetilde{H}^2_R} = \langle(\nabla\pi + [\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{s}])\cdot\mathbf{n}, q\rangle_{H^{-3/2}(\partial\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)}. \tag{47}$$

Запишем равенство (12), учитывая (41), в виде

$$\langle \partial_t\mathbf{v}_\varepsilon + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{s} + \nabla p_\varepsilon, \mathbf{w}_1\rangle_{\widehat{\mathbf{V}}'\times\widehat{\mathbf{V}}} = 0, \quad \mathbf{w}_1 \in L^\infty(0,T;\widehat{\mathbf{V}}). \tag{48}$$

В теореме 2 установлено, что $\partial_t\mathbf{v}_\varepsilon \in L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')$, где параметр s определён в (1), и, следовательно, $\varepsilon\partial_t\Delta p_\varepsilon = \partial_t(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon) \in L^s(0,T;\widetilde{H}^{-2}_R)$.

Применим формулу Грина в (48) и положим $\mathbf{w}_1 = \nabla q$, где $q \in L^\infty(0,T;\widetilde{H}^2_R)$ – произвольная функция. Из (48), учитывая (9), (10), получаем

$$\langle \varepsilon\partial_t\Delta p_\varepsilon + \Delta p_\varepsilon + \operatorname{div}\mathbf{s}, q\rangle_{\widetilde{H}^{-2}_R\times\widetilde{H}^2_R} = \langle[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{s}]\cdot\mathbf{n}, q\rangle_{H^{-3/2}(\partial\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)}. \tag{49}$$

Сравнивая (47) и (49), запишем равенство

$$\langle \varepsilon\partial_t\Delta p_\varepsilon + \Delta p_\varepsilon - \Delta\pi, q\rangle_{\widetilde{H}^{-2}_R\times\widetilde{H}^2_R} + \langle\nabla\pi\cdot\mathbf{n}, q\rangle_{H^{-3/2}(\partial\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)} = 0 \tag{50}$$

для п.в. $t \in (0,T)$ и любых $q \in L^\infty(0,T;\widetilde{H}^2_R)$.

Пусть $q = \mathrm{R}(\tilde p_\varepsilon) + (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(q,1)$, где оператор R определён в (28), $\tilde p_\varepsilon = p_\varepsilon - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(p_\varepsilon,1)$, $\tilde\pi = \pi - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}(\pi,1)$. Применив вторую формулу Грина в (50), с учётом краевых условий (10) будем иметь

$$\varepsilon(\partial_t\tilde p_\varepsilon, \tilde p_\varepsilon) + (\tilde p_\varepsilon, \tilde p_\varepsilon) = (\tilde\pi, \tilde p_\varepsilon) \quad \text{для п.в.} \ \ t \in (0,T). \tag{51}$$

Запишем первое слагаемое в (51) в виде

$$\varepsilon(\partial_t\tilde p_\varepsilon, \tilde p_\varepsilon) = (\varepsilon/s)\|\tilde p_\varepsilon\|^{2-s}\frac{d}{dt}\|\tilde p_\varepsilon\|^s,$$

где параметр s определён в (1). Из (51) найдём

$$\frac{\varepsilon}{s}\|\tilde p_\varepsilon(t)\|^{2-s}\frac{d}{dt}\|\tilde p_\varepsilon(t)\|^s + \|\tilde p_\varepsilon(t)\|^{2-s}\|\tilde p_\varepsilon(t)\|^s = (\tilde\pi, \tilde p_\varepsilon) \leqslant \|\tilde\pi(t)\|\|\tilde p_\varepsilon(t)\| \quad \text{для п.в.} \ \ t \in (0,T),$$

так что или $\|\tilde p_\varepsilon(t)\| = 0$, или

$$\frac{\varepsilon}{s}\frac{d}{dt}\|\tilde p_\varepsilon(t)\|^s + \frac{1}{2}\|\tilde p_\varepsilon(t)\|^s \leqslant \|\tilde\pi(t)\|^s.$$

Но $\|\tilde p_\varepsilon(t)\|$ есть непрерывная функция от t, поэтому для всех t, учитывая (33), имеем

$$\varepsilon\|\tilde p_\varepsilon(t)\|^s + \int\limits_0^t \|\tilde p_\varepsilon(\tau)\|^s\,ds \leqslant C\int\limits_0^t \|\tilde\pi(\tau)\|^s\,d\tau, \quad t \in (0,T), \tag{52}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Заметим, что из (46) при $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}$, $(\mathbf{h}\times\mathbf{n}) = (\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n})|_{\partial\Omega}$ в силу оценок (27), (42), (44) следует неравенство

$$\|\tilde{\pi}\|^s_{L^s(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \|\mathbf{s}\|^s_{L^s(0,T;\widehat{\mathbf{V}}')} + \|\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{n}\|^s_{L^s(0,T;H^{-1/2}\partial\Omega)} \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0). \tag{53}$$

Из (52), учитывая (53), получаем следующую оценку:

$$\varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\tilde{p}_\varepsilon\|^s + \int\limits_0^T \|\tilde{p}_\varepsilon\|^s\,d\tau \leqslant CE_0(\mathbf{f},\mathbf{v}_0), \tag{54}$$

где постоянная C не зависит от ε.

Доказательство теоремы 1. Пусть $n=2,3$ и $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε – слабое решение задачи (8)–(11) в смысле определения 3. Построенные в теореме 2 решения $(\mathbf{v}_\varepsilon,\ p_\varepsilon)$ удовлетворяют оценкам (21), (22), (54). Можно выделить подпоследовательность – обозначим её также $(\mathbf{v}_\varepsilon;p_\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}_\varepsilon\to\mathbf{v}^* \quad \text{слабо в} \ \ L^2(0,T;\mathbf{H}^1_0(\Omega)), \quad *\text{-слабо в} \ \ L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в} \ \ \mathbf{L}^2(Q),\\
(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{v}_\varepsilon\to\mathbf{q} \quad \text{слабо в} \ \ L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\partial\Omega)),\\
\sqrt{\varepsilon}\nabla\tilde{p}_\varepsilon\to\chi \quad \text{слабо в} \ \ L^2(Q),\\
\tilde{p}_\varepsilon\to p^* \quad \text{слабо в} \ \ L^2(Q) \quad \text{при} \ \ n=2,\\
\tilde{p}_\varepsilon\to p^* \quad \text{слабо в} \ \ L^{8/7}(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{при} \ \ n=3.
\end{gathered} \tag{55}$$

Используя (55), перейдём к пределу при $\varepsilon\to0$ в (9), (10). Рассмотрим

$$(\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon,q) = -\varepsilon(\nabla\tilde{p}_\varepsilon,\nabla q)\to\sqrt{\varepsilon}(\chi,\nabla q)\to0, \quad q\in H^1(\Omega),$$

для п.в. $t\in(0,T)$. Следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{v}_\varepsilon=0$ в смысле теории распределений. Рассуждая аналогично, получаем

$$(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{q}_1)_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}\to\sqrt{\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{q}_1)_{L^2(\partial\Omega)}\to0, \quad \mathbf{q}_1\in\mathbf{L}^2(\partial\Omega),$$

для п.в. $t\in(0,T)$. Следовательно, $\mathbf{v}_\varepsilon=0$ для п.в. $(t,\mathbf{x})\in\Sigma$.

Пусть $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Запишем (12) в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}) + \langle(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon,\operatorname{rot}\mathbf{u}) - (\tilde{p}_\varepsilon,\operatorname{div}\mathbf{u}) = \langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}. \tag{56}$$

Пусть $\psi\in C[0,T]$ и $\psi(T)=0$. Умножим (56) на ψ скалярно в $L^2(0,T)$. Интегрируя затем это равенство по переменной t от 0 до T, получаем

$$\begin{gathered}
-\int\limits_0^T(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}\psi')\,dt + \int\limits_0^T\langle(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{u}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt + \int\limits_0^T(\operatorname{rot}\mathbf{v}_\varepsilon,\operatorname{rot}\mathbf{u}\psi)\,dt - \int\limits_0^T(\tilde{p}_\varepsilon,\operatorname{div}\mathbf{u}\psi)\,dt = \\
= \int\limits_0^T\langle\mathbf{f},\mathbf{u}\psi\rangle_{\mathbf{H}_0^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)}\,dt + \langle\mathbf{v}_\varepsilon(0),\mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega).
\end{gathered} \tag{57}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ в (57), учитывая (55), найдём

$$-\int\limits_0^T(\mathbf{v}^*,\mathbf{u}\psi')\,dt + \int\limits_0^T\langle(\mathbf{v}^*\cdot\nabla)\mathbf{v}^*,\mathbf{u}\psi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt + \int\limits_0^T(\operatorname{rot}\mathbf{v}^*,\operatorname{rot}\mathbf{u}\psi)\,dt - \int\limits_0^T(p^*,\operatorname{div}\mathbf{u}\psi)\,dt =$$

$$= \int_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\psi\rangle_{\tilde{H}^{-1}(\Omega)\times H^1(\Omega)}\, dt + \langle \mathbf{v}^*(0), \mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{58}$$

Умножим (7) на ψ скалярно в $L^2(0,T)$ и проинтегрируем по частям. Сравнив с (58), получим $\langle \mathbf{v}^*(0), \mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{u}\psi(0)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ для любого $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Выбрав $\psi(0)=1$, приходим к (4).

Мы показали, что если $n=2$, то при $\varepsilon\to 0$ слабое решение $(\mathbf{v}_\varepsilon; p_\varepsilon)$ задачи (8)–(11) сходится к единственному решению $(\mathbf{v}; p)$ задачи (2)–(4) в следующем смысле:

$$\mathbf{v}_\varepsilon \to \mathbf{v} \quad \text{слабо в} \;\; L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad *\text{-слабо в} \;\; L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в} \;\; L^2(Q),$$

$$\tilde{p}_\varepsilon \to p \quad \text{слабо в} \;\; L^2(Q),$$

и выполняется оценка

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|p\|^2)\, dt \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0)$ определена в (6) и не зависит от ε.

Если $n=3$, то существует последовательность $(\mathbf{v}_{\varepsilon'}; p_{\varepsilon'})$ решений задачи (8)–(11) в смысле определения 3 такая, что при $\varepsilon\to 0$ сходится к некоторому решению $(\mathbf{v}; p)$ задачи (2)–(4) в следующем смысле:

$$\mathbf{v}_{\varepsilon'} \to \mathbf{v} \quad \text{слабо в} \;\; L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad *\text{-слабо в} \;\; L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \text{сильно в} \;\; L^2(Q),$$

$$\tilde{p}_{\varepsilon'} \to p \quad \text{слабо в} \;\; L^{8/7}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|p\|^{8/7})\, dt \leqslant CE_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0)$ определена в (6) и не зависит от ε. Теорема 1 доказана.

2. Неоднородные граничные условия. Рассмотрим систему уравнений Навье–Стокса, описывающих динамику движения несжимаемой среды, состояние которой характеризуется распределением давления $p(t,\mathbf{x})$ и полем скоростей $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$, $(t,\mathbf{x})\in Q$:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \tag{59}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{60}$$

На боковой поверхности рассматриваемого цилиндрического тела ставится условие Дирихле:

$$\mathbf{v}|_\Sigma = \mathbf{g}, \quad (t,\mathbf{x})\in\Sigma. \tag{61}$$

В начальный момент времени задаётся условие

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega. \tag{62}$$

Относительно разрешимости задачи (59)–(62) (для ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega\in C^\infty$) доказана следующая

Теорема 6 [24]. *Пусть* $\alpha\in(3/2;2]$ *и выполняются условия:*

$$\mathbf{f}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega)), \quad \operatorname{div}\mathbf{f}=0, \quad \mathbf{g}\in G_\alpha(\Sigma), \quad \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g},\mathbf{n})d\sigma = 0,$$

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad (\mathbf{v}_0, \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = (\mathbf{g}, \mathbf{n})|_{t=0}.$$

Предположим, что

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega))} + \|\mathbf{v}_0\|^2_{\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|^2_{G_\alpha(\Sigma)} < \delta,$$

где постоянная δ *достаточно мала. Тогда существует единственное решение* $\mathbf{v}$, $(\mathbf{v}, \nabla p) \in \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega)) \times L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega))$, $\partial_t \mathbf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{\alpha-2}(\Omega))$, *задачи (59)–(62).*

Исследуем случай $\alpha = 1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Предположим, что известные функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{g} = g_n\mathbf{n} + g_r\mathbf{r}$, где $\mathbf{n}$ – внешний вектор нормали, $\mathbf{r}$ – касательное к $\partial\Omega$ векторное поле, направленное против часовой стрелки, $g_n = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})$, $g_r = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})$, обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)),$$

$$g_r \in G_r(\Sigma), \quad G_r(\Sigma) = L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \bigcap L^{1/2}(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega)),$$

$$g_n \in G_n(\Sigma), \quad G_n(\Sigma) = L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \bigcap L^{3/4}(0,T;H^{-1}(\partial\Omega)),$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = 0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0,T),$$

$$\mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega), \quad (\mathbf{v}_0, \nabla q) = 0, \quad q \in H^1(\Omega). \tag{63}$$

Обозначим

$$G(\Sigma) = G_n(\Sigma) \times G_r(\Sigma), \quad E(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{v}_0) = \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))} + \|\mathbf{g}\|^2_{G(\Sigma)} + \|\mathbf{v}_0\|^2. \tag{64}$$

Определение 5. *Слабым решением задачи* (59)–(62) назовём пару

$$(\mathbf{v};p) \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega;\operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\})) \times L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

удовлетворяющую интегральным тождествам

$$\int\limits_0^T [\langle \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}, \operatorname{rot}\mathbf{u}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{u})]\,dt = \int\limits_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\,dt,$$

$$\int\limits_\Omega p\,dx = 0, \quad \int\limits_0^T (\operatorname{div}\mathbf{v}, q)\,dx = 0$$

для произвольных $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$, и условию (61) в смысле следа функции из указанного класса.

Теорема 7. *Для любых функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{v}_0$, *удовлетворяющих условиям (63), существует единственное слабое решение задачи (59)–(62) и выполняется оценка*

$$\|\mathbf{v}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \int\limits_0^T (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p\|^2)\,dt \leqslant E(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{v}_0),$$

где постоянная $E(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{v}_0)$ *определена в (64).*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.2 из [24] для пары $(g_n; g_r)$ существует непрерывный оператор продолжения

$$\Pi\colon G_n(\Sigma) \times G_r(\Sigma) \to \{\mathbf{u}\colon \mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega) \bigcap \operatorname{Ker}\{\operatorname{div}\}), \partial_t \mathbf{u} \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))\}. \tag{65}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{v}_1 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)\bigcap \mathrm{Ker}\,\{\mathrm{div}\}), \quad \partial_t \mathbf{v}_1 \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)),$$

такую, что $\mathbf{v}_1|_\Sigma = \mathbf{g}$, $(t,\mathbf{x}) \in \Sigma$. В силу (65) (см. [23]) найдётся константа $K > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$\|\mathbf{v}_1\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{v}_1\|^2_{L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))} \leqslant K\|\mathbf{g}\|^2_{G(\Sigma)}.$$

Представим решение задачи (59)–(62) в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}. \tag{66}$$

Подставим (66) в (59)–(62) и получим условия для определения функции $\mathbf{w}$:

$$\partial_t \mathbf{w} + ((\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{w} - \nabla p + \mathbf{f}_1, \tag{67}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0, \tag{68}$$

$$\mathbf{w}|_\Sigma = 0, \quad (t,\mathbf{x}) \in \Sigma, \tag{69}$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_1(\,\cdot\,,\mathbf{x})|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{70}$$

где $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} - \partial_t \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_1 \in L^2(0,T;\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega))$. Доказательство существования и единственности решения задачи (67)–(70) проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Заключение. На основе метода априорных оценок доказана корректность новой регуляризованной задачи при фиксированном параметре регуляризации (теорема 2). Строгое обоснование ограниченности искомых функций в нужных функциональных пространствах говорит о стремлении к нулю нормы разности решений в соответствующих пространствах регуляризованной и исходной систем при $\varepsilon \to 0$. Доказано существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для решений уравнений Навье–Стокса из класса Хопфа в случае однородных (теорема 1) и неоднородных (теорема 7) краевых условий.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы развития региональных научно-образовательных математических центров по соглашению № 075-02-2023-946.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
2. *Смагулов Ш.* Об одном нелинейном уравнении с малым параметром, аппроксимирующем уравнение Навье–Стокса // Тр. V Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1975. Т. 1. С. 123–134.
3. *Волков П.К., Переверзев А.В.* Метод конечных элементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных “скорости–давление” // Мат. моделирование. 2003. Т. 15. № 3. С. 15–28.
4. *Fedoseyev A.I., Alexeev B.V.* Simulation of viscous flows with boundary layers within multiscale model using generalized hydrodynamics equations // Intern. Conf. on Comput. Sci. ICCS. 2010.
5. *Hopf E.* Uber die Anfangswertaufgabe fur die Hydrodynamischen Grandgleichungen // Math. Nachr. 1951. V. 4. P. 213–231.
6. *Ладыженская О.А.* Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 3. С. 427–429.
7. *Киселёв А.А., Ладыженская О.А.* О существовании единственности решений нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. С. 655–680.
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
9. *Galdi G.P.* An Introduction to the Navier–Stokes Initial-Boundary Value Problem // Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics. Advances in Mathematical Fluid Mechanics / Eds. G.P. Galdi, J.G. Heywood, R. Rannacher. Basel, 2000.

10. *Sohr H., Wahl W.* On the regularity of the pressure of weak solutions of Navier–Stokes equations // Archiv der Mathematik. 1986. Bd. 46. S. 428–439.
11. *Simon J.* On the existence of the pressure for solutions of the variational Navier–Stokes equations // J. of Math. Fluid Mech. 1999. V. 1. № 3. P. 225–234.
12. *Langa J.A., Real J., Simon J.* Existence and Regularity of the Pressure for the Stochastic Navier–Stokes Equations // Appl. Math. Optim. 2003. V. 48. P. 195–210.
13. *Bensoussan A.* Stochastic Navier–Stokes equations // Acta Appl. Math. 1995. V. 38. № 3. P. 267–304.
14. *Capinski M., Peszat S.* On the existence of solution to stochastic Navier–Stokes equations // Nonlin. Anal. 2001. V. 44. P. 141–177.
15. *Серёгин Г.А.* О локальной регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62. № 3 (375). С. 149–168.
16. *Серёгин Г.А.* Дифференциальные свойства слабых решений уравнений Навье–Стокса // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 1. С. 194–237.
17. *Шилкин Т.Н.* Полная внутренняя регулярность решений двумерной модифицированной системы Навье–Стокса // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 182–221.
18. *Серёгин Г.А., Шилкин Т.Н.*. Теоремы лиувиллевского типа для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73. № 4 (442). С. 103–170.
19. *Амосова Е.В.* О регулярности решений нестационарных уравнений Навье–Стокса // Мат. проблемы механики сплошных сред: тез. докл. Всерос. конф. и школы молодых учёных, посвящ. 100-летию акад. Л.В. Овсянникова. Новосибирск. 2019. С. 27.
20. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
21. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.
22. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М., 1962.
23. *Лукина Е.В.* Глобальные решения многомерных приближённых уравнений Навье–Стокса вязкого газа // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. С. 299–401.
24. *Fursikov A., Gunzburger M., Hou L.* Trace theorems for three-dimensional, time-dependent solenoidal vector fields and their applications // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2001. V. 354. № 3. P. 1079–1116.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.
После доработки 23.07.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1222–1239

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2023 г. В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом рассматривается смешанная задача в первом квадранте, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временно́й полуоси – условие Неймана. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Исследуются разрешимость этих уравнений, а также зависимость решений от гладкости начальных данных. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. При невыполнении условий согласования строится задача с условиями сопряжения, а при недостаточно гладких данных – слабое решение.

DOI: 10.31857/S0374064123090078, EDN: WOVDFE

Введение. Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор линейных или нелинейных уравнений для описания среды зависит от роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведёт к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. И даже если линеаризация нелинейных уравнений математической физики возможна, с точки зрения физики исключительно важны “существенно нелинейные” решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства [1].

Задачи, требующие наличия нелинейных дифференциальных уравнений, отличаются большим разнообразием, и от этого зависит выбор методов их решения или анализа. Примерами нелинейных дифференциальных уравнений являются уравнение Навье–Стокса в гидродинамике и уравнение Лотки–Вольтерры в биологии.

Одной из сложностей нелинейных задач является тот факт, что в общем случае невозможно объединить известные решения для построения новых решений. В линейных задачах, например, семейство линейно независимых решений можно использовать для построения общих решений с помощью принципа суперпозиции. Хорошим примером является одномерная задача для распределения температуры с наложенными граничными условиями Дирихле, решение которой можно построить как зависимую от времени линейную комбинацию синусоид различных частот, что делает решение очень гибким. Также можно найти несколько очень специфических решений для нелинейных уравнений, однако отсутствие принципа суперпозиции не позволяет построить новые решения [2].

Отметим также, что нелинейные уравнения трудно изучать: почти не существует общих методов, работающих для всех таких уравнений, и обычно каждое отдельное уравнение приходится изучать как отдельную задачу [3].

В данной статье, используя способ, предложенный ранее в работе [4] и представляющий собой сочетание метода характеристик с методом последовательных приближений, строится решение второй смешанной задачи для неоднородного гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказываются единственность и непрерывная зависимость решения от начальных данных, а также выводятся условия гладкости данных задачи и необходимые и достаточные условия согласования, при которых решение смешанной задачи будет классическим. При невыполнении однородных условий согласования строится задача с условиями сопряжения на характеристике, причём одно из них, в отличии от первой смешанной задачи [4], содержит некоторую произвольную постоянную, обеспечивающую наперёд заданный разрыв решения. Это означает, что одной второй смешанной задаче в обычной формулировке будет соответствовать бесконечное множество вторых смешанных задач с условиями сопряжения на характеристике, но в каждом конкретном случае будет существовать единственное классическое решение. А если в задаче присутствуют недостаточно гладкие функции, то строится обобщённое слабое решение.

1. Постановка задачи. В области

$$Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,\infty), \quad x \in (0,\infty)\}$$

двух независимых переменных рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box w(t,x) - \beta\partial_t w(t,x) - \varrho(t,x,w(t,x)) = \Phi(t,x), \tag{1}$$

где $\Box = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ – оператор Д'Аламбера ($a > 0$ для определённости), β – действительное число, Φ – функция, заданная на множестве $\overline{Q}$, а ϱ – функция, заданная на множестве $[0,\infty) \times [0,\infty) \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует измеримая функция $\varkappa$, заданная на множестве $\overline{Q}$, такая, что справедливо неравенство

$$|\varrho(t,x,z_1) - \varrho(t,x,z_2)| \leqslant \varkappa(t,x)|z_1 - z_2|,$$

и такая, что её вторая степень локально суммируема. К уравнению (1) присоединяются начальные

$$w(0,x) = w_0(x), \quad \partial_t w(0,x) = w_1(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{2}$$

и граничное

$$\partial_x w(t,0) = w_N(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{3}$$

условия, где w_0, w_1, w_N – функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$.

Уравнение (1) возникает при описании таких различных физических процессов, как сверхпроводимость, дислокации в кристаллах, волны в ферромагнетиках, лазерные импульсы в двухфазных средах, мезонная теория ядерных сил [5, с. 490], эффект Джозефсона [6], квантовая теория поля [7].

Работы многих исследователей (см., например, [8–22]) посвящены в основном поиску обобщённых решений задач для нелинейных уравнений вида (5), а не классических. Среди них можно выделить периодические задачи [6–14], задачу Коши [15, 16] и смешанные задачи в неограниченных областях [18–22]. Однако в ряде исследований всё же строятся классические решения: [4, 23–25] (непосредственно) и [26–29] (из обобщённых решений, используя теоремы о повышении гладкости). Но, к сожалению, часто рассматриваются однородное уравнение и/или однородные краевые условия.

В частных линейных случаях задача (1)–(3) рассматривалась в статье [30], где использовались метод продолжения по параметру и теоремы повышения гладкости сильных решений, в [31] применялся метод отражений, в работах [32–34] – метод характеристик, а в книге [35, с. 100–103] – косинус-преобразование Фурье.

Как известно, заменой

$$w(t,x) = u(t,x)\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right) \tag{4}$$

задача (1)–(3) приводится к виду

$$\Box u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{5}$$

$$u(0,x)=\varphi(x)=w_0(x),\quad \partial_t u(0,x)=\psi(x)=w_1(x)-\frac{1}{2}\beta w_0(x),\quad x\in[30,\infty),\tag{6}$$

$$\partial_x u(t,0)=\mu(t)=w_N(t)\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right),\quad t\in[0,\infty),\tag{7}$$

где в уравнении (5) использовано обозначение

$$f(t,x,z)=\frac{1}{4}\beta^2 z+\varrho\left(t,x,z\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right),\quad F(t,x)=\Phi(t,x)\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right).$$

При этом гладкость нелинейности f и правой части F дифференциального уравнения, начальных и граничных данных φ, ψ, μ не хуже, чем в исходной задаче (1)–(3), и нелинейный член также удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной:

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|,$$

где $k=\varkappa+\beta^2/4$, если верно неравенство

$$|\varrho(t,x,z_1)-\varrho(t,x,z_2)|\leqslant \varkappa(t,x)|z_1-z_2|$$

для любых неотрицательных t и x, действительных чисел z_1 и z_2 и некоторой функции $\varkappa$. При этом $k\in L_p^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, если и только если $\varkappa\in L_p^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

В дальнейшем в настоящей работе будет изучаться задача (5)–(7), а результаты для задачи (1)–(3) будут получены в виде следствий.

2. Интегральное уравнение. Область Q характеристикой $x-at=0$ разделим на две подобласти

$$Q^{(j)}=\{(t,x):(-1)^j(at-x)>0\},\quad j=1,2.$$

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t,x)=g^{(1,j)}(x-at)+g^{(2)}(x+at)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(j)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2,\tag{8}$$

где $g^{(1,1)}$, $g^{(2)}$ и $g^{(1,2)}$ – некоторые функции, первые две заданы на множестве $[0,+\infty)$, а последняя – на $(-\infty,0]$.

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ интегрального уравнения (8):

$$u(t,x)=u^{(j)}(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q^{(j)}},\quad j=1,2.\tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}).$$

Функция $u^{(1)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и удовлетворяет уравнению (5) в $\overline{Q^{(1)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (8) при $j=1$, функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ в котором из класса $C^2([0,\infty))$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}).$$

Функция $u^{(2)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и удовлетворяет уравнению (5) в $\overline{Q^{(2)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (8), $j=2$, функции $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором из классов $C^2((-\infty,0])$ и $C^2([0,\infty))$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad F \in C^1(\overline{Q}).$$

Функция u *принадлежит классу* $C^2(\overline{Q})$ *и удовлетворят уравнению (5) тогда и только тогда, когда она для каждого* $j = 1, 2$ *является непрерывным решением уравнения (8), функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *в котором из классов* $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ *и* $C^2([0,\infty))$ *соответственно, и имеют место условия согласования*

$$g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0) = 0, \tag{10}$$

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) = 0, \tag{11}$$

$$D^2g^{(1,1)}(0) - D^2g^{(1,2)}(0) + \frac{1}{a^2}(F(0,0) + f(0,0,g^{(1,1)}(0) + g^{(2)}(0))) = 0. \tag{12}$$

Доказательства лемм 1, 2 и теоремы 1 представлены в работе [4].

Теорема 2. *Пусть* $F \in L_1^{\text{loc}}(\overline{Q})$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, *функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\text{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|,$$

и заданы непрерывные функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$. *Тогда непрерывные решения уравнений (8) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Доказательство. Теорема может быть доказана различными способами, например, методом последовательных приближений Пикара, как это сделано в работах [4, 24]. Также можно использовать различные теоремы о неподвижных точках (см., например, [25, 36]). Здесь представим альтернативное доказательство, основанное на обобщении теоремы Банаха о неподвижной точке для локально выпуклых пространств [37, теорема 2.2], следуя методу, изложенному в книге [38, с. 390].

Для определённости рассмотрим уравнение (8) при $j = 1$. Заметим, что $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ – пространство Фреше, в котором топология может быть задана счётной системой полунорм

$$\mathfrak{p}_m(u) = \sup_{(t,x)\in\Omega_m} |u(t,x)\exp(-\gamma_m(x+at))|, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\Omega_m = \operatorname{Conv}\{(0,0),(0,m),(m/(2a),m/2)\}$ и γ_m – некоторые действительные числа, которые будут определены в дальнейшем.

Введём обозначения

$$\mathcal{K}_m = \sup_{(t,x)\in\Omega_m} \left(\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left| k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right|^2 dz \right)^{1/2}, \quad G(t,x) = g^{(1,1)}(x-at) + g^{(2)}(x+at),$$

перепишем уравнение (8) при $j = 1$ в операторном виде

$$u^{(1)}(t,x) = K[u^{(1)}](t,x) = G(t,x) - \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}},$$

и оценим $|K[u_1](t,x) - K[u_2](t,x)|$:

$$|K[u_1](t,x) - K[u_2](t,x)| \leqslant \left| \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u_1\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - \right.\right.$$

$$
- f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u_2\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\Big] dz\Bigg| \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\left|u_1\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - u_2\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| dz =
$$

$$
= \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\left|u_1\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - u_2\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| \exp(-\gamma_m z)\exp(\gamma_m z)\, dz \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{4a^2}\left(\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \left|k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right|^2 dz\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} \Big|\mathfrak{p}_m(u_1-u_2)\exp(\gamma_m z)\Big|^2 dz\right)^{1/2} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\mathcal{K}_m \mathfrak{p}_m(u_1-u_2)}{4a^2}\sqrt{\frac{(x-at)\exp(2\gamma_m x)\,\mathrm{sh}\,(2a\gamma_m t)}{\gamma_m}} \leqslant \frac{\mathcal{K}_m \mathfrak{p}_m(u_1-u_2)\exp(\gamma_m(x+at))}{4a^2}\sqrt{\frac{x-at}{\gamma_m}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\mathcal{K}_m \mathfrak{p}_m(u_1-u_2)\exp(\gamma_m(x+at))\sqrt{m}}{4a^2\sqrt{\gamma_m}}, \quad (t,x)\in\Omega_m.
$$

Умножив полученное неравенство на $\exp(-\gamma_m(x+at)),$ получим

$$
|K[u_1](t,x) - K[u_2](t,x)|\exp(-\gamma_m(x+at)) \leqslant \frac{\mathcal{K}_m\sqrt{m}}{4a^2\sqrt{\gamma_m}}\mathfrak{p}_m(u_1-u_2), \quad (t,x)\in\Omega_m.
$$

Наконец, перейдём к супремуму на $\Omega_m,$ что даёт неравенство

$$
\mathfrak{p}_m(K[u_1]-K[u_2]) \leqslant \frac{\mathcal{K}_m\sqrt{m}}{4a^2\sqrt{\gamma_m}}\mathfrak{p}_m(u_1-u_2).
$$

Итак, K – сжимающий оператор относительно полунормы $\mathfrak{p}_m,$ если, например,

$$
\gamma_m = \frac{m\mathcal{K}_m^2}{8a^4}.
$$

Теперь, воспользовавшись теоремой 2.2 из работы [37], заключаем, что уравнение (8) при $j=1$ имеет единственное решение в пространстве $C^2(\overline{Q^{(1)}})$.

Для доказательства непрерывной зависимости решения от начальных данных рассмотрим, наряду с уравнением (8) при $j=1,$ возмущённое уравнение

$$
(u^{(1)}+\Delta u)(t,x) = (G+\Delta G)(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at}\left[(F+\Delta F)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.
$$

$$
\left. + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, (u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz, \quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}}, \tag{13}
$$

и разность возмущённого уравнения (13) и невозмущённого уравнения (8) при $j=1$:

$$
\Delta u(t,x) = \Delta G(t,x) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at}\left[\Delta F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + \right.
$$

$$
+ \left\{ f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, (u^{(1)}+\Delta u)\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - \right.
$$

$$- f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\Big\}\Big] dz, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{14}$$

Для уравнения (14) относительно возмущения Δu справедлива оценка модуля возмущения

$$|\Delta u(t,x)| \leqslant \mathcal{M}_m + \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{x-at}^{x+at} k\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) \left|\Delta u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right| dz, \quad (t,x) \in \Omega_m,$$

где $\mathcal{M}_m = \|\Delta G\|_{C(\Omega_m)} + (2a^{-1})\|\Delta F\|_{L_1(\Omega_m)}$ (здесь для стандартной sup-нормы использовано обозначение

$$\|u\|_{C(\Omega_m)} = \sup_{(t,x)\in\Omega_m} |u(t,x)|).$$

Применив многомерную лемму Гронуолла [39, с. 401–403] к предыдущему неравенству, получим

$$|\Delta u(t,x)| \leqslant C^{(1)}\mathcal{M}_m, \quad (t,x) \in \Omega_m,$$

где $C^{(1)}$ – некоторая положительная константа, зависящая только от множества Ω_m, функции k и числа a. Из полученного неравенства следует, что какие бы малые возмущения ΔG, ΔF, $\mathcal{M}_m = \varepsilon$, мы ни взяли, для возмущения решения выполняется неравенство

$$\|\Delta u\|_{C(\Omega_m)} = \delta \leqslant C^{(1)}\varepsilon = C^{(1)}(\|\Delta G\|_{C(\Omega_m)} + (2a^{-1})\|\Delta F\|_{L_1(\Omega_m)}).$$

В силу произвольности $m \in \mathbb{N}$, а следовательно, и множеств Ω_m и $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$ получаем, что решение уравнения (8) при $j = 1$ непрерывно зависит от исходных данных.

Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения уравнения (8) при $j = 2$ в пространстве $C(\overline{Q^{(2)}})$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме 1 вместо условия $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ можно потребовать выполнения трёх условий:

1) функция $f_1 \colon \overline{Q} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,z) \in \mathbb{R}$ измерима при любом фиксированном $z \in \mathbb{R}$;

2) функция $f_2 \colon \mathbb{R} \ni z \mapsto f(t,x,z) \in \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ для почти любой фиксированной точки $(t,x) \in \overline{Q}$;

3) верно неравенство $|f(t,x,z)| \leqslant \alpha(t,x) + \beta|z|$, где $\alpha \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Для обоснования замечания необходимо показать, что какой бы ни была непрерывная функция $u^{(j)}$, правая часть уравнения (8) есть также непрерывная функция. Заметим, что если мы зафиксируем $u^{(j)}$ и компакт $\mathcal{K} \subset \overline{Q}$, то при условиях, указанных в данном замечании, выражение

$$\mathcal{K} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,u^{(j)}(t,x))$$

определяет функцию класса $L_1(\mathcal{K})$ [40, с. 204], а в силу произвольности $\mathcal{K}$ формула

$$\overline{Q} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,u^{(j)}(t,x))$$

задаёт функцию класса $L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Легко проверяется, что произведение локально суммируемой функции на непрерывную функцию является локально суммируемой функцией. Тогда, исходя из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, заключаем, что правая часть уравнения (8) есть непрерывная функция.

3. Построение решения смешанной задачи. Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (6). Подставив соотношение (8) при $j = 1$ в условия (6), получим систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u^{(1)}(0,x) = \varphi(x) = g^{(1,1)}(x) + g^{(2)}(x), \quad x \geqslant 0,$$

$$\partial_t u^{(1)}(0,x) = \psi(x) = -aDg^{(1,1)}(x) + aDg^{(2)}(x) -$$

$$-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\left[f\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0.$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x, будем иметь

$$g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\varphi(x),\quad x\geqslant 0,$$

$$-g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy+2C,\quad x\geqslant 0,$$

откуда находим

$$g^{(1,1)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(z)\,dz-C-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0,$$

$$g^{(2)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(z)\,dz+C+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0,\qquad (15)$$

где C – произвольная константа из множества действительных чисел. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия (7). Подставив соотношение (8) при $j=2$ в условие (7), получим уравнение

$$-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{-at}\left[f\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2}\right)\right]dy+$$

$$+Dg^{(1,2)}(-at)+Dg^{(2)}(at)=\mu(t),\quad t\geqslant 0,$$

относительно функции $g^{(1,2)}$. Сделав замену $t=-z/a$, будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции $g^{(1,2)}$:

$$-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy+$$

$$+Dg^{(1,2)}(z)+Dg^{(2)}(-z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right),\quad z\leqslant 0.\qquad (16)$$

Уравнения (16) относительно $g^{(1,2)}$ вместе с условиями (10) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решение этой задачи определяется по формуле

$$g^{(1,2)}(x)=g^{(1,1)}(0)+\int\limits_0^x\left\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right)-Dg^{(2)}(-z)+\right.$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy\Bigg\}\,dz=$$

$$=\frac{\varphi(0)}{2}-C+\int\limits_0^x\Bigg\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right)-\frac{\psi(-z)}{2a}-\frac{\varphi'(-z)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-z}\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(1)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy\Bigg\}\,dz,\quad z\leqslant 0.\quad (17)$$

Подставив формулы (15) и (17) в исходные интегральные уравнения (8), получим

$$u^{(1)}(t,x)=K_1[u^{(1)}](t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(1)}},$$

$$u^{(2)}(t,x)=K_2[u^{(1)},u^{(2)}](t,x)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{at-x}\psi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x+at}dz\int\limits_0^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy+\frac{\varphi(0)}{2}+$$

$$+\int\limits_0^{x-at}\Bigg\{\mu\left(-\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-z}\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(1)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy\Bigg\}\,dz-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{at-x}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(2)}}.\quad (18)$$

Отметим, что уравнение для отыскания функции $u^{(2)}$ может быть выведено с помощью тождества характеристического параллелограмма [41] подобно тому, как это сделано в работе [23].

Лемма 3. *Пусть выполняются условия*

$$f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))$$

и функция f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Тогда решения $u^{(j)}$, $j=1,2$, *уравнений (18) существуют, единственны в классе* $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *и непрерывно зависят от функций* φ, ψ, μ *и* F.

Доказательство. Существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных решений $u^{(j)}$, $j=1,2$, уравнений (18) в пространстве $C(\overline{Q^{(j)}})$ доказывается аналогично тому, как это сделано теореме 2. А в силу условий $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^1([0,\infty))$ и представлений (18) класс гладкости непрерывных решений $u^{(j)}$ поднимается до $C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Лемма доказана.

Таким образом, построено кусочно-гладкое решение задачи (5)–(7), которое определятся формулами (18) и (9).

4. Анализ решения смешанной задачи. Чтобы функция u принадлежала множеству $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций f, F необходимо и достаточно выполнения равенств (10)–(12) согласно теореме 1. Вычисляя величины, которые входят в выражения (10)–(12), получаем следующие условия согласования:

$$\mu(0)=\varphi'(0), \tag{19}$$

$$\mu'(0)=\psi'(0). \tag{20}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение u, *определённое формулами (9) и (18), из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (19) и (20).*

Доказательство леммы следует из теоремы 1, леммы 3 и рассуждений выше.

Отметим, что, в отличие от первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом [4, 24], во второй смешанной задаче условия согласования (19) и (20) граничных функций совпадают с условиями согласования во второй смешанной задаче для линейного случая – волнового уравнения [34].

5. Неединственность решения. Возникает естественный вопрос, что произойдёт в том случае, если функция f не будет удовлетворять условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной? Конечно, можно придумать функцию u, задать каким-либо образом функцию f, вычислить φ, ψ, μ и F и, таким образом, поставить смешанную задачу вида (5)–(7), которая будет иметь глобальное классическое решение по построению. Но будет ли такое решение единственным? Следующий пример показывает, что ответ на последний вопрос, вообще говоря, отрицательный. Выберем функцию f в виде

$$f(t,x,z):=z^\alpha,\quad 0<\alpha<1, \tag{21}$$

и зададим

$$F(t,x)=0,\quad \varphi=\psi=\mu\equiv 0. \tag{22}$$

Легко видеть, что задача (5)–(7), (21), (22) допускает тривиальное решение $u\equiv 0$. Чтобы найти нетривиальные решения задачи (5)–(7), (21), (22), рассмотрим анзац вида

$$u(t,x)=u(t)=\theta t^\gamma,\quad (t,x)\in\overline{Q}, \tag{23}$$

где θ и γ – некоторые действительные числа. Подставляя анзац (23) в уравнение (5), получаем соотношение

$$\theta(\gamma-1)\gamma t^{\gamma-2}=\theta^\alpha t^{\alpha\gamma},$$

из которого следует система уравнений

$$\gamma-2=\gamma\alpha,\quad \theta(\gamma-1)\gamma=\theta^\alpha,$$

имеющая решение

$$\theta = 2^{1/(\alpha-1)}\left(\alpha - 3 + \frac{4}{\alpha+1}\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \gamma = \frac{2}{1-\alpha}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), найдём функцию

$$u_p(t,x) = 2^{1/(\alpha-1)}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2-2\alpha+1}\right)^{1/(\alpha-1)} t^{2/(1-\alpha)}. \tag{25}$$

Непосредсвенной проверкой убеждаемся, что функция (25) удовлетворяет начальным (6) и граничному (7) условиям. Значит, мы построили нетривиальное решение задачи (5)–(7), (21), (22), которое представлено формулой (25). Более того, можно легко показать, что склеенное решение

$$u_{p;s}(t,x) = \begin{cases} 0, & t \in [0,s), \\ u_p(t-s,x), & t \in [s,+\infty), \end{cases}$$

с параметром $s > 0$ также удовлетворяет задаче (5)–(7), (21), (22). Таким образом, построено бесконечное множество нетривиальных классических решений этой задачи.

Данный пример показателен ещё тем, что из него следует, что условие типа Липшица

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|$$

нельзя ослабить до условия типа Гёльдера

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|^{\lambda}$$

с показателем $\lambda \in (0,1)$ и сохранить при этом однозначную разрешимость смешанной задачи.

6. Неоднородные условия согласования. Подобно тому как это было сделано в работах [4, 24, 42–46], рассмотрим теперь задачу (5)–(7) в случае, когда условия согласования (19) и (20) частично или полностью не выполняются. Но, в отличие от первой смешанной задачи, во второй смешанной задаче условия согласования можно задать таким образом, что решение будет иметь произвольный наперёд заданный разрыв на характеристике $x - at = 0$.

Согласно теореме 1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функции u или её производных, или всего вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Если для заданных функций μ, φ, ψ не выполняются однородные условия согласования (19) и (20), то какими бы гладкими ни были функции f, F, μ, φ и ψ, задача (5)–(7) не имеет классического решения, определённого на $\overline{Q}$.*

Доказательство утверждения следует из теоремы 1.

Пусть заданные функции уравнения (5), граничных условий (6), (7) являются достаточно гладкими и такими как в теореме 3: $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$. Так как условия согласования (19) и (20), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывными производные функции u согласно следующим выражениям:

$$[(u)^+ - (u)^-](t,at) = C^{(1)},$$

$$[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-](t,at) = -a[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t,at) = a(\mu(0) - \varphi'(0)) +$$

$$+ \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\left[f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\right]dz,$$

$$[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-](t,at) = \frac{1}{2}\Big(f(t,at,(u)^+(t,at)) - f(t,at,(u)^-(t,at))\Big) + 2a(\mu'(0) - \psi'(0)) +$$

$$
+\frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at}\Biggl\{\Biggl[\biggl((\partial_t u)^+\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)-a(\partial_x u)^+\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\biggr)\partial_y f\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^+\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\Bigr)-
$$

$$
-a\partial_x f\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\Bigr)+\partial_t f\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^+\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\Bigr)\Biggr]-
$$

$$
-\Biggl[\biggl((\partial_t u)^-\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)-a(\partial_x u)^-\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\biggr)\partial_y f\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},y=(u)^-\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\Bigr)-
$$

$$
-a\partial_x f\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\Bigr)+\partial_t f\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},(u)^-\Bigl(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\Bigr)\Bigr)\Biggr]\Biggr\}\,dz=
$$

$$
=a^2[(\partial_x^2 u)^+-(\partial_x^2 u)^-](t,at)+(f(t,at,(u)^+(t,at))-f(t,at,(u)^-(t,at)))=
$$

$$
=-a[(\partial_t\partial_x u)^+-(\partial_t\partial_x u)^-](t,at)+\frac{1}{2}\Bigl(f(t,at,(u)^+(t,at))-f(t,at,(u)^-(t,at))\Bigr), \qquad (26)
$$

где $C^{(1)}$ – некоторая произвольная наперёд заданная константа из множества действительных чисел (на самом деле, исходя из формул, приведённых в п. 5, $C^{(1)}=0,$ но при рассмотрении задачи с условиями сопряжения можем положить $C^{(1)}\neq 0$). Здесь было использовано обозначение $()^{\pm}$ – предельные значения функции u и её частных производных с разных сторон на характеристике $x-at=0,$ т.е.

$$
(\partial_t^p u)^{\pm}(t,at)=\lim_{\delta\to 0+}\partial_t^p u(t,at\pm\delta).
$$

Обозначим $\widetilde{Q}=\overline{Q}\setminus\{(t,x):x-at=0\}$. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$
f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))
$$

и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что

$$
|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.
$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение $\widetilde{u}$ из класса $C^2(\widetilde{Q}),$ которое представляется в виде

$$
\widetilde{u}(t,x)=\begin{cases} u^{(1)}(t,x)=K_1[u^{(1)}](t,x), & (t,x)\in Q^{(1)}\bigcup\{(0,x):x\in(0,\infty)\},\\ u^{(2)}(t,x)=K_2[u^{(1)},u^{(2)}](t,x)-C^{(1)}, & (t,x)\in Q^{(2)}\bigcup\{(t,0):t\in(0,\infty)\},\end{cases} \qquad (27)
$$

где операторы K_1 и K_2 заданы формулой (18), тогда и только тогда, когда выполняются условия (26).

Для доказательства данной теоремы следует повторить рассуждения, которые привели нас к леммам 1–3.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

$$
f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R}),\quad F\in C^1(\overline{Q}),\quad \varphi\in C^2([0,\infty)),\quad \psi\in C^1([0,\infty)),\quad \mu\in C^1([0,\infty))
$$

и функция f удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такая, что

$$
|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|.
$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение $\widetilde{u}$, *определённое формулой (27), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26) и* $C^{(1)} = 0$.

Доказательство этой теоремы следует фактически из теоремы 4 и формул (26). Действительно, если $C^{(1)} = 0$, то решение $\widetilde{u}$ на множестве $\{(t,x) : x - at = 0\}$ является непрерывным в силу (26). Следовательно, кроме того, что решение $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$, $\widetilde{u} \in C(\overline{Q})$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad F \in C^1(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^2([0,\infty)), \quad \psi \in C^1([0,\infty)), \quad \mu \in C^1([0,\infty))$$

и функция f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное решение $\widetilde{u}$, *определённое формулой (27), из класса* $C^2(\widetilde{Q})\bigcap C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (26),* $C^{(1)} = 0$ *и (19).*

Доказательство теоремы 6 следует из теорем 4, 5 и формул (26), так как в этом случае решение $\widetilde{u}$ является непрерывным на множестве $\overline{Q}$, но в силу (26) имеет непрерывные производные первого порядка.

Замечание 2. Если заданные функции задачи (5)–(7) не удовлетворяют однородным условиям согласования (19) и (20), то решение задачи (5)–(7) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x - at = 0$.

В качестве условий сопряжения могут быть условия (26).

Теперь задачу (5)–(7) можно сформулировать, используя условия (26), следующим образом.

Задача (5)–(7) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям Коши (6), граничному условию (7), условиям сопряжения (26).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для её численной реализации.

7. Слабое решение. Рассмотрим теперь задачу (5)–(7) в случае, когда функции f, F, μ, φ и ψ не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Следуя [47, 48], функцию u, представимую в виде (9), (18), назовём *слабым решением задачи* (5)–(7).

Замечание 3. Любое классическое решение задачи (5)–(7) является также слабым решением этой задачи.

Справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad \varphi \in C([0,\infty)), \quad \psi \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty)), \quad \mu \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$$

и функция f *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2|.$$

Вторая смешанная задача (5)–(7) имеет единственное слабое решение u *из класса* $C(\overline{Q})$.

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (18) и принадлежность их решений классу непрерывных функций следует из теоремы 1. Корректность представления (9) следует из того факта, что $u^{(1)}(t,at) = u^{(2)}(t,at)$, исходя из формул (18). Теорема доказана.

Замечание 4. Аналогично п. 5 можно строить слабое решение задачи с условиями сопряжения.

8. Отсутствие решения. В случае линейных гиперболических уравнений с частными производными если задать коэффициентам уравнения и начальным данным нужную гладкость, то решение существует. Однако это неверно для нелинейных уравнений, что можно продемонстрировать следующими утверждениями, которые доказываются методами энергии. Но эти методы не охватывают все возможные случаи задания начальных условий, поэтому наложим следующие ограничения на нелинейность, правую часть уравнения, начальные и граничные данные смешанной задачи.

Условие А. Функции F и μ тождественно равны нулю, функция f имеет вид $f(t,x,z) = -g(z)$, где $g(0)=0$, и выполнены условия гладкости $\varphi \in C_c^2([0,\infty))$, $\psi \in C_c^1([0,\infty))$ и $g \in C^1(\mathbb{R})$.

В условии А использовано обозначение $C_c^k(\Omega)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}$, определённых на множестве Ω и имеющих компактный носитель.

Также при выполнении условия А введём обозначение

$$G(z) = \int\limits_0^z g(\xi)d\xi, \quad z \in \mathbb{R},$$

и определим функцию "энергии"

$$E\colon [0,\infty) \ni t \mapsto E(t) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right) + G(u(t,x))\right] dx \in \mathbb{R},$$

сопоставляемую решению u смешанной задачи (5)–(7). При этом явную зависимость E от u обозначать не будем (т.е. следовало бы записывать $E[u](t)$ или $E(u)(t)$, или $Eu(t)$ вместо $E(t)$), но будем её подразумевать.

Лемма 4 (закон сохранения энергии). *Пусть выполняется условие А. Тогда решению u второй смешанной задачи (5)–(7) соответствует постоянная функция "энергии" E, т.е. $E(t) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. В самом деле, легко вычислить

$$E'(t) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u(t,x) + a^2\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}u(t,x) + g(u(t,x))\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right] dx =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + g(u(t,x))\right)\right] dx = 0, \quad t \in [0,\infty).$$

Интегрирование по частям в этом доказательстве корректно, так как функция $x \mapsto u(t,x)$ имеет компактный носитель для любого времени $t \in [0,\infty)$, что легко доказывается, исходя из конечности скорости распространения и области зависимости [3, с. 660–662]. Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть выполняется условие А и верно неравенство*

$$zg(z) \leqslant \lambda G(z), \quad z \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

для некоторой константы $\lambda > 2$. Также предположим, что энергия отрицательна:

$$E(0) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{2}\left(\psi^2(x) + a^2(\varphi'(x))^2\right) + G(\varphi(x))\right] dx < 0. \tag{29}$$

Тогда не существует решения второй смешанной задачи (5)–(7), определённого на всём множестве $\overline{Q}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведём по схеме, изложенной в книге [15, с. 687–688].

1. Обозначим

$$I(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u^2(t,x)\,dx, \quad t \in [0,\infty).$$

Тогда

$$I''(t) = \int\limits_0^\infty \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + u(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + u(t,x)\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - g(u(t,x))\right)\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 - a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 - g(u(t,x))u(t,x)\right]dx, \quad t \in [0,\infty). \tag{30}$$

Интегрирование по частям здесь также корректно, так как функция $x \mapsto u(t,x)$ имеет компактный носитель для любого $t \in [0,\infty)$.

В силу закона сохранения энергии имеем

$$E(t) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right) + G(u(t,x))\right]dx = E(0), \quad t \in [0,\infty).$$

В (30) добавим слагаемые $(2+4\alpha)E(0)$ и $-(2+4\alpha)E(0)$:

$$I''(t) = (2+2\alpha)\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 dx + 2\alpha\int\limits_0^\infty a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 dx +$$

$$+ \int\limits_0^\infty [(2+4\alpha)G(u(t,x)) - g(u(t,x))u(t,x)]\,dx - (2+4\alpha)E(0), \quad t \in [0,\infty). \tag{31}$$

Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы $2+4\alpha = \lambda$, где λ – это константа из предположения (28). Тогда последний интегральный член выражения (31) неотрицательный, и поэтому

$$I''(t) \geqslant (2+2\alpha)\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 dx - \lambda E(0), \quad t \in [0,\infty). \tag{32}$$

Поскольку

$$I'(t) = \int\limits_0^\infty u(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx, \quad t \in [0,\infty),$$

то неравенство (32) влечёт за собой соотношения

$$(1+\alpha)(I'(t))^2 \leqslant (1+\alpha)\int\limits_0^\infty u^2(t,x)\,dx\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 dx \leqslant I(t)(I''(t) - \beta), \quad t \in [0,\infty), \tag{33}$$

где $\beta = -\lambda E(0) > 0$.

2. Пусть $J = I^{-\alpha}$. Тогда, пользуясь (33), подсчитаем

$$J'' = \alpha(\alpha+1)I^{-(\alpha+2)}(I')^2 - \alpha I^{-(\alpha+1)}I'' \leqslant -\alpha\beta I^{-(\alpha+1)} = -\alpha\beta J^{1+1/\alpha}. \tag{34}$$

Это показывает, что J – вогнутая функция. Предположим, что существует такое $t_0 > 0$, что $J'(t_0) < 0$. Тогда вогнутость функции J влечёт за собой

$$J(t) \leqslant J(t_0) + (t - t_0)J'(t_0), \quad t \in [0, \infty).$$

Из последнего неравенства следует противоречие: $J(t) < 0$ для достаточно больших t. Предположим вместо этого, что $J'(t) \geqslant 0$ для всех $t > 0$. Тогда из (34) следует

$$J''(t) \leqslant -\alpha\beta J^{1+1/\alpha}(0) = -\gamma, \quad t \in [0, \infty).$$

Имеем $\gamma > 0$, так как предположение об отрицательной энергии (29) подразумевает $\varphi \not\equiv 0$. Таким образом,

$$J'(t) \leqslant J'(0) - \gamma t < 0$$

для достаточно больших t, и мы снова приходим к противоречию. Теорема доказана.

9. Вторая смешанная задача (1)–(3). Применим результаты, полученные для вспомогательной задачи (5)–(7), к основной задаче (1)–(3).

Теорема 9. *Пусть выполняются условия*

$$\varrho \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \Phi \in C^1(\overline{Q}), \quad w_0 \in C^2([0, \infty)), \quad w_1 \in C^1([0, \infty)), \quad w_N \in C^1([0, \infty))$$

и функция ϱ *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $\varkappa \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|\varrho(t, x, z_1) - \varrho(t, x, z_2)| \leqslant \varkappa(t, x)|z_1 - z_2|.$$

Вторая смешанная задача (1)–(3) имеет единственное решение w *из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$w_N(0) = w_0'(0), \tag{35}$$

$$w_N'(0) = w_1'(0). \tag{36}$$

Доказательство теоремы фактически следует из теоремы 3 и рассуждений выше. В самом деле, заменой (4) задача (1)–(3) приводится к задаче (5)–(7), где условия существования и единственности классического решения исследованы. При этом, как отмечено ранее, гладкость нелинейности и правой части уравнения, начальных и граничных данных не ухудшается (т.е. "новые" функции f, F, φ, ψ и μ будут удовлетворять условиям гладкости, указанным в теореме 3), и нелинейный член также будет удовлетворять условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной

$$|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leqslant k(t, x)|z_1 - z_2|,$$

где $k = \varkappa + \beta^2/4 \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. Условия согласования (35) и (36), по-сути, являются условиями согласования (19) и (20), представленными в терминах функций w_N, w_1 и w_2.

Поскольку дифференциальное уравнение (1) содержит член $\beta\partial_t w$, то слабое решение задачи (1)–(3) можно очевидным образом строить в пространстве $C^{1,0}(\overline{Q})$ или $C^1(\overline{Q})$, как это сделано в статье [25]. Однако существует способ определения слабого решения задачи (1)–(3) в классе $C(\overline{Q})$, который мы представим.

Определение 2. Функцию w, представимую в виде (4), назовём *слабым решением задачи* (1)–(3), если функция u есть слабое решение задачи (5)–(7).

Замечание 5. Любое классическое решение задачи (1)–(3) является также слабым решением этой задачи.

Справедлива следующая

Теорема 10. *Пусть выполняются условия*

$$\varrho \in C(\overline{Q}\times\mathbb{R}), \quad \Phi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad w_0 \in C([0,\infty)), \quad w_1 \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty)), \quad w_N \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$$

и функция ϱ *удовлетворяет условию типа Липшица–Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует функция* $\varkappa \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *такая, что*

$$|\varrho(t,x,z_1)-\varrho(t,x,z_2)| \leqslant \varkappa(t,x)|z_1-z_2|.$$

Вторая смешанная задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение u *из класса* $C(\overline{Q})$.

Доказательство теоремы фактически следует из теоремы 7 и рассуждений выше.

Аналогичным образом можно также рассматривать задачу с условиями сопряжения и переформулировать теоремы 4–6 в терминах функций ϱ, Φ, w_N, w_1 и w_2. Однако из (26) и (4) следует

$$[(w)^+-(w)^-](t,at) = \left[\left(u\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right)^+ - \left(u\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right)\right)^-\right](t,at) = C^{(1)}\exp\left(\frac{\beta t}{2}\right) \neq \mathrm{const},$$

что, с одной стороны, является в некотором смысле проблемой, так как в этом случае разрыв задаётся не в виде произвольной постоянной, как бы нам хотелось. Она не может быть решена в таком методе исследования задачи (1)–(3). Возможные способы решения этой проблемы будут представлены в дальнейших публикациях. С другой стороны, этот подход позволяет строить разрыв решения w задачи (1)–(3) на характеристике $x-at=0$ в виде переменной величины $C^{(1)}\exp(\beta t/2)$, где $C^{(1)}\in\mathbb{R}$, что является преимуществом метода.

Заключение. В статье сформулированы достаточные условия существования единственного классического решения второй смешанной задачи в четверти плоскости для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристиках. При недостаточной гладкости исходных данных построено слабое решение начальной задачи и доказана его единственность. Также приведены примеры неединственности и несуществования глобального классического решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. М., 1992. Т. 3.
2. Nonlinear system. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_system. Дата доступа: 31 мая 2023.
3. Nonlinear partial differential equation. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_partial_differential_equation. Дата доступа: 31 мая 2023.
4. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 174–184.
5. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. New York, 2012.
6. *Lebwohl P., Stephen M.J.* Properties of vortex lines in superconducting barriers // Phys. Rev. 1967. V. 163. № 2. P. 376–379.
7. *Nakayama Y.* Liouville field theory: a decade after the revolution // Int. J. of Modern Phys. A. 2004. V. 19. № 17–18. P. 2771–2930.
8. *Bereanu C.* Periodic solutions of the nonlinear telegraph equations with bounded nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 343. P. 758–762.
9. *Kim W.S.* Boundary value problem for nonlinear telegraph equations with superlinear growth // Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 1998. V. 12. № 12. P. 1371–1376.
10. *Fucik S., Mawhin J.* Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations // Nonlin. Anal.: Theory, Methods & Appl. 1978. V. 2. № 5. P. 609–617.

11. *Рудаков И.А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. Математика. 2007. № 2. С. 46–55.
12. *Рудаков И.А.* Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1392–1399.
13. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 5. С. 189–201.
14. *Плотников П.И.* Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Мат. сб. 1988. Т. 178. № 4. С. 546–560.
15. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
16. *Jörgens K.* Das Anfangswertproblem in Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen // Math. Zeitschr. 1961. Bd. 208. S. 295–308.
17. *Shibata Y., Tsutsumi Y.* Global existence theorem for nonlinear wave equation in exterior domain // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1984. V. 60. P. 14–17.
18. *Lions J.L., Strauss W.A.* Some non-linear evolution equations // Bull. de la Société Mathématique de France. 1965. V. 93. P. 43–96.
19. *Gallagher I., Gérard P.* Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle // J. de Mathématiques Pures et Appliquées. 2001. V. 80. № 1. P. 1–49.
20. *Ikehata R.* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 301. № 2. P. 366–377.
21. *Ikehata R.* Global existence of solutions for semilinear damped wave equation in 2-D exterior domain // J. Differ. Equat. 2004. V. 200. № 1. P. 53–68.
22. *Лавренюк С.П., Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області // Український мат. журн. 2007. Т. 59. № 11. С. 1523–1531.
23. *Джохадзе О.М.* Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 591–606.
24. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2023. Т. 43. С. 48–63.
25. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Классическое решение задачи Коши для одномерного квазилинейного волнового уравнения // Докл. НАН Беларуси. 2023. Т. 67. № 1. С. 14–19.
26. *Kharibegashvili S., Jokhadze O.* The second Darboux problem for the wave equation with integral nonlinearity // Trans. of A. Razmadze Math. Inst. 2016. V. 170. № 3. P. 385–394.
27. *Берикелашвили Г.К., Джохадзе О.М., Мидодашвили Б.Г., Харибегашвили С.С.* О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 359–372.
28. *Jokhadze O.* On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2008. V. 340. № 2. P. 1033–1045.
29. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* Вторая задача Дарбу для волнового уравнения со степенной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1623–1640.
30. *Ломовцев Ф.Е.* Вторая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости // Веснік Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 3. С. 50–70.
31. *Корзюк В.И., Рудько Я.В.* Метод отражений для уравнения Клейна–Гордона // Докл. НАН Беларуси. 2022. Т. 66. № 3. С. 263–268.
32. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю., Сериков В.П.* Решение произвольной гладкости одномерного волнового уравнения для задачи со смешанными условиями // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2021. Т. 57. № 3. С. 286–295.
33. *Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Севастюк В.А.* О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2018. Т. 26. № 1. С. 35–42.
34. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений. Ч. 2. Минск, 2017.
35. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М., 2004.
36. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation // XX междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2022). Новополоцк, 2022. Ч. 2. С. 38–39.

37. *Cain G.L. Jr., Nashed M.Z.* Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces // Pacific J. of Math. 1971. V. 39. № 3. P. 581–592.
38. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 2002.
39. *Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M.* Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Dordrecht, 1991.
40. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., 1956.
41. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of second-order // arXiv:2204.09408.
42. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.
43. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока с неоднородными условиями согласования // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.
44. *Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2015. № 1. С. 7–21.
45. *Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П.* Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2020. Т. 56. № 3. С. 287–297.
46. *Моисеев Е.И., Корзюк В.И., Козловская И.С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1373–1385.
47. *Ikeda M., Inui T., Wakasugi Y.* The Cauchy problem for the nonlinear damped wave equation with slowly decaying data // Nonlin. Differ. Equat. Appl. 2017. V. 50. № 2. Art. 10.
48. *Iwamiya T.* Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces // Hiroshima Math. J. 1986. V. 50. P. 499–530.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 05.04.2023 г.
После доработки 06.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1240–1246

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.958

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

© 2023 г. Ю. А. Еремин, В. В. Лопушенко

На основе интегральных представлений с плотностями, распределёнными вдоль отрезка оси симметрии, построено и обосновано представление решения граничной задачи дифракции плоской волны на локальном проницаемом теле вращения с гладкой поверхностью. Полученное интегральное представление позволяет избежать резонансов внутренней области при анализе частотных характеристик рассеяния.

DOI: 10.31857/S037406412309008X, EDN: WQFZOQ

Введение. Впечатляющие достижения наноплазмоники позволили добиться огромных успехов в продвижении научных результатов и технологических прорывов в последние годы. Огромный вклад был внесён в разработку новых подходов к лечению онкологических образований, инновационных средств улавливания и хранения солнечной энергии, а также в реализацию плазмонного нанолазера [1]. Все эти технологии так или иначе связаны с локализованным плазмонным резонансом в наночастицах при облучении волнами оптического диапазона. Совершенствование технологий синтеза частиц привело к тому, что их средний размер уменьшился до 10–20 нм, что составляет 1/20–1/50 от длины волны внешнего возбуждения [2]. Наиболее технологичными формами частиц являются тела вращения: сферы, сфероиды и цилиндры [3]. Это обстоятельство позволяет использовать для анализа оптических характеристик подобных наночастиц подход, связанный с разложением полей в ряд Фурье по азимутальной переменной с последующей аппроксимацией каждой отдельной гармоники [4]. В настоящей работе нами разработан подход, позволяющий строить интегральные представления для полей в задачах дифракции плоской волны на проницаемом теле вращения с носителями, расположенными на оси симметрии рассеивателя. Подобные представления в рамках дискретного аналога – метода дискретных источников – успешно используются в задачах наноплазмоники [5].

1. Постановка задачи. Будем рассматривать задачу дифракции поля плоской волны u^0 на проницаемом теле вращения с внутренней областью D_i в $\mathbb{R}^3$, ограниченном гладкой замкнутой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\nu)}$. Математическая постановка граничной задачи имеет вид

$$\triangle u_{e,i} + k_{e,i}^2 u_{e,i} = 0, \quad M \in D_{e,i}, \quad D_e = \mathbb{R}^3 \setminus /\overline{D}_i;$$

$$u_i(Q) - u_e(Q) = u^0(Q), \quad \frac{\partial u_i(Q)}{\partial n} - \frac{\partial u_e(Q)}{\partial n} = \frac{\partial u^0(Q)}{\partial n}, \quad Q \in \partial D_i;$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial r} - ik_e u_e = o(r^{-1}), \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Здесь $k_{e,i}$ – волновые числа в областях $D_{e,i}$ соответственно. Будем полагать, что $k_e > 0$, $\operatorname{Im} k_i \geqslant 0$. Как известно, задача (1) имеет единственное классическое решение [6, с. 112].

2. Вспомогательные результаты. Прежде всего нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $U(M)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца с постоянным волновым числом k в некоторой области D. Выберем цилиндрическую систему* *координат* (ρ, φ, z). *Обозначим через* u_m *фурье-гармонику функции* $U(M)$ *по* φ. *Тогда существует предел вида*

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u_m(\zeta)}{\rho^m} = v_m(z), \quad m \in \{0, \mathbb{N}\}, \tag{2}$$

который представляет собой аналитическую функцию координаты z. *Здесь* $\zeta = (\rho, z)$ – *точка, расположенная в полуплоскости* $\Phi\colon\ \varphi = \mathrm{const}$.

Доказательство. Выберем шар B с центром в начале координат, целиком расположенный в области D. Тогда функция $U(M)$ внутри шара может быть представлена в виде [7, с. 45, 46]

$$U(M) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_n^m j_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \tag{3}$$

здесь $j_n(kr)$ – сферическая функция Бесселя, $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединённый полином Лежандра, $r = |M|$. Коэффициент Фурье этой функции по φ принимает вид

$$u_m(\zeta) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^m j_n(kr) P_n^m(\cos\theta), \quad m \in \{0, \mathbb{N}\}.$$

Выразим присоединённый полином Лежандра через гипергеометрическую функцию [8, с. 786]

$$P_n^{|m|}(\cos\theta) = 2^{-|m|}\frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!m!}\frac{\rho^{|m|}}{r^{|m|}} F(|m|-n, |m|+n+1, |m|+1, (1-\cos\theta)/2).$$

Принимая во внимание, что $F(|m|-n, |m|+n+1, |m|+1, 0) = 1$, предел (2) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u_m(\zeta)}{\rho^m} = v_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n^m \frac{j_n(kz)}{z^m},$$

где $b_n^m = a_n^m 2^{-|m|}(n+|m|)!/((n-|m|)!m!)$. Учитывая асимптотику сферических функций Бесселя [9, с. 258]

$$\frac{j_n(x)}{x^n}(x\to 0) = \frac{1}{(2n+1)!!},$$

можно заключить, что $v_m(z)$ представляет собой аналитическую функцию переменной z при всех $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* Z_0 – *отрезок оси* Z, *целиком расположенный внутри области* $D\bigcap\Phi$. *Тогда из того, что* $v_m(z) \equiv 0$, $z \in Z_0$, *следует* $u_m(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in D\bigcap\Phi$.

Доказательство. В силу условия леммы имеем

$$\sum_{n=m}^{\infty} b_n^m \frac{j_n(kz)}{z^m} \equiv 0.$$

Устремляя последовательно $z \to 0$ для $n = m, m+1, \ldots$ и учитывая асимптотику функции Бесселя в нуле, получаем, что все $b_n^m = 0$. Лемма доказана.

Представление для функции $U(M)$, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца с постоянным волновым числом, можно получить не только в виде ряда (3). В частности, она может быть представлена в виде потенциала простого или двойного слоёв или их комбинации [6, с. 64, 65] с плотностями, распределёнными по поверхности ∂D_i. Причём в случае нерезонансной поверхности это представление единственно.

Теорема 1. *Конкретный вид функций для интегрального представления фурье-гармоник полей, удовлетворяющих условиям излучения, с плотностями, распределёнными по отрезку оси* Z, *следующий:*

$$Y_m^e(\zeta, \bar z) = h_m^{(1)}(kR_{\zeta\bar z}) P_m^m(\cos\theta_{\bar z}),$$

здесь $R^2_{\zeta\bar z} = \rho^2 + (z-\bar z)^2$, $P^m_m(\cos\theta_{\bar z}) = (\sin\theta_{\bar z})^m$, $\sin\theta_{\bar z} = \rho/R_{\zeta\bar z}$, $h^{(1)}_m(kR)$ – *сферические функции Ханкеля, удовлетворяющие условиям излучения задачи (1).*

Доказательство. Будем использовать в области D_i представление для функции $U(M)$ в виде потенциала простого слоя с плотностью μ. Тогда

$$U(M) = \int\limits_{\partial D_i} \Psi(M,P)\mu(P)\,d\sigma_P, \quad M \in D_i,$$

где $\Psi(M,P)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Перейдём к фурье-гармоникам $u_m(\zeta)$, $\zeta\in\Phi$:

$$u_m(\zeta) = \int\limits_{L_i} S_m(\zeta,\xi)\mu_m(\xi)dl_\xi.$$

Здесь L_i – образующая поверхности вращения ∂D_i, $\xi \in L_i$ и функции

$$S_m(\zeta,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi(M,P)\exp\{-im\varphi_p\}d\varphi_p$$

являются S-функциями, которые были введены Е.Н. Васильевым [10, с. 232, 233]. Для них справедливы следующие представления:

$$\operatorname{Im} S_m(\zeta,\xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\rho\bar\rho)^{2l+|m|}}{l!(l+|m|)!2^{2l+|m|}}R_1^{-(2l+|m|+1/2)}J_{2l+|m|+1/2}(R_1),$$

$$\operatorname{Re} S_m(\zeta,\xi) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\rho\bar\rho)^{2l+|m|}}{l!(l+|m|)!2^{2l+|m|}}R_1^{-(2l+|m|+1/2)}N_{2l+|m|+1/2}(R_1),$$

где $R_1^2 = \rho^2 + \bar\rho^2 + (z-\bar z)^2$, а J_α, N_α – цилиндрические функции Бесселя и Неймана соответственно. Из представлений для функций $S_m(\zeta,\xi)$ непосредственно следует, что

$$\lim_{\bar\rho\to 0}\frac{S_m(\zeta,\xi)}{\bar\rho^m} = q_m h^{(1)}_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z}), \quad q_m = \mathrm{const}.$$

Теорема 1 доказана.

Легко видеть, что система функций $\{Y_m(M)\} = h^{(1)}_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z})\exp(im\varphi)$, $M = (\rho,\varphi,z)$, удовлетворяет вне оси Z уравнению Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности.

3. Интегральное представление решения. Будем строить решение (1) на основе интегральных представлений аналогично схеме [11]. Поскольку построенные ранее функции $h^{(1)}_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z})\exp(im\varphi)$, $j_m(kR_{\zeta\bar z})P^m_m(\cos\theta_{\bar z})\exp(im\varphi)$, $j_m(\cdot)$ – сферические функции Бесселя [8, с. 790], удовлетворяют уравнениям Гельмгольца по M в соответствующих областях, то достаточно удовлетворить граничным условиям задачи (1). Разложим поле плоской волны u^0 в ряд Фурье по переменной φ следующим образом [8, с. 781]:

$$u^0(M) = \exp[ik_{\mathrm e}(x\sin\theta_0 - z\cos\theta_0)] = \exp[-ik_{\mathrm e}z\cos\theta_0]\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{m0})(-j)^m J_m(\rho\sin\theta_0)\cos(m\varphi),$$

здесь θ_0 – угол падения плоской волны, δ_{m0} – символ Кронекера. Зафиксируем произвольное целое m, тогда фурье-гармоники граничных условий приобретают вид

$$u^m_i(\zeta) - u^m_e(\zeta) = u^0_m(\zeta), \quad \frac{\partial u^m_i(\zeta)}{\partial n} - \frac{\partial u^m_e(\zeta)}{\partial n} = \frac{\partial u^0_m(\zeta)}{\partial n}, \quad \zeta \in L_i, \tag{4}$$

где L_i – образующая поверхности вращения ∂D_i. Теперь наша задача состоит в том, чтобы показать, что граничные условия для гармоник можно выполнить посредством интегральных представлений с любой степенью точности.

Для этого на отрезке оси симметрии Z_0 зададим плотности $\beta_{e,i} \in L_2(Z_0)$ и будем искать представления решения граничной задачи (1) в виде

$$u_e^m(\zeta) = \int\limits_{Z_0} \Psi_m(k_e, \zeta, z)\beta_e(z)\, dz, \tag{5}$$

$$u_i^m(\zeta) = \int\limits_{Z_0} \Phi_m(\zeta, z)\beta_i(z)\, dz, \tag{6}$$

здесь $\Psi_m(k_e, \zeta, \bar{z}) = h_m^{(1)}(k_e R_{\zeta\bar{z}})P_m^m(\cos\theta_{\bar{z}})$, $\Phi_m(\zeta, \bar{z}) = j_m(k_i R_{\zeta\bar{z}})P_m^m(\cos\theta_{\bar{z}})$.

Обозначим соответствующие интегральные операторы в (5), (6) как $\mathbf{A}_{e,i}$. Операторы действуют из $L_2(Z_0)$ в $L_2(L_i)$. Формально подставляя интегральные представления для полей в условия сопряжения задачи (1), получаем следующие соотношения:

$$\mathbf{A}_i\beta_i - \mathbf{A}_e\beta_e = p(\zeta), \quad \zeta \in \partial D_i;$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mathbf{A}_i\beta_i - \frac{\partial}{\partial n_\zeta}\mathbf{A}_e\beta_e = q(\zeta), \quad \{p, q\} \in \mathbf{L}_2(L_i) = L_2(L_i) \times L_2(L_i).$$

Образуем матричный оператор

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{A}_e \\ \partial_\zeta \mathbf{A}_i & \partial_\zeta \mathbf{A}_e \end{bmatrix},$$

действующий из $\mathbf{L}_2(Z_0) = L_2(Z_0) \times L_2(Z_0)$ в $\mathbf{L}_2(L_i)$. Здесь для краткости введено обозначение $\partial_\zeta = \partial/\partial n_\zeta$. В силу того, что все элементы матричного оператора представляют собой вполне непрерывные операторы, матричный оператор $\mathbf{B}$ является оператором с незамкнутой областью значений в $\mathbf{L}_2(L_i)$ [12, с. 227]. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что замыкание области его значений $\overline{R(\mathbf{B})}$ совпадает со всем пространством $\mathbf{L}_2(L_i)$.

Теорема 2. *Замыкание области значений* $\overline{R(\mathbf{B})}$ *оператора* $\mathbf{B}$ *совпадает со всем пространством* $\mathbf{L}_2(L_i)$.

Доказательство.

1. Поскольку оператор $\mathbf{B}$ определён на всём пространстве $\mathbf{L}_2(Z_0)$, то существует сопряжённый оператор [12, с. 191], действующий из $\mathbf{L}_2(L_i)$ в $\mathbf{L}_2(Z_0)$: $(\mathbf{B}x, y) = (x, \mathbf{B}^*y)$. Запишем его как

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^* & (\partial_Q \mathbf{A}_i)^* \\ \mathbf{A}_e^* & (\partial_Q \mathbf{A}_e)^* \end{bmatrix}.$$

2. Для доказательства теоремы достаточно показать, что имеет место равенство [12, с. 227]

$$N(\mathbf{B}^*) = \{\varnothing\}.$$

От противного предположим, что существуют функции $\{p, q\} \in \mathbf{L}_2(L_i)$ такие, что $\|p\| + \|q\| \neq 0$, и в то же время

$$\mathbf{B}^*\{p, q\} = \mathbf{0}.$$

Заметим, что функции $\{p, q\}$ должны удовлетворять дополнительным условиям при $\rho \to +0$ [13, с. 175–178], которые запишем подробно, опустив знаки комплексного сопряжения:

$$\int\limits_{L_i} [\Psi_m(k_e, \zeta, z)p(\zeta) + \partial_\zeta\Psi_m(k_e, \zeta, z)q(\zeta)]\, d\sigma_\zeta = 0, \quad z \in Z_0,$$

$$\int_{L_i} [\Phi_m(\zeta, z)p(\zeta) + \partial_\zeta \Phi_m(\zeta, z)q(\zeta)]\, d\sigma_\zeta = 0, \quad z \in Z_0.$$

Введём в области D_i следующие функции:

$$W(\xi) = \int_{L_i} \{\Psi_m(k_e, \zeta, \xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Psi_m(k_e, \zeta, \xi)q(\zeta)\}\, d\sigma_\zeta, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i, \tag{7}$$

$$V(\xi) = \int_{L_i} \{\Phi_m(\zeta, \xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Phi_m(\zeta, \xi)q(\zeta)\}\, d\sigma_\zeta. \tag{8}$$

С учётом (7), (8) и на основе результатов леммы 2 получаем

$$W(\xi) = 0, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i, \tag{9}$$

$$V(\xi) = 0, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i, \tag{10}$$

где выражение (9) представляет собой соотношение метода нулевого поля для фурье-гармоники [14].

Для завершения доказательства необходимо преобразовать соотношение (10). Будем действовать по схеме, изложенной в работе [15]. Заметим, что $V(\xi)$ – целая функция в полуплоскости в силу свойств ядра Φ_m. Следовательно, равенство (10) справедливо в любой конечной части полуплоскости Φ.

Выберем полуокружность Σ_R с радиусом R так, чтобы область $\Phi \bigcap D_i$ целиком содержалась внутри и не касалась полукруга. Будем полагать, что внутренняя область нерезонансная для заданного значения k_i. В силу предыдущего, на Σ_R имеет место равенство

$$\int_{L_i} [\Phi_m(\zeta, \xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Phi_m(\zeta, \xi)q(\zeta)]\, d\sigma_\zeta = 0, \quad \xi \in \Sigma_R. \tag{11}$$

Воспользуемся обобщённой теоремой сложения Гегенбауера следующего вида [16]:

$$\frac{h_m^{(1)}(kR_{\zeta\xi})}{R_{\zeta\xi}^m} = \kappa_m \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{lm} \frac{h_{l+m}^{(1)}(kr_\zeta)}{(kr_\zeta)^m} \frac{j_{l+m}(kr_\xi)}{(kr_\xi)^m}, \quad r_\xi < r_\zeta, \tag{12}$$

где

$$\kappa_m = k^{-m} 2^{m+1/2} (2m-1)!!\Gamma(m+1/2), \quad \gamma_{lm} = (l+m+1/2) C_l^{m+1/2}(\cos(\theta_\zeta - \theta_\xi)),$$

$C_l^{m+1/2}(x)$ – полиномы Гегенбауэра.

Аналогичное (12) соотношение имеет место для функций $j_m(kR_{\zeta\xi})/R_{\zeta\xi}^m$:

$$\frac{j_m(kR_{\zeta\xi})}{R_{\zeta\xi}^m} = \kappa_m \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_{lm} \frac{j_{l+m}(kr_\zeta)}{(kr_\zeta)^m} \frac{j_{l+m}(kr_\xi)}{(kr_\xi)^m}. \tag{13}$$

Поступим по аналогии с работой [15].

1. На Σ_R подставим вместо функции $\Phi_m(\zeta, \xi)$ в (11) её разложение вида (13).

2. Из нерезонансности полуокружности Σ_R для заданного k_i следует, что все члены полученного ряда обращаются в нуль:

$$\kappa_m \gamma_{lm} \int_{L_i} \left[\frac{j_{l+m}(k_i r_\zeta)}{(k_i r_\zeta)^m} p(\zeta) + \partial_\zeta \frac{j_{l+m}(k_i r_\zeta)}{(k_i r_\zeta)^m} q(\zeta)\right] d\sigma_\zeta = 0, \quad l \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}. \tag{14}$$

3. Умножаем каждый член (14) на $h^{(1)}_{l+m}(k_iR)/(k_iR)^m$ и суммируем по l от 0 до ∞ на Σ_R. Сходимость функционального ряда обеспечивается выбором R. В результате получим функцию вида

$$V_i(\xi) = V(k_i,\xi) = \int\limits_{L_i} \{\Psi_m(k_i,\zeta,\xi)p(\zeta) + \partial_\zeta \Psi_m(k_i,\zeta,\xi)q(\zeta)\}\, d\sigma_\zeta.$$

Для неё вне полукруга Σ_R имеет место граничная задача вида

$$\triangle V_i + k_i^2 V_i = 0, \quad |\xi| > R,$$

$$V_i(\xi) = 0, \quad \xi \in \Sigma_R,$$

с условиями излучения на бесконечности. Таким образом, $V_i(\xi) \equiv 0$ вне полуокружности Σ_R, а в силу аналитичности функции V_i всюду в $\Phi \bigcap D_e$. В результате имеем

$$V_i(\xi) \equiv 0, \quad \xi \in \Phi \bigcap D_i. \tag{15}$$

4. Полученные соотношения (9) и (15) представляют собой базовые соотношения метода нулевого поля [14].

5. Как показано в статье [17], в силу единственности решения исходной граничной задачи дифракции $\|p\| + \|q\| = 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Перейдём к формулировке основного результата статьи. Поскольку $D(\mathbf{B}) = \mathbf{L}_2(Z_0)$ и $\overline{R(\mathbf{B})} = \mathbf{L}_2(\partial D_i)$, то имеет место следующая

Теорема 3. *Для любого $\delta > 0$ существуют функции $\{\beta_e^{m,\delta}, \beta_i^{m,\delta}\} \in \mathbf{L}_2(\Sigma)$ и имеет место оценка $\|u_e^m - u_e^{m,\delta}\| + \|u_i^m - u_i^{m,\delta}\| \leqslant \delta$. Здесь $\{u_e^m, u_i^m\}$ – фурье-гармоники решения задачи (1) с граничными условиями (4), а $\{u_e^{m,\delta}, u_i^{m,\delta}\}$ – их интегральные представления (5), (6). Следовательно, в любой ограниченной замкнутой области в $\Phi \bigcap D_e$ справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} u_e^{m,\delta}(\zeta) = u_e^m(\zeta), \quad \zeta \in \Phi \bigcap D_e. \tag{16}$$

Таким образом, интегральное представление сходится в пределе к точному решению задачи (1) для m-й гармоники Фурье.

Замечание 1. Аналогичный (16) результат имеет место для гармоники внутреннего поля u_i^m в области $\Phi \bigcap D_i$.

Замечание 2. Следует отметить, что поскольку m было выбрано произвольно, то очевидно, что решение граничной задачи (1) может быть получено с любой степенью точности посредством конечной суммы ряда Фурье интегральных представлений.

Отметим, что распределение плотностей интегрального представления решения по оси вращения имеет преимущество по сравнению с интегральными представлениями полей с плотностями, распределёнными на вспомогательной поверхности внутри рассеивателя [18]. Кроме того, по аналогии с [19] можно показать, что такой важный показатель рассеяния как интегральный поперечник можно вычислить в аналитическом виде, не прибегая к численному интегрированию по единичной сфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stockman M.I., Kneipp K., Bozhevolnyi S.I. et al.* Roadmap on plasmonics // J. Opt. 2018. V. 20. P. N043001.
2. *Shi H., Zhu X., Zhang S., et al.* Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications // Nanoscale Adv. 2021. V. 3. P. N4349.
3. *Phan A.D., Nga D.T., Viet N.A.* Theoretical model for plasmonic photothermal response of gold nanostructures solutions // Opt. Commun. 2018. V. 410. P. 108–111.

4. *Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.* Исследование эффекта пространственной дисперсии в металлической оболочке несферической магнетоплазменной наночастицы // Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. Вып. 10. С. 1596–1602.
5. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода дискретных источников (обзор) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 4. С. 34–62.
6. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
7. *Свешников А.Г., Могилёвский И.Е.* Математические задачи теории дифракции. М., 2010.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М., 1973.
9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.
10. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М., 1987.
11. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В.* Свойства системы интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции на проницаемом теле // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1230–1237.
12. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1985.
13. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., 2008.
14. *Doicu A., Eremin Yu., Wriedt T.* Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources. San Diego, 2000.
15. *Eremin Yu.A., Tsitsas N.L., Kouroublakis M., Fikioris G.* New scheme of the discrete sources method for two-dimensional scattering problems by penetrable obstacles // J. Comput. Appl. Math. 2023. V. 417. P. 114556.
16. *Ватсон Дж.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.
17. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г., Скобелев С.П.* Метод нулевого поля в задачах дифракции волн // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 8. С. 1490–1494.
18. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М., 2014.
19. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В.* Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния в рамках интегрофункционального метода дискретных источников // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1073–1077.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.
После доработки 15.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1247–1259

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.22

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРЫ С ДВУМЯ ГРАНИЧНЫМИ И ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

© 2023 г. Н. Раджабов, Л. Н. Раджабова

Получены явные решения модельного и немодельного интегральных уравнений типа Вольтерры с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками, изучены свойства полученных решений. В случае, когда решение модельного уравнения содержит произвольную постоянную, выяснена корректная постановка задач с условиями, заданными на сингулярных многообразиях.

DOI: 10.31857/S0374064123090091, EDN: WOWZYC

К 85-летию академика Национальной академии наук Таджикистана Нусрата Раджабова

Введение. В настоящее время теория сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений находит всё более широкое применение в различных областях математики, механики и физики. К сингулярным интегральным уравнениям сводятся граничные задачи теории функций, к которым, в свою очередь, приводятся многие важные задачи математической физики и механики, в частности, теории упругости и гидроаэродинамики. Отметим, что теория сингулярных интегральных уравнений, ядра которых имеют слабую или сильную особенность, особенность первого порядка, особенности степенного или логарифмического типа, с ядром Коши или когда интеграл понимается в смысле главного значения, встречается во многих работах. В частности, в [1–5] для нахождения решения интегральных уравнений используется в основном численный метод.

Проблеме исследования интегральных уравнений типа Вольтерры с сингулярными и сверхсингулярными точками в ядре посвящено много исследований. Так, в работах [6–11] изучены интегральные уравнения типа Вольтерры с одной граничной, или внутренней сингулярной, или сверхсингулярной точкой, а в [12–14] – с двумя граничными сингулярными точками. В настоящей статье найдены явные решения некоторых интегральных уравнений типа Вольтерры с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками. На основе полученных интегральных представлений решений и их свойств, когда общие решения содержат произвольные постоянные, исследуются задачи типа Коши с условиями, заданными на сингулярных многообразиях.

Сингулярным интегральным уравнением называется интегральное уравнение с ядром, обращающимся в бесконечность на граничных или внутренних точках данной области.

Пусть $\Gamma_0 = \{x : a < x < b\}$ – множество точек на вещественной оси и $c \in \Gamma_0$. Далее обозначим $\Gamma = \Gamma_0 \setminus \{c\}$, $\Gamma_1 = \{x : a < x < c\}$, $\Gamma_2 = \{x : c < x < b\}$.

На множестве Γ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|c-t|} = f(x),$$

где $A(x)$ и $f(x)$ – заданные функции, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Сначала изучим модельное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) + \lambda \int_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|c-t|} = f(x), \tag{1}$$

где λ – заданная постоянная.

Будем искать решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения (1) в классе функций $C(\Gamma_0)$, удовлетворяющие условию $\varphi(c)=0$ и с асимптотическим поведением

$$\varphi(x)=o[|x-c|^{\varepsilon}] \quad \text{при} \quad x\to c$$

для некоторого $\varepsilon>0$.

Тогда из (1) следует, что если решение интегрального уравнения (1) существует, то $f(c)=0$.

Пусть в уравнении (1) $x\in\Gamma_1$, тогда $|x-c|=c-x$ и уравнение (1) на Γ_1 примет вид

$$\varphi(x)+\lambda\int\limits_c^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}=f(x), \quad x\in\Gamma_1. \tag{2}$$

Если $x\in\Gamma_2$, то $|c-x|=x-c$ и уравнение (1) имеет вид

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_x^c \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)}=f(x), \quad x\in\Gamma_2. \tag{3}$$

Если обозначим решение уравнения (2) через $\varphi_1(x)$, а уравнения (3) через $\varphi_2(x)$, то решение интегрального уравнения (1) можем записать как

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & \text{когда } x\in\Gamma_1,\\ \varphi_2(x), & \text{когда } x\in\Gamma_2.\end{cases}$$

Пусть $x\in\Gamma_1$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\omega_1(x)=\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{c-x}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{\lambda/(b-a)} \tag{4}$$

при $\lambda>0$ является решением однородного интегрального уравнения (2). Данное решение в окрестности точки $x=c-0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\omega_1(x)=O[(c-x)^{\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to c-0.$$

Решение (4) неограниченно в точке $x=a$, его поведение при $x\to a$ определяется из асимптотической формулы

$$\omega_1(x)=O[(x-a)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to a.$$

Полученное решение (4) обладает свойством

$$\frac{\omega_1(t)}{(t-a)(b-t)(c-t)}=-\frac{1}{\lambda}\frac{d\omega_1(t)}{dt}. \tag{5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\varphi(x)=K_1^-(f(x))\equiv f(x)-$$

$$-\lambda\int\limits_c^x\left\{\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{c-t}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{c-x}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{c-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{\lambda/(b-a)}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} \tag{6}$$

будет частным решением неоднородного уравнения (2).

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(c-x)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1>\frac{\lambda}{(c-a)(b-c)} \quad \text{при} \quad x\to c, \tag{7}$$

то общее решение интегрального уравнения (2) при $\lambda>0$

$$\varphi_1(x)=c_1\omega_1(x)+K_1^-(f(x)), \tag{8}$$

где c_1 – произвольная постоянная. Решение вида (8) в точке $x=c-0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi(x)=o[(c-x)^{\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to c-0.$$

Данное решение в точке $x=a$ неограниченно, а его поведение определяется из асимптотической формулы

$$\varphi(x)=O[(x-a)^{-\lambda/((c-a)(b-a))}] \quad \text{при} \quad x\to a.$$

Умножив обе части равенства (8) на $(c-x)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}$, после перехода к пределу при $x=$ $=c-0$ получим

$$[\varphi(x)(c-x)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0}=[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{-\lambda/(b-a)}c_1.$$

В случае $\lambda<0$ из представления (8) следует, что если решение интегрального уравнения (2) существует, то оно определяется равенством (8) при $c_1=0$:

$$\varphi_1(x)=K_1^-(f(x)). \tag{9}$$

Решение вида (9) существует, если $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$, $f(c-0)=0$ и

$$f(x)=o[(c-x)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon>0, \quad \text{при} \quad x\to c-0. \tag{10}$$

Таким образом, доказана

Лемма 1. *Пусть в интегральном уравнении (2) функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением (7) при $\lambda>0$ и с асимптотическим поведением (10) при $\lambda<0$. Тогда любое решение интегрального уравнения (2) из класса $C(\Gamma_1)$ представимо в виде*

$$\varphi(x)=\begin{cases} c_1\omega_1(x)+K_1^-(f(x)), & \textit{когда } \lambda>0, \quad x\in\Gamma_1,\\ K_1^-(f(x)), & \textit{когда } \lambda<0, \quad x\in\Gamma_1.\end{cases}$$

Пусть $x\in\Gamma_2$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\omega_2(x)=\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|\lambda|/(b-a)} \tag{11}$$

при $\lambda<0$ является решением однородного уравнения (3). Данное решение обладает свойством

$$\frac{d\omega_2(x)}{dx}=\frac{|\lambda|}{(x-a)(b-x)(x-c)}\omega_2(x), \quad x\in\Gamma_2.$$

Теперь покажем, что при $\lambda<0$ и выполнении условия $f(c+0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(x-c)^{\gamma_3}], \quad \gamma_3>\frac{|\lambda|}{(c-a)(b-c)} \quad \text{при} \quad x\to c+0, \tag{12}$$

функция

$$\varphi_2(x) = f(x) - \lambda \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right)\right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right)\right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \times$$

$$\times \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} \equiv K_1^+(f(x)) \tag{13}$$

будет частным решением неоднородного интегрального уравнения (3).

Подставив значение функции $\varphi_2(x)$ из равенства (13) в уравнение (3), далее сократив на $f(x)$ и заменив порядок интегрирования в кратном интеграле, получим равенство

$$-\lambda \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right)\right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right)\right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} +$$

$$+\lambda \int_c^x \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - \lambda^2 \int_c^x \left\{ \left(\frac{\tau-a}{\tau-c}\right)^{1/(c-a)} \left(\frac{b-\tau}{\tau-c}\right)^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} \times$$

$$\times \int_\tau^x \left\{ \left(\frac{t-c}{t-a}\right)^{1/(c-a)} \left(\frac{t-c}{b-t}\right)^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = 0. \tag{14}$$

Справедливо соотношение

$$\int_\tau^x \left\{ \left(\frac{t-c}{t-a}\right)^{1/(c-a)} \left(\frac{t-c}{b-t}\right)^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = \frac{1}{|\lambda|} \int_\tau^x \frac{d\omega_2(t)}{dt} = \frac{1}{|\lambda|}(\omega_2(x) - \omega_2(\tau)).$$

Следовательно, из равенства (14) будем иметь

$$-\lambda \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right)\right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right)\right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} +$$

$$+\lambda \int_c^x \frac{f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - |\lambda| \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{\tau-a}{\tau-c}\right)\right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-\tau}{\tau-c}\right)\right]^{1/(b-c)} \right\}^{|\lambda|/(b-a)} \times$$

$$\times \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} + |\lambda| \int_c^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} = 0.$$

Тогда функция вида

$$\varphi(x) = c_2\varphi_2(x) + K_1^+(f(x)) \tag{15}$$

будет общим решением неоднородного интегрального уравнения (3) при $\lambda < 0$. При этом для сходимости интеграла в правой части равенства (15) функция $f(x)$ должна удовлетворять условию (7).

В случае $\lambda > 0$ если решение интегрального уравнения (3) существует, то оно выражается равенством (15) при $c_2 = 0$:

$$\varphi(x) = K_1^+(f(x)). \tag{16}$$

Интеграл в правой части равенства (16) сходится для любой функции $f(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$. Но так как решение интегрального уравнения (3) ищем в классе функций, удовлетворяющих условию $\varphi(c+0) = 0$, необходимо выполнение условия $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o[(x-c)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to c+0. \tag{17}$$

На основе приведённых выше рассуждений справедлива

Лемма 2. *Пусть в интегральном уравнении (3) функция $f(x) \in C(\Gamma_2)$ при $\lambda < 0$ обладает свойством $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением (12), при $\lambda > 0$ $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением (17). Тогда любое решение интегрального уравнения (3) из класса $C(\overline{\Gamma})$ представимо в виде*

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_2\omega_2(x) + K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \ \ \lambda < 0, \\ K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \ \ \lambda > 0, \end{cases}$$

где c_2 – произвольная постоянная.

Из лемм 1 и 2 следуют утверждения.

Теорема 1. *Пусть при $\lambda > 0$ выполнены все условия лемм 1 и 2. Тогда любое решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\Gamma)$ представимо в виде*

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1\omega_1(x) + K_1^{-}(f(x)) & \textit{при} \ \ x \in \Gamma_1, \\ K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \ \ x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{18}$$

где c_1 – произвольная постоянная, а функция $\omega_1(x)$ и интегральные операторы $K_1^{-}(f(x))$, $K_1^{+}(f(x))$ определяются равенствами (4) и (6), (13) соответственно.

Теорема 2. *Пусть при $\lambda < 0$ выполнены все условия лемм 1 и 2. Тогда любое решение интегрального уравнения (1) из класса $C(\Gamma)$ представимо в виде*

$$\varphi(x) = \begin{cases} K_1^{-}(f(x)) & \textit{при} \ \ x \in \Gamma_1, \\ c_2\omega_2(x) + K_1^{+}(f(x)) & \textit{при} \ \ x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{19}$$

где c_2 – произвольная постоянная, функция $\omega_2(x)$ выражается равенством (11).

Замечание 1. Из интегрального представления (18) следует, что в точке $x = c$ при $\lambda > 0$ решение вида (18) обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$\varphi(x) = o[(c-x)^{\lambda/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c-0,$$

$$\varphi(x) = o[(x-c)^{\varepsilon}] \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

Замечание 2. Из интегрального представления (19) следует, что при $\lambda < 0$ решение вида (19) в точке $x = c$ обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$\varphi(x) = o[(c-x)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to c-0,$$

$$\varphi(x) = o[(x-c)^{|\lambda|/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

Замечание 3. Решения вида (18) и (19) обладают свойствами

$$[\varphi(x)(c-x)^{|\lambda|/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0} = c_1(c-a)^{\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))}, \tag{20}$$

$$[\varphi(x)(x-c)^{\lambda/((c-a)(b-c))}]_{x=c+0} = c_2(c-a)^{\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))}. \tag{21}$$

Интегральные представления (18), (19), а также свойства (20), (21) дают возможность для интегрального уравнения (1) ставить и исследовать задачи типа Коши.

Задача K_1. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $\lambda > 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$[(c-x)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}\varphi(x)]_{x=c-0} = E_1, \tag{22}$$

где E_1 – заданная постоянная.

Решение задачи K_1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, используя интегральное представление (18), свойство (20) и условие (22), имеем

$$c_1(c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-a))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))} = E_1,$$

откуда находим

$$c_1 = (c-a)^{\lambda/((c-a)(b-a))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))}E_1.$$

Подставив полученное значение c_1 в интегральное представление (18), получим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \omega_1(x)(c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-a))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))}E_1 + K_1^-(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_1, \\ K_1^+(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть в интегральном представлении (18) параметры λ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда задача K_1 имеет единственное решение, которое определяется формулой (23).*

Задача K_2. Требуется найти решение интегрального уравнения (1) при $\lambda < 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$[(x-c)^{\lambda/((c-a)(b-c))}\varphi(x)]_{x=c+0} = E_2, \tag{24}$$

где E_2 – заданная постоянная.

Решение задачи K_2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, использовав интегральное представление (19), свойство (21) и условие (24), получим

$$c_2(c-a)^{\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{\lambda/((b-c)(b-a))} = E_2,$$

откуда

$$c_2 = (c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))}E_2.$$

Подставляя полученное значение c_2 в интегральное представление (19), находим решение задачи K_2:

$$\varphi(x) = \begin{cases} K_1^-(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_1, \\ \omega_2(x)(c-a)^{-\lambda/((c-a)(b-c))}(b-c)^{-\lambda/((b-c)(b-a))}E_2 + K_1^+(f(x)) & \text{при } x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть в интегральном представлении (19) параметр λ и функция $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда задача K_2 имеет единственное решение, которое определяется формулой (25).*

Теперь на множестве Γ рассмотрим более общее интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) + \int_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)|c-t|} = f(x) \tag{26}$$

в предположении, что $A(c) \neq 0$ и $A(c-0) \neq A(c+0)$.

Пусть в уравнении (26) $x \in \Gamma_1$, тогда $|x-c| = c-x$ и это уравнение примет вид

$$\varphi(x) + \int_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} = f(x). \tag{27}$$

В случае $x \in \Gamma_2$ имеем $|x-c| = x-c$ и, следовательно, (26) запишем как

$$\varphi(x) + \int\limits_x^c \frac{A(t)\varphi(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = f(x). \tag{28}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функция

$$\Omega_1(x) = \exp[-W_A^-(x)]\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{c-x}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{A(c-0)/(b-a)},$$

где

$$W_A^-(x) = \int\limits_x^c \frac{A(c-0)-A(t)}{(t-a)(b-t)(c-t)}\,dt,$$

при $A(c-0) > 0$ будет решением однородного уравнения (27), если функция $A(x)$ в окрестности точки $x = c-0$ удовлетворяет условию

$$|A(c-0) - A(x)| \leqslant H_1(c-x)^\varepsilon (x-a)^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{29}$$

Докажем, что функция вида

$$\Omega_2(x) = f(x) - \int\limits_x^c \left\{\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{c-t}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{c-x}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{c-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{A(c-0)/(b-a)} \times$$
$$\times \exp[W_A^-(t) - W_A^-(x)]\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} \equiv M_1^-(f(x)) \tag{30}$$

будет частным решением неоднородного интегрального уравнения (27). Подставив значение $\Omega_2(x)$ в (27) и изменив порядок интегрирования, получим

$$-\int\limits_x^c \left\{\left[\left(\frac{c-x}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{c-t}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{c-x}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{c-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{A(c-0)/(b-a)} \times$$
$$\times \frac{\exp[W_A^-(t) - W_A^-(x)]A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} + \int\limits_x^c \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} -$$
$$-\int\limits_x^c \frac{A(\tau)f(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}\left[\left(\frac{\tau-a}{c-\tau}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{b-\tau}{c-\tau}\right)^{1/(b-c)}\right]^{A(c-0)/(b-a)} \exp[W_A^-(\tau)]\,d\tau \times$$
$$\times \int\limits_\tau^x \left[\left(\frac{c-t}{t-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{c-t}{b-t}\right)^{1/(b-c)}\right]^{A(c-0)/(b-a)} \exp[-W_A^-(t)]\frac{A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} = 0. \tag{31}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция $\Omega_1(x)$ обладает свойством

$$\frac{\Omega_1(x)A(x)}{(x-a)(b-x)(c-x)} = -\frac{d\Omega_1(x)}{dx},$$

использовав которое, получим

$$\int\limits_\tau^x \frac{\Omega_1(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)} = -\int\limits_\tau^x \frac{d\Omega_1(t)}{dt} = -\Omega_1(x) + \Omega_1(\tau).$$

Тогда

$$J(x)=\int\limits_c^x \frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\Omega_1(\tau)(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}\int\limits_\tau^x \frac{\Omega_1(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}=$$

$$=\int\limits_c^x [\Omega_1(\tau)-\Omega_1(x)]\,\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\Omega_1(\tau)(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}=\int\limits_c^x \frac{A(\tau)}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}\left[1-\frac{\Omega_1(x)}{\Omega_1(\tau)}\right]f(\tau)\,d\tau.$$

На основе полученных равенств для выражения (31) запишем равенство

$$-\int\limits_x^c \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_1(t)}\,\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}+\int\limits_x^c \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}-\int\limits_x^c \frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}+$$

$$+\int\limits_c^x \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_1(\tau)}\,\frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)(b-\tau)(c-\tau)}=0.$$

При $A(c-0)>0$ частное решение вида (30) существует, если функция $A(x)$ в окрестности точки $x=c-0$ удовлетворяет условию (29), а функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(c-x)^{\gamma_4}],\quad \gamma_4>\frac{A(c-0)}{(c-a)(b-c)}\quad \text{при}\quad x\to c-0. \tag{32}$$

Далее, добавляя частное решение неоднородного уравнения (27) (функцию $\Omega_2(x)$) к общему решению однородного интегрального уравнения (27), найдём общее решение неоднородного уравнения (27):

$$\varphi(x)=c_1\Omega_1(x)+M_1^-(f(x)). \tag{33}$$

На основе приведённых выше рассуждений справедлива

Теорема 5. *Пусть в интегральном уравнении (27) функция $A(x)\in C(\Gamma_1)$ имеет в точке $x=c$ разрыв первого рода, пусть $A(c-0)>0$ и в окрестности точки $x=c-0$ выполняется условие (29). Пусть функция $f(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением (32). Тогда интегральное уравнение (27) в классе $C(\Gamma_1)$ всегда разрешимо, а его общее решение задаётся формулой (33), где c_1 – произвольная постоянная.*

Пусть теперь $A(c-0)<0$. Из представления (33) следует, что если в этом случае существует решение интегрального уравнения (27), то оно будет выражаться равенством (33) при $c_1=0$:

$$\varphi(x)=M_1^-(f(x)). \tag{34}$$

Решение (34) существует, если $f(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ и $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением

$$f(x)=o[(c-x)^{\varepsilon}],\quad \varepsilon>0,\quad \text{при}\quad x\to c-0. \tag{35}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Пусть в интегральном уравнении (27) функция $A(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5, кроме условия $A(c-0)>0$. Пусть $A(c-0)<0$, а функция $f(x)\in$ $\in C(\overline{\Gamma_1})$ удовлетворяет условию $f(c-0)=0$ с асимптотическим поведением (35). Тогда интегральное уравнение (27) в классе $C(\Gamma_1)$ имеет единственное решение, которое выражается равенством*

$$\varphi(x)=f(x)-\int\limits_c^x \left\{\left[\left(\frac{x-a}{c-x}\right)\left(\frac{c-t}{t-a}\right)\right]^{1/(c-a)}\left[\left(\frac{b-x}{c-x}\right)\left(\frac{c-t}{b-t}\right)\right]^{1/(b-c)}\right\}^{|A(c-0)|/(b-a)}\times$$

$$\times\exp[W_A^-(t)-W_A^-(x)]\frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}\equiv M_1^-[f(x)].$$

Замечание 4. Решение вида (33) в точке $x=c-0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением
$$\varphi(x)=o[(c-x)^{A(c-0)/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to c-0,$$
а в точке $x=a$ обращается в бесконечность с асимптотическим поведением
$$\varphi(x)=O[(x-a)^{-A(c-0)/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x\to a+0.$$

Замечание 5. Решение вида (33) обладает свойством
$$[\varphi(x)(c-x)^{-A(c-0)/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0}=[(c-a)^{-1/(c-a)}(b-c)^{-1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}c_1. \tag{36}$$

Интегральное представление (33) и свойство (36) дают возможность для интегрального уравнения (27) ставить и решать следующую задачу.

Задача N_1. Требуется найти решение интегрального уравнения (27) из класса $C(\Gamma_1)$ при $A(c-0)>0$, удовлетворяющее граничному условию
$$[\varphi(x)(c-x)^{-A(c-0)/((c-a)(b-c))}]_{x=c-0}=E_3, \tag{37}$$
где E_3 – заданная постоянная.

Решение задачи N_1. Пусть выполнены условия теоремы 5. Используя интегральное представление (33), свойство (36) и условие (37), находим
$$[(c-a)^{-1/(c-a)}(b-c)^{-1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}c_1=E_3.$$
Отсюда
$$c_1=[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}E_3.$$
Подставив последнее выражение в интегральное представление (33), получим решение задачи N_1 в виде
$$\varphi(x)=\Omega_1(x)[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c-0)/(b-a)}E_3+M_1[f(x)]. \tag{38}$$

Итак, доказана

Теорема 7. *Пусть выполнены все условия теоремы 5. Тогда задача N_1 имеет единственное решение, которое определяется равенством (38).*

Теперь найдём решение интегрального уравнения (28). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция вида
$$\Omega_3(x)=\exp[-W_A^+(x)]\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)}, \tag{39}$$
где
$$W_A^+(x)=\int\limits_c^x\frac{A(t)-A(c+0)}{(t-a)(b-t)(t-c)}\,dt,$$
при $A(c+0)<0$ будет решением однородного интегрального уравнения (28). Действительно, имеем
$$\exp[-W_A^+(x)]\left[-\frac{A(x)-A(c+0)}{(x-a)(b-x)(x-c)}\right]\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)}+$$
$$+\exp[-W_A^+(x)]\frac{|A(c+0)|}{(x-a)(b-x)(x-c)}\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)}=$$
$$=\frac{A(x)\exp[-W_A^+(x)]}{(x-a)(b-x)(x-c)}\left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{1/(c-a)}\left(\frac{x-c}{b-x}\right)^{1/(b-c)}\right]^{|A(c+0)|/(b-a)}=\frac{A(x)}{(x-a)(b-x)(x-c)}\Omega_3(x).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{d\Omega_3(x)}{dx} = \frac{A(x)}{(x-a)(b-x)(x-c)}\Omega_3(x). \tag{40}$$

Подставив значение функции $\Omega_3(x)$ из формулы (39) в однородное уравнение (28), с учётом (40) получим

$$\Omega_2(x) + \int_x^c \frac{d\Omega_2(t)}{dt} = 0$$

или

$$\Omega_2(x) + \Omega_2(c) - \Omega_2(x) = 0.$$

Из равенства (39) следует, что $\Omega_3(c) = 0$.

Далее докажем, что функция

$$\Omega_4(x) = f(x) + \int_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\left(\frac{t-a}{t-c}\right) \right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{x-c}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-c}\right) \right]^{1/(b-c)} \right\}^{|A(c+0)|/(b-a)} \times$$

$$\times \exp[W_A^+(t) - W_A^+(x)] \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} \equiv M_1^+[f(x)]$$

будет частным решением неоднородного уравнения (28). Для этого представим её в виде

$$\Omega_4(x) = f(x) + \int_c^x \frac{\Omega_3(x)}{\Omega_3(t)} \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(c-t)}$$

и подставим в неоднородное интегральное уравнение (28). После некоторых преобразований получим

$$\int_c^x \frac{\Omega_2(x)}{\Omega_2(t)} \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - \int_c^x \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - \int_c^x \frac{A(\tau)f(\tau)\,d\tau}{\Omega_2(\tau)(\tau-a)(b-\tau)(\tau-c)} \times$$

$$\times \int_\tau^x \frac{\Omega_2(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = 0. \tag{41}$$

На основании соотношения (40) будем иметь равенство

$$\int_\tau^x \frac{\Omega_2(t)A(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} = \int_\tau^x \frac{d\Omega_2(t)}{dt} = \Omega_2(x) - \Omega_2(\tau),$$

подстановка которого в (41) даёт

$$\int_c^x \frac{\Omega_2(x)}{\Omega_2(t)} \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} - \int_c^x \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} -$$

$$- \int_c^x [\Omega_2(x) - \Omega_2(t)] \frac{A(t)f(t)\,dt}{\Omega_2(t)(t-a)(b-t)(t-c)} \equiv 0.$$

Следовательно, функция $\Omega_4(x)$ является частным решением неоднородного интегрального уравнения (28).

Тогда общее решение неоднородного уравнения (28) выражается формулой

$$\varphi(x) = c_2\Omega_3(x) + M_1^+(f(x)). \tag{42}$$

В случае $A(c+0) < 0$ решение вида (42) интегрального уравнения (28) существует при выполнении следующих условий:

a) $A(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и удовлетворяет неравенству

$$|A(x) - A(c+0)| \leqslant H_2|x-c|^{\varepsilon}(b-x)^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0; \tag{43}$$

b) $f(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$, $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o[(x-c)^{\gamma_5}], \quad \gamma_5 > \frac{|A(c+0)|}{(c-a)(b-c)} \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

На основе приведённых выше рассуждений справедлива

Теорема 8. *Пусть в интегральном уравнении (35) функция $A(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$ удовлетворяет условию $A(c+0) < 0$, имеет в точке $x = c$ разрыв первого рода, удовлетворяет в её правой полуокрестности условию (43). Тогда интегральное уравнение (28) всегда разрешимо в классе $C(\Gamma_2)$, а его общее решение задаётся равенством (42), где c_2 – произвольная постоянная.*

Из интегрального представления (42) следует, что при $A(c+0) > 0$ решение уравнения (28) существует при $c_2 = 0$ и выражается равенством

$$\varphi(x) = M_1^+(f(x)),$$

если выполнены условия $f(x) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x) = o[(x-c)^{\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0, \quad \text{при} \quad x \to c+0. \tag{44}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 9. *Пусть в интегральном уравнении (28) функция $A(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8, кроме условия $A(c+0) < 0$. Пусть $A(c+0) > 0$, а функция $f(x) \in$ $\in C(\overline{\Gamma_2})$ удовлетворяет условию $f(c+0) = 0$ с асимптотическим поведением (44). Тогда единственное решение интегрального уравнения (28) выражается равенством*

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_c^x \left\{ \left[\left(\frac{x-a}{x-c}\right)\left(\frac{t-c}{t-a}\right)\right]^{1/(c-a)} \left[\left(\frac{b-x}{x-c}\right)\left(\frac{t-c}{b-t}\right)\right]^{1/(b-c)} \right\}^{A(c+0)/(b-a)} \times$$

$$\times \exp[W_A^+(t) - W_A^+(x)] \frac{A(t)f(t)\,dt}{(t-a)(b-t)(t-c)} \equiv M_1^+[f(x)]. \tag{45}$$

Замечание 6. Решение вида (42) в точке $x = c+0$ обращается в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi(x) = o[(x-c)^{|A(c+0)|/((c-a)(b-c))}] \quad \text{при} \quad x \to c+0.$$

Замечание 7. Умножив обе части равенства (42) на функцию $[(x-c)^{A(c+0)/((c-a)(b-c))}]$, после перейдя к пределу при $x = c+0$, получим

$$[\varphi(x)(x-c)^{A(c+0)/((c-a)(b-c))}]_{x\to c+0} = [(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c+0)/(b-a)}c_2. \tag{46}$$

Интегральное представление (42) и свойство (46) дают возможность для интегрального уравнения (28) ставить и исследовать граничную задачу типа Коши.

Задача N_2. Требуется найти решение интегрального уравнения (28) из класса $C(\Gamma_2)$ при $A(c+0)<0$, удовлетворяющее граничному условию

$$[\varphi(x)(x-c)^{A(c+0)/((c-a)(b-c))}]_{x=c+0}=E_4, \tag{47}$$

где E_4 – заданная постоянная.

Решение задачи N_2. Пусть выполнены условия теоремы 8. Использовав интегральное представление (42), свойство (46) и условие (47), получим

$$[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{A(c+0)/(b-a)}c_2=E_4.$$

Следовательно,

$$c_2=[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{-A(c+0)/(b-a)}E_4.$$

Подставив полученное значение c_2 в интегральное представление (42), найдём решение задачи N_2 в виде

$$\varphi(x)=\Omega_2(x)[(c-a)^{1/(c-a)}(b-c)^{1/(b-c)}]^{-A(c+0)/(b-a)}E_4+M_1[f(x)]. \tag{48}$$

Теорема 10. *Пусть в интегральном уравнении (28) функции $A(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 8. Тогда задача N_2 имеет единственное решение, выражающееся равенством (48).*

Пусть в интегральном уравнении (27) выполняются условия $A(x)\in C(\overline{\Gamma})$ и $A(c-0)=A(c+0)=A(c)$, $A(c)>0$. Тогда, согласно теореме 5, решение уравнения (4) выражается формулой (33) при $x\in\Gamma_1$. Если $x\in\Gamma_2$, то решение уравнения (26) выражается равенством (45). Из приведённых выше рассуждений следует, что решение интегрального уравнения (26) при $A(c)>0$ имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}\Omega_1(x)c_1+M_1^-(f(x)) & \text{при } \ x\in\Gamma_1,\\ M_1^+(f(x)) & \text{при } \ x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{49}$$

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 11. *Пусть в интегральном уравнении (26) функции $A(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теорем 5 и 9 и условию*

$$A(c-0)=A(c+0)=A(c),\quad A(c)>0.$$

Тогда любое решение уравнения (26) из класса $C(\Gamma)$ выражается равенством (49).

В случае когда $A(c-0)=A(c+0)=A(c)$, $A(c)<0$, из теоремы 8 следует, что при $x\in\Gamma_2$ решение интегрального уравнения (28) определяется формулой $\varphi(x)=\Omega_3(x)c_2+M_1^+(f(x))$, а при $x\in\Gamma_1$ – равенством $\varphi(x)=M_1^-(f(x))$. Следовательно, при $A(c)<0$ решение интегрального уравнения (26)

$$\varphi(x)=\begin{cases}M_1^-(f(x)) & \text{при } \ x\in\Gamma_1,\\ \Omega_3(x)c_2+M_1^+(f(x)) & \text{при } \ x\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{50}$$

Теорема 12. *Пусть в интегральном уравнении (26) функции $A(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теорем 6 и 8, а также*

$$A(c-0)=A(c+0)=A(c),\quad A(c)<0.$$

Тогда любое решение интегрального уравнения (26) из класса $C(\Gamma)$ выражается равенством (50), где c_2 – произвольная постоянная.

Авторы выражают благодарность проф. И.В. Асташовой за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И.* Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. Киев, 2016.
2. *Солдатов А.П., Урбанович Т.М.* Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Науч. ведомости. Сер. Математика. Физика. 2011. № 17 (112). С. 165–171.
3. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 2018.
4. *Расолько Г.А.* Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши методом ортогональных многочленов. Ч. 1. Алгоритмы в MarhCad. Минск, 2017.
5. *Плещинский Н.Б.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. Казань, 2018.
6. *Раджабов Н.* Об одном интегральном уравнении вольтерровского типа // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 3. С. 314–317.
7. *Rajabov N., Ronto M., Rajabova L.N.* On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super-singularity // Math. Not. Miscolc. 2003. V. 4. № 1. P. 65–76.
8. *Раджабов Н., Раджабова Л.Н.* Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическим уравнением // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 1. С. 20–22.
9. *Раджабов Н.* Интегральные уравнения типов Вольтерры с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2007.
10. *Rajabov N.* Volterra Type Integral Equation with Boundary and Interior Fixed Singularity and Super-Singularity Kernels and Their Application. Dushanbe, 2010.
11. *Раджабов Н.* Переопределённая линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнения типа Вольтерры третьего рода с логарифмическими и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе, 2021.
12. *Rajabov N., Saidov S.* About new class of Volterra type integral equation with two boundary singularity in kernels // Proc. Intern. Conf. on Pure Mathematics – Applied Mathematics. March 15–17. Venice, 2014. P. 214–217.
13. *Саидов С.А.* К теории одного класса интегральных уравнений с двумя граничными сингулярными точками // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. 2017. № 8. С. 31–34.
14. *Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Саидов С. А.* Интегральные представления и граничные задачи для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерры с двумя граничными сингулярными точками // Матер. Междунар. науч.-теор. конф. “Современные задачи математики и их приложения”, посвящ. 70-летию образования Таджикского нац. ун-та, 80-летию акад. Н. Раджабова. 25–26 сентября 2018 г. Душанбе, 2018. С. 176–181.

Таджикский национальный университет

Поступила в редакцию 08.06.2023 г.
После доработки 08.06.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1260–1265

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.21+517.956.22

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ НА ТРЁХМЕРНЫХ ПРОЗРАЧНЫХ СТРУКТУРАХ

© 2023 г. А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченков

Рассмотрены дифференциальные и интегральные постановки задач акустического рассеяния на трёхмерных ограниченных прозрачных структурах, описываемых интегральным уравнением. Приведены результаты численного решения интегрального уравнения, описывающего рассматриваемый класс задач. Доказана теорема существования и единственности решения.

DOI: 10.31857/S0374064123090108, EDN: WSGPTN

Введение. Решаются задачи акустического рассеяния на трёхмерных ограниченных прозрачных структурах. Исходная дифференциальная постановка задачи сводится к объёмному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказывается теорема существования и единственности решения, в том числе для "сред без потерь". Используя метод коллокации на тетраэдальной сетке, интегральное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для решения СЛАУ применяются итерационные методы. Приводятся и анализируются численные результаты решения.

1. Интегральное уравнение. Рассмотрим следующий класс задач акустики. В ограниченной трёхмерной области Q, окружённой свободным пространством, материальная среда характеризуется индексом рефракции $n(x)$, $x \in Q$, который является кусочно-дифференцируемой функцией координат, причём вне Q индекс рефракции равен единице. Требуется определить акустическое поле в евклидовом пространстве E_3, порождаемое внешним источником $f_0(x)$ с временно́й зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, ω – частота акустического поля. В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти функцию акустического поля $U(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U(x) + k^2 n(x) U(x) = f_0(x), \quad k = \omega/c, \tag{1}$$

где c – скорость звука в свободном пространстве, и $U(x)$ должна удовлетворять условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial U}{\partial r} - ikU\right)\right] = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{2}$$

Кроме того, функция $U(x)$ на границах раздела параметров среды должна быть непрерывной.

Пусть $f(x)$ – финитная функция в E_3 относительно x. Тогда интегральное представление

$$V(x) = -\int f(y) G(R)\, dy \tag{3}$$

удовлетворяет в пространстве E_3 уравнению Гельмгольца

$$\Delta V(x) + k^2 V(x) = f(x) \tag{4}$$

и условию излучения на бесконечности вида (2). В (3) $G(R)$ – функция Грина уравнения Гельмгольца, которая в декартовой системе координат имеет вид

$$G(R) = \exp(ikR)/(4\pi R), \quad R = |x - y|, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3). \tag{5}$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$\Delta U + k^2 U = f_0 - k^2(n-1)U. \tag{6}$$

Из (1)–(6) следует, что неизвестное поле $U(x)$ имеет следующее интегральное представление:

$$U(x) = -\int f_0(y)G(R)\,dy + k^2\int\limits_Q (n(y)-1)U(y)G(R)\,dy, \quad x \in E_3. \tag{7}$$

Первый интеграл в правой части (7) описывает поле $U_0(x)$, создаваемое источником $f_0(x)$ в свободном пространстве. Далее, поскольку $n(x) = 1$ вне Q, из (7) следует уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестного поля $U(x)$ в области Q [1, с. 116]

$$U(x) - k^2\int\limits_Q (n(y)-1)U(y)G(R)\,dy = U_0(x), \quad x \in Q. \tag{8}$$

Из выражения (7), зная поле $U(x)$ в области Q, можно найти поле в любой точке пространства.

2. Теорема существования и единственности. Рассмотрим сначала дифференциальную постановку задачи. Однородное уравнение (1) запишем в виде

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U(x) + k^2 n(x)U(x) = 0. \tag{9}$$

Справедливо следующее тождество:

$$\operatorname{div}(U^*\operatorname{grad} U) = U^*\operatorname{div}\operatorname{grad} U + \operatorname{grad} U^*\cdot\operatorname{grad} U, \tag{10}$$

где символ * обозначает комплексное сопряжение, а $\cdot$ – скалярное умножение.

Проинтегрировав (10) по всему пространству и использовав формулу Грина и уравнение (9), получим равенство

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_r} U^*\frac{\partial U}{\partial r}\,dS = -k^2\int n|U|^2\,d\nu + \int |\operatorname{grad} U|^2\,d\nu, \tag{11}$$

где S_r – сфера радиуса r с центром в точке $x \in Q$.

Выбрав мнимую часть от выражения (11), с учётом условия излучения (2) будем иметь

$$k\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_r} |U|^2\,dS + k^2\int\limits_Q \operatorname{Im} n|U|^2\,d\nu = 0. \tag{12}$$

Ниже будем полагать, что $\operatorname{Im} n \geqslant 0$ в области Q, а значит, каждое слагаемое в (12) равно нулю. Тогда в сферической системе координат

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |U|^2 r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0. \tag{13}$$

Обозначим через Ω_R шар радиусом R, содержащий область Q, причём граничные точки Q находятся вне поверхности шара. Вне области Ω_R поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta U(x) + k^2 U(x) = 0 \tag{14}$$

и условию излучения (2). Общее решение задачи (14), (2) описывается рядом собственных функций уравнения Гельмгольца, которые представляются в виде произведения функций Ганкеля, зависящих от $r \geqslant R$, и ортогональных сферических функций (см. [2, с. 375]). При больших значениях r функции Ганкеля пропорциональны, с точностью членов большего порядка малости, $\exp(ikr)/r$. Поэтому из (13), учитывая ортогональность сферических функций на сфере, получаем, что коэффициенты ряда по собственным функциям уравнения Гельмгольца (14) равны нулю. Значит, акустическое поле для задачи (14), (2) в области $E_3 \setminus \Omega_R$ равно нулю.

Уравнение (14) является эллиптическим в области $E_3 \setminus Q$, и все коэффициенты уравнения являются дифференцируемыми функциями. Тогда можно воспользоваться принципом продолжения решения по непрерывности [3, с. 291] из области $E_3 \setminus \Omega_R$ в область $\Omega_R \setminus Q$. Поэтому, поскольку поле равно нулю и в области $E_3 \setminus \Omega_R$, оно равно нулю в области $E_3 \setminus Q$. Если $\operatorname{Im} n(x) > 0$ в Q, то из (12) следует, что в области Q, а значит и во всем пространстве, поле равно нулю.

Далее, пусть $n(x)$ является всюду дифференцируемой функцией, в том числе на границе Q. Тогда аналогично изложенному выше получим, что поле тождественно равно нулю во всем пространстве.

Рассмотрим следующий случай. Пусть $n(x)$ – дифференцируемая функция координат в области Q, а на границе функция терпит скачок. В области Q находится сколь угодно малая область Q_1, в которой $\operatorname{Im} n(x) > 0$, а в области $Q \setminus Q_1$ $\operatorname{Im} n(x) = 0$. Из равенства (12) следует, что поле равно нулю в области Q_1. Используя принцип продолжения решения по непрерывности из области Q_1 в область $Q \setminus Q_1$, получаем, что во всей области Q поле равно нулю.

Любое решение однородного уравнения (8) из гильбертова пространства интегрируемых с квадратом функций удовлетворяет однородной задаче (1), (2). Следовательно, однородное интегральное уравнение (8) будет иметь только нулевое решение в пространстве $L_2(Q)$, если однородная дифференциальная задача (1), (2) имеет только нулевое решение. Поскольку оператор уравнения (8) является фредгольмовым, то решение уравнения (8) существует, если оно единственно. Если правая часть уравнения (8) выражается через (7), то решение интегрального уравнения будет являться решением исходной задачи (1), (2). Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть в ограниченной области Q определена функция индекса рефракции $n(x)$, а вне Q $n(x) = 1$. Тогда решение интегрального уравнения (8) существует и единственно в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, если выполняется одно из следующих условий:*

1) $\operatorname{Im} n(x) > 0$ *в области* Q;

2) $n(x)$ *является дифференцируемой функцией координат в* Q, *а на границе* Q *терпит разрыв; в области* Q *находится сколь угодно малая область* Q_1, *в которой* $\operatorname{Im} n(x) > 0$, *а в области* $Q \setminus Q_1$ $\operatorname{Im} n(x) = 0$;

3) $n(x)$ *является всюду, в том числе и на границе* Q, *дифференцируемой функцией координат и* $\operatorname{Im} n(x) = 0$ *в области* Q.

Если правая часть (8) представима через функцию источника $f_0(x)$, то решение уравнения (8) будет являться единственным решением задачи (1), (2).

3. Метод решения. Для аппроксимации интегрального уравнения (8) будем использовать метод коллокации на неравномерной сетке. Представим область Q в виде объединения N_Q ячеек Ω_n, $n = \overline{1, N_Q}$. Узловые точки в этих ячейках будем выбирать в их центрах $x^{cn} = (x_1^{cn}, x_2^{cn}, x_3^{cn})$, $n = \overline{1, N_Q}$, которые определяются формулами

$$x_i^c = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega} \int\limits_{\Omega} x_i \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\operatorname{mes}\Omega$ – объём ячейки Ω_n. Если в качестве ячеек рассматриваются тетраэдры произвольной формы, то можно достаточно точно описать многие сложные конфигурации области Q и среды. Центр тетраэдра определяется простой формулой $x_i^{cn} = (x_i^{(1)n} + x_i^{(2)n} + x_i^{(3)n} + x_i^{(4)n})/4$, $i = 1, 2, 3$, в которой $(x_1^{(k)n}, x_2^{(k)n}, x_3^{(k)n})$ – декартовы координаты k-й вершины тетраэдра.

Будем аппроксимировать интегральное уравнение (8) системой линейных алгебраических уравнений размерности N_Q относительно значений неизвестного поля в узловых точках области Q, находящихся в центрах ячеек Ω_n [4]:

$$u_n + \sum_{m=1}^{N_Q} A(n,m)\eta_m u_m = u_n^0, \quad n = \overline{1, N_Q}, \quad A(n,m) = k^2 \int\limits_{\Omega_m} \frac{\exp(ik|x^{cn} - y|)}{4\pi|x^{cn} - y|}\,dy,$$

$$u_n = U(x^{cn}), \quad u_n^0 = U_0(x^{cn}), \quad \eta_n = n(x^{cn}) - 1. \tag{15}$$

Отметим, что поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегральных операторов порядка h^2, где h – максимальный диаметр ячеек (*диаметром* называем максимальное расстояние между точками границы). В работе [5] доказано, что при сгущении сетки в методе коллокации, т.е. при увеличении числа ячеек N_Q, приближённые решения на основе СЛАУ стремятся к точному решению интегрального уравнения.

Опишем основные проблемы, которые возникают при численном решении СЛАУ (15). В силу трёхмерности уравнения (8) после дискретизации возникают СЛАУ большой размерности $N \gg 1000$. Очевидно, что использование прямых методов практически невозможно, поскольку в памяти компьютера необходимо хранить $M \sim N^2$ чисел, а для решения СЛАУ нужно выполнить $T \sim N^3$ арифметических операций. Поэтому возможно использование только итерационных методов. В этом случае параметры M и T оцениваются формулами

$$M \sim M_A, \quad T \sim LT_A. \tag{16}$$

В (16) M_A – количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор; L – количество итераций для получения решения с заданной точностью; T_A – число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор. Для плотных матриц произвольного вида $M_A \sim N^2$, $T_A \sim N^2$.

В настоящей работе для численного решения СЛАУ (15) будем использовать двухшаговый метод градиентного спуска [6]:

$$z_1 = z_0 - \frac{\|H^* r_0\|^2}{\|HH^* r_0\|^2} H^* r_0, \quad r_0 = Hz_0 - f,$$

$$z_{k+1} = z_k - t_k(z_k - z_{k-1}) - h_k H^* r_k, \quad r_k = Hz_k - f, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$t_k \|r_k - r_{k-1}\|^2 + h_k \|H^* r_k\|^2 = 0,$$

$$t_k \|H^* r_k\|^2 + h_k \|HH^* r_k\|^2 = \|H^* r_k\|^2,$$

где H – комплексная матрица системы уравнений $Hz = f$, а символ * обозначает сопряжённую матрицу, т.е. транспонированную матрицу с комплексно-сопряжёнными элементами. Отметим, что, в отличии от других итерационных методов, приведённый метод сходится только при одном условии – если матрица СЛАУ невырожденная.

Помимо двухшагового метода градиентного спуска для численного решения СЛАУ (15), также рассматриваются итерационные методы бисопряжённых градиентов [7] и минимальных невязок [8, с. 130].

4. Численные результаты. Проведём численное моделирование на области Q, которая задана кубом с центром в точке $x_Q^c = (0,0,0)$ и длиной стороны $L_Q = 2.4$, коэффициент рефракции области $n_Q(x) = 2$. Внутри куба находится сфера S единичного радиуса $R_S = 1$ с центром в точке $(0,0,0)$, коэффициент рефракции сферы $n_S(x) = 3$. Триангуляционную сетку для поставленной задачи построим в системе построения сеток gmsh: количество разбиений $N_Q \approx 10\,000$, максимальный диаметр разбиения $h = 0.430$.

Внешний источник излучения задан амплитудой колебаний $A = 1$, вектором направления $d = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, а также волновым числом k, который будет варьироваться в ходе сравнения.

Решать задачу будем с помощью двухшагового метода градиентного спуска (MSGD), стабилизированного метода бисопряжённых градиентов (BICGStab) и метода минимальных невязок (MRES). Критерий остановки метода будем определять исходя из относительной разности приближений на соседних шагах метода:

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{\|f\|} < \varepsilon. \tag{17}$$

Таким образом, при достижении заданной точности изменения приближаемого вектора итерационный метод окончательно определит приближённое численное решение u_l исходной задачи.

В таблице представлены результаты работы итерационных методов на задаче (15). Варьируя значения волнового числа k при фиксированном $\varepsilon = 10^{-7}$, для каждого итерационного метода определены число mv умножений матрицы на вектор m для достижения цели сходимости и конечная норма невязки

$$\|r_L\| = \|Au_L - f\|$$

на последнем шаге L.

Видно, что при увеличении k решения на основе итерационных методов расходятся по конечной норме невязки и числу итераций, а норма невязки $\|r_L\|$ на последнем шаге для каждого метода при адекватных значениях волнового числа в методах различается не сильно. По точности сходимости на конкретной задаче лучшим является двухшаговый метод градиентного спуска. При достижении $k \geqslant 4$ решение в заданных условиях становится нестабильным и количество итераций для методов достигает максимального заранее заданного значения. При переходе через критическое значение волнового числа для данной задачи сравнение методов не является репрезентативным.

Таблица. Сравнительная таблица методов MSGD, BICGStab, MRES при различных значениях k и $\varepsilon = 10^{-7}$, $N_Q = 10\,000$

k	MSGD		BICGStab		MRES	
	mv	$\|r_L\|$	mv	$\|r_L\|$	mv	$\|r_L\|$
0.1	12	3.75E-08	7	1.67E-13	8	1.13E-07
0.5	21	3.23E-06	9	1.13E-08	18	9.75E-06
1	42	8.28E-06	17	1.40E-06	82	0.000107
2	201	0.001906	87	4.02E-06	2000	0.028508
3	276	0.000209	255	4.83E-05	68	19.9611
4	2226	0.022816	2001	1.070618	70	12.56881
5	3003	0.006033	2001	45.78722	112	10.29263
6	3003	0.035198	2001	106.9764	80	7.641037
7	3003	0.055716	2001	0.814367	110	6.08206
8	3003	0.071086	2001	0.437052	108	4.956859

На рис. 1 показана динамика (17) на итерациях при $k = 2$.

Для каждого итерационного метода конечный результат распределения значений $U(x^{cn})$ в области Q в центрах разбиений x^{cn} на основе трёхмерного графика разброса визуально представлен на рис. 2. Значения функции в точке центра каждого тетраэдра соответствуют значению на цветовой шкале напряжённости. Трёхмерная визуализация потенциального поля $U(x)$ в области Q при значениях $k = 2$ справедлива для всех рассматриваемых итерационных методов с точностью до значения конечной нормы невязки на последней итерации.

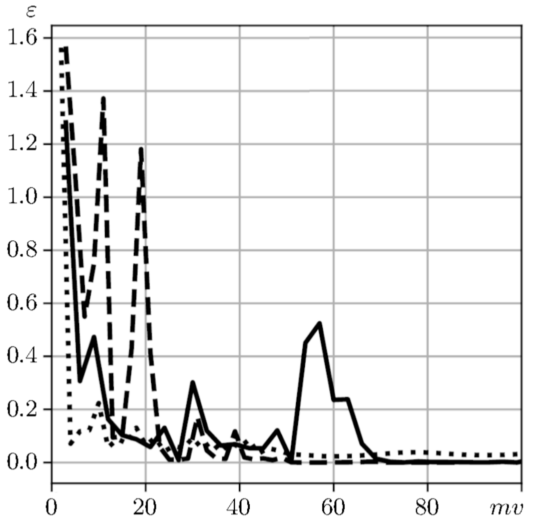

Рис. 1. Сравнение по относительной норме разницы приближения итерационных методов BICGStab (штриховая линия), MRES ($m = 1$) (пунктирная) и MSGD (сплошная).

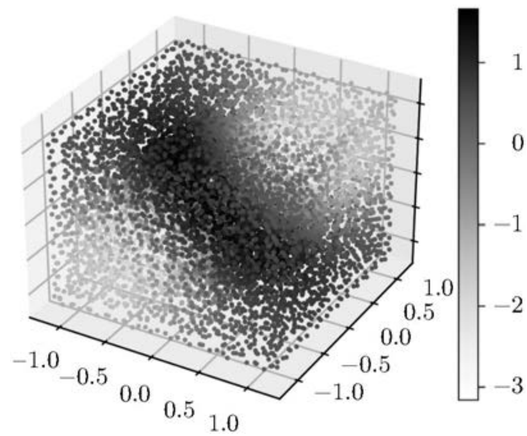

Рис. 2. Распределение значений приближённого решения для неизвестной функции $U(x)$ в центрах тетраэдров Ω_n.

Заключение. В статье рассмотрено объёмное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, описывающее задачи акустического рассеяния на ограниченных прозрачных структурах. При выполнении ряда условий доказана теорема существования и единственности решений рассматриваемых задач. Описан численный метод решения интегрального уравнения на основе метода коллокации и итерационных методов. Приведены результаты численного решения конкретных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1990.
2. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
3. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных уравнений с частичными производными. М., 1986.
4. *Самохин А.Б.* Методы и эффективные алгоритмы решения многомерных интегральных уравнений // Russ. Technological J. 2022. V. 10. № 6. P. 70–77.
5. *Vainikko G.* Multidimensional Weakly Singular Integral Equations. Heidelberg, 1993.
6. *Самохин А.Б., Самохина А.С., Скляр А.С., Шестопалов Ю.В.* Итерационные методы градиентного спуска для решения линейных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 8. С. 1331–1339.
7. *Henk A., van der Vorst.* Iterative Krylov Methods for Large Linear System. Cambridge, 2003.
8. *Самохин А.Б.* Объёмные сингулярные интегральные уравнения электродинамики М., 2021.

МИРЭА – Российский технологический университет,
г. Москва,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.
После доработки 29.03.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1266–1282

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.5

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВЕСА ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ЧАСТОТЕ КОЛЕБАНИЙ

© 2023 г. М. О. Арабян

Рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Ищется осесимметричная форма оболочки, которая минимизирует вес при заданной основной частоте колебаний оболочки. С помощью полученной формулы для линейной части приращения частотного функционала оценивается кратность минимальной собственной частоты колебаний оболочки. Устанавливается также дифференцируемость по Фреше частотного функционала и получаются условия оптимальности минимизации веса оболочки при заданной основной частоте колебаний.

DOI: 10.31857/S037406412309011X, EDN: WPFGKJ

Введение. Проблемы оптимизации конструкции в последнее время привлекают большое внимание, их решению посвящено значительное число работ. Существенное развитие теория оптимального проектирования получила в связи с исследованиями задачи отыскания форм сжатого стержня (колонны), обладающего минимальным весом и выдерживающего без потери устойчивости заданную нагрузку. Эта задача была поставлена Ж. Лагранжем [1].

Выбор функционалов, рассмотренных при оптимальном проектировании, является частью постановок задач оптимизации. На этот выбор влияют многие обстоятельства: основное назначение конструкции, условия эксплуатации, свойства модели.

Вес – одна из основных характеристик конструкции, и поэтому в большинстве работ по оптимальному проектированию этот функционал либо рассматривается в качестве оптимизируемого критерия качества, либо фигурирует среди других принимаемых ограничений.

Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения ω_0 (ω_0 – минимальное из собственных значений) при заданном весе конструкции и задачи минимизации веса при ограничении $\omega_0 \geqslant \mu$, где μ – заданное число. Заметим, что в отличие от динамических задач оптимального проектирования, в которых ставятся ограничения не только на фундаментальную частоту, но и на высшие частоты, учёт в задачах оптимального проектирования ограничений по устойчивости основан на рассмотрении только минимальных собственных значений.

В данной работе рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Наша цель – определить форму осесимметричной оболочки, которая имеет минимальный общий вес для заданной основной частоты пологой оболочки.

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая задачей на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, некоторые из них неинтегрируемы вблизи нуля. Для решения этой проблемы в статье [2] были введены специальные весовые пространства, затем были установлены теоремы вложения и свойства функций весовых пространств, а также существование решений краевой задачи и задачи на собственные значения.

В настоящей работе изучена дифференцируемость по Фреше частотного функционала и получены необходимые условия в оптимизационной задаче, поэтому сначала определена кратность собственного значения. В дальнейшем, получив липшицеву непрерывность задачи на собственные значения и формулу градиента частотного функционала, методом Лагранжа найдены необходимые условия оптимальности.

В таких задачах оптимального управления кратность собственного значения не определяется, а рассматривается только как гипотеза [3–5]. Отметим также, что подобные задачи изучаются в работах [6–17].

1. Основные обозначения и постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимизации из теории тонких оболочек в полярных координатах. При определённых предположениях поперечные колебания оболочки вращения описываются системой двух дифференциальных уравнений [18–20].

Обозначим $W = W(r)$, $\varphi = \varphi(r)$. Переменная $r \in [0, b]$ указывает текущий радиус; $W(r)$ – амплитуда перемещения точек серединной поверхности в осевом направлении; $\varphi(r)$ – функция напряжения, характеризующая тангенциальное перемещение.

Строгая постановка задачи: найти все пары (λ, u), где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u = (W, \varphi)$, такие, что

$$(Lu)_1 \equiv (rDW'')'' + \left(\left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'\right)' + (f'\varphi)' = \lambda rh\rho W, \tag{1}$$

$$(Lu)_2 \equiv (ar\varphi')' - \left(\frac{a}{r} + \nu a'\right)\varphi - f'W' = 0. \tag{2}$$

Здесь величина $f(r)$ определяет форму серединной поверхности оболочки вращения; $\rho(r) > 0$ – удельный вес материала оболочки; $h(r)$ – заданная толщина оболочки, удовлетворяющая условию

$$0 < h_0 \leqslant h(r) \leqslant h_1. \tag{3}$$

Наконец, $D(r)$ – жёсткость на изгиб, $D(r) \geqslant D_0 > 0$, определяемая как

$$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad a(r) = \frac{1}{Eh(r)}, \tag{4}$$

где $E > 0$ – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $-1 < \nu < 0.5$.

Задача на собственные значения представляет собой систему двух уравнений (1) и (2), дополненную следующими граничными условиями:

$$W'|_{r=0} = \left((rDW'')' + \left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)\frac{W'}{r}\right)\bigg|_{r=0} = 0, \tag{5}$$

$$W|_{r=b} = W'|_{r=b} = 0, \tag{6}$$

$$a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=0} = a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=b} = 0, \tag{7}$$

где $b > 0$ – константа.

Обозначим через $\lambda_1 = w^2(f')$ минимальное собственное значение задачи (1)–(7), где $w(f')$ – минимальная частота колебаний оболочки. Отметим, что граничные условия (5)–(7) взяты для случая закреплённого края при $r = b$. Далее для шарнирно-опертого края условия (6) имеют вид

$$W|_{r=b} = -D\left(W'' + \nu\frac{W'}{r}\right)\bigg|_{r=b} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, у нас есть две задачи на собственные значения: (1)–(7) и (1)–(5), (7), (8). Мы исследуем первую, вторая задача рассматривается аналогично.

Рассмотрим стандартную задачу минимизации веса оболочки

$$J(f') = \int\limits_0^b 2\pi rh\rho\sqrt{1 + (f'(r))^2}\, dr \to \inf \tag{9}$$

при условии

$$\lambda_1(f') = \omega^2(f') = \omega_0^2. \tag{10}$$

Пусть $p(r) = f'(r)$ – фиксированный элемент управления. Чтобы изучить проблему собственных значений, нам нужно в первую очередь изучить краевую задачу

$$(Lu)_1 = s_1, \tag{11}$$

$$(Lu)_2 = s_2 \tag{12}$$

с граничными условиями (5)–(7).

Первый вопрос, который возникает при изучении задачи (1)–(7), (9), (10), как решить задачу (1)–(7) для фиксированного управления $p(r)$. На самом деле некоторые коэффициенты системы не интегрируемы на отрезке $[0,b]$, поэтому в п. 2 вводятся конкретные весовые пространства (см. [2]).

2. Весовые пространства, обобщённое решение и некоторые вспомогательные результаты. Введём весовые гильбертовы пространства $\widetilde{H}^1[0,b]$, $\widetilde{H}^2[0,b]$ со следующими, соответственно, скалярными произведениями:

$$\langle u,v\rangle_{\widetilde{H}^1} = \int\limits_0^b \left(ru'v' + \frac{uv}{r} \right) dr, \quad \langle u,v\rangle_{\widetilde{H}^2} = \int\limits_0^b \left(ru''v'' + \frac{u'v'}{r} + uv \right) dr,$$

где $u,v,u',v',u'',v'' \in L_{1,\mathrm{loc}}(0,b)$. Соответствующие нормы определяются как обычно.

Приведём следующий результат о теореме вложений.

Теорема 1 [2]. *Любая функция* $u\in \widetilde{H}^1[0,b]$ *может быть отождествлена с непрерывной на отрезке* $[0,b]$ *функцией и любая функция* $v\in\widetilde{H}^2[0,b]$ *с непрерывно дифференцируемой на* $[0,b]$ *функцией, удовлетворяющими следующим оценкам и условиям:*

$$\max_{[0,b]}|u| \leqslant c_1\|u\|_{\widetilde{H}^1[0,b]}, \quad u(0)=0, \quad \max_{[0,b]}(|v'|+|v|) \leqslant c_2\|v\|_{\widetilde{H}^2[0,b]}, \quad v'(0)=0. \tag{13}$$

Теперь мы можем приступить к исследованию задачи на собственные значения (1)–(7). Пусть V – следующее линейное подпространство пространства $\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2$:

$$V = \{v : v=(v_1,v_2)\in \widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2, \ \ v_2(b)=v_2'(b)=0\}.$$

Тип механических граничных условий, включённых в определение V, заключается в том, что оболочка зажата по всей границе.

На пространстве $V\times V$ рассмотрим билинейную форму

$$B(u,v) = \int\limits_0^b \left[rDu_2''v_2'' + (D-\nu D'r)\frac{u_2'v_2'}{r} - pu_1v_2' + aru_1'v_1' + (a+\nu a'r)\frac{u_1v_1}{r} + pu_2'v_1 \right] dr - a\nu u_1v_1|_0^b,$$

порождённую дифференциальным оператором и граничными условиями задачи (5)–(7).

В дальнейшем нам понадобится следующее

Определение. Для любой $s=(s_1,s_2)$, $s_1,s_2\in L_2[0,b]$, функцию $u\in V$ назовём *обобщённым решением* задачи (5)–(7), (11), (12), если выполняется соотношение

$$B(u,v) = \langle s_1,v_2\rangle_{L_2} + \langle s_2,v_1\rangle_{L_2}, \quad v=(v_1,v_2)\in V. \tag{14}$$

Как показано в [2, теорема 5], билинейная форма $B(u,v)$ положительно определена и ограничена, если два из указанных ниже условий 1)–3) выполнены:

1) $D(r), D(r)-\nu D'(r)r$, $a'(r)\in L_\infty[0,b]$, $p\in L_1[0,b]$;
2) $D(r)\geqslant D_0>0$, $D(r)-\nu D'(r)r\geqslant D_{10}>0$, $a(r)\geqslant a_0>0$;
3) $t(r)=h(r)\rho(r)\in L_\infty[0,b]$, $t(r)\geqslant t_0$.

Далее представим результат о существовании и единственности решения краевой задачи (14).

Теорема 2 [2]. *Предположим, что два из указанных выше условий 1)–3) выполнены. Тогда для любой* $s=(s_1,s_2)^{\mathrm{т}}$, $s_1,s_2\in L_2[0,b]$, *задача (14) имеет единственное решение* $u\in V$.

Кроме того, для решения u *справедлива оценка*

$$\|u\|_V \leqslant c_1(\|s_1\|_{L_2}^2 + \|s_2\|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Возьмём любую функцию $\psi \in L_2[0,b]$. Тогда условие

$$B(u,v) = \langle \sqrt{rt}\,\psi, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V,$$

получаемое из (14) для $s = (\sqrt{rt}\,\psi, 0)^{\mathrm{т}}$, определяет функцию $u \in V$. Таким образом определён оператор $G : \psi \in L_2[0,b] \to u = G\psi \in V$ и верна оценка

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2} = \|G\psi\|_{\widetilde{H}^1\times\widetilde{H}^2} \leqslant c_1\|\sqrt{rt}\,\psi\|_{L_2}. \tag{15}$$

Далее показано, что оператор $F_1\psi = \sqrt{rt}\,(G\psi)_2$, отображающий $L_2[0,b]$ на $L_2[0,b]$, компактный и самосопряжённый [2].

Легко видеть, что если μ является собственным числом оператора F_1, а ψ – соответствующая собственная функция, т.е. $F_1\psi = \mu\psi$, то $\lambda = 1/\mu$ и $u = G\psi$ – собственное значение и собственная функция, соответственно, задачи

$$B(u,v) = \lambda\langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{16}$$

Действительно,

$$B(u,v) = B(G\psi,v) = \langle \sqrt{rt}\,\psi, v_2\rangle_{L_2} = \frac{1}{\mu}\langle rt(G\psi)_2, v_2\rangle_{L_2} = \lambda\langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V.$$

Таким же образом можно доказать, что если λ – собственное число, а u – соответствующая собственная функция задачи (16), то $\mu = 1/\lambda$ и $\psi = \sqrt{rt}\,u_2$ являются собственным числом и собственной функцией оператора F_1 соответственно.

Как показано в работе [2, теорема 6], если выполняются все условия 1)–3), то:

а) существует последовательность положительных собственных значений λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $\ldots$ задачи (16) с $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$;

б) каждому собственному значению λ_k соответствует только конечное число линейных независимых собственных функций из пространства V.

3. О некоторых свойствах решений задачи на собственные значения. Теперь изучим некоторые свойства решений следующей задачи:

$$B(u,v;p) = \lambda\langle rtu_2, v_2\rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{17}$$

Для нашего исследования важна следующая лемма. Она будет использована для получения однократности минимального собственного значения $\lambda_1(p)$.

Лемма 1. *Допустим, что функции $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p(r), \delta p(r) \in L_1[0,b]$. Далее пусть $u(p)$, $\widetilde{u}(p)$ – две линейно независимые собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$ задачи (17). Тогда верно следующее равенство:*

$$(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - \widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r = 0, \quad r \in (0,b). \tag{18}$$

Доказательство. Из соотношения (17) при $v = (v_1, 0)^{\mathrm{т}}$ имеем

$$\int\limits_0^b \left[aru_1'v_1' + (a+\nu a'r)\frac{u_1v_1}{r} + pu_2'v_1\right]dr - a\nu u_1v_1|_0^b = 0, \quad v \in V. \tag{19}$$

Теперь докажем, что п.в. на $(0,b)$ выполняется соотношение

$$(pu_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - p\widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r = 0. \tag{20}$$

Пусть $\overline{r}$ – произвольная точка из интервала $(0,b)$.

Шаг 1. Начнём со случая, когда $\widetilde{u}_1(p)|_{\overline{r}} = 0, u_1(p)|_{\overline{r}} = 0$. Рассмотрим следующие функции:

$$x = \begin{cases} \widetilde{u}_1(p)|_r, & r \in [0, \overline{r}], \\ 0, & r \in (\overline{r}, b], \end{cases} \qquad y = \begin{cases} u_1(p)|_r, & r \in [0, \overline{r}], \\ 0, & r \in (\overline{r}, b]. \end{cases}$$

Заметим, что эти функции непрерывные, так как $u_1(p)$ и $\widetilde{u}_1(p)$ непрерывные.

Теперь вычтем соотношение (19) при $u = \widetilde{u}(p)$, $v_1 = y$ из того же соотношения с $u = u(p)$, $v_1 = x$ и получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}} [pu_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - p\widetilde{u}_2'(p)u_1(p)]\,dr = 0, \quad \overline{r} \in (0, b]. \tag{21}$$

Соотношение (20) доказано в [21, с. 331].

Шаг 2. Теперь рассмотрим общий случай. Без ограничения общности можно считать, что одна из функций $u_1(p)$, $\widetilde{u}_1(p)$ обращается в нуль при $\overline{r}$, т.е. $\widetilde{u}_1(p)|_{\overline{r}} = 0$, $u_1(p)|_{\overline{r}} \neq 0$. Действительно, для этого мы можем заменить $\widetilde{u}(p)$ нетривиальной линейной комбинацией $c_1\widetilde{u}(p) + c_2u(p)$. Проделаем указанную выше операцию с функцией y, заменив её на функцию

$$z = \begin{cases} u_1(p)|_r, & r \in [0, \overline{r}], \\ u_1(p)|_{\overline{r}}(\overline{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\overline{r}, \overline{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\overline{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}} [pu_2'(p)\widetilde{u}_1(p) - p\widetilde{u}_2'(p)u_1(p)]\,dr -$$

$$- \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} \left[-\frac{ar}{\delta}\widetilde{u}_1'(p)u_1(p)\Big|_{\overline{r}} + (a + \nu a'r)\frac{\overline{r} + \delta - r}{\delta}\frac{\widetilde{u}_1(p)}{r}u_1(p)\Big|_{\overline{r}} + p\widetilde{u}_2'(p)\frac{\overline{r} + \delta - r}{\delta}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}\right] dr = 0.$$

Оценим в этом соотношении три слагаемых второго интеграла, начиная со второго и третьего.

Ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем, что

$$\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} (a + \nu a'r)\frac{\overline{r} + \delta - r}{\delta}\frac{\widetilde{u}_1(p)}{r}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}\,dr \to 0, \quad \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} p\widetilde{u}_2'(p)\frac{\overline{r} + \delta - r}{\delta}u_1(p)\Big|_{\overline{r}}\,dr \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Действительно, подынтегральные выражения здесь интегрируемы по Лебегу, поскольку $0 \leqslant (\overline{r} + \delta - r)/\delta \leqslant 1$ для любого $r \in (\overline{r}, \overline{r} + \delta)$, $\overline{r} > 0$, а остальные функции непрерывны.

Далее оценим первое слагаемое во втором интеграле данного соотношения. С учётом неравенства Коши–Буняковского имеем, что

$$I(p, \overline{r}, \delta) := \left|\frac{1}{\delta}\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} ar\widetilde{u}_1'(p)u_1(p)|_{\overline{r}}\,dr\right| = \left|\frac{1}{\delta}(z|_{\overline{r}} - z|_{\overline{r}+\delta})\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} ar\widetilde{u}_1'(p)\,dr\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} (z')^2\,dr\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+\delta} (ar\widetilde{u}_1'(p))^2\,dr\right)^{1/2}.$$

Отсюда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, заключаем, что $I(p,\overline{r},\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, мы снова получили соотношение (21), а это означает, что равенство (20) доказано.

Далее докажем соотношение (18). Предположим противное, т.е. что для некоторой точки $r_0 \in (0,b)$ имеем $(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p)-\widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_{r_0} \neq 0$. Поскольку функция непрерывна, существует интервал $(r_0-\alpha, r_0+\alpha)$ такой, что

$$(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p)-\widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r \neq 0, \quad r \in (r_0-\alpha, r_0+\alpha). \tag{22}$$

Отсюда и из (20) получаем, что п.в.

$$p(r) = 0, \quad r \in (r_0-\alpha, r_0). \tag{23}$$

Далее, заменив v на z в (19) и устремив δ к нулю, имеем

$$\int\limits_0^{\overline{r}} \left[ar(u_1'(p))^2 + (a+\nu a'r)\frac{(u_1(p))^2}{r} + pu_2'(p)u_1(p)\right] dr = 0, \quad \overline{r} \in (0,b]. \tag{24}$$

Но тогда, вычитая соотношение (24) при $\overline{r} = r_0-\alpha$ из того же самого соотношения при $\overline{r} = r_0$, находим

$$\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \left(ar(u_1'(p))^2 + (a+\nu a'r)\frac{(u_1(p))^2}{r}\right) dr = -\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} pu_2'(p)u_1(p)\, dr. \tag{25}$$

Теперь проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \nu a'(u_1(p))^2\, dr = \nu a(u_1)^2|_{r_0-\alpha}^{r_0} - 2\int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \nu a u_1'(p)u_1(p)\, dr.$$

Далее без ограничения общности можно считать, что $u_1(p)|_{r_0-\alpha} = 0$. Тогда с учётом соотношений (23), (25) и $a(r) \geqslant a_0 \geqslant 0$ получаем, что

$$(1-\nu)a_0 \int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} \left(r(u_1'(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r}\right) dr \leqslant \int\limits_{r_0-\alpha}^{r_0} pu_2'(p)u_1(p)\, dr = 0. \tag{26}$$

Отсюда имеем

$$u_1(p)|_r = 0, \quad r \in (r_0-\alpha, r_0). \tag{27}$$

Таким же образом можно доказать, что $\widetilde{u}_1(p)|_r = 0$ для любого $r \in (r_0-\alpha, r_0)$.

Но тогда с учётом равенства (27) $(u_2'(p)\widetilde{u}_1(p)-\widetilde{u}_2'(p)u_1(p))|_r = 0$ для любого $r \in (r_0-\alpha, r_0)$, что противоречит (22).

Следовательно, соотношение (18) доказано. Лемма доказана.

Теперь докажем следующие две леммы и следствие.

Имеем, что $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$ удовлетворяет соотношению (17). Далее пусть $r_i \in [0,b)$, $i \in \mathbb{N}$, – нули функции $u_1(p)$. Так как $u(p) \in V$, то $u_1(p)|_{r=0} = 0$, а это означает, что $r_1 = 0$. Обозначим $b = r_{N+1}$.

Лемма 2. *Пусть $u(p)$ – собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_1(p)$ задачи (17). Пусть для некоторых $i \in \mathbb{N}$ выполняется условие*

$$u_1(p)|_r \neq 0, \quad r \in (r_i, r_{i+1}).$$

Тогда для этих же i имеем

$$u_2'(p)|_r \neq 0, \quad r \in (r_i, r_{i+1}). \tag{28}$$

Доказательство. Докажем от противного. Допустим, что соотношение (28) не выполняется. Тогда существует число $\widetilde{r}\in(r_1,r_2)$ такое, что $u_2'(p)|_{\widetilde{r}}=0.$

Далее аналогично (26) можно доказать, что верно неравенство

$$(1-\nu)a_0\int\limits_{\widetilde{r}-\delta}^{\widetilde{r}+\delta}\left(r(u_1'(p))^2+\frac{(u_1(p))^2}{r}\right)dr\leqslant-\int\limits_{\widetilde{r}-\delta}^{\widetilde{r}+\delta}pu_2'(p)u_1(p)\,dr.$$

Разделив это соотношение на 2δ и устремив δ к нулю, получим

$$(1-\nu)a_0\frac{(u_1(p))^2|_{\widetilde{r}}}{\widetilde{r}}\leqslant\frac{a(u_1(p))^2|_{\widetilde{r}}}{\widetilde{r}}\leqslant-pu_2'(p)u_1(p)|_{\widetilde{r}}=0.$$

Отсюда имеем $u_1(p)|_{\widetilde{r}}=0,$ что противоречит нашему предположению. Таким образом, соотношение (28) справедливо. Лемма доказана.

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия леммы 2. Тогда существуют одновременно не равные нулю константы* $d_i,$ $i\in\mathbb{N},$ *такие, что справедливы соотношения*

$$p\widetilde{u}_2'(p)|_r=d_ipu_2'(p)|_r,\quad \widetilde{u}_1(p)|_r=d_iu_1(p)|_r,\quad r\in[r_i,r_{i+1}].$$

Доказательство. Рассмотрим случай $i=1.$ Допустим, что $u_1(p)|_r\neq0$ для любого $r\in$ $\in(r_1,r_2).$ На основании леммы 2 также получаем, что $u_2'(p)|_r\neq0$ для любого $r\in(r_1,r_2).$ Далее из равенства (18) имеем

$$\left.\frac{\widetilde{u}_2'(p)}{u_2'(p)}\right|_r=\left.\frac{\widetilde{u}_1(p)}{u_1(p)}\right|_r=:d_1|_r,\quad r\in(r_1,r_2). \tag{29}$$

Заменив u и v_1 в (19) на $\widetilde{u}(p)$ и v_2^0 соответственно, где

$$v_2^0=\begin{cases}0, & r\in(r_1,r_2),\\ d_1u_1(p)|_r, & r\notin(r_1,r_2),\end{cases}$$

с учётом (29) получим

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\left[ar(d_1u_1(p))'^2+(a+\nu a'r)\frac{(d_1u_1(p))^2}{r}+d_1^2pu_2'(p)u_1(p)\right]dr=0. \tag{30}$$

Теперь в соотношении (19) заменим v_2 на $v_2^1,$ где

$$v_2^1=\begin{cases}0, & r\in[r_1,r_2],\\ d_1^2u_1(p)|_r, & r\notin[r_1,r_2],\end{cases}$$

и вычтем полученное равенство из соотношения (30). В результате будем иметь

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}ar(d_1'u_1(p))^2\,dr=0.$$

Поскольку $u_1(p)\neq0$ при $r\in(r_1,r_2),$ заключаем, что $(d_1)'=0$ для $r\in(r_1,r_2).$ Отсюда $d_1(r)\equiv d_1$ для $r\in(r_1,r_2].$ Аналогично можно доказать, что $d_2(r)\equiv d_2$ для любого $r\in$ $\in(r_2,r_3].$

Таким образом, для любого $r\in(r_i,r_{i+1}),$ $i=1,2,$ выполняются следующие соотношения:

$$\widetilde{u}_2'(p)|_r=d_iu_2'(p)|_r,\quad \widetilde{u}_1p|_r=d_iu_1(p)|_r. \tag{31}$$

Теперь докажем это для $r = r_i$, $i = 1,2$. В силу непрерывности функций $u_1(p)$, $u_2'(p)$ верно следующее:

$$\widetilde{u}_1(p)\bigg|_{r_i} = \lim_{r\to r_i} \frac{\widetilde{u}_1(p)}{u_1(p)}\bigg|_r \lim_{r\to r_i} u_1(p))\bigg|_r = d_i u_1(p)|_{r_i}, \tag{32}$$

$$\widetilde{u}_2'(p)\bigg|_{r_i} = \lim_{r\to r_i} \frac{\widetilde{u}_2'(p)}{u_2'(p)}\bigg|_r \lim_{r\to r_i} u_2'(p)\bigg|_r = d_i u_2'(p)|_{r_i}. \tag{33}$$

Из соотношений (31)–(33) получаем, что при $i = 1,2$ верны равенства

$$\widetilde{u}_2'(p)|_r = d_i u_2'(p)|_r, \quad \widetilde{u}_1(p)|_r = d_i u_1(p)|_r$$

для любого $r \in (r_i, r_{i+1}]$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $u(p)$, $\widetilde{u}(p)$ – функции из формулировки леммы 1. Тогда существуют константы c_1, c_2 такие, что $|c_1| + |c_2| \neq 0$ и*

$$\hat{u}_1(p)|_{r_i} = 0, \quad \hat{u}_2(p)|_{r_i} = 0, \quad \hat{u}_2'(p)|_{r_i} = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$\hat{u}(p) = c_1 u(p) + c_2 \widetilde{u}(p)$. *Кроме того, число нулей N функции $u_1(p)$ на отрезке $[0,b]$ не превосходит кратности m собственного значения $\lambda_1(p)$, т.е. $N \leqslant m$.*

Доказательство. Из соотношения (17) при $v = (0, v_2)^{\mathrm{т}}$ имеем

$$\int\limits_0^b \left[rDu_2''v_2'' + (D - \nu D'r)\frac{u_2'v_2'}{r} - pu_1v_2' \right] dr = \lambda_1(p) \int\limits_0^b rtu_2v_2\,dr, \quad v \in V. \tag{34}$$

Пусть $\overline{r}$ – любая точка из интервала $(0,b)$. Построим функцию

$$\overline{z} = \begin{cases} u_2(p)|_r, & r \in [0,\overline{r}], \\ [(2(r-\overline{r})/\delta + 1)u_2(p)|_{\overline{r}} + (r-\overline{r})u_2'(p)|_{\overline{r}}]((\overline{r}+\delta-r)/\delta)^2, & r \in (\overline{r}, \overline{r}+\delta], \\ 0, & r \in (\overline{r}+\delta, b]. \end{cases}$$

Заметим, что она непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,b]$ и $\overline{z}|_b = \overline{z}'|_b = 0$.

Далее в соотношении (34) заменим v на $\overline{z}$ и u на $u(p)$. Устремив δ к нулю в полученном соотношении, получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}} \left[rD(u_2''(p))^2 + (D - \nu D'r)\frac{(u_2'(p))^2}{r} - pu_2'(p)u_1(p) \right] dr = \lambda_1(p) \int\limits_0^{\overline{r}} rt(u_2(p))^2\,dr, \quad \overline{r} \in (0,b].$$

Теперь зафиксируем произвольное $i = i_0 \in \mathbb{N}$. Можно найти константы c_1, c_2 такие, что $|c_1| + |c_2| \neq 0$ и $\hat{u}_2(p)|_{r_{i_0}} = (c_1u_2(p) + c_2\widetilde{u}_2(p))|_{r_{i_0}} = 0$. У нас также $\hat{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = c_1u_1(p)|_{r_{i_0}} + c_2\widetilde{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = 0$.

Далее, вычитая соотношение (34) при $\overline{r} = r_{i_0} - \delta$ из того же самого соотношения при $\overline{r} = r_{i_0} + \delta$ и заменяя $u(p)$ на $\hat{u}(p)$, получаем

$$\int\limits_{r_{i_0}-\delta}^{r_{i_0}+\delta} \left[rD(\hat{u}_2''(p))^2 + (D - \nu D'r)\frac{(\hat{u}_2'(p))^2}{r} - p\hat{u}_1(p)\hat{u}_2'(p) \right] dr = \lambda_1(p) \int\limits_{r_{i_0}-\delta}^{r_{i_0}+\delta} rt(\hat{u}_2(p))^2\,dr.$$

Разделив это равенство на 2δ и устремив δ к нулю, будем иметь

$$r_{i_0}D(\hat{u}_2''(p))^2|_{r_{i_0}} + D_{10}\frac{(\hat{u}_2'(p))^2|_{r_{i_0}}}{r_{i_0}} = p\hat{u}_1(p)\hat{u}_2'(p)|_{r_{i_0}} + \lambda_1(p)(\hat{u}_2(p))^2|_{r_{i_0}}. \tag{35}$$

Отсюда в силу $\hat{u}_1(p)|_{r_{i_0}} = \hat{u}_2(p)|_{r_{i_0}} = 0$ заключаем, что $\hat{u}_2'(p)|_{r_{i_0}} = 0$. Таким образом, имеем $\hat{u}_1(p)|_{r_i} = \hat{u}_2(p)|_{r_i} = \hat{u}_2'(p)|_{r_i} = 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $N \leqslant m$. Сделаем это для $m = 2$. Докажем от противного, предположив, что $N = 3$. Тогда можно построить три собственные функции $u^i(p)$, $i = 1, 2, 3$, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$:

$$u^i(p) = \begin{cases} \hat{u}(p), & r \in (r_i, r_{i+1}), \\ 0, & r \notin (r_i, r_{i+1}), \end{cases}$$

причём по доказанному выше функции $u_1^i(p)$, $i = 1, 2, 3$, непрерывны, а функции $u_2^i(p)$, $i = 1, 2, 3$, непрерывно дифференцируемы. А это противоречит нашему предположению. Отсюда заключаем, что $N \leqslant 2$.

В общем случае таким же образом можно доказать, что число нулей функции $u_1(p)$ не превосходит кратности $\lambda_1(p)$, т.е. m. Следствие доказано.

4. Некоторые известные и вспомогательные результаты. Теперь изучим дифференциальные свойства функционала $\lambda_1(p)$ – минимального собственного значения задачи

$$B(u, v; p) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V.$$

Далее нам понадобятся следующие две леммы из статьи [22].

Лемма 4. *Пусть $\mu = \mu(p)$ – собственное число оператора $F_1(p)$ кратности m, а Γ – окружность с центром в точке μ, причём окружность принадлежит множеству регулярных точек и не содержит других точек спектра оператора $F_1(p)$.*

Для каждого $0 < \|\delta p\|_{L_2} \leqslant 1$ пусть $\mu_1(p + \delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p + \delta p)$, $\ldots$ представляет собой последовательность собственных значений оператора $F_1(p + \delta p)$. Тогда существует такое число $h_0 > 0$, что для каждого $0 < \|\delta p\|_{L_2} \leqslant h_0$ определены операторы

$$E(\mu(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_z(F_1(p))\, dz, \quad E(\mu(p + \delta p)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_z(F_1(p + \delta p))\, dz, \tag{36}$$

где $R_z(F_1) = (F_1 - zE)^{-1}$ – проекторы. Областью значений $E(\mu(p))$ и $R(E(\mu(p)))$ является пространство собственных функций $F_1(p)$, соответствующих числу $\mu(p)$, а $R(E(\mu(p+\delta p)))$ есть прямая сумма пространств собственных функций оператора $F_1(p+\delta p)$, соответствующих собственным значениям $\mu_1(p + \delta p)$, $\mu_2(p + \delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p + \delta p)$. Более того,

$$\dim R(E(\mu(p))) = \dim R(E(\mu(p + \delta p))) = m.$$

В дальнейшем мы будем использовать непрерывную зависимость оператора $G(p)$ от $p(r)$. Пусть $G(p)$ – оператор G, а $G(\psi; p)$ – это $G\psi$, соответствующий управлению $p(r)$, т.е.

$$B(G(\psi; p), v; p) = \langle \sqrt{rt}\, \psi, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{37}$$

Ниже приведён результат из работы [23], показывающий, что при определённых условиях на коэффициенты имеем липшицеву непрерывность операторов $G(p)$, $F_1(p)$.

Лемма 5. *Пусть $\mu_1(p+\delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p+\delta p)$ такие же, как в лемме 4. Тогда существуют положительные константы M_2 и h_0 такие, что для любых $\|\delta p\|_{L_2} \leqslant h_0$ выполняются следующие условия:*

1) у оператора $F_1(p + \delta p)$ имеются ровно m собственных значений $\mu_1(p + \delta p)$, $\ldots$, $\mu_m(p + \delta p)$, лежащих внутри круга $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_1(p)| = h_0\}$;

2) для любого базиса $\{\varphi_i(p)\}_{i=1}^m$ из $R(E(\mu(p)))$ существует базис $\{\chi_i(p + \delta p)\}_{i=1}^m$ из области $R(E(\mu(p + \delta p)))$ такой, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|\varphi_j(p) - \chi_j(p + \delta p)\|_{L_2} \leqslant M_2 \|E(\mu(p)) - E(\mu(p + \delta p))\|_{L_2}.$$

Как показано в [23, лемма 6.1], справедливо следующее неравенство:

$$\|[E(\mu(p)) - E(\mu(p+\delta p))]\psi\|_{L_2} \leqslant M\|F_1(p) - F_1(p+\delta p)\|_{L_2,L_2}\|\psi\|_{L_2}.$$

Из леммы 5 следует, что кратность n собственного значения $\mu_1(p+\delta p)$ не превосходит кратности $\mu_1(p)$, т.е. m.

Лемма 6. *Допустим, что функции $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3). Пусть $\delta p(r) \in S = \{p : p \in L_1[0,b]\}$. Тогда существуют такие положительные константы M_1, M_2, что для любых δp выполняется следующее неравенство:*

$$\|G(\psi; p+\delta p) - G(\psi; p)\|_{\widetilde{H}^2\times\widetilde{H}^1} \leqslant M_1\|\delta p\|_{L_1}\|\psi\|_{L_1}.$$

Таким образом, получаем

$$\|G(p+\delta p) - G(p)\|_{L_2,\widetilde{H}^2\times\widetilde{H}^1} \leqslant M_1\|\delta p\|_{L_1} \tag{38}$$

и

$$\|F_1(p+\delta p) - F_1(p)\|_{L_2,L_2} \leqslant M_1\|\sqrt{rt}\|_{L_\infty}\|\delta p\|_{L_1} = M_2\|\delta p\|_{L_2}.$$

Отметим, что в [23] мы доказываем липшицеву непрерывность решений задачи на собственные значения (17).

Следующая теорема имеет решающее значение для нашего исследования. Ею будем пользоваться для обоснования дифференцируемости по Фреше функционала $\lambda_1(p)$ и его градиентной формулы.

Теорема 3. *Допустим, что функции $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p \in L_2[0,b]$. Пусть $\lambda_1(p)$ – минимальное собственное значение задачи (17), а S_1 является подпространством собственных функций, соответствующих собственному значению $\lambda_1(p)$. Тогда $\dim S_1 = 1$.*

Доказательство. От противного предположим, что $\dim S_1 = 2$, а $u(p)$ и $\widetilde{u}(p)$ – две линейно независимые собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$ задачи (17). Рассмотрим функцию $p_0(r) \in C^1[0,b]$ такую, что

$$p_0(r) > 0, \quad r \in (0,b]. \tag{39}$$

Далее пусть $w(p_0) = (w_1(p_0), w_2(p_0))$ – собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_1(p_0)$ задачи (17) при p_0. Докажем, что $w_1(p_0)|_r$ тождественно не равняется нулю. От противного предположим, что $w_1(p_0)|_r \equiv 0$. Тогда из соотношения (20) с $u = w(p_0)$ и $p = p_0$ имеем

$$\int\limits_0^b p_0 w_2'(p_0) v_1\,dr = 0, \quad v \in V.$$

Поскольку $p_0 w_2'(p_0) \in \widetilde{H}^1$, то, подставив $v_1 = p_0 w_2'(p_0)$, получаем $p_0 w_2'(p_0) \equiv 0$. А это с учётом условия (39) равносильно следующему: $w_2'(p_0) \equiv 0$.

Но тогда в силу краевого условия $w_2(p_0)|_b = 0$ заключаем, что $w_2(p_0) \equiv 0$. Таким образом, $w(p_0) = (w_1(p_0), w_2(p_0)) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает, что $w_2(p_0)$ тождественно не равняется нулю.

Построим собственную функцию

$$z(p) := (\widetilde{u}(p) - d_1 u(p))/(d_2 - d_1).$$

Согласно лемме 3 она имеет следующий вид:

$$z(p) = \begin{cases} 0, & r \in [r_1, r_2], \\ u(p), & r \in [r_2, r_3]. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $u(p)|_r \neq 0$ для любого $r \in (r_2, r_3)$. В противном случае существовала бы точка $\overline{r} \in (r_2, r_3)$ такая, что $u(p_0)|_{\overline{r}} = 0$. Но тогда можно построить три собственные функции $u(p)$, $\widetilde{z}(p)$, $\overline{z}(p)$, соответствующие собственному значению $\lambda_1(p)$, где

$$\widetilde{z}(p) = \begin{cases} u(p), & r \in [r_2, \overline{r}], \\ 0, & r \notin [r_2, \overline{r}], \end{cases} \quad \overline{z}(p) = \begin{cases} u(p), & r \in [\overline{r}, r_3], \\ 0, & r \notin [\overline{r}, r_3], \end{cases}$$

а это противоречит нашему предположению.

Далее, в силу непрерывности функции $w_1(p_0)$ существуют числа $\delta > 0$ и $r_1 + \delta < r_2$ такие, что

$$w_1(p_0)|_r \neq 0, \quad r \in (r_2, r_2 + \delta). \tag{40}$$

Аналогично равенству (20) можно доказать, что п.в. на $(0, b)$ выполняется соотношение

$$[p_0 w_2'(p_0) u_1(p) - p u_2'(p) w_1(p_0)]|_r = 0.$$

Тогда с учётом (40) получим

$$\left.\frac{p_0 w_2'(p_0)}{w_1(p_0)}\right|_r = \left.\frac{p u_2'(p)}{u_1(p)}\right|_r, \quad r \in (r_2, r_2 + \delta).$$

Обозначив $p_0 w_2'(p_0)/w_1(p_0)|_r =: c|_r$, отсюда имеем

$$p u_2'(p)|_r = c u_1(p)|_r, \quad r \in [r_2, r_2 + \delta). \tag{41}$$

Далее, вычитая соотношение (24) при $\overline{r} = r_2$ из того же соотношения при $\overline{r} = r_2 + \delta$, с учётом (41) получаем равенство

$$\int_{r_2}^{r_2+\delta} \left[a r (u_1(p))'^2 + (a + \nu a' r) \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr = -\int_{r_2}^{r_2+\delta} c (u_1(p))^2 \, dr.$$

Интегрируя его по частям, имеем

$$\int_{r_2}^{r_2+\delta} \left[a r (u_1'(p))^2 + a \frac{(u_1(p))^2}{r} - 2 a \nu u_1'(p) u_1(p) \right] dr + \nu a (u_1(p))^2 |_{r_2}^{r_2+\delta} = -\int_{r_2}^{r_2+\delta} c (u_1(p))^2 \, dr. \tag{42}$$

Оценим правую часть этого соотношения. Так как

$$u_1(p)|_r = \int_{r_2}^{r} u_1'(p)|_\xi \, d\xi,$$

то заключаем, что

$$(u_1(p))^2|_r \leqslant \frac{\delta}{r_2} \int_{r_2}^{r_2+\delta} r (u_1'(p))^2|_r \, dr$$

для любого $r \in [r_2, r_2 + \delta]$.

Но тогда в силу непрерывности функции $c|_r$, равенства (42) и условий $a(r) \geqslant a_0$, $\nu \leqslant 1$ получим

$$\int_{r_2}^{r_2+\delta} \left[r u_1'(p)^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr \leqslant M \delta^2 \int_{r_2}^{r_2+\delta} r (u_1'(p))^2 \, dr, \tag{43}$$

где
$$M = \frac{M_1}{(1-\nu)a_0 r_2}, \quad M_1 = \max_{[r_2, r_2+\delta]} |c|.$$

Выберем δ_0 такое, что $M\delta_0^2 < 1/2$. Тогда из (43) следует неравенство
$$\int\limits_{r_2}^{r_2+\delta} \left[r(u_1'(p))^2 + \frac{(u_1(p))^2}{r} \right] dr \leqslant 0.$$

Отсюда заключаем, что $u_1(p)|_r \equiv 0$ для любого $r \in [r_2, r_2+\delta_0]$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

5. Дифференцируемость по Фреше частотного функционала. Теперь мы можем сформулировать и доказать дифференцируемость по Фреше функционала $\lambda_1(p)$.

Теорема 4. *Пусть $\lambda_1(p)$ – минимальное собственное значение задачи (17). Тогда его производная по Фреше существует в гильбертовом пространстве $L_2[0,b]$ и равна*
$$\frac{d\lambda_1(p)}{dp} = \frac{-2u_2'(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p)\rangle_{L_2}},$$
где $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$ – любая ненулевая функция из подпространства S_1 (см. формулировку теоремы 3).

Доказательство. С учётом свойств собственных значений компактных самосопряжённых операторов и в силу однократности $\mu_1(p)$ [21, с. 248] получаем
$$\mu_1(p) = \max_{\substack{\psi\neq 0\\ \psi\in L_2}} \frac{\langle F_1(p)\psi, \psi\rangle_{L_2}}{\langle \psi, \psi\rangle_{L_2}} = \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}},$$
где $\varphi(p)$ – единственная собственная функция, соответствующая собственному числу $\mu_1(p)$.

Следовательно, учитывая это соотношение, имеем
$$\mu_1(p+\delta p) - \mu_1(p) =$$
$$= \max_{\substack{\psi\neq 0\\ \psi\in L_2}} \frac{\langle F_1(p+\delta p)\psi, \psi\rangle_{L_2}}{\langle \psi, \psi\rangle_{L_2}} - \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \geqslant \frac{\langle (F_1(p+\delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \tag{44}$$
для всех δp, для которых $\|\delta p\|_{L_1} < +\infty$. Подставим $v = (0, v_2)^{\text{т}}$ и $v = (-v_1, 0)^{\text{т}}$ в (37). Сложив полученные равенства, получим
$$K(G\psi, v; p) = (\sqrt{rt}\,\psi, v_2)_{L_2}, \quad v \in V, \tag{45}$$
где
$$K(u,v;p) = \int\limits_0^b \left[rDu_2''v_2'' + (D - \nu D'r)\frac{u_2'v_2'}{r} - pu_1v_2' - \right.$$
$$\left. - aru_1'v_1' - (a + \nu a'r)\frac{u_1v_1}{r} - pu_2'v_1 \right] dr + a\nu u_1v_1|_0^b, \quad u, v \in V,$$
является симметричной билинейной формой. Далее имеем
$$K((G(p+\delta p) - G(p))\varphi(p), v; p) = K(G(p+\delta p)\varphi(p), v; p) - K(G(p+\delta p)\varphi(p), v; p+\delta p) =$$
$$= \delta p[(G(p+\delta p)\varphi(p))_1 v_2' + (G(p+\delta p)\varphi(p))_2' v_1]\,dr, \quad v \in V.$$

Отсюда и из соотношения (45) при $v = G(p)\varphi(p)$ находим

$$\int_0^b \delta p[(G(p+\delta p)\varphi(p))_1(G(p)\varphi(p))_2' + (G(p+\delta p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1]\,dr =$$

$$= \langle (F_1(p+\delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}. \tag{46}$$

Тогда, преобразовав левую часть равенства (46) с помощью оценок (13), (15) и (38) для всех δp, $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$, получим

$$\langle (F_1(p+\delta p) - F_1(p))\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2} \geqslant 2\int_0^b \delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr - M_3\|\delta p\|_{L_1}^2\|\varphi(p)\|_{L_2}^2, \tag{47}$$

где $M_3 = 2M_1c_1c_2c_3\|\sqrt{rt}\|_{L_\infty}$.

Наша следующая цель – получить верхнюю оценку, аналогичную (47). В связи с этим для всех δp, $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$, имеем

$$\mu_1(p+\delta p) - \mu_1(p) = \frac{\langle F_1(p+\delta p)\psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}}{\langle \psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}} - \frac{\langle F_1(p)\varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\langle \psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}}\int_0^b \delta p (G(p)\psi(p+\delta p))_2'(G(p)\psi(p+\delta p))_1\,dr + M_3\|\delta p\|_{L_1}^2, \tag{48}$$

где $\psi(p+\delta p)$ – единственная собственная функция оператора $F_1(p+\delta p)$, соответствующая собственному числу $\mu_1(p+\delta p)$.

Напомним, что согласно лемме 5 (см. п. 2) при $m = 1$ для собственной функции $\varphi(p)$ оператора $F_1(p)$ существует собственная функция $\psi(p+\delta p)$ оператора $F_1(p+\delta p)$ такая, что

$$\|\varphi(p) - \psi(p+\delta p)\|_{L_2} \leqslant M_2\|F_1(p+\delta p) - F_1(p)\|_{L_2,L_2}$$

для всех $\delta p \in L_2[0,b]$, $\|\delta p\|_{L_2} \leqslant h_1$. Далее с помощью этой оценки и соотношения (48) при $\psi = \psi(p+\delta p) - \varphi(p)$ имеем

$$\frac{2}{\langle \psi(p+\delta p), \psi(p+\delta p)\rangle_{L_2}}\int_0^b \delta p (G(p)\psi(p+\delta p))_2'(G(p)\psi(p+\delta p))_1\,dr -$$

$$- \frac{2}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}\int_0^b \delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr \leqslant M_4\|\delta p\|_{L_1}^2$$

для любого δp, $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$, где $M_4 = 2MM_2M_1c_1^2c_2c_3\|(rt)^{3/2}\|_{L_\infty}$.

Следовательно, с учётом соотношений (44), (47) и (48) получаем неравенства

$$\frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}\int_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr - M_3\|\delta p\|_{L_1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mu_1(p+\delta p) - \mu_1(p) \leqslant \frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p)\rangle_{L_2}}\int_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))_2'(G(p)\varphi(p))_1\,dr + (M_3+M_4)\|\delta p\|_{L_1}^2$$

для всех δp, для которых $\|\delta p\|_{L_1} < h_1$.

Как непосредственное следствие этого, запишем представление

$$\left\langle \frac{d\mu_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = \frac{1}{\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b 2\delta p (G(p)\varphi(p))_2' (G(p)\varphi(p))_1 \, dr. \tag{49}$$

Далее с помощью соотношения

$$\left\langle \frac{d\lambda_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = -\frac{1}{(\mu_1(p))^2} \left\langle \frac{d\mu_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2}$$

с учётом (49) получим формулу градиента функционала $\lambda_1(p)$ в гильбертовом пространстве $L_2[0,b]$:

$$\left\langle \frac{d\lambda_1(p)}{dp}, \delta p \right\rangle_{L_2} = -\frac{2}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}} \int_0^b \delta p u_2'(p) u_1(p) \, dr.$$

Это завершает доказательство теоремы.

6. Условия оптимальности. Приведём условия оптимальности для задачи оптимизации (1)–(7), (9), (10). Рассмотрим следующую оптимальную задачу с переменной p в банаховом пространстве $X = L_2[0,b]$:

$$\mathcal{B}_0(p(\cdot)) = J(p) = \int_0^b 2\pi rt\sqrt{1+p^2} \, dr \to \inf, \tag{50}$$

$$F(p(\cdot)) = \lambda_1(p) = \omega^2(f') = \omega_0^2, \tag{51}$$

где ω_0^2 является фиксированным числом, а $\lambda_1(p)$ – минимальное собственное значение следующей задачи:

$$B(u,v;p) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2}, \quad v \in V. \tag{52}$$

Построим функцию Лагранжа для задачи (50)–(52):

$$\mathcal{L}(p(\cdot), \alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 J(p) + \alpha_1 F(p).$$

Справедлива следующая

Теорема 5. *Предположим, что функции $D(r)$, $a(r)$, $t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p_*(r)$ является точкой локального минимума в задаче (50)–(52). Пусть $\lambda_1(p_*)$ – минимальное собственное значение задачи (52), а $u(p_*)$ – соответствующая собственная функция. Тогда существует константа α такая, что*

$$\frac{\pi rtp_*}{\sqrt{1+p_*^2}} - \alpha \frac{u_2'(p_*) u_1(p_*)}{\langle rtu_2(p_*), u_2(p_*) \rangle_{L_2}} = 0.$$

Доказательство. Ранее мы установили, что функционал $F(p)$ имеет градиент

$$F'(p) = -\frac{2u_2'(p) u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}}, \quad p \in L_2[0,b].$$

Нетрудно установить, что функционал $\mathcal{B}_0(p)$ тоже имеет градиент

$$\mathcal{B}_0'(p) = \frac{2\pi rtp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad p \in L_2[0,b].$$

Докажем, что образ $\operatorname{Im} F'(p)$ является замкнутым множеством, более того,

$$\operatorname{Im} F'(p_*)X = \mathbb{R}.$$

Возможны два случая:
(i) $u_2'(p_*)u_1(p_*) \equiv 0$ для любого $r \in [0, b]$;
(ii) существует точка $c \in (0, b]$ такая, что

$$\int\limits_0^c 2u_2'(p_*)u_1(p_*)\,dr \neq 0.$$

В случае (i) докажем, что $u(p_*) \equiv 0$. Действительно, из соотношения (19) с $p = p_*$, $u = u(p_*)$ получим равенство

$$\int\limits_0^b \left[aru_1'(p_*)v_1' + (a + \nu a'r)\frac{u_1(p_*)v_1}{r} + p_*u_2'(p_*)v_1\right] dr - a\nu u_1(p_*)v_1|_0^b = 0, \quad v \in V. \tag{53}$$

Далее подставим в (53) $v_1 = u_1(p_*)$. Используя соотношение (i) и положительную определённость билинейной формы $B(u, v)$, получаем $u_1(p_*) \equiv 0$. Теперь из соотношения (53) имеем

$$\int\limits_0^b p_*u_2'(p_*)v_1\,dr = 0, \quad v \in V. \tag{54}$$

Пусть $\overline{r} \in (0, b)$ – произвольная точка. Возьмём любую функцию $z = (z_1, z_2) \in \widetilde{H}^1 \times \widetilde{H}^2$ и построим функцию

$$v_1 = \begin{cases} z_1|_r, & r \in [0, \overline{r}], \\ z_1|_{\overline{r}}(\overline{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\overline{r}, \overline{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\overline{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

Подставив её в (54), разделив полученное соотношение на 2δ и устремив δ к нулю, получим $\int_0^{\overline{r}} p_*u_2'(p_*)z_1\,dr = 0$. Отсюда при $z_1 = u_2'(p_*) \in \widetilde{H}^1$ получим $\int_0^{\overline{r}} p_*(u_2'(p_*))^2\,dr = 0$ для любого $\overline{r} \in (0, b)$. Но тогда п.в. на $[0, b]$ будем иметь $p_*u_2'(p_*)|_r = 0$. Поскольку $p_*(r)$ тождественно не равняется нулю, то существует точка $\widetilde{r} \in (0, b)$ такая, что

$$u_2'(p_*)|_{\widetilde{r}} = 0. \tag{55}$$

Далее в силу того, что $u(p_*) \in V$, запишем равенство

$$\int\limits_0^b u_2''(p_*)v_2\,dr = -\int\limits_0^b u_2'(p_*)v_2'\,dr, \quad v_2 \in H^1.$$

Теперь выполним указанную выше операцию с заменой v_1 на функцию

$$v_2 = \begin{cases} u_2(p_*)|_r, & r \in [0, \overline{r}], \\ u_2(p_*)|_{\overline{r}}(\overline{r} + \delta - r)/\delta, & r \in (\overline{r}, \overline{r} + \delta], \\ 0, & r \in (\overline{r} + \delta, b]. \end{cases}$$

В результате получим

$$\int\limits_0^{\overline{r}} u_2''(p_*)u_2(p_*)\,dr = -\int\limits_0^{\overline{r}} (u_2'(p_*))^2\,dr, \quad \overline{r} \in [0, b].$$

Это равносильно следующему: $u_2''(p_*)u_2(p_*)|_{\overline{r}} = (u_2'(p_*))^2|_{\overline{r}}$ для любого $\overline{r} \in (0,b)$. Отсюда и в силу (55) заключаем, что

$$u_2''(p_*)u(p_*)|_{\widetilde{r}} = (u_2'(p_*))^2|_{\widetilde{r}} = 0.$$

Тогда в силу соотношения (35) при $r_{i_0} = \widetilde{r}$, $\hat{u}(p_*) = u(p)$ имеют место равенства

$$u_2(p_*)|_{\widetilde{r}} = u_2'(p_*)|_{\widetilde{r}} = 0.$$

Но это невозможно, иначе можно построить две собственные функции

$$u^1(p_*) = \begin{cases} u(p_*)|_r, & r \in (0,\widetilde{r}),\\ 0, & r \notin (0,\widetilde{r}),\end{cases} \quad u^2(p_*) = \begin{cases} 0, & r \in (0,\widetilde{r}),\\ u(p_*), & r \notin (0,\widetilde{r}),\end{cases}$$

соответствующие собственному значению $\lambda_1(p_*)$, а это противоречит однократности $\lambda_1(p_*)$, полученной нами в теореме 3.

Теперь докажем, что во втором случае следующее уравнение

$$\int\limits_0^b \frac{-2u_1'(p_*)u_2(p_*)}{\langle rtu_1(p_*), u_1(p_*)\rangle_{L_2}}\, x\, dr = q \tag{56}$$

имеет решение $x = x(r)$ для любого $q \in \mathbb{R}$.

Действительно, легко проверить, что

$$x(r) = \begin{cases} q\Bigg(\int\limits_0^c \dfrac{-2u_1'(p_*)u_2(p_*)|_\tau}{\langle rtu_1(p_*), u_1(p_*)\rangle_{L_2}}\, d\tau\Bigg)^{-1}, & 0 \leqslant r \leqslant c,\\ 0, & c < r \leqslant b.\end{cases}$$

Следовательно, согласно (56) имеем

$$\operatorname{Im} F'(p_*)X = \mathbb{R}.$$

Получили, что образ $\operatorname{Im} F'(p_*)$ совпадает с $\mathbb{R}$. Тем самым выполнено условие регулярности отображения F. Отсюда вытекает, что $\alpha_0 = 1$.

С учётом правила множителей Лагранжа [24] доказательство теоремы завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagrange J.L.* Sur la figure des colonnes // Miscellanea Taurinensia. 1770–1773. V. 5.
2. *Arabyan M.H.* Boundary-value problems and associated eigen-value problems for systems describing vibrations of a rotation shell // New York J. of Math. 2019. V. 25. P. 1350–1367.
3. *Plaut R.H., Johnson L.W., Parbery R.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 1. Maximum fundamental frequency // ASME J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 526–530.
4. *Plaut R.H., Johnson L.W.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 2. Maximum buckling load // ASME J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 531–535.
5. *Plaut R.H., Johnson L.W.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 3. Maximum enclosed volume // ASME J. of Appl. Mech. 1984. V. 51. № 3. P. 536–539.
6. *Abdulla U.G., Cosgrove E., Goldfarb J.* On the Frechet differentiability in optimal control of coeffients in parabolic free boundary problems // Evolution Equat. and Control Theory. 2017. V. 6. № 3. P. 319–344.
7. *Bucur D., Buttazzo G.* Variational Methods in Shape Optimization Problems. Boston, 2005.
8. *He Y., Guo B.Z.* The existence of optimal solution for a shape optimization problem on starlike domain // J. Optim. Theory and Appl. 2012. V. 152. P. 21–30.
9. *Hinton E., Sienz J., Ozakca M.* Analysis and Optimization of Shells of Revolution and Prismatic Shells. London, 2003.

10. *Krivoshapko S.* Optimal shells of revolution and main optimization // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 201–209.
11. *Lellep J., Hein H.* Optimization of clamped plastic shallow shells subjected to initial impulsive loading // Eng. Optim. 2002. V. 34. № 5. P. 545–556.
12. *Neittaanmaki P., Sprekels J., Tiba D.* Optimization of Elliptic Systems. New York, 2006.
13. *Olhoff N., Plaut R.H.* Bimodal optimization of vibrating shallow arches // Int. J. of Solids and Struct. 1983. V. 19. № 6. P. 553–570.
14. *Stupishin L.Yu., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E.* Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation // J. of Appl. Eng. Sci. 2017. V. 15. № 3. P. 345–349.
15. *Velichkov B.* Existence and Regularity Results for Some Shape Optimization Problems. Springer, 2015.
16. *Wang G., Wang L., Yang D.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Control Optim. 2006. V. 45. № 2. P. 532–547.
17. *Ozakca M., Gogus M.T.* Structural analysis and optimization of bells using finite elements // J. New Music Res. 2004. V. 33. № 1. P. 61–69.
18. *Григолюк Э.И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Изв. АН СССР. Отдел техн. наук. 1955. № 3. С. 33–68.
19. *Timoshenko S., Woinorowsky-Krieger. S.* Theory of Plates and Shells. New York, 1959.
20. *Timoshenko S.* Strength of Materials. Part 2. Advanced Theory and Problems. New York, 1976.
21. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
22. *Bramble J.H., Osborn J.E.* Rate of convergence estimates for nonselfadjoint approximations // Math. Comput. 1973. V. 27. P. 525–549.
23. *Arabyan M.H.* On the existence of solutions of two optimization problems // J. of Optim. Theory and Appl. 2018. V. 177. P. 291–315.
24. *Алекееев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.

Ереванский государственный университет,
Армения

Поступила в редакцию 26.01.2023 г.
После доработки 01.08.2023 г.
Принята к публикации 21.08.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 9, с. 1283–1296

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.922+517.911.5

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Е. С. Жуковский, И. Д. Серова

Рассматривается дифференциальное включение $F(t,x,\dot{x}) \ni 0$ с ограничением на производную искомой функции $\dot{x}(t) \in B(t)$, $t \in [a,b]$, где F, B – многозначные отображения, $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ суперпозиционно измеримо, $B : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо. В терминах свойств упорядоченного накрывания и монотонности многозначных отображений, действующих в конечномерных пространствах, для задачи Коши получены условия существования и оценки решений, условия существования решения с наименьшей производной. На основе этих результатов исследуется управляемая система вида $f(t,x,\dot{x},u) = 0$, $\dot{x}(t) \in B(t)$, $u(t) \in U(t,x,\dot{x})$, $t \in [a,b]$.

DOI: 10.31857/S0374064123090121, EDN: WPGAZA

Введение. В статье рассматривается управляемая система не разрешённых относительно производной (неявных) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Многие классические методы исследования "явных" управляемых систем, в частности, использующие редукцию к дифференциальному включению и после аппарат многозначного анализа (подробнее см. [1, 2]), к таким "неявным" системам непосредственно применить не удаётся. Кроме того, порождающие уравнения функции в данной статье не предполагаются непрерывными, и тем более гладкими (это вполне естественно для задач управления), что не позволяет использовать для исследования рассматриваемых управляемых систем известные результаты (см. [3–5]) теории неявных дифференциальных уравнений, порождаемых гладкими функциями.

Наше исследование основано на представленных в п. 1 статьи результатах о многозначных накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств. Понятие упорядоченного накрывания отображений (однозначных и многозначных) введено в работах [6, 7]. Оно было предложено в качестве аналога известного для метрических пространств свойства накрывания (называемого также метрической регулярностью [8]), эффективно используемого в исследованиях различных вопросов теории неявных дифференциальных уравнений (см., например, [9–11]). В статьях [12, 13] получены утверждения о точках совпадения двух отображений, одно из которых является упорядоченно накрывающим, а другое – изотонным, а также установлена связь данных утверждений с теоремами А.В. Арутюнова [14, 15] о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств. В [16–18] сформулированы утверждения об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, и на основе этих утверждений найдены условия существования и оценки решений интегральных уравнений и краевых задач для неявных дифференциальных уравнений, аналогичные известным теоремам Чаплыгина о дифференциальном и интегральном неравенствах. В работах [19, 20] ослаблены условия теорем об анитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, и эти результаты применены к неявным дифференциальным уравнениям высших порядков. В [21] получена теорема об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающих многозначных отображений, с использованием которой исследованы вопросы существования решений задачи Коши для дифференциального включения неявного вида.

Здесь мы продолжаем исследование [21], уточняем условия разрешимости рассмотренного в [21] включения и определяем условия существования решения с наименьшей производной, затем применяем эти результаты к управляемой системе неявных нелинейных дифференциальных уравнений. Основными результатами настоящей работы являются условия существования и оценки решений таких систем, представленные в виде аналогов теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

1. Многозначные отображения частично упорядоченных пространств. Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X,\preceq)$, $(Y,\preceq)$. Для элементов $u,v\in X$ и множества $U\subset X$ обозначим

$$[v,u]_X \stackrel{\text{def}}{=} \{x\in X: v\preceq x\preceq u\},\quad \mathcal{O}_X(u)\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in X: x\preceq u\},\quad \mathcal{O}_X(U)\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{\forall u\in U}\mathcal{O}_X(u).$$

Для элементов $u,v\in X$ таких, что $u\preceq v$ и $u\neq v$, будем писать $u\prec v$. Элементы $u,v\in\in X$, $u\neq v$, называются *сравнимыми*, если выполнено $u\prec v$ или $u\succ v$. Множество $S\subset X$, в котором любые два различных элемента сравнимы, называют *линейно упорядоченным* или *цепью*. Если для множества $U\subset X$ существует такой элемент $v\in X$, что $v\preceq x$ $(v\succeq x)$ при любом $x\in U$, то множество U называют *ограниченным снизу* (*ограниченным сверху*), а элемент v – его нижней (верхней) границей. Нижнюю (верхнюю) границу $\widetilde{v}$ множества U называют точной или *инфимумом* (*супремумом*), если $\widetilde{v}\succ v$ $(\widetilde{v}\prec v)$ для любой другой его нижней (верхней) границы v. Частично упорядоченное пространство называется *нижней полурешёткой* (*верхней полурешёткой*), если в нём любое двухэлементное подмножество имеет точную верхнюю (точную нижнюю) границу. Пространство, являющееся и нижней, и верхней полурешёткой, называют *решёткой*.

Элемент $\tilde{u}\in U$ называют *минимальным* (*максимальным*) в множестве U, если для любого элемента $u\in U$, $u\neq\tilde{u}$, сравнимого с $\tilde{u}$, выполнено $u\succ\tilde{u}$ (соответственно $u\prec\tilde{u}$). Таким образом, в U могут существовать элементы, не сравнимые с минимальным и максимальным. Элемент $\tilde{u}\in U$ называют *наименьшим* (*наибольшим*) в этом множестве, если для любого элемента $u\in U$, $u\neq\tilde{u}$, выполнено $\tilde{u}\prec u$ (соответственно $\tilde{u}\succ u$). Очевидно, что наименьший (наибольший) элемент в U является в этом множестве минимальным (максимальным). Обратное утверждение не верно, но если множество U, рассматриваемое как частично упорядоченное пространство, это нижняя (верхняя) полурешётка, то в нём минимальный (максимальный) элемент является наименьшим (наибольшим).

Рассмотрим многозначное отображение $G: X\rightrightarrows Y$, т.е. отображение, сопоставляющее каждому элементу $x\in X$ непустое множество $G(x)\subset Y$. Если для любого $x\in X$ множество $G(x)$ одноточечное, то отображение G становится “обычным однозначным” (стандартно обозначаем такое отображение соотношением $G: X\to Y$).

Определение 1. Отображение $G: X\rightrightarrows Y$ называют *изотонным* (*антитонным*) *на множестве* $U\subset X$, если для любых $x,u\in U$, таких что $x\preceq u$, и для любого $z\in G(u)$ существует $y\in G(x)$, удовлетворяющий неравенству $y\preceq z$ (соответственно $y\succeq z$). Изотонное (*антитонное*) на всём X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

Приведённое определение изотонности (антитонности) для однозначного отображения $G: X\to Y$ означает, что неравенство $x\preceq u$ влечёт за собой $G(x)\preceq G(u)$ (соответственно $G(x)\succeq G(u)$), т.е. для “обычных отображений” совпадает со стандартным определением этих свойств.

Определение 2. Отображение $G: X\rightrightarrows Y$ будем называть *упорядоченно накрывающим множество* $V\subset Y$, если при любом $u\in X$ справедливо вложение

$$\mathcal{O}_Y(G(u))\bigcap V\subset G(\mathcal{O}_X(u)).$$

Отметим, что в случае одноточечного множества $V=\{y_0\}$ свойство упорядоченного накрывания отображения G означает, что для произвольного $u\in X$ такого, что для некоторого $y\in G(u)$ выполнено неравенство $y_0\preceq y$, существует $x\in X$, удовлетворяющий соотношениям $x\preceq u$ и $G(x)\ni y_0$. Для того чтобы отображение G упорядоченно накрывало произвольное непустое множество $V\subset Y$, необходимо и достаточно, чтобы оно упорядоченно накрывало одноточечное множество $\{y\}$ при любом $y\in V$.

Определение свойства упорядоченного накрывания многозначных отображений введено в работах [7, 13] для случая $V=Y$.

2. Основные обозначения. Будем полагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ задан “обычный” порядок, т.е. для векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $u=(u_1,\ldots,u_n)$ выполнено

$x \leqslant u,$ если $x_i \leqslant u_i,\ \ i = \overline{1,n}.$ Обозначим $\mathbb{R}^n_+ \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant 0\}.$ Символом $h_{\mathbb{R}^n}$ будем обозначать расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^n.$

Обозначим через $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ множества всех непустых замкнутых и, соответственно, непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n.$ Многозначное отображение $G : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ со значениями $G(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n),\ \ x \in X,$ будем обозначать через $G : X \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n),$ а если $G(x) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n),\ \ x \in X,$ то будем писать $G : X \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n).$

Пусть заданы действительные числа $a < b$ и определено измеримое многозначное отображение $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n).$ Обозначим множество его измеримых сечений через $\mathbb{W}(B);$ множество его суммируемых сечений – через $\mathbb{L}(B);$ а символом $\mathbb{AC}(B)$ обозначим множество таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n,$ что $\dot{x} \in \mathbb{L}(B).$ В случае $B(t) \equiv \mathbb{R}^n$ эти пространства будем обозначать через $\mathbb{W}^n,$ $\mathbb{L}^n$ и $\mathbb{AC}^n$ соответственно. В множествах $\mathbb{W}(B),$ $\mathbb{L}(B)$ определим “привычный” порядок, полагая $x \leqslant u$ тогда и только тогда, когда $x(t) \leqslant u(t)$ при п.в. $t \in [a,b].$ Пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ обозначим $\mathbb{C}^n.$ Считаем, что пространства $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{L}^n$ наделены стандартными нормами $\|x\|_{\mathbb{C}^n} = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|_{\mathbb{R}^n},$ $\|v\|_{\mathbb{L}^n} = \int_a^b |v(t)|_{\mathbb{R}^n}\, dt.$ В обозначениях пространств индекс $n = 1$ будем опускать.

Напомним определения некоторых свойств многозначных отображений, используемых в статье (подробнее см. [22, гл. 1; 23, гл. 2]).

Многозначное отображение $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ называют *интегрально ограниченным* [22, с. 73], если функция $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}_+,\ \ \beta(t) \overset{\text{def}}{=} \max\{|y|_{\mathbb{R}^n} : y \in B(t)\},$ суммируема (измеримость этой функции прямо следует из [22, следствие 1.5.9]). Очевидно, в случае интегральной ограниченности отображения B для любого $t \in [a,b]$ выполнено $B(t) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n),$ кроме того, всякое измеримое сечение такого отображения является суммируемой функцией, т.е. множества $\mathbb{W}(B)$ и $\mathbb{L}(B)$ совпадают.

Многозначное отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^k)$ называют *непрерывным* (в метрике Хаусдорфа) в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n,$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n,$ удовлетворяющего неравенству $|x - x_0|_{\mathbb{R}^n} < \delta,$ выполнено $h_{\mathbb{R}^k}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon.$ В случае скалярного аргумента, т.е. при $n = 1,$ на многозначное отображение $G : \mathbb{R} \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^k)$ распространяются определения свойства односторонней непрерывности “обычных однозначных” отображений (см. [24]), а именно: многозначное отображение $G : \mathbb{R} \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ *непрерывно справа (слева) в точке* $x_0 \in \mathbb{R},$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (соответственно для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) выполнено $h_{\mathbb{R}^k}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon.$

3. Неявное дифференциальное включение. Пусть заданы многозначные функции $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k),$ $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n.$ Будем предполагать, что выполнены следующие условия: при любых $x, v, w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(\,\cdot\,, x, v, w) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ измерима; при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, \cdot\,, \cdot\,, w) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $w \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, \cdot\,, \cdot\,, w)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $v_1,\ \ldots,\ v_n$ векторных аргументов $x, v \in \mathbb{R}^n;$ при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $F(t, x, v, \cdot\,) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывна; функция $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ измерима. Отметим, что из приведённых условий на многозначное отображение F следует его суперпозиционная измеримость (см. [24, теорема 2.1]), т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot), v(\cdot), w(\cdot) \in \mathbb{W}^n$ функция $F(\,\cdot\,, x(\cdot), v(\cdot), w(\cdot))$ также измерима.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$F(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

при дополнительном ограничении на производную искомой функции

$$\dot{x}(t) \in B(t), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \tag{3}$$

Решением системы включений (1), (2) будем называть всякую функцию $x \in \mathbb{AC}(B),$ удовлетворяющую включению $F(t, x(t), \dot{x}(t), \dot{x}(t)) \ni 0$ при п.в. $t \in [a,b].$

Пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ такая, что

$$\eta_0(a) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad F(t, \eta_0(t), \dot\eta_0(t), \dot\eta_0(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b]. \tag{4}$$

Сформулируем утверждение о существовании решения $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи (1)–(3), производная которого удовлетворяет неравенству $\dot x \leqslant \dot\eta_0$.

Определим многозначное отображение $\widetilde{B} : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$\widetilde{B}(t) \overset{\text{def}}{=} \{w \in B(t) : w \leqslant \dot\eta_0(t)\}, \quad t \in [a,b] \tag{5}$$

(при п.в. $t \in [a,b]$ множество $\widetilde{B}(t)$ не пусто, поскольку $\dot\eta_0(t) \in B(t)$). Это отображение измеримо, так как является пересечением двух измеримых отображений: $\widetilde{B}(t) = B(t) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\dot\eta_0(t))$. Теперь определим множество

$$\widetilde{D}(t) \overset{\text{def}}{=} \gamma + \int\limits_0^t \widetilde{B}(s)\, ds = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \gamma + \int\limits_0^t w(s)\, ds, \quad w \in \mathbb{L}(\widetilde{B}) \right\}, \quad t \in [a,b]. \tag{6}$$

Обозначим через $F|_\Omega : \Omega \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ сужение многозначного отображения F на множество

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} \{(t,x,v,w) : t \in [a,b], \ \ x \in \widetilde{D}(t), \ \ v \in \widetilde{B}(t), \ \ w \in \widetilde{B}(t)\}. \tag{7}$$

Следующая теорема несколько уточняет полученные авторами в [21, теорема 4.1] достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3). В частности, в отличие от [21, теорема 4.1] соответствующие требования к отображению F предполагаются выполненными не при всех значениях его второго аргумента $x \in \mathbb{R}^n$, а при $x \in \widetilde{D}(t)$, $t \in [a,b]$. Это уточнение существенно используется в приводимых ниже утверждениях о двусторонних неравенствах (в частности, в замечании и следствии 2).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) многозначное отображение $\widetilde{B} : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ интегрально ограничено (и поэтому $\widetilde{B}(t) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ для п.в. $t \in [a,b]$);

2) при п.в. $t \in [a,b]$, любых значениях $x \in \widetilde{D}(t)$ и $v \in \widetilde{B}(t)$ многозначное отображение $F|_\Omega(t,x,v,\cdot) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$;

3) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых значениях $w \in \widetilde{B}(t)$ многозначное отображение $F|_\Omega(t,\cdot,\cdot,w) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ является антитонным.

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи (1)–(3) такое, что $\dot x \leqslant \dot\eta_0$.

Доказательство теоремы 1 по сути не отличается от доказательства теоремы 4.1 в статье [21] и поэтому здесь не приводится.

Отметим, что отображение $\widetilde{B}$, если $n \geqslant 2$, может быть интегрально ограниченным даже в случае, когда исходное отображение B имеет неограниченные значения. Например, при $n = 2$ для отображения $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, имеющего значениями неограниченный конус $B(t) \overset{\text{def}}{=} \{(v_1,v_2) : -v_1 \leqslant v_2 \leqslant v_1, \ v_1 \geqslant 0\}$, $t \in [a,b]$, и любой функции $\eta_0 = (\eta_{01}, \eta_{02}) \in \mathbb{AC}(B)$ получаем $\widetilde{B}(t) = \{(v_1,v_2) : -\dot\eta_{01}(t) \leqslant v_2 \leqslant \dot\eta_{02}(t), \ v_1 = \dot\eta_{01}(t)\}$, $t \in [a,b]$. А такое отображение $\widetilde{B} : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^2)$, очевидно, интегрально ограничено.

Обозначим через $\mathrm{Sol}_F(B) \subset \mathbb{AC}(B)$ и $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ множество решений задачи (1)–(3) и множество их производных соответственно. Рассмотрим вопрос о существовании минимального и наименьшего элементов в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 в множестве $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ существует минимальный элемент $\underline{\dot x}$ и для него выполнено неравенство $\underline{\dot x} \leqslant \dot\eta_0$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 множество $\mathrm{DSol}_F(B) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{L}(B)}(\dot\eta_0) \subset \mathbb{L}(\widetilde{B})$ не пусто. Ввиду теоремы Хаусдорфа (см., например, [25, гл. 1]) в этом множестве существует максимальная цепь, обозначим её через S. Вследствие ограниченности и замкнутости множества $\mathbb{L}(\widetilde{B}) \subset \mathbb{L}^n$ существует $\underline{\dot x} = \inf S \in \mathbb{L}(\widetilde{B})$.

Так как порядок в $\mathbb{L}^n$ порождается правильным конусом неотрицательных функций, из цепи S может быть выбрана невозрастающая последовательность $\{\dot{x}^i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ такая, что (см. [12, предложение 7])

$$\underline{\dot{x}} = \inf S = \inf\{\dot{x}^i\} = \lim_{i\to\infty} \dot{x}^i.$$

Из сходимости невозрастающей последовательности $\{\dot{x}^i\}$ по норме $\mathbb{L}^n$ следует сходимость $\dot{x}^i(t) \to \underline{\dot{x}}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$, а также очевидное неравенство $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{x}^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Поскольку $x^i \in \mathrm{Sol}_F(B)$, $i \in \mathbb{N}$, выполнено включение

$$F(t, x^i(t), \dot{x}^i(t), \dot{x}^i(t)) \ni 0, \quad t \in [a,b], \quad i \in \mathbb{N},$$

из которого в силу антитонности при п.в. t отображения $F(t,\cdot,\cdot,\dot{x}^i(t)) : \mathbb{R}^n \times B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ следует соотношение

$$F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \dot{x}^i(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing, \quad t \in [a,b], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Так как отображение $F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \cdot\,) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывно, получаем

$$F(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing, \quad t \in [a,b].$$

В силу этого соотношения из теоремы 1 следует существование решения $x \in \mathbb{AC}(\widetilde{B})$ задачи (1)–(3) такого, что $\dot{x} \leqslant \underline{\dot{x}}$. Но так как цепь S максимальная в $\mathrm{DSol}_F(B) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{L}(B)}(\dot{\eta}_0)$, полученное неравенство возможно, только если $\underline{x} = x \in \mathrm{Sol}_F(B)$, и это означает, что $\underline{\dot{x}}$ – минимальный элемент в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$. Теорема доказана.

В теореме 2 утверждается не существование решения с наименьшей производной, а лишь существование такого решения $\underline{x}$, что для любого решения x либо $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{x}$, либо $\underline{\dot{x}}$ и $\dot{x}$ не сравнимы. Следующий пример показывает, что решения с наименьшей производной действительно может не существовать, причём не только для включения, но и даже для уравнения.

Пример 1. Рассмотрим при $t \in [0,1]$ задачу Коши

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \tag{8}$$

$$\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t) \in [-1,1], \tag{9}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0. \tag{10}$$

Определим соответствующие данной задаче отображения $F : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $B : [0,1] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ соотношениями

$$F(t,x,v,w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} w_1 + w_2, \quad B(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [-1,1] \times [-1,1].$$

Покажем, что для этих отображений выполнены условия теоремы 2 (а значит, и теоремы 1).

Прежде всего, отображение $B : [0,1] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, очевидно, интегрально ограниченное. Далее положим $\eta_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} (t,t)$, $t \in [0,1]$. Для такой функции выполнено

$$\dot{\eta}_0(t) \equiv (1,1), \quad F(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \equiv 1 + 1 \geqslant 0,$$

$$\widetilde{B}(t) = B(t), \quad \widetilde{D}(t) = [0,t] \times [0,t], \quad t \in [0,1].$$

Рассмотрим свойства отображения F как функции второго, третьего и четвёртого аргументов. Отображение $F(t,x,v,\cdot\,) : \widetilde{B}(t) \to \mathbb{R}$ накрывает множество $\{0\}$. Действительно, для $w_1, w_2 \in [-1,1]$ из того, что $w_1 + w_2 \geqslant 0$, следует существование $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in [-1,1]$ таких, что $\tilde{w}_1 \leqslant w_1$, $\tilde{w}_2 \leqslant w_2$ и $\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = 0$ (например, можно положить $\tilde{w}_1 = w_1$, $\tilde{w}_2 = -w_1$, тогда $\tilde{w}_2 = w_2 - (w_1 + w_2) \leqslant w_2$). Отображение $F(t,\cdot,\cdot,w) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ постоянное, следовательно, антитонное.

Итак, все условия теоремы 2 (и теоремы 1) выполнены. Множество производных решений рассматриваемой задачи Коши определяется соотношением

$$\mathrm{DSol}_F(B) = \{(z(t), -z(t)) : z \in \mathbb{L}, \|z(t)| \leqslant 1 \ \text{ при п.в. } \ t \in [0,1]\}.$$

Это множество бесконечно, и любые два его различных элемента z, $\tilde{z}$ не упорядочены. Действительно, пусть $\tilde{z} > z$, тогда $\tilde{z}_1(t) > z_1(t)$ на некотором множестве $E \subset [a,b]$ положительной меры, следовательно, $\tilde{z}_2(t) = -\tilde{z}_1(t) < -z_1(t) = z_2(t)$ на E. Итак, $\tilde{z} \not> z$, и тем самым доказано, что в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ все элементы минимальные, но нет наименьшего элемента.

Получим дополнительные условия к условиям теоремы 1, при выполнении которых в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ существует наименьший элемент, т.е. среди решений задачи (1)–(3) есть решение с наименьшей производной.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и, кроме того, каждая i-я компонента F_i, $i = \overline{1,n}$, многозначного отображения F может быть записана в виде*

$$F_i(t,x,v,w) = \tilde{F}_i(t,x,v,w_i), \tag{11}$$

где $\tilde{F}_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ (F_i не зависит от переменных $w_1, \ \ldots, \ w_{i-1}, \ w_{i+1}, \ \ldots$ $\ldots, \ w_n$), а множество $\widetilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a,b]$ является нижней полурешёткой. Тогда в множестве $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ существует минимальный элемент $\underline{\dot{x}}$. Докажем, что этот элемент будет наименьшим. Предположим, что утверждение не верно и существует также элемент $\dot{x} \in \mathrm{DSol}_F(B)$, не сравнимый с $\underline{\dot{x}}$. Определим измеримую функцию $z = (z_1, \ldots, z_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $z_i(t) = \min\{\underline{\dot{x}}_i(t), \dot{x}_i(t)\}$, $t \in [a,b]$, $i = \overline{1,n}$. Так как при п.в. $t \in [a,b]$ множество $B(t) \subset \mathbb{R}^n$ является нижней полурешёткой, а $z(t) = \min\{\underline{\dot{x}}(t), \dot{x}(t)\}$, где $\underline{\dot{x}}(t), \dot{x}(t) \in B(t)$, то $z(t) \in B(t)$. Очевидно, что функция z суммируема, таким образом, $z \in \mathbb{L}(B)$. Определим функцию $\varsigma = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n) \in \mathbb{AC}(B)$ соотношением

$$\varsigma_i(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma_i + \int\limits_a^t z_i(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \quad i = \overline{1,n}.$$

Для любого $i = \overline{1,n}$ обозначим

$$\underline{E}_i = \{t \in [a,b] : z_i(t) = \underline{\dot{x}}_i(t)\}, \quad E_i = [a,b] \setminus \underline{E}_i.$$

Вследствие этого определения $z_i(t) = \dot{x}_i(t)$ при п.в. $t \in E_i$.

Рассмотрим отображение $\tilde{F}_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$. При п.в. $t \in \underline{E}_i$ выполнено равенство $\tilde{F}_i(t,\varsigma(t),z(t),z_i(t)) = \tilde{F}_i(t,\varsigma(t),z(t),\underline{\dot{x}}_i(t))$. А поскольку почти всюду на $[a,b] \supset$ $\supset \underline{E}_i$ имеет место включение $0 \in \tilde{F}_i(t,\underline{x}(t),\underline{\dot{x}}_i(t),\underline{\dot{x}}_i(t))$, то в силу антитонности отображения $\tilde{F}_i(t,\cdot,\cdot,\underline{\dot{x}}_i(t))$ при п.в. $t \in \underline{E}_i$ существует $y \geqslant 0$ такой, что $y \in \tilde{F}_i(t,\varsigma(t),z(t),\underline{\dot{x}}_i(t)) =$ $= \tilde{F}_i(t,\varsigma(t),z(t),z_i(t))$. Аналогично доказывается, что при п.в. $t \in E_i$ существует $y \geqslant 0$, удовлетворяющий включению $y \in \tilde{F}_i(t,\varsigma(t),z(t),\dot{x}_i(t)) = \tilde{F}_i(t,\varsigma(t),z(t),z_i(t)) = \tilde{F}_i(t,\varsigma(t),\dot{\varsigma}(t),\dot{\varsigma}_i(t))$. Таким образом, при любом i почти всюду на $[a,b]$ имеет место соотношение

$$F_i(t,\varsigma(t),\dot{\varsigma}(t),\dot{\varsigma}_i(t)) \bigcap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing,$$

а значит,

$$F(t,\varsigma(t),\dot{\varsigma}(t),\dot{\varsigma}(t)) \bigcap \mathbb{R}^n_+ \neq \varnothing, \quad t \in [a,b].$$

Из этого соотношения согласно теореме 1 следует существование решения $\zeta \in \mathrm{Sol}_F(B)$ задачи (1)–(3) такого, что $\dot{\zeta} \leqslant z < \underline{\dot{x}}$. Но это неравенство противоречит тому, что $\underline{\dot{x}}$ является минимальным элементом в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$. Теорема доказана.

Заметим, что порождаемая дифференциальным уравнением из примера 1 функция F не представима в виде (11), т.е. не удовлетворяет предположению теоремы 3, и в множестве решений задачи Коши из примера 1 нет решения с наименьшей производной. Рассмотрим некоторые классы дифференциальных включений, для которых соответствующее отображение F представимо в виде (11).

Сначала рассмотрим задачу Коши (1)–(3) в скалярном случае, т.е. будем полагать, что $n = k = 1$. Итак, пусть заданы многозначные функции $F : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$, $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$ и число γ. Для такой скалярной многозначной функции F, очевидно, имеет место представление (11), и это позволяет вывести из теорем 1, 3 утверждение о разрешимости скалярной задачи Коши и о существовании решения с наименьшей производной.

Пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ такая, что

$$\eta_0(a) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad F(t, \eta_0(t), \dot\eta_0(t), \dot\eta_0(t)) \bigcap \mathbb{R}_+ \neq \varnothing \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b].$$

Пусть при п.в. $t \in [a,b]$ множество $B(t)$ ограничено снизу. Введём $\beta(t) = \min B(t)$, $t \in [a,b]$. Полученная функция $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима (согласно [22, следствие 1.5.9]). Определим множества $\widetilde{B}(t), \widetilde{D}(t) \subset \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, и множество $\Omega \subset [a,b] \times \mathbb{R}^3$ формулами (5), (6) и (7), соответственно.

Следствие 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *суммируема;*

2) при п.в. $t \in [a,b]$, *любых значениях* $x \in \widetilde{D}(t)$ *и* $v \in \widetilde{B}(t)$ *многозначное отображение* $F_\Omega(t,x,v,\cdot\,) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ *упорядоченно накрывает множество* $\{0\} \subset \mathbb{R}$;

3) при п.в. $t \in [a,b]$ *и любых значениях* $w \in \widetilde{B}(t)$ *многозначное отображение* $F_\Omega(t,\cdot\,,\cdot\,,w)$: $\widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ *антитонное.*

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ *скалярной задачи (1)–(3) такое, что* $\dot x \leqslant \dot\eta_0$; *кроме того, в множестве* $\mathrm{DSol}_F(B) \subset \mathbb{L}(B)$ *существует наименьший элемент.*

Доказательство. Из предположений данного утверждения для рассматриваемой скалярной задачи следуют условия теоремы 3 (включая условия теоремы 1). В частности, многозначное отображение $\widetilde{B} : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$, $\widetilde{B}(t) = B(t) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}(\dot\eta_0(t))$, $t \in [a,b]$, удовлетворяет соотношению $\widetilde{B}(t) \subset [\beta(t), \dot\eta_0(t)]$, $t \in [a,b]$, и поэтому интегрально ограничено. Кроме того, любое множество на прямой $\mathbb{R}$, в том числе $B(t)$, является и нижней, и верхней полурешёткой (т.е. решёткой). Таким образом, рассматриваемое утверждение следует из теоремы 3.

Замечание. При применении сформулированных утверждений к исследованию конкретных включений наибольшие трудности вызывает проверка условия упорядоченного накрывания множества $\{0\}$ соответствующим непрерывным многозначным отображением $F_\Omega(t,x,v,\cdot\,)$, определённым на множестве $\widetilde{B}(t)$, при $(t,x,v) \in [a,b] \times \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t)$. Для скалярного отображения из следствия 1 это условие выполнено, если для любой точки $\bar\omega = (t,x,v,w) \in \Omega$ её образ $F_\Omega(\bar\omega)$ – связное множество и

$$F\biggl(t, \gamma + \int\limits_0^t \beta(s)\,ds, \beta(t), \beta(t)\biggr) \bigcap \mathbb{R}_- \neq \varnothing \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b].$$

Ещё одним классом дифференциальных включений, для которых соответствующее отображение F представимо в виде (11), является включение вида

$$\dot x \in G(t, x, \dot x), \quad t \in [a,b], \tag{12}$$

где многозначная функция $G : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям: при любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ функция $G(\,\cdot\,, x, v) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ измерима; при п.в. $t \in [a,b]$ функция $G(t,\cdot\,,\cdot\,) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^k)$ непрерывна справа (или при п.в. $t \in [a,b]$ функция $G(t,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ векторных аргументов

$x, v \in \mathbb{R}^n$. Включение (12) – частный случай включения (1), в котором $k = n$, а отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ определено формулой

$$F(t, x, v, w) = -G(t, x, v) + w, \quad t \in [a, b], \quad x, v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Для компонент этого отображения, очевидно, имеет место представление (11), где

$$\tilde{F}_i(t, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n, w_i) = -G_i(t, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) + w_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сформулируем утверждение о разрешимости задачи Коши для включения (12). Будем здесь предполагать, что при п.в. $t \in [a, b]$ множество $B(t)$ задано соотношением

$$B(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{w \in \mathbb{R}^n : w \geqslant \beta(t)\},$$

в котором функция $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ суммируема. Далее, пусть задана функция $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ с начальным значением $\eta_0(a) \geqslant \gamma$ такая, что при п.в. $t \in [a, b]$ существует элемент $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий соотношениям

$$z \in G(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)), \quad z \leqslant \dot{\eta}_0(t).$$

Определённое соотношением (5) измеримое многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ в данном случае принимает вид

$$\widetilde{B}(t) = [\beta(t), \dot{\eta}_0(t)]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a, b]. \tag{14}$$

Соответственно из (6) получаем $\widetilde{D}(t) = [\gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds, \gamma - \eta_0(a) + \eta_0(t)]_{\mathbb{R}^n}$, $t \in [a, b]$. Определим сужение $G|_\Theta : \Theta \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ многозначного отображения G на множество

$$\Theta = \{(t, x, v) : t \in [a, b], \ \ x \in \widetilde{D}(t), \ \ v \in \widetilde{B}(t)\}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) для функции $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ существует $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$y \in G\biggl(t, \gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds, \beta(t)\biggr), \quad y \geqslant \beta(t); \tag{15}$$

2) для любой точки $\theta = (t, x, v) \in \Theta$ её образ $G|_\Theta(\theta)$ – связное множество и при п.в. $t \in [a, b]$ многозначное отображение $G|_\Theta(t, \cdot, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ изотонное.

Тогда существует решение $x \in \mathbb{AC}(B)$ задачи Коши для включения (12) с условиями (2), (3) такое, что $\dot{x} \leqslant \dot{\eta}_0$; кроме того, в множестве $\mathrm{DSol}_F(B) \in \mathbb{L}(B)$ существует наименьший элемент.

Доказательство. Сначала заметим, что множество $\widetilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$, определяемое формулой (14), это n-мерный куб, который относительно “обычного покоординатного” порядка в $\mathbb{R}^n$ является решёткой.

Покажем, что определённое формулой (13) отображение F как функция последнего аргумента $F(t, x, v, \cdot) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $(x, v) \in \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t)$. Зададим произвольный вектор $w \in B(t)$, для которого существует $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ такой, что для его компонент справедливы соотношения

$$\bar{y}_i \in -G_i(t, x, v) + w_i, \quad \bar{y}_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{16}$$

В силу (15) выполнено $\beta(t) - y \in -G(t, \gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds, \beta(t)) + \beta(t)$, и в этом включении левая часть $\beta(t) - y \in \mathbb{R}^n_-$. Для $x \in \widetilde{D}(t)$ и $v \in \widetilde{B}(t)$ имеем $x \geqslant \gamma + \int_a^t \beta(s)\, ds$, $v \geqslant \beta(t)$. Из этих неравенств, вследствие антитонности отображения $-G(t,\cdot,\cdot)$, заключаем, что существует $\underline{y}\in$ $\in\mathbb{R}^n$ такой, что его компоненты удовлетворяют соотношениям

$$\underline{y}_i\in -G_i(t,x,v)+\beta_i(t),\quad \underline{y}_i\leqslant 0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Вследствие связности значений отображения G, согласно [22, теорема 1.2.37], при п.в. $t\in$ $\in[a,b]$ и любых $(x,v)\in\widetilde{D}(t)\times\widetilde{B}(t)$ множество

$$F_i(t,x,v,[\beta_i(t),w_i])=\bigcup_{z\in[\beta_i(t),w_i]}(-G_i(t,x,v)+z)$$

связно в $\mathbb{R}$. Этому множеству, согласно (16), (17), принадлежат числа $\bar{y}_i\geqslant 0$, $\underline{y}_i\leqslant 0$, а следовательно, и число 0. Таким образом, при любом $i=\overline{1,n}$ для некоторого $z_i\in[\beta_i(t),w_i]$ выполнено $0\in -G_i(t,x,v)+z_i$, и значит $F(t,x,v,\cdot\,):\widetilde{B}(t)\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ упорядоченно накрывает $\{0\}\subset\mathbb{R}^n$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3. Утверждение доказано.

4. Задача управления. Приведённые выше результаты о дифференциальном включении (1) здесь применяются к исследованию управляемой системы не разрешённых относительно производной (неявных) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть заданы вектор $\gamma\in\mathbb{R}^n$, функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие следующим условиям: при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,v\in\mathbb{R}^n$ функция $f(t,x,v,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ непрерывна; при любом $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,u):[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима (т.е. для любых измеримых функций $x(\cdot)$, $v(\cdot)$ функция $f(\,\cdot\,,x(\cdot),v(\cdot),u)$ измерима); многозначное отображение $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ суперпозиционно измеримо.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ управляемую систему

$$f(t,x,\dot{x},u)=0 \tag{18}$$

с обратной связью

$$u(t)\in U(t,x(t),\dot{x}(t)). \tag{19}$$

Решением системы (18), (19) будем называть удовлетворяющую обоим соотношениям (18), (19) при п.в. $t\in[a,b]$ пару (x,u), в которой первая компонента, называемая *траекторией*, это абсолютно непрерывная функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, а вторая компонента, называемая *управлением*, – измеримая функция $u:[a,b]\to\mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathrm{Sol}_f^U\subset\mathbb{AC}^n\times\mathbb{W}^m$ и $\mathrm{DSol}_f^U\subset\mathbb{L}^n\times\mathbb{W}^m$ множество решений (x,u) задачи (18), (19) и, соответственно, множество пар $(\dot{x},u)$, где $\dot{x}$ – производная траектории.

Определим многозначное отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^k$ формулой

$$F(t,x,v)\stackrel{\mathrm{def}}{=}f(t,x,v,U(t,x,v)),\quad (t,x,v)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Заметим, что из непрерывности функции $f(t,x,v,\cdot\,)$ и компактности множества $U(t,x,v)$ следует, что отображение F имеет компактные значения. Кроме того, F суперпозиционно измеримо. Рассмотрим включение

$$0\in F(t,x,\dot{x}),\quad t\in[a,b]. \tag{21}$$

Сформулируем утверждение, позволяющее “переходить” от рассматриваемой здесь “неявной” управляемой системы (18), (19) к дифференциальному включению (21). Это утверждение аналогично известной теореме (см., например, [22, теорема 3.4.1]) о равносильности управляемой дифференциальной системы, разрешённой относительно производной, соответствующему дифференциальному включению.

Лемма. *Управляемая система (18), (19) равносильна включению (21), т.е. если пара* $(x,u)\in\mathbb{AC}^n\times\mathbb{W}^m$ *– решение управляемой системы (18), (19), то* $x\in\mathbb{AC}^n$ *является решением включения (21), и обратно, если* $x\in\mathbb{AC}^n$ *– решение включения (21), то существует функция* $u\in\mathbb{W}^m$ *такая, что пара* (x,u) *является решением системы (18), (19).*

Доказательство. Пусть пара (x,u) является решением управляемой системы (18), (19), тогда $u(\cdot)\in\mathbb{W}^m$ – измеримое сечение измеримого многозначного отображения $U(\,\cdot\,,x(\cdot),\dot x(\cdot))$, а $x(\cdot)\in\mathbb{AC}^n$ – соответствующее решение уравнения (18). Имеем

$$0=f(t,x(t),\dot x(t),u(t))\in f(t,x(t),\dot x(t),U(t,x(t),\dot x(t)))\quad\text{при п.в.}\quad t\in[a,b],$$

следовательно, $x(\cdot)\in\mathbb{AC}^n$ – решение включения (21).

Обратно, пусть функция $x(\cdot)\in\mathbb{AC}^n$ является решением включения (21). Определим функцию $g:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ формулой $g(t,u)=f(t,x(t),\dot x(t),u)$ для всех $t\in[a,b]$ и $u\in\mathbb{R}^m$. Так как функция $f(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,u):[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ суперпозиционно измерима, то при любом $u\in\mathbb{R}^m$ функция $g(\,\cdot\,,u):[a,b]\to\mathbb{R}^k$ измерима, а в силу непрерывности $f(t,x,v,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ при п.в. $t\in[a,b]$ функция $g(t,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ непрерывна. Обозначим через $V:[a,b]\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ многозначную функцию, определяемую формулой $V(t)=U(t,x(t),\dot x(t))$, $t\in[a,b]$. Так как отображение $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ суперпозиционно измеримо, то функция V измерима. Включение (21) записывается в виде $0\in g(t,V(t))$. По лемме Филиппова об измеримом выборе (см., например, [22, теорема 1.5.15]) существует измеримое сечение u отображения V, для которого при п.в. $t\in[a,b]$ выполнено равенство $0=g(t,u(t))$ или, что то же самое, $0=f(t,x(t),\dot x(t),u(t))$. Лемма доказана.

Для произведения $\mathbb{V}=\mathbb{AC}^n\times\mathbb{W}^m$ определим операторы проектирования $\pi_1:\mathbb{V}\to\mathbb{AC}^n$, $\pi_2:\mathbb{V}\to\mathbb{W}^m$ для любой пары $v=(x,u)\in\mathbb{V}$ соотношениями

$$\pi_1 v=x,\quad \pi_2 v=u.$$

Сформулированная выше лемма означает, что для управляемой системы (18), (19) выполнено $\pi_1(\mathrm{Sol}_f^U)=\mathrm{Sol}_F$, где отображение F задано формулой (20).

Далее с использованием этой леммы исследуем управляемую систему (18), (19), которую для удобства формулировок условий разрешимости запишем в несколько ином виде.

Пусть заданы вектор $\gamma\in\mathbb{R}^n$, функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ и многозначные отображения $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, $B:[a,b]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие следующим условиям: при любых $x,v,w\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(\,\cdot\,,x,v,w,u):[a,b]\to\mathbb{R}^k$ измерима; при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,v\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(t,x,v,\cdot\,,u):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ непрерывна; при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $w\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(t,\cdot\,,\cdot\,,w,u):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ непрерывна справа (или при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $w\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ функция $f(t,\cdot,\cdot,w,u)$ непрерывна слева) по каждой компоненте $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $v_1,\ \ldots,\ v_n$ векторных аргументов $x,v\in\mathbb{R}^n$; при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,v,w\in\mathbb{R}^n$ функция $f(t,x,v,w,\cdot\,):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ непрерывна; при любых $x,v\in\mathbb{R}^n$ отображение $U(\,\cdot\,,x,v):[a,b]\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ измеримо; при п.в. $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot\,,\cdot\,):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно справа (или при п.в. $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot\,,\cdot\,)$ непрерывно слева) по каждой компоненте $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $v_1,\ \ldots,\ v_n$ векторных аргументов $x,v\in\mathbb{R}^n$; функция $B:[a,b]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ измерима.

Рассмотрим на $[a,b]$ задачу Коши с начальным условием (3) для управляемой системы

$$f(t,x,\dot x,\dot x,u)=0 \tag{22}$$

с обратной связью, определяемой включением (19) и ограничением (2). Множество решений этой задачи обозначим через $\mathrm{Sol}_f^U(B)\subset\mathbb{AC}(B)\times\mathbb{W}^m$. Будем рассматривать также множество $\mathrm{DSol}_f^U(B)\subset\mathbb{L}(B)\times\mathbb{W}^m$ пар $(\dot x,u)$ таких, что $(x,u)\in\mathrm{Sol}_f^U(B)$.

Пусть задана функция $\eta_0\in\mathbb{AC}(B)$. Определим многозначное отображение

$$U_0:[a,b]\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m),\quad U_0(t)=U(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t)),\quad t\in[a,b].$$

Согласно [24, теорема 2.1] отображение U_0 измеримо. Пусть $u_0 \in \mathbb{W}(U_0)$ – его измеримое сечение. Будем предполагать, что справедливы неравенства

$$\eta_0(a) \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad f(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), u_0(t)) \geqslant 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b]. \tag{23}$$

Определим измеримое многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ соотношением (5), затем для каждого $t \in [a, b]$ определим множество $\widetilde{D}(t) \subset \mathbb{R}^n$ соотношением (6) и множество $\widetilde{U}(t) = U(t, \widetilde{D}(t), \widetilde{B}(t)) \subset \mathbb{R}^m$.

Через $f|_\Xi : \Xi \to \mathbb{R}^k$ обозначим сужение функции f на множество

$$\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v, w, u) : t \in [a, b], \quad x \in \widetilde{D}(t), \quad v \in \widetilde{B}(t), \quad w \in \widetilde{B}(t), \quad u \in \widetilde{U}(t)\},$$

а через $U|_\Theta : \Theta \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ – сужение многозначного отображения U на множество

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, x, v) : t \in [a, b], \quad x \in \widetilde{D}(t), \quad v \in \widetilde{B}(t)\}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) многозначное отображение $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ интегрально ограничено (и поэтому $\widetilde{B}(t) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ для п.в. $t \in [a, b]$);

2) функция $f|_\Xi(t, x, v, \cdot, u) : \widetilde{B}(t) \to \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $x \in \widetilde{D}(t)$, $v \in \widetilde{B}(t)$, $u \in \widetilde{U}(t)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset \mathbb{R}^k$;

3) функция $f|_\Xi(t, \cdot, \cdot, w, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \times \widetilde{U}(t) \to \mathbb{R}^k$ при п.в. $t \in [a, b]$ и любых $w \in \widetilde{B}(t)$ по каждой компоненте $x_1, \ldots, x_n$, $v_1, \ldots, v_n$ и $u_1, \ldots, u_n$ соответствующих векторных аргументов x, v, u убывает (не строго);

4) отображение $U|_\Theta(t, \cdot, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ при п.в. $t \in [a, b]$ изотонно.

Тогда существует решение (x, u) задачи Коши с начальным условием (3) для управляемой системы (22) с обратной связью (19) и ограничением (2) такое, что $\dot{x} \leqslant \dot{\eta}_0$ и $u \leqslant u_0$. Кроме того, в множестве $\mathrm{DSol}_f^U(B)$ существует пара $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$ такая, что $\underline{\dot{x}}$ – минимальный элемент в $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$ и выполнено $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{\eta}_0$ и $\underline{u} \leqslant u_0$.

Доказательство. Введём многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ по формуле

$$F(t, x, v, w) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, x, v, w, U(t, x, v)), \quad (t, x, v, w) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{24}$$

Рассмотрим включение (1) с отображением F, определённым формулой (24). В силу принятых здесь предположений это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно теоремы 2). В частности, из неравенств (23) следует, что для функции $\eta_0 \in \mathbb{AC}(B)$ выполнены соотношения (4). Согласно теоремам 1, 2 множество $\mathrm{Sol}_F(B)$ решений задачи Коши (1)–(3) не пусто, а в множестве $\mathrm{DSol}_F(B)$ производных решений есть минимальный элемент $\underline{\dot{x}}$ и для него выполнено неравенство $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{\eta}_0$.

Согласно лемме 1 рассматриваемая задача управления также разрешима и для её множества решений $\mathrm{Sol}_f^U(B)$ выполнено равенство $\pi_1(\mathrm{Sol}_f^U(B)) = \mathrm{Sol}_F(B)$, а следовательно, и равенство $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B)) = \mathrm{DSol}_F(B)$. Поэтому элемент $\underline{\dot{x}}$ является минимальным в множестве $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$.

Управление, соответствующее траектории $\underline{x}$, удовлетворяет при п.в. $t \in [a, b]$ включению $u(t) \in U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t))$. Вследствие изотонности отображения $U|_\Theta(t, \cdot, \cdot) : \widetilde{D}(t) \times \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\underline{U}(t) = U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ не пусто, соответствующее многозначное отображение $\underline{U} : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ является пересечением измеримых отображений, поэтому само измеримо. Для любого измеримого сечения $\underline{u}$ отображения $\underline{U}$ пара $(\underline{x}, \underline{u})$ – решение рассматриваемой задачи управления и $\underline{u} \leqslant u_0$. Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 4 в множестве $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$ производных от траекторий управляемой системы есть минимальный элемент, но в множестве $\pi_2(\mathrm{Sol}_f^U(B))$ управлений этой системы минимального элемента может не быть. Приведём соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим уравнение (8) из примера 1 как тривиальную управляемую систему вида (22), в которой функция f не зависит от последнего аргумента – управления (т.е. $f(t,x,v,w,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – постоянная функция). Начальное условие и ограничение на производную траектории зададим теми же соотношениями (9), (10), что и в примере 1.

Для рассматриваемой функции $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t,x,v,w,u)=w_1+{}$ $+w_2$, и отображения $B:[0,1]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, $B(t)=[-1,1]\times[-1,1]$, справедливы предположения теоремы 1 (см. пример 1), где $\eta_0:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\eta_0=(t,t)$, $t\in[0,1]$.

Функцию обратной связи U будем здесь полагать однозначной, зададим её следующим образом. Разобьем плоскость $\mathbb{R}^2$ на два непересекающихся множества

$$V=\{v=(v_1,v_2):v_2<1\},\quad \overline{V}=\mathbb{R}^2\setminus V=\{v=(v_1,v_2):v_2\geqslant 1\}$$

и положим $U:[-1,1]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$U(t,x,v)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}v_1, & \text{если } v\in V,\\ 1, & \text{если } v\in\overline{V}.\end{cases}$$

Функция $U(\cdot,\cdot,\cdot)$ постоянна по первым двум аргументам t, x, а как функция третьего аргумента $v=(v_1,v_2)$ непрерывна по компоненте v_1 этого аргумента и терпит разрывы по компоненте v_2 только в точках прямой $v_2=1$, причём непрерывна в этих точках справа (кроме одной точки $(1,1)$, в которой непрерывна по v_2). В силу определения функции U, так как $\dot\eta_0(t)\equiv(1,1)\in\overline{V}$, имеем $u_0(t)=U(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t))=1$.

Из определений множеств $\widetilde{B}(t)$, $\widetilde{D}(t)$ и Θ получаем

$$\widetilde{B}(t)=B(t)=[-1,1]\times[-1,1],\quad \widetilde{D}(t)=[0,t]\times[0,t],\quad t\in[0,1],$$

$$\Theta=\{(t,x,v):t\in[0,1],\ \ x\in[0,t]\times[0,t],\ \ v\in[-1,1]\times[-1,1]\}.$$

Сужение $U|_\Theta:\Theta\to\mathbb{R}$ функции U на множество Θ постоянно по первым двум аргументам t, x и возрастает (не строго) по каждой компоненте v_1, v_2 последнего аргумента v.

Итак, выполнены все предположения теоремы 4. Для рассматриваемой задачи управления множество $\mathrm{DSol}_f^U(B)$ содержит все пары $(\dot x,u)$ функций вида

$$\dot x(t)=(z(t),-z(t)),\quad u(t)=\begin{cases}z(t), & -1<z(t)\leqslant 1,\\ 1, & z(t)=-1,\end{cases}\quad t\in[0,1],$$

где $z\in\mathbb{L}$ – произвольная функция, удовлетворяющая почти всюду на $[0,1]$ неравенству $|z(t)|\leqslant 1$. Любой элемент в множестве $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))=\{(z,-z):z\in\mathbb{L},\ \ \|z(t)|\leqslant 1$, при п.в. $t\in[0,1]\}$ является минимальным. Множество $\pi_2(\mathrm{DSol}_f^U(B))$ состоит из всевозможных функций $z\in\mathbb{L}$ таких, что $-1<z(t)\leqslant 1$, $t\in[0,1]$, и в этом множестве нет минимального элемента.

С использованием теоремы 4 получим условия существования наименьшей траектории и наименьшего допустимого управления.

Теорема 5. *Пусть выполнены предположения теоремы 4 и, кроме того, каждая i-я компонента f_i, $i=\overline{1,n}$, функции f может быть записана в виде*

$$f_i(t,x,v,w,u)=\tilde f_i(t,x,v,w_i,u),\tag{25}$$

где $\tilde f_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ (f_i не зависит от переменных $w_1,\ \ldots,\ w_{i-1},\ w_{i+1},\ \ldots$ $\ldots,\ w_n$), а множество $\widetilde{B}(t)\subset\mathbb{R}^n$ при п.в. $t\in[a,b]$ является нижней полурешёткой.

Тогда среди траекторий управляемой системы (22), (2), отвечающих условиям (3), (19), существует траектория с наименьшей производной.

Если кроме перечисленных условий при п.в. $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in \widetilde{D}(t)$, $v \in \widetilde{B}(t)$ *множество* $U(t,x,v) \subset \mathbb{R}^k$ *является нижней полурешёткой, то в множестве* $\mathrm{DSol}_f^U(B)$ *существует наименьший элемент, т.е. такая пара* $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$, *что её первая компонента* $\underline{\dot{x}}$ *– это наименьший элемент в множестве* $\pi_1(\mathrm{DSol}_f^U(B))$, *а вторая компонента* $\underline{u}$ *– наименьший элемент в* $\pi_2(\mathrm{DSol}_f^U(B))$.

Доказательство. При выполнении условия (25) дифференциальное включение, равносильное рассматриваемой управляемой системе, порождается многозначным отображением (24), компоненты которого могут быть представлены в виде (11). А так как ещё и $\widetilde{B}(t) \subset \mathbb{R}^n$ при п.в. t является нижней полурешёткой и выполняются условия теоремы 4, то справедливы все предположения теоремы 3. Согласно теореме 3 среди решений этого включения (т.е. траекторий управляемой системы) имеется функция $\underline{x} \in \mathbb{AC}(B)$ с наименьшей производной.

Пусть теперь в дополнение к рассмотренным условиям при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in \widetilde{D}(t)$, $v \in \widetilde{B}(t)$ множество $U(t,x,v) \subset \mathbb{R}^k$ является нижней полурешёткой. Тогда при п.в. $t \in [a,b]$ в компактном непустом множестве $\underline{U}(t) = U(t, \underline{x}(t), \underline{\dot{x}}(t)) \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ имеется наименьший элемент $\underline{u}(t)$. Согласно [22, следствие 1.5.9] функция $\underline{u}(\cdot)$ измерима. Для произвольной траектории x выполнены неравенства $\underline{\dot{x}} \leqslant \dot{x}$ и $\underline{x} \leqslant x$, из которых вследствие антитонности отображения $U(t,\cdot,\cdot)$ для любого измеримого сечения u многозначного отображения $U(\,\cdot\,, x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$ справедливо неравенство $\underline{u}(t) \leqslant u(t)$, $t \in [a,b]$. Таким образом, пара $(\underline{\dot{x}}, \underline{u})$ является наименьшей в множестве $\mathrm{DSol}_f^U(B)$. Теорема доказана.

Отметим, что представление компонент f_i, $i = \overline{1,n}$, функции f в виде (25) имеет место для управляемой системы в скалярном случае, т.е. при $n = k = 1$, а также для управляемой системы

$$\dot{x} = g(t, x, \dot{x}, u), \quad t \in [a,b],$$

с функцией $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Для таких управляемых систем из теоремы 5 несложно вывести условия существования траектории с наименьшей производной и наименьшего управления.

Результаты пп. 1 и 3 получены первым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/23-11-45014/). Результаты пп. 2 и 4 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В., Асеев С.М., Благодатских В.И.* Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями // Мат. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 3–23.
2. *Mordukhovich B.S.* Varitional Analysis and Generalized Differentiation II. Application. Berlin, 2006.
3. *Давыдов А.А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 1–10.
4. *Davydov A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z.* Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane // Japanese J. of Math. 2008. V. 3. № 1. P. 93–120.
5. *Ремизов А.О.* Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 105–124.
6. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
7. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
8. *Иоффе А.Д.* Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55. № 3. С. 103–162.
9. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешённым относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

10. *Жуковский Е.С., Мерчела В.* О накрывающих отображениях в обобщённых метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.
11. *Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 205–213.
12. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Appl. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
13. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Appl. 2016. V. 201. P. 330–343.
14. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
15. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения и обобщённые точки совпадения двух многозначных отображений // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 308. С. 42–49.
16. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.
17. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.
18. *Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1471–1482.
19. *Бенараб С.* Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220.
20. *Бенараб С.* О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233.
21. *Zhukovskiy E.S., Serova I.D., Panasenko E.A., Burlakov E.O.* On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes // Adv. in Systems Sci. and Appl. 2022. V. 22. № 1. P. 176–191.
22. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М., 2016.
23. *Арутюнов А.В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М., 2014.
24. *Серова И.Д.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщённых условиях Каратеодори // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314.
25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Тамбовский государственный университет
имени Г.Р. Державина,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.
После доработки 18.05.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.