

ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 1

Январь 2023



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 1, 2023

НЕКРОЛОГ

Евгений Иванович Моисеев 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи
для дифференциально-операторного уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A
Б. Е. Кангузсин, Б. Д. Кошанов 4

Свойства вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений
и начальных задач для них
В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова 15

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О существовании решений задачи Неймана для p -лапласиана на параболических
многообразиях с модельным концом
В. В. Бровкин 30

Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной
эллиптической задачи в пространствах Музилака–Орлича
Л. М. Кожеевникова, А. П. Кашикова 35

Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для модельного уравнения
в частных производных третьего порядка
Х. Г. Умаров 51

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач
для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае
Г. А. Курина, Нгуен Тхи Хоай 73

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Асимптотика решения линейных сингулярно возмущённых задач оптимального управления
с интегральным выпуклым критерием качества и “дешёвым” управлением
А. Р. Данилин, А. А. Шабуров 85

О линеаризации нелинейных систем с одним управлением на основе масштабирования
времени и однократного продолжения
Д. А. Фетисов 100

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы <i>А. А. Бобылев</i>	115
Непрерывный метод нахождения обобщённой неподвижной точки нерастягивающего отображения на множестве гильбертова пространства <i>И. П. Рязанцева</i>	130

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об одном нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка <i>А. А. Косов, Э. И. Семенов</i>	138
Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве <i>Е. М. Мухсинов</i>	142

НЕКРОЛОГ



ЕВГЕНИЙ ИВАНОВИЧ МОИСЕЕВ
(07.03.1948–25.12.2022)

DOI: 10.31857/S0374064123010016, EDN: OBMNSO

Редакционная коллегия журнала “Дифференциальные уравнения” с глубоким прискорбием сообщает, что 25 декабря 2022 г. на 75-м году жизни скоропостижно скончался Моисеев Евгений Иванович, советский и российский математик, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель главного редактора, преданно служивший журналу долгие годы.

После окончания в 1971 г. физического факультета Московского государственного университета Моисеев Е.И. поступил в аспирантуру факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, и с тех пор вся его жизнь была неразрывно связана с этим факультетом. В течение двух десятилетий (1999–2019 гг.) он возглавлял факультет ВМК, а с 2019 г. являлся его президентом. С 2008 г. Евгений Иванович заведовал кафедрой функционального анализа и его приложений.

Блестящий математик, прекрасный педагог. Области научных интересов: дифференциальные уравнения, краевые задачи с нелокальными условиями, спектральная теория и др. Моисеев Е.И. подготовил в качестве научного руководителя 9 докторов и 16 кандидатов физико-математических наук. Является автором более 180 статей и 20 книг. Его заслуги в области науки и высшего образования отмечены высокими государственными наградами.

Он был доброжелательным, чутким, отзывчивым, глубоко порядочным человеком. Выражаем искренние соболезнования его семье и близким, друзьям, коллегам.

Светлая память о Евгении Ивановиче Моисееве навсегда сохранится в наших сердцах.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.95+517.984

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $l(\cdot) - A$ С ОПЕРАТОРОМ ТРИКОМИ A

© 2023 г. Б. Е. Кангужин, Б. Д. Кошанов

Исследуется вопрос единственности решения регулярной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A . Порядок дифференциального выражения $l(\cdot)$ считается произвольным натуральным числом n , а регулярные краевые условия задаются по временной переменной t . Оператор A является порождённым уравнением Трикоми $Av(\cdot) = yv_{xx}(\cdot) + v_{yy}(\cdot)$. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части и дробными производными следами решения вдоль характеристик. Указывается, что данный оператор является самосопряжённым оператором в пространстве $L_2(\Omega)$. Самосопряжённость оператора A гарантирует существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций, если Ω – область, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123010028, EDN: OBOZON

Введение. Основным вопросом, изучаемым в настоящей статье, является вопрос единственности решения уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n u(x, y; t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^n p_j(t) \frac{\partial^{n-j} u(x, y; t)}{\partial t^{n-j}} = \\ = y \frac{\partial^2 u(x, y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y; t)}{\partial y^2} + f(x, y; t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (1)$$

с регулярными краевыми условиями по t

$$U_\nu(u(x, y; \cdot)) = 0, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

и с условиями по (x, y)

$$u(x, y; t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}, \quad (3)$$

$$x^{5/6} D_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(x); t)x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6} D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x); t)(1-x)^{-2/3}) = 0, \quad (4)$$

где

$$u(\chi_0(x); t) = u(x, -[3x/2]^{2/3}; t), \quad 0 \leq x \leq 1/2,$$

$$u(\chi_1(x); t) = u(x, -[3(1-x)/2]^{2/3}; t), \quad 1/2 \leq x \leq 1, \quad 0 < t < T.$$

Здесь Ω – конечная двумерная область, ограниченная при $y > 0$ кривой Ляпунова σ , оканчивающейся в окрестности точек $O(0, 0)$ и $B(1, 0)$ малыми дугами “нормальной кривой”

$$\sigma_0 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4},$$

а при $y < 0$ – характеристиками

$$OC : x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1.$$

Граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана–Лиувилля [1, с. 87]

$$D_{0+}^{1/6} g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1/6}} dt, \quad D_{1-}^{1/6} g(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1/6}} dt.$$

Главная цель настоящей статьи – установить критерий единственности решения задачи (1)–(4). Известны различные способы доказательства единственности. Обычно эффективным средством доказательства единственности является принцип максимума [2, с. 411] и его различные обобщения (принцип Хопфа [3, с. 115] и Зарембы–Жиро [4, с. 85]). Для задачи (1)–(4) указанные принципы не выполняются. Поэтому нам необходим другой, отличный от принципа экстремума, метод.

В работе В.А. Ильина [5] предложен довольно универсальный способ доказательства единственности решения для гиперболических и параболических уравнений при довольно общих ограничениях на область Ω . Смысл требований теоремы В.А. Ильина [5] заключается в том, что эллиптическая часть гиперболического и параболического операторов обладает полной ортогональной системой собственных функций в соответствующем функциональном пространстве.

В данной статье оператор L , соответствующий задаче (1)–(4), представляется в виде разности двух коммутирующих операторов A и B . Единственность решения гарантируется, когда спектры операторов A и B не пересекаются и операторы A и B имеют полные системы корневых элементов в соответствующих функциональных пространствах. При этом не требуется, чтобы оператор B являлся самосопряжённым.

Отметим также работу И.В. Тихонова [6], посвящённую теоремам единственности решений линейных нелокальных задач для абстрактных дифференциальных уравнений. Указанная работа интересна тем, что И.В. Тихонов предложил новый метод доказательства теорем единственности, основанный на “методе частных” для целых функций экспоненциального типа. В статье [7] изучался вопрос единственности решения уравнения теплопроводности с нелокальным условием, выраженным интегралом по времени на фиксированном отрезке. Авторам удалось дать полное описание классов единственности в терминах поведения решений при $|x| \rightarrow \infty$. В данной статье метод И.В. Тихонова адаптирован для операторов, дифференциальная часть которых является оператором высокого порядка.

Исследуемый нами класс операторов вида $L = B - A$ относится по терминологии А.А. Дезина [8] к операторам, порождаемым дифференциально-операторными уравнениями. В данной статье исследуется единственность решения задачи (1)–(4) для дифференциально-операторного уравнения.

Вопросы разрешимости дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [9–13]. В.В. Шелухин [14, 15] исследовал задачу о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени, которая также относится к классу дифференциально-операторных уравнений.

1. О спектральных свойствах дифференциального оператора на отрезке. В данном пункте приведены спектральные свойства одномерного дифференциального оператора высшего порядка. В функциональном пространстве $L_2(0, T)$ рассмотрим оператор B , порождённый дифференциальным выражением

$$l(w) \equiv \frac{d^n w}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} + \dots + p_n(t) w(t), \quad 0 < t < T,$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{kj} w^{(k)}(0) + \beta_{kj} w^{(k)}(T)] = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где $p_j(t) \in C^{(n-j)}[0, T]$, $j = \overline{1, n}$.

Напомним, какие краевые условия называются регулярными. Для этого обозначим через S сектор комплексной плоскости ρ – плоскости, определённой неравенствами $0 \leq \arg \rho \leq \pi/n$, и пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – все различные корни n -й степени из -1 , занумерованные так, что для всех $\rho \in S$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}(\rho\omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_2) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\rho\omega_n).$$

Известно [16], что краевые условия (5) можно привести к виду

$$\begin{aligned} U_1(w) &= w^{(j_1)}(0) + \sum_{k=0}^{j_1-1} (\alpha_{1,k} w^{(k)}(0) + \beta_{1,k} w^{(k)}(T)), & U_2(w) &= w^{(j_1)}(T) + \sum_{k=0}^{j_1-1} (\alpha_{2,k} w^{(k)}(0) + \beta_{2,k} w^{(k)}(T)), \\ &\dots & & \\ U_{2m-1}(w) &= w^{(j_m)}(0) + \sum_{k=0}^{j_m-1} (\alpha_{2m-1,k} w^{(k)}(0) + \beta_{2m-1,k} w^{(k)}(T)), \\ U_{2m}(w) &= w^{(j_m)}(T) + \sum_{k=0}^{j_m-1} (\alpha_{2m,k} w^{(k)}(0) + \beta_{2m,k} w^{(k)}(T)), \\ &\dots & & \\ U_{2m+1}(w) &= \alpha_1 w^{(\nu_1)}(0) + \beta_1 w^{(\nu_1)}(T) + \sum_{k=0}^{\nu_1-1} (\alpha_{2m+1,k} w^{(k)}(0) + \beta_{2m+1,k} w^{(k)}(T)), \\ &\dots & & \\ U_n(w) &= \alpha_r w^{(\nu_r)}(0) + \beta_r w^{(\nu_r)}(T) + \sum_{k=0}^{\nu_r-1} (\alpha_{n,m} w^{(k)}(0) + \beta_{n,m} w^{(k)}(T)), \end{aligned}$$

среди чисел j_k и ν_i нет двух одинаковых ($0 \leq j_k \leq n-1$, $k = \overline{1, m}$; $0 \leq \nu_i \leq n-1$, $i = \overline{1, r}$; $2m+r=n$, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$).

Регулярность краевых условий определяется различным образом, в зависимости от того будет ли n нечётным или чётным.

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задаётся регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [17, с. 57]. Иначе говоря, в случае нечётного $n = 2p-1$ следующие два определителя отличны от нуля:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \dots & \omega_{p-1}^{j_1} & \omega_p^{j_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_1} & \dots & \omega_n^{j_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{j_m} & \dots & \omega_{p-1}^{j_m} & \omega_p^{j_m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & \dots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1 \omega_1^{\nu_1} & \dots & \alpha_1 \omega_{p-1}^{\nu_1} & \alpha_1 \omega_p^{\nu_1} & \beta_1 \omega_{p+1}^{\nu_1} & \dots & \beta_1 \omega_n^{\nu_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_r \omega_r^{\nu_r} & \dots & \alpha_r \omega_{p-1}^{\nu_r} & \alpha_r \omega_p^{\nu_r} & \beta_r \omega_{p+1}^{\nu_r} & \dots & \beta_r \omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix}, \\ \theta_1 &= \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \dots & \omega_{p-1}^{j_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_p^{j_1} & \omega_{p+1}^{j_1} & \dots & \omega_n^{j_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{j_m} & \dots & \omega_{p-1}^{j_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_p^{j_m} & \omega_{p+1}^{j_m} & \dots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1 \omega_1^{\nu_1} & \dots & \alpha_1 \omega_{p-1}^{\nu_1} & \beta_1 \omega_p^{\nu_1} & \beta_1 \omega_{p+1}^{\nu_1} & \dots & \beta_1 \omega_n^{\nu_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_r \omega_r^{\nu_r} & \dots & \alpha_r \omega_{p-1}^{\nu_r} & \beta_r \omega_p^{\nu_r} & \beta_r \omega_{p+1}^{\nu_r} & \dots & \beta_r \omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

при этом $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, n}$.

Когда же $n = 2p$ чётное, то определители

$$\theta_{-1} = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \dots & \omega_{p-1}^{j_1} & \omega_p^{j_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_1} & \omega_{p+2}^{j_1} & \dots & \omega_n^{j_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{j_m} & \dots & \omega_{p-1}^{j_m} & \omega_p^{j_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & \omega_{p+2}^{j_m} & \dots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1 \omega_1^{\nu_1} & \dots & \alpha_1 \omega_1^{\nu_1} & \alpha_1 \omega_p^{\nu_1} & \beta_1 \omega_{p+1}^{\nu_1} & \beta_1 \omega_{p+2}^{\nu_1} & \dots & \beta_1 \omega_n^{\nu_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_r \omega_r^{\nu_r} & \dots & \alpha_r \omega_{p-1}^{\nu_r} & \alpha_r \omega_p^{\nu_r} & \beta_r \omega_{p+1}^{\nu_r} & \beta_r \omega_{p+2}^{\nu_r} & \dots & \beta_r \omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix},$$

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} \omega_1^{j_1} & \dots & \omega_{p-1}^{j_1} & 0 & \omega_{p+1}^{j_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_p^{j_1} & 0 & \omega_{p+2}^{j_1} & \dots & \omega_n^{j_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{j_m} & \dots & \omega_{p-1}^{j_m} & 0 & \omega_{p+1}^{j_m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_p^{j_m} & 0 & \omega_{p+2}^{j_m} & \dots & \omega_n^{j_m} \\ \alpha_1 \omega_1^{\nu_1} & \dots & \alpha_1 \omega_{p-1}^{\nu_1} & \beta_1 \omega_p^{\nu_1} & \alpha_1 \omega_{p+1}^{\nu_1} & \beta_1 \omega_{p+2}^{\nu_1} & \dots & \beta_1 \omega_n^{\nu_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_r \omega_r^{\nu_r} & \dots & \alpha_r \omega_{p-1}^{\nu_r} & \beta_r \omega_p^{\nu_r} & \alpha_r \omega_{p+1}^{\nu_r} & \beta_r \omega_{p+2}^{\nu_r} & \dots & \beta_r \omega_n^{\nu_r} \end{vmatrix}$$

также отличны от нуля.

Введём фундаментальную систему решений $\{w_1(t, \lambda), \dots, w_n(t, \lambda)\}$ однородного уравнения

$$l(w_s) = \lambda w_s(t, \lambda), \quad 0 < t < T,$$

удовлетворяющих условиям Коши в нуле

$$\frac{d^{(j-1)}}{dt^{(j-1)}} w_s(0, \lambda) = \delta_{j,s}, \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, n},$$

где $\delta_{j,s}$ – символ Кронекера. Заметим, что все решения $\{w_s(t, \lambda), s = \overline{1, n}\}$ являются целыми функциями от λ .

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ характеристический определитель, задаваемый формулой

$$\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(w_j)).$$

Нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, с учётом их кратности, представляют собой собственные значения оператора B .

Наконец, для полноты изложения приведём формулу Лагранжа [17].

Пусть $U_1, \dots, U_n$ – линейно независимые формы переменных $w(0), w'(0), \dots, w^{(n-1)}(0), w(T), w'(T), \dots, w^{(n-1)}(T)$. Дополним их какими-нибудь линейными формами $U_{n+1}, \dots, U_{2n}$ до линейно независимой системы $2n$ форм $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$. Для любых линейно независимых форм $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$ существует единственный набор $2n$ линейных однородных форм

$$V_{2n}, V_{2n-1}, \dots, V_1$$

относительно переменных $R(0), R'(0), \dots, R^{(n-1)}(0), R(T), \dots, R^{(n-1)}(T)$ для произвольной функций $R(t) \in W_2^n[0, T]$. Тогда формула Лагранжа для любых двух функций $w(t)$ и $R(t)$ из $W_2^n[0, T]$ запишется в виде

$$\int_0^T l(w(t)) \overline{R(t)} dt - \int_0^T w(t) \overline{l^+(R(t))} dt = U_1(w) \overline{V_{2n}(R)} + U_2(w) \overline{V_{2n-1}(R)} + \dots + U_{2n}(w) \overline{V_1(R)}. \quad (6)$$

Здесь $l^+(\cdot)$ – формально сопряжённое дифференциальное выражение к выражению $l(\cdot)$, заданное как

$$l^+(R) \equiv (-1)^n \frac{d^n R(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} (p_j(t) R(t)), \quad 0 < t < T.$$

Сопряжённый оператор B^* задаётся дифференциальным выражением

$$B^* R(t) = l^+(R), \quad 0 < t < T,$$

и областью определения

$$D(B^*) = \{R \in W_2^n[0, T] : V_1(R) = 0, \dots, V_n(R) = 0\}.$$

В работе [16] вычислены сопряжённые краевые условия:

$$\begin{aligned} V_n(R) &= R^{(n-1-\gamma_1)}(0) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_1} (\alpha_{n,k}^* R^{(k)}(0) + \beta_{n,k}^* R^{(k)}(T)), \\ V_{n-1}(R) &= R^{(n-1-\gamma_1)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_1} (\alpha_{n-1,k}^* R^{(k)}(0) + \beta_{n-1,k}^* R^{(k)}(T)), \\ &\dots \\ V_{n-2m}(R) &= R^{(n-1-\gamma_m)}(0) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_m} (\alpha_{n-2m,k}^* R^{(k)}(0) + \beta_{n-2m,k}^* R^{(k)}(T)), \\ V_{n-2m+1}(R) &= R^{(n-1-\gamma_m)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\gamma_m} (\alpha_{n-2m+1,k}^* R^{(k)}(0) + \beta_{n-2m+1,k}^* R^{(k)}(T)), \\ &\dots \\ V_r(R) &= \bar{\beta}_1 R^{(n-1-\nu_1)}(0) + \bar{\alpha}_1 R^{(n-1-\nu_1)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\nu_1} (\alpha_{r,k}^* R^{(k)}(0) + \beta_{r,k}^* R^{(k)}(T)), \\ &\dots \\ V_1(R) &= \bar{\beta}_r R^{(n-1-\nu_r)}(0) + \bar{\alpha}_r R^{(n-1-\nu_r)}(T) + \sum_{k=0}^{n-2-\nu_r} (\alpha_{1,k}^* R^{(k)}(0) + \beta_{1,k}^* R^{(k)}(T)), \end{aligned}$$

где числа $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ определяются из соотношения

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \cup \{j_1, \dots, j_m\} \cup \{\nu_1, \dots, \nu_r\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Введём фундаментальную систему решений $\{R_1(t, \bar{\lambda}), \dots, R_n(t, \bar{\lambda})\}$ однородного сопряжённого уравнения

$$l^+(R_s) = \bar{\lambda} R_s(t, \bar{\lambda}), \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

удовлетворяющих условию Коши в нуле

$$\frac{d^{(j-1)}}{dt^{(j-1)}} R_s(0, \bar{\lambda}) = \delta_{j,s}, \quad j = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, n}.$$

Заметим, что все решения $\{R_s(t, \bar{\lambda}), s = \overline{1, n}\}$ являются целыми функциями от $\bar{\lambda}$. Обозначим через $\Delta^*(\bar{\lambda})$ характеристический определитель, задаваемый формулой

$$\Delta^*(\bar{\lambda}) = \det(V_\nu(R_j)). \quad (8)$$

Нули характеристического определителя $\Delta^*(\bar{\lambda})$, с учётом их кратности, представляют собой собственные значения сопряжённого оператора B^* .

Введём также решения однородного сопряжённого уравнения (7) $\tau_s(t, \bar{\lambda})$ при $s = \overline{1, n}$ с неоднородными условиями

$$V_j(\tau_s) = \delta_{j,s} \cdot \Delta^*(\bar{\lambda}), \quad j = \overline{1, n}.$$

Пусть λ_0 – нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ и его кратность равна m_0 . Тогда при любом $s = \overline{1, n}$ в упорядоченной строке

$$\left\| \tau_s(t, \bar{\lambda}_0), \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \tau_s(t, \bar{\lambda}_0), \dots, \frac{1}{(m_0 - 1)!} \frac{\partial^{m_0 - 1}}{\partial \bar{\lambda}^{m_0 - 1}} \tau_s(t, \bar{\lambda}_0) \right\| \quad (9)$$

первая ненулевая функция представляет собой собственную функцию оператора B^* , а последующие члены строки дают цепочку присоединённых функций, порождённых ею.

В дальнейшем собственные значения оператора B^* будем обозначать через $\bar{\lambda}_\nu$, $\nu \geq 1$, а соответствующие собственные и присоединённые функции – через $R_\nu(t)$, $\nu \geq 1$.

В работе [16] доказано следующее утверждение.

Теорема А [16]. Пусть область определения оператора B задаётся регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения сопряжённого оператора B^* также задаётся регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.

Нам потребуется также следующее утверждение [17].

Теорема В [17]. Пусть оператор B порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединённых функций оператора B является полной системой в пространстве $L_2(0, T)$.

Применяя теорему А и теорему В к сопряжённому оператору B^* , можем сформулировать утверждение.

Теорема С. Пусть выполнено требование I. Тогда система собственных и присоединённых функций оператора B^* полна в пространстве $L_2(0, T)$.

2. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения Трикоми. В данном пункте приведена самосопряжённая краевая задача для уравнения Трикоми.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой Ляпунова σ , оканчивающейся в окрестности точек $O(0, 0)$ и $B(1, 0)$ малыми дугами “нормальной кривой” σ_0 , а при $y < 0$ – характеристиками

$$OC : x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$$

уравнения

$$Av = yv_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = f(x, y). \quad (10)$$

Задача Т. Найти в области Ω решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4},$$

$$x^{5/6} D_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(x))x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6} D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x))(1-x)^{-2/3}) = 0,$$

где

$$u(\chi_0(x)) = u(x, -[3x/2]^{2/3}), \quad 0 \leq x \leq 1/2,$$

$$u(\chi_1(x)) = u(x, -[3(1-x)/2]^{2/3}), \quad 1/2 \leq x \leq 1.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче Т, обозначим через A . Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов η_m . Собственные функции оператора A , соответствующие собственным значениям η_m , обозначим через $v_m(x, y)$.

В работе [18] доказано следующее утверждение.

Теорема К [18]. Оператор A является самосопряжённым в пространстве $L_2(\Omega)$.

Как следствие данной теоремы К заключаем, что собственные функции $\{v_m(x, y), m \in \mathbb{N}\}$ оператора A образуют полную систему функций в $L_2(\Omega)$.

3. О единственности решения краевой задачи для уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A . Пусть Ω – конечная область из п. 2. В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим задачу для уравнения (1) с краевыми условиями по t (2) и с условиями (3), (4).

В операторном виде задачу (1)–(4) запишем как

$$Bu = Au(x, y; t) + f(x, y; t), \quad (x, y; t) \in Q. \quad (11)$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в п. 1. Оператор A действует по переменным (x, y) и его спектральные свойства приведены в п. 2.

Докажем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (11).

Теорема. Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au \quad (12)$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) \neq \emptyset,$$

где $\sigma(B)$ и $\sigma(A)$ – спектры операторов B и A соответственно.

Доказательство. Необходимость. Пусть λ_ν – некоторое собственное значение оператора B (с собственной функцией $w_\nu(t)$) и является также собственным значением оператора A , т.е. $\lambda_\nu = \eta_m$ (с собственной функцией $v_m(x, y)$). Тогда функция $u(x, t) = w_\nu(t)v_m(x, y)$ будет нетривиальным решением однородной задачи (12). Необходимость требований теоремы доказана.

Достаточность. Пусть ни одно из собственных значений оператора B $\{\lambda_k, k \geq 1\}$ не является собственным значением оператора A . Иначе говоря, число вида $\{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$ не является собственным значением оператора B , т.е. $\Delta(\eta_m) \neq 0$. Покажем, что решение $u(x, y; t)$ однородной краевой задачи (12) тождественно равно нулю в пространстве $L_2(Q)$. Для этого при фиксированном $(x, y) \in \Omega$ и $j = \overline{1, n}$ введём функции

$$F_j(x, y; \bar{\lambda}) = \int_0^T \overline{\tau_j(t, \bar{\lambda})} u(x, y; t) dt,$$

представляющее собой целые функций от $\bar{\lambda}$.

Согласно формуле Лагранжа (6) функцию $AF_j(x, y; \bar{\lambda})$ при $j = \overline{1, n}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} AF_j(x, y; \bar{\lambda}) &= \int_0^T \overline{\tau_j(t, \bar{\lambda})} \cdot Au(x, y; t) dt = \int_0^T \overline{\tau_j(t, \bar{\lambda})} \cdot Bu(x, y; t) dt = \\ &= \int_0^T u(x, y; t) \overline{l^+(\tau_j)} dt + U_{n+1}(u) \overline{V_n(\tau_j)} + \dots + U_{2n}(u) \overline{V_1(\tau_j)} = \\ &= \lambda \int_0^T u(x, y; t) \overline{\tau_j(t, \bar{\lambda})} dt + U_{n+1}(u) \overline{V_n(\tau_j)} + \dots + U_{2n}(u) \overline{V_1(\tau_j)} = \\ &= \lambda F_j(x, y; \lambda) + \Delta^*(\bar{\lambda}) \cdot U_{2n-j+1}(u). \end{aligned} \quad (13)$$

Если λ_0 – нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ кратности m_0 , то из соотношений (13) вытекают равенства

$$AF_j(x, y; \bar{\lambda}_0) = \lambda_0 F_j(x, y; \bar{\lambda}_0),$$

$$A \frac{dF_j(x, y; \bar{\lambda}_0)}{d\bar{\lambda}} = \lambda_0 \frac{dF_j(x, y; \bar{\lambda}_0)}{d\bar{\lambda}} + F_j(x, y; \bar{\lambda}_0),$$

$$\dots$$

$$A \frac{d^{m_0-1} F_j(x, y; \bar{\lambda}_0)}{d\bar{\lambda}^{m_0-1}} = \lambda_0 \frac{d^{m_0-1} F_j(x, y; \bar{\lambda}_0)}{d\bar{\lambda}^{m_0-1}} + \frac{d^{m_0-2} F_j(x, y; \bar{\lambda}_0)}{d\bar{\lambda}^{m_0-2}}.$$

Поскольку $\lambda_0 \in \sigma(A)$, то из соотношений (13) вытекают и равенства

$$\frac{d^s F_j(x, y; \bar{\lambda}_0)}{d\bar{\lambda}^s} \equiv 0 \quad \text{при} \quad s = \overline{0, m_0 - 1}.$$

Тогда при $j = \overline{1, n}$ отношения $F_j(x, y; \bar{\lambda})/\Delta^*(\bar{\lambda})$ являются целыми функциями от λ , поскольку в точке $\lambda = \lambda_0$ имеют устранимую особенность.

Теперь переходим ко второму этапу доказательства. Согласно методике работы В.А. Ильина [5] функцию $F_j(x, y; \bar{\lambda})$ умножим скалярно на собственную функцию $v_m(x, y)$:

$$G_{j,m}(\bar{\lambda}) \equiv \int_{\Omega} F_j(x, y; \bar{\lambda}) v_m(x, y) dx dy, \quad m \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Кратности нулей функционала $G_{j,m}(\lambda)$ не меньше кратностей нулей функций $F_j(x, y; \lambda)$. Следовательно, отношения

$$Q_{j,m}(\bar{\lambda}) \equiv \frac{G_{j,m}(\bar{\lambda})}{\Delta^*(\bar{\lambda})}$$

определяют целые функции от $\bar{\lambda}$.

Дальнейший анализ целых функций $Q_{j,m}(\bar{\lambda})$ основан на технике оценок порядка роста и типа целых функций. Заметим, что целая функция $Q_{j,m}(\bar{\lambda})$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений однородного уравнения

$$l^+(R(t, \bar{\lambda})) = \bar{\lambda} R(t, \bar{\lambda}), \quad 0 < t < T.$$

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ все различные корни n -й степени из $(-1)^{n+1}$. Разберём сначала случай нечётного $n = 2p - 1$.

Пусть ρ – произвольное комплексное число из сектора $S_0 = \{\rho \in \mathbb{C} : 0 < \arg \rho < \pi/n\}$.

Перенумеруем числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ в следующем порядке:

$$\varepsilon_1 = \omega_{i_1}, \quad \varepsilon_2 = \omega_{i_2}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = \omega_{i_n}.$$

Тогда для любого $\rho \in S_0$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}(\rho \varepsilon_1) \leq \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_2) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_{p-1}) < 0,$$

$$\operatorname{Re}(\rho \varepsilon_{p-1}) \leq \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_p) \leq \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_{p+1}),$$

$$0 < \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_{p+1}) \leq \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_{p+2}) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\rho \varepsilon_n).$$

Теперь вместо фундаментальной системы решений $\{R_1(t, \rho^n), \dots, R_n(t, \rho^n)\}$ будем рассматривать фундаментальную систему решений однородного сопряжённого уравнения

$$l^+(R(t, \bar{\lambda})) = \bar{\lambda} R(t, \bar{\lambda}), \quad 0 < t < T, \quad \bar{\lambda} = (-\rho)^n.$$

Выберем её согласно теореме 1 из [17, с. 58]:

$$h_1(t, \rho) = e^{\rho \varepsilon_1 t} [1 + o(1/\rho)], \quad \dots, \quad h_n(t, \rho) = e^{\rho \varepsilon_n t} [1 + o(1/\rho)], \quad \rho \in S_0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (14)$$

В результате при любом ρ из сектора S_0 имеем асимптотическое представление характеристического определителя $\tilde{\Delta}(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$, записанное через фундаментальную систему решений $\{h_1(t, \rho), \dots, h_n(t, \rho)\}$ (см. [17]).

При $j < p$, $\rho \in S_0$, $\rho \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} V_n(h_j) &= (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}[1], \quad V_{n-1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}[0], \quad \dots \\ \dots, \quad V_{n-2m+2}(h_j) &= (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}[1], \quad V_{n-2m+1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}[0], \quad \dots \\ \dots, \quad V_r(h_j) &= (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_1)}[\bar{\alpha}_1], \quad V_1(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_r)}[\bar{\alpha}_r]. \end{aligned}$$

Точно также при $j > p$, $\rho \in S_0$, $\rho \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} V_n(h_j) &= (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}e^{\rho\varepsilon_j T}[0], \quad V_{n-1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_1)}e^{\rho\varepsilon_j T}[1], \quad \dots \\ \dots, \quad V_{n-2m+2}(h_j) &= (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}e^{\rho\varepsilon_j T}[0], \quad V_{n-2m+1}(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\gamma_m)}e^{\rho\varepsilon_j T}[1], \quad \dots \\ \dots, \quad V_r(h_j) &= (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_1)}e^{\rho\varepsilon_j T}[\bar{\beta}_1], \quad V_1(h_j) = (\rho\varepsilon_j)^{(n-1-\nu_r)}e^{\rho\varepsilon_j T}[\bar{\beta}_r]. \end{aligned}$$

Здесь для краткости обозначено $[a] = a + o(1/\rho)$.

Подставим все эти выражения в соотношение (8):

$$\tilde{\Delta}^*(\bar{\lambda}) = \det(V_\nu(h_j)) = \rho^{\hat{\alpha}} e^{\rho(\omega_{p+1} + \dots + \omega_n)T} \Delta_0^*,$$

где $\hat{\alpha} = 2[n-1-\gamma_1 + \dots + n-1-\gamma_m] + n-1-\nu_1 + \dots + n-1-\nu_r$, $\Delta_0^* = [\theta_0^*] + e^{\rho\omega_p}[\theta_1^*]$.

Числа θ_0^* и θ_1^* определяются по сопряжённым формам $\{V_1, \dots, V_n\}$ и аналогичны числам θ_0 и θ_1 , определяемым по формам $\{U_1, \dots, U_n\}$. Эти числа отличны от нуля согласно теореме А.

При любом ρ из сектора S_0 асимптотическое представление $\widetilde{\tau}_1(t, \rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$, записанное через фундаментальную систему решений (14), имеет следующий вид:

$$\widetilde{\tau}_1(t, \rho) = \frac{1}{(\rho\varepsilon_p)^{(n-1-\gamma_1)}} \rho^{\hat{\alpha}} e^{\rho(\omega_{p+1} + \dots + \omega_n)T} e^{\rho\varepsilon_p t} ([\xi_0^*] e^{-\rho\varepsilon_p t} + e^{\rho\omega_p(T-t)} [\xi_1^*]),$$

где ξ_0^* , ξ_1^* – некоторые числовые определители. Аналогичные асимптотические представления получаем для $\widetilde{\tau}_j(t, \rho)$ при $j > 1$.

Отсюда вытекает, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} Q_1^{k,m}(\bar{\lambda}) &= \int_{\Omega} \left(\int_0^T \frac{\widetilde{\tau}_1(t, \bar{\lambda})}{\widetilde{\Delta}^*(\rho)} u(x, y; t) dt \right) v_{k,m}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T \frac{e^{\rho\varepsilon_p t} ([\xi_0^*] e^{-\rho\varepsilon_p t} + e^{\rho\omega_p(T-t)} [\xi_1^*])}{(\rho\varepsilon_p)^{(n-1-\gamma_1)} ([\theta_0^*] + e^{\rho\omega_p} [\theta_1^*])} u(x, y; t) v_{k,m}(x, y) dt dx dy. \end{aligned}$$

Используя лемму Римана [19, с. 496] в случае $\operatorname{Re}(\rho\varepsilon_p) = \operatorname{Re}(\rho\varepsilon_{p+1}) = 0$, легко получаем, что $\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} Q_{1,m}(\bar{\lambda}) = 0$, $\rho \in S_0$. Если $\operatorname{Re}(\rho\varepsilon_p) > 0$, то $\operatorname{Re}(\rho\varepsilon_{p+1}) < 0$. Отсюда сразу же следует $\lim_{\rho \rightarrow \infty} Q_{1,m}(\bar{\lambda}) = 0$ при $\rho \in S_0$. Таким образом, вдоль всех лучей $\rho \in S_0$ и $\rho \rightarrow \infty$ имеем предельное равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} Q_{1,m}(\bar{\lambda}) = 0.$$

Аналогичные асимптотические представления получаем для $Q_{j,m}(\bar{\lambda})$ при $j > 1$ и при всех $m = 2, 3, \dots$

Точно такой же анализ можно провести для сектора $\rho \in S_1$, где $S_1 = \{\rho \in \mathbb{C} : \pi/(2p) < \arg \rho < \pi/p\}$. Следовательно, по теоремам Фрагмена–Линделёфа и Лиувилля [20, с. 203] для функций конечного порядка получаем, что

$$Q_{j,m}(\bar{\lambda}) \equiv 0 \quad \text{при всех } \bar{\lambda} \in \mathbb{C}.$$

Отсюда для любых $m \in \mathbb{N}$ и любого $j = \overline{1, n}$ имеем

$$\int_{\Omega} v_m(x, y) F_j(x, y; \bar{\lambda}) dx dy \equiv 0 \quad \text{для любых } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда из полноты системы $\{v_m(x, y), m \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ вытекает, что

$$F_j(x, y; \bar{\lambda}) \equiv 0 \quad \text{для любых } x, y \in \Omega \text{ и любого } \lambda \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, имеем

$$\int_0^T \widetilde{\tau}_j(t, \bar{\lambda}) u(x, y; t) dt \equiv 0 \quad \text{для любых } x, y \in \Omega \text{ и любого } \lambda \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда вытекает тождество для любых $x, y \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu \geq 0$:

$$\frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} \int_0^T \widetilde{\tau}_j(t, \bar{\lambda}) u(x, y; t) dt \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Теперь вместо λ в равенство (15) подставим λ_τ – произвольное собственное значение оператора B . Кратность собственного значения λ_τ считается равной m_τ . Пусть параметр ν в формуле (15) принимает значения $1, 2, \dots, m_\tau - 1$. Тогда в силу (9) из (15) получаем, что при любом фиксированном $(x, y) \in \Omega$ функция $u(x, y; t)$ ортогональна ко всем собственным функциям оператора B^* . Поскольку система собственных функций оператора B^* является полной системой в $L_2(0, T)$, то отсюда вытекает

$$u(x, y; t) \equiv 0 \quad \text{при всех } t \in (0, T), \quad (x, y) \in \Omega.$$

В случае чётного $n = 2p$ утверждение теоремы доказывается аналогично. Таким образом, достаточность теоремы доказана.

Заключение. В данной работе исследован оператор L , представимый в виде разности двух коммутирующих операторов A и B . Оператор B порождается линейным дифференциальным выражением высокого порядка и регулярными двухточечными краевыми условиями на отрезке $[0, T]$. Оператор A соответствует уравнению Трикоми в плоской области, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения. Рассматриваемый нами оператор A не является полуограниченным и имеет полную ортогональную систему собственных функций в соответствующем функциональном пространстве. При указанном выборе операторов B и A операторное уравнение $Lu = Bu - Au = 0$ имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда спектры операторов B и A не пересекаются.

Обратим внимание на предложенный в настоящей статье метод доказательства теоремы единственности, представляющий собой “гибрид” метода направляющих функционалов М.Г. Крейна [17] и метода В.А. Ильина [5].

Дальнейшее обобщение сформулированного нами результата может развиваться в следующем направлении. Во-первых, в качестве оператора B можно выбрать модельный оператор, порождаемый дифференциальным выражением

$$Bw(t_1, t_2, \dots, t_q) = \sum_{i=0}^q \left(\sum_{k=0}^{n_q} p_{ki}(t_i) \frac{\partial^k w(t_1, t_2, \dots, t_q)}{\partial t_i^k} \right)$$

на параллелепипеде $(t_1, t_2, \dots, t_q) \in [0, T_1] \times [0, T_2] \times \dots \times [0, T_q]$.

Область определения оператора B надо выбрать так, чтобы граничные условия по каждой переменной t_i на отрезке $[0, T_i]$ являлись регулярными в смысле Биркгофа [17].

В качестве оператора A можно выбирать эллиптические операторы, подчинённые условиям С. Агмона [21], которые гарантируют, что оператор A имеет полную систему корневых функций. При указанном выборе операторов B и A наша формулировка критерия единственности сохраняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проекты AP 14869558, AP 08855402).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam; London; New York, 2006.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
4. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
5. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.
6. Тихонов И.В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. Математика. 2003. Т. 67. № 2. С. 133–166.
7. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 396–405.
8. Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2000. Т. 229. № 3. С. 3–175.
9. Grisvard P. Equations operationnelles abstraites et problemes aux limites // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1967. V. 21. № 3. P. 308–347.
10. Дубинский Ю.А. Об одной абстрактной теореме и её приложениях к краевым задачам для неклассических уравнений // Мат. сб. 1969. Т. 79 (121). № 1. С. 91–117.
11. Романко В.К. Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 117–131.
12. Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Мат. Заметки. 2017. Т. 101. Вып. 3. С. 403–412.
13. Орынбасаров М.О. О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 151–161.
14. Шелухин В.В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сибирский мат. журн. 1991. Т. 32. № 2. С. 154–165.
15. Шелухин В.В. Задача о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени // Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 4. С. 760–764.
16. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.
17. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
18. Кальменов Т.Ш. О самосопряжённых краевых задачах для уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 66–75.
19. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. М., 1984.
20. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1979.
21. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. № 2. P. 119–143.

Казахский национальный университет
имени Аль-Фараби, г. Алматы,
Институт математики и математического
моделирования, г. Алматы, Казахстан,
Международный университет информационных
технологий, г. Алматы, Казахстан

Поступила в редакцию 03.04.2022 г.
После доработки 03.04.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4+517.968.7

СВОЙСТВА ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НИХ

© 2023 г. В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова

Рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка с тождественно вырожденной в области определения матрицей перед старшей производной искомой вектор-функции. Приведены критерии разрешимости таких систем уравнений и начальных задач для них, примеры, иллюстрирующие теоретические результаты.

DOI: 10.31857/S037406412301003X, EDN: OBSWYK

1. Введение и постановка задачи. При моделировании природных и технических процессов в настоящее время часто встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков и алгебраические уравнения (см., например, [1–4]). Совокупность взаимосвязанных ОДУ и алгебраических уравнений можно записать в виде системы ОДУ с вырожденной матрицей в области определения при старшей производной искомой вектор-функции. В линейном случае эти уравнения имеют вид равенств

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^k A_i(t) x^{(i)}(t) = f(t), \quad t \in T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

где $A_i(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, $x(t)$ и $f(t)$ – искомая и известная вектор-функции, $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$, и выполнено соотношение

$$\det A_k(t) = 0 \quad \text{для любого } t \in T. \quad (2)$$

Если моделируемый процесс обладает последствием, то система может включать интегральные уравнения (ИУ) Вольтерры и Фредгольма первого и второго рода, и её можно представить в виде системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ)

$$(\Lambda_k + V + \lambda \Phi)y := \sum_{i=0}^k A_i(t)y^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^t \mathcal{K}(t,s)y(s)ds + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in T, \quad (3)$$

где λ – скалярный параметр (возможно комплексный), $\mathcal{K}(t,s)$, $K(t,s)$ – $(n \times n)$ -матрицы, определённые в области $T \times T$, $y(t)$ – искомая вектор-функция.

Предполагается, что начальные условия для систем (1), (3) задаются в виде равенств

$$P_x x(\alpha) = a_x, \quad P_y y(\alpha) = b_y, \quad (4)$$

где P_x , P_y – заданные $(q \times nk)$ -матрицы полного ранга, $q \leq nk$, a_x , b_y – заданные векторы, $x = (x^T, (x^{(1)})^T, \dots, (x^{(k-1)})^T)^T$, $y = (y^T, (y^{(1)})^T, \dots, (y^{(k-1)})^T)^T$, T – транспонирование.

Задачи (1), (3), (4) при $P_x, P_y = E_{nk}$ совпадают с задачами Коши, когда заданы

$$x(\alpha) = a = (a_0^T, a_1^T, \dots, a_{k-1}^T)^T, \quad y(\alpha) = b = (b_0^T, b_1^T, \dots, b_{k-1}^T)^T,$$

где E_{nk} – единичная матрица размерности nk , a_i , b_i – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k-1}$.

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (2), называют в настоящее время *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ) [1]. Используются также термины “дескрипторные системы” [4], “алгебро-дифференциальные системы” (АДС) [5], “сингулярные системы” [6]. Выражения вида (3) с условием (2) авторы называют “вырожденными системами ИДУ” или “ДАУ с возмущениями в виде операторов Вольтерры” [7].

Под *решениями* систем (1), (3) понимаются любые вектор-функции $x(t), y(t) \in C^k(T)$, которые обращают системы в тождество на отрезке T при подстановке. Если вектор-функции $x(t), y(t)$ удовлетворяют условиям (4), то они являются решениями задач (1), (3), (4).

Замечание 1. Очевидно, что для существования решений задач Коши для систем (1), (3) необходимо (но не всегда достаточно) выполнение критерия Кронекера–Капелли в точке $t = \alpha$ для векторов $x^{(k)}(\alpha), y^{(k)}(\alpha)$, а именно:

$$\text{rank } A_k(\alpha) = \text{rank}(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \bar{a}),$$

$$\text{rank } A_k(\alpha) = \text{rank}\left(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \bar{b} - \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K(\alpha, s) \zeta(s) ds\right),$$

где $\bar{a} = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\alpha) a_i$, $\bar{b} = \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\alpha) b_i$, $\zeta(s)$ – некоторая вектор-функция.

Итак, для разрешимости задач Коши необходимо, чтобы начальные векторы a_i, b_i принадлежали некоторым многообразиям $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y \subset \mathbb{R}^{kn}$. Более того, для разрешимости задачи Коши для системы (3) необходима разрешимость системы интегральных уравнений первого рода с вырожденным ядром вида

$$\lambda \int_{\alpha}^{\beta} L_2 K(\alpha, s) \zeta(s) ds = L_2[f(\alpha) - \bar{b}],$$

неособенная матрица $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ обладает свойством $LA_k(\alpha) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, блок L_2 имеет размерность $[n - r] \times n$, $r = \text{rank } A_k(\alpha)$.

Матрицы P_x, P_y в формулах (4) выбираются проекторами начальных данных на $\mathcal{R}_x$ и $\mathcal{R}_y$ соответственно. В школе Г.А. Свиридюка условия вида (4) называют *условиями Шоуолтера–Сидорова* [8]. Для ДАУ условия в форме (4) ввёл Ю.Е. Бояринцев [9].

К началу 1990-х гг. было установлено, что формула обращения оператора ДАУ первого порядка Λ_1 при достаточно гладких входных данных для некоторых классов линейных ДАУ содержит интегро-дифференциальный оператор (ИДО) с тождественно вырожденной матрицей на отрезке T при старшей производной и вырожденным ядром $K(t, s)$ [6, с. 12]. Оказалось, что такой ИДО можно трактовать как левый обратный оператор к оператору Λ_1 . Это стало дополнительным стимулом для изучения вырожденных систем ИДУ [10].

В монографии [2] построена теория вырожденных систем ИДУ с аналитическими входными данными и получены условия сходимости разностного метода первого порядка. В рамках этого подхода в школе Ю.Е. Бояринцева был получен ряд результатов о разрешимости систем ИДУ, построен и обоснован ряд численных методов решения начальных и краевых задач, включая нелинейный случай [11–16]. Утверждения о свойствах вырожденных систем ИДУ со слабой особенностью в ядре доказаны в статье [17]. С начала 2000-х гг. в этой области начинают активно работать и зарубежные математики (см., например, [18–20] и приведённую в них библиографию).

2. Вспомогательные определения и утверждения.

Определение 1 (см., например, [5]). *Полуобратной матрицей* к $(m \times n)$ -матрице $M(t)$, $t \in T$, называется $(n \times m)$ -матрица $M^-(t)$, удовлетворяющая для любых $t \in T$ уравнению $M(t)M^-(t)M(t) = M(t)$.

Полуобратная матрица определена для любого $t \in T$ и любой $(m \times n)$ -матрицы $M(t)$ [5]. Если матрица $M(t)$ – квадратная и неособенная, то $M^{-1}(t) = M^{-}(t)$. Матрица $M^{-}(t)$ определена в общем случае неединственным образом (ее частным случаем является псевдообратная матрица $M^{+}(t)$).

Лемма 1 (см., например, [5, с. 35]). Пусть задана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $M(t)\chi = f(t)$, $t \in T$. Тогда:

1) если $M(t) \in C^j(T)$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\text{rank } M(t) = r = \text{const}$ для любого $t \in T$, то существует матрица $M^{-}(t) \in C^j(T)$. Если $\text{rank } M(t) \neq \text{const}$, $t \in T$, то хотя бы один элемент любой матрицы $M^{-}(t)$ имеет разрыв второго рода на отрезке T ;

2) СЛАУ разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\Pi(t)f(t) = 0, \quad t \in T,$$

и все её решения представимы в виде

$$\chi = M^{-}(t)f(t) + \tilde{\Pi}(t)\omega(t), \quad t \in T,$$

где $\Pi(t) = [E_m - M(t)M^{-}(t)]$, $\tilde{\Pi}(t) = [E_n - M(t)M^{-}(t)]$ – проекторы на ядро и образ матрицы $M(t)$ соответственно, $\omega(t)$ – произвольная вектор-функция;

3) СЛАУ имеет постоянные решения χ тогда и только тогда, когда

$$f(t) = M(t)C^{-}\theta, \quad C = \int_{\alpha}^{\beta} M^T(s)M(s)ds, \quad \theta = \int_{\alpha}^{\beta} M^T(s)f(s)ds,$$

и все её решения представимы в виде

$$\chi = C^{-}\theta + (E_n - C^{-}C)c \quad \text{для любого } c \in \mathbb{R}^n.$$

Ниже нам потребуются некоторые сведения о системах ИУ Фредгольма первого рода

$$\hat{\Phi}_{\varsigma} := \int_{\alpha}^{\beta} \hat{K}(t, s)\varsigma(s)ds = f(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

где $\hat{K}(t, s)$ – $(m \times n)$ -матрица, определённая в области $T \times T$, $\varsigma \equiv \varsigma(t)$ – искомая вектор-функция.

Определение 2. Ядро $\hat{K}(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_{i=\overline{1, m}, j=\overline{1, n}}$ интегральных уравнений (5) называется вырожденным, если все его элементы можно представить в виде конечной суммы произведений вида $k_{ij}(t, s) = \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} a_{\nu, ij}(t)b_{\nu, ij}(s)$.

Лемма 2 [15]. Любое матричное вырожденное ядро $\hat{K}(t, s)$ разложимо на произведение матриц $M(t)$ и $L(s)$ размерностей $(m \times \mu)$ и $(\mu \times n)$ соответственно, где $\mu \leq \min m \max n_{ij}$.

Пример 1. В одномерном случае, когда $\hat{K}(t, s) = \sum_{\nu=1}^i a_{\nu}(t)b_{\nu}(s)$, $i \in \mathbb{N}$, можно принять $M(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_i(t))$ и $L(s) = (b_1(s), b_2(s), \dots, b_i(s))^T$. Например, для ядра $K(t, s) = (t-s)^i$ возможно представление $K(t, s) = (C_i^0 t^i, \dots, C_i^{i-1} t, C_i^i \cdot 1)(1, -s, \dots, (-s)^i)^T$, где $C_i^j = i!/(j!(i-j)!)$ – биномиальные коэффициенты.

На основе леммы 1 и представления вырожденного ядра в виде произведения $\hat{K}(t, s) = M(t)L(s)$ в работе [15] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть в системе (5) ядро $\hat{K}(t, s)$ вырожденное и $M(t)$, $L(s)$ – матрицы из леммы 2. Тогда для разрешимости системы (5) необходимо и достаточно выполнения условий:

- 1) $f(t) = M(t)C^{-}\theta$;
- 2) $\chi = \tilde{C}C^{-}\chi$,

в которых $C = \int_{\alpha}^{\beta} M^T(s)M(s)ds$, $\tilde{C} = \int_{\alpha}^{\beta} L(s)L^T(s)ds$, $\theta = \int_{\alpha}^{\beta} M^T(s)f(s)ds$, $\chi = C^{-1}\theta + (E_{\mu} - C^{-1}C)c$, c – произвольный вектор из $\mathbb{R}^{\mu}$.

Более того, все решения системы описываются формулой

$$\varsigma(t) = \bar{\varsigma}(t) + \xi(t) = L^T(t)\tilde{C}^{-1}\chi + (I - \Phi_0)w,$$

где $\Phi_0 w = \int_{\alpha}^{\beta} K_0(t,s)w(s)ds$, $K_0(t,s) = L^T(t)\tilde{C}^{-1}L(s)$, I – единичный оператор, $w \equiv w(t)$ – произвольная вектор-функция, которая обладает свойством $b = \tilde{C}\tilde{C}^{-1}b$, $b = \int_{\alpha}^{\beta} L(s)w(s)ds$.

Замечание 2. Обратим внимание, что проверка условий леммы 3 существенно упрощается, если $\det \tilde{C} \neq 0$. Тогда при выполненном условии 1) система (5) имеет решения при произвольных значениях вектора χ и произвольных вектор-функциях $w(t)$. Однородная система (5) $\hat{\Phi}\varsigma = 0$ имеет ненулевое ядро $\varsigma = (I - \Phi_0)w$.

Отметим ещё одно полезное соотношение. Из формулы Лейбница для дифференцирования произведений вытекает равенство

$$d_i[MF] = \mathcal{M}_i[M]d_i[F], \quad (6)$$

где $M \equiv M(t)$, $F \equiv F(t)$ – некоторые матрицы подходящей размерности из $C^i(T)$,

$$d_i[M] = \begin{pmatrix} M \\ (d/dt)M \\ \vdots \\ (d/dt)^i M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_i[M] = \begin{pmatrix} C_0^0 M & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)} & C_1^1 M & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_i^0 M^{(i)} & C_i^1 M^{(i-1)} & \dots & C_i^i M \end{pmatrix}.$$

3. Сведения из теории линейных ДАУ. Введём следующие понятия.

Определение 3. Пространство решений (ПР) однородного ДАУ (1) *конечномерно*, если все произведения $\tilde{X}_d(t)c$, где $\tilde{X}_d(t)$ – $(n \times d)$ -матрица из $C^k(T)$, c – вектор произвольных постоянных, являются решениями ДАУ, и на отрезке T нет других решений. Минимально возможное значение целочисленного параметра d называется *размерностью* ПР системы (1). ПР однородного ДАУ (1) *бесконечномерно*, если оно содержит бесконечное количество линейно-независимых решений.

Выделим класс линейных ДАУ, наиболее близких по свойствам к системам ОДУ в нормальной форме (форме Коши).

Определение 4. Система (1) *имеет решение типа Коши* на отрезке T , если она разрешима для любой вектор-функции $f(t) \in C^{kn}(T)$ и её решения представимы в виде линейной комбинации

$$x(t, c) = X_d(t)c + \psi(t), \quad (7)$$

где $X_d(t)$ – $(n \times d)$ -матрица из $C^k(T)$ со свойством $\text{rank } d_{k-1}[X_d(t)] = d$ для любого $t \in T$, $d_{k-1}[\cdot]$ – оператор из формул (6), c – вектор произвольных постоянных, $\psi(t)$ – вектор-функция со свойством $\Lambda_k \psi(t) = f(t)$, $t \in T$, и на любом подотрезке $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$ нет решений, отличных от $x(t, c)$.

Пример 2. Рассмотрим однородное ДАУ

$$\bar{\Lambda}_1 x := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 2\gamma \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0, \quad t \in T = [1, 2],$$

где γ – параметр. Для любого $\gamma \neq 1$ в определениях 3, 4 имеем, что $d = 0$. Если $\gamma = 1$, то в качестве базиса ПР можно взять вектор-функции $\phi_j(t) = (2t^j, -t^j)^T$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Из вида базиса следует, что $\dim \ker \bar{\Lambda}_1 = \infty$, и одну из компонент решения можно взять в виде произвольной вектор-функции из $C^1(T)$.

Определение 5. Если существуют операторы

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^l L_j(t)(d/dt)^j, \quad \Omega_r = \sum_{j=0}^r R_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t)$, $R_j(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы из $C(T)$, обладающие свойствами

$$\Omega_l \circ \Lambda_k v = \tilde{\Lambda}_k v, \quad \Lambda_k \circ \Omega_r v = \tilde{\Lambda}_k v \quad \text{для любой } v \equiv v(t) \in C^{\nu+k}(T),$$

$\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t) v^{(i)}(t)$, $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t) v^{(i)}(t)$, $\nu = \{l \text{ или } r\}$, $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{A}_i(t)$ – некоторые $(n \times n)$ -матрицы из $C(T)$, $\det \tilde{A}_k(t) \neq 0$, $\det \tilde{A}_k(t) \neq 0$ для любого $t \in T$, то они называются *левым и правым регуляризирующими операторами* (ЛРО и ПРО) для системы (1), а наименьшие возможные l , r называются её *индексами* (левым и правым).

Замечание 3. Ниже принимается, что индекс оператора Λ_k со свойством $\det A_k(t) \neq 0$ при всех $t \in T$ равен нулю.

Пример 3. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [-1, 1]. \quad (8)$$

Умножив ДАУ на матрицу $L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ и выразив компоненту x_1 через x_2 , систему расщепляем на дифференциальное и алгебраическое уравнения

$$(\gamma - 2)t\dot{x}_1(t) + 2\gamma x_1(t) = \tilde{f}_1, \quad x_2(t) = \gamma t x_1(t) + \tilde{f}_2, \quad t \in T, \quad (9)$$

где $\tilde{f}_1 = 2f_1 + t\dot{f}_1 - \dot{f}_2$, $\tilde{f}_2 = f_2(t) - t f_1(t)$. При $\gamma = 2$ видим, что решение системы (8) типа Коши существует, $d = 0$, индекс $l = 2$, и при любых $f \in C^2(T)$ выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}_1 f = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} t/4 & -1/4 \\ t^2/2 & -t/2 \end{pmatrix} \dot{f}.$$

В качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_2 = (d/dt)\hat{\Lambda}_1$.

При $\gamma = 1$ однородная система (8) имеет семейство решений из определения 3:

$$\tilde{X}_d(t)c = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ t\phi_1(t) & t\phi_2(t) \end{pmatrix} c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

где $\phi_1(t) = \{0, t \in T_1; t^2, t \in T_2\}$, $\phi_2(t) = \{t^2, t \in T_1; 0, t \in T_2\}$, $T_1 = [-1, 0]$, $T_2 = (0, 1]$. Через точку $(x_1(0), x_2(0))^T = 0$ проходит бесконечное число решений.

Если подотрезок $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ обладает свойством $0 \notin T_0$, то ДАУ (8) при $\gamma = 1$ на T_0 имеет решение типа Коши, где $d = 1$, индекс $l = 1$. В качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_1 = \text{diag}\{1, (d/dt)\}L(t)$. С использованием формул (9) решение можно записать в явной форме.

Введём понятия и приведём утверждения, позволяющие вычислить индекс ДАУ и коэффициенты ЛРО.

Определение 6. Совокупность самой системы (1) и её производных до порядка i включительно $d_i[\Lambda_k x - f] = 0$, $t \in T$, где $d_i[\cdot]$ – оператор из формул (6), называется *i -продолженной системой* (1).

С использованием формул (6) i -продолженную систему запишем в виде соотношений

$$D_i[\mathbf{A}]x_{i+k} = \sum_{j=0}^k (O_j, \mathcal{M}_i[A_j], \tilde{O}_j)x_{i+k} = (B_i, \Gamma_i[\mathbf{A}])x_{i+k} = d_i[f(t)], \quad (10)$$

где $\mathbf{A} = (A_k(t), A_{k-1}(t), \dots, A_0(t))$, матрица $D_i[\mathbf{A}]$ имеет размерность $[n_i \times (i + k + 1)n]$, нулевые матрицы O_j , $\tilde{O}_j$ имеют размерности $[n_i \times jn]$, $[n_i \times (k - j)n]$, $n_i = n(i + 1)$, $j = \overline{0, k}$, соответственно, $x_{i+k} = d_{i+k}[x]$, $B_i \equiv B_i(t)$ – блок размерности $[n_i \times kn]$, $\Gamma_i[\mathbf{A}]$ – блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A_k(t)$ на диагонали.

Далее нам потребуется сводка следующих результатов: теоремы 1, 2 и леммы 4, 5 из работы [7] и леммы 4.1–4.3 из работы [5]. Для того чтобы сформулировать эти утверждения в более компактном виде, ослабим требования на гладкость входных данных.

Теорема 1. Пусть в ДАУ (1): $A_i(t) \in C^{2m}(T)$, $i = \overline{0, k}$, $f(t) \in C^m(T)$, $m = kn$. Тогда три условия на систему (1) на отрезке T эквивалентны:

- 1) на T определено решение типа Коши;
- 2) на T определён ЛРО;
- 3) на T определён ПРО.

Следствие 1. Пусть для произведения операторов $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, определён ЛРО. Тогда для каждого сомножителя Λ_{k_j} , $j = \overline{1, i}$, $t \in T$, определён свой ЛРО.

Более того, если для каждого оператора Λ_{k_j} , $j = \overline{1, i}$, $t \in T$, определён ЛРО, то для оператора произведения Λ_ν определён ЛРО.

Следствие 2. Пусть оператор Λ_{k_1} , $t \in T$, является ЛРО для оператора Λ_{k_2} , $t \in T$. Тогда начальная задача $\Lambda_{k_1} v = 0$, $t \in T$, $v^{(j)}(\alpha) = 0$, $j = \overline{0, k_1 - 1}$, имеет на отрезке T только нулевое решение.

Следствие 3. Пусть для каждого оператора Λ_{k_j} , $j = \overline{1, i}$, $t \in T$, с матрицами-коэффициентами из $C^\infty(T)$ определён ЛРО. Тогда для произведения $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, справедливо равенство $d_\nu = \sum_{j=0}^i d_j$, где d_ν , d_j – размерности ПРО операторов Λ_ν и Λ_{k_j} , $t \in T$, из формулы (7).

Замечание 4. Утверждение, эквивалентное следствию 3, впервые доказано при аналитических входных данных для ДАУ первого порядка в статье [21].

К сожалению, нет пока общей формулы, кроме некоторых частных случаев (см. ниже лемму 4), позволяющей вычислить индекс произведения произвольных операторов ДАУ по их индексам. Индекс произведения может меняться в широких пределах, например,

$$[E_n - (d/dt)N]^j = E_n - (d/dt)jN, \quad [E_n - (d/dt)N] \circ [E_n + (d/dt)N] = E_n,$$

где N – постоянная матрица со свойством $N^2 = 0$, оператор $E_n \pm (d/dt)jN$, $j \in \mathbb{N}$, имеет индекс 2.

Теорема 2. Пусть в ДАУ (1) выполнены условия теоремы 1 и левый индекс ДАУ равен l . Тогда:

- 1) правый и левый индексы ДАУ равны и справедливы неравенства $0 \leq l \leq kn$;
- 2) в формуле (7) вектор-функция имеет вид

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s) f(s) ds + \sum_{j=0}^{l-k} C_j(t) f^{(j)}(t), \quad l \geq k, \quad \psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s) f(s) ds, \quad l < k, \quad (11)$$

где $K(t, s)$, $C_j(t)$ – некоторые $(n \times n)$ -матрицы, $t \in T$, $(t, s) \in T \times T$.

Замечание 5. Способы вычисления индекса (левого) и матричных коэффициентов ЛРО можно найти, например, в статье [7]. При вычислении ПРО нужно решать ДАУ с матрицами коэффициентов в качестве искомым величин [22]. Поэтому этот метод приведения ДАУ к нормальной форме в настоящее время представляет только теоретический интерес.

Лемма 4. Пусть входные данные операторов Λ_{k_j} , $t \in T$, $j = \overline{1, i}$, обладают достаточной гладкостью. Тогда:

- 1) индекс оператора $\Lambda_{k+j} = (d/dt)^j \Lambda_k$, $t \in T$, равен индексу Λ_k , $t \in T$, при любом $j \in \mathbb{N}$;
- 2) если индексы сомножителей Λ_{k_j} , $t \in T$, не превосходят единицы, то индекс оператора

$\Lambda_\omega = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, не превосходит i ;

3) если индексы сомножителей Λ_{k_j} , $t \in T$, не превосходят k_j , то индекс оператора $\Lambda_\nu = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}$, $t \in T$, не превосходит ν . Более того, индекс произведения $(\prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}) \circ \Lambda_k$ не превосходит индекса оператора Λ_k .

Доказательства следствий вытекают из вида формулы обращения (11), в которой при выполнении условия $l \leq k$ отсутствуют операторы $C_j(t)(d/dt)^j$, $j \geq 1$.

Замечание 6. Если ДАУ (1) имеет решение типа Коши, то сохраняются важнейшие свойства линейных систем ОДУ в нормальной форме: 1) множества решений на отрезках T и $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ совпадают (отсутствует “память”); 2) если через заданную точку ($b \in \mathbb{R}^{kn}$, $t_* \in T$) проходит решение ДАУ, то оно единственно на T , так как решение системы $\dot{X}_{k-1}(t_*)c = b - \dot{\psi}_{k-1}(t_*)$ относительно вектора c единственно: $\text{rank } \dot{X}_{k-1}(t_*) = d < kn$ для любого $t_* \in T$, где $\dot{X}_{k-1}(t_*) = d_{k-1}[X_d(t)]$, $\dot{\psi} = d_{k-1}[\psi(t)]$.

Это и обусловило появление термина “решение типа Коши”.

Лемма 5. Начальная задача (1), (4) в условиях теоремы 1 разрешима тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $c \in \mathbb{R}^{nk}$ выполнены соотношения

$$\text{rank } G_{l-1} = (\text{rank } G_{l-1} \mid h - g), \quad (12)$$

где $G_{l-1} = \Gamma_{l-1}[\mathbf{A}]|_{t=\alpha}$, $h = d_{l-1}[f(t)]|_{t=\alpha}$, $g = B_{l-1}(\alpha)[P_x^- a_x + (E_{nk} - P_x^- P_x)c]$.

Более того, если вектор g вычисляется единственным образом, то решение начальной задачи единственно.

Рассмотрим задачу Коши, где $P_x = E_{nk}$, $a_x = a$. Формула (12) является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $D_{l-1}[\mathbf{A}]d_{k+l-1}[x] = d_{l-1}[f]$ в точке $t = \alpha$. Согласно разбиению матрицы $D_{l-1}[\mathbf{A}]$ в формуле (10) это равенство эквивалентно разрешимости СЛАУ $G_{l-1}Z = h - B_{l-1}(\alpha)a$, $Z = d_{l-1}[x^{(k)}]|_{t=\alpha}$.

Если ввести вектор-функции $z^{(i)}(t) = (d/dt)^i[\Lambda_k x - f]$, $t \in T$, $i = \overline{0, l-1}$, то они в силу сказанного выше удовлетворяют условиям $z^{(i)}(\alpha) = 0$. Начальная задача

$$\Omega_l z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, l-1},$$

где Ω_l – ЛРО для системы (1), имеет согласно следствию 2 только одно решение $z \equiv z(t) = [\Lambda_k x - f] = 0$. ДАУ $\Lambda_k x = f$ имеет решение типа Коши. СЛАУ $\dot{X}_{k-1}(\alpha)\chi = a - \dot{\psi}_{k-1}(\alpha)$, где $\dot{X}_{k-1}(t) = d_{k-1}[X_d]$, $\dot{\psi}_{k-1}(t) = d_{k-1}[\psi]$, имеет единственное решение χ . Для завершения доказательства необходимо применить лемму 1, из которой следует, что все начальные векторы принадлежат многообразию $P_x^- a_x + (E_2 - P_x^- P_x)c$, где вектор c пробегает все значения из $\mathbb{R}^{nk}$.

Пример 4. Рассмотрим начальную задачу

$$\bar{A}_1 x = \bar{A}_1 \dot{x} + \bar{A}_0 x = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 + \gamma & 1 \\ 4 + 4\gamma & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (2 + \gamma)e^t + 5e^{2t} \\ (4 + 4\gamma)e^t + 12e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 1], \quad (13)$$

$$P_x x(\alpha) = (1, 2)x(0) = a_x = 3.$$

Если $\gamma \neq 0$, то индекс ДАУ $l = 1$, размерность ПР $d = 1$, в качестве ЛРО можно принять оператор

$$\Omega_1 = \text{diag}\{1, (d/dt)\}L, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы и векторы в формуле (12) имеют вид $G_0 = \bar{A}_1$, $B_0 = \bar{A}_0$,

$$P_x^- a_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x)c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad h = \begin{pmatrix} 7 + \gamma \\ 16 + 4\gamma \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3 + 2\gamma \\ 4 + 8\gamma \end{pmatrix} c_2.$$

Из условия равенства рангов (12) следует уравнение $(1 - 2\gamma)c_2 = 1 - 2\gamma$; $c_2 = 1$ для любого $\gamma \neq 1/2$. Итак, для любого $\gamma \neq 1/2$ имеем

$$x(0) = P_x^- a_x + (E_2 - P_x^- P_x)c = (1, 1)^T, \quad x = (e^t, e^{2t})^T.$$

Если $\gamma = 1/2$, то умножением ДАУ (13) на матрицу L выделим алгебраическое уравнение $(1, 2)x = e^t + 2e^{2t}$, $t \in T$, и начальное условие является его следствием при $t = 0$. Начальная задача совместна, но её решение неединственно.

Если $\gamma = 0$, то $d = 0$, $l = 2$. В формуле (12) матрицы и векторы имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = d_1[f(t)]|_{t=0}, \quad P_x^- a_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x) c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналогичные выкладки при $l = 1$, получим, что $c_2 = 1$, $x(0) = (1, 1)^T$.

4. Общие свойства вырожденных систем ИДУ. По аналогии с ДАУ введём следующие понятия.

Определение 7. Пространство решений однородной системы ИДУ (3) *конечномерно*, если все произведения $\tilde{Y}_d(t)c$, где $\tilde{Y}_d(t)$ – $(n \times d)$ -матрица из $C^k(T)$, c – вектор произвольных постоянных, являются решениями системы ИДУ, и на отрезке T нет других решений.

Минимально возможное значение целочисленного параметра d называется *размерностью* ПР системы (3). ПР однородной системы ИДУ (3) бесконечномерно, если оно содержит бесконечное количество линейно-независимых решений.

Определение 8. Если существуют операторы

$$\tilde{\Omega}_\varrho = \sum_{j=0}^{\varrho} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j, \quad \bar{\Omega}_r = \sum_{j=0}^r \tilde{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

где $\tilde{L}_j(t)$, $\tilde{R}_j(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы из $C(T)$, обладающие свойствами

$$\tilde{\Omega}_\varrho \circ (\Lambda_k + V + \lambda\Phi)v = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V} + \lambda\tilde{\Phi})v, \quad (\Lambda_k + V + \lambda\Phi) \circ \bar{\Omega}_r v = (\bar{\Lambda}_k + \bar{V} + \lambda\bar{\Phi})v,$$

$v \equiv v(t) \in C^{\nu+k}(T)$ – произвольная вектор-функция, $\nu = \{\varrho \text{ или } r\}$, входные данные операторов $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V} + \lambda\tilde{\Phi})$, $(\bar{\Lambda}_k + \bar{V} + \lambda\bar{\Phi})$ принадлежат пространствам $C(T)$, $C(T \times T)$ соответственно, старшие коэффициенты операторов $\tilde{\Lambda}_k$, $\bar{\Lambda}_k$ удовлетворяют условиям

$$\det \tilde{A}_k(t) \neq 0, \quad \det \bar{A}_k(t) \neq 0 \quad \text{для любого } t \in T,$$

то они называются *левым и правым регуляризирующими операторами* для системы (3), а наименьшие возможные ϱ , r называются её *индексами* (левым и правым).

Для систем ИДУ теряется часть важных свойств общих решений ДАУ с решением типа Коши, отмеченных в замечании 6.

Пример 5. Рассмотрим одномерный пример

$$\dot{y}(t) + \int_0^t b^2 y(s) ds = 0, \quad t \in T = [0, 1], \quad y(t_*) = a, \quad t_* \in T.$$

Общее решение здесь имеет вид $y(t, c) = c \cos(bt)$, $c \in \mathbb{R}^1$. Начальная задача с условием $y(0) = a$ имеет единственное решение $y(t) = a \cos(bt)$ при любом $a \in \mathbb{R}^1$.

Если $a \neq 0$, $t_* > 0$ и $t_* b = \pi/2$, то задача не имеет на отрезке $[0, 1]$ решений, так как $y(t_*) = 0$. В случае $y(t_*) = 0$, $t_* b = \pi/2$ видим, что $y(t, c) = c \cos(bt)$ при любом $c \in \mathbb{R}^1$.

Пример 6. Рассмотрим уравнения

$$0\dot{v}(t) + v(t) - \int_\alpha^\beta v(s) ds = 1, \quad 0\dot{y}(t) + y(t) - \int_\alpha^t y(s) ds = 1, \quad t \in T,$$

которые имеют решения $v(t) = 1/(1 - \tau)$, $\tau = \beta - \alpha$, $y(t) = e^{(t-\alpha)}$. В отличие от ДАУ с решением типа Коши ИДУ “помнят” отрезок, на котором определены, и при произвольных сужениях отрезка $T_0 \subset T$ решения меняются (или могут вообще не существовать).

Пример 7. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1 + V)y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \dot{y}(t) + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} y(t) + \int_0^t (t-s)^\nu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} y(s) ds = f(t),$$

где $t \in T = [0, 1]$, $f(t) \in C^{\nu+2}(T)$. Здесь определён ЛРО в смысле определения 8, а именно,

$$\tilde{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^{\nu+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПР системы $\Lambda_1 x = 0$, $t \in T$, бесконечномерно. В качестве базиса ПР можно взять набор вектор-функций $\phi_j = (t^j, -t^j)^\top$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ЛРО для оператора Λ_1 не существует. Для разрешимости рассматриваемой системы ИДУ необходимо выполнение условия

$$(d/dt)^j [f_2(t) - 4f_1(t)]|_{t=0} = 0, \quad j = \overline{0, \nu+1}.$$

Итак, в отличие от ДАУ существование ЛРО для оператора вырожденной системы ИДУ не гарантирует её разрешимость при сколь угодно гладких входных данных и в общем случае индекс ИДУ не ограничен числом nk . В случае нашего примера ν можно задавать произвольно.

Пример 8. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1 + \gamma V)y = A_1 \dot{y}(t) + y(t) + \gamma \int_0^t A_1^\top y(s) ds = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 1],$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = 0, \quad f(t) \in C^2(T).$$

Решение $y = (y_1(t), f_2(t) - \gamma \int_0^t y_1(s) ds)^\top$, где $y_1(t) = [f_1(t) - \dot{f}_2(t)]/(1 - \gamma)$, единственно. Для операторов Λ_1 , $(\Lambda_1 + \gamma V)$, $\gamma \neq 1$, определены индексы $l = 2$, $\varrho = 2$ в смысле определений 5, 8. Здесь $l > k$, $k = 1$. При $\gamma = 1$ ПР системы $(\Lambda_1 + \gamma V)y = 0$, $t \in T$, бесконечномерно. В качестве базиса можно принять $\phi_j(t) = (-jt^{j-1}, t^j)^\top$, $j \in \mathbb{N}$. Не существует ЛРО и для совместности системы ИДУ необходимо выполнение условия $f_1(t) - \dot{f}_2(t) = 0$, $t \in T$.

Определение 9. Совокупность системы (3) и её производных до порядка i включительно $d_i[(\Lambda_k + V + \lambda \Phi)y - f] = 0$, $t \in T$, где $d_i[\cdot]$ – оператор из формул (6), называется *i-продолженной системой* (3).

Продолженную систему из определения 9 с использованием формулы (6) запишем в виде равенства

$$\tilde{D}_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}]y_{i+k} + \int_\alpha^t d_i[\mathcal{K}(t, s)]y(s) ds + \lambda \int_\alpha^t d_i[K(t, s)]y(s) ds = d_i[f(t)], \quad (14)$$

где

$$\tilde{D}_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}] = D_i[\mathbf{A}] + \sum_{j=1}^i \mathcal{M}_i[Q_{j-1}]\mathcal{E}_{-j}, \quad \mathcal{E}_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix},$$

нулевые блоки в матрице $\mathcal{E}_{-j}$ уравнивают размерности слагаемых матриц, $Q_{j-1} \equiv Q_{j-1}(t) = \partial^{j-1} \mathcal{K}(t, s) / \partial t^{j-1}|_{t=s}$, $y_{i+k} = d_{i+k}[y]$. Ниже используется аналог разбиения из формул (10):

$$\tilde{D}_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}] = (\tilde{B}_i(t) \quad \tilde{\Gamma}_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}]).$$

Лемма 6. Пусть для системы ИДУ (3) выполнены условия:

1) левый индекс определён и равен ϱ ;

2) $\text{rank } \Gamma_i[\mathbf{A}, \mathcal{K}] = \text{const}$, $t \in T$.

Тогда, начиная с некоторого $i = \varrho$, справедливо равенство

$$\tilde{\Gamma}_i^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}] \tilde{\Gamma}_i^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}] = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \tilde{Z}_{21}(t) & \tilde{Z}_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (15)$$

где первые n строк матрицы $\tilde{\Gamma}_\varrho^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}]$, разбитые на $(n \times n)$ -блоки, можно принять в качестве коэффициентов ЛРО для системы (3).

Доказательство. Из определения 8 следует, что, умножив строки матрицы $\tilde{\Gamma}_i^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}]$ на коэффициенты ЛРО и сложив их, получим матрицу с первой блочной строкой $(\tilde{A}_k(t), 0, \dots, 0)$. Так как имеет место неравенство $\det \tilde{A}_k(t) \neq 0$ для любого $t \in T$, видим, что в СЛАУ

$$\tilde{\Gamma}_\varrho^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}] Z = 0, \quad t \in T,$$

первые n компонент вектор-функции Z с необходимостью равны нулю. Из леммы 1 и условия о постоянстве ранга матрицы этой СЛАУ следует, что найдётся матрица $\tilde{\Gamma}_\varrho^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}]$ нужной нам гладкости и все решения СЛАУ описываются формулой

$$Z = \{E_{n(\varrho+1)} - \tilde{\Gamma}_\varrho^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}] \tilde{\Gamma}_\varrho^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}]\} u, \quad t \in T,$$

где u – произвольная вектор-функция подходящей размерности. Из этого соотношения следует справедливость равенства (15) и утверждения в целом.

Опишем самый простой класс вырожденных систем линейных ИДУ общего вида.

Теорема 3. Пусть для системы ИДУ (3) выполнены условия:

1) оператор Λ_k из системы (3) удовлетворяет условиям теоремы 1 и его левый индекс равен $l \leq k$;

2) $\mathcal{K}(t, s)$, $K(t, s) \in C^k(T \times T)$, $f(t) \in C^k(T)$.

Тогда:

1) в качестве ЛРО $\tilde{\Omega}_\varrho$ для оператора системы ИДУ (3) можно принять оператор Ω_l ;

2) система (3) при $\lambda = 0$ разрешима и её общее решение имеет структуру вида

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \varphi(t), \quad t \in T,$$

где $Y_d(t) = (E_n + \mathcal{V})X_d(t)$, $\varphi(t) = (E_n + \mathcal{V})\psi(t)$, $\mathcal{V}$ – некоторый оператор Вольтерры, $X_d(t)$ – матрица, $\psi(t)$ – вектор-функция, c – вектор из определения 4;

3) система (3) разрешима при всех λ , за исключением не более чем счётного множества значений λ_j , $j \in \mathbb{N}$, и её общее решение имеет структуру вида

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \xi(t), \quad t \in T,$$

где $Y_d(t) = (E_n + \lambda \mathbf{W})(E_n + \mathcal{V})X_d(t)$, $\xi(t) = (E_n + \lambda \mathbf{W})(E_n + \mathcal{V})\psi(t)$, $\mathbf{W}$ – некоторый оператор Фредгольма, $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$.

Доказательство. Прямое вычисление показывает, что при $l \leq k$ справедливо равенство $\Gamma_l[\mathbf{A}] = \tilde{\Gamma}_l^+[\mathbf{A}, \mathcal{K}]$, из которого согласно лемме 4 следует справедливость утверждения 1) теоремы.

Запишем систему (3) в виде равенства

$$\Lambda_k y = -V y - \lambda \Phi y + f : \Lambda_k y = w(t), \quad t \in T,$$

где $w(t) = -\int_\alpha^t \mathcal{K}(t, s)y(s) ds - \lambda \int_\alpha^\beta K(t, s)y(s) ds + f(t)$. Используя формулы обращения (7) и (11), с учётом условия $l \leq k$ запишем выражение

$$y(t, c) = X_d(t)c + \int_0^t K(t, s)w(s) ds + C_0(t)w(t), \quad t \in T.$$

Согласно утверждениям из монографии [23] произведение операторов Вольтерры является оператором Вольтерры, произведение оператора Вольтерры и оператора Фредгольма – оператором Фредгольма. Таким образом, получено интегральное уравнение вида

$$y(t) = \int_{\alpha}^t \mathcal{W}(t, s)y(s) ds + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} W(t, s)y(s) ds + \zeta(t), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^t \mathcal{W}(t, s)y(s) ds &= \int_{\alpha}^t \left[K(t, s) \int_{\alpha}^s \mathcal{K}(s, \tau)y(\tau) d\tau \right] ds + \int_{\alpha}^t C_0(t)\mathcal{K}(t, s)y(s) ds, \\ \int_{\alpha}^{\beta} W(t, s)y(s) ds &= \int_{\alpha}^t \left[K(t, s) \int_{\alpha}^{\beta} K(s, \tau)y(\tau) d\tau \right] ds + \int_{\alpha}^{\beta} C_0(t)K(t, s)y(s) ds, \\ \zeta(t) &= X_d(t)c + \int_{\alpha}^t K(t, s)f(s) ds + C_0(t)f(t). \end{aligned}$$

Для системы ИУ (16) при $\lambda = 0$ в книге [23] приведена формула, из которой следует, что

$$y(t, c) = (E_n + \mathcal{V})\zeta = \zeta(t) + \int_{\alpha}^t \tilde{W}(t, s)\zeta(s) ds, \quad (17)$$

где $\tilde{W}(t, s)$ – резольвентное ядро для системы (16), $\zeta \equiv \zeta(t)$. Из формулы (17) вытекает справедливость утверждения 2) теоремы.

Докажем утверждение 3), когда $\lambda \neq 0$. Запишем систему уравнений (17) в виде равенства

$$y(t) = \lambda(E_n + \mathcal{V}) \int_{\alpha}^{\beta} W(t, s)y(s) ds + (E_n + \mathcal{V})\zeta(t). \quad (18)$$

В силу правила умножения операторов Вольтерры и Фредгольма система уравнений (18) является системой уравнений Фредгольма второго рода. Из этого факта следует справедливость утверждения 3) теоремы. Теорема доказана.

Пример 9. Обратим внимание на следующее обстоятельство. При переходе от системы ИДУ к системе ИУ (17) мы неявно предполагаем, что в последней $y \in C^k(T)$. Действительно, предположения о гладкости входных данных гарантируют это. Но для систем ИДУ со слабой особенностью в ядре это не так. Рассмотрим систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + V)y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \int_0^t p(t, s) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

где $t \in T = [0, 1]$, $p(t, s) = (t - s)^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$. Индекс оператора Λ_1 равен единице и удовлетворяет условиям теоремы 3. Предположим, что $\gamma = 1/2$, и продифференцируем второе уравнение по t , в результате получим

$$\dot{y}_2(t) + \frac{y_2(0)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_0^t \dot{y}_2(s) ds = \dot{f}_2(t), \quad t \in T.$$

Из исходного уравнения следует, что $y_2(0) = f_2(0)$. Условия $f_2(t) \in C^1(T)$ для выполнения включений $y_1(t), y_2(t) \in C^1(T)$ здесь мало. Необходимо ещё выполнение условия $f_2(0) = 0$.

Докажем утверждения о разрешимости систем ИДУ при более общих предположениях.

Теорема 4. Пусть для системы (3) при $\lambda = 0$ выполнены условия:

1) $A_i(t) \in C^{2\varrho}(T)$, $i = \overline{0, k}$, $K(t, s) \in C^{2\varrho}(T \times T)$, $f(t) \in C^\varrho(T)$;

2) существует ЛРО $\tilde{\Omega}_\varrho$ из определения 8;

3) $\text{rank } D_{\varrho-1} = (\text{rank } D_{\varrho-1} \mid h)$, $D_{\varrho-1} = \tilde{D}_{\varrho-1}[\mathbf{A}, K]|_{t=\alpha}$, $h = d_{\varrho-1}[f(t)]|_{t=\alpha}$.

Тогда:

1) система разрешима и её общее решение имеет вид

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \xi(t), \quad (19)$$

где $Y_d(t)$ – $(n \times d)$ -матрица из $C^k(T)$ со свойством $\text{rank } d_{k-1}[Y_d(t)]|_{t=\alpha} = d$, c – вектор произвольных постоянных,

$$\xi(t) = (\Lambda_{\varrho-k} + V)f = \sum_{j=0}^{\varrho-k} C_j(t)f^{(j)}(t) + \int_{\alpha}^t K(t, s)f(s)ds, \quad \varrho \geq k, \quad \xi(t) = Vf, \quad k > \varrho,$$

$K(t, s)$, $C_j(t)$ – некоторые $(n \times n)$ -матрицы, $t \in T$, $(t, s) \in T \times T$;

2) существует ПРО, причём правый и левый индексы системы (3) равны.

Доказательство. Условие 3) теоремы является условием Кронекера–Капелли и означает, что производные невязки, вектор-функции

$$z^{(i)}(t) = (d/dt)^i[(\Lambda_k + V)y - f], \quad t \in T, \quad i = \overline{0, \varrho-1},$$

удовлетворяют условиям $z^{(i)}(\alpha) = 0$ в силу формулы (14).

Начальная задача

$$\tilde{\Omega}_\varrho \circ (\Lambda_k + V)y = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V})y = 0, \quad t \in T, \quad y^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = \overline{0, k-1},$$

имеет только одно решение $y \equiv y(t) = 0$, так как система

$$(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V})y = 0, \quad t \in T,$$

приводима к нормальной форме. Отсюда следует, что начальная задача

$$\tilde{\Omega}_\varrho z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, \varrho-1},$$

также имеет только одно решение $z \equiv z(t) = 0$.

Таким образом, исходное уравнение $(\Lambda_k + V)y = f$, $t \in T$, имеет по крайней мере одно решение при любом свободном члене $f \equiv f(t)$, удовлетворяющем условию 3) теоремы, так как $z = (\Lambda_k + V)y - f$, $t \in T$.

Далее, общее решение системы невырожденных ИДУ

$$\tilde{\Omega}_\varrho \circ (\Lambda_k + V)y = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{V})y = \tilde{\Omega}_\varrho f(t), \quad t \in T,$$

имеет вид

$$\hat{y}(t, c) = \hat{Y}(t)c + \varpi(t), \quad \varpi(t) = \int_{\alpha}^t \Psi(t, s)[\Omega_\varrho f(s)]ds, \quad t \in T, \quad (t, s) \in T \times T, \quad (20)$$

где $\hat{Y}(t)$ – $(n \times kn)$ -матрица из $C^k(T)$ со свойством $\det d_{k-1}[\hat{Y}(t)]|_{t=\alpha} \neq 0$, c – вектор произвольных постоянных, ядро $\Psi(t, s)$ – некоторая $(n \times n)$ -матрица со свойством

$$\partial^j \Psi(t, s) / \partial t^j|_{t=s} \equiv 0, \quad t \in T, \quad j = \overline{0, k-1}. \quad (21)$$

Если подставить сумму (20) в исходную систему, то получим систему алгебраических уравнений $M(t)c = m(t)$, где $M(t) = (\Lambda_k + V)\hat{Z}(t)$, $m(t) = f(t) - (\Lambda_k + V)\varpi(t)$, и согласно лемме 1 все её решения представимы в виде соотношения

$$c = C^{-1}\theta + (E_{kn} - C^{-1}C)v \quad \text{для любого } v \in \mathbb{R}^{kn},$$

$$C = \int_{\alpha}^{\beta} M^T(s)M(s)ds, \quad \theta = \int_{\alpha}^{\beta} M^T(s)m(s)ds. \quad (22)$$

Подставив выражение для c из формулы (22) в формулу (20) и проинтегрировав по частям с учётом формул (21) выражение для вектор-функции $\varpi(t)$, получим доказательство утверждения 1) теоремы. Методы доказательства утверждения 2) теоремы можно найти в монографии [5, леммы 4.1–4.3]. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть в условии 3) теоремы 4 $\text{rank } D_{\varrho-1} = \varrho n$.

Тогда система (3) разрешима при всех λ , за исключением не более чем счётного множества значений λ_j , $j \in \mathbb{N}$, и её общее решение имеет структуру вида

$$y(t, c) = (E_n + \lambda \mathbf{W}_0)Y_d(t)c + (E_n + \lambda \mathbf{W}_0)\xi(t), \quad t \in T,$$

где $\mathbf{W}_0$ – некоторый оператор Фредгольма.

Доказательство. Запишем систему (3) в виде равенства

$$(\Lambda_k + V)y = -\lambda \Phi y + f, \quad t \in T. \quad (23)$$

Ранговое условие гарантирует разрешимость системы ИДУ

$$(\Lambda_k + V)y = w, \quad t \in T,$$

при любой заданной достаточно гладкой вектор-функции $w \equiv w(t)$. Используя формулы обращения (19), для системы (23) запишем выражение

$$y = Y_d(t)c + \xi(t) + \lambda(\Lambda_{\varrho-k} - V)\Phi y, \quad t \in T. \quad (24)$$

Подробно проделав выкладки, убеждаемся, что система (24) является системой ИУ Фредгольма второго рода. Разрешая систему, убеждаемся в справедливости следствия.

Для начальной задачи (3), (4) при $\lambda = 0$ можно сформулировать и доказать утверждение о совместности, аналогичное лемме 5. При $\lambda \neq 0$ возникают трудности, отмеченные в замечании 2 и не преодоленные до сих пор. Приведём очевидное утверждение.

Лемма 7. Начальная задача (3), (4) в условиях следствия 4 разрешима тогда и только тогда, когда разрешима СЛАУ

$$\hat{Y}_{k-1}(\alpha)c = a_y - \hat{\xi}_{k-1}(\alpha),$$

где $\hat{Y}_{k-1}(t) = P_y d_{k-1}[(E_n + \lambda \mathbf{W}_0)Y_d(t)]$, $\hat{\xi}_{k-1}(t) = P_y d_{k-1}[(E_n + \lambda \mathbf{W}_0)\xi(t)]$, относительно вектора c . Если решение c одно, то решение начальной задачи единственно.

Замечание 7. Обратим внимание, что в условиях теоремы 4 левый обратный оператор $\Lambda_{\varrho-k} + V$ к оператору системы (3) $\Lambda_k + V$ является ИДО с вырожденной матрицей при старших производных. Но пока нет утверждений об обратимости утверждения 1) теоремы 4 (аналога теоремы 1).

Таким образом, условие $\text{rank } D_{\varrho-1} = \varrho n$ гарантирует, что система ИДУ (3) не содержит подсистем вида

$$\int_{\alpha}^t \mathcal{K}_1(t, s)y_1(s)ds + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K_1(t, s)y_1(s)ds = f_1(t), \quad t \in T,$$

где $\mathcal{K}_1(t, s)$, $K_1(t, s)$ – некоторые матрицы (в общем случае прямоугольные), $y_1(t)$, $f_1(t)$ – линейные комбинации компонент вектор-функций $y(t)$ и $f(t)$ соответственно.

Пример 10. Рассмотрим два модельных ИУ

$$\int_0^t y(s) ds + \lambda \int_0^1 y(s) ds = f(t), \quad \int_0^t w(s) ds + \lambda \int_0^1 tw(s) ds = f(t), \quad t \in T = [0, 1]. \quad (25)$$

При $t = 0$ имеем необходимые условия совместности

$$\lambda \int_0^1 y(s) ds = f(0), \quad f(0) = 0.$$

Дифференцируя ИУ (25) по t , получаем

$$y(t) = \dot{f}(t), \quad w(t) + \lambda \int_0^1 w(s) ds = \dot{f}(t), \quad t \in T.$$

Разберём до конца случай с решением $y(t)$. Подставив $y(t) = \dot{f}(t)$ в условие совместности, получим равенства

$$\lambda \int_0^1 \dot{f}(s) ds = \lambda[f(1) - f(0)] = f(0).$$

Итак, первое ИУ (25) разрешимо тогда и только тогда, когда $(1 + \lambda)f(0) - \lambda f(1) = 0$. При $\lambda = 0$ это стандартное условие разрешимости уравнения

$$\int_0^t y(s) ds = f(t), \quad t \in T.$$

Выкладки показали, что в случае общих систем ИДУ (3) условия на $f(t)$ могут быть сложнее, чем условие 3) теоремы 4.

Полный анализ второго уравнения предоставляем провести читателю. Обращаем внимание, что пример имеет ненулевые характеристические числа.

Заключение. Отметим, что содержание статьи является подготовительным материалом для построения численных методов решения начальных задач вида (3), (4) на основе метода наименьших квадратов или родственного ему метода нормальных сплайнов [16, 24]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках госзадания по проекту “Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (№ гос. регистрации 121041300060-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: a Projector Based Analysis. Berlin, 2013.
2. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.
3. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск, 2006.
4. *Белов А.А.* Дескрипторные системы и задачи управления. М., 2015.

5. Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск, 1998.
6. Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. Численные методы решения сингулярных систем. Новосибирск, 1989.
7. Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В. Линейные дифференциально-алгебраические уравнения с возмущениями в виде интегральных операторов Вольтерры // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1309–1320.
8. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3. № 2. С. 104–125.
9. Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М. Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вопросы прикладной математики. Иркутск, 1975. С. 140–152.
10. Алгебро-дифференциальные системы и методы их решения / Под. ред. О.В. Васильева. Новосибирск, 1993.
11. Булатов М.В. Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 692–697.
12. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
13. Чистякова Е.В. О свойствах разностных схем для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений индекса 1 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2009. Т. 49. № 9. С. 1579–1588.
14. Чистякова Е.В. Дифференциально-алгебраические уравнения с малым нелинейным членом // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1365–1368.
15. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. On some properties of the Fredholm-type integral algebraic equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. Special Issue on Integral Equations and their Applications. 2020. <https://doi.org/10.1002/mma.6747>.
16. Chistyakova E.V., Chistyakov V.F. Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // Appl. Numer. Math. 2020. V. 149. P. 43–51.
17. Bulatov M.V., Lima P., Weinmuller E. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations // Central Eur. J. of Math. 2014. V. 12. № 2. P. 308–321.
18. Brunner H. Volterra Integral Equations: an Introduction to Theory and Applications. Cambridge, 2017.
19. Liang H., Brunner H. The convergence of collocation solutions in continuous piecewise polynomial spaces for weakly singular Volterra integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 2019. V. 57. P. 1875–1896.
20. Liang H., Brunner H. Collocation methods for integro-differential algebraic equations with index 1 // IMA J. of Numer. Anal. 2020. V. 39. P. 850–885.
21. Чистяков В.Ф. О нетеровом индексе линейных алгебро-дифференциальных систем // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. № 3. С. 209–221.
22. Щеглова А.А. Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замены переменных // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36. № 6. С. 1435–1445.
23. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М., 1975.
24. Горбунов В.К. Метод нормальной сплайн-коллокации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 2. С. 212–224.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 09.11.2021 г.
После доработки 07.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.954

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ
ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ p -ЛАПЛАСИАНА
НА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ
С МОДЕЛЬНЫМ КОНЦОМ

© 2023 г. В. В. Бровкин

Получен критерий существования решений второй краевой задачи для p -лапласиана на римановых параболических многообразиях с модельным концом.

DOI: 10.31857/S0374064123010041, EDN: OBUWCJ

Пусть M – полное связное ориентированное риманово многообразие с краем (возможно пустым). Будем рассматривать задачу

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{на } M, \quad (1)$$

$$|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial M} = h, \quad (2)$$

где $p > 1$ – некоторое вещественное число, ∇ и div – римановы градиент и дивергенция, ν – вектор внешней нормали к ∂M , а f и h – обобщённые функции из пространства $\mathcal{D}'(M)$, причём $\operatorname{supp} h \subset \partial M$.

Если край многообразия M пустой, то условие Неймана (2) предполагается выполненным автоматически. В этом случае всюду ниже считаем, что $h = 0$.

Под $W_{p,\operatorname{loc}}^1(\Omega)$, где Ω – открытое подмножество M , понимается линейное пространство функций, принадлежащих классу $W_p^1(\Omega' \cap \Omega)$ для любого открытого множества $\Omega' \subset M$ с компактным замыканием. Пространство $L_{p,\operatorname{loc}}(\Omega)$ определяется аналогично. Через $C_0^\infty(M)$ обозначаем пространство бесконечно гладких функций на M с компактным носителем.

Через $L_p^1(\Omega)$, где Ω – открытое подмножество M , обозначим линейное пространство обобщённых функций $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, что $\nabla u \in L_p(\Omega)$ [1, с. 12]. Полунорма в $L_p^1(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{L_p^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dV \right)^{1/p}.$$

Решения задачи (1), (2) будем понимать в слабом смысле. Именно, говорим, что функция $u \in W_{p,\operatorname{loc}}^1(M)$ является решением (1), (2), если

$$-\int_M |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dV = (f - h, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(M)$, где dV – элемент объёма многообразия M .

На решения задачи (1), (2) будем накладывать следующее условие на бесконечности:

$$\int_M |\nabla u|^p dV < \infty. \quad (3)$$

Краевые задачи в неограниченных областях и на гладких многообразиях привлекают внимание многих математиков [2–14]. Задача (1)–(3) на гиперболических многообразиях с модельным концом рассмотрена в статье [5]. В данной работе получен критерий существования решений задачи (1)–(3) в случае параболического многообразия.

Определение 1. Ёмкость компакта $B \subset \Omega$ относительно открытого множества $\Omega \subset M$ определяется соотношением

$$\text{cap}_p(B, \Omega) = \inf_{\varphi} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^p dV,$$

где $\inf$ берётся по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, тождественно равным единице в окрестности этого компакта.

Если $\Omega = M$, то вместо $\text{cap}_p(B, \Omega)$ пишем $\text{cap}_p(B)$. Для произвольного замкнутого множества $H \subset M$ полагаем, что

$$\text{cap}_p(H) = \sup_B \text{cap}_p(B),$$

где $\sup$ берётся по всем компактам $B \subset H$. Ёмкость пустого множества считается равной нулю.

Определение 2. Многообразие M называется p -параболическим, если его ёмкость равна нулю, т.е. $\text{cap}_p(M) = 0$. В противном случае многообразие M называется p -гиперболическим.

Заметим, что многообразие M является p -параболическим тогда и только тогда, когда произвольную константу можно приблизить в полунорме пространства $L_p^1(M)$ функциями из $C_0^\infty(M)$, равными единице в окрестности компакта ненулевой меры.

Несложно убедиться в том, что $\mathbb{R}^n$ – p -параболическое многообразие при $p \geq n$ и p -гиперболическое при $p < n$.

Для всех $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$ обозначим

$$N_\Omega(l) = \sup_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_{L_p^1(\Omega)}=1}} |(l, \varphi)|.$$

При этом не исключается случай $N_\Omega(l) = \infty$.

Предположим, что многообразие M представимо в виде

$$M = \omega \cup D \times [r_0, \infty), \quad \omega \cap D \times [r_0, \infty) = \emptyset, \quad (4)$$

где ω – предкомпактная область, D – компактное риманово многообразие с краем, а $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число. Пусть также на множестве $D \times [r_0, \infty)$ задана метрика

$$ds^2 = a^2(r) dr^2 + b^2(r) \tilde{g}_{ij}(\theta) d\theta^i d\theta^j,$$

где a и b – положительные бесконечно гладкие функции на $[r_0, \infty)$, а $\tilde{g}_{ij}$ и θ^i – метрический тензор и локальные координаты на D . Назовём множество $D \times [r_0, \infty)$ модельным концом многообразия M по отношению к области ω (см. [3]). Обозначим

$$M_{r_0} = \omega, \quad M_r = \omega \cup D \times [r_0, r), \quad r > r_0.$$

Из явного выражения для ёмкостного потенциала компакта $\overline{\omega}$ можно увидеть, что многообразие M с модельным концом является p -параболическим в том и только том случае, когда

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)} ds = \infty.$$

Положим

$$E(r) = \int_{r_0}^r \frac{a(s)}{b^{(n-1)/(p-1)}(s)} ds, \quad r > r_0. \quad (5)$$

Легко проверить, что функция E является p -гармонической на множестве $M \setminus \bar{\omega}$. Возьмём последовательность вещественных чисел $r_i > r_0$, $i \in \mathbb{N}$, такую, что

$$E(r_1) = 1, \quad E(r_i) = 2E(r_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots$$

Теорема 1. Пусть M – p -параболическое многообразие с модельным концом (4). Обозначим $\Omega_1 = M_{r_1}$ и $\Omega_i = M_{r_{i+1}} \setminus \bar{M}_{r_{i-2}}$, $i = 2, 3, \dots$. Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{\Omega_i}^{p/(p-1)}(f - h) < \infty \quad (6)$$

и при этом для некоторой последовательности $\eta_i \in C_0^\infty(M)$ были выполнены условия

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f - h, \eta_i) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\eta_i\|_{L_p^1(M)} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_i|_K = 1, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где K – компакт положительной меры.

Приведём примеры, демонстрирующие применения теоремы 1. Всюду в этих примерах будем считать, что $p > 2$.

Пример 1. Пусть $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_3 > 0\}$ – плоскость Лобачевского. Можно показать, что M является многообразием с модельным концом (4), где $\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in M : x_3 < 2\}$, $r = x_3$, $r_0 = 2$ и D – единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с угловой координатой θ . При этом, очевидно, имеем равенство

$$ds^2 = a^2(r) dr^2 + b^2(r) d\theta,$$

где

$$a(r) = \sqrt{\frac{2r^2 - 1}{r^2 - 1}} \quad \text{и} \quad b(r) = \sqrt{r^2 - 1}.$$

Обозначим через Q_i^+ точку многообразия M с координатами $r = 2^i$ и $\theta = \pi/2$, а через Q_i^- – с координатами $r = 2^i$ и $\theta = -\pi/2$. Рассмотрим задачу (1)–(3), где $h = 0$ и

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (\delta_{Q_i^+}(x) - \delta_{Q_i^-}(x)).$$

Здесь $\alpha_i \geq 0$ – вещественные числа, а $\delta_{Q_i^+}(x)$ и $\delta_{Q_i^-}(x)$ – дельта-функции Дирака, сосредоточенные в точках Q_i^+ и Q_i^- . Другими словами,

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (\varphi(Q_i^+) - \varphi(Q_i^-)), \quad \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что M – p -параболическое многообразие, причём

$$r_i \asymp 2^{i(p-1)/(p-2)} \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty.$$

Несложно также увидеть, что множества Ω_i , $i \in \mathbb{N}$, определённые в теореме 1, являются предкомпактными областями, причём из оценок, полученных на основе теорем вложения, следует, что

$$N_{\Omega_i}(f) \asymp 2^{i(p-1)/p} \sum_{\log_2 r_{i-2} < j < \log_2 r_{i+1}} \alpha_j \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty.$$

Возьмём невозрастающую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице на промежутке $(-\infty, 0]$ и нулю на $[1, \infty)$. Можно убедиться в том, что последовательность $\eta_i(x_3) = \eta(2^{-i}x_3)$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом, применив эту теорему, получим, что задача (1)–(3) имеет решение в том и только том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \alpha_i^{p/(p-1)} < \infty.$$

Пример 2. Пусть M – часть плоскости Лобачевского, рассмотренной в предыдущем примере, состоящая из точек (x_1, x_2, x_3) таких, что $x_1 \geq 0$. Положим правую часть f уравнения (1) равной нулю, а функцию h , параметризуя край многообразия координатой x_2 , зададим соотношением

$$h(x_2) = (1 + x_2^2)^{\sigma/2} \operatorname{sign} x_2,$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$. Заметим, что h – нечётная, вообще говоря, разрывная функция переменной x_2 . Из оценок, полученных на основе теорем вложения, имеем

$$N_{\Omega_i}(h) \asymp 2^{i(p-1)(\sigma+2(p-1)/p)/(p-2)} \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

где Ω_i – множества, определённые в теореме 1. Тем самым, применив теорему 1 с той же последовательностью $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$, что и в предыдущем примере, получим, что для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma < -\frac{2(p-1)}{p}.$$

Теорема 1 обобщается на случай произвольного p -параболического риманова многообразия (не обязательно с модельным концом). Именно, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть M – p -параболическое многообразие и $\Omega \subset M$ – липшицева область с компактным замыканием. Предположим, что существует функция $\mathcal{E}$ такая, что

$$\Delta_p \mathcal{E} = 0 \quad \text{на } M \setminus \overline{\Omega}, \quad \mathcal{E} > 0 \quad \text{на } M \setminus \overline{\Omega}, \quad \mathcal{E}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \nu} \Big|_{\partial M \setminus \overline{\Omega}} = 0,$$

и при этом для любого вещественного числа $A > 0$ множество $\{x \in M \setminus \Omega : \mathcal{E}(x) \leq A\}$ компактно. Положим

$$\Omega_1 = \Omega \cup \{x \in M \setminus \Omega : \mathcal{E}(x) < 4\}, \quad \Omega_i = \{x \in M \setminus \Omega : 2^{i-1} < \mathcal{E}(x) < 2^{i+1}\}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (6) и (7), где $\eta_i \in C_0^\infty(M)$, $i \in \mathbb{N}$, а K – компакт положительной меры.

Замечание. Функцию $\mathcal{E}$, определённую в теореме 2, принято называть потенциалом Эванса–Селберга многообразия M . В случае p -параболического многообразия с модельным концом примером такого потенциала, очевидно, является функция E , заданная равенством (5). В общем случае теоремы существования потенциала Эванса–Селберга можно найти в работах [13, 14].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А. Конькову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л., 1985.
2. *Cheng S.Y., Yau S.T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // *Comm. Pure Appl. Math.* 1975. V. 28. № 3. P. 333–354.
3. *Korolkov S.A., Losev A.G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // *Math. Z.* 2012. V. 272. № 1–2. P. 459–472.
4. *Losev A.G., Mazepa E.A.* On solvability of the boundary value problems for harmonic function on noncompact Riemannian manifolds // *Пробл. анал. Issues Anal.* 2019. V. 8 (26). № 3. P. 73–82.
5. Бровкин В.В. О существовании решений задачи Неймана для p -лапласиана на гиперболических многообразиях с модельным концом // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 1. С. 139–141.
6. Бровкин В.В., Коньков А.А. О существовании решений второй краевой задачи для p -лапласиана на римановых многообразиях // *Мат. заметки.* 2021. Т. 109. № 2. С. 180–195.
7. Гадильшин Р.Р., Чечкин Г.А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
8. Григорьян А.А. О размерности пространств гармонических функций // *Мат. заметки.* 1990. Т. 48. № 5. С. 55–61.
9. Кондратьев В.А., Олейник О.А. О параболических по времени решениях параболических уравнений второго порядка во внешних областях // *Вестн. Московского ун-та. Сер. Математика.* 1985. Т. 39. № 4. С. 38–47.
10. Коньков А.А. О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // *Мат. сб.* 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
11. Коньков А.А. О пространстве решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях // *Дифференц. уравнения.* 1995. Т. 31. № 5. С. 805–813.
12. Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряжённых эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // *Изв. АН СССР. Сер. Математика.* 1967. Т. 31. № 5. С. 1179–1199.
13. *Pigola S., Rigoli M., Setti A.G.* Aspects of potential theory on manifolds, linear and non-linear // *Milan J. Math.* 2008. V. 76. P. 229–256.
14. *Pigola S., Rigoli M., Setti A.G.* Some non-linear function theoretic properties of Riemannian manifolds // *Rev. Mat. Iberoamericana.* 2006. V. 22. № 3. P. 801–831.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24.07.2022 г.
После доработки 21.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.25

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНТРОПИЙНЫХ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА–ОРЛИЧА

© 2023 г. Л. М. Кожевникова, А. П. Кашникова

Рассматриваются эллиптические уравнения второго порядка с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака–Орлича, и правой частью из пространства $L_1(\Omega)$. В пространствах Музилака–Орлича–Соболева устанавливаются некоторые свойства и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в областях с липшицевой границей. Кроме того, доказывается эквивалентность и знакоопределённость энтропийных и ренормализованных решений.

DOI: 10.31857/S0374064123010053, EDN: OBVGXN

Введение. В работе рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) + b(\mathbf{x}, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

в строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$, с конечной мерой. Здесь функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (a_1(\mathbf{x}, \mathbf{s}), \dots, a_n(\mathbf{x}, \mathbf{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеют рост, определяемый обобщённой N -функцией $M(\mathbf{x}, z)$.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$. Для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

с ограниченной мерой μ в работе [1] И. Хлебицка в рефлексивном пространстве Музилака–Орлича доказала существование ренормализованного решения задачи Дирихле, а также единственность ренормализованного решения уравнения (3) с диффузной мерой μ .

Если функция Музилака–Орлича M не удовлетворяет Δ_2 -условию, то соответствующее пространство Музилака–Орлича не является рефлексивным, и рассматриваемая задача значительно усложняется. Обычно, если ограничений на рост обобщённой N -функции $M(\mathbf{x}, z)$ не требуется, то предполагается, что она подчиняется условию $\log$ -гёльдеровской непрерывности по переменной $\mathbf{x} \in \Omega$, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам пространства Музилака–Орлича.

Существование ренормализованного решения задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$ и с неоднородной анизотропной функцией Музилака–Орлича доказано в работе [2], а в статье [3] – существование и единственность ренормализованных решений эллиптических включений с многозначным оператором в условиях нерелексивных и несепарабельных пространств Музилака–Орлича.

В работах [4] и [5] установлено существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \mathbf{c}(u)) + a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

с функцией $\mathbf{c} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(\mathbf{a}(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \mathbf{c}(\mathbf{x}, u)) + a_0(\mathbf{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

с каратеодориевой функцией $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0 , доказано в работах [6, 7] при $a_0 \equiv 0$ и в [8].

В работе [9] в пространствах Музилака–Орлича доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$, установлена их эквивалентность.

В настоящей статье получены некоторые свойства и доказана единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле (1), (2) в нереклексивных пространствах Музилака–Орлича в строго липшицевых областях Ω с конечной мерой. Кроме того, доказана эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений рассматриваемой задачи. Ранее в работе [10] в произвольных областях установлен аналогичный результат в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями ($M(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(\mathbf{x})}$, $p_i \in (1, \infty)$, $i = \overline{1, n}$).

1. Пространства Музилака–Орлича–Соболева. В этом пункте приведём необходимые сведения из теории обобщённых N -функций и пространств Музилака–Орлича (см. [11, гл. 1; 12, 13]).

Определение 1. Пусть функция $M(\mathbf{x}, z) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathbf{x}, \cdot)$ – N -функция по $z \in \mathbb{R}$, т.е. она является выпуклой вниз, возрастающей при $z \in \mathbb{R}_+$, чётной, непрерывной, $M(\mathbf{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$, и выполняются соотношения

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} M(\mathbf{x}, z) > 0 \quad \text{для всех } z \neq 0,$$

$$\limsup_{z \rightarrow 0} M(\mathbf{x}, z)/z = 0, \quad \liminf_{z \rightarrow \infty} M(\mathbf{x}, z)/z = \infty;$$

2) $M(\cdot, z)$ – измеримая функция по $\mathbf{x} \in \Omega$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathbf{x}, z)$ называется *функцией Музилака–Орлича* или *обобщённой N -функцией*.

Сопряжённая функция $\overline{M}(\mathbf{x}, \cdot)$ к функции Музилака–Орлича $M(\mathbf{x}, \cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ и любых $z \geq 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathbf{x}, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(\mathbf{x}, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга

$$|zy| \leq M(\mathbf{x}, z) + \overline{M}(\mathbf{x}, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Функция Музилака–Орлича M удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют константы $c > 0$, $z_0 \geq 0$ и функция $H \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ и любых $|z| \geq z_0$ справедливо неравенство

$$M(\mathbf{x}, 2z) \leq cM(\mathbf{x}, z) + H(\mathbf{x}).$$

Δ_2 -условие эквивалентно выполнению для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ и любых $|z| \geq z_0$ неравенства

$$M(\mathbf{x}, lz) \leq c(l)M(\mathbf{x}, z) + H_l(\mathbf{x}), \quad H_l \in L_1(\Omega),$$

где l – любая константа больше единицы, $c(l) > 0$.

В настоящей работе не предполагается, что N -функции $M(\mathbf{x}, z)$, $\overline{M}(\mathbf{x}, z)$ удовлетворяют Δ_2 -условию.

Существуют три класса пространств Музилака–Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\Omega)$ – обобщённый класс Музилака–Орлича, состоящий из измеримых функций $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\varrho_{M,\Omega}(v) = \int_{\Omega} M(\mathbf{x}, v(\mathbf{x})) d\mathbf{x} < \infty;$$

2) $L_M(\Omega)$ – обобщённое пространство Музилака–Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{M,\Omega} = \inf\{\lambda > 0 : \varrho_{M,\Omega}(v/\lambda) \leq 1\};$$

3) $E_M(\Omega)$ – замыкание по норме $\|u\|_{M,\Omega}$ ограниченных измеримых функций с компактным носителем в $\overline{\Omega}$. Справедливы вложения $E_M(\Omega) \subset \mathcal{L}_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$. Ниже в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1,Q}$ будем опускать индекс Q , если $Q = \Omega$.

Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака–Орлича $M(\mathbf{x}, z)$.

Условие (M1, loc). Функция $M(\mathbf{x}, z)$ локально интегрируема, т.е.

$$\varrho_{M,Q}(z) = \int_Q M(\mathbf{x}, z) d\mathbf{x} < \infty \quad \text{для любого } z \in \mathbb{R}$$

и для любого измеримого множества $Q \subset \Omega$ такого, что $\text{meas } Q < \infty$.

Условие (M2). Функция $M(\mathbf{x}, z)$ удовлетворяет условию ϕ -регулярности, т.е. существует функция $\phi : [0, 1/2] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\phi(\cdot, z)$ и $\phi(r, \cdot)$ – неубывающие функции и для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{\Omega}$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 1/2$, $z \in \mathbb{R}_+$ и некоторой константы $c > 0$ выполняется

$$M(\mathbf{x}, z) \leq \phi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, z) M(\mathbf{y}, z), \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \phi(\varepsilon, c\varepsilon^{-n}) < \infty.$$

Пусть M и $\overline{M}$ подчиняются условию (M1, loc), тогда пространство $E_M(\Omega)$ – сепарабельное и $(E_M(\Omega))^* = L_{\overline{M}}(\Omega)$. Если дополнительно M удовлетворяет Δ_2 -условию, то $E_M(\Omega) = \mathcal{L}_M(\Omega) = L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ – сепарабельное. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака–Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2 -условию.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in L_M(\Omega)$ (будем обозначать $v^j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{M} v$), если существует константа $\lambda > 0$ такая, что имеет место равенство

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M\left(\frac{v^j - v}{\lambda}\right) = 0.$$

Если M удовлетворяет Δ_2 -условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича M и $\overline{M}$, если $u \in L_M(\Omega)$ и $v \in L_{\overline{M}}(\Omega)$, выполняется неравенство Гёльдера

$$\left| \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq 2 \|u\|_M \|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака–Орлича–Соболева

$$W^1 L_M(\Omega) = \{v \in L_M(\Omega) : |\nabla v| \in L_M(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|v\|_M^1 = \|v\|_M + \|\nabla v\|_M.$$

Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in W^1 L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v \in W^1 L_M(\Omega)$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что справедливы равенства

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M\left(\frac{v^j - v}{\lambda}\right) = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M\left(\frac{|\nabla v^j - \nabla v|}{\lambda}\right) = 0.$$

Пространство $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$ определим как замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по слабой топологии $\sigma((L_M)^{n+1}, (E_M^*)^{n+1})$ в $W^1 L_M(\Omega)$. Пространство $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$ банахово (см. [12, теорема 10.2]).

Определение 2. Область Ω подчиняется сегментному свойству, если существует конечное открытое покрытие $\{\Theta_i\}_{i=1}^k$ множества $\bar{\Omega}$ и соответствующие ненулевые векторы $z_i \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(\bar{\Omega} \cap \Theta_i) + t z_i \subset \Omega$ для любых $t \in (0, 1)$ и $i = \overline{1, k}$.

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака–Орлича–Соболева (см. [14, теорема 3]).

Лемма 1. Предположим, что область Ω удовлетворяет сегментному свойству, а обобщённая N -функция M удовлетворяет условиям $(M1, \text{loc})$, $(M2)$, и пусть $\bar{M}$ удовлетворяет условию $(M1, \text{loc})$. Тогда для любого $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ существует последовательность функций $\xi^j \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\xi^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v$ модулярно в $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$, $j \rightarrow \infty$.

Примеры функций Музилака–Орлича M , удовлетворяющих условиям леммы 1, приведены в работе [14].

1. Если N -функция $M(\mathbf{x}, z) = M(z)$ не зависит от $\mathbf{x}$, то удовлетворяет условию $(M2)$ с $\phi(r, z) = 1$.

2. Функция $M(\mathbf{x}, z) = |z|^{p(\mathbf{x})}$, $p : \Omega \rightarrow [p^-, p^+]$, $p^- = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mathbf{x}) > 1$, $p^+ = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} p(\mathbf{x}) < \infty$, удовлетворяет условию $(M2)$ с функцией $\phi(r, z) = \max\{z^{\sigma(r)}, z^{-\sigma(r)}\}$, где $\sigma : (0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sigma(\varepsilon) = 0$, – модуль непрерывности функции p . Для $\sigma(r) = -c/\log r$, $0 < r \leq 1/2$, получаем стандартное условие лог-гёльдеровской непрерывности.

3. N -функция $M(\mathbf{x}, z) = |z|^p + a(\mathbf{x})|z|^q$, $1 \leq p < q$, с неотрицательной функцией $a \in C_{\text{loc}}^{0, \alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1]$, удовлетворяет условию $(M2)$ с $\phi(r, z) = C_\alpha r^\alpha |z|^{q-p} + 1$, $q \leq p + \alpha/n$.

2. Предположения и формулировка результатов. Предполагается, что функции

$$b(\mathbf{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

входящие в уравнение (1), измеримы по $\mathbf{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$, и выполнено

Условие (M). Существует положительная константа $\bar{a} \in (0, 1)$ такая, что для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ и для любых $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{t}$, справедливы неравенства

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{s} \geq \bar{a}(M(\mathbf{x}, |\mathbf{s}|) + \bar{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}|)), \quad (5)$$

$$(\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{t}) > 0. \quad (6)$$

Здесь функция Музилака–Орлича $M(\mathbf{x}, z)$ подчиняется условиям $(M1, \text{loc})$, $(M2)$, сопряжённая к M функция $\bar{M}(\mathbf{x}, z)$ удовлетворяет условию $(M1, \text{loc})$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|\mathbf{s}| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$.

Предполагается, что функция $b(\mathbf{x}, s_0)$ – неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\mathbf{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$, поэтому для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\mathbf{x}, s_0) s_0 \geq 0. \quad (7)$$

Сформулируем дополнительное условие, которое используется в теореме существования. Будем считать, что для любого $k > 0$ имеет место равенство

$$\sup_{|s_0| \leq k} |b(\mathbf{x}, s_0)| = \Phi_k(\mathbf{x}) \in L_1(\Omega). \quad (8)$$

Условию (M) удовлетворяют, например, функции

$$a_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = M(\mathbf{x}, |\mathbf{s}|) \frac{s_i}{|\mathbf{s}|^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathring{T}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$. Для $u \in \mathring{T}_M^1(\Omega)$ и любого $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \nabla u \in (L_M(\Omega))^n. \quad (9)$$

Введём обозначение $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x}$.

Определение 3. Энтропийным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathring{T}_M^1(\Omega)$ такая, что:

- 1) $b(\mathbf{x}, u) \in L_1(\Omega)$;
- 2) $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ при всех $k > 0$;
- 3) при всех $k > 0$ и $v \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\langle (b(\mathbf{x}, u) - f)T_k(u - v) \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - v) \rangle \leq 0. \quad (10)$$

Определение 4. Ренормализованным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathring{T}_M^1(\Omega)$ такая, что:

- 1) $b(\mathbf{x}, u) \in L_1(\Omega)$;
- 2) $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ при всех $k > 0$;
- 3) выполнено равенство

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: h \leq |u| < h+1\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = 0;$$

4) для любой функции $S \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $v \in C_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\langle (b(\mathbf{x}, u) - f)S(u)v \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)v \nabla u + S(u) \nabla v) \rangle = 0. \quad (11)$$

В теоремах 1–6 предполагается, что область Ω строго липшицева и выполнено условие (M).

Теорема 1. Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда существует энтропийное решение задачи (1), (2).

Доказательство теоремы 1 следует из работы [5, теорема 5.1]. Основными результатами настоящей работы являются теоремы 2–6.

Теорема 2. Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда энтропийное решение, построенное в теореме 1, является ренормализованным решением задачи (1), (2).

Теорема 3. Пусть $f(\mathbf{x}) \geq 0$ для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда энтропийное решение задачи (1), (2) $u \geq 0$ для п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$.

Теорема 4. Пусть u^1, u^2 – энтропийные решения задачи (1), (2), тогда $u^1 = u^2$ п.в. в Ω .

Теорема 5. Пусть u^1, u^2 – ренормализованные решения задачи (1), (2), тогда $u^1 = u^2$ п.в. в Ω .

Следует отметить, что теоремы 3–5 по сути являются обобщением соответствующих результатов работы [9] для уравнения (3) на уравнение вида (1). Однако доказательство теоремы 5 существенно проще за счёт соотношения, которое будет установлено для ренормализованного решения задачи (1), (2) в лемме 7.

Теорема 6. Пусть дополнительно выполнено условие (8), тогда энтропийное и ренормализованное решения задачи (1), (2) эквивалентны.

Согласно единственности энтропийного решения (теорема 4) из теоремы 2 следует, что энтропийное решение является ренормализованным решением задачи (1), (2). Тогда, ввиду

единственности ренормализованного решения задачи (1), (2) (теорема 5), справедливо утверждение теоремы 6.

3. Подготовительные сведения. В этом пункте установим некоторые свойства энтропийного и ренормализованного решений задачи (1), (2) и приведём вспомогательные леммы. Предполагается, что область Ω строго липшицева и выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведём теорему Витали в следующей форме (см. [15, гл. 3, § 6, теорема 15]).

Лемма 2. Пусть последовательность $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L_1(\Omega)$ и $v^j \rightarrow v$ п.в. в Ω , $j \rightarrow \infty$. Тогда для сходимости $v^j \rightarrow v$ сильно в $L_1(\Omega)$, $j \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие равномерной интегрируемости

$$\lim_{\text{meas}(Q) \rightarrow 0} \int_Q |v^j(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0 \quad \text{равномерно по } j \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 1, область Ω строго липшицева, функция $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$, тогда $v \in \dot{W}_1^1(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме 1 для функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ существует последовательность $\{\xi^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что найдётся число $\lambda > 0$, при котором

$$\int_{\Omega} M(\mathbf{x}, |v - \xi^j|/\lambda) d\mathbf{x} \rightarrow 0, \quad \int_{\Omega} M(\mathbf{x}, |\nabla(v - \xi^j)|/\lambda) d\mathbf{x} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Из сходимости (12), ввиду существования функции $M^{-1}(\mathbf{x}, \cdot)$, непрерывной обратной к функции $M(\mathbf{x}, \cdot)$ по $z \geq 0$, следует сходимость по некоторой подпоследовательности

$$\xi^j \rightarrow v, \quad \nabla \xi^j \rightarrow \nabla v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Кроме того, по лемме 2 имеем, что

$$\{M(\mathbf{x}, |v - \xi^j|/\lambda)\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \{M(\mathbf{x}, |\nabla(v - \xi^j)|/\lambda)\}_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{равномерно интегрируемы в } L_1(\Omega). \quad (14)$$

Из определения N -функции заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что для любых $z \in \mathbb{R}$ и п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$ справедливо неравенство

$$|z| \leq \varepsilon M(\mathbf{x}, z) + C_\varepsilon. \quad (15)$$

Тогда для любого измеримого множества $Q \subset \Omega$ имеем

$$\int_Q |v - \xi^j| d\mathbf{x} \leq \lambda \int_Q M(\mathbf{x}, |v - \xi^j|/\lambda) d\mathbf{x} + C_1 \text{meas}(Q), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, ввиду (14), следует, что $\{v - \xi^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ равномерно интегрируема в $L_1(\Omega)$.

Тогда, применяя сходимость (13), по лемме 2 устанавливаем сходимость

$$\xi^j \rightarrow v \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Аналогично устанавливается сходимость

$$\nabla \xi^j \rightarrow \nabla v \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Применив неравенство (2.37) из [16, гл. 2, § 2] для функций $v - \xi^j \in W_1^1(\Omega)$, получаем

$$\|\tilde{v}\|_{1, \partial\Omega} \leq C_2 \|v - \xi^j\|_{1, \Omega}^1, \quad j \in \mathbb{N},$$

где $\tilde{v}$ – след функции $v|_{\partial\Omega}$. Ввиду сходимостей (16) и (17) устанавливаем, что $\|\tilde{v}\|_{1,\partial\Omega} = 0$, следовательно, $v = 0$ п.в. на $\partial\Omega$. Таким образом, доказано, что $v \in \dot{W}_1^1(\Omega)$.

Замечание. Пользуясь выпуклостью функции $M(\mathbf{x}, \cdot)$ и принадлежностью $v \in L_M(\Omega)$, несложно установить эквивалентность условия (14) условию

$$\{M(\mathbf{x}, |\xi^j|/\lambda_1)\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \{M(\mathbf{x}, |\nabla \xi^j|/\lambda_1)\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ равномерно интегрируемы в } L_1(\Omega) \quad (18)$$

с некоторым $\lambda_1 > 0$.

Следствием теоремы Витали является

Лемма 4. Пусть v^j , $j \in \mathbb{N}$, $v \in L_M(\Omega)$ и $v^j \xrightarrow{M} v$ модулярно в $L_M(\Omega)$, $j \rightarrow \infty$. Тогда $v^j \rightarrow v$ в топологии $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$ (см. [14, лемма 2]).

Следствием теоремы Витали является теорема Лебега.

Лемма 5. Пусть g^j , $j \in \mathbb{N}$, g – функции из пространства $L_1(\Omega)$ такие, что $g^j \rightarrow g$ сильно в $L_1(\Omega)$, $j \rightarrow \infty$, и пусть v^j , $j \in \mathbb{N}$, v – измеримые функции в Ω такие, что:

- 1) $v^j \rightarrow v$ п.в. в Ω , $j \rightarrow \infty$;
- 2) $|v^j| \leq |g^j|$, $j \in \mathbb{N}$ п.в. в Ω .

Тогда $v^j \rightarrow v$ сильно в $L_1(\Omega)$, $j \rightarrow \infty$.

Лемма 6. Пусть функции v^j , $j \in \mathbb{N}$, $v \in L_\infty(\Omega)$ такие, что $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L_\infty(\Omega)$ и $v^j \rightarrow v$ п.в. в Ω , $j \rightarrow \infty$, тогда $v^j \rightarrow v$, $j \rightarrow \infty$, в топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$ пространства $L_\infty(\Omega)$.

Если, кроме того, g из $L_M(\Omega)$ ($E_M(\Omega)$), то $v^j g \rightarrow v g$ модулярно (сильно) в $L_M(\Omega)$ ($E_M(\Omega)$), $j \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 6 следует из теоремы Лебега.

Лемма 7. Пусть u – энтропийное решение задачи (1), (2), тогда

$$\text{meas} \{ \Omega : |u| \geq k \} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Кроме того,

$$(M(\mathbf{x}, |\nabla u|) + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u)|)) \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \in L_1(\Omega) \quad \text{для любого } k > 0 \quad (20)$$

и справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Неравенство (10) при $v = 0$ принимает вид

$$I = \int_{\Omega} b(\mathbf{x}, u) T_k(u) \, d\mathbf{x} + \int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} f T_k(u) \, d\mathbf{x}.$$

С учётом неравенства (7) устанавливаем оценку

$$\int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |f| |T_k(u)| \, d\mathbf{x} \leq k \|f\|_1. \quad (22)$$

В силу (5) имеем

$$\overline{a} \int_{\{\Omega: |u| < k\}} (M(\mathbf{x}, |\nabla u|) + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}(\mathbf{x}, |\nabla u|)|)) \, d\mathbf{x} \leq k C_1. \quad (23)$$

Из соотношения (23), применив неравенство (15), устанавливаем (19) (см. [9, предложение 3.1]).

Запишем неравенство (22) в виде

$$\frac{1}{k} \int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |f| \frac{|T_k(u)|}{k} \, d\mathbf{x}. \quad (24)$$

Поскольку $|T_k(u)|/k \leq 1$, $T_k(u)/k \rightarrow 0$ п.в. в Ω при $k \rightarrow \infty$, и $f \in L_1(\Omega)$, то по теореме Лебега имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f| \frac{|T_k(u)|}{k} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (25)$$

Из (24) и (25) выводим (21).

Лемма 8. Если u является энтропийным решением задачи (1), (2), то неравенство (10) справедливо для любой функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме 1 для функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ существует последовательность $\{\xi^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что для некоторого $\lambda > 0$ выполнено (12). Тогда, согласно лемме 3 и замечанию, справедливы соотношения (13), (18).

Рассмотрим нечётную неубывающую функцию $T \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ такую, что $T(z) = z$ для $|z| \leq \|v\|_{\infty}$, $|T(z)| = K > 0$ для $|z| \geq z_0 > \|v\|_{\infty}$. Обозначим $\max_{[-z_0, z_0]} T'(z) = K_1 > 0$.

Применив сходимость (13), для ограниченной последовательности $\{T(\xi^j)\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ установим сходимость

$$T(\xi^j) \rightarrow T(v) = v, \quad \nabla T(\xi^j) = T'(\xi^j) \nabla \xi^j \rightarrow T'(v) \nabla v = \nabla v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Тогда для любого $k > 0$ имеют место сходимости

$$T_k(u - T(\xi^j)) \rightarrow T_k(u - v), \quad \nabla T_k(u - T(\xi^j)) \rightarrow \nabla T_k(u - v) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Пусть $\hat{k} = k + K$, тогда справедлива оценка

$$|\nabla T_k(u - T(\xi^j))| \leq |\nabla T_{\hat{k}}(u)| + |\nabla T(\xi^j)|, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Поскольку $\nabla T_{\hat{k}}(u) \in (L_M(\Omega))^n$, то найдётся число $\mu > 0$ такое, что

$$\int_{\Omega} M(\mathbf{x}, |\nabla T_{\hat{k}}(u)|/\mu) \, d\mathbf{x} < \infty. \quad (29)$$

Применяя (28) и учитывая выпуклость функции $M(\mathbf{x}, \cdot)$, получаем неравенства

$$\begin{aligned} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_k(u - T(\xi^j))|}{2(\lambda_1 K_1 + \mu)}\right) d\mathbf{x} &\leq \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_{\hat{k}}(u)|}{\lambda_1 K_1 + \mu}\right) + \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|T'(\xi^j) \nabla \xi^j|}{\lambda_1 K_1 + \mu}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_{\hat{k}}(u)|}{\mu}\right) + \frac{1}{2} M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla \xi^j|}{\lambda_1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (18), (29), следует равномерная интегрируемость последовательности

$$\left\{ M\left(\mathbf{x}, \frac{|\nabla T_k(u - T(\xi^j))|}{2(\lambda_1 K_1 + \mu)}\right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

Учитывая замечание и сходимость (27), применяя лемму 2, устанавливаем модулярную сходимость

$$\nabla T_k(u - T(\xi^j)) \xrightarrow{M} \nabla T_k(u - v), \quad j \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Из сходимости (30), согласно лемме 4, при любом $k > 0$ имеем сходимость

$$\nabla T_k(u - T(\xi^j)) \rightharpoonup \nabla T_k(u - v) \text{ по топологии } \sigma((L_M)^n, (L_{\overline{M}})^n) \text{ в } (L_M(\Omega))^n, \quad j \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Запишем неравенство (10) с $v = T(\xi^j)$:

$$\int_{\Omega} (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T(\xi^j)) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T(\xi^j)) \, d\mathbf{x} \leq 0. \quad (32)$$

Поскольку $b(\mathbf{x}, u), f \in L_1(\Omega)$ (см. п. 1) определения 3), то в первом слагаемом неравенства (32), используя (27), согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при $j \rightarrow \infty$.

Ввиду того, что $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \chi_{\{\Omega: |u| < \widehat{k}\}} \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ (см. п. 2) определения 3), применяя (31), устанавливаем, что второе слагаемое в (32) также имеет предел при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, после предельного перехода в (32) получим неравенство (10).

Лемма 9. Если u является ренормализованным решением задачи (1), (2), то равенство (11) справедливо для любой функции $S \in \dot{W}_{\infty}^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$.

Доказательство. Поступая как в лемме 8, найдём последовательность $\{\xi^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такую, что имеют место сходимость (26) и сходимость

$$\nabla T(\xi^j) \rightharpoonup \nabla v \text{ по топологии } \sigma((L_M)^n, (L_{\overline{M}})^n) \text{ в } (L_M(\Omega))^n, \quad j \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Пусть $S \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } S \subset [-L, L]$ для $L > 0$. Равенство (11) с $v = T(\xi^j)$ принимает вид

$$\int_{\Omega} ((b(\mathbf{x}, u) - f) S(u) + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)) T(\xi^j) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) S(u) \cdot \nabla T(\xi^j) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Поскольку $f, b(\mathbf{x}, u), \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u) \in L_1(\Omega)$ (см. (9) и пп. 1), 2) определения 4), то в первом слагаемом, применяя (26), согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при $j \rightarrow \infty$. Ввиду принадлежности $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) S(u) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$, применив (33), во втором слагаемом можно перейти к пределу при $j \rightarrow \infty$. В итоге получим равенство (11) для любой функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$.

Лемма 10. Пусть u – энтропийное решение задачи (1), (2), тогда при всех $k > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: h \leq |u| < h+k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = 0. \quad (34)$$

Доказательство. Положив в неравенстве (10) $v = T_h(u)$, $h > 0$, будем иметь

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} + \int_{\{h \leq |u|\}} (b(\mathbf{x}, u)) T_k(u - T_h(u)) \, d\mathbf{x} \leq k \int_{\{h \leq |u|\}} |f| \, d\mathbf{x}.$$

Далее, используя знакоопределённость функции $b(\mathbf{x}, s_0)$ по аргументу s_0 (см. (7)), выводим неравенство

$$k \int_{\{|u| \geq k+h\}} |b(\mathbf{x}, u)| \, d\mathbf{x} + \int_{\{h \leq |u| < k+h\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u + b(\mathbf{x}, u)(u - h \text{sign } u)) \, d\mathbf{x} \leq k \int_{\{h \leq |u|\}} |f| \, d\mathbf{x}.$$

Ввиду (7) для $h \leq |u|$ справедливо неравенство $b(\mathbf{x}, u)(u - h \text{sign } u) \geq 0$. Соединив два последних неравенства, для любого $k > 0$ имеем

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \leq k \int_{\{h \leq |u|\}} |f| \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда, ввиду того, что $f \in L_1(\Omega)$, учитывая (19) и переходя к пределу при $h \rightarrow \infty$, выводим соотношение (34).

Лемма 11. Пусть u – ренормализованное решение задачи (1), (2), тогда справедливы соотношения (19)–(21).

Доказательство. Зафиксируем $k > 0$, пусть $\sigma > k$. Определим функцию S_σ формулой

$$S_\sigma(r) = \begin{cases} r, & |r| < \sigma, \\ \left(\sigma + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sign} r - \frac{\operatorname{sign} r}{2}(r - (\sigma + 1) \operatorname{sign} r)^2, & \sigma \leq |r| \leq \sigma + 1, \\ \left(\sigma + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sign} r, & |r| > \sigma + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$S'_\sigma(r) = \begin{cases} 1, & |r| < \sigma, \\ \sigma + 1 - |r|, & \sigma \leq |r| \leq \sigma + 1, \\ 0, & |r| > \sigma + 1. \end{cases}$$

Легко проверить включения

$$S_\sigma \in W_\infty^2(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp} S'_\sigma \subset [-\sigma - 1, \sigma + 1], \quad \operatorname{supp} S''_\sigma \subset [-\sigma - 1, -\sigma] \cup [\sigma, \sigma + 1].$$

Положив в (11) $S = S'_\sigma$, $v = T_k(u)$, получим

$$J_1 + J_2 + J_3 = \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) S'_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u) \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) S''_\sigma(u) \cdot \nabla u T_k(u) \rangle + \langle b(\mathbf{x}, u) S'_\sigma(u) T_k(u) \rangle = \langle f S'_\sigma(u) T_k(u) \rangle. \quad (35)$$

Оценим каждый интеграл:

$$J_1 = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) S'_\sigma(u) \cdot \nabla T_k(u) d\mathbf{x} = \int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x}, \quad (36)$$

$$J_2 = - \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u| \leq \sigma + 1\}} |T_k(u)| \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x} = -k \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u| \leq \sigma + 1\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x}, \quad (37)$$

используя (7), выводим

$$J_3 = \int_{\Omega} b(\mathbf{x}, u) S'_\sigma(u) T_k(u) d\mathbf{x} \geq 0. \quad (38)$$

Соединив (35)–(38), установим неравенство

$$\int_{\{\Omega: |u| < k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |f| |T_k(u)| d\mathbf{x} + k \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u| \leq \sigma + 1\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x}.$$

Применив условие 3) определения 4, перейдём к пределу при $\sigma \rightarrow \infty$ и получим неравенство (22). Соотношения (19)–(21) являются следствием неравенства (22) (см. лемму 7).

4. Знакоопределённость энтропийного решения.

Доказательство теоремы 3. Пусть $l > 0$, положим в (10) $v = T_l(u^+)$ и получим

$$I + J = \langle (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) \rangle \leq 0. \quad (39)$$

Если $0 \leq u < l$, то $T_k(u - T_l(u^+)) = 0$, поэтому имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\{\Omega: u < 0\}} (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x} + \int_{\{\Omega: u \geq l\}} (b(\mathbf{x}, u) - f) T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Если $u < 0$, то $T_k(u - T_l(u^+)) = T_k(u) < 0$ и $I_1 \geq 0$. Если $u \geq l$, то $T_k(u - T_l(u^+)) = T_k(u - l)$ и $I_2 \geq - \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x}$. Таким образом, выводим оценку

$$I \geq - \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x}. \quad (40)$$

В множествах $\{\Omega : u < -k\}$, $\{\Omega : 0 \leq u < l\}$, $\{\Omega : u \geq l + k\}$ почти всюду выполнено равенство $\nabla T_k(u - T_l(u^+)) = 0$. Следовательно, получим

$$J = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x} = \left(\int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} + \int_{\{\Omega: l \leq u < l+k\}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - T_l(u^+)) d\mathbf{x}.$$

Если $-k \leq u < 0$ или $l \leq u < l + k$, то $\nabla T_k(u - T_l(u^+)) = \nabla u$. Отсюда имеем

$$J = \left(\int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} + \int_{\{\Omega: l \leq u < l+k\}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x}. \quad (41)$$

Соединив (39)–(41), устанавливаем неравенство

$$\left(\int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} + \int_{\{\Omega: l \leq u < l+k\}} \right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x} \leq \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x}. \quad (42)$$

Согласно (19), ввиду того, что $f \in L_1(\Omega)$, имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: u \geq l\}} f T_k(u - l) d\mathbf{x} = 0.$$

Отсюда, устремляя в (42) $l \rightarrow \infty$, пользуясь (34), получаем

$$\int_{\{\Omega: -k \leq u < 0\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathbf{x} \leq 0, \quad k > 0.$$

Применив (5), устанавливаем равенство

$$\int_{\Omega} M(\mathbf{x}, |\nabla T_k(u^-)|) d\mathbf{x} = 0, \quad k > 0.$$

Следовательно, $\nabla T_k(u^-) = 0$ п.в. в Ω .

Согласно лемме 3 $T_k(u) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$. Отсюда ввиду следствия 3.1 [17, гл. II, § 3] устанавливаем принадлежность $T_k(u^-) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$. Поэтому $T_k(u^-) = 0$ п.в. в Ω . Ввиду произвольности k отсюда следует, что $u^- = 0$ п.в. в Ω . Теорема 3 доказана.

5. Единственность энтропийного и ренормализованного решений.

Доказательство теоремы 4. Пусть u^1, u^2 – энтропийные решения задачи (1), (2). В неравенстве (10) для u^1 положим $v = T_h(u^2)$, а для u^2 пусть $v = T_h(u^1)$, $h > k$. Сложив интегральные неравенства, получим

$$\begin{aligned} I(h, k) &= \int_{\Omega^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla(u^1 - T_h(u^2)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla(u^2 - T_h(u^1)) d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \int_{\Omega} (-B^1 + f) T_k(u^1 - T_h(u^2)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (-B^2 + f) T_k(u^2 - T_h(u^1)) d\mathbf{x} = J(h, k). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь $\mathbf{A}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^i)$, $B^i(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u^i)$, $\Omega^i(h, k) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^i - T_h(u^{3-i})| < k\}$, $i = 1, 2$.

Множества $\Omega^1(h, k)$, $\Omega^2(h, k)$ представляются в виде объединения непересекающихся подмножеств:

$$\Omega^1(h, k) = \Omega^{12}(h, k) \cup \Omega_1^1(h, k) \cup \Omega_2^1(h, k), \quad \Omega^2(h, k) = \Omega^{12}(h, k) \cup \Omega_1^2(h, k) \cup \Omega_2^2(h, k),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^{12}(h, k) &= \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^1 - u^2| < k, \quad |u^1| < h, \quad |u^2| < h\}, \\ \Omega_{3-i}^i(h, k) &= \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^i - h \operatorname{sign} u^{3-i}| < k, \quad |u^{3-i}| \geq h\}, \quad i = 1, 2, \\ \Omega_i^i(h, k) &= \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^i - u^{3-i}| < k, \quad |u^i| \geq h, \quad |u^{3-i}| < h\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Интегралы в левой части неравенства (43) от функций $\mathbf{A}^i \cdot \nabla(u^i - T_h(u^{3-i}))$, $i = 1, 2$, по множеству $\Omega^{12}(h, k)$ принимают вид

$$I^{12}(h, k) = \int_{\Omega^{12}(h, k)} (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \geq 0. \quad (44)$$

Интегралы от функций $\mathbf{A}^i \cdot \nabla(u^i - T_h u^{3-i})$ по множествам $\Omega_{3-i}^i(h, k)$, $i = 1, 2$, соответственно, учитывая (5), оцениваются как

$$\int_{\Omega_2^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^1 d\mathbf{x} + \int_{\Omega_1^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla u^2 d\mathbf{x} \geq 0. \quad (45)$$

Наконец, пользуясь (5), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla(u^2 - u^1) d\mathbf{x} \geq \\ & \geq - \int_{\Omega_1^1(h, k)} \mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega_2^2(h, k)} \mathbf{A}^2 \cdot \nabla u^1 d\mathbf{x} = -I_1^1(h, k) - I_2^2(h, k). \end{aligned} \quad (46)$$

Соединяя (44)–(46), устанавливаем оценку

$$I(h, k) \geq I^{12}(h, k) - I^3(h, k), \quad I^3(h, k) = I_1^1(h, k) + I_2^2(h, k).$$

Покажем, что $I^3(h, k) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Используя (4) и (5), оценим интеграл

$$\begin{aligned} |I_1^1(h, k)| &\leq \|\chi_{\{\Omega: h \leq |u^1| < h+k\}} \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{A}^1|)\|_1 + \|\chi_{\{\Omega: h-k \leq |u^2| < h\}} M(\mathbf{x}, |\nabla u^2|)\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{a} \int_{\{\Omega: h \leq |u^1| < h+k\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^1) \cdot \nabla u^1 d\mathbf{x} + \frac{1}{a} \int_{\{\Omega: h-k \leq |u^2| < h\}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^2) \cdot \nabla u^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Применив (34), устанавливаем, что $I_1^1(h, k) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Аналогично оценивается интеграл $I_2^2(h, k)$.

Очевидно представление $\Omega = \tilde{\Omega}^{12}(h) \cup \tilde{\Omega}_2^1(h) \cup \tilde{\Omega}_1^2(h) \cup \tilde{\Omega}_{12}(h)$, в котором

$$\tilde{\Omega}^{12}(h) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^1| < h, \quad |u^2| < h\}, \quad \tilde{\Omega}_{12}(h) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^1| \geq h, \quad |u^2| \geq h\},$$

$$\tilde{\Omega}_{3-i}^i(h) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^i| < h, \quad |u^{3-i}| \geq h\}, \quad i = 1, 2.$$

Для интегралов в правой части неравенства (43) от функций $(-B^i + f)T_k(u^i - T_h(u^{3-i}))$, $i = 1, 2$, по множеству $\tilde{\Omega}^{12}(h)$, ввиду неубывания функции $b(\mathbf{x}, s_0)$ по s_0 , имеем неравенство

$$-J^{12}(h) = \int_{\tilde{\Omega}^{12}(h)} (B^1 - B^2)T_k(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \geq 0.$$

Для интегралов от тех же функций по множеству $\tilde{\Omega}_1^2(h)$ получаем оценку

$$|J_1^2(h)| \leq k \int_{\tilde{\Omega}_1^2(h)} (|B^1| + |B^2| + 2|f|) d\mathbf{x}. \quad (47)$$

Поскольку $f, B^1, B^2 \in L_1(\Omega)$ и мера множества $\tilde{\Omega}_1^2(h)$ стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$ (см. (19)), из (47) следует, что $\lim_{h \rightarrow \infty} |J_1^2(h)| = 0$.

Аналогично устанавливается, что $\lim_{h \rightarrow \infty} |J_2^1(h)| = \lim_{h \rightarrow \infty} |J_{12}(h)| = 0$. Таким образом, предельный переход в (43) даёт соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} I^{12}(h, k) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega^{12}(h, k)} (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \leq 0.$$

Множество $\Omega^{12}(h, k)$ при $h \rightarrow \infty$ сходится к $\hat{\Omega}^{12}(k) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u^1 - u^2| < k\}$, значит, при любом $k > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\hat{\Omega}^{12}(k)} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^1) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^2)) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathbf{x} \leq 0. \quad (48)$$

Это противоречит условию (6), поэтому $\nabla(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в $\hat{\Omega}^{12}(k)$ при любом $k > 0$. Следовательно, $\nabla T_k(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в Ω . Ввиду принадлежностей $T_k(u^1), T_k(u^2) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$ (см. лемму 3), заключаем, что $T_k(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в Ω для любого $k > 0$. Ввиду произвольности k устанавливаем, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω .

Доказательство теоремы 5. Определим функцию h_σ формулой

$$h_\sigma(r) = \begin{cases} 0, & |r| \geq 2\sigma, \\ 1, & |r| \leq \sigma, \\ \frac{2\sigma - |r|}{\sigma}, & \sigma < |r| < 2\sigma. \end{cases}$$

Пусть u^1, u^2 – ренормализованные решения задачи (1), (2). Запишем (11) для u^1 и u^2 с $S = h_\sigma(u^1)$, $v = T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^2)$ и $S = h_\sigma(u^2)$, $v = T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)$ соответственно, затем вычтем из первого решения второе и получим равенство

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 + J_3 + J_4 &= \langle (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) \rangle + \\ &+ \langle (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla u^1 T_k(u^1 - u^2)h'_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) \rangle + \langle (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla u^2 T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h'_\sigma(u^2) \rangle + \\ &+ \langle (B^1 - B^2)T_k(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Оценим каждый интеграл J_k , $k = \overline{1, 4}$. Применяя (6), для первого имеем

$$J_1 = \int_{\{\Omega: |u^1 - u^2| < k\}} (\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2) d\mathbf{x} \geq 0. \quad (50)$$

Учитывая (4), (5), выводим неравенство

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{k}{\sigma} \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u^1| < 2\sigma, \quad |u^2| < 2\sigma\}} (\mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^1 + \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{A}^2|) + M(\mathbf{x}, |\nabla u^1|)) d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \frac{k}{\sigma} C_3 \int_{\{\Omega: \sigma \leq |u^1| < 2\sigma, \quad |u^2| < 2\sigma\}} (\mathbf{A}^1 \cdot \nabla u^1 + \mathbf{A}^2 \cdot \nabla u^2) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ввиду (21) имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |J_2| = 0. \quad (51)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |J_3| = 0. \quad (52)$$

Пользуясь монотонностью функции $b(\mathbf{x}, s_0)$, выводим оценку

$$J_4 \geq 0. \quad (53)$$

Соединив (49), (50), (53), получим неравенство

$$\int_{\{\Omega: |u^1 - u^2| < k\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^1) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^2)) \cdot \nabla(u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) d\mathbf{x} \leq |J_2| + |J_3|.$$

Используя лемму Фату и соотношения (51), (52), выполнив в последнем неравенстве предельный переход при $\sigma \rightarrow \infty$, установим неравенство (48), из которого следует, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω .

6. Существование ренормализованного решения. Энтропийное и ренормализованное решения строятся как предел последовательности слабых решений аппроксимационной задачи для уравнения

$$-\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) + b^m(\mathbf{x}, u) = f^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (54)$$

с функциями

$$f^m(\mathbf{x}) = T_m f(\mathbf{x}), \quad b^m(\mathbf{x}, s_0) = T_m b(\mathbf{x}, s_0).$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует обобщённое решение $u^m \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ задачи (54), (2) [17, теорема 13]. Таким образом, для любой функции $v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(\mathbf{x}, u^m) - f^m(\mathbf{x}))v \rangle + \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla v \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (55)$$

В работе [5, теорема 5.1] установлены сходимости

$$f^m \rightarrow f \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (56)$$

$$u^m \rightarrow u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (57)$$

$$b^m(\mathbf{x}, u^m) \rightarrow b(\mathbf{x}, u) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (58)$$

при любом $k > 0$ получены сходимости

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u)) \quad \text{по топологии } \sigma((L_{\overline{M}})^n, (E_M)^n) \text{ в } (L_{\overline{M}}(\Omega))^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (59)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty, \quad (60)$$

и доказано, что предельная функция u является энтропийным решением задачи (1), (2).

Доказательство теоремы 2. Докажем, что энтропийное решение, построенное в теореме 1, удовлетворяет определению 4. Условия 1), 2) выполнены, так как совпадают с условиями 1), 2) определения 3. Условие 3) также выполнено (см. соотношение (34)).

Докажем равенство (11). Пусть функция $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } S \subset [-L, L]$ для $L > 0$. Для любой функции $\xi \in C_0^1(\Omega)$, взяв в качестве тестовой функции в (55) $v = S(u^m)\xi \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$, выводим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) \rangle + \langle (b^m(\mathbf{x}, u^m) - f^m(\mathbf{x}))S(u^m)\xi \rangle = \\ = I^m + J^m = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (61)$$

Очевидно, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} I^m = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) d\mathbf{x} = I_1^m + I_2^m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (62)$$

Ввиду сходимостей (57), (60), применив лемму 5, устанавливаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I_1^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla T_L(u^m) S'(u^m)\xi d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla T_L(u) S'(u)\xi d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (63)$$

Из сходимости (57) по лемме 6 получаем $S(u^m)\nabla \xi \rightarrow S(u)\nabla \xi$ сильно в $(E_M(\Omega))^n$, $m \rightarrow \infty$. Отсюда, учитывая сходимость (59), выводим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_2^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot \nabla \xi S(u) d\mathbf{x}. \quad (64)$$

Соединив (62)–(64), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I^m = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla T_L(u)) \cdot (S'(u)\xi \nabla T_L(u) + S(u)\nabla \xi) d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (65)$$

Из сходимости (57) по лемме 6 имеем

$$S(u^m)\xi \rightharpoonup S(u)\xi \quad \text{в топологии} \quad \sigma(L_{\infty}, L_1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (56) и (58), устанавливаем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J^m = \int_{\Omega} (b(\mathbf{x}, u) - f)S(u)\xi d\mathbf{x}. \quad (66)$$

Комбинируя (61), (65), (66), получаем равенство (11). Таким образом, приходим к выводу, что u является ренормализованным решением задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh Sec. A: Math., First View. 2022. P. 1–31.
2. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space // J. of Differ. Equat. 2017. V. 264. P. 341–377.
3. *Denkowska A., Gwiazda P., Kalita P.* On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth // Calc. Var. Partial Differ. Equat. 2021. V. 60. № 21. P. 1–44.
4. *Ait Khellou M., Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak–Orlicz spaces // Ann. of the Univ. of Craiova. Math. and Comput. Sci. Ser. 2016. V. 43. № 2. P. 164–187.
5. *Elemine Vall M.S.B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data // Bol. Soc. Paran. Math. 2018. V. 36. № 1. P. 125–150.
6. *Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H.* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces // Ricerche Mat. 2017. V. 62. № 2. P. 1–31.
7. *Ait Khelloul M., Douiri S.M., El Hadfi Y.* Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition // Mediterranean J. of Math. 2020. V. 17. Art. no. 33. P. 1–18.
8. *Talha A., Benkirane A.* Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak–Orlicz spaces // Monatsh Math. Ann. of the Univ. of Craiova. Math. and Comput. Sci. Ser. 2018. V. 186. P. 745–776.
9. *Li Ying., Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces // Nonlin. Anal. 2021. V. 61. P. 1–20.
10. *Кожевникова Л.М.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений анизотропной эллиптической задачи в неограниченных областях с данными в виде меры // Изв. вузов. Математика. 2020. № 1. С. 1–16.
11. *Рутницкий Я.Б., Красносельский М.А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
12. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Math. V. 1034. Berlin, 1983.
13. *Chlebicka I.* A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces // Nonlin. Anal. 2018. № 175. P. 1–27.
14. *Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A.* Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // J. of Funct. Anal. 2018. V. 275. № 9. P. 2538–2571.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
16. *Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
17. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2014. V. 21. № 5. P. 787–811.

Стерлитамакский филиал
Уфимского университета науки и технологий,
Елабужский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.
После доработки 17.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Х. Г. Умаров

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, обобщающего уравнение колебаний кручения цилиндрического стержня при учёте внутреннего и внешнего затухания и моделирующего распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойгхта–Кельвина, получены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

DOI: 10.31857/S0374064123010065, EDN: OBYMHZ

Введение. В статье рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - \beta u_{tx} + \gamma u_t = \sigma'(u_x) u_{xx}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (2)$$

где $\mathbb{R}_+^1 = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u / \partial x$, коэффициенты α , β , γ – известные положительные числовые параметры, нелинейность $\sigma(\cdot)$ – заданная функция, не равная тождественно нулю.

Задача Коши исследуется в банаховом пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [1, гл. 8, § 1] непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \rightarrow \pm\infty$, полагая, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и искомое классическое решение*) $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{\mathbb{R}_+^1} \times \mathbb{R}^1$, $\overline{\mathbb{R}_+^1} = [0, +\infty)$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C[\mathbb{R}^1]$.

Будем обозначать $C^{(k)}[\mathbb{R}^1] = \{g(x) \in C[\mathbb{R}^1] : g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C[\mathbb{R}^1]\}$, $k \in \mathbb{N}$, подмножества в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, наделённом нормой $\|g\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)|$.

Нелинейность уравнения (1): $\sigma(r)$, $r \in \mathbb{R}^1$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geq 0$ является непрерывной неубывающей функцией и для всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы оценки

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\sigma^{(i)}(g(x))| \leq \left| \sigma^{(i)} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)| \right) \right|, \quad i = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Если в уравнении (1) коэффициент $\beta = 0$, а функция $\sigma(r) = \eta r$, где $\eta = \text{const}$, то приходим [2, гл. 13] к уравнению колебаний кручения цилиндрического стержня (вала) при учёте внутреннего и внешнего затухания (коэффициенты α и γ характеризуют соответственно внутреннее и внешнее затухания вала), при этом $u = u(t, x)$ – угол скручивания в сечении вала.

Если коэффициенты $\beta = \gamma = 0$, то приходим к уравнению, которое описывает распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойгхта–Кельвина [3, §§ 4.3, 6.4], где

*) Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.

x – координата, характеризующая положение поперечного сечения стержня, $u = u(t, x)$ – продольное перемещение за время t , α – коэффициент вязкости, $\sigma(\cdot)$ – напряжение (внутренняя сила, возникающая в процессе деформации стержня).

Изучению различных аспектов уравнения (1) и его многомерных аналогов и обобщений посвящено большое количество работ (см. работы [2–8] и библиографию в них). В работах [4–8] исследуются вопросы существования и поведения решений различных начально-краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка, подобных уравнению (1) (в [4, 5] производная функции $\sigma(r)$ удовлетворяет условию $\sigma'(r) > 0$; в [7, 8] производная $\sigma'(r)$ переменного знака: $|\sigma'(r)| \leq c = \text{const}$ в [7] и $-\sigma'(r) \leq c = \text{const}$ в [8]; в [6] предполагается существование $h > 0$ такого, что $(\sigma(r_1) - \sigma(r_2))(r_1 - r_2) > 0$, как только $|r_1 - r_2| \geq h$).

Наряду с уравнением (1), будем рассматривать уравнение

$$v_{tt} - \alpha v_{txx} - \beta v_{tx} + \gamma v_t = \partial_x^2 \sigma(v), \quad (4)$$

получающееся из (1) после дифференцирования его обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$. Для этого уравнения начальные условия примут вид

$$v|_{t=0} = \varphi'(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi'(x). \quad (5)$$

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующему плану. Вначале, для того чтобы убедиться, что постановка задачи Коши (4), (5) корректна и локальное по времени решение существует, выведем соответствующее задаче (4), (5) нелинейное интегральное уравнение. Используя его, найдём временной отрезок существования и единственности классического решения задачи Коши (4), (5) и оценку нормы в $C[\mathbb{R}^1]$ этого локального по времени решения. Затем, установив связь между существованием локальных решений уравнений (4) и (1), найдём условия существования глобального решения и разрушения решения на конечном временном отрезке для задачи Коши (1), (2).

1. Существование и единственность локального решения задачи Коши (4), (5).

Теорема 1. Пусть параметры α, β удовлетворяют условию $\alpha \geq \beta^2$, начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(x) \in C^{(3)}[\mathbb{R}^1]$, $\psi(x) \in C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$, а нелинейность $\sigma(\cdot)$ подчиняется требованиям (3). Тогда на отрезке $t \in [0, t_0]$ существует единственное классическое решение $v = v(t, x)$ задачи Коши (4), (5) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$, для которого справедлива оценка $\|v(t, x)\|_C \leq H(t)$, $t \in [0, t_0]$, в которой как мажоранта нормы решения, так и длина отрезка t_0 определяются параметрами α, β, γ уравнения (1), начальными функциями $\varphi(x), \psi(x)$ и нелинейностью $\sigma(\cdot)$.

Доказательство. Полагая, что на некотором временном отрезке $[0, T]$ решение задачи Коши (4), (5) существует, а начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ достаточно гладкие, проинтегрируем обе части уравнения (4) по временной переменной t :

$$v_t - \alpha v_{xx} - \beta v_x + \gamma v = v_0(x) + \int_0^t \partial_x^2 \sigma(v) ds, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где $v_0(x) = \psi'(x) - \alpha \varphi'''(x) - \beta \varphi''(x) + \gamma \varphi'(x)$. Начальное условие для полученного интегродифференциального уравнения первого порядка (6):

$$v|_{t=0} = \varphi'(x). \quad (7)$$

Задачу Коши (6), (7) будем исследовать в банаховом пространстве $C_T = C([0, T], C[\mathbb{R}^1])$ непрерывных абстрактных функций $V = V(t) : [0, T] \ni t \rightarrow v = v(t, x) \in C[\mathbb{R}^1]$, наделённом нормой

$$\|V\|_{C_T} = \max_{t \in [0, T]} \|V(t)\|_C = \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in \mathbb{R}^1}} |v(t, x)|.$$

Прежде чем приступить к записи уравнения (6) в абстрактной форме, напомним, что в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ [1, гл. 8, § 1; 9, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x (с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[\mathbb{R}^1]$) и ∂_x^2 ($D(\partial_x^2) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$) являются производящими операторами сильно непрерывных сжимающих соответственно группы

$$U(t; \partial_x)g(x) = g(x+t), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

и полугруппы

$$U(t; \partial_x^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x+\xi) d\xi, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+^1,$$

класса C_0 .

Для функции $g = g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$ справедливо неравенство $\|g'\|_C^2 \leq 4\|g''\|_C\|g\|_C$ (см. [9, § 7.1]), используя которое заключаем, что оператор $\beta\partial_x$ подчинен оператору $\alpha\partial_x^2$ с границей, не превышающей β^2/α . Но тогда при выполнении условия $\beta^2 \leq \alpha$ возмущенный оператор

$$A_0 = \alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x, \quad D(A_0) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1],$$

является [9, § 8.1] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы класса C_0 : $\|U(t; A_0)\| \leq 1$, причём полуось $\mathbb{R}_+^1$ принадлежит резольвентному множеству оператора A_0 .

Введём в рассмотрение оператор

$$A = A_0 - \gamma I, \quad D(A) = C^{(2)}[\mathbb{R}^1],$$

где I – тождественный оператор. На произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы представление полугруппы порождаемой оператором A :

$$U(t; A)g(x) = e^{-\gamma t} U(\beta t; \partial_x) U(\alpha t; \partial_x^2) g(x) = \frac{e^{-\gamma t}}{2\sqrt{\pi \alpha t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi-x-\beta t)^2/(4\alpha t)} g(\xi) d\xi$$

и оценка нормы

$$\|U(t; A)\| \leq e^{-\gamma t} \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Из оценки (8) следует, что числовая полуось $\lambda > -\gamma$ принадлежит резольвентному множеству оператора A , и значит, оператор A имеет ограниченный обратный: $D(A^{-1}) = C[\mathbb{R}^1]$, и для всех $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$ справедливы представление

$$A^{-1}g(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-\gamma s} U(s; A_0)g(x) ds = -\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi) d\xi,$$

где*) обозначено $\delta = \gamma + \beta^2/(4\alpha)$, и оценка нормы

$$\|A^{-1}\| \leq 1/\gamma. \quad (9)$$

Используя неравенство

$$\|\partial_x U(t; A_0)g(x)\|_C \leq \|g(x)\|_C / \sqrt{\pi \alpha t}, \quad t > 0, \quad g(x) \in C[\mathbb{R}^1], \quad (10)$$

для линейного ограниченного оператора

$$A_1 = \partial_x A^{-1}, \quad D(A_1) = C[\mathbb{R}^1],$$

*) Заметим, что $\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi| = 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|K(\xi) < 0$, где $K(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)\beta/(2\sqrt{\alpha\delta}) - 1$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

получим представление

$$A_1 g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi) d\xi$$

и оценку нормы

$$\|A_1\| \leq 1/\sqrt{\alpha\gamma}. \quad (11)$$

Учитывая полученные формулы для операторов A^{-1} и A_1 , выводим представление для линейного ограниченного оператора

$$A_2 = \partial_x^2 A^{-1} = \alpha^{-1}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1), \quad D(A_2) = C[\mathbb{R}^1],$$

на произвольном элементе $g(x) \in C[\mathbb{R}^1]$:

$$A_2 g(x) = \alpha^{-1} \left(g(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} + \beta K(\xi) \right) e^{\beta\xi - 2\sqrt{\alpha\delta}|\xi|} g(x + 2\alpha\xi) d\xi \right), \quad (12)$$

и оценку нормы

$$\|A_2\| \leq \mu = \alpha^{-1}(2 + \beta/\sqrt{\alpha\gamma}). \quad (13)$$

Теперь уравнение (6) в пространстве C_T можно записать в абстрактном виде:

$$V'(t) - AV(t) = V_0 + A \int_0^t A_2 \sigma(V(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

где обозначено $V'(t) = dV(t)/dt$ и $V_0 = V'(0) - AV(0)$.

Применив к обеим частям уравнения (14) полугруппу $U(t - \tau; A)$, предварительно заменив в (14) переменную t на τ , получим

$$(U(t - \tau; A)V)'_{\tau} = U(t - \tau; A) \left(V_0 + A \int_0^{\tau} A_2 \sigma(V(s)) ds \right),$$

откуда, интегрируя обе части по переменной τ в пределах от 0 до t , выводим формулу

$$V(t) = U(t; A)V(0) + \int_0^t U(t - \tau; A)V_0 d\tau + \int_0^t U(t - \tau; A)A \left(\int_0^{\tau} A_2 \sigma(V(s)) ds \right) d\tau. \quad (15)$$

Первый интеграл в правой части (15) равен

$$J_1 = V(0) - U(t; A)V(0) + \int_0^t U(\tau; A)V'(0) d\tau,$$

откуда, используя обратимость оператора A , имеем $J_1 = [U(t; A) - I][A^{-1}V'(0) - V(0)]$.

Интегрируя по частям, вычисляем второй интеграл в (15):

$$J_2 = - \int_0^t (U(t - \tau; A))'_{\tau} \left(\int_0^{\tau} A_2 \sigma(V(s)) ds \right) d\tau =$$

$$= - \int_0^t A_2 \sigma(V(s)) ds + \int_0^t U(t - \tau; A) A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau.$$

Подставив в равенство (15) найденные значения J_1 и J_2 , получим абстрактное нелинейное интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши (6), (7):

$$V(t) = W(t) + \int_0^t [U(t - \tau; A) - I] A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

где $W(t) = V(0) + [U(t; A) - I] A^{-1} V'(0)$ и $\|W(t)\|_C \leq p = \|\varphi'\|_C + 2\gamma^{-1} \|\psi'\|_C$.

Непрерывное решение интегрального уравнения (16) называется *обобщённым решением задачи Коши* (6), (7).

Пусть $V_i = V_i(t)$, $i = 1, 2$, – произвольные функции, принадлежащие замкнутому шару $C_{T,P}$ пространства C_T : $\|V_i(t)\|_{C_T} \leq P = \text{const}$. Из непрерывной дифференцируемости по Фреше оператора суперпозиции в пространстве непрерывных функций, а значит, оценки

$$\|\sigma(V_2) - \sigma(V_1)\|_{C_T} \leq l_{T,P} \|V_2 - V_1\|_{C_T},$$

в которой $l_{T,P} = \sup_{V \in C_{T,P}} \|\sigma'(V)\|_{C_T}$, и ограниченности линейных операторов A_2 и $U(t; A)$ следует, что нелинейный оператор

$$(\Phi V)(t) = W(t) + \int_0^t [U(t - \tau; A) - I] A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

непрерывно отображает пространство C_T в себя и, более того, удовлетворяет локальному условию Липшица в шаре $C_{T,P}$:

$$\|(\Phi V_2)(t) - (\Phi V_1)(t)\|_{C_T} \leq t L_{T,P} \|V_2 - V_1\|_{C_T},$$

где величина $t L_{T,P} = 2\|A_2\| l_{T,P} t < 1$, если $t < \alpha \sqrt{\alpha \gamma} / (2l_{T,P}(\beta + \sqrt{\alpha \gamma}))$. При этом если выполняется условие $p < (1 - L_{T,P})P$, то шар $C_{T,P}$ оператором Φ отображается в себя и Φ есть оператор сжатия в пространстве C_T . Следовательно, существует временной отрезок $[0, T_1]$, где $T_1 < \min\{1/L_{T,P}; (P - p)/L_{T,P}\}$, на котором задача Коши (6), (7) имеет единственное обобщённое решение $V = V(t)$, $t \in [0, T_1]$, т.е. единственное непрерывное решение интегрального уравнения (16) в шаре $C_{T,P}$.

Из интегрального уравнения (16), используя оценки (13), (8) и (3), выводим интегральное неравенство

$$\|v(t, x)\|_C \leq p + 2\mu \int_0^t |\sigma(\|v(s, x)\|_C)| ds, \quad t \in [0, T_1],$$

из которого в силу леммы Бихари [10, § 1.4] следует оценка нормы решения интегрального уравнения (16) на отрезке $[0, t_0] \subseteq [0, T_1]$:

$$\|v(t, x)\|_C \leq H(t) = G^{-1}(G(p) + 2\mu t), \quad (17)$$

где $G(\lambda) = \int_\xi^\lambda |\sigma(s)|^{-1} ds$ ($\xi > 0$, $\lambda > 0$), $G^{-1}(\cdot)$ – обратная к $G(\cdot)$ функция, а отрезок $[0, t_0]$ определяется условием принадлежности значений $G(p) + 2\mu t$ при $t \in [0, t_0]$ области определения функции $G^{-1}(\cdot)$.

Таким образом, на временном отрезке $[0, t_0]$ существует обобщённое решение $V(t)$ задачи Коши (6), (7), для нормы которого справедлива оценка (17) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$.

Теперь выясним, когда обобщённое решение $V(t)$, $t \in [0, t_0]$, задачи Коши (6), (7), будет классическим решением уравнения (4). Прежде всего отметим, что функция

$$V(t) = W(t) + \int_0^t U(t - \tau; A) A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau - \int_0^t A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, t_0],$$

определяемая правой частью интегрального уравнения (16), является решением уравнения

$$V'(t) = AQ(t) + V_0, \quad (18)$$

где

$$Q(t) = V(t) + \int_0^t A_2 \sigma(V(s)) ds = W(t) + \int_0^t U(t - \tau; A) A_2 \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad (19)$$

если функция $Q(t)$ принимает значения из области определения оператора A , и при этом функция $AQ(t)$ непрерывна на отрезке $[0, t_0]$. Чтобы убедиться в этом, представим функцию $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = W(t) + \frac{1}{\alpha}(I + \gamma A^{-1} - \beta A_1)J(t), \quad (20)$$

где

$$J(t) = \int_0^t U(t - \tau; A) \sigma(V(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, t_0].$$

Требуемые от функции $Q(t)$ свойства будут выполнены, если таковыми обладают функции $W(t)$ и $J(t) : t \rightarrow j(t, x)$.

Чтобы проверить принадлежность $J(t) \in D(A)$ и непрерывность $AJ(t)$ на отрезке $[0, t_0]$, перейдём к образу $j(t, x)$ функции $J(t)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$j(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} \sigma(v(t - \tau, \xi)) d\xi, \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1,$$

где $\xi_{\alpha\beta}(x, \tau) = (\xi - x - \beta\tau)^2 / (4\alpha\tau)$, для нормы которого справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|j(t, x)\|_C &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} |\sigma(\|v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C)| d\eta \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma(H(\tau))| \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \leq \frac{h}{\gamma}, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь $\eta_{\alpha\beta}(x, \tau) = x + \beta\tau + 2\eta\sqrt{\alpha\tau}$ и $h = \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma(H(\tau))|$.

Покажем, что функция $j(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x в полосе $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$.

Для производной функции $j(t, x)$ по переменной x справедлива формула

$$j_x(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} \sigma(v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) d\eta,$$

а для нормы – неравенства

$$\|j_x(t, x)\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} |\sigma(H(t-\tau))| d\eta \leq \frac{2h}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Отсюда следует оценка

$$\|j_x(t, x)\|_C \leq \frac{h}{\sqrt{\alpha\gamma}} \quad (22)$$

и, значит, равномерная сходимость при $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$ интеграла, определяющего $j_x(t, x)$.

Из соотношений (20)–(22), (11), (13) и (9) следует, что на отрезке $[0, t_0]$ норма абстрактной функции $\partial_x Q(t)$ ограничена константой:

$$\|\partial_x Q(t)\|_C \leq \|\varphi''\|_C + \frac{2}{\sqrt{\alpha\gamma}} \|\psi'\|_C + \frac{h}{\alpha\sqrt{\alpha\gamma}} \left(2 + \frac{2\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} \right) = q_1, \quad t \in [0, t_0].$$

Вернёмся к равенствам (19) и запишем в подробной форме первое из них (не применяя, чтобы не усложнять запись, представление (12) линейного ограниченного оператора A_2):

$$v(t, x) = q(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma(v(s, x)) ds \right), \quad (23)$$

где $q(t, x)$ – образ вектор-функции $Q(t)$ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$. Формально вычислим*) частную производную по переменной x от обеих частей равенства (23):

$$v_x(t, x) = q_x(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma'(v(s, x)) v_x(s, x) ds \right).$$

При этом оператор A_2 вычисляется по формуле (12) от функции, определяемой интегралом $\int_0^t \sigma'(v(s, x)) v_x(s, x) ds \in C[\mathbb{R}^1]$, а из полученного интегрального уравнения следует интегральное неравенство

$$\|v_x(t, x)\|_C \leq q_1 + \mu h_1 \int_0^t \|v_x(s, x)\|_C ds,$$

где $h_1 = \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma'(H(\tau))|$, из которого в силу леммы Гронуолла [10, § 1.1] выводится оценка нормы частной производной

$$\|v_x(t, x)\|_C \leq h_2, \quad t \in [0, t_0], \quad (24)$$

здесь $h_2 = q_1 e^{\mu h_1 t_0}$.

Для производной второго порядка функции $j(t, x)$ по переменной x справедливы формула

$$j_{xx}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} \sigma'(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_x(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) d\eta$$

и при $t \in [0, t_0]$ оценка

$$\|j_{xx}(t, x)\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} |\sigma'(\|v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C)| \times$$

*) Для элементов банахова пространства $C[\mathbb{R}^1]$ справедлива оценка $\|\varphi \cdot \psi\|_C \leq \|\varphi\|_C \|\psi\|_C$, в силу чего с ним можно работать как с алгеброй [11, § 6.1].

$$\times \|v_x(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C d\eta \leq \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\alpha\gamma}}. \quad (25)$$

Таким образом, функция $j(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x в полосе $(t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1$, что означает принадлежность значений функции $J(t)$, а значит, в силу (20) и функции $Q(t)$, области определения оператора A при $t \in [0, t_0]$, причём функции $AJ(t)$, $AQ(t)$ непрерывны на отрезке $[0, t_0]$, но тогда из равенства (18) следует непрерывность производной $V'(t)$ обобщённого решения на отрезке $[0, t_0]$.

Рассмотрим образ равенства (18) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$v_t(t, x) = Aq(t, x) + v_0(x) = A[w(t, x) + \alpha^{-1}(I + \gamma A^{-1} - \beta A A_1)j(t, x)] + v_0(x) = U(t; A)\psi'(x) + j_{xx}(t, x),$$

из которого следует оценка

$$\|v_t(t, x)\|_C \leq h_3, \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^1, \quad (26)$$

где $h_3 = \|\psi'\|_C + h_1 h_2 / \sqrt{\alpha\gamma}$.

Заметим, что из первого равенства в (19) следует соотношение $Q'(t) = V'(t) + A_2 \sigma(V(t))$, устанавливающее непрерывность производной $Q'(t)$ на отрезке $[0, t_0]$.

Продифференцировав обе части равенства (18), имеем $V''(t) = AQ'(t)$. Поэтому, чтобы доказать, что обобщённое решение $V(t)$, $t \in [0, t_0]$, задачи Коши (6), (7) будет классическим решением уравнения (4), осталось показать принадлежность значений функции $Q'(t) \in D(A)$ и непрерывность функции $AQ'(t)$ при $t > 0$.

Из равенства (20) следует

$$AQ(t) = AW(t) + \alpha^{-1}(A + \gamma I - \beta A A_1)J(t), \quad (27)$$

где $AA_1 = (\alpha \partial_x^2 + \beta \partial_x - \gamma I) \partial_x A^{-1} = \alpha A_3 + \beta A_2 - \gamma A_1$, здесь $A_3 = \partial_x^3 A^{-1} = \alpha^{-1}(\partial_x - \beta A_2 + \gamma A_1)$, поэтому $AA_1 = \partial_x$, и тогда равенство (27) примет вид

$$AQ(t) = AW(t) + \alpha^{-1}(A + \gamma I - \beta \partial_x)J(t)$$

или, учитывая определение оператора A и соотношения $AW(t) = AV(0) + [U(t; A) - I]V'(0) = U(t; A)V'(0) - V_0$, имеем

$$AQ(t) = U(t; A)V'(0) + \partial_x^2 J(t) - V_0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (28)$$

Из соотношений (20)–(22), (28), (25), (11) и (13) следует, что на отрезке $[0, t_0]$ норма функции $\partial_x^2 Q(t)$ ограничена константой:

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2 Q(t)\|_C &= \|q_{xx}(t, x)\|_C \leq \|\varphi'''\|_C + \frac{2}{\alpha} \left(2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \right) \|\psi'\|_C + \\ &+ \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha\gamma}} \left[h_1 h_2 + \frac{h}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{2\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left(2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \right) \right) \right] = q_2, \quad t \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (29)$$

Формально вычислив производную по переменной x от обеих частей равенства (23), получим

$$v_{xx}(t, x) = \tilde{q}(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma'(v(s, x)) v_{xx}(s, x) ds \right), \quad (30)$$

где обозначено

$$\tilde{q}(t, x) = q_{xx}(t, x) - A_2 \left(\int_0^t \sigma''(v(s, x)) v_x^2(s, x) ds \right),$$

причём согласно соотношениям (29), (13), (17) и (24) имеем $\|\tilde{q}(t, x)\|_C \leq h_5$, где $h_5 = q_2 + \mu t_0 h_2^2 h_4$ и $h_4 = \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma''(H(\tau))|$.

Из интегрального уравнения (30) следует интегральное неравенство

$$\|v_{xx}(t, x)\|_C \leq h_5 + \mu h_1 \int_0^t \|v_{xx}(s, x)\|_C ds,$$

из которого в силу леммы Гронуолла вытекает оценка нормы частной производной

$$\|v_{xx}(t, x)\|_C \leq h_6, \quad t \in [0, t_0], \quad (31)$$

где $h_6 = h_5 e^{\mu h_1 t_0}$.

Теперь вернёмся к образу равенства (18) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ и вычислим производную по переменной x от обеих частей этого равенства: $v_{tx}(t, x) = \partial_x A Q(t) + v'_0(x)$, или согласно соотношению (27)

$$v_{tx}(t, x) = \partial_x U(t; A) \psi'(x) + j_{xxx}(t, x), \quad t \in [0, t_0]. \quad (32)$$

Используя неравенство (10), оценим норму первого слагаемого в правой части (32):

$$\|\partial_x U(t; A) \psi'(x)\|_C \leq e^{-\gamma t} \|\psi'\|_C / \sqrt{\pi \alpha t}, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (33)$$

Для второго слагаемого из (32) имеем представление

$$\begin{aligned} j_{xxx}(t, x) = & \frac{1}{\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^t e^{-\gamma \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} [\sigma''(v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_x^2(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) + \\ & + \sigma'(v(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_{xx}(t - \tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))] d\eta \end{aligned}$$

и с учётом неравенств (3), (17), (24) и (31) оценку

$$\begin{aligned} \|j_{xxx}(t, x)\|_C \leq & \frac{1}{\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^t e^{-\gamma \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} [|\sigma''(H(t - \tau))| h_2^2 + \\ & + |\sigma'(H(t - \tau))| h_6] d\eta \leq \frac{h_2^2 h_4 + h_1 h_6}{\sqrt{\alpha \gamma}} = h_7, \quad t \in [0, t_0]. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, применив неравенства (33) и (34), имеем оценку

$$\|v_{tx}(t, x)\|_C \leq e^{-\gamma t} \frac{\|\psi'\|_C}{\sqrt{\pi \alpha t}} + h_7 \leq \frac{h_8}{\sqrt{t}} + h_7, \quad 0 < t \leq t_0, \quad (35)$$

где $h_8 = \|\psi'\|_C / \sqrt{\alpha \pi}$.

Для того чтобы получить оценку производной $v_{txx}(t, x) = \partial_x^2 V'(t)$, в силу соотношения (23) надо знать оценку нормы производной $q(t, x) = Q(t)$, и так как согласно (20)

$$Q'(t) = U(t; A) V'(0) + \frac{1}{\alpha} (I + \gamma A^{-1} - \beta A_1) J'(t),$$

то надо знать оценки производных функции $j(t, x) = J(t)$.

Для образа в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ функции $J'(t)$:

$$j_t(t, x) = U(t; A) \sigma(V(0)) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha \pi}} \int_0^t e^{-\gamma \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} \sigma'(v(t - \tau, \xi)) v_t(t - \tau, \xi) d\xi,$$

используя неравенства (26), выводим оценку

$$\begin{aligned} & \|J'(t)\|_C = \|j_t(t, x)\|_C \leqslant \\ & \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|V(0)\|_C)| + \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} |\sigma'(\|v(t-\tau, \xi)\|_C)| \|v_t(t-\tau, \xi)\|_C d\xi \leqslant \\ & \leqslant |\sigma(\|\varphi'\|_C)| + \frac{h_1 h_3}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = |\sigma(\|\varphi'\|_C)| + h_1 h_3 = h_9. \end{aligned}$$

Образ $\partial_x J'(t)$ есть смешанная производная

$$\begin{aligned} & j_{tx}(t, x) = \partial_x U(t; A) \sigma(V(0)) + \\ & + \frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x - \beta\tau) e^{-\xi_{\alpha\beta}(x, \tau)} \sigma'(v(t-\tau, \xi)) v_t(t-\tau, \xi) d\xi = \\ & = \partial_x U(t; A) \sigma(V(0)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} \sigma'(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_t(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) d\eta, \end{aligned}$$

для которой, применяя неравенство (10), найдём оценку нормы

$$\begin{aligned} & \|\partial_x J'(t)\|_C = \|j_{tx}(t, x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / \sqrt{\pi\alpha t} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} |\sigma'(H(t-\tau))| \|v_t(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))\|_C d\eta \leqslant \frac{h_{10}}{\sqrt{t}} + h_{11}, \end{aligned}$$

где $h_{10} = |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / \sqrt{\alpha\pi}$ и $h_{11} = h_1 h_3 / \sqrt{\alpha\gamma}$.

Образ $\partial_x^2 J'(t)$ есть производная третьего порядка:

$$\begin{aligned} & j_{txx}(t, x) = \partial_x^2 U(t; A) \sigma(V(0)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{-\eta^2} [\sigma''(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_t(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) v_x(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau)) + \\ & + \sigma'(v(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))) v_{tx}(t-\tau, \eta_{\alpha\beta}(x, \tau))] d\eta. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя неравенства (17), (24), (26), (35) и $\|\partial_x^2 U(t; A) \sigma(V(0))\|_C \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / (\alpha t)$, $0 < t \leqslant t_0$, получим оценку функции (36):

$$\begin{aligned} & \|\partial_x^2 J'(t)\|_C = \|j_{txx}(t, x)\|_C \leqslant e^{-\gamma t} |\sigma(\|\varphi'\|_C)| / (\alpha t) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| e^{-\eta^2} \left[|\sigma''(H(t-\tau))| h_2 h_3 + |\sigma'(H(t-\tau))| \left(\frac{h_8}{\sqrt{t-\tau}} + h_7 \right) \right] d\eta \leqslant \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{h_{10}}{t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^t e^{-\gamma\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} \left(h_2 h_3 h_4 + \left(h_7 + \frac{h_8}{\sqrt{t-\tau}} \right) h_1 \right) ds = \\
 &= \frac{h_{10}}{t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{h_2 h_3 h_4 + h_1 h_7}{\sqrt{\gamma}} + h_1 h_8 \sqrt{\pi} \right) = \frac{h_{10}}{t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + h_{12}, \quad 0 < t \leq t_0,
 \end{aligned} \tag{37}$$

где обозначено $h_{12} = \alpha^{-1/2}(\gamma^{-1/2}(h_2 h_3 h_4 + h_1 h_7) + h_1 h_8 \sqrt{\pi})$.

Теперь вернёмся к рассмотрению уравнения (30). Производная по переменной t от обеих частей этого уравнения приводит к соотношению

$$v_{txx}(t, x) = q_{txx}(t, x) - A_2(\sigma'(v(t, x))v_{xx}(t, x) + \sigma''(v(t, x))v_x^2(t, x)), \tag{38}$$

в котором, согласно равенству (20), $q_{txx}(t, x)$ есть образ в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ абстрактной функции

$$\partial_x^2 Q'(t) = \partial_x^2 U(t; A)V'(0) + \frac{1}{\alpha} \partial_x^2 J'(t) - \frac{\beta}{\alpha} \partial_x J'(t) + \frac{1}{\alpha} \left[\left(\gamma + \frac{\beta^2}{\alpha} \right) A_2 - \frac{\beta\gamma}{\alpha} A_1 \right] J'(t).$$

Из представления (38), используя неравенства (37), (13), (24) и (31), выводим оценку

$$\begin{aligned}
 \|v_{txx}(t, x)\|_C &\leq \|q_{txx}(t, x)\|_C + \|A_2\|(\|\sigma'(\|v(t, x)\|_C)\|v_{xx}(t, x)\|_C + \\
 &+ \|\sigma''(\|v(t, x)\|_C)\|v_x^2(t, x)\|_C) \leq h_{10}\sqrt{\pi}/(t\sqrt{\alpha}) + h_{13}, \quad 0 < t \leq t_0,
 \end{aligned}$$

где $h_{13} = h_{12} + \mu(h_1 h_6 + h_4 h_2^2)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось оценить производную второго порядка $v_{tt}(t, x)$. Используя равенство (27), имеем

$$V''(t) = (\alpha \partial_x^2 + \beta \partial_x - \gamma I)U(t; A)V'(0) + \partial_x^2 J'(t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
 \|v_{tt}(t, x)\|_C &\leq \alpha \|\partial_x^2 U(t; A)V'(0)\|_C + \beta \|\partial_x U(t; A)V'(0)\|_C + \gamma \|U(t; A)V'(0)\|_C + \|\partial_x^2 J'(t)\|_C \leq \\
 &\leq e^{-\gamma t}(\|\psi'\|_C/t + \beta \|\psi'\|_C/\sqrt{\alpha\pi t} + \gamma \|\psi'\|_C) + \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\alpha\gamma}}, \quad 0 < t \leq t_0.
 \end{aligned}$$

2. Связь между решениями уравнений (1) и (4). В дальнейших рассуждениях $L_2(\mathbb{R}^1)$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом, а $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ – пространство Соболева. Напомним определения скалярного произведения $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x) dx$ и нормы $\|\varphi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx)^{1/2}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ и оценку

$$\|g\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)| \leq \|g\|_{W_2^1} = (\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2)^{1/2}, \tag{39}$$

справедливую для функций $g(x) \in C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, причём если $g(x) \in C^{(2)}[\mathbb{R}^1]$, то предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равен нулю (см. [12]).

Лемма. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $\sigma'(0) = 0$ в дополнение к условиям (3), а классические решения $u(t, x)$ и $v(t, x)$ уравнений (1) и (4) и их частные производные $u_t(t, x)$ и $v_t(t, x)$ для всех значений $t \in [0, t_0]$ по переменной x принадлежат пересечению пространств $C[\mathbb{R}^1]$ и $W_2^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда из существования локального классического решения $v = v(t, x)$, $t \in [0, t_0]$, уравнения (4) следует существование соответствующего классического решения $u = u(t, x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0, t_0]$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_x(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_t(t, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v_{tx}(t, x) = 0,$$

поэтому $\int_{-\infty}^x v_{t\xi}(t, \xi) d\xi = v_t(t, x)$ и $\int_{-\infty}^x v_{t\xi\xi}(t, \xi) d\xi = v_{tx}(t, x)$. Далее, учитывая непрерывность функции $\sigma'(\cdot)$ и равенство $\sigma'(0) = 0$, получим $\int_{-\infty}^x (\sigma(v(t, \xi)))_{\xi\xi} d\xi = (\sigma(v(t, x)))_x$. Используя полученные представления, убеждаемся, что функция $u(t, x) = \int_{-\infty}^x v(t, \xi) d\xi$ является решением уравнения (1).

3. Условия существования глобального решения задачи Коши (1), (2). Полагая $t \in [0, t_0]$, введём в рассмотрение два функционала, связанных с уравнениями (1) и (4):

$$F_1(t) = (u, u) + (u_x, u_x) + (u_{xx}, u_{xx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2) dx$$

и

$$F_2(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) + (u_{ttx}, u_{ttx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2 + u_{ttx}^2) dx. \quad (40)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы и теоремы 1, и пусть параметры уравнения (1) удовлетворяют условиям $\alpha, \gamma \geq 2$ и $\beta \leq 1$, а начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условию $\gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2\|\psi\|_2^2 \geq 2(\varphi + \varphi'', \psi)$. Тогда существует единственное глобальное классическое решение $u = u(t, x) \in C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, задачи Коши (1), (2), для которого в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$ справедлива оценка

$$\|u(t, x)\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u(t, x)| \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad c_{1,2} = \text{const} \geq 0,$$

причём частные производные решения $u_x(t, x)$, $u_t(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ для $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$ также принадлежат пересечению $C[\mathbb{R}^1] \cap W_2^1(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на $u = u(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x . Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(t, x) = 0$, получаем равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2) = (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) - \beta (u_x, u_t) - (u, u_{tt}), \quad (41)$$

следовательно, интегрируя далее по переменной t , имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2 &= \alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi\|_2^2 + \\ &+ 2 \int_0^t (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_x, u_\tau) d\tau - 2 \int_0^t (u, u_{\tau\tau}) d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогично, умножив обе части уравнения (1) на u_{xx} , выводим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_{xx}\|_2^2 + \gamma \|u_x\|_2^2) = (u_{xx}, u_{tt}) - \beta (u_{xx}, u_{tx}) - (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)), \quad (43)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \alpha \|u_{xx}\|_2^2 + \gamma \|u_x\|_2^2 &= \alpha \|\varphi''\|_2^2 + \gamma \|\varphi'\|_2^2 + \\ &+ 2 \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau x}) d\tau - 2 \int_0^t (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) d\tau. \end{aligned} \quad (44)$$

Складывая равенства (42) и (44), получаем

$$\begin{aligned} & \gamma \|u\|_2^2 + (\alpha + \gamma) \|u_x\|_2^2 + \alpha \|u_{xx}\|_2^2 = \\ & = \gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2 \int_0^t (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_x, u_\tau) d\tau - 2 \int_0^t (u, u_{\tau\tau}) d\tau + \\ & + 2 \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau - 2\beta \int_0^t (u_{xx}, u_{\tau x}) d\tau - 2 \int_0^t (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) d\tau. \end{aligned} \quad (45)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, интегрируя по частям и используя условие (3), последовательно рассмотрим интегралы в правой части равенства (45):

1) $\int_0^t (u, \sigma'(u_x) u_{xx}) d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|u\|_2^2 + \|\sigma'(u_x) u_{xx}\|_2^2) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|u\|_2^2 d\tau + h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \right),$
так как

$$\int_0^t \|\sigma'(u_x) u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq \int_0^t \left(\left| \sigma' \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u_x| \right) \right| \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx \right) d\tau \leq h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau;$$

2) $\int_0^t (u_x, u_\tau) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau \right);$

3) $\int_0^t (u, u_{\tau\tau}) d\tau = \int_0^t [(u, u_\tau)_\tau - (u_\tau, u_\tau)] d\tau = (u, u_\tau)|_0^t - \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau \leq (\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2)/2 - (\varphi, \psi);$

4) $\int_0^t (u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau = \int_0^t [(u_{xx}, u_\tau)_\tau - (u_{\tau xx}, u_\tau)] d\tau = (u_{xx}, u_t) - (\varphi'', \psi) + \int_0^t (u_{\tau x}, u_{\tau x}) d\tau \leq$
 $\leq (\|u_t\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2)/2 - (\varphi'', \psi) + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau;$

5) $\int_0^t (u_{xx}, u_{\tau x}) d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau \right);$

6) $\int_0^t (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) d\tau = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 \sigma'(u_x) dx \leq \int_0^t \left| \sigma' \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u_x| \right) \right| \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq h_1 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau.$

С учётом найденных оценок интегралов и обозначения

$$h_{14} = \gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 - 2(\varphi + \varphi'', \psi)$$

из (45) получим

$$(\gamma - 1) \|u\|_2^2 + (\alpha + \gamma) \|u_x\|_2^2 + (\alpha - 1) \|u_{xx}\|_2^2 \leq h_{14} + 2 \|u_t\|_2^2 + \beta \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + (\beta + 2) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau +$$

$$+ \int_0^t \|u\|_2^2 d\tau + \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + (h_1^2 + 2h_1 + \beta) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (46)$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_t и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x . Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_t(t, x) = 0$, получаем равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + \alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2 = (u_t, \sigma'(u_x) u_{xx}), \quad (47)$$

из которого с учётом неравенства Коши–Буняковского и условия (3) следует неравенство

$$\|u_t\|_2^2 + (2\gamma - 1) \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + 2\alpha \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau \leq \|\psi\|_2^2 + h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (48)$$

Пусть оба коэффициента α и γ уравнения (1) не меньше, чем величина $(\beta/2 + 1)/2$, тогда, применив к неравенству (44) оценку (48), получим

$$\begin{aligned} & (\gamma - 1) \|u\|_2^2 + (\alpha + \gamma) \|u_x\|_2^2 + (\alpha - 1) \|u_{xx}\|_2^2 \leq \\ & \leq h_{14} + 2\|\psi\|_2^2 + \int_0^t \|u\|_2^2 d\tau + \beta \int_0^t \|u_x\|_2^2 d\tau + (2h_1^2 + 2h_1 + \beta) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая, что параметры $\alpha \geq 2$ и $\gamma \geq 2$, и обозначая $h_{15} = h_{14} + 2\|\psi\|_2^2$ и $h_{16} = 2h_1^2 + 2h_1 + \beta + 1$, выводим интегральное неравенство

$$F_1(t) \leq h_{15} + h_{16} \int_0^t F_1(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_0]. \quad (49)$$

Потребуем, чтобы начальные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ удовлетворяли соотношению $\gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2\|\psi\|_2^2 - 2(\varphi + \varphi'', \psi) \geq 0$, тогда к неравенству (49) применима лемма Гронуолла и, значит, на всей временной полуоси $t \geq 0$ справедлива оценка

$$F_1(t) = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 \leq h_{15} e^{h_{16}t}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+^1. \quad (50)$$

Применив полученную оценку (50) к неравенству (48), приходим к интегральному неравенству

$$\|u_t\|_2^2 \leq \|\psi\|_2^2 + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} / h_{16} + \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau,$$

и, следовательно, по лемме Гронуолла имеет место оценка

$$\|u_t\|_2^2 \leq S_1(t) = \|\psi\|_2^2 + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}} e^{h_{16}t} + \left(\|\psi\|_2^2 t + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}^2} e^{h_{16}t} \right) e^t, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+^1. \quad (51)$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_{tt} и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по x . Тогда, интегрируя по частям и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{tx}(t, x) = 0$, получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2) + \|u_{tt}\|_2^2 = \beta (u_{tx}, u_{tt}) + (\sigma'(u_x) u_{xx}, u_{tt}), \quad (52)$$

из которого, используя условие (3) и обозначая $h_{17} = \|\psi\|_{W_2^1}^2 \max\{\alpha, \gamma\}$, следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2 + 2 \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau &\leq h_{17} + 2\beta \int_0^t (u_{tx}, u_{\tau\tau}) d\tau + 2 \int_0^t (\sigma'(u_x)u_{xx}, u_{\tau\tau}) d\tau \leq \\ &\leq h_{17} + \beta \left(\int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau \right) + h_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (50) выводим

$$\alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2 + (1 - \beta) \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_2^2 d\tau \leq h_{17} + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} / h_{16} + \beta \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau$$

и, положив $\beta \leq 1$, приходим к интегральному неравенству

$$\|u_{tx}\|_2^2 \leq h_{17} + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} / h_{16} + \beta \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau.$$

Тогда в силу леммы Гронвулла получаем оценку

$$\|u_{tx}\|_2^2 \leq S_2(t) = h_{17} + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}} e^{h_{16}t} + \beta \left(h_{17}t + h_1^2 \frac{h_{15}}{h_{16}^2} e^{h_{16}t} \right) e^{\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+^1. \quad (53)$$

Умножим обе части уравнения (1) на u_{txx} и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ по x . Интегрируя по частям и учитывая, что $(u_{tx}, u_{txx}) = 0$, получаем равенство

$$\alpha \|u_{txx}\|_2^2 + \gamma \|u_{tx}\|_2^2 + \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 = -(\sigma'(u_x)u_{xx}, u_{txx}),$$

из которого, уменьшая левую часть, используя неравенство Коши–Буняковского и оценку (50), следует цепочка неравенств

$$\alpha \|u_{txx}\|_2^2 \leq \|\sigma'(u_x)u_{xx}\|_2 \|u_{txx}\|_2 + \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right| \leq \frac{1}{2} (h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} + \|u_{txx}\|_2^2) + \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right|,$$

и так как $\alpha \geq 2$, то

$$\|u_{txx}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t} + \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right|. \quad (54)$$

Вернёмся к равенству (47): уменьшив его левую часть и одновременно применив неравенство Коши–Буняковского к правой части с последующим применением оценок (50) и (51), получим цепочку неравенств

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 \right| \leq 2|(u_t, \sigma'(u_x)u_{xx})| \leq \|u_t\|_2^2 + h_1^2 \|u_{xx}\|_2^2 \leq S_1(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}$$

и, значит,

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 \right| \leq S_1(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}.$$

Теперь вернёмся к равенству (52): применим неравенство Коши–Буняковского к правой части (52) с последующим применением оценок (50) и (53) и получим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \|u_t\|_2^2) + 2\|u_{tt}\|_2^2 &\leq \beta \|u_{tx}\|_2^2 + \beta \|u_{tt}\|_2^2 + h_1^2 \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq \\ &\leq (\beta + 1)\|u_{tt}\|_2^2 + S_2(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}, \end{aligned}$$

откуда (так как $\alpha \geq 2$, а $\beta \leq 1$) имеем

$$\alpha \left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right| - \gamma \left| \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 \right| \leq \alpha \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 + \gamma \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + (1 - \beta) \|u_{tt}\|_2^2 \leq S_2(t) + h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}$$

и, значит,

$$\left| \frac{d}{dt} \|u_{tx}\|_2^2 \right| \leq \gamma S_1(t) + S_2(t) + (1 + \gamma) h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}. \quad (55)$$

Далее из неравенств (54) и (55) выводим оценку

$$\|u_{txx}\|_2^2 \leq \gamma S_1(t) + S_2(t) + \left(\frac{3}{2} + \gamma \right) h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}. \quad (56)$$

Таким образом, из неравенств (51), (53) и (56) вытекает оценка на всей временной полуоси $t \geq 0$ функционала (40):

$$F_2(t) = \|u_t\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{txx}\|_2^2 \leq (1 + \gamma) S_1(t) + 2S_2(t) + \left(\frac{3}{2} + \gamma \right) h_1^2 h_{15} e^{h_{16}t}. \quad (57)$$

Из априорных оценок (50) и (57) следует, что классические решения $u = u(t, x)$ и $v = v(t, x)$ уравнений (1) и (4) соответственно принадлежат пространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ для всех $t \geq 0$, причём в силу неравенств (39) из (50) выводим оценку нормы решения $u = u(t, x)$ уравнения (1) в пространстве $C[\mathbb{R}^1]$:

$$\|u(t, x)\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |u(t, x)| \leq \sqrt{h_{15}} e^{h_{16}t/2}, \quad t \geq 0,$$

обеспечивающую*) существование глобального решения задачи Коши (1), (2).

4. Условия разрушения решения задачи Коши (1), (2) на конечном временном отрезке. Введём в рассмотрение функционалы, связанные с уравнением (1):

$$f_1(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx, \quad t \in [0, t_0], \quad (58)$$

и

$$f_2(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2) dx, \quad t \in [0, t_0]. \quad (59)$$

*) Здесь, учитывая априорные оценки (50) и (57), используется следующий алгоритм [12]: принимаем $v(t_0, x)$ за новую начальную функцию и отмечаем, что функция $v(t_0, x)$ обладает тем же набором свойств, которые, будучи допущенными для функции $v(0, x)$, позволили доказать существование как классического решения $v(t, x)$ уравнения (4) на отрезке $0 \leq t \leq t_0$, так и соответствующего ему решения $u(t, x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0, t_0]$, классическое решение $v(t, x)$ с отрезка $[0, t_0]$ продолжается до классического решения $v(t, x)$, $t \in [0, t_0 + t_1]$, где величина t_1 зависит от параметров α , β , γ , начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейности $\sigma(\cdot)$. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим неограниченное расширение временного интервала, в течение которого гарантируется решение, т.е. получим классическое решение задачи Коши для уравнения (1) на произвольном временном интервале.

Исследуем вопрос о разрушении решения уравнения (1) на некотором конечном временном отрезке $[0, t_{01}] \subseteq [0, t_0]$, т.е. получим достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала $f_1(t)$. Отрезок $[0, t_{01}]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялось требование $f_1(t) > 0$, которое следует из начального условия $f_1(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы и теоремы 1, и пусть параметры α , β , γ , нелинейность $\sigma(\cdot)$ и начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют требованиям:

$$\alpha > 1 + 2 \max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma'(H(\tau))|, \quad \gamma > 1, \quad \beta < 1,$$

$$f_1''(0) + h_{25}f_1(0) + h_{34} \geq 0, \quad f_1'(0) > \left(4h_{37}/(h_{33} - 4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33} - 4)}\right)f_1(0) > 0,$$

в которых постоянные величины $h_i = h_i(\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi; \sigma)$ определяются в ходе доказательства теоремы. Тогда решение разрушается за конечное время T_0 , и для времени существования решения справедлива оценка сверху

$$t_0 < T_0 = \frac{(f_1(0))^{1-h_{33}/4}}{h_{41}},$$

притом для функционала (58) имеет место оценка снизу

$$f_1(t) \geq \frac{e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}}{[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t]^{4/(h_{33}-4)}}.$$

Доказательство. Применим к квадрату производной $f_1'(t) = 2(u, u_t) + 2(u_x, u_{tx})$ неравенство Коши–Буняковского и получим вспомогательную оценку

$$(f_1'(t))^2 \leq 4f_1(t)f_2(t). \quad (60)$$

Вычисляя производную второго порядка функционала (58), выводим равенство, связывающее функционалы (58) и (59):

$$f_2(t) = \frac{1}{2}f_1''(t) + (u_{xx} - u, u_{tt}). \quad (61)$$

Из равенства (41) имеем

$$(u, u_{tt}) = (u, \sigma'(u_x)u_{xx}) - \beta(u_x, u_t) - \alpha(u_x, u_{tx}) - \gamma(u, u_t), \quad (62)$$

следовательно, применив неравенство Коши–Буняковского, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |(u, u_{tt})| &\leq \frac{1+\gamma}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{\beta+\gamma}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_{tx}\|_2^2 + \frac{h_1^2}{2}\|u_{xx}\|_2^2 \leq \\ &\leq h_{18}f_1(t) + h_{19}f_2(t) + \frac{h_1^2}{2}\|u_{xx}\|_2^2, \end{aligned}$$

где обозначено $h_{18} = \max\{(\alpha + \beta)/2, (1 + \gamma)/2\}$ и $h_{19} = \max\{\alpha/2, (\beta + \gamma)/2\}$.

Аналогично из равенства (43) имеем

$$(u_{xx}, u_{tt}) = (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) + \beta(u_{xx}, u_{tx}) + \alpha(u_x, u_{tx}) + \gamma(u, u_t) \quad (63)$$

и, значит,

$$|(u_{xx}, u_{tt})| \leq \frac{\gamma}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{\gamma}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\|u_{tx}\|_2^2 + \left(\frac{\beta}{2} + h_1\right)\|u_{xx}\|_2^2 \leq$$

$$\leq h_{19}f_1(t) + h_{20}f_2(t) + \left(\frac{\beta}{2} + h_1\right)\|u_{xx}\|_2^2,$$

где обозначено $h_{20} = \max\{\alpha/2, \gamma/2\}$ и $h_{21} = \max\{(\alpha + \beta)/2, \gamma/2\}$.

Одновременно рассмотрев соотношения (61)–(63), выводим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_1''(t) &= f_2(t) + (u, u_{tt}) - (u_{xx}, u_{tt}) = f_2(t) + (u, \sigma'(u_x)u_{xx}) - (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) - \\ &\quad - 2\gamma(u, u_t) - \beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] - 2\alpha(u_x, u_{tx}), \end{aligned} \quad (64)$$

используемое для вычисления значения производной $f_1''(t)$ в нуле.

Учитывая уравнение (1) и равенства $(u_t, u_{tx}) = 0$ и $(u_{txx}, u_{tx}) = 0$, найдём производную функционала (59):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_2'(t) &= (u_t, u_{tt}) - (u_{txx}, u_{tt}) = \\ &= (u_t, \sigma'(u_x)u_{xx}) - \alpha\|u_{tx}\|_2^2 - \gamma\|u_t\|_2^2 - (u_{txx}, \sigma'(u_x)u_{xx}) - \alpha\|u_{txx}\|_2^2 - \gamma\|u_{tx}\|_2^2, \end{aligned}$$

затем, группируя слагаемые и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} f_2(t) + 2\alpha \int_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2 d\tau + 2(\alpha + \gamma) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2\gamma \int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau = \\ = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + 2 \int_0^t (u_{\tau}, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau - 2 \int_0^t (u_{\tau xx}, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau. \end{aligned}$$

Далее, вычисляя второй интеграл в правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^t \sigma'(u_x)(u_{xx}^2)_{\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sigma'(u_x)u_{xx}^2|_0^t - \int_0^t u_{xx}^2 \sigma''(u_x)u_{\tau x} d\tau \right] dx = \\ &= (\sigma'(u_x), u_{xx}^2) - (\sigma'(\varphi'), (\varphi''(x))^2) - \int_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2) d\tau \end{aligned}$$

и обозначая $h_{22} = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + (\sigma'(\varphi'), (\varphi''(x))^2)$, получаем

$$\begin{aligned} f_2(t) + 2\alpha \int_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2 d\tau + 2(\alpha + \gamma) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2\gamma \int_0^t \|u_{\tau}\|_2^2 d\tau = \\ = h_{22} - (u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) + 2 \int_0^t (u_{\tau}, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau + \int_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2) d\tau. \end{aligned} \quad (65)$$

Умножим обе части равенства (65) на пока неопределённое положительное число $k \geq 2$ и сложим равенства (64) и (65), предварительно записав (64) в виде

$$2f_2(t) = f_1''(t) - 2(u, \sigma'(u_x)u_{xx}) + 2(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) + 4\alpha(u_x, u_{tx}) + 2\beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] + 4\gamma(u, u_t).$$

Тогда, используя оценку (24) и обозначая

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^1 \\ t \in [0, t_0]}} (\sigma''(u_x))^2 u_{xx}^2 \leq h_2^2 \max_{t \in [0, t_0]} (\sigma''(H(t)))^2 = h_{23},$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 & (2+k)f_2(t) + 2k\alpha \int_0^t \|u_{\tau xx}\|_2^2 d\tau + 2k(\alpha + \gamma) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + 2k\gamma \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau = \\
 & = kh_{22} + 2k \int_0^t (u_\tau, \sigma'(u_x)u_{xx}) d\tau + k \int_0^t (u_{\tau x}, \sigma''(u_x)u_{xx}^2) d\tau - (k-2)(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) - \\
 & \quad - 2(u, \sigma'(u_x)u_{xx}) + f_1''(t) + 4\alpha(u_x, u_{tx}) + 2\beta[(u_x, u_t) + (u_{xx}, u_{tx})] + 4\gamma(u, u_t) \leq \\
 & \leq kh_{22} + f_1''(t) + (1+2\gamma)\|u\|_2^2 + (2\alpha + \beta)\|u_x\|_2^2 + (\beta + 2\gamma)\|u_t\|_2^2 + (2\alpha + \beta)\|u_{tx}\|_2^2 + \\
 & \quad + k \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + \frac{k}{2} \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + kh_1^2 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau + \frac{k}{2} \int_0^t \|\sigma''(u_x)u_{xx}^2\|_2^2 d\tau + \\
 & \quad + (\beta + h_1^2)\|u_{xx}\|_2^2 + |k-2|(u_{xx}^2, \sigma'(u_x)) \leq \\
 & \leq kh_{22} + f_1''(t) + (2\alpha + \beta + 2\gamma + 1)f_1(t) + 2(\alpha + \beta + \gamma)f_2(t) + k \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau + \\
 & \quad + \frac{k}{2} \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + (\beta + h_1^2 + |k-2|h_1)\|u_{xx}\|_2^2 + k\left(h_1^2 + \frac{h_{23}}{2}\right) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau,
 \end{aligned}$$

откуда выводим неравенство

$$\begin{aligned}
 & (k+2-2(\alpha + \beta + \gamma))f_2(t) + k\left(2\alpha + 2\gamma - \frac{1}{2}\right) \int_0^t \|u_{\tau x}\|_2^2 d\tau + k(2\gamma - 1) \int_0^t \|u_\tau\|_2^2 d\tau \leq \\
 & \leq kh_{22} + f_1''(t) + (2\alpha + \beta + 2\gamma + 1)f_1(t) + (\beta + h_1^2 + |k-2|h_1)\|u_{xx}\|_2^2 + k(h_1^2 + h_{23}/2) \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau.
 \end{aligned}$$

Пусть $\gamma \geq 1/2$. Уменьшив левую часть последнего неравенства и обозначив $h_{24} = k + 2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)$, $h_{25} = 2\alpha + \beta + 2\gamma + 1$, $h_{26} = \beta + h_1^2 + |k-2|h_1$, $h_{27} = k(h_1^2 + h_{23}/2)$, $E_1(t) = kh_{22} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t)$, имеем

$$h_{24}f_2(t) \leq E_1(t) + h_{26}\|u_{xx}\|_2^2 + h_{27} \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau. \quad (66)$$

Вернёмся к рассмотрению неравенства (46): уменьшая его левую часть и увеличивая правую, полагая $\alpha > 1$ и $\gamma > 1$, обозначая $h_{28} = (\alpha - 1)^{-1}(h_1^2 + 2h_1 + \beta)$ и

$$E_2(t) = (\alpha - 1)^{-1} \left(h_{14} + 2f_2(t) + (\beta + 2) \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (\beta + 1) \int_0^t f_1(\tau) d\tau \right),$$

получаем интегральное неравенство

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq E_2(t) + h_{28} \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau,$$

откуда в силу леммы Гронуолла выводим оценку

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq E_2(t) + h_{28} \int_0^t E_2(\tau) e^{h_{28}(t-\tau)} d\tau \leq E_2(t) + h_{29} \int_0^t E_2(\tau) d\tau, \quad (67)$$

где обозначено $h_{29} = h_{28}e^{h_{28}t_0}$.

Интегрируя по частям

$$\int_0^t \left(\int_0^\tau f_i(s) ds \right) d\tau = \tau \int_0^\tau f_i(s) ds \Big|_0^t - \int_0^t \tau f_i(\tau) d\tau \leq t \int_0^t f_i(\tau) d\tau \leq t_0 \int_0^t f_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

оценим интеграл в (67):

$$\int_0^t E_2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(h_{14}t_0 + 2 \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (\beta + 2)t_0 \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (\beta + 1) \int_0^t f_1(\tau) d\tau \right).$$

Применим полученную оценку для увеличения правой части неравенства (66) и обозначим $h_{30} = (\alpha - 1)^{-1}h_{14}(1 + h_{29}t_0)$, $h_{31} = (\alpha - 1)^{-1}[\beta + 2 + (2 + (\beta + 2)t_0)h_{29}]$, $h_{32} = (\alpha - 1)^{-1}(\beta + 1) \times (1 + h_{29}t_0)$. В результате имеем

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq h_{30} + \frac{2}{\alpha - 1} f_2(t) + h_{31} \int_0^t f_2(\tau) d\tau + h_{32} \int_0^t f_1(\tau) d\tau. \quad (68)$$

Теперь вернёмся к рассмотрению неравенства (66): применив (68), увеличим его правую часть:

$$\begin{aligned} h_{24}f_2(t) &\leq kh_{22} + (h_{26} + h_{27}t_0)h_{30} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t) + \frac{2h_{26}}{\alpha - 1}f_2(t) + \\ &+ \left((h_{26} + h_{27}t_0)h_{31} + \frac{2h_{27}}{\alpha - 1} \right) \int_0^t f_2(\tau) d\tau + (h_{26} + h_{27}t_0)h_{32} \int_0^t f_1(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

откуда, полагая

$$\alpha > 2h_1 + 1, \quad (69)$$

обозначая $h_{33} = h_{24} - 2h_{26}/(\alpha - 1)$, $h_{34} = kh_{22} + (h_{26} + h_{27}t_0)h_{30}$, $h_{35} = (h_{26} + h_{27}t_0)h_{32}$, $h_{36} = (h_{26} + h_{27}t_0)h_{31} + 2h_{27}/(\alpha - 1)$,

$$E_3(t) = h_{34} + f_1''(t) + h_{25}f_1(t) + h_{35} \int_0^t f_1(\tau) d\tau$$

и требуя $h_{33} > 0$, что приводит к условию

$$k > 2[(\alpha - 1)(\alpha + \beta + \gamma - 1) + h_1^2 - 2h_1 + \beta]/(\alpha - 2h_1 - 1),$$

имеем

$$f_2(t) \leq \frac{1}{h_{33}} E_3(t) + \frac{h_{36}}{h_{33}} \int_0^t f_2(\tau) d\tau. \quad (70)$$

Пусть $h_{34} + f_1''(0) + h_{25}f_1(0) \geq 0$, тогда на некотором отрезке $[0, t_{02}] \subseteq [0, t_{01}]$ справедливо неравенство $E_3(t) \geq 0$, поэтому к интегральному неравенству (70) применима лемма Гронуолла и, значит, справедлива оценка

$$h_{33}f_2(t) \leq E_3(t) + h_{37} \int_0^t E_3(\tau) d\tau, \quad (71)$$

где обозначено $h_{37} = e^{t_0 h_{36}/h_{33}} h_{36}/h_{33}$.

Оценивая интеграл в правой части неравенства (71), имеем

$$\int_0^t E_3(\tau) d\tau \leq h_{34}t_0 + f_1'(t) - f_1'(0) + (h_{25} + h_{35}t_0) \int_0^t f_1(\tau) d\tau. \quad (72)$$

Пусть выполняется условие $f_1'(0) = 2[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')] > 0$. Тогда на отрезке $[0, t_{03}] \subseteq [0, t_{02}]$ справедливо неравенство $f_1'(t) \geq 0$, и поэтому справедлива оценка

$$\int_0^t f_1(\tau) d\tau = tf_1(t) - \int_0^t \tau f_1'(\tau) d\tau \leq t_0 f_1(t),$$

с учётом которой неравенство (72) примет вид

$$\int_0^t E_3(\tau) d\tau \leq h_{34}t_0 + f_1'(t) + (h_{25} + h_{35}t_0)t_0 f_1(t). \quad (73)$$

Из (71) и (73), обозначая $h_{38} = h_{34} + h_{37}h_{34}t_0$ и $h_{39} = (h_{25} + h_{35}t_0)(1 + h_{37})$, выводим

$$h_{33}f_2(t) \leq f_1''(t) + h_{37}f_1'(t) + h_{39}f_1(t) + h_{38}, \quad t \in [0, t_{03}]. \quad (74)$$

Оценивая снизу левую часть неравенства (74) с учётом соотношения (60), получаем

$$f_1(t)f_1''(t) - \frac{h_{33}}{4}(f_1'(t))^2 + h_{37}f_1(t)f_1'(t) + h_{39}f_1^2(t) + h_{38}f_1(t) \geq 0,$$

причём, так как $f_1(t) \geq f_1(0) > 0$ на отрезке $[0, t_{03}]$, то $h_{38}f_1(t) \leq (h_{38}/f_1(0))f_1^2(t)$ и, значит,

$$f_1(t)f_1''(t) - \frac{h_{33}}{4}(f_1'(t))^2 + h_{37}f_1(t)f_1'(t) + h_{40}f_1^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_{03}], \quad (75)$$

где обозначено $h_{40} = h_{39} + h_{38}/f_1(0)$.

К полученному обыкновенному дифференциальному неравенству (75) можно применить результат, приведённый в монографии [13, приложение, § 2, формула (2.9)], если потребовать $h_{33}/4 > 1$, и, значит, при выполнении условия (69) справедлива оценка ранее неопределённого числа k :

$$k = k_0 > \max\{2, 2[(\alpha - 1)(\alpha + \beta + \gamma + 1) + \beta + h_1^2 - 2h_1]/(\alpha - 2h_1 - 1)\}.$$

Теперь, полагая во всех соотношениях (в которых фигурирует) число k равным k_0 , из неравенства (75) заключаем, что если в дополнении к ранее приведённым условиям потребовать выполнения неравенства

$$f_1'(0) > (4h_{37}/(h_{33} - 4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33} - 4)})f_1(0),$$

то время t_0 существования решения не может быть сколь угодно большим: $t_0 < T_0 = (f_1(0))^{1-h_{33}/4}/h_{41}$, где

$$h_{41} = \left(\frac{h_{33}}{4} - 1 \right) (f_1(0))^{-h_{33}/4} \left[\left(f_1'(0) - \frac{4h_{37}}{h_{33}-4} f_1(0) \right)^2 - \frac{4h_{40}}{h_{33}-4} (f_1(0))^2 \right] > 0,$$

причём для функционала $f_1(t)$ справедлива оценка снизу

$$f_1(t) \geq \frac{e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)}}{[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t]^{4/(h_{33}-4)}},$$

и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.
3. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М., 2002.
4. Greenberg J.M., McCamy R.C., Mizel V.J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. and Mech. 1968. V. 17. P. 707–728.
5. Webb G.F. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Canad. J. Math. 1980. V. 32. № 3. P. 631–643.
6. Andrews G. On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$ // J. Differ. Equat. 1980. V. 35. № 2. P. 200–231.
7. Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.Н. Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22. № 6. С. 81–86.
8. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск, 1983.
9. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 28. М., 1990. С. 87–202.
10. Dragomir S.S. Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002.
11. Appell J., Zabrejko P.P. Nonlinear Superposition Operators. Cambridge, 1990.
12. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.
13. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М., 2014.

Академия наук Чеченской Республики,
г. Грозный,
Чеченский государственный педагогический
университет, г. Грозный

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.
После доработки 07.11.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ШАГОМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2023 г. Г. А. Курина, Нгуен Тхи Хоай

Алгоритм построения асимптотического решения начальной задачи, содержащего пограничные функции, для слабо нелинейной системы дискретных уравнений с малым шагом в критическом случае при некоторых условиях приведён в статье В.Ф. Бутузова и А.Б. Васильевой (Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664). В настоящей работе для построения асимптотики решения этой задачи используются ортогональные проекторы. Такой проекторный подход существенно упрощает понимание алгоритма построения асимптотики и позволяет записать в явном виде задачи, из которых можно найти члены асимптотики решения любого порядка.

DOI: 10.31857/S0374064123010077, EDN: OCPHX

Посвящается светлой памяти А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова

Введение. Важным классом дискретных (разностных) уравнений, называемых также уравнениями в конечных разностях, являются уравнения с малым шагом. Они возникают, в частности, при дискретизации непрерывных уравнений для численного анализа. Начальные задачи для таких уравнений с малым шагом ε являются сингулярно возмущёнными, поскольку при нулевом значении ε происходит потеря начального условия. Наиболее сложным при этом является так называемый критический случай, когда из вырожденного уравнения (с нулевым значением малого параметра) решение не определяется однозначно.

Асимптотическое решение начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае впервые было построено В.Ф. Бутузовым и А.Б. Васильевой в работе [1], результаты которой представлены также в монографии [2, с. 22–27]. Обзор публикаций, посвящённых задачам управления дискретными системами с малым шагом, приведён в [3].

В настоящей статье рассматривается задача из [2, с. 22] вида

$$x(t + \varepsilon) = B(t)x(t) + \varepsilon f(x(t), t, \varepsilon), \quad t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots \quad (t \leq T), \quad (1)$$

$$x(0) = x^0, \quad (2)$$

где $x(t) \in X$, $\dim X = m$, величина $\varepsilon \geq 0$ означает малый параметр.

При некоторых условиях I–III в [2, с. 22–27] построено асимптотическое решение задачи (1), (2), содержащее пограничные функции. Будем рассматривать задачу (1), (2) при тех же условиях.

Условие I. Матрица $B(t)$ при $t \in [0, T]$ имеет k -кратное собственное значение $\lambda(t) \equiv 1$, которому при каждом t соответствует k линейно независимых собственных векторов $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., $v_k(t)$, а остальные собственные значения удовлетворяют условию $|\lambda_i(t)| < 1$.

Условие II. Матрица $B(t)$ и функция $f(x, t, \varepsilon)$ достаточно гладкие по своим аргументам.

Будем использовать достаточно гладкие собственные векторы. В силу условия II существование таких собственных векторов следует из работы [4].

Отметим, что условие II из [2, с. 22] в нашем случае усилено предположением о гладкости всюду, а не в некоторой области пространства переменных.

Условие III, связанное с разрешимостью некоторого уравнения, сформулируем позже.

В отличие от работ [1, 2] здесь для построения асимптотики решения задачи (1), (2) используются ортогональные проекторы. Такой проекторный подход позволяет хорошо понять суть алгоритма А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова, основанного на методе пограничных функций, и представить явные выражения задач для отыскания членов асимптотического решения любого порядка. Заметим, что в [1, 2] предложен алгоритм построения асимптотики решения любого порядка, но записаны явным образом только задачи для отыскания нескольких первых членов асимптотики. Наличие явных формул полезно специалистам, применяющим асимптотические методы для решения практических задач.

Проекторный подход уже использовался в [5, 6] для асимптотического решения начальных задач для сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений двух типов в критическом случае, а также в [7] для построения асимптотического решения нулевого порядка для сингулярно возмущённой линейно-квадратичной задачи управления в критическом случае.

В п. 1 настоящей статьи представлены соотношения для членов разложения решения задачи (1), (2) по целым неотрицательным степеням ε в виде суммы функций, зависящих от t , и пограничных функций, зависящих от аргумента t/ε . В п. 2 вводятся ортогональные проекторы, которые используются при нахождении членов разложения решения. В п. 3 приведён алгоритм построения асимптотического решения задачи (1), (2) нулевого порядка, а в п. 4 – n -го порядка, $n \geq 1$. Таблицы в этих пунктах показывают последовательность нахождения членов асимптотики. В п. 5 приводится иллюстративный пример построения асимптотического приближения первого порядка для решения дискретной задачи с малым шагом, рассматриваемого в статье типа, с помощью проекторного подхода.

Далее штрих будет означать транспонирование, I – единичную матрицу.

1. Декомпозиция задачи. Следуя [1], будем искать асимптотическое решение задачи (1), (2) в виде

$$x(t) = \bar{x}(t, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon), \quad (3)$$

где

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{x}_j(t), \quad Px(\tau, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j P_j x(\tau), \quad \tau = t/\varepsilon. \quad (4)$$

Функции $P_j x(\tau)$ будут определяться с помощью дополнительного условия

$$P_j x(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Ряд $\sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{x}_j(t)$ с членами, зависящими от аргумента t , называется *регулярным рядом* (см., например, [2, с. 8]), в отличие от *пограничного ряда* $\sum_{j \geq 0} \varepsilon^j P_j x(\tau)$, $\tau \geq 0$, состоящего из так называемых *пограничных функций*, которые существенны только для аргументов вблизи точек, где заданы дополнительные условия (в окрестности нуля в рассматриваемом случае).

Как принято в теории сингулярных возмущений, будем использовать представление

$$f(\bar{x}(t, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv \bar{f} + Pf,$$

где

$$\bar{f} = f(\bar{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{f}_j(t),$$

$$Pf = f(\bar{x}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j P_j f(\tau).$$

Замечание 1. Как и в [2, с. 23], функции $\bar{x}_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, при построении асимптотики решения будут рассматриваться для всех $t \in [0, T]$. В окончательном же асимптотическом представлении (4) значения $\bar{x}_j(t)$ используются только для $t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots$ в соответствии с дискретным изменением t в системе (1).

Подставляя разложение (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , отдельно зависящие от t и τ , получаем следующие уравнения для членов рядов (4):

$$\bar{x}_j(t) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(j-i)!} \frac{d^{j-i} \bar{x}_i(t)}{dt^{j-i}} = B(t) \bar{x}_j(t) + \bar{f}_{j-1}(t), \quad (5)$$

$$\Pi_j x(\tau + 1) = B(0) \Pi_j x(\tau) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\tau^{j-i}}{(j-i)!} \frac{d^{j-i} B}{dt^{j-i}}(0) \Pi_i x(\tau) + \Pi_{j-1} f(\tau), \quad (6)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$

Чтобы записать уравнения (5), (6) в одинаковом виде для любого $j \geq 0$, будем считать, что члены разложений с отрицательными индексами равны нулю.

Подставив разложение (3) в (2) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем равенства

$$\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) = x^0, \quad (7)$$

$$\bar{x}_j(0) + \Pi_j x(0) = 0, \quad j > 0. \quad (8)$$

2. Декомпозиция пространства. Положим $A(t) = B(t) - I$. Разложим пространство X в ортогональные суммы (см., например, [8, с. 24])

$$X = \text{Ker } A(t) \oplus \text{Im } A(t)' = \text{Ker } A(t)' \oplus \text{Im } A(t). \quad (9)$$

Ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\text{Ker } A(t)$ и $\text{Ker } A(t)'$ обозначим соответственно через $P(t)$ и $Q(t)$.

Определим $n \times k$ -матрицы $V(t)$ и $S(t)$ следующим образом: $V(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t))$ и $S(t) = (s_1(t), \dots, s_k(t))$, где $s_1(t), \dots, s_k(t)$ – собственные векторы матрицы $A(t)'$, соответствующие собственному значению $\lambda(t) = 0$. В силу условия I (линейной независимости собственных векторов) матрицы $V(t)'V(t)$ и $S(t)'S(t)$ размера $k \times k$ обратимы. Нетрудно проверить, что $P(t) = V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$ и $Q(t) = S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ являются ортогональными проекторами пространства X на подпространства $\text{Ker } A(t)$ и $\text{Ker } A(t)'$, соответствующими разложениям (9) пространства X в ортогональные суммы.

Оператор

$$A(t) = (I - Q(t))A(t)(I - P(t)) : \text{Im } A(t)' \longrightarrow \text{Im } A(t)$$

имеет обратный оператор, который будем обозначать через $A(t)^+ = (I - P(t))A(t)^+(I - Q(t))$.

Из условия I следует, что для каждого $t \in [0, T]$ модуль собственных значений оператора $\tilde{B}(t) = (I - P(t))B(t)(I - P(t)) : \text{Im } A(t)' \rightarrow \text{Im } A(t)'$ меньше единицы, и матрица $S(t)'V(t)$ размера $k \times k$ обратима (см. [2, с. 12]).

Из последнего факта вытекает

Лемма 1. Оператор $Q(t)P(t) : \text{Ker } A(t) \rightarrow \text{Ker } A(t)'$ обратим при всех $t \in [0, T]$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда при некотором t существует элемент $x \in \text{Ker } A(t)$ такой, что

$$Q(t)P(t)x = 0. \quad (10)$$

Элемент x представим в виде линейной комбинации векторов $v_j(t)$, $j = \overline{1, k}$, т.е. $x = V(t)c$, где $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)'$. Применим к (10) слева оператор $V(t)'$. Учитывая вид проекторов $P(t)$ и $Q(t)$, получаем равенство

$$V(t)'S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'V(t)c = 0.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $S(t)'V(t)$ получаем $c = 0$. Значит, $x = 0$, что доказывает обратимость оператора $Q(t)P(t)$.

3. Асимптотическое решение нулевого порядка. Используя введённые проекторы, найдём члены асимптотики решения задачи (1), (2) нулевого порядка. Из (5) при $j = 0$ получаем уравнение для $\bar{x}_0(t)$:

$$A(t)\bar{x}_0(t) = 0.$$

Следовательно,

$$(I - P(t))\bar{x}_0(t) = 0. \quad (11)$$

С учётом (11) находим из (7) начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_0 x(0) = (I - P(0))x^0. \quad (12)$$

Из (6) при $j = 0$ получаем уравнение для $\Pi_0 x(\tau)$:

$$\Pi_0 x(\tau + 1) = B(0)\Pi_0 x(\tau). \quad (13)$$

Замечание 2. Легко видеть, что $B(t)|_{\text{Ker } A(t)} = I$. Следовательно, $(I - P(0))B(0)P(0)$ – нулевой оператор, а $P(0)B(0)P(0)$ – тождественный оператор в $\text{Ker } A(0)$.

Ввиду этого замечания уравнение (13) эквивалентно двум уравнениям:

$$(I - P(0))\Pi_0 x(\tau + 1) = \tilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_0 x(\tau), \quad (14)$$

$$P(0)\Pi_0 x(\tau + 1) = P(0)\Pi_0 x(\tau) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_0 x(\tau). \quad (15)$$

Будем использовать следующее легко доказываемое утверждение (см., например, [9, с. 20]).

Лемма 2. *Решение задачи*

$$y(t + 1) = Cy(t) + f(t), \quad y(0) = y^0, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

определяется по формуле

$$y(t) = C^t y^0 + \sum_{i=0}^{t-1} C^{t-i-1} f(i).$$

В силу этой леммы единственным решением начальной задачи (14), (12) является функция

$$(I - P(0))\Pi_0 x(\tau) = \tilde{B}(0)^\tau (I - P(0))x^0. \quad (16)$$

Поскольку спектральный радиус оператора $\tilde{B}(0)$ меньше единицы, то из лемм 5.6.10 [10, с. 347] и 5.6.11 [10, с. 348] следует

Лемма 3. *Существует норма оператора $\tilde{B}(0)$, меньшая единицы, и $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tilde{B}(0)^\tau = 0$.*

Следовательно, $(I - P(0))\Pi_0 x(\tau)$ является пограничной функцией.

Используя лемму 2, запишем решение уравнения (15)

$$P(0)\Pi_0 x(\tau) = P(0)\Pi_0 x(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_0 x(i).$$

Так как $P(0)\Pi_0 x(\tau)$ должно стремиться к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, то с учётом (16) из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} P(0)\Pi_0 x(0) &= - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{\tau-1} P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_0 x(i) = \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{\tau-1} P(0)B(0)(I - P(0))\tilde{B}(0)^i (I - P(0))x^0 = \end{aligned}$$

$$= -P(0)B(0)(I - P(0)) \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{B}(0)^i (I - P(0))x^0.$$

Ввиду леммы 3 последний ряд сходится. Итак,

$$\begin{aligned} P(0)\Pi_0 x(\tau) &= -P(0)B(0)(I - P(0)) \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{B}(0)^i (I - P(0))x^0 + \\ &+ \sum_{i=0}^{\tau-1} P(0)B(0)(I - P(0))\tilde{B}(0)^i (I - P(0))x^0 = \\ &= -P(0)B(0)(I - P(0))\tilde{B}(0)^\tau \sum_{i=0}^{+\infty} \tilde{B}(0)^i (I - P(0))x^0. \end{aligned} \quad (17)$$

В силу леммы 3 $P(0)\Pi_0 x(\tau)$ является пограничной функцией. Таким образом, пограничная функция $\Pi_0 x(\tau)$ найдена. Тогда из (7) можно найти начальное значение

$$P(0)\bar{x}_0(0) = P(0)(x^0 - \Pi_0 x(0)). \quad (18)$$

Из (5) при $j = 1$ получаем уравнение для $\bar{x}_1(t)$:

$$A(t)\bar{x}_1(t) = -\bar{f}_0(t) + \frac{d\bar{x}_0(t)}{dt},$$

где $\bar{f}_0(t) = f(\bar{x}_0(t), t, 0)$.

Принимая во внимание (11), запишем условие разрешимости последнего уравнения:

$$Q(t) \frac{d(P(t)\bar{x}_0(t))}{dt} = Q(t)f(P(t)\bar{x}_0(t), t, 0). \quad (19)$$

Учитывая тождество

$$\frac{d(P(t)x(t))}{dt} = \frac{d(P(t)^2 x(t))}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} P(t)x(t) + P(t) \frac{d(P(t)x(t))}{dt}, \quad (20)$$

из (19) получаем нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d(P(t)\bar{x}_0(t))}{dt} &= (Q(t)P(t))^{-1}Q(t) \left(-\frac{dP(t)}{dt} P(t)\bar{x}_0(t) + f(P(t)\bar{x}_0(t), t, 0) \right) + \\ &+ (I - P(t)) \frac{dP(t)}{dt} P(t)\bar{x}_0(t), \end{aligned}$$

совпадающее с (16) из работы [5].

Применив к (20) слева оператор $P(t)$, имеем тождество

$$P(t) \frac{dP(t)}{dt} P(t)x(t) = 0. \quad (21)$$

Поэтому уравнение для $P(t)\bar{x}_0(t)$ можно записать в виде

$$\frac{d(P(t)\bar{x}_0(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t) \left(-\frac{dP(t)}{dt} P(t)\bar{x}_0(t) + f(P(t)\bar{x}_0(t), t, 0) \right) + \frac{dP(t)}{dt} P(t)\bar{x}_0(t). \quad (22)$$

Если $B(t) = B$ – постоянная матрица, то проекторы $P(t) = P$ и $Q(t) = Q$ тоже постоянные, и последнее уравнение примет вид

$$\frac{d(P\bar{x}_0(t))}{dt} = (QP)^{-1}Qf(P\bar{x}_0(t), t, 0). \quad (23)$$

Предположим, что выполнено

Условие III. Задача (22), (18) имеет единственное решение на отрезке $[0, T]$.

Аналогичное предположение о разрешимости некоторой начальной задачи для нелинейного уравнения меньшей размерности, чем исходное, было дано в [1] (см. также [2, с. 24]).

При этом условии функция $\bar{x}_0(t)$ однозначно определяется. Следовательно, найдена асимптотика нулевого порядка решения задачи (1), (2) (табл. 1).

Таблица 1. Последовательность нахождения членов асимптотики нулевого порядка

Члены асимптотики	Формулы
$(I - P(t))\bar{x}_0(t) = 0$	(11)
$(I - P(0))\Pi_0 x(\tau)$	(16)
$P(0)\Pi_0 x(\tau)$	(17)
$P(t)\bar{x}_0(t)$	(22), (18)

4. Асимптотические решения высших порядков. Предположим, что члены $\bar{x}_j(t)$ и $\Pi_j x(\tau)$ разложений (4), $j = \overline{0, n-1}$, $n \geq 1$, уже найдены. Определим $\bar{x}_n(t)$ и $\Pi_n x(\tau)$.

Из (5) при $j = n$ получаем равенство

$$A(t)\bar{x}_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)!} \frac{d^{n-i}\bar{x}_i(t)}{dt^{n-i}} - \bar{f}_{n-1}(t),$$

где правая часть известна. Применив к этому уравнению оператор $I - Q(t)$, имеем

$$(I - Q(t))A(t)(I - P(t))\bar{x}_n(t) = (I - Q(t))\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)!} \frac{d^{n-i}\bar{x}_i(t)}{dt^{n-i}} - \bar{f}_{n-1}(t)\right).$$

Отсюда находим

$$(I - P(t))\bar{x}_n(t) = A(t)^+(I - Q(t))\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)!} \frac{d^{n-i}\bar{x}_i(t)}{dt^{n-i}} - \bar{f}_{n-1}(t)\right). \quad (24)$$

Тогда из (8) при $j = n$ определяется начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_n x(0) = -(I - P(0))\bar{x}_n(0). \quad (25)$$

С обозначением

$$\Pi\zeta_{n-1}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau^{n-i}}{(n-i)!} \frac{d^{n-i}B}{dt^{n-i}}(0)\Pi_i x(\tau) + \Pi_{n-1}f(\tau)$$

уравнение (6) при $j = n$ примет вид

$$\Pi_n x(\tau + 1) = B(0)\Pi_n x(\tau) + \Pi\zeta_{n-1}(\tau).$$

Отметим, что $\Pi\zeta_{n-1}(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Ввиду замечания 2 последнее уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$(I - P(0))\Pi_n x(\tau + 1) = \tilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_n x(\tau) + (I - P(0))\Pi\zeta_{n-1}(\tau), \quad (26)$$

$$P(0)\Pi_n x(\tau + 1) = P(0)\Pi_n x(\tau) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_n x(\tau) + P(0)\Pi\zeta_{n-1}(\tau). \quad (27)$$

Применяя лемму 2, получаем решение неоднородного линейного дискретного уравнения (26) с заданным начальным условием (25), а именно,

$$(I - P(0))\Pi_n x(\tau) = -\tilde{B}(0)^\tau(I - P(0))\bar{x}_n(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \tilde{B}(0)^{\tau-i-1}(I - P(0))\Pi\zeta_{n-1}(i). \quad (28)$$

Из леммы 2 следует вид решения уравнения (27):

$$P(0)\Pi_n x(\tau) = P(0)\Pi_n x(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} (P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_n x(i) + P(0)\Pi\zeta_{n-1}(i)).$$

Так как функция $P(0)\Pi_n x(\tau)$ должна стремиться к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, то из последнего выражения получаем

$$P(0)\Pi_n x(0) = -\sum_{i=0}^{\infty} (P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_n x(i) + P(0)\Pi\zeta_{n-1}(i)).$$

Следовательно,

$$P(0)\Pi_n x(\tau) = -\sum_{i=\tau}^{\infty} (P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_n x(i) + P(0)\Pi\zeta_{n-1}(i)). \quad (29)$$

Итак, функция $\Pi_n x(\tau)$ найдена. Тогда из (8) при $j = n$ можно найти начальное значение

$$P(0)\bar{x}_n(0) = -P(0)\Pi_n x(0). \quad (30)$$

Запишем условие разрешимости уравнения (5) при $j = n + 1$:

$$Q(t) \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{(n+1-i)!} \frac{d^{n+1-i}\bar{x}_i(t)}{dt^{n+1-i}} - \bar{f}_n(t) \right) = 0.$$

Здесь $\bar{f}_n(t) = \bar{f}_x(t)\bar{x}_n(t) + \eta(t)$, где $\bar{f}_x(t) = f_x(\bar{x}_0(t), t, 0)$, а $\eta(t)$ – известная функция, зависящая от $\bar{x}_j(t)$ при $j < n$.

Учитывая, что $(I - P(t))\bar{x}_n(t)$ уже известная функция, последнее уравнение можно записать в виде

$$Q(t) \frac{d(P(t)\bar{x}_n(t))}{dt} = Q(t)(\bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \zeta(t)),$$

где

$$\zeta(t) = \eta(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1-i)!} \frac{d^{n+1-i}\bar{x}_i(t)}{dt^{n+1-i}} + \bar{f}_x(t)(I - P(t))\bar{x}_n(t) - \frac{d(I - P(t))\bar{x}_n(t)}{dt}$$

– известная функция.

Используя тождества (20) и (21), последнее уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{d(P(t)\bar{x}_n(t))}{dt} = (Q(t)P(t))^{-1}Q(t) \left(\left(\bar{f}_x(t) - \frac{dP(t)}{dt} \right) P(t)\bar{x}_n(t) + \zeta(t) \right) + \frac{dP(t)}{dt} P(t)\bar{x}_n(t). \quad (31)$$

Сравнение (31) с (24) из [5] показывает, что, в отличие от приближения нулевого порядка, уравнения для нахождения компоненты решения $P(t)\bar{x}_n(t)$ при $n \geq 1$ для рассматриваемой здесь дискретной системы с малым шагом и сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений из [5] различны. Заметим, что в [5] имеется опечатка, а именно, как следует из предшествующего (24) уравнения, первый знак плюс в правой части уравнения (24) нужно заменить на минус.

Функция $P(t)\bar{x}_n(t)$ будет определяться однозначно из линейного дифференциального уравнения (31) с начальным условием (30).

Таким образом, функция $\bar{x}_n(t)$ найдена. Следовательно, найдена асимптотика n -го порядка решения задачи (1), (2) (табл. 2).

Таблица 2. Последовательность нахождения членов асимптотики n -го порядка, $n \geq 1$

Члены асимптотики	Формулы
$(I - P(t))\bar{x}_n(t)$	(24)
$(I - P(0))\Pi_n x(\tau)$	(28)
$P(0)\Pi_n x(\tau)$	(29)
$P(t)\bar{x}_n(t)$	(31), (30)

Итак, доказана

Теорема. При выполнении условий I–III существуют явные представления для задач, выраженные через ортогональные проекторы на $\text{Ker}(B(t) - I)$ и $\text{Ker}(B(t)' - I)$, из которых однозначно определяются члены асимптотического решения задачи (1), (2) вида (3), (4) любого порядка. При этом члены асимптотики находятся в следующей последовательности: $(I - P(t))\bar{x}_j(t)$, $(I - P(0))\Pi_j x(\tau)$, $P(0)\Pi_j x(\tau)$, $P(t)\bar{x}_j(t)$, $j \geq 0$.

5. Иллюстративный пример. Рассмотрим систему вида (1)

$$\begin{pmatrix} x_1(t + \varepsilon) \\ x_2(t + \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} x_2(t) + t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots \quad (t \leq 0.3), \quad (32)$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

5.1. Точное решение. Найдём решение задачи (32), (33).

Из второго уравнения в системе (32) следует, что $x_2(t) = x_1(t - \varepsilon)$. Подставив это выражение для $x_2(t)$ в первое уравнение системы (32), получим

$$x_1(t + \varepsilon) = 3/2 x_1(t) - (1/2 - \varepsilon)x_1(t - \varepsilon) + \varepsilon t. \quad (34)$$

Из (32) и (33) имеем два условия для переменной x_1 :

$$x_1(0) = 1, \quad x_1(\varepsilon) = 2 - \varepsilon. \quad (35)$$

Так как $t = \varepsilon k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то из (34), (35) получаем для $y(k) = x_1(\varepsilon k)$ начальную задачу для дискретного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y(k + 1) = 3/2 y(k) - (1/2 - \varepsilon)y(k - 1) + \varepsilon^2 k, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2 - \varepsilon.$$

Стандартным методом находим общее решение последнего уравнения

$$y(k) = x_1(\varepsilon k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k - \varepsilon k - 1/2 - \varepsilon,$$

где $\lambda_1 = (3 + \sqrt{1 + 16\varepsilon})/4$ и $\lambda_2 = (3 - \sqrt{1 + 16\varepsilon})/4$ являются корнями характеристического уравнения, а $-(\varepsilon k + 1/2 + \varepsilon)$ – частным решением неоднородного уравнения.

Используя значения $y(0)$ и $y(1)$, получаем

$$c_1 = \frac{5 + 2\varepsilon - (3 + 2\varepsilon)\lambda_2}{\sqrt{1 + 16\varepsilon}}, \quad c_2 = \frac{3}{2} + \varepsilon - c_1.$$

5.2. Проекторы и вспомогательные операторы. В этом примере

$$B = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = B - I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x(t), t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_2(t) + t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица B постоянная, будем опускать аргумент t в обозначениях матриц, их собственных векторов и проекторов.

Собственные значения матрицы B равны 1 и 0.5, $\text{Ker } A = \{(a, a)'\}$, $V = (1, 1)'$, $\text{Ker } A' = \{(-2a, a)'\}$, $S = (-2, 1)'$, $\text{Im } A = \{(a, 2a)'\}$, $\text{Im } A' = \{(a, -a)'\}$, где a – любое действительное число, и согласно формулам для ортогональных проекторов из п. 2 имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad I - P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad I - Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Оператор

$$\tilde{A} = (I - P)A(I - P) = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} : \text{Im } A' \rightarrow \text{Im } A'$$

имеет отрицательное собственное значение, равное $-1/2$.

Оператор

$$\tilde{B} = (I - P)B(I - P) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} : \text{Im } A' \rightarrow \text{Im } A'$$

имеет собственное значение $1/2$, модуль которого меньше 1.

Также получаем

$$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \text{Im } A \rightarrow \text{Im } A', \quad \tilde{B}^\tau = \begin{pmatrix} 1/2^{\tau+1} & -1/2^{\tau+1} \\ -1/2^{\tau+1} & 1/2^{\tau+1} \end{pmatrix}, \quad \tau \geq 1,$$

$$(I - P)x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -1/10 & -1/10 \end{pmatrix} : \text{Ker } A \rightarrow \text{Ker } A',$$

$$(QP)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix} : \text{Ker } A' \rightarrow \text{Ker } A, \quad PB = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

$$PB(I - P) = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} : \text{Im } A' \rightarrow \text{Ker } A.$$

5.3. Асимптотика нулевого порядка. Из (11) имеем

$$\bar{x}_{10}(t) - \bar{x}_{20}(t) = 0. \quad (36)$$

Из (16) и (17) с учётом выражений из п. 5.2 получаем, что

$$(I - P)\Pi_0 x(\tau) = \begin{pmatrix} 1/2^\tau \\ -1/2^\tau \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P\Pi_0 x(\tau) = \begin{pmatrix} -3/2^\tau \\ -3/2^\tau \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\Pi_0 x(\tau) = \begin{pmatrix} -1/2^{\tau-1} \\ -1/2^{\tau-2} \end{pmatrix}.$$

Из (18) следует равенство

$$P\bar{x}_0(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\bar{x}_{10}(0) + \bar{x}_{20}(0) = 6. \quad (37)$$

Из (23) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}_{10}(t) + \bar{x}_{20}(t)) = 2(\bar{x}_{10}(t) + \bar{x}_{20}(t)) + 4t. \quad (38)$$

Решение задачи (38), (37) определяется по формуле

$$\bar{x}_{10}(t) + \bar{x}_{20}(t) = 7e^{2t} - 2t - 1,$$

отсюда и из (36) имеем

$$\bar{x}_{10}(t) = \bar{x}_{20}(t) = \frac{7}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получено асимптотическое приближение нулевого порядка решения задачи (32), (33)

$$\tilde{x}_0(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 7e^{2t}/2 - t - 1/2 - 2^{1-t/\varepsilon} \\ 7e^{2t}/2 - t - 1/2 - 2^{2-t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad t = k\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5.4. Асимптотика первого порядка. Из (24) при $n = 1$ имеем равенство

$$\bar{x}_{11}(t) - \bar{x}_{21}(t) = 7e^{2t} - 1. \quad (39)$$

Поскольку $\Pi\zeta_0(\tau) = \Pi_0 f(\tau)$,

$$\Pi_0 f(\tau) = f(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau), 0, 0) - f(\bar{x}_0(0), 0, 0) = \begin{pmatrix} \Pi_{20} x(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2^{\tau-2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

то из (28) при $n = 1$ с учётом (39) и выражений из п. 5.2 получаем

$$(I - P)\Pi_1 x(\tau) = \begin{pmatrix} -3/2^\tau - \tau/2^{\tau-2} \\ 3/2^\tau + \tau/2^{\tau-2} \end{pmatrix}.$$

Из (29) при $n = 1$ находим

$$P\Pi_1 x(\tau) = \sum_{i=\tau}^{\infty} \begin{pmatrix} (13 + 12i)/2^{i+1} \\ (13 + 12i)/2^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2^\tau + 6 \sum_{i=\tau}^{\infty} i/2^i \\ 13/2^\tau + 6 \sum_{i=\tau}^{\infty} i/2^i \end{pmatrix}.$$

Для вычисления последнего ряда понадобится

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=\tau}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{\tau + 1}{2^{\tau-1}}.$$

Доказательство. Сначала найдём сумму ряда $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i$ при $x \in (-1, 1)$. Представим этот ряд в виде $\sum_{i=1}^{\infty} (i+1)x^i - \sum_{i=1}^{\infty} x^i$. Введём обозначение $S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)x^i$. После интегрирования имеем

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} x^{i+1} = x^2 \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{x^2}{1-x},$$

отсюда получаем

$$S(x) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{1-x} \right) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

Значит, $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = (2x - x^2)/(1-x)^2 - x/(1-x) = x/(1-x)^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i = 2$.

Следовательно, сумма рассматриваемого ряда при $\tau = 1$ вычисляется по доказываемой формуле. Справедливость этой формулы при всех τ легко доказывается методом математической индукции.

Использование этой леммы для вычисления ряда в выражении для $P\Pi_1 x(\tau)$ даёт

$$P\Pi_1 x(\tau) = \left(\frac{(25 + 12\tau)/2^\tau}{(25 + 12\tau)/2^\tau} \right).$$

Следовательно,

$$\Pi_1 x(\tau) = \left(\frac{(11 + 4\tau)/2^{\tau-1}}{(7 + 4\tau)/2^{\tau-2}} \right).$$

Используя (30) при $n = 1$, получаем

$$\bar{x}_{11}(0) + \bar{x}_{21}(0) = -50. \quad (40)$$

Уравнение (31) при $n = 1$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} P\bar{x}_1 = (QP)^{-1} Q \left(\bar{f}_x(t) P\bar{x}_1 + \bar{f}_x(t)(I - P)\bar{x}_1 + \bar{f}_\varepsilon(t) - \frac{d}{dt}(I - P)\bar{x}_1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{x}_0}{dt^2} \right).$$

С учётом найденных значений запишем равенство для одной компоненты последнего уравнения

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21}) = 2(\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21}) - 70e^{2t} + 2. \quad (41)$$

Решение задачи (41), (40) определяется по формуле

$$\bar{x}_{11}(t) + \bar{x}_{21}(t) = -49e^{2t} - 70te^{2t} - 1.$$

Из последнего соотношения и равенства (39) получаем

$$\bar{x}_{11}(t) = -(21 + 35t)e^{2t} - 1, \quad \bar{x}_{21}(t) = -(28 + 35t)e^{2t}.$$

Таким образом, получено асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (32), (33):

$$\tilde{x}_1(t, \varepsilon) = \tilde{x}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \begin{pmatrix} -(21 + 35t)e^{2t} - 1 + (11 + 4t/\varepsilon)2^{1-t/\varepsilon} \\ -(28 + 35t)e^{2t} + (7 + 4t/\varepsilon)2^{2-t/\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad t = k\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если разложить точное решение $x(k\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε , то получим совпадение членов, не зависящих от ε и порядка ε в этом разложении, с соответствующими членами в $\tilde{x}_1(k\varepsilon, \varepsilon)$ и $\tilde{x}_2(k\varepsilon, \varepsilon)$.

Графики точного и приближённых решений для задачи (32), (33) при $\varepsilon = 0.01$ представлены на рис. 1 и 2.

Заключение. В статье предложен новый подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае с использованием ортогональных проекторов. Такой подход помогает понять суть алгоритма А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова из работы [1] и получить в явном виде задачи для нахождения асимптотики решения любого порядка.

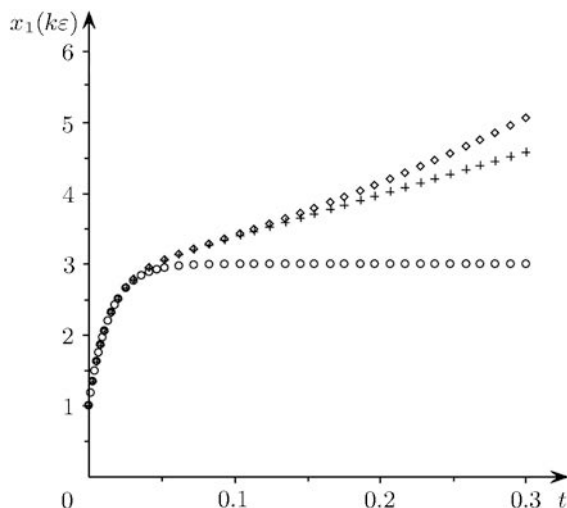


Рис. 1. Точное решение ($\diamond$) и приближённые решения нулевого ($\circ$) и первого ($+$) порядков для $x_1(k\varepsilon)$.

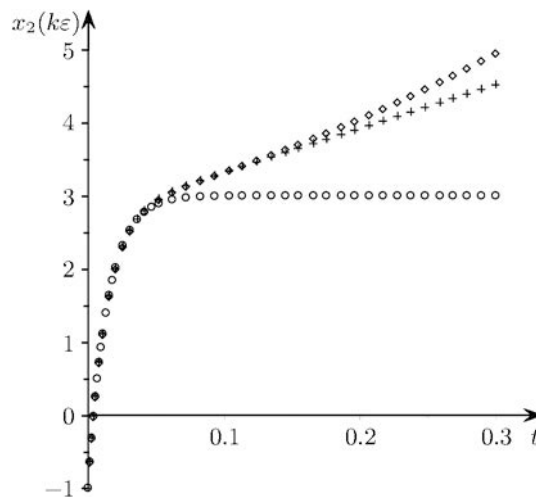


Рис. 2. Точное решение ($\diamond$) и приближённые решения нулевого ($\circ$) и первого ($+$) порядков для $x_2(k\varepsilon)$.

Авторы выражают глубокую благодарность О.Б. Цехан за полезные обсуждения.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202). Работа второго автора поддержана Научным университетом Вьетнамского национального университета, г. Ханой (проект TN.22.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущённая (вырожденная) система расположена на спектре // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях. М., 1978.
3. Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S. Discrete singularly perturbed control problems (a survey) // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2017. V. 24. P. 335–370.
4. Sibuya Y. Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
5. Kurina G. Projector approach to constructing asymptotic solution of initial value problems for singularly perturbed systems in critical case // Axioms. 2019. V. 8. № 2. P. 56–60.
6. Курина Г.А., Хоай Н.Т. Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущённых задач в критическом случае // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084.
7. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conf. Proc. Int. Conf. Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). 2018. V. 1997. P. 430–436.
8. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg, 1966.
9. Гайдуун И.В. Системы с дискретным временем. Минск, 2001.
10. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. Cambridge, 2013.

Воронежский государственный университет,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Научный университет Вьетнамского
национального университета, г. Ханой

Поступила в редакцию 24.08.2022 г.
После доработки 02.10.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И “ДЕШЁВЫМ” УПРАВЛЕНИЕМ

© 2023 г. А. Р. Данилин, А. А. Шабуров

Рассмотрена задача оптимального управления для линейной системы с постоянными коэффициентами с интегральным выпуклым критерием качества, содержащим малый параметр при интегральном слагаемом, в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Такие задачи называют задачами с “дешёвым” управлением. Показано, что предельной задачей будет задача с терминальным критерием качества. Установлено, что если терминальное слагаемое критерия качества является выпуклой (строго выпуклой) и непрерывно дифференцируемой функцией, то функционал качества в предельной задаче обладает аналогичными свойствами. Доказано, что в общем случае справедлива сходимость по функционалу качества, а при условии строгой выпуклости терминального слагаемого критерия качества в исходной задаче справедлива сходимость к точке минимума терминального слагаемого критерия качества в предельной задаче. Найден предел определяющего вектора в исходной задаче при стремлении малого параметра к нулю. В частности, показано, что первая компонента определяющего вектора в исходной задаче сходится к определяющему вектору в предельной задаче. Подробно рассмотрены задачи управления точкой малой массы в среде с сопротивлением и без, с терминальной частью, зависящей как от медленных, так и от быстрых переменных, и построены полные асимптотические разложения определяющих векторов в этих задачах.

DOI: 10.31857/S0374064123010089, EDN: OCKZEN

Введение. Рассматривается задача оптимального управления [1–3] для одной линейной системы с постоянными коэффициентами в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Критерий качества содержит терминальное слагаемое, зависящее как от медленных переменных, так и от быстрых, а интегральное слагаемое содержит малый множитель перед управлением.

Среди работ, посвящённых сингулярно возмущённым задачам управления, такие задачи называются задачами с “дешёвым” управлением (см., например, обзор [4]), поскольку характеризуются близостью к вырожденной задаче в смысле принципа максимума Понтрягина. Но, например, в статьях [5, 6] при рассмотрении линейно-квадратичных задач строится асимптотика решения только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление.

Доказано, что при стремлении малого параметра к нулю исходная задача с “дешёвым” управлением сводится к задаче с терминальным критерием качества, зависящим только от медленных переменных. При этом в возмущённой задаче оптимальное управление всегда непрерывно, а в предельной задаче может терпеть разрыв. В такой ситуации асимптотические разложения решений для задач быстрогодействия могут носить довольно сложный характер (см. работы [7–9]).

В статье подробно рассмотрены задачи управления точкой малой массы в среде с сопротивлением и без, с терминальной частью, зависящей как от медленных, так и от быстрых переменных. Получена полная асимптотика определяющих векторов этих задач и оптимального значения критерия качества в них. Поскольку эти асимптотические разложения степенные (по степеням малого параметра), то можно говорить о том, что задачи с интегральным выпуклым критерием качества зависят от малого параметра более регулярно, чем задачи быстрогодействия из [7, 9].

1. Постановка задачи и свойства терминальной части критерия качества. Пусть управляемая система содержит медленные и быстрые переменные:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon &= A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad \|u_\varepsilon\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon &= A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, \quad x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \end{aligned} \quad (1)$$

функционал качества имеет вид

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} , B_i , $i, j \in \{1, 2\}$, – постоянные вещественнозначные матрицы соответствующей размерности, а

$$\sigma : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \text{ – выпуклая и непрерывно дифференцируемая на } \mathbb{R}^{n+m} \text{ функция.} \quad (3)$$

Евклидовы нормы во всех рассматриваемых пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|$, а скалярные произведения – через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

В качестве символа транспонирования матриц, как и в [1], используется знак $*$, например, A_{11}^* или B_2^* .

Задачу (1), (2) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}_\varepsilon &= \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, \quad t \in [0, T], \\ z_\varepsilon(0) &= z^0, \quad \|u_\varepsilon\| \leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

с функционалом качества

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \sigma(z_\varepsilon(T)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

где

$$\sigma(z_\varepsilon(T)) := \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)), \quad z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0) = z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества (5) первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T , а второе – как учёт энергозатрат на реализацию управления. Причём наличие малого параметра как множителя при втором слагаемом говорит о том, что “стоимость” энергозатрат на реализацию управления незначительна.

При использовании векторной записи компоненты вектора z будут обозначаться в соответствии с обозначением для z , например,

$$z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Определение 1. Будем говорить, что пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ *вполне управляема*, если вполне управляема система $\dot{x} = \mathcal{A}_\varepsilon x + \mathcal{B}_\varepsilon u$.

Предположение 1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т.е. $\text{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \dots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1} \mathcal{B}_\varepsilon) = n + m$.

Будем считать, что выполнено условие устойчивости точки покоя присоединённой системы, т.е. выполнено

Предположение 2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A_{22}) \leq -\alpha < 0$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Замечание 1. Предположение 2 используется при доказательстве всех цитируемых утверждений из [10].

Определение 2. Следуя [10, § 3.4.1, формулы (52)–(54)], предельной задачей для (4), (5) естественно назвать задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{A}_0 x + \mathcal{B}_0 u, \quad t \in [0, T], \quad \mathcal{A}_0 := A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, \\ x(0) &= x^0, \quad \|u\| \leq 1, \quad \mathcal{B}_0 := B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2, \\ J_0(u) &:= \sigma_0(x(T)) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\sigma_0(x) := \inf_{r \in \mathcal{R}} \sigma(x, r - A_{22}^{-1} A_{21} x) = \inf_{y \in \mathcal{R}(x)} \sigma(x, y), \quad (7)$$

$$\mathcal{R} := \int_0^{+\infty} e^{A_{22}s} B_2 \mathcal{V} ds, \quad \mathcal{R}(x) := -A_{22}^{-1} A_{21} x + \mathcal{R}, \quad (8)$$

а $\mathcal{V} := \mathcal{B}[0, 1]$ – шар в $\mathbb{R}^r$ единичного радиуса с центром в нуле [10, § 3.4.1, после формулы (51)]. Отметим, что

$$0 \in \mathcal{R} \text{ – выпуклый компакт} \quad (9)$$

(см. [10, § 3.4.1, после формулы (51)]), и тем самым в (7) $\inf$ можно заменить на $\min$.

Опорная функция множества $\mathcal{R}$ при таком $\mathcal{V}$ вычисляется по формуле

$$\rho(l|\mathcal{R}) = \int_0^{+\infty} \|B_2^* e^{A_{22}^* s} l\| ds \quad (10)$$

(см., например, [11, формулы (3.1) и (5.2)]).

Следствие 1. Если $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)$, то $\sigma_0(x) = \sigma_1(x)$.

Следствие 2. Если $A_{21} = \mathcal{O}$, $\sigma(x, y) = \sigma_1(x) + \sigma_2(y)$, $\sigma_2(0) = 0$, $\nabla \sigma_2(0) = 0$, то $\sigma_0(x) = \sigma_1(x)$.

Здесь и далее $\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ – нулевая и единичная матрицы соответствующей размерности соответственно.

Доказательство. В силу (7) и (9) справедливы равенства

$$\sigma_0(x) = \min_{r \in \mathcal{R}} (\sigma_1(x) + \sigma_2(r - A_{22}^{-1} A_{21} x)) = \sigma_1(x) + \min_{r \in \mathcal{R}} \sigma_2(r) = \sigma_1(x) + \sigma_2(0) = \sigma_1(x).$$

Следствие доказано.

Утверждение 1. Пусть $G: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^{n+m}$ функция, $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{R}$ – выпуклый компакт, а $G_0(x) := \min_{r \in \mathcal{R}} G(x, r)$. Тогда G_0 – выпуклая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция, при этом для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\nabla G_0(x_0) = \nabla_x G(x_0, r_0), \quad (11)$$

где $r_0 \in \mathcal{R}$ и $G_0(x_0) = G(x_0, r_0)$. Кроме того, если G – строго выпуклая функция, то и G_0 – строго выпуклая функция.

Доказательство. По лемме 4.4 из [12, гл. 1, п. 1] G_0 – выпуклая функция. Тем самым G_0 непрерывна и субдифференцируема на $\mathbb{R}^n$ (см., например, [13, следствие 10.1.1 и теорема 23.4]).

По следствию 4 из [14, гл. 4, п. 5, формула (17)] (с $A = 0$, $M = \mathbb{R}^m$ и $L = \mathcal{R}$) получим, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$q \in \partial G_0(x_0) \rightarrow \text{существуют } (p, r) \in \partial G(x_0, r_0) : (q - p) \in -N_{\mathbb{R}^m}(-r_0) = \{0\},$$

где $r_0 \in \mathcal{R}$ такова, что $G_0(x_0) = G(x_0, r_0)$. Здесь $N_{\mathbb{R}^m}(-r_0)$ – нормальный конус к $\mathbb{R}^m$ в точке $(-r_0)$ (см., например, [14, гл. 4, п. 1, определение 3 и предложение 9]). Поскольку функция G дифференцируема на $\mathbb{R}^{n+m}$, то

$$\partial G(x_0, r_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_x G(x_0, r_0) \\ \nabla_r G(x_0, r_0) \end{pmatrix} \right\}.$$

Тем самым $q = p = \nabla_x G(x_0, r_0)$ и, следовательно, $G_0(x_0)$ дифференцируема в точке x_0 и $\nabla G_0(x_0) = \nabla_x G(x_0, r_0)$. Поскольку функция G_0 дифференцируема на всём $\mathbb{R}^n$, то она непрерывно дифференцируема на этом множестве [13, следствие 25.5.1].

Если G – строго выпуклая функция, то строгая выпуклость G_0 фактически доказана в той же лемме 4.4 из [12, гл. 1, п. 1], поскольку в силу (9) в доказательстве этой леммы можно обойтись без предельного перехода. Утверждение доказано.

Следствие 3. Пусть выполнено условие (3), а σ_0 определена по формуле (7). Тогда $\sigma_0(x)$ – выпуклая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. При этом для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ градиент функции σ_0 в точке x_0 вычисляется по формуле

$$\nabla \sigma_0(x_0) = \nabla_x \sigma(x_0, y_0) - A_{21}^* (A_{22}^{-1})^* \nabla_y \sigma(x_0, y_0), \quad (12)$$

где $y_0 \in \mathcal{R}(x_0)$ – точка минимума функции $\sigma(x_0, \cdot)$ на $\mathcal{R}(x_0)$, т.е. $\sigma_0(x_0) = \sigma(x_0, y_0)$.

Если в дополнении к (3) функция σ строго выпукла, то и σ_0 строго выпукла.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$G(x, r) := \sigma(x, r - A_{22}^{-1} A_{21} x),$$

определённую на $\mathbb{R}^{n+m}$. Ввиду (3) эта функция выпукла (строго выпукла, если такова σ) и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^{n+m}$, а

$$\sigma_0(x) := \min_{r \in \mathcal{R}} G(x, r).$$

В силу утверждения 1 σ_0 – выпуклая (строго выпуклая, если σ – строго выпуклая) и непрерывно дифференцируемая функция. Формула (12) получается из формулы (11) по правилу дифференцируемости сложной функции. Следствие доказано.

Утверждение 2. Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Xi$ – выпуклое компактное множество, а $\{x_0, y_0\}$ – решение следующей экстремальной задачи: $\min_{x \in \Xi, y \in \mathcal{R}(x)} \sigma(x, y)$. Тогда $\sigma_0(x_0) = \min_{x \in \Xi} \sigma_0(x)$.

Доказательство. С одной стороны, по определению $\{x_0, y_0\}$ для любого $y \in \mathcal{R}(x_0)$ справедливо неравенство $\sigma(x_0, y_0) \leq \sigma(x_0, y)$, поэтому $\sigma(x_0, y_0) \leq \sigma_0(x_0)$, а с другой – так как $y_0 \in \mathcal{R}(x_0)$, то

$$\sigma_0(x_0) = \min_{y \in \mathcal{R}(x_0)} \sigma(x_0, y) \leq \sigma(x_0, y_0).$$

Таким образом, $\sigma(x_0, y_0) = \sigma_0(x_0)$. Утверждение доказано.

Замечание 2. Если $A_{21} \neq \mathcal{O}$, $\sigma(z) = \sigma(x, y) := \sigma_1(x) + \sigma_2(y)$, $\sigma_2(0) = 0$, $\nabla \sigma_2(0) = 0$, то в общем случае $\sigma_0(x) \neq \sigma_1(x)$.

Пример. Пусть

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & I \\ \varepsilon^{-1} I & -\varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \sigma(z) = \sigma(x, y) := \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2.$$

Тогда в силу (7), (8) и (10) имеем

$$\sigma_0(x) = \min_{\|y\| \leq 1} \sigma(x, y+x), \quad \mathcal{R} = \int_0^{+\infty} e^{-s} \mathcal{V} ds = \mathcal{V} = B[0, 1],$$

поэтому $\sigma_0(x) = \frac{1}{2} \|x(T)\|^2 + \frac{1}{2} \min_{\|y\| \leq 1} \|y+x\|^2$.

Если $\|x\| \leq 1$, то, взяв $y := -x$, получим $\sigma_0(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \|x\|^2$.

Если $\|x\| > 1$, то $\sigma_0(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} (\|x\| - 1)^2$. Или, что то же самое, функция

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} (\|x\|^2 - 2\|x\| + 1) = \|x\|^2 - \|x\| + \frac{1}{2}$$

и является непрерывно дифференцируемой при $\|x\| \neq 0$.

Поэтому

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} \|x\|^2/2 & \text{при } \|x\| \leq 1, \\ \|x\|^2 - \|x\| + 1/2 & \text{при } \|x\| > 1, \end{cases} \quad \nabla \sigma_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } \|x\| \leq 1, \\ 2x - x/\|x\| & \text{при } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $\|x\| > 1$, то $\sigma_0(x) \neq \sigma_1(x)$.

2. Предельные теоремы. Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ – множество достижимости при $t = T$ управляемой системы из (1), а

$$\mathcal{K}_0 := \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in \Xi, \quad y \in \mathcal{R}(x)\}, \quad (13)$$

где Ξ – множество достижимости при $t = T$ управляемой системы из (6). Известно, что $\mathcal{K}_\varepsilon$, Ξ и $\mathcal{K}_0$ – компактные множества, и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_H(\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_0) = 0, \quad (14)$$

где $d_H(\cdot, \cdot)$ – расстояние по Хаусдорфу [10, § 3.3, теорема 3.1].

Утверждение 3. Если $z_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$, а $\bar{z}$ – произвольный частичный предел z_ε при $\varepsilon \rightarrow +0$, то $\bar{z} \in \mathcal{K}_0$.

Доказательство. Возьмём произвольное число $\mu > 0$. В силу (14) существует $\varepsilon_\mu > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$ справедливо неравенство $d_\varepsilon := d_H(\mathcal{K}_\varepsilon, \mathcal{K}_0) \leq \mu$. Поэтому при таких ε выполняется соотношение $z_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon \subset \mathcal{K}_0 + B[0, d_\varepsilon] \subset \mathcal{K}_0 + B[0, \mu]$ – компактное множество. Тем самым $\bar{z} \in \mathcal{K}_0 + B[0, \mu]$, а значит, и

$$\bar{z} \in \bigcap_{\mu > 0} (\mathcal{K}_0 + B[0, \mu]) = \mathcal{K}_0.$$

Утверждение доказано.

Пусть $u(\cdot)$ – допустимое управление. Через $x_\varepsilon(T, u)$, $y_\varepsilon(T, u)$ и $x_0(T, u)$ будем обозначать состояния управляемой системы (1) или (6) в момент времени T , соответствующий управлению $u(\cdot)$.

Теорема 1. Если $u_\varepsilon^{\text{opt}}$ – оптимальное управление в задаче (1), (2), а u^{opt} – оптимальное управление в задаче (6), то $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\text{opt}}) \rightarrow J_0(u^{\text{opt}})$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Xi$ и $y_0 \in \mathcal{R}(x_0)$ таковы, что $\sigma(x_0, y_0) = \min_{z \in \mathcal{R}_0} \sigma(z)$. Тогда в силу (13) по утверждению 2 справедливы равенства

$$\sigma(x_0, y_0) = \sigma_0(x_0) = \min_{x \in \Xi} \sigma_0(x) = J(u^{\text{opt}}) = \sigma_0(x_0(T, u^0)). \quad (15)$$

Пусть $\bar{J}$ – произвольный частичный предел $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\text{opt}})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, а $\bar{x}$, $\bar{y}$ – соответствующие частичные пределы $x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})$ и $y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})$. Тогда $\bar{z} \in K_0$ по утверждению 3. Поэтому с учётом (15)

$$\bar{J} = \sigma(\bar{x}, \bar{y}) \geq \sigma(x_0) = J(u^{\text{opt}}). \quad (16)$$

С другой стороны, из (14) следует, что существует такое допустимое управление $\tilde{u}_\varepsilon$, что

$$x_\varepsilon(T, \tilde{u}_\varepsilon) \rightarrow x_0, \quad y_\varepsilon(T, \tilde{u}_\varepsilon) \rightarrow y_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

поэтому

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\text{opt}}) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \rightarrow \sigma(x_0, y_0) = J_0(u^{\text{opt}}). \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$J_0(u^{\text{opt}}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\text{opt}}) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\text{opt}}) \leq J_0(u^{\text{opt}}),$$

и тем самым $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\text{opt}}) \rightarrow J_0(u^{\text{opt}})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $u_\varepsilon^{\text{opt}}$ – оптимальное управление в задаче (1), (2), u^{opt} – оптимальное управление в задаче (6), z_0 – точка минимума функции σ на K_0 .

Если функция $\sigma(x, y)$ строго выпукла, то

$$x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}}) \rightarrow x_0(T, u^{\text{opt}}) = x_0, \quad y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}}) \rightarrow y_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Если $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)$ строго выпукла, то

$$x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}}) \rightarrow x_0(T, u^{\text{opt}}) = x_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим первый случай.

В силу строгой выпуклости функции σ и выпуклости множества K_0 точка минимума σ на K_0 единственная. В силу теоремы 1 имеем

$$\sigma(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}}), y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})) \rightarrow \sigma(x_0, y_0) = \sigma(z_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Пусть $\bar{z}$ – произвольный частичный предел $z_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тогда ввиду утверждения 3 и непрерывности функции σ получим $\sigma(\bar{x}, \bar{y}) = \sigma(x_0, y_0)$. Тем самым $\bar{z} = z_0$.

Во втором случае, в силу строгой выпуклости функции σ_1 и выпуклости множества Ξ , точка x_0 – единственная точка минимума функции $\sigma_0 = \sigma_1$ на Ξ . Теорема доказана.

3. Определяющие векторы в исходной и предельной задачах. Здесь с помощью принципа максимума найдём структуру оптимального управления в исходной и в предельной задачах, а также соотношения на векторы, определяющие его.

Отметим, что в теоремах из [3], на которые будем ссылаться в этом пункте, в качестве одного из условий используется понятие нормальной задачи управления [3, п. 2.2, определение перед теоремой 3].

Определение 3. Под *нормальной задачей управления* понимается такая, при которой два управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, переводящие начальную точку в одну и ту же граничную точку множества достижимости к моменту времени T , совпадают почти всюду на отрезке $[t_0, T]$.

Покажем, что для линейной стационарной системы управления

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad t \in [0, T],$$

$$z(0) = z^0, \quad u \in \mathcal{U},$$

со строго выпуклым компактным множеством $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ строго выпуклое, если его на границе нет отрезков не нулевой длины) из вполне управляемости следует нормальность. Действительно,

в этом случае в силу [3, п. 2.2, теорема 3] нужно показать, что если $l \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$ и любых двух управлений $u_1(t), u_2(t) \subset \mathcal{U} : u_1(t) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in \mathcal{U}} \langle \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l, u \rangle \ni u_2(t)$, то $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду.

Функция $\psi(t) := \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l$ аналитична при $t \in \mathbb{R}$, поэтому возможны только два случая: $\psi(t) \equiv 0$ либо на отрезке $[0, T]$ функция $\psi(t)$ имеет не более конечного числа нулей. Но в силу вполне управляемости из условия $\psi(t) \equiv 0$ следует, что $l = 0$, что невозможно по условию. Если $\psi(t) \neq 0$, то $\mathcal{L}_t(u) := \langle \psi(t), u \rangle$ не может достигать экстремума во внутренних точках множества $\mathcal{U}$, поскольку $\nabla_u \mathcal{L}_t(u) = \psi(t) \neq 0$. Если $u_1(t), u_2(t)$ – две различные точки максимума на $\mathcal{U}$, то в силу линейности $\mathcal{L}_t(u)$ достигает максимума на всём отрезке $[u_1, u_2]$. Но с учётом строгой выпуклости $\mathcal{U}$ точка $(u_1 + u_2)/2$ внутренняя для $\mathcal{U}$, что приводит к противоречию.

Замечание 3. Отметим, что в книге [3] вместо понятия “нормальная задача” используется в качестве синонима “нормальная система” (см., например, [3, п. 3.5, теорема 13]).

Предположение 3. Пары матриц $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ и $(\mathcal{A}_{22}, \mathcal{B}_2)$ вполне управляемы.

Согласно [15, теорема 1] выполнение предположений 2 и 3 является достаточным условием выполнения предположения 1. Таким образом, при выполнении предположений 2 и 3 задача (4), (5), а также задача (6), разрешимы, и оптимальное управление в поставленных задачах единственное [3, п. 3.5, следствие после теоремы 13].

При выполнении предположения 1 принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое даёт единственное решение задачи (4), (5) [3, п. 3.5, теорема 14]. Для рассматриваемой задачи этот принцип имеет следующий вид: существует единственная пара (z, ω) – решение системы уравнений

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon^{\text{opt}}, \quad \dot{\omega}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon \quad (18)$$

с граничными условиями

$$z_\varepsilon(0) = z^0, \quad \omega_\varepsilon(T) = -\nabla \sigma(z_\varepsilon(T)), \quad (19)$$

где единственное оптимальное управление $u_\varepsilon^{\text{opt}}$ определяется из принципа максимума [3, теорема 14]

$$-\frac{\varepsilon^\alpha}{2} \|u_\varepsilon^{\text{opt}}(t)\|^2 + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(t), u_\varepsilon^{\text{opt}}(t) \rangle = \max_{\|u_\varepsilon(t)\| \leq 1} \left(-\frac{\varepsilon^\alpha}{2} \|u_\varepsilon(t)\|^2 + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) \rangle \right) \quad (20)$$

и является оптимальным управлением в задаче (4), (5).

Применив условие максимума (20), выразим оптимальное управление $u_\varepsilon^{\text{opt}}(t)$ через функцию $\mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(t)$ (аналогично тому, как это было сделано в статье [16]):

$$u_\varepsilon^{\text{opt}}(s) := \frac{\varepsilon^{-\alpha} \mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(s)}{S(\|\varepsilon^{-\alpha} \mathcal{B}_\varepsilon^* \omega_\varepsilon(s)\|)}, \quad S(\xi) := \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq 1, \\ \xi, & \xi > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда состояния системы и сопряжённой системы (18) запишутся в виде

$$z_\varepsilon(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} z^0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}_\varepsilon(t-s)} \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon^{\text{opt}}(s) ds, \quad \omega_\varepsilon(t) = e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^*(t-T)} \omega_\varepsilon(T). \quad (22)$$

Пусть $\lambda_\varepsilon := \omega_\varepsilon(T)$, тогда в силу (18) и (19) $\omega_\varepsilon(s) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-s)} \lambda_\varepsilon$, где $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \end{pmatrix}$. Кроме того, согласно граничным условиям (19), уравнению (22), оптимальному управлению (21) и с помощью замены переменной $s := T - t$ получим уравнение

$$-\omega_\varepsilon(T) = \nabla \sigma \left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} z^0 + \int_0^T \mathcal{C}_\varepsilon(s) u_\varepsilon^{\text{opt}}(T-s) ds \right),$$

или, что то же самое,

$$-\lambda_\varepsilon = \nabla \sigma \left(e^{A_\varepsilon T} z^0 + \int_0^T \frac{C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t) \lambda_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|C_\varepsilon^*(t) \lambda_\varepsilon\|)} dt \right) = \nabla \sigma(z_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})), \quad (23)$$

где

$$u_\varepsilon^{\text{opt}}(T-s) := \frac{C_\varepsilon^*(s) \lambda_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|C_\varepsilon^*(s) \lambda_\varepsilon\|)}, \quad C_\varepsilon(s) := e^{A_\varepsilon s} B_\varepsilon, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha. \end{cases}$$

Замечание 4. Оптимальное управление в задаче (4), (5) непрерывно во всех точках.

Если функция σ_0 дифференцируема на Ξ , то в силу принципа максимума (см., например, теорему из [17, п. 6.1.3]) значение сопряжённой переменной l_0 в момент времени T для задачи (6) удовлетворяет равенству

$$-l_0 = \nabla \sigma_0(x(T, u^{\text{opt}})), \quad (24)$$

где u^{opt} – оптимальное управление в задаче (6). При этом если $l_0 \neq 0$, то единственное оптимальное управление u^{opt} задаётся равенством

$$u^{\text{opt}}(T-t) = \frac{C_0^*(t) l_0}{\|C_0^*(t) l_0\|}, \quad C_0(t) := e^{A_0 t} B_0,$$

а вектор l_0 в силу (24) есть единственное решение уравнения

$$-l_0 = \nabla \sigma_0 \left(e^{A_0 T} x_0 + \int_0^T \frac{C_0(t) C_0^*(t) l_0}{\|C_0^*(t) l_0\|} dt \right). \quad (25)$$

Отметим, что $l_0 = 0$ тогда и только тогда, когда в задаче (6) ограничения на управление не по существу. В этом случае оптимальное управление, вообще говоря, не единственно.

Замечание 5. Если $C_0^*(\bar{t}) l_0 = 0$, то оптимальное управление в задаче (6) разрывно в точке $\bar{t}$.

Определение 4. Вектор λ_ε – решение уравнения (23) – назовём *определяющим вектором* в задаче (4), (5).

Определение 5. Вектор $l_0 \neq 0$ – решение уравнения (25) – назовём *определяющим вектором* в задаче (6).

Предположение 4. В дальнейшем будем предполагать, что в задачах терминального управления ограничения на управление по существу, т.е. точка глобального минимума функции σ не принадлежит соответствующему множеству достижимости Ξ .

Из следствия 3 и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Пусть z_0 – точка минимума строго выпуклой функции σ на K_0 . Тогда при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$-\nabla_x \sigma(x_0, y_0) = l_\varepsilon \rightarrow l_0 = -\nabla \sigma_0(x_0), \quad \rho_\varepsilon \rightarrow -\nabla_y \sigma(x_0, y_0).$$

Если $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)$ – строго выпуклая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция, x_0 – точка минимума функции σ_1 на Ξ , то

$$l_\varepsilon \rightarrow l_0 = -\nabla \sigma_1(x_0) = -\nabla \sigma_0(x_0), \quad \rho_\varepsilon \equiv 0.$$

Рассмотрим частный случай критерия качества (5):

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon) := \sigma_1(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon)) + \sigma_2(y_\varepsilon(T, u_\varepsilon)) + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt, \quad (26)$$

где $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(y)$ – непрерывно дифференцируемые и выпуклые функции, определённые на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Тогда вектор λ_ε будет определяться из уравнения (23):

$$\begin{aligned} -l_\varepsilon &= \nabla \sigma_1(x_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})) = \\ &= \nabla \sigma_1 \left([e^{A_\varepsilon T}]_{11} x^0 + [e^{A_\varepsilon T}]_{12} y^0 + \int_0^T \frac{[\mathcal{C}_\varepsilon(t)]_{11} ([\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11} l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12} \rho_\varepsilon)}{S_\varepsilon(\|[\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11} l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12} \rho_\varepsilon\|)} dt \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} -\rho_\varepsilon &= \nabla \sigma_2(y_\varepsilon(T, u_\varepsilon^{\text{opt}})) = \\ &= \nabla \sigma_2 \left([e^{A_\varepsilon T}]_{21} x^0 + [e^{A_\varepsilon T}]_{22} y^0 + \int_0^T \frac{[\mathcal{C}_\varepsilon(t)]_{21} ([\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11} l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12} \rho_\varepsilon)}{S_\varepsilon(\|[\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{11} l_\varepsilon + [\mathcal{C}_\varepsilon^*(t)]_{12} \rho_\varepsilon\|)} dt \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где при $i, j \in \{1, 2\}$ под обозначением $[(\cdot)]_{ij}$ понимается блочный элемент матрицы $(\cdot)$, находящийся в i -й строке и в j -м столбце.

4. Управление системой материальных точек в среде с сопротивлением с терминальной частью, зависящей только от медленных переменных. Рассмотрим задачу (4), (26) при следующих условиях:

$$n = m = r = k, \quad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & -\varepsilon^{-1} \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad B_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1} \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) := \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad \sigma_2(y) \equiv 0. \quad (29)$$

В этом случае (с учётом (27) и (28))

$$e^{A_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon})\mathcal{I} \\ \mathcal{O} & e^{-t/\varepsilon}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon(t) := e^{A_\varepsilon t} B_\varepsilon = \begin{pmatrix} (1 - e^{-t/\varepsilon})\mathcal{I} \\ \varepsilon^{-1} e^{-t/\varepsilon} \mathcal{I} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad l_\varepsilon \in \mathbb{R}^k, \quad \mathcal{C}_\varepsilon^*(t) \lambda_\varepsilon = (1 - e^{-t/\varepsilon}) l_\varepsilon, \quad \nabla \sigma_1(x) = x.$$

Поскольку $A_0 = \mathcal{O}$, $B_0 = \mathcal{I}$, то $\mathcal{C}_0(t) \equiv \mathcal{I}$, и управляемая система в предельной задаче (6) в этом случае имеет вид

$$\dot{x}_0 = u,$$

откуда справедливо равенство

$$x_0(T) = x^0 + \int_0^T u(t) dt, \quad \text{причём} \quad \left\| \int_0^T u(t) dt \right\| \leq T. \quad (30)$$

Так как абсолютный минимум функции $\sigma_0 = \sigma_1$ достигается в нуле, то предположение 4 имеет вид условия $0 \notin \Xi(T, x^0)$, которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\|x^0\| > T.$$

Достаточность этого условия следует из (30). С другой стороны, если это неравенство не выполняется, то управление $u(t) = -a(t)x^0$ (где $a(t) = 1$ на $[0, t^*)$ и $a(t) = 0$ на $[t^*, T]$) переводит x^0 в нуль, где $t^* = \|x^0\|$.

При выполнении условия $\|x^0\| > T$ определяющий вектор l_0 удовлетворяет уравнению (25):

$$-l_0 = x^0 + \frac{l_0}{\|l_0\|} T. \quad (31)$$

Из (31) получим, что $\|x^0\| = \|l_0\| + T$ и тем самым

$$l_0 = -x^0 \frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|} \neq 0. \quad (32)$$

Подставим вектор l_ε в уравнение (27) (в силу теоремы 3 $\rho_\varepsilon \equiv 0$):

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \int_0^T \frac{(1 - e^{-t/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|(1 - e^{-t/\varepsilon})l_\varepsilon\|)} dt, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha. \end{cases} \quad (33)$$

Найдём точку смены вида оптимального управления: $\|(1 - e^{-t_\varepsilon/\varepsilon})l_\varepsilon\| = \varepsilon^\alpha$, откуда

$$t_\varepsilon = \varepsilon \ln \left(\frac{\|l_\varepsilon\|}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha} \right). \quad (34)$$

Тогда уравнение из (33) запишется в виде

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \int_0^{t_\varepsilon} \frac{(1 - e^{-s/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{\varepsilon^\alpha} ds + \int_{t_\varepsilon}^T \frac{(1 - e^{-s/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{(1 - e^{-s/\varepsilon})\|l_\varepsilon\|} ds,$$

откуда получим

$$\begin{aligned} -l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon^\alpha} \left(t_\varepsilon + 2\varepsilon(e^{-t_\varepsilon/\varepsilon} - 1) - \frac{\varepsilon}{2}(e^{-2t_\varepsilon/\varepsilon} - 1) \right) + \\ + \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|} (T - t_\varepsilon + \varepsilon(e^{-T/\varepsilon} - e^{-t_\varepsilon/\varepsilon})) \end{aligned}$$

и с учётом определения t_ε из (34) и приведения подобных слагаемых

$$\begin{aligned} 0 = l_\varepsilon + x^0 + \varepsilon y^0 + \varepsilon e^{-T/\varepsilon} \left(\frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|} - y^0 \right) + \frac{l_\varepsilon T}{\|l_\varepsilon\|} + \\ + \varepsilon \ln \left(\frac{\|l_\varepsilon\|}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon^\alpha} - \frac{1}{\|l_\varepsilon\|} \right) l_\varepsilon + \frac{\varepsilon^{\alpha+1} l_\varepsilon}{2\|l_\varepsilon\|^2} - \frac{2\varepsilon l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \end{aligned} \quad (35)$$

При этом в силу того, что $l_\varepsilon \rightarrow l_0 \neq 0$ (см. (32)), представление

$$\ln \left(\frac{\|l_\varepsilon\|}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha} \right) = \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^\alpha}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha} \right) = \frac{\varepsilon^\alpha}{\|l_\varepsilon\| - \varepsilon^\alpha} + O(\varepsilon^{2\alpha}) \quad (36)$$

справедливо и раскладывается в степенной ряд относительно ε^α и компонент вектора $\Delta l := l_\varepsilon - l_0$. Величины $\|l_\varepsilon\|^{-1}$ и $\|l_\varepsilon\|^{-2}$ также раскладываются в степенные ряды по компонентам вектора Δl .

Уравнение (35) имеет вид $0 = F(\Delta l, \varepsilon)$, где функция F бесконечно дифференцируема по Δl и $\varepsilon > 0$ и раскладывается в степенной ряд относительно $\varepsilon > 0$ и компонент вектора $\Delta l = l_\varepsilon - l_0$. В силу (35) и (36)

$$F(\Delta l, \varepsilon) = \Delta l + \varepsilon y^0 - \frac{\varepsilon l_0}{\|l_0\|} + \frac{T}{\|l_0\|^3} (\|l_0\|^2 \Delta l - l_0 \langle l_0, \Delta l \rangle) + O(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2),$$

поэтому оператор первого приближения $\mathcal{F}(\Delta l)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(\Delta l) := \Delta l + \frac{T}{\|l_0\|^3} (\|l_0\|^2 \Delta l - l_0 \langle \Delta l, l_0 \rangle).$$

Поскольку с учётом неравенства Коши–Буняковского

$$\langle \mathcal{F}(\Delta l), \Delta l \rangle = \|\Delta l\|^2 + \frac{T}{\|l_0\|^3} (\|l_0\|^2 \|\Delta l\|^2 - \langle l_0, \Delta l \rangle^2) > 0,$$

то оператор первого приближения $\mathcal{F}$ обратим. Поэтому (в формуле (6.1) ряд при $\varepsilon \ln \varepsilon$ равен нулю [18, теорема 1]) вектор l_ε при $\varepsilon \rightarrow +0$ раскладывается в асимптотический степенной ряд по степеням ε . Таким образом, справедлива

Теорема 4. Пусть выполнено предположение 4. Определяющий вектор l_ε в задаче (4), (26), (29) при $\varepsilon \rightarrow 0$ раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε следующего вида:

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \varepsilon l_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

причём

$$l_0 = -x^0 \frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|} \neq 0, \quad l_1 = \frac{\|l_0\|}{\|l_0\| + T} \left(\frac{l_0}{\|l_0\|} - y^0 + \frac{T l_0}{\|l_0\|^3} \langle l_0, l_1 \rangle \right), \quad \langle l_0, l_1 \rangle = \|l_0\| - \langle y^0, l_0 \rangle.$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon^{\text{opt}}) = \frac{1}{2} \|l_\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon^\alpha \|l_\varepsilon\|^2}{\varepsilon^{2\alpha}} \int_0^{t_\varepsilon} (1 - e^{-s/\varepsilon})^2 ds + \varepsilon^\alpha \int_{t_\varepsilon}^T 1 ds = \frac{1}{2} \|l_\varepsilon\|^2 + \varepsilon \|l_\varepsilon\| + \varepsilon^\alpha \left(T + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

то асимптотическое разложение вектора l_ε даёт асимптотическое разложение оптимального значения функционала качества. При этом в силу теоремы 4 справедливы представления

$$\frac{1}{2} \|l_\varepsilon\|^2 = O(1), \quad \varepsilon^\alpha \left(T + \frac{\varepsilon}{2} \right) = O(\varepsilon^\alpha),$$

т.е. вклад от затрат на управление существенно ниже терминального слагаемого.

5. Управление системой материальных точек в среде без сопротивления с терминальной частью, зависящей только от медленных переменных. Рассмотрим задачу (4), (26) при следующих условиях:

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1} \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) := \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad \sigma_2(y) \equiv 0. \quad (37)$$

Отметим, что для задачи (4), (26), (37) выполнено предположение 1, но не выполнено предположение 2, поэтому в данном случае предельные теоремы 1 и 2 не применимы.

В силу (37), (27) и (28) имеем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & t\mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon(t) := e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} t\mathcal{I} \\ \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_\varepsilon^*(t) \lambda_\varepsilon = \frac{t}{\varepsilon} l_\varepsilon, \quad \lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad l_\varepsilon \in \mathbb{R}^k.$$

Уравнение (27) тогда имеет вид

$$-l_\varepsilon = x^0 + T y^0 + \int_0^T \frac{t^2}{\varepsilon^2} \frac{l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|\varepsilon^{-1} t l_\varepsilon\|)} dt, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon^\alpha, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^\alpha, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^\alpha. \end{cases} \quad (38)$$

Обозначим

$$\mathcal{D} := x^0 + T y^0, \quad I_\varepsilon := \int_0^T t \frac{\varepsilon^{-1} t}{S_\varepsilon(\|\varepsilon^{-1} t l_\varepsilon\|)} dt,$$

причём $I_\varepsilon > 0$, и из равенства $l_\varepsilon(1 + \varepsilon^{-1}I_\varepsilon) = -\mathcal{D}$ выразим вектор $l_\varepsilon := -p_\varepsilon\mathcal{D}$, где $p_\varepsilon := (1 + \varepsilon^{-1}I_\varepsilon)^{-1} > 0$, тем самым l_ε и $\mathcal{D}$ – противоположно направленные векторы.

Найдём точку смены вида оптимального управления: $\|\varepsilon^{-1}tl_\varepsilon\| = \varepsilon^\alpha$, откуда $t_\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+1}/\|l_\varepsilon\|$.

Тогда уравнение (38) запишется в виде

$$-l_\varepsilon = \mathcal{D} + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon^{2+\alpha}} \int_0^{t_\varepsilon} s^2 ds + \frac{l_\varepsilon}{\varepsilon\|l_\varepsilon\|} \int_{t_\varepsilon}^T s ds,$$

откуда получим

$$-l_\varepsilon = \mathcal{D} - \frac{1}{6} \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|^3} \varepsilon^{2\alpha+1} + \frac{T^2}{2\varepsilon} \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \quad (39)$$

Таким образом, после умножения уравнения (39) на ε уравнение для p_ε имеет вид

$$\varepsilon p = \varepsilon + \frac{\varepsilon^{2\alpha+2}}{6\|\mathcal{D}\|^3 p^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|}. \quad (40)$$

Сделаем замену $p = \varepsilon^{\alpha+1}\tilde{p}$, тогда уравнение (40) примет вид

$$\varepsilon^{\alpha+2}\tilde{p} = \varepsilon + \frac{1}{6\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|}.$$

Отметим, что имеет место неравенство

$$\varepsilon + \frac{1}{6\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|} > 0,$$

поэтому $\tilde{p}_\varepsilon$ не может иметь ни нулевого частичного предела, ни бесконечно большого. Тем самым показано, что

$$\tilde{p}_\varepsilon \rightarrow \tilde{p}_0 = \frac{1}{T\sqrt{3}\|\mathcal{D}\|}.$$

Обозначим $\Delta p := \tilde{p}_\varepsilon - \tilde{p}_0$ и для Δp получим уравнение

$$0 = F(\Delta p, \varepsilon) = -\varepsilon^{\alpha+2}(\tilde{p}_0 + \Delta p) + \varepsilon + \frac{1}{6\|\mathcal{D}\|^3(\tilde{p}_0 + \Delta p)^2} - \frac{T^2}{2\|\mathcal{D}\|}.$$

При этом функция F бесконечно дифференцируема по Δp и $\varepsilon > 0$ и раскладывается в степенной ряд по степеням $\varepsilon > 0$ и Δp :

$$F(\Delta p, \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\Delta p}{3\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}_0^3} + O(\varepsilon^2 + \Delta p^2).$$

Таким образом, как и в п. 4, $\tilde{p}_\varepsilon$ раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε . Поэтому справедлива

Теорема 5. Пусть выполнено предположение 4. Определяющий вектор l_ε в задаче (4), (26), (37) при $\varepsilon \rightarrow 0$ раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε следующего вида:

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} -\mathcal{D}\varepsilon^{\alpha+1} \left(\tilde{p}_0 - 3\varepsilon\|\mathcal{D}\|^3\tilde{p}_0^3 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{p}_k \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Так как в рассматриваемом случае выполняются неравенства

$$J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon^0) = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon^\alpha\|l_\varepsilon\|^2}{\varepsilon^{2+2\alpha}} \int_0^{t_\varepsilon} s^2 ds + \varepsilon^\alpha \int_{t_\varepsilon}^T 1 ds = \frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^\alpha \left(T - \frac{2\varepsilon^{\alpha+1}}{3\|l_\varepsilon\|} \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

то асимптотическое разложение вектора l_ε даёт асимптотическое разложение оптимального значения функционала качества. При этом в силу теоремы 5

$$\frac{1}{2}\|l_\varepsilon\|^2 = O(\varepsilon^{2\alpha+2}), \quad \varepsilon^\alpha \left(T - \frac{2\varepsilon^{\alpha+1}}{3\|l_\varepsilon\|} \right) = O(\varepsilon^\alpha),$$

т.е. вклад от затрат на управление существенно выше терминального слагаемого.

6. Управление системой материальных точек в среде без сопротивления с терминальной частью, зависящей как от медленных, так и от быстрых переменных. Рассмотрим управление движением материальной точки в среде без сопротивления, но с критерием качества (26), т.е. задачу (4), (26) при следующих условиях:

$$n = m = r = k, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1}\mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad \sigma_2(y) := \frac{1}{2}\|y\|^2. \quad (41)$$

Как и в п. 5, для этой задачи выполнено предположение 1, но не выполнено предположение 2, поэтому предельные теоремы 1 и 2 не применимы.

В силу (41), (27) и (28) имеем

$$-l_\varepsilon = x_0 + Ty_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{t(tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon)}{S_{1,\varepsilon}(\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|)} dt, \quad -\rho_\varepsilon = y_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \frac{tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{S_{1,\varepsilon}(\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|)} dt,$$

где

$$S_{1,\varepsilon} := \begin{cases} \varepsilon^{\alpha+1}, & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^{\alpha+1}, \\ \xi, & \xi > \varepsilon^{\alpha+1}. \end{cases}$$

Рассмотрим такие x^0 , y^0 , при которых ограничения на управление не по существу, т.е. для которых имеет место оценка $\|l_\varepsilon t + \rho_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{\alpha+1}$. Тогда

$$-l_\varepsilon = x_0 + Ty_0 + \frac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}}l_\varepsilon + \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}\rho_\varepsilon \Rightarrow -x_0 - Ty_0 = l_\varepsilon \left(1 + \frac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}} \right) + \rho_\varepsilon \left(\frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} \right),$$

$$-\rho_\varepsilon = y_0 + \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}l_\varepsilon + \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}}\rho_\varepsilon \Rightarrow -y_0 = l_\varepsilon \left(\frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} \right) + \rho_\varepsilon \left(1 + \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}} \right).$$

Посчитаем определители получившейся системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 + \frac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}} & \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} \\ \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} & 1 + \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}} \end{vmatrix} = 1 + \frac{T}{3\varepsilon^{\alpha+2}}(3 + T^2) + \frac{T^4}{12\varepsilon^{2\alpha+4}}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -x^0 - Ty^0 & \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} \\ -y^0 & 1 + \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}} \end{vmatrix} = -x^0 - Ty^0 - \frac{T}{\varepsilon^{\alpha+2}}x^0 - \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}y^0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 + \frac{T^3}{3\varepsilon^{\alpha+2}} & -x^0 - Ty^0 \\ \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}} & -y^0 \end{vmatrix} = -y^0 + \frac{T^2}{2\varepsilon^{\alpha+2}}x^0 + \frac{T^3}{6\varepsilon^{\alpha+2}}y^0. \end{aligned}$$

Применив формулы Крамера, получим значения

$$l_\varepsilon = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12\varepsilon^{2\alpha+4}(-2x^0\varepsilon^{\alpha+2} - 2Ty^0\varepsilon^{\alpha+2} - 2Tx^0 - T^2y^0)}{2\varepsilon^{\alpha+2}(12\varepsilon^{2\alpha+4} + 4\varepsilon^{\alpha+2}(3 + T^2) + T^4)}, \quad (42)$$

$$\rho_\varepsilon = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12\varepsilon^{2\alpha+4}(-6y^0\varepsilon^{\alpha+2} + 3T^2x^0 + T^3y^0)}{6\varepsilon^{\alpha+2}(12\varepsilon^{2\alpha+4} + 4\varepsilon^{\alpha+2}(3 + T^2) + T^4)}, \quad (43)$$

откуда следует, что

$$l_\varepsilon = \frac{6}{T^4}(-2Tx^0 - T^2y^0)\varepsilon^{\alpha+2} + O(\varepsilon^{\alpha+3}), \quad \rho_\varepsilon = \frac{2}{T^4}(3T^2x^0 + T^3y^0)\varepsilon^{\alpha+2} + O(\varepsilon^{\alpha+3}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$u_\varepsilon^{\text{opt}}(t) = \left(\frac{6t}{T^4}(-2Tx^0 - T^2y^0) + \frac{2}{T^4}(3T^2x^0 + T^3y^0) \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) =: (tA + B)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

а функционал качества

$$\begin{aligned} J_{1,\varepsilon}(u_\varepsilon^{\text{opt}}) &= \frac{1}{2}\| -l_\varepsilon \|^2 + \frac{1}{2}\| -\rho_\varepsilon \|^2 + \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{2} \int_0^T (tA + B)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2}(A^2 + B^2)\varepsilon^{2\alpha+4} + \frac{1}{2} \left(A^2 \frac{T^3}{3} + ABT^2 + B^2T \right) \varepsilon^{\alpha+2} + O(\varepsilon^{\alpha+3}) = O(\varepsilon^{\alpha+2}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $A := 6T^{-4}(-2Tx^0 - T^2y^0)$, $B := 2T^{-4}(3T^2x^0 + T^3y^0)$.

Эти асимптотические оценки не зависят от x^0 и y^0 . Из них следует, что $\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{\alpha+1}$ при всех достаточно малых ε , т.е. существует $\varepsilon_0(x_0, y_0)$ такое, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливо неравенство $\|tl_\varepsilon + \rho_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{\alpha+1}$.

Таким образом, как и в п. 5, l_ε и ρ_ε раскладываются в асимптотический ряд по степеням ε . Поэтому справедлива

Теорема 6. Пусть выполнено предположение 4. Определяющий вектор λ_ε в задаче (4), (26), (37) при $\varepsilon \rightarrow 0$ находится по формулам (42) и (43) и раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε , начиная с порядка $\varepsilon^{\alpha+2}$.

Отметим, что как и в предыдущей задаче вклад от затрат на управление в рассматриваемой задаче существенно больше величины терминального слагаемого.

Заключение. Решение задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и “дешёвым” управлением, вообще говоря, более регулярно зависит от малого параметра, чем решение задачи быстрогодействия.

При рассмотрении отдельных примеров показано, что учёт энергозатрат на реализацию оптимального управления может как существенно влиять на значение величины оптимального функционала качества (задачи управления точкой в среде без сопротивления), так и наоборот, быть несущественным по отношению к величине оптимального значения функционала качества (задача управления точкой в среде с сопротивлением).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., 1968.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М., 1972.
4. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
5. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Асимптотика решения одной сингулярно возмущённой задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 601–612.
6. Калашиникова М.А., Курина Г.А. Асимптотическое решение линейноквадратичных задач с дешёвыми управлениями разной цены // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 124–139.

7. Данилин А.Р., Ильин А.М. Асимптотическое поведение решения задачи быстрогодействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 155–157.
8. Данилин А.Р., Ильин А.М. О структуре решения одной возмущенной задачи быстрогодействия // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 905–926.
9. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстрогодействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 67–79.
10. Дончев А. Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности. М., 1987.
11. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М., 2001.
12. Демьянов В.М., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М., 1981.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., 1973.
14. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М., 1988.
15. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. № 1. P. 111–113.
16. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 2. С. 280–289.
17. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М., 1989.
18. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика решения одной задачи быстрогодействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 1. С. 58–73.

Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 21.02.2022 г.
После доработки 20.04.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

УДК 517.977.1

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ МАСШТАБИРОВАНИЯ ВРЕМЕНИ И ОДНОКРАТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

© 2023 г. Д. А. Фетисов

Доказывается необходимое и достаточное условие линеаризуемости нелинейных систем с одним управлением в классе преобразований, содержащих масштабирования времени и сохраняющих многообразие состояний. Дается описание систем, которые получены однократным продолжением нелинейной системы с одним управлением и являются A -орбитально линеаризуемыми. Доказывается, что из A -орбитальной линеаризуемости системы, полученной однократным продолжением аффинной системы с одним управлением, следует A -орбитальная линеаризуемость и исходной системы. Показывается, что если система, полученная k -кратным продолжением нелинейной системы с одним управлением, где $k \geq 2$, A -орбитально линеаризуема, то и система, полученная из исходной системы её однократным продолжением, также A -орбитально линеаризуема.

DOI: 10.31857/S0374064123010090, EDN: OCWPMQ

Введение. Задача преобразования нелинейных систем с управлением в линейные управляемые системы занимает одно из центральных мест в современной теории управления. Начало исследованиям в этой области было положено в работе [1], где для аффинных систем с одним управлением получены условия линеаризуемости в специальном классе преобразований. Впоследствии (см. [2, 3]) эти условия были обобщены и приняли вид известных до настоящего времени условий статической линеаризуемости обратной связью. Двойственный аналог этих условий получен в статье [4]. Условия статической линеаризуемости обратной связью для многих систем не выполняются, поэтому дальнейшие исследования в этой области были нацелены на распространение результатов в области линеаризации на более широкие классы систем – так появились понятия: приближённая линеаризация обратной связью [5], частичная линеаризация обратной связью [6], линеаризация обратной связью по выходу [7, с. 225] и др.

Важным обобщением понятия статической линеаризуемости обратной связью стало понятие плоскостности [8]. Напомним, что *плоской* называют систему, траектории которой могут быть параметризованы набором гладких функций и их производных по времени до некоторого порядка. При этом сами функции указанного набора называют *плоским выходом системы*. Известно, что система с одним управлением является плоской тогда и только тогда, когда она статически линеаризуема обратной связью (см. [9]). Для систем с векторным управлением статическая линеаризуемость обратной связью является частным случаем плоскостности и характеризуется сохранением многообразия состояний при линеаризующих преобразованиях.

Обобщением понятия плоскостности на случай, когда дополнительно к заменам состояний и управлений используются масштабирования времени [10], является понятие орбитальной плоскостности [11]. Систему называют *орбитально плоской*, если распределение, порождённое бесконечномерным векторным полем, соответствующим системе, диффеоморфно распределению, порождённому бесконечномерным векторным полем тривиальной линейной управляемой системы (системы без внутренней динамики). Масштабирования времени и линеаризация нелинейных систем на их основе применяются для решения разнообразных прикладных задач [12, 13]. Частными случаями орбитальной плоскостности являются введённые для аффинных систем понятия орбитальной линеаризуемости [14] и A -орбитальной линеаризуемости [15].

Орбитальная линеаризация основана на масштабированиях времени, зависящих только от состояния. Условия орбитальной линеаризуемости для систем с одним управлением можно найти в работах [14, 16], для систем с векторным управлением – в статье [17].

A -орбитальная линеаризация аффинных систем основана на масштабированиях времени, зависящих как от состояния, так и от управления. Напомним основные понятия, связанные с A -орбитальной линеаризуемостью аффинных систем с одним управлением. Пусть рассматривается система

$$\Sigma_{\text{aff}} : \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – состояние, X – открытое множество, $u \in \mathbb{R}$ – управление, f и g – гладкие векторные поля. Под гладкостью в настоящей работе всюду понимается бесконечная дифференцируемость.

Следуя работе [18], будем говорить, что система Σ_{aff} A -орбитально линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in X$, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 , для которой найдутся невырожденная матрица $A = (\alpha_j^i)_{j=0,1}^{i=0,1}$, $\alpha_j^i \in C^\infty(V(x_0))$, и диффеоморфизм $\Phi : V(x_0) \rightarrow \Phi(V(x_0))$ такие, что заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u}{\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x)$ система Σ_{aff} преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x, u) : x \in V(x_0), \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \dots, \quad (y^{n-2})' = y^{n-1}, \quad (y^{n-1})' = v, \quad (y^n)' = 1, \quad (1)$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y, v) : y \in \Phi(V(x_0)), \alpha_1^1(\Phi^{-1}(y)) - \alpha_1^0(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$. Отметим, что в системе (1) штрих обозначает дифференцирование по переменной τ .

Очевидно, что в системе (1) переменную состояния y^n можно рассматривать как независимую переменную, а саму систему (1) можно считать линейной управляемой системой $(n-1)$ -го порядка

$$(y^1)' = y^2, \quad \dots, \quad (y^{n-2})' = y^{n-1}, \quad (y^{n-1})' = v. \quad (2)$$

Условие A -орбитальной линеаризуемости системы Σ_{aff} в окрестности точки x_0 известно из работы [19]. Чтобы его сформулировать, сопоставим системе Σ_{aff} кораспределение $\mathcal{I} = (\text{span}_{C^\infty}\{f, g\})^\perp$ и построим его производный флаг, т.е. последовательность кораспределений $\mathcal{I}^0 \supset \mathcal{I}^1 \supset \mathcal{I}^2 \supset \dots$, составляемых по правилу

$$\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^{j+1} = \{\omega \in \mathcal{I}^j : d\omega \equiv 0 \bmod \mathcal{I}^j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $d\omega$ – внешний дифференциал формы ω . Напомним, что характеристическим кораспределением гладкого кораспределения $\mathcal{K}$, имеющего постоянный ранг в окрестности точки x_0 , называют кораспределение $\mathcal{CK} = \{\xi \in \mathcal{K}^\perp : \text{для любой } \omega \in \mathcal{K} \quad \xi \lrcorner d\omega \in \mathcal{K}\}^\perp$, где $\xi \lrcorner d\omega$ – внутреннее произведение векторного поля ξ и дифференциальной формы $d\omega$. Отметим, что если $\mathcal{CK}$ является в окрестности точки x_0 гладким кораспределением постоянного ранга, то оно вполне интегрируемо в окрестности этой точки.

Справедлива следующая

Теорема 1 [19]. Система Σ_{aff} A -орбитально линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда элементы $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, производного флага кораспределения $\mathcal{I}$ удовлетворяют следующим двум условиям:

- 1) ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, постоянны в окрестности точки x_0 ;
- 2) $\mathcal{CI}^{n-3}(x_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0)$.

Из доказательства теоремы 1 следует (см. [19]), что если система Σ_{aff} A -орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 , то $f(x_0)$ и $g(x_0)$ линейно независимы, а ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, удовлетворяют равенствам $\text{rank } \mathcal{I}^j = n - j - 2$.

Отметим, что условие A -орбитальной линеаризуемости для систем с векторным управлением получено в статье [19].

В настоящей работе для нелинейных систем с одним управлением рассматривается задача линеаризации в классе преобразований, содержащих масштабирования времени и сохраняющих многообразие состояний. Наряду с этим исследуется возможность линеаризации систем, полученных из нелинейной системы её k -кратным продолжением. Отметим, что система, полученная k -кратным продолжением нелинейной системы, является аффинной по управлению, в связи с чем задача линеаризации k -кратного продолжения может быть решена с привлечением техники A -орбитальной линеаризации. В работе описывается множество систем, которые получены однократным продолжением нелинейной системы и являются A -орбитально линеаризуемыми. Отдельно рассматривается вопрос об A -орбитальной линеаризации систем, полученных однократным продолжением аффинной системы. Доказывается, что из A -орбитальной линеаризуемости однократного продолжения следует A -орбитальная линеаризуемость и исходной аффинной системы. Показывается, что из A -орбитальной линеаризуемости k -кратного продолжения ($k \geq 2$) нелинейной системы следует A -орбитальная линеаризуемость и её однократного продолжения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему

$$\Sigma: \quad \dot{x} = F(x, u),$$

в которой $x = (x^1, \dots, x^n)$, $n \geq 3$, – состояние, u – управление, $(x, u) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, M – открытое множество, F – гладкое векторное поле. Будем полагать, что система Σ рассматривается в окрестности некоторой точки $(x_0, u_0) \in M$, для которой выполняется условие $F(x_0, u_0) \neq 0$.

Рассмотрим задачу нахождения отображения $(\tau, y, v) = \Psi(t, x, u)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}$, которое задаётся соотношениями

$$\dot{\tau} = \theta(x, u), \quad y = \varphi(x), \quad v = \psi(x, u) \quad (4)$$

и удовлетворяет условиям:

- а) функции θ и ψ являются гладкими в окрестности точки (x_0, u_0) , функция φ является гладкой в окрестности точки x_0 ;
- б) имеют место соотношения

$$\theta(x_0, u_0) \neq 0, \quad \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) \neq 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0;$$

в) равенства (4) преобразуют систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в систему (1).

Как отмечено выше, систему (1) можно рассматривать как линейную управляемую систему (2) порядка $n - 1$. В связи с этим будем говорить, что рассматриваемая задача – это задача линеаризации системы Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Система Σ линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4) тогда и только тогда, когда существуют гладкие замены состояния и управления

$$y = \varphi(x), \quad v = \psi(x, u), \quad \det \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) \neq 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0, \quad (5)$$

для которых найдётся гладкая функция $h(y, v)$ такая, что $h(\varphi(x_0), \psi(x_0, u_0)) \neq 0$, и с помощью (5) система Σ в окрестности точки (x_0, u_0) преобразуется в систему

$$\dot{y}^1 = y^2 h(y, v), \quad \dots, \quad \dot{y}^{n-2} = y^{n-1} h(y, v), \quad \dot{y}^{n-1} = v h(y, v), \quad \dot{y}^n = h(y, v). \quad (6)$$

Доказательство леммы очевидно. Отметим, что если замена (5), удовлетворяющая условиям леммы, найдена, то в линеаризующем преобразовании Ψ замены состояния и управления задаются соотношениями (5), а функция θ , определяющая линеаризующую замену независимой переменной, связана с функцией h равенством $\theta(x, u) = h(\varphi(x), \psi(x, u))$.

Согласно лемме задачу линеаризации системы Σ в классе преобразований (4) можно рассматривать как задачу поиска замены (5) и функции h таких, что заменой (5) система Σ преобразуется в систему (6).

2. Условие линеаризуемости. С системой Σ естественным образом ассоциируется кораспределение $\mathcal{J} = \text{span}_{C^\infty}\{dx^i - F^i(x, u)dt, i = \overline{1, n}\}$, заданное на множестве $M \times \mathbb{R}$ изменения переменных x, u, t . Для того чтобы решить задачу линеаризации системы Σ в классе преобразований (4), свяжем с системой Σ кораспределение

$$\mathcal{I} = \{\omega \in \mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}.$$

Установим вид кораспределения $\mathcal{I}$. С этой целью будем искать формы, порождающие $\mathcal{I}$, в виде $\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i(dx^i - F^i(x, u)dt)$, где λ_i – гладкие функции, подлежащие определению. Из условия $\omega(\partial/\partial t) = 0$ получаем уравнение $\sum_{i=1}^n \lambda_i F^i(x, u) = 0$. Поскольку $F(x_0, u_0) \neq 0$, то это уравнение в окрестности точки (x_0, u_0) имеет $n - 1$ линейно независимых решений. Обозначим их через $\lambda^1(x, u), \dots, \lambda^{n-1}(x, u)$. Тогда кораспределение $\mathcal{I}$ порождается формами

$$\omega^l = \sum_{i=1}^n \lambda_i^l(x, u)(dx^i - F^i(x, u)dt) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^l(x, u)dx^i, \quad l = \overline{1, n-1}.$$

Таким образом, $\mathcal{I}$ – кораспределение ранга $n-1$, заданное на множестве M и имеющее вид

$$\mathcal{I} = \text{span}_{C^\infty}\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i^l(x, u)dx^i, l = \overline{1, n-1}\right\}. \quad (7)$$

Главным результатом в этом пункте является следующая теорема (в её формулировке и доказательстве используется производный флаг $\mathcal{I}^j, j = 0, 1, 2, \dots$, кораспределения $\mathcal{I}$, составленный по правилу (3)).

Теорема 2. Система Σ линеаризуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in M$ в классе преобразований (4) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) ранги кораспределений $\mathcal{I}^j, j = \overline{0, n-1}$, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0) ;
- 2) в окрестности точки (x_0, u_0) имеет место включение $C\mathcal{I}^{n-2} \subset \text{span}_{C^\infty}\{dx^1, \dots, dx^n\}$;
- 3) $C\mathcal{I}^{n-2}(x_0, u_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0, u_0)$.

Доказательство. Достаточность. Как показано в работе [19], выполнение условий 1) и 3) означает, что ранги кораспределений $\mathcal{I}^j, j = \overline{0, n-1}$, удовлетворяют условию $\text{rank } \mathcal{I}^j = n - j - 1$. Обозначим через ω дифференциальную 1-форму, порождающую кораспределение $\mathcal{I}^{n-2}$, так что $\mathcal{I}^{n-2} = \text{span}_{C^\infty}\{\omega\}$. Согласно [19] характеристическое кораспределение $C\mathcal{I}^{n-2}$ кораспределения $\mathcal{I}^{n-2}$ в окрестности точки (x_0, u_0) является вполне интегрируемым кораспределением ранга 3 и, следовательно, может быть представлено в виде $C\mathcal{I}^{n-2} = \text{span}_{C^\infty}\{dz^1, dz^2, dz^3\}$, где z^1, z^2, z^3 – гладкие функции, независимые в окрестности точки (x_0, u_0) .

Выполнение условия 2) означает, что для любого $k = 1, 2, 3$ в окрестности точки (x_0, u_0) имеют место равенства $(z^k)'_u = 0$. Таким образом, интегралы характеристического кораспределения $C\mathcal{I}^{n-2}$ являются функциями только состояния $x: z^k = z^k(x), k = 1, 2, 3$.

Из условия 3) теоремы следует, что по крайней мере одна из функций $z^k, k = 1, 2, 3$, например z^3 , удовлетворяет условию $dz^3(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0, u_0)$. В статье [19] показано, что кораспределение $\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty}\{\omega, dz^3\}$ в окрестности точки (x_0, u_0) вполне интегрируемо и представимо в виде $\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty}\{dy^1, dy^n\}$, где $y^n = z^3$, а y^1 – гладкая функция, такая, что y^1 и y^n независимы в окрестности точки (x_0, u_0) . Согласно [19] все кораспределения $\mathcal{I}^j, j = \overline{0, n-2}$, в окрестности точки (x_0, u_0) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^j &= \text{span}_{C^\infty}\{dy^1 - y^2 dy^n, \dots, dy^{n-j-1} - y^{n-j} dy^n\}, \quad j = \overline{1, n-2}, \\ \mathcal{I}^0 &= \text{span}_{C^\infty}\{dy^1 - y^2 dy^n, \dots, dy^{n-2} - y^{n-1} dy^n, dy^{n-1} - v dy^n\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $y^1, \dots, y^n, v$ – гладкие функции, независимые в окрестности точки (x_0, u_0) .

Покажем, что $(y^j)'_u \equiv 0$, $j = \overline{1, n-1}$, в окрестности точки (x_0, u_0) . Действительно, ранее показано, что $(y^n)'_u \equiv 0$, поэтому если для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ в любой окрестности точки (x_0, u_0) найдётся точка $(\tilde{x}, \tilde{u})$ такая, что $(y^j)'_u(\tilde{x}, \tilde{u}) \neq 0$, то в подпространстве $\mathcal{I}(\tilde{x}, \tilde{u})$ содержится форма $\tilde{\omega}$, удовлетворяющая сравнению $\tilde{\omega} \equiv du \pmod{\{dx^1, \dots, dx^n\}}$, чего согласно (7) быть не может.

Обозначим через Φ диффеоморфизм, заданный системой функций $y^j = y^j(x)$, $j = \overline{1, n}$, $v = v(x, u)$. Пусть $(y_0, v_0) = \Phi(x_0, u_0)$. Образующими кораспределения $\mathcal{J}$ являются формы

$$\bar{\omega}^i = dy^i - y^{i+1} dy^n, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad \bar{\omega}^{n-1} = dy^{n-1} - v dy^n, \quad (9)$$

которые согласно (8) порождают кораспределение $\mathcal{I}$, и некоторая форма, содержащаяся в $\mathcal{J}$ и не зависящая линейно от $\bar{\omega}^i$, $i = \overline{1, n-1}$. Пусть производная функции y^n в силу системы Σ задаётся выражением $\dot{y}^n = \theta(x, u)$. Тогда очевидно, что в кораспределении $\mathcal{J}$ содержится дифференциальная 1-форма $dy^n - h(y, v) dt$, где $h(y, v) = \theta(\Phi^{-1}(y, v))$. Указанная форма не зависит линейно от $\bar{\omega}^i$, $i = \overline{1, n-1}$. Следовательно, кораспределение $\mathcal{J}$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{J} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1 - y^2 dy^n, \dots, dy^{n-2} - y^{n-1} dy^n, dy^{n-1} - v dy^n, dy^n - h(y, v) dt\}$$

или (что то же самое)

$$\mathcal{J} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1 - y^2 h(y, v) dt, \dots, dy^{n-2} - y^{n-1} h(y, v) dt, dy^{n-1} - v h(y, v) dt, dy^n - h(y, v) dt\}.$$

Отсюда вытекает, что диффеоморфизм Φ преобразует систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в систему (6). Отметим, что $h(y_0, v_0) \neq 0$, так как противное означало бы выполнение равенства $F(x_0, u_0) = 0$. Как было отмечено выше, при переходе в системе (6) к новой независимой переменной y^n получим линейную управляемую систему (2).

Необходимость. Пусть система Σ в окрестности точки (x_0, u_0) преобразуется в классе преобразований (4) в систему (6), где $h(y, v)$ – некоторая функция, гладкая в окрестности точки $(y_0, v_0) = \Phi(x_0, u_0)$ и такая, что $h(y_0, v_0) \neq 0$. Системе (6) соответствует кораспределение

$$\hat{\mathcal{J}} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1 - y^2 h(y, v) dt, \dots, dy^{n-2} - y^{n-1} h(y, v) dt, dy^{n-1} - v h(y, v) dt, dy^n - h(y, v) dt\}.$$

Кораспределение $\hat{\mathcal{I}} = \{\omega \in \hat{\mathcal{J}} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{I}} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1 - y^2 dy^n, \dots, dy^{n-2} - y^{n-1} dy^n, dy^{n-1} - v dy^n\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что производный флаг кораспределения $\hat{\mathcal{I}}$ образован кораспределениями

$$\hat{\mathcal{I}}^0 = \hat{\mathcal{I}}, \quad \hat{\mathcal{I}}^j = \text{span}_{C^\infty} \{dy^i - y^{i+1} dy^n, \quad i = \overline{1, n-j-1}, \quad j = \overline{1, n-2}, \quad \hat{\mathcal{I}}^{n-1} = \mathcal{O},$$

где $\mathcal{O} : (y, v) \mapsto \{0\}$ – тривиальное кораспределение. Легко видеть, что ранги всех кораспределений $\hat{\mathcal{I}}^j$, $j = \overline{0, n-1}$, постоянны в окрестности точки (y_0, v_0) . Кораспределение $\hat{\mathcal{I}}^{n-2}$ имеет вид $\hat{\mathcal{I}}^{n-2} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1 - y^2 dy^n\}$, его характеристическое кораспределение – вид $\mathcal{C}\hat{\mathcal{I}}^{n-2} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1, dy^2, dy^n\}$. Отсюда вытекает, что в окрестности точки (y_0, v_0) имеет место включение $\mathcal{C}\hat{\mathcal{I}}^{n-2} \subset \text{span}_{C^\infty} \{dy^1, \dots, dy^n\}$ и выполнено условие $\mathcal{C}\hat{\mathcal{I}}^{n-2}(y_0, v_0) \not\subset \hat{\mathcal{I}}(y_0, v_0)$. Следовательно, кораспределение $\mathcal{I}$, соответствующее системе Σ , удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Из доказательства достаточности вытекает, что функция $y^n = y^n(x)$ удовлетворяет условию $dy^n(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0, u_0)$. Следовательно, в аннуляторе кораспределения $\mathcal{I}$, которым, как нетрудно видеть, является распределение

$$\mathcal{P} = \text{span}_{C^\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n F^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial u} \right\},$$

найдётся векторное поле ξ такое, что $dy^n(\xi)(x_0, u_0) \neq 0$. Поскольку $(y^n)'_u \equiv 0$, то таким векторным полем является поле F . Следовательно, новая независимая переменная y^n удовлетворяет условию $dy^n(F)(x_0, u_0) \neq 0$.

Следствие 2. Каждая из форм $\bar{\omega}^i$, $i = \overline{1, n-1}$, задаваемых соотношениями (9), обращается в нуль на векторных полях, порождающих распределение $\mathcal{P}$, в том числе и на поле F . Действительно, $\bar{\omega}^i \in \mathcal{P}^\perp$, $i = \overline{1, n-1}$. Следовательно, $\bar{\omega}^i(F) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$. Запишем эти равенства в виде

$$(dy^i - y^{i+1} dy^n)(F) = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad (dy^{n-1} - v dy^n)(F) = 0$$

и заметим, что поскольку $dy^n(F)(x_0, u_0) \neq 0$, то в окрестности точки (x_0, u_0) справедливы соотношения

$$y^{i+1} = \frac{dy^i(F)}{dy^n(F)}, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad v = \frac{dy^{n-1}(F)}{dy^n(F)}. \quad (10)$$

Эти формулы позволяют, зная y^1 и y^n , найти остальные переменные состояния и управление в системе (2).

Замечание 1. В частном случае, когда система Σ аффинна по управлению, связь между A -орбитальной линеаризуемостью системы и линеаризуемостью системы в классе преобразований (4) описывается следующим образом. Если система Σ аффинна по управлению и A -орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 , то для любого u_0 такого, что $\alpha_0^0(x_0) + \alpha_1^0(x_0)u_0 \neq 0$, система Σ линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). Если система Σ аффинна по управлению и линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4), то система Σ A -орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 и выполняется условие $\alpha_0^0(x_0) + \alpha_1^0(x_0)u_0 \neq 0$.

3. Алгоритм линеаризации. Для того чтобы линеаризовать систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4), требуется выполнить следующие действия. Построим кораспределение $\mathcal{J} = \text{span}_{C^\infty} \{dx^i - F^i(x, u) dt, \quad i = \overline{1, n}\}$, ассоциированное с системой Σ . Найдём кораспределение $\mathcal{I} = \{\omega \in \mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}$ и построим его производный флаг. Проверим, что ранги всех кораспределений, составляющих производный флаг, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0) . Из доказательства теоремы 2 следует, что если для некоторого $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ранг кораспределения $\mathcal{I}^j$ отличен от $n-j-1$, то система Σ не линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). Для кораспределения $\mathcal{I}^{n-2} = \text{span}_{C^\infty} \{\omega\}$ построим характеристическое кораспределение $\mathcal{CI}^{n-2}$ и найдём полную систему z^1, z^2, z^3 его интегралов. В результате характеристическое кораспределение $\mathcal{CI}^{n-2}$ будет представлено в виде $\mathcal{CI}^{n-2} = \text{span}_{C^\infty} \{dz^1, dz^2, dz^3\}$. Проверим выполнение равенств $(z^k)'_u \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. Если хотя бы одно из них не выполнено, то система Σ не линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). В противном случае определим, существует ли номер $k \in \{1, 2, 3\}$, для которого имеет место условие $dz^k(F)(x_0, u_0) \neq 0$. Если такого k не существует, то система Σ не линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). В противном случае линеаризовать систему Σ в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4) возможно. Предположим для определённости, что $dz^3(F)(x_0, u_0) \neq 0$. Тогда принимаем $y^n = z^3$ и составляем кораспределение $\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty} \{\omega, dy^n\}$. Как отмечено в доказательстве теоремы 2, кораспределение $\mathcal{L}$ вполне интегрируемо в окрестности точки x_0 . Найдём интеграл y^1 кораспределения $\mathcal{L}$, независимый от y^n . Используя формулы (10), определим функции $y^2, \dots, y^{n-1}, v$. Как показано выше, соотношения $y^j = y^j(x)$, $j = \overline{1, n}$, $v = v(x, u)$ задают линеаризующее преобразование системы Σ , причём y^n должна быть выбрана новой независимой переменной.

В качестве примера покажем, что система

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= u - 2x^4(u)^2 - 2u(x^4)^2 + x^4, & \dot{x}^2 &= ux^4 + (x^4)^2, \\ \dot{x}^3 &= ux^2 + x^2x^4 + 3(x^2)^2x^4u + 3(x^2)^2(x^4)^2, & \dot{x}^4 &= (u)^2 + ux^4 \end{aligned} \quad (11)$$

с состоянием $x \in \mathbb{R}^4$ и управлением $u \in \mathbb{R}$ линеаризуема в классе преобразований (4) в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M = \{(x, u) : x^4 \neq 0, u + x^4 \neq 0\}$.

Системе (11) соответствуют векторное поле

$$F = (u - 2x^4(u)^2 - 2u(x^4)^2 + x^4) \frac{\partial}{\partial x^1} + (ux^4 + (x^4)^2) \frac{\partial}{\partial x^2} + \\ + (ux^2 + x^2x^4 + 3(x^2)^2x^4u + 3(x^2)^2(x^4)^2) \frac{\partial}{\partial x^3} + ((u)^2 + ux^4) \frac{\partial}{\partial x^4}$$

и кораспределение

$$\mathcal{J} = \text{span}_{C^\infty} \{ dx^1 - (u - 2x^4(u)^2 - 2u(x^4)^2 + x^4) dt, dx^2 - (ux^4 + (x^4)^2) dt, \\ dx^3 - (ux^2 + x^2x^4 + 3(x^2)^2x^4u + 3(x^2)^2(x^4)^2) dt, dx^4 - ((u)^2 + ux^4) dt \}.$$

Кораспределение $\mathcal{I} = \{ \omega \in \mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0 \}$ имеет вид

$$\mathcal{I} = \text{span}_{C^\infty} \{ x^4 dx^1 - (1 - 2x^4u) dx^2, x^4 dx^3 - (x^2 + 3(x^2)^2x^4) dx^2, x^4 dx^4 - u dx^2 \}.$$

Его производный флаг образован кораспределениями

$$\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^1 = \text{span}_{C^\infty} \{ x^4 dx^1 - dx^2 + 2(x^4)^2 dx^4, x^4 dx^3 - (x^2 + 3(x^2)^2x^4) dx^2 \},$$

$$\mathcal{I}^2 = \text{span}_{C^\infty} \{ \omega \}, \quad \mathcal{I}^3 = \mathcal{O},$$

где $\omega = dx^3 - 3(x^2)^2 dx^2 - 2x^2x^4 dx^4 - x^2 dx^1$.

Аннулятором кораспределения $\mathcal{I}^2$ является распределение $(\mathcal{I}^2)^\perp = \text{span}_{C^\infty} \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \}$, в котором

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + 3(x^2)^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \xi_3 = 2x^2x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4}, \quad \xi_4 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Построим характеристическое кораспределение $C\mathcal{I}^2 = \{ \xi \in (\mathcal{I}^2)^\perp : \xi \lrcorner d\omega \in \mathcal{I}^2 \}^\perp$ кораспределения $\mathcal{I}^2$. Нетрудно видеть, что $d\omega = dx^1 \wedge dx^2 + 2x^4 dx^4 \wedge dx^2$, где $\wedge$ обозначает внешнее произведение дифференциальных форм. Поскольку справедливы равенства

$$\xi_k \lrcorner d\omega = \xi_k \lrcorner (dx^1 \wedge dx^2 + 2x^4 dx^4 \wedge dx^2) = \\ = dx^1(\xi_k) dx^2 - dx^2(\xi_k) dx^1 + 2x^4 dx^4(\xi_k) dx^2 - 2x^4 dx^2(\xi_k) dx^4, \quad k = \overline{1, 4},$$

то

$$\xi_1 \lrcorner d\omega = dx^2, \quad \xi_2 \lrcorner d\omega = -dx^1 - 2x^4 dx^4, \quad \xi_3 \lrcorner d\omega = 2x^4 dx^2, \quad \xi_4 \lrcorner d\omega = 0.$$

Будем искать векторное поле $\xi \in (\mathcal{I}^2)^\perp$, удовлетворяющее условию $\xi \lrcorner d\omega \in \mathcal{I}^2$, в виде $\xi = \beta^1 \xi_1 + \beta^2 \xi_2 + \beta^3 \xi_3 + \beta^4 \xi_4$, где β^k – гладкие функции, подлежащие определению, $k = 1, 2, 3, 4$. Вычислив внутреннее произведение векторного поля ξ и дифференциальной формы $d\omega$, будем иметь

$$\xi \lrcorner d\omega = (\beta^1 \xi_1 + \beta^2 \xi_2 + \beta^3 \xi_3 + \beta^4 \xi_4) \lrcorner d\omega = \beta^1 dx^2 - \beta^2(dx^1 + 2x^4 dx^4) + \beta^3 2x^4 dx^2.$$

Следовательно, условие $\xi \lrcorner d\omega \in \mathcal{I}^2$ приводит к равенству

$$\beta^1 dx^2 - \beta^2(dx^1 + 2x^4 dx^4) + \beta^3 2x^4 dx^2 = \gamma(dx^3 - 3(x^2)^2 dx^2 - 2x^2x^4 dx^4 - x^2 dx^1),$$

где γ – некоторая гладкая функция. Приравняв коэффициенты при dx^1 , dx^2 , dx^3 и dx^4 в левой и правой частях равенства, получим $\gamma = 0$, $\beta^2 = 0$, $\beta^1 = -\beta^3 2x^4$. Отсюда вытекает, что векторное поле $\xi \in (\mathcal{I}^2)^\perp$, удовлетворяющее условию $\xi \lrcorner d\omega \in \mathcal{I}^2$, описывается выражением

$$\xi = -\beta^3 2x^4 \xi_1 + \beta^3 \xi_3 + \beta^4 \xi_4 = \beta^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^4} - 2x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \beta^4 \frac{\partial}{\partial u}.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{IT}^2)^\perp = \text{span}_{C^\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^4} - 2x^4 \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial u} \right\}.$$

Аннулятором этого распределения является кораспределение

$$\mathcal{IT}^2 = \text{span}_{C^\infty} \{dx^1 + 2x^4 dx^4, dx^2, dx^3\}.$$

Его интегралы – функции $z^1(x) = x^1 + (x^4)^2$, $z^2(x) = x^2$, $z^3(x) = x^3$. Очевидно, что $(z^k)'_u \equiv 0$ для всех $k = 1, 2, 3$.

Нетрудно видеть, что $dz^1(F) = (dx^1 + 2x^4 dx^4)(F) = u + x^4 \neq 0$ для всех $(x, u) \in M$. Положим $y^4 = z^1$ и составим кораспределение

$$\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty} \{\omega, dy^4\} = \text{span}_{C^\infty} \{dx^3 - 3(x^2)^2 dx^2 - 2x^2 x^4 dx^4 - x^2 dx^1, dx^1 + 2x^4 dx^4\}.$$

Записав выражение для $\mathcal{L}$ как $\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty} \{dx^3 - 3(x^2)^2 dx^2, dx^1 + 2x^4 dx^4\}$, видим, что в качестве интеграла кораспределения $\mathcal{L}$, независимого от y^4 , может быть принята функция $y^1 = x^3 - (x^2)^3$.

Функции y^2 , y^3 и v могут теперь быть вычислены по формулам (10):

$$y^2 = \frac{dy^1(F)}{dy^4(F)} = x^2, \quad y^3 = \frac{dy^2(F)}{dy^4(F)} = x^4, \quad v = \frac{dy^3(F)}{dy^4(F)} = u.$$

Непосредственная проверка показывает, что найденное преобразование линеаризует систему (11) не только локально, т.е. заменой

$$y^1 = x^3 - (x^2)^3, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^4, \quad y^4 = x^1 + (x^4)^2, \quad v = u$$

система (11) преобразуется на множестве M в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = v$$

с независимой переменной y^4 .

4. Линеаризация на основе однократного продолжения. Рассмотрим, наряду с системой Σ , систему, полученную из Σ её однократным продолжением, т.е. аффинную систему

$$\Sigma_1 : \quad \dot{x} = F(x, u), \quad \dot{u} = u^1$$

с состоянием $(x, u) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и управлением $u^1 \in \mathbb{R}$. Полагаем, как и выше, что система Σ_1 рассматривается в окрестности точки $(x_0, u_0) \in M$, для которой $F(x_0, u_0) \neq 0$. Так как система Σ_1 является аффинной по управлению, задача её линеаризации в окрестности точки (x_0, u_0) может быть решена с привлечением техники А-орбитальной линеаризации.

А-орбитальная линеаризуемость системы Σ_1 в окрестности точки (x_0, u_0) означает существование окрестности $V(x_0, u_0)$ точки (x_0, u_0) , для которой найдутся невырожденная матрица $A = (\alpha_j^i)_{j=0,1}^{i=0,1}$, $\alpha_j^i \in C^\infty(V(x_0, u_0))$, и диффеоморфизм $\Phi : V(x_0, u_0) \rightarrow \Phi(V(x_0, u_0))$ такие, что заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_0^0(x, u) + \alpha_1^0(x, u)u^1,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha_0^1(x, u) + \alpha_1^1(x, u)u^1}{\alpha_0^0(x, u) + \alpha_1^0(x, u)u^1}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x, u)$ система Σ_1 преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x, u, u^1) : (x, u) \in V(x_0, u_0), \alpha_0^0(x, u) + \alpha_1^0(x, u)u^1 \neq 0\}$ в систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \dots, \quad (y^{n-1})' = y^n, \quad (y^n)' = v, \quad (y^{n+1})' = 1, \quad (12)$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y, v) : y \in \Phi(V(x_0, u_0)), \alpha_1^1(\Phi^{-1}(y)) - \alpha_1^0(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$.

Очевидно, что в системе (12) переменную состояния y^{n+1} можно рассматривать как независимую переменную, а саму систему (12) можно считать линейной управляемой системой n -го порядка

$$(y^1)' = y^2, \quad \dots, \quad (y^{n-1})' = y^n, \quad (y^n)' = v.$$

Аффинной системе Σ_1 соответствуют векторные поля

$$f_0 = \sum_{i=1}^n F^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

В формулировке условия A -орбитальной линейизуемости аффинных систем (см. теорему 1) используется аннулятор распределения, порождаемого векторными полями системы. Нетрудно видеть, что распределение $\mathcal{F}_{\Sigma_1} = \text{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1\}$, порождаемое полями f_0 и f_1 , совпадает с распределением $\mathcal{P}$, сопоставленным ранее системе Σ . Следовательно, совпадают и аннуляторы этих распределений: $\mathcal{I}_{\Sigma_1} = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – кораспределение, соответствующее системе Σ . Воспользовавшись теоремой 1, получим необходимое и достаточное условие A -орбитальной линейизуемости системы Σ_1 и следствие из него, устанавливающее связь между линейизуемостью системы Σ в классе преобразований (4) и A -орбитальной линейизуемостью системы Σ_1 . В формулировках теоремы и следствия используется производный флаг $\mathcal{I}^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, кораспределения $\mathcal{I}$, соответствующего системе Σ .

Теорема 3. Система Σ_1 A -орбитально линейизуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in M$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

- 1) ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = \overline{0, n-1}$, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0) ;
- 2) $C\mathcal{I}^{n-2}(x_0, u_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0, u_0)$.

Следствие 3. Пусть:

- 1) система Σ_1 A -орбитально линейизуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in M$,
 - 2) в окрестности точки (x_0, u_0) имеет место включение $C\mathcal{I}^{n-2} \subset \text{span}_{C^\infty}\{dx^1, \dots, dx^n\}$.
- Тогда система Σ линейизуема в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4).

Замечание 2. Если в результате применения к системе Σ алгоритма линейизации из п. 3 оказалось, что условия 1) и 3) теоремы 2 выполнены, но какой-либо интеграл кораспределения $C\mathcal{I}^{n-2}$ зависит от u , то систему Σ нельзя линейаризовать в окрестности точки (x_0, u_0) в классе преобразований (4). Как вытекает из доказательства теоремы 2, проблема состоит в том, что если функция y^n зависит от u , то дифференциальная 1-форма вида $dy^n - h dt$ не содержится в кораспределении $\mathcal{J}$, ассоциированном с системой Σ . Продолжение системы Σ до системы Σ_1 устраняет эту проблему. Поскольку в системе Σ_1 есть уравнение $\dot{u} = u^1$, то и в кораспределении $\mathcal{J}_{\Sigma_1}$ форма $dy^n - h dt$ содержится даже в случае, если y^n зависит от u . Чтобы построить преобразования, A -орбитально линейизующие систему Σ_1 в окрестности точки (x_0, u_0) , воспользуемся алгоритмом A -орбитальной линейизации, приведённым в работе [19], и тем фактом, что кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_1}$, соответствующее системе Σ_1 , совпадает с кораспределением $\mathcal{I}$, сопоставленным системе Σ . Выполнение условия 3) теоремы 2 означает, что существуют интеграл $z = z(x, u)$ кораспределения $C\mathcal{I}^{n-2}$ и векторное поле f_l , $l \in \{0, 1\}$, для которых имеет место условие $dz(f_l)(x_0, u_0) \neq 0$. Положим $y^{n+1} = z(x, u)$ и составим кораспределение $\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty}\{\omega, dy^{n+1}\}$, где ω – форма, порождающая кораспределение $\mathcal{I}^{n-2}$. Проинтегрировав $\mathcal{L}$, найдём его интеграл y^1 , независимый от y^{n+1} . Положим

$$y^{i+1} = \frac{dy^i(f_l)}{dy^{n+1}(f_l)}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (13)$$

Найдём производные функций y^{n+1} и y^n в силу системы Σ_1 :

$$\dot{y}^{n+1} = \alpha_0^0(x, u) + \alpha_1^0(x, u)u^1, \quad \dot{y}^n = \alpha_0^1(x, u) + \alpha_1^1(x, u)u^1.$$

Линеаризующие преобразования в окрестности точки (x_0, u_0) определяются соотношениями $y^j = y^j(x, u)$, $j = \overline{1, n+1}$, и матрицей $A = (\alpha_j^i)_{j=0,1}^{i=0,1}$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}^1 = -(u)^4, \quad \dot{x}^2 = 3(u)^3, \quad \dot{x}^3 = -3(u)^2, \quad \dot{x}^4 = u \quad (14)$$

на множестве $M = \{(x, u) : u \neq 0\}$. Покажем сначала, что система (14) не линеаризуема в классе преобразований (4) в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M$.

С системой (14) ассоциировано кораспределение

$$\mathcal{J} = \text{span}_{C^\infty} \{dx^1 + (u)^4 dt, dx^2 - 3(u)^3 dt, dx^3 + 3(u)^2 dt, dx^4 - u dt\}.$$

Кораспределение $\mathcal{I} = \{\omega \in \mathcal{J} : \omega(\partial/\partial t) = 0\}$ имеет вид

$$\mathcal{I} = \text{span}_{C^\infty} \{dx^1 + (u)^3 dx^4, dx^2 - 3(u)^2 dx^4, dx^3 + 3u dx^4\}.$$

Его производный флаг образован кораспределениями

$$\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^1 = \text{span}_{C^\infty} \{dx^1 - (u)^2 dx^3 - 2(u)^3 dx^4, dx^2 + 2u dx^3 + 3(u)^2 dx^4\},$$

$$\mathcal{I}^2 = \text{span}_{C^\infty} \{dx^1 + u dx^2 + (u)^2 dx^3 + (u)^3 dx^4\}, \quad \mathcal{I}^3 = \mathcal{O}.$$

Характеристическое кораспределение $\mathcal{CI}^2$ имеет вид $\mathcal{CI}^2 = \text{span}_{C^\infty} \{dz^1, dz^2, dz^3\}$, где

$$z^1(x, u) = x^1 + ux^2 + (u)^2 x^3 + (u)^3 x^4, \quad z^2(x, u) = x^2 + 2ux^3 + 3(u)^2 x^4, \quad z^3(x, u) = u.$$

Очевидно, что ранги кораспределений $\mathcal{I}^j$, $j = 0, 1, 2, 3$, постоянны, $dz^3 = du \notin \mathcal{I}$. Как видим, условия 1) и 3) теоремы 2 выполнены, но $(z^k)'_u \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, поэтому система (14) не линеаризуема в классе преобразований (4) в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M$.

Рассмотрим теперь продолжение системы (14) – аффинную систему

$$\dot{x}^1 = -(u)^4, \quad \dot{x}^2 = 3(u)^3, \quad \dot{x}^3 = -3(u)^2, \quad \dot{x}^4 = u, \quad \dot{u} = u^1, \quad (15)$$

которой соответствуют векторные поля

$$f_0 = -(u)^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + 3(u)^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - 3(u)^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x^4}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Согласно теореме 3 система (15) A -орбитально линеаризуема в окрестности любой точки $(x_0, u_0) \in M$. Построим линеаризующие преобразования. Очевидно, что интеграл $z^3(x, u) = u$ кораспределения $\mathcal{CI}^2$ и векторное поле f_1 удовлетворяют условию $dz^3(f_1) = 1 \neq 0$, поэтому полагаем $y^5 = u$ и составляем кораспределение

$$\mathcal{L} = \mathcal{I}^2 + \text{span}_{C^\infty} \{du\} = \text{span}_{C^\infty} \{dx^1 + u dx^2 + (u)^2 dx^3 + (u)^3 dx^4, du\}.$$

Кораспределение $\mathcal{L}$ представимо в виде $\mathcal{L} = \text{span}_{C^\infty} \{dy^1, du\}$, где $y^1 = x^1 + ux^2 + (u)^2 x^3 + (u)^3 x^4$. Функции y^2 , y^3 и y^4 могут быть найдены с использованием формул (13):

$$y^2 = \frac{dy^1(f_1)}{dy^5(f_1)} = x^2 + 2ux^3 + 3(u)^2 x^4, \quad y^3 = \frac{dy^2(f_1)}{dy^5(f_1)} = 2x^3 + 6ux^4, \quad y^4 = \frac{dy^3(f_1)}{dy^5(f_1)} = 6x^4.$$

Таким образом, линеаризующая замена состояния задаётся соотношениями $y^j = y^j(x, u)$, $j = \overline{1, 5}$, и переменная y^5 должна быть принята за новую независимую переменную. Поскольку производные функций y^5 и y^4 в силу системы (15) задаются выражениями $\dot{y}^5 = u^1$, $\dot{y}^4 = 6u$, то линеаризующая замена управления в системе (15) имеет вид

$$v = 6u/u^1.$$

Указанными заменами система (15) преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x, u, u^1) : u \neq 0, u^1 \neq 0\}$ в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = y^4, \quad (y^4)' = v,$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y, v) : v \neq 0\}$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда исходная нелинейная система является аффинной по управлению, т.е. рассмотрим продолжение

$$\Sigma_{\text{aff},1} : \quad \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad \dot{u} = u^1$$

системы Σ_{aff} . Отметим, что $(x, u) \in X \times \mathbb{R}$ – состояние системы $\Sigma_{\text{aff},1}$, $u^1 \in \mathbb{R}$ – управление. Связь между A -орбитальной линейризуемостью системы $\Sigma_{\text{aff},1}$ и A -орбитальной линеаризуемостью системы Σ_{aff} устанавливается в следующей теореме.

Теорема 4. Если система $\Sigma_{\text{aff},1}$ A -орбитально линеаризуема в окрестности точки $(x_0, u_0) \in X \times \mathbb{R}$, то система Σ_{aff} A -орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 .

Доказательство. Сопоставим аффинной системе $\Sigma_{\text{aff},1}$ векторные поля

$$f_0 = \sum_{i=1}^n (f^i(x) + g^i(x)u) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_1 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Из A -орбитальной линейризуемости системы $\Sigma_{\text{aff},1}$ в окрестности точки (x_0, u_0) вытекает, что $f_0(x_0, u_0)$ и $f_1(x_0, u_0)$ линейно независимы. Следовательно, $f(x_0) + g(x_0)u_0 \neq 0$. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $f^n(x_0) + g^n(x_0)u_0 \neq 0$. Тогда кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}} = (\text{span}_{C^\infty}\{f_0, f_1\})^\perp$ имеет вид $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}} = \text{span}_{C^\infty}\{\omega^1, \dots, \omega^{n-1}\}$, где дифференциальные 1-формы ω^i задаются выражениями $\omega^i = (f^n(x) + g^n(x)u) dx^i - (f^i(x) + g^i(x)u) dx^n$, $i = \overline{1, n-1}$. Построим кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1 = \{\omega \in \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}} : d\omega \equiv 0 \bmod \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}\}$. Будем искать формы, порождающие $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1$, в виде $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \omega^i$, где $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ – гладкие функции, подлежащие определению. Нетрудно видеть, что справедливы сравнения

$$d\omega^i \equiv g^n(x) du \wedge dx^i - g^i(x) du \wedge dx^n \bmod \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Поэтому соотношение $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} = 0$ после алгебраических преобразований приводит к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \begin{vmatrix} f^i(x) & g^i(x) \\ f^n(x) & g^n(x) \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Так как система $\Sigma_{\text{aff},1}$ A -орбитально линеаризуема, то кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1$ в окрестности точки (x_0, u_0) имеет постоянный ранг $n-2$. Следовательно, хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, n-1\}$ коэффициент при μ_i отличен от нуля в точке x_0 . Для определённости предположим, что определитель

$$\begin{vmatrix} f^{n-1}(x_0) & g^{n-1}(x_0) \\ f^n(x_0) & g^n(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выразив из (16) функцию μ_{n-1} и подставив полученное соотношение в формулу $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \omega^i$, получим, что кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1$ имеет вид

$$\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1 = \text{span}_{C^\infty} \left\{ \begin{vmatrix} dx^i & dx^{n-1} & dx^n \\ f^i(x) & f^{n-1}(x) & f^n(x) \\ g^i(x) & g^{n-1}(x) & g^n(x) \end{vmatrix}, i = \overline{1, n-2} \right\}.$$

Таким образом, $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1$ является кораспределением на множестве X . Поскольку система $\Sigma_{\text{aff},1}$ A -орбитально линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0) , кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^j$, $j = \overline{1, n-1}$, имеют постоянный ранг в окрестности точки x_0 и $\mathcal{CI}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^{n-2}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0, u_0)$.

С аффинной системой Σ_{aff} ассоциировано кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}} = (\text{span}_{C^\infty}\{f, g\})^\perp$. Нелегко проверить, что имеет место равенство $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}} = \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1$. Отсюда вытекает, что для всех $j = \overline{0, n-2}$ справедливы соотношения $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}}^j = \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^{j+1}$. Следовательно, кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}}^j$, $j = \overline{0, n-2}$, имеют постоянный ранг в окрестности точки x_0 .

Покажем, что $\mathcal{CI}_{\Sigma_{\text{aff}}}^{n-3}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}}(x_0)$. Предположив противное, получим $\mathcal{CI}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^{n-2}(x_0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1(x_0)$. Согласно правилу построения производного флага $\mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^1(x_0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0, u_0)$, поэтому приходим к включению $\mathcal{CI}_{\Sigma_{\text{aff},1}}^{n-2}(x_0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff},1}}(x_0, u_0)$, являющемуся противоречием. Таким образом, $\mathcal{CI}_{\Sigma_{\text{aff}}}^{n-3}(x_0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_{\text{aff}}}(x_0)$. Согласно теореме 1 система Σ_{aff} A -орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 .

Замечание 3. Таким образом, из A -орбитальной линеаризуемости однократного продолжения аффинной системы Σ_{aff} в окрестности точки (x_0, u_0) следует A -орбитальная линеаризуемость самой системы Σ_{aff} в окрестности точки x_0 . Как видно из теоремы 3 и следующего за ней примера, свойство, установленное в теореме 4, является характерной особенностью аффинных систем. Для систем, не аффинных по управлению, однократное продолжение может быть линеаризуемым и в случае, если исходная система не линеаризуема в классе преобразований (4).

5. Линеаризация на основе k -кратного продолжения. Рассмотрим теперь, наряду с системой Σ , систему, полученную из Σ её k -кратным продолжением:

$$\Sigma_k: \quad \dot{x} = F(x, u^0), \quad \dot{u}^0 = u^1, \quad \dots, \quad \dot{u}^{k-1} = u^k.$$

Введём обозначение $\bar{u} = (u^0, \dots, u^{k-1})$ и отметим, что $(x, \bar{u}) \in M \times \mathbb{R}^{k-1}$ – состояние системы Σ_k , а $u^k \in \mathbb{R}$ – управление. Система Σ_k является аффинной по управлению. Будем рассматривать задачу A -орбитальной линеаризации системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$. A -орбитальная линеаризуемость системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$ означает существование окрестности $V(x_0, \bar{u}_0)$ точки $(x_0, \bar{u}_0)$, для которой найдутся невырожденная матрица $A = (\alpha_j^i)_{j=0,1}^{i=0,1}$, $\alpha_j^i \in C^\infty(V(x_0, \bar{u}_0))$, и диффеоморфизм $\Phi: V(x_0, \bar{u}_0) \rightarrow \Phi(V(x_0, \bar{u}_0))$ такие, что заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_0^0(x, \bar{u}) + \alpha_1^0(x, \bar{u})u^k,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha_0^1(x, \bar{u}) + \alpha_1^1(x, \bar{u})u^k}{\alpha_0^0(x, \bar{u}) + \alpha_1^0(x, \bar{u})u^k}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x, \bar{u})$ система Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$ преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x, \bar{u}, u^k) : (x, \bar{u}) \in V(x_0, \bar{u}_0), \alpha_0^0(x, \bar{u}) + \alpha_1^0(x, \bar{u})u^k \neq 0\}$ в систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \dots, \quad (y^{n+k-2})' = y^{n+k-1}, \quad (y^{n+k-1})' = v, \quad (y^{n+k})' = 1, \quad (17)$$

определённую на множестве $M_{yv} = \{(y, v) : y \in \Phi(V(x_0, \bar{u}_0)), \alpha_1^1(\Phi^{-1}(y)) - \alpha_1^0(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$. В системе (17) переменную состояния y^{n+k} можно рассматривать как независимую переменную, а саму систему (17) можно считать линейной управляемой системой $(n+k-1)$ -го порядка

$$(y^1)' = y^2, \quad \dots, \quad (y^{n+k-2})' = y^{n+k-1}, \quad (y^{n+k-1})' = v.$$

Выясним связь между A -орбитальной линеаризуемостью системы Σ_k , $k \geq 2$, и A -орбитальной линеаризуемостью системы Σ_1 .

Теорема 5. Пусть система Σ_k , $k \geq 2$, A -орбитально линеаризуема в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0) \in M \times \mathbb{R}^{k-1}$. Тогда система Σ_1 A -орбитально линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0^0) .

Доказательство. Аффинной системе Σ_k соответствуют векторные поля

$$\tilde{f}_0 = \sum_{i=1}^n F^i(x, u^0) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=0}^{k-2} u^{l+1} \frac{\partial}{\partial u^l}, \quad \tilde{f}_1 = \frac{\partial}{\partial u^{k-1}}.$$

Из A -орбитальной линейизуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$ следует, что векторы $\tilde{f}_0(x_0, \bar{u}_0)$ и $\tilde{f}_1(x_0, \bar{u}_0)$ линейно независимы.

Покажем сначала, что невозможен случай $F(x_0, u_0^0) = 0$. Предположим противное. Тогда из линейной независимости векторов $\tilde{f}_0(x_0, \bar{u}_0)$ и $\tilde{f}_1(x_0, \bar{u}_0)$ вытекает существование номера $\rho \in \{1, \dots, k-1\}$ такого, что $u_0^\rho \neq 0$. Покажем, что из A -орбитальной линейизуемости системы Σ_k следует условие $u_0^1 \neq 0$. Предположим, что это не так, и пусть $r \in \{2, \dots, k-1\}$ – наименьший номер, удовлетворяющий условию $u_0^r \neq 0$. В этом случае аннулятором распределения $\mathcal{F}_{\Sigma_k} = \text{span}_{C^\infty} \{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1\}$ является кораспределение

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k} = \text{span}_{C^\infty} \{\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^n; u^r du^l - u^{l+1} du^{r-1}, l = \overline{0, k-2}, l \neq r-1\},$$

где $\tilde{\omega}^i = u^r dx^i - F^i(x, u^0) du^{r-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Построение производного флага кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ даёт следующий результат:

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^j = \text{span}_{C^\infty} \{\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^n; u^r du^l - u^{l+1} du^{r-1}, l = \overline{0, k-j-2}, l \neq r-1\}, \quad j = \overline{0, k-2-r},$$

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1-r} = \text{span}_{C^\infty} \{\tilde{\omega}^1, \dots, \tilde{\omega}^n; u^r du^l - u^{l+1} du^{r-1}, l = \overline{0, r-2}\}.$$

Найдём кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-r}$. Обозначим через

$$\tilde{\omega}^i = u^r du^{i-n-1} - u^{i-n} du^{r-1}, \quad i = \overline{n+1, n+r-1},$$

последние $r-1$ форм, порождающих кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1-r}$. Будем искать формы, порождающие кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-r}$ в виде $\omega = \sum_{i=1}^{n+r-1} \mu_i \tilde{\omega}^i$, где $\mu_1, \dots, \mu_{n+r-1}$ – гладкие функции, подлежащие определению из условия $\sum_{i=1}^{n+r-1} \mu_i d\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{n+r-1} = 0$. Поскольку

$$d\tilde{\omega}^i \equiv \begin{cases} du^r \wedge dx^i, & i = \overline{1, n}, \\ du^r \wedge du^{i-n-1}, & i = \overline{n+1, n+r-1}, \end{cases} \mod \mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1-r},$$

то равенство $\sum_{i=1}^{n+r-1} \mu_i d\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^{n+r-1} = 0$ после алгебраических преобразований приводит к уравнению

$$\mu_1 F^1(x, u^0) + \dots + \mu_n F^n(x, u^0) + \mu_{n+1} u^1 + \dots + \mu_{n+r-1} u^{r-1} = 0$$

относительно $\mu_1, \dots, \mu_{n+r-1}$. Так как $F(x_0, u_0^0) = 0$ и $u_0^1 = \dots = u_0^{r-1} = 0$, в точке $(x_0, \bar{u}_0)$ полученное уравнение имеет $n+r-1$ линейно независимых решений. Как следствие, ранг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-r}$ в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$ не может быть равен $n+r-2$. Отсюда вытекает, что система Σ_k не является A -орбитально линейизуемой в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$. Полученное противоречие доказывает, что $u_0^1 \neq 0$.

Нетрудно убедиться в том, что если $u_0^1 \neq 0$, то:

– кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k} = \text{span}_{C^\infty} \{\hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^n; u^1 du^l - u^{l+1} du^0, l = \overline{1, k-2}\},$$

где $\hat{\omega}^i = u^1 dx^i - F^i(x, u^0) du^0$, $i = \overline{1, n}$;

– первыми $k-2$ элементами производного флага кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ являются кораспределения

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^j = \text{span}_{C^\infty} \{\hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^n; u^1 du^l - u^{l+1} du^0, l = \overline{1, k-j-2}\}, \quad j = \overline{0, k-3};$$

– $(k-1)$ -м элементом производного флага кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$ является кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-2} = \text{span}_{C^\infty} \{\hat{\omega}^1, \dots, \hat{\omega}^n\}$.

Будем искать формы, порождающие кораспределение $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1}$, в виде $\omega = \sum_{i=1}^n \mu_i \hat{\omega}^i$, где $\mu_1, \dots, \mu_n$ — гладкие функции, которые необходимо найти из условия $\sum_{i=1}^n \mu_i d\hat{\omega}^i \wedge \hat{\omega}^1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}^n = 0$. Поскольку $d\hat{\omega}^i \equiv du^1 \wedge dx^i \pmod{\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-2}}$, то из соотношения $\sum_{i=1}^n \mu_i d\hat{\omega}^i \wedge \hat{\omega}^1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}^n = 0$ получаем уравнение

$$\mu_1 F^1(x, u^0) + \dots + \mu_n F^n(x, u^0) = 0$$

относительно $\mu_1, \dots, \mu_n$. Так как $F(x_0, u_0^0) = 0$, то в точке (x_0, u_0^0) полученное уравнение имеет n линейно независимых решений. Следовательно, ранг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1}$ в окрестности этой точки не может быть равен $n - 1$. Этот результат противоречит A -орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$.

Таким образом, возможен лишь случай, когда $F(x_0, u_0^0) \neq 0$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $F^n(x_0, u_0^0) \neq 0$. Тогда аннулятором распределения $\mathcal{F}_{\Sigma_k}$ является кораспределение

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k} = \text{span}_{C^\infty} \{\omega^1, \dots, \omega^{n-1}; F^n(x, u^0) du^l - u^{l+1} dx^n, l = \overline{0, k-2}\},$$

где $\omega^i = F^n(x, u^0) dx^i - F^i(x, u^0) dx^n$, $i = \overline{1, n-1}$. Построим производный флаг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_k}$. Непосредственные вычисления показывают, что его первые k элементов имеют вид

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^j = \text{span}_{C^\infty} \{\omega^1, \dots, \omega^{n-1}; F^n(x, u^0) du^l - u^{l+1} dx^n, l = \overline{0, k-j-2}\}, \quad j = \overline{0, k-2},$$

$$\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1} = \text{span}_{C^\infty} \{\omega^1, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

Таким образом, $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1}$ является кораспределением на множестве M . Нетрудно видеть, что $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1} = \mathcal{P}^\perp = \mathcal{I}_{\Sigma_1}$.

Согласно теореме 1 из A -орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$ следует, что ранги кораспределений $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^j$, $j = \overline{k-1, n+k-2}$, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0^0) и $\mathcal{CI}_{\Sigma_k}^{n+k-3}(x_0, u_0^0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_k}(x_0, \bar{u}_0)$. Так как $\mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1} = \mathcal{I}_{\Sigma_1}^0$, то ранги кораспределений $\mathcal{I}_{\Sigma_1}^j$, $j = \overline{0, n-1}$, составляющих производный флаг кораспределения $\mathcal{I}_{\Sigma_1}$, постоянны в окрестности точки (x_0, u_0^0) . Таким образом, условие 1) теоремы 3 выполнено. Покажем, что кораспределение $\mathcal{CI}_{\Sigma_1}^{n-2}$ удовлетворяет условию 2) теоремы 3. Предположив, что $\mathcal{CI}_{\Sigma_1}^{n-2}(x_0, u_0^0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_1}^0(x_0, u_0^0)$, получим включение

$$\mathcal{CI}_{\Sigma_k}^{n+k-3}(x_0, u_0^0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_k}^{k-1}(x_0, u_0^0) \subset \mathcal{I}_{\Sigma_k}(x_0, \bar{u}_0).$$

Полученный результат противоречит A -орбитальной линеаризуемости системы Σ_k в окрестности точки $(x_0, \bar{u}_0)$. Таким образом, $\mathcal{CI}_{\Sigma_1}^{n-2}(x_0, u_0^0) \not\subset \mathcal{I}_{\Sigma_1}(x_0, u_0^0)$, и это означает, что система Σ_1 A -орбитально линеаризуема в окрестности точки (x_0, u_0^0) .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems // Proc. of IFAC Congress. Helsinki, 1978. P. 1115–1120.
2. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. P. 517–522.
3. Hunt L.R., Su R. Linear equivalents of nonlinear time-varying systems // Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems. 1981. P. 119–123.
4. Gardner R.B., Shadwick W.F. The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form // IEEE Trans. on Automat. Control. 1992. V. 37. № 2. P. 224–230.
5. Krener A. Approximate linearization by state feedback and coordinate change // Systems and Control Lett. 1984. № 5. P. 181–185.

6. *Marino R.* On the largest feedback linearizable subsystem // *Systems and Control Lett.* 1986. № 6. P. 345–351.
7. *Isidori A.* *Nonlinear Control Systems.* London, 1995.
8. *Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P.* Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples // *Int. J. of Control.* 1995. V. 61. P. 1327–1361.
9. *Charlet B., Levine J., Marino R.* On dynamic feedback linearization // *System Control Lett.* 1989. V. 13. P. 143–151.
10. *Sampei M., Furuta K.* On time scaling for nonlinear systems: application to linearization // *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1986. V. 31. P. 459–462.
11. *Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P.* A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1999. V. 44. № 5. P. 922–937.
12. *Kiss B., Szadeczký-Kardoss E.* Tracking control of the orbitally flat kinematic car with a new time-scaling input // 46th IEEE Conf. on Decision and Control. New Orleans, 2007. P. 1969–1974.
13. *Vollmer U., Raisch J.* Control of batch cooling crystallisers based on orbital flatness // *Int. J. of Control.* 2003. V. 76. P. 1635–1643.
14. *Respondek W.* Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // *Proc. of the IFAC Sympos. on Nonlinear Control Systems.* Enschede, 1998. P. 499–504.
15. *Фетисов Д.А.* А-орбитальная линеаризация аффинных систем // *Дифференц. уравнения.* 2018. Т. 54. № 11. С. 1518–1532.
16. *Guay M.* An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // *Systems and Control Lett.* 1999. V. 38. № 4–5. P. 271–281.
17. *Li S.-J., Respondek W.* Orbital feedback linearization for multi-input control systems // *Int. J. of Robust and Nonlin. Control.* 2015. V. 25. № 9. P. 1352–1378.
18. *Fetisov D.A.* A-orbital feedback linearization of multiinput control affine systems // *Int. J. of Robust and Nonlin. Control.* 2020. V. 30. № 14. P. 5602–5627.
19. *Fetisov D.A.* On some approaches to linearization of affine systems // *IFAC-PapersOnline.* 2019. V. 52. № 16. P. 700–705.

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 09.10.2022 г.
После доработки 09.10.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.624

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСФОРМАНТЫ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

© 2023 г. А. А. Бобылев

Рассмотрен оператор Пуанкаре–Стеклова для изотропной стратифицированной упругой полосы, отображающий на части границы нормальные напряжения в нормальные перемещения. Для построения трансформанты ядра интегрального представления этого оператора предложен новый подход. Получена вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дано определение и доказаны существование и единственность обобщённого решения задачи. Построен итерационный метод решения вариационных уравнений и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Аппроксимация вариационных уравнений проводилась методом конечных элементов. В результате на каждом шаге итерационного метода требуется решить две независимые системы линейных алгебраических уравнений, для решения которых применяется метод прогонки. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость. Проведена верификация разработанного вычислительного алгоритма и даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток.

DOI: 10.31857/S0374064123010107, EDN: OCYQEZ

Введение. Операторы Пуанкаре–Стеклова, отображающие на части границы рассматриваемой области граничные условия одного типа в граничные условия другого типа, используются для решения различных классов краевых задач математической физики, в частности, в методах разделения областей [1, гл. III] и композиции [2, § 17]. Применение операторов Пуанкаре–Стеклова к решению контактных задач теории упругости с односторонними связями позволяет получить вариационные формулировки этих задач в виде граничных вариационных неравенств и задач минимизации граничных функционалов, при численном решении которых требуется дискретизировать лишь часть границы области – зону возможного контакта, что существенно уменьшает размерность получаемых дискретных задач и снижает вычислительные затраты [3, 4]. В настоящей работе рассматривается оператор Пуанкаре–Стеклова для изотропной стратифицированной упругой полосы, отображающий на части Γ_q границы полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения.

Одним из основных подходов к решению плоских задач теории упругости для бесконечной полосы является применение интегрального преобразования Фурье [5, гл. 1]. В результате для оператора Пуанкаре–Стеклова $Q : q_n \mapsto u_n$, отображающего на Γ_q нормальные напряжения q_n в нормальные перемещения u_n , можно получить следующее интегральное представление:

$$u_n(x_1) = \int_{\Gamma_q} g(x_1 - \xi_1) q_n(\xi_1) d\xi_1, \quad (1)$$

ядро которого имеет вид

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\alpha) \cos(\alpha s) d\alpha. \quad (2)$$

Далее, следуя [6], косинус-трансформанту Фурье $G(\alpha)$ ядра $g(s)$ интегрального представления (1) будем называть *передаточной функцией*.

В случае однородной полосы выражение для функции $G(\alpha)$ может быть получено аналитически [7, § 11]. Для стратифицированной полосы эту функцию удаётся построить с помощью численно-аналитической методики при специальной зависимости её упругих свойств по толщине, в частности, степенной или экспоненциальной зависимости [8, § 14.5]. В случае произвольного закона изменения упругих свойств по толщине используются приближённые подходы, основанные как на замене непрерывно-неоднородной полосы многослойной с кусочно-постоянной зависимостью упругих модулей от координаты [9], так и на прямом численном интегрировании краевых задач для систем дифференциальных уравнений по поперечной координате [6; 10, гл. 2, § 2]. Основные трудности реализации таких подходов обусловлены наличием экспоненциальных составляющих у фундаментальных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений, приводящих к неустойчивости численных процедур решения задач Коши и их дискретных аналогов и к плохой обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих при удовлетворении граничных условий. Анализ публикаций (см., например, [11, 12]) показал, что основным способом преодоления указанных трудностей является использование метода модулирующих функций, предложенного в [13]. Суть этого метода состоит в выделении в явном виде экспоненциальных составляющих при построении матрицы Грина, в результате чего проблема сводится к отысканию некоторых модулирующих функций ограниченной вариации.

В настоящей работе для построения трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова (передаточной функции $G(\alpha)$) предложен новый подход, основанный на использовании вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений. Постановка краевой задачи теории упругости, с помощью решения которой определяется оператор Пуанкаре–Стеклова, дана в п. 1. Краевая задача для трансформант перемещений, полученная в результате применения преобразования Фурье, приведена в п. 2. В п. 3 получена её вариационная формулировка, дано определение и доказаны существование и единственность обобщённого решения. Для решения полученных вариационных уравнений в п. 4 построен итерационный метод и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Аппроксимация вариационных уравнений проводилась в п. 5 методом конечных элементов. В п. 6 рассмотрен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость. Результаты верификации разработанного вычислительного алгоритма и рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток приведены в п. 7. В заключении указаны некоторые возможные обобщения предложенного подхода.

1. Постановка краевой задачи. Сформулируем краевую задачу, с помощью которой вводится исследуемый оператор Пуанкаре–Стеклова. Пусть изотропная стратифицированная упругая полоса толщины h занимает область $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \infty, 0 \leq x_2 \leq h\}$. Границу полосы $x_2 \equiv 0$ обозначим Γ_0 , а границу $x_2 \equiv h$ – через Γ_1 . Под $u_k(\mathbf{x})$, $\sigma_{kl}(\mathbf{x})$, $k, l = 1, 2$, будем понимать соответственно компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega$. Предполагается, что упругая полоса находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Параметры Ламе материала полосы являются произвольными ограниченными функциями координаты x_2 : $\lambda = \lambda(x_2)$ и $\mu = \mu(x_2)$. Требования к гладкости этих функций будут сформулированы ниже. Из физических соображений следует, что существуют постоянные $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$\lambda(x_2) \geq \lambda_0, \quad \mu(x_2) \geq \mu_0, \quad 0 \leq x_2 \leq h. \quad (3)$$

Напряженно-деформированное состояние полосы Ω описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \\ \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad \sigma_{22} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{2,2}. \end{aligned} \quad (4)$$

По границе Γ_0 полоса соединена с недеформируемым основанием. В случае полного сцепления граничные условия имеют вид

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \quad (5)$$

На части границы $\Gamma_q \subset \Gamma_1$ приложена нормальная нагрузка

$$\sigma_{22} = q, \quad \sigma_{21} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_q. \quad (6)$$

Остальная часть границы Γ_1 свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \setminus \Gamma_q. \quad (7)$$

Предполагается, что участок границы Γ_q является конечным, а главный вектор внешних усилий имеет ограниченную величину:

$$\text{diam } \Gamma_q < \infty, \quad \left| \int_{\Gamma_q} q d\Gamma_q \right| < \infty. \quad (8)$$

Для завершения постановки краевой задачи необходимо задать условия на бесконечности. Обычно в качестве таковых используются условия, характеризующие определённый порядок изменения перемещений и напряжений на бесконечности. Как правило, эти условия носят чисто математический характер. Более естественным является условие конечности потенциальной энергии деформации полосы

$$\int_{\Omega} [\lambda(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 2\mu(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})^2] d\Omega < \infty, \quad (9)$$

которое вполне замыкает постановку задачи и определяет поведение решения на бесконечности [7, § 1].

2. Применение преобразования Фурье. Введём преобразования Фурье от компонент перемещений и напряжений обычными формулами

$$\tilde{u}_k(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x_1, x_2) \exp(-i\alpha x_1) dx_1, \quad \tilde{\sigma}_{kl}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{kl}(x_1, x_2) \exp(-i\alpha x_1) dx_1. \quad (10)$$

Далее будем полагать, что все преобразования Фурье (10) существуют.

Умножим уравнения (4) на $\exp(-i\alpha x_1)$ и проинтегрируем по x_1 от $-\infty$ до ∞ . В результате получим систему равенств, которые после интегрирования по частям превращаются в следующую систему соотношений относительно трансформант $\tilde{u}_k$, $\tilde{\sigma}_{kl}$ и их производных, рассматриваемых как функции переменной x_2 :

$$\begin{aligned} i\alpha \tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}'_{12} &= 0, \quad i\alpha \tilde{\sigma}_{12} + \tilde{\sigma}'_{22} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{11} &= i\alpha(\lambda + 2\mu)\tilde{u}_1 + \lambda\tilde{u}'_2, \quad \tilde{\sigma}_{12} = \mu(\tilde{u}'_1 + i\alpha\tilde{u}_2), \quad \tilde{\sigma}_{22} = i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}'_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Исключив из полученной системы трансформанты напряжений $\tilde{\sigma}_{kl}$, сделав замену

$$\tilde{u}_1(\alpha, x_2) = v_1(\alpha, x_2), \quad \tilde{u}_2(\alpha, x_2) = iv_2(\alpha, x_2) \quad (12)$$

и положив, что

$$\lambda(x_2) \in C^1[0, h], \quad \mu(x_2) \in C^1[0, h], \quad (13)$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -(\mu v'_1)' + \alpha(\mu v_2)' + \alpha\lambda v'_2 + \alpha^2(\lambda + 2\mu)v_1 &= 0, \\ -((\lambda + 2\mu)v'_2)' - \alpha(\lambda v_1)' - \alpha\mu v'_1 + \alpha^2\mu v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Применим далее преобразование Фурье к граничным условиям (5)–(7), предполагая существование преобразования Фурье заданной на Γ_q функции $q(x_1)$:

$$\tilde{q}(\alpha) = \int_{\Gamma_q} q(x_1) \exp(-i\alpha x_1) dx_1. \quad (15)$$

В результате, с учётом (11)–(13), получим краевые условия для системы уравнений (14):

$$\begin{aligned} v_1(\alpha, 0) &= 0, \quad v_2(\alpha, 0) = 0, \\ -(\lambda(h) + 2\mu(h))v_2'(\alpha, h) - \alpha\lambda(h)v_1(\alpha, h) &= p(\alpha), \quad \mu(h)v_1'(\alpha, h) - \alpha\mu(h)v_2(\alpha, h) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$p(\alpha) = i\tilde{\sigma}_{22}(\alpha) = i\tilde{q}(\alpha). \quad (17)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. Если существуют преобразования Фурье (10) и (15), а также выполняются условия (13), то трансформанты компонент перемещений решения краевой задачи (3)–(9) с учётом (12) удовлетворяют краевой задаче (14), (16).

Определение 1. Решение краевой задачи (14), (16), принадлежащее классу функций $[C^2(0, h)]^2 \cap [C^1[0, h]]^2$, называют классическим решением.

Замечание 1. Из формул (1), (2), (12), (15)–(17) вытекает соотношение для определения передаточной функции $G(\alpha)$ с помощью решения краевой задачи (14), (16):

$$G(\alpha) = -v_2(\alpha, h)/p(\alpha). \quad (18)$$

Замечание 2. Если $\alpha = 0$, то рассматриваемая краевая задача (14), (16) распадается на две независимые краевые задачи относительно функций $v_1(x_2)$ и $v_2(x_2)$:

$$(\mu v_1')' = 0, \quad v_1(0) = 0, \quad v_1'(h) = 0, \quad (19)$$

$$((\lambda + 2\mu)v_2')' = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_2'(h) = -p(0)/(\lambda(h) + 2\mu(h)). \quad (20)$$

Очевидно, что краевая задача (19) имеет тривиальное решение $v_1 \equiv 0$. Вычислительные алгоритмы решения краевых задач типа (20) подробно рассмотрены в литературе по численным методам (см., например, [14, гл. 9]). Поэтому далее будем считать, что $\alpha \neq 0$.

3. Вариационная формулировка. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет ослабить требования (13) к гладкости исходных данных $\{\lambda(x_2), \mu(x_2)\}$ и определить обобщённое решение задачи. Введём необходимое для этого пространство вектор-функций

$$\mathbf{Z} = Z \times Z, \quad Z = \{z \in W_2^1(0, h) : z(0) = 0\}, \quad (21)$$

где $W_2^1(0, h)$ – пространство Соболева. Пространство $\mathbf{Z}$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(\mathbf{s}, \mathbf{z})_{\mathbf{Z}} = (s_1, z_1)_{W_2^1(0, h)} + (s_2, z_2)_{W_2^1(0, h)}, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{Z}. \quad (22)$$

Введём в рассмотрение вариационную задачу: для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ найти вектор-функцию $(v_1, v_2) \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющую системе вариационных уравнений

$$[\mu v_1', w_1'] - \alpha[\mu v_2, w_1'] + \alpha[\lambda v_2', w_1] + \alpha^2[(\lambda + 2\mu)v_1, w_1] = 0 \quad \text{для любой } w_1 \in Z,$$

$$[(\lambda + 2\mu)v_2', w_2'] + \alpha[\lambda v_1, w_2'] - \alpha[\mu v_1', w_2] + \alpha^2[\mu v_2, w_2] + p(\alpha)w_2(h) = 0 \quad \text{для любой } w_2 \in Z, \quad (23)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – стандартное скалярное произведение в $L_2(0, h)$;

$$\lambda(x_2) \in L_\infty(0, h), \quad \mu(x_2) \in L_\infty(0, h). \quad (24)$$

Теорема 2. *Классическое решение (v_1, v_2) краевой задачи (14), (16) является решением вариационной задачи (23).*

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 – две произвольные функции из Z . Умножим уравнения (14) соответственно на w_1 и w_2 , а результаты проинтегрируем по отрезку $[0, h]$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^h (\mu v_1')' w_1 dx_2 + \alpha \int_0^h (\mu v_2)' w_1 dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_2' w_1 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_1 w_1 dx_2 = 0, \\ & - \int_0^h ((\lambda + 2\mu) v_2')' w_2 dx_2 - \alpha \int_0^h (\lambda v_1)' w_2 dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_1' w_2 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h \mu v_2 w_2 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Первые два интеграла в каждом из полученных уравнений вычислим методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \mu v_1' w_1' dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_2 w_1' dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_2' w_1 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_1 w_1 dx_2 + \\ & + [(-\mu v_1' + \alpha \mu v_2) w_1]_0^h = 0, \\ & \int_0^h (\lambda + 2\mu) v_2' w_2' dx_2 + \alpha \int_0^h \lambda v_1 w_2' dx_2 - \alpha \int_0^h \mu v_1' w_2 dx_2 + \alpha^2 \int_0^h \mu v_2 w_2 dx_2 - \\ & - [((\lambda + 2\mu) v_2' + \alpha \lambda v_1) w_2]_0^h = 0. \end{aligned}$$

Учитывая далее краевые условия (16) и принадлежность функций w_1 и w_2 множеству Z , получаем вариационные уравнения (23). Теорема доказана.

Определение 2. Решение вариационной задачи (23) называют *обобщённым решением* краевой задачи (14), (16).

Используя известные приёмы [15, § 2.14], можно показать, что справедлива

Теорема 3. *Решение вариационной задачи (23), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщёнными), удовлетворяет (почти всюду) уравнениям (14) и краевым условиям (16).*

Введём на Z билинейные и линейную формы

$$\begin{aligned} a_1(v, w) &= [\mu v', w'] + \alpha^2 [(\lambda + 2\mu) v, w], \quad a_2(v, w) = [(\lambda + 2\mu) v', w'] + \alpha^2 [\mu v, w], \\ b_1(v, w) &= \alpha [\mu v, w'] - \alpha [\lambda v', w], \quad b_2(v, w) = \alpha [\mu v', w] - \alpha [\lambda v, w'], \quad l_2(w) = -p(\alpha) w(h). \end{aligned} \quad (25)$$

Лемма 1. *Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (3) и (24) билинейные формы $a_1(\cdot, \cdot)$ и $a_2(\cdot, \cdot)$ являются непрерывными и положительно определёнными на Z .*

Доказательство. Симметричность билинейных форм очевидна, непрерывность несложно показать, используя условие (24), а коэрцитивность – с учётом неравенств (3).

Лемма 2. *Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейные формы $b_1(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$ являются непрерывными на Z .*

Доказательство. Непрерывность билинейных форм несложно показать, используя условие (24), неравенство Коши–Буняковского и неравенство $rs \leq (r^2 + s^2)/2$ для любых $r, s \in \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Если существует преобразование Фурье (15), то линейная форма $l_2(\cdot)$ непрерывна на Z .*

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы вложения С. Л. Соболева $(W_2^1(0, h) \hookrightarrow C[0, h])$ [16, § 9].

С учётом (25) система вариационных уравнений (23) примет вид

$$\begin{aligned} a_1(v_1, w_1) - b_1(v_2, w_1) &= 0 \quad \text{для любой } w_1 \in Z, \\ a_2(v_2, w_2) - b_2(v_1, w_2) - l_2(w_2) &= 0 \quad \text{для любой } w_2 \in Z. \end{aligned} \quad (26)$$

Образую далее на Z билинейные и линейную формы

$$a(v, w) = a_1(v_1, w_1) + a_2(v_2, w_2), \quad b(v, w) = b_1(v_2, w_1) + b_2(v_1, w_2), \quad l(w) = l_2(w_2).$$

Используя леммы 1–3, несложно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 4. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (3) и (24) билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на Z .

Лемма 5. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$ является непрерывной на Z .

Лемма 6. Если существует преобразование Фурье (15), то линейная форма $l(\cdot)$ непрерывна на Z .

Введём на Z билинейную форму

$$k(v, w) = a(v, w) - b(v, w) \quad (27)$$

и рассмотрим вариационную задачу: для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ найти вектор-функцию $v \in Z$, удовлетворяющую вариационному уравнению

$$k(v, w) - l(w) = 0 \quad \text{для любой функции } w \in Z. \quad (28)$$

Лемма 7. Вариационное уравнение (28) эквивалентно системе уравнений (26).

Доказательство. Пусть $v = (v_1, v_2)$ – решение системы уравнений (26). Сложив эти уравнения, получим с учётом (27) вариационное уравнение (28). Обратно, выбрав в (28) $w = (w_1, 0)$, получим первое уравнение (26), а выбрав $w = (0, w_2)$ – второе уравнение (26). Лемма доказана.

Разрешимость вариационной задачи (28) зависит от свойств билинейной формы $k(\cdot, \cdot)$. Покажем, что эта билинейная форма является положительно определённой на Z .

Из лемм 4 и 5 следует

Лемма 8. Для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ при выполнении условий (24) билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной на Z .

Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 9. Билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является симметричной на Z .

Для доказательства коэрцитивности билинейной формы $k(\cdot, \cdot)$ на Z введём гильбертово пространство вектор-функций $Y = [L_2(0, h)]^4$, оснащённое скалярным произведением

$$(\hat{y}, \check{y})_Y = [\hat{y}_1, \check{y}_1] + [\hat{y}_2, \check{y}_2] + [\hat{y}_3, \check{y}_3] + [\hat{y}_4, \check{y}_4], \quad \hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4), \quad \check{y} = (\check{y}_1, \check{y}_2, \check{y}_3, \check{y}_4) \in Y, \quad (29)$$

и определим оператор $j : Z \rightarrow Y$ такой, что $jz = (z_1, z'_1, z_2, z'_2)$ для любого $z = (z_1, z_2) \in Z$.

Лемма 10. Оператор $j : Z \rightarrow Y$ является линейным инъективным изометрическим оператором.

Доказательство. Линейность и инъективность оператора j проверяется непосредственно, а из определений скалярных произведений (22) и (29) следует, что

$$(jz, jz)_Y = (z, z)_Z.$$

Лемма 11. Множество значений $R(j)$ оператора j является собственным замкнутым линейным подпространством в Y .

Доказательство. Линейность множества $R(j)$ очевидным образом следует из линейности оператора j , а замкнутость – из полноты пространства Z и изометричности оператора j . Постоянная вектор-функция $(0, 1, 0, 1) \in Y$ не принадлежит $R(j)$, следовательно, $R(j)$ является собственным подмножеством Y . Лемма доказана.

Зададим на $\mathbf{Y}$ билинейную форму

$$d(\hat{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{y}}) = (\mathbf{D}\hat{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{y}})_{\mathbf{Y}}, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{D}(x_2, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha^2(\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)) & 0 & 0 & -\alpha\lambda(x_2) \\ 0 & \mu(x_2) & \alpha\mu(x_2) & 0 \\ 0 & \alpha\mu(x_2) & \alpha^2\mu(x_2) & 0 \\ -\alpha\lambda(x_2) & 0 & 0 & \lambda(x_2) + 2\mu(x_2) \end{bmatrix}$$

– квадратная симметричная матрица-функция четвёртого порядка.

Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 12. Для любых $\hat{\mathbf{z}}, \check{\mathbf{z}} \in \mathbf{Z}$ выполняется равенство

$$k(\hat{\mathbf{z}}, \check{\mathbf{z}}) = d(j\hat{\mathbf{z}}, j\check{\mathbf{z}}). \quad (31)$$

Матрицу-функцию $\mathbf{D}(x_2, \alpha)$ при фиксированных значениях x_2 и α можно рассматривать как квадратную симметричную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Современные системы компьютерной алгебры позволяют аналитически вычислить её собственные значения и соответствующие им собственные векторы. В данной работе с помощью системы SageMath установлено, что справедлива

Лемма 13. При выполнении условий (3) и (24) матрица $\mathbf{D}(x_2, \alpha)$ для любого $\alpha \neq 0$ почти всюду на отрезке $[0, h]$ имеет четыре вещественных собственных значения:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = [(1 + \alpha^2)(\lambda + 2\mu) - \kappa]/2, \quad \omega_3 = \mu(1 + \alpha^2), \quad \omega_4 = [(1 + \alpha^2)(\lambda + 2\mu) + \kappa]/2,$$

которым соответствуют ортонормированные собственные векторы

$$\mathbf{f}_1 = (0, 1, 1/\alpha, 0)/\gamma_1, \quad \mathbf{f}_2 = (1, 0, 0, \theta - \vartheta)/\gamma_2,$$

$$\mathbf{f}_3 = (0, 1, -\alpha, 0)/\gamma_3, \quad \mathbf{f}_4 = (1, 0, 0, \theta + \vartheta)/\gamma_4,$$

где

$$\kappa = [(1 - \alpha^2)^2(\lambda + 2\mu)^2 + 4\alpha^2\lambda^2]^{1/2}, \quad \theta = (\lambda + 2\mu)(1 - \alpha^2)/(2\alpha\lambda), \quad \vartheta = \kappa/(2\alpha\lambda),$$

$$\gamma_1 = (1 + \alpha^2)^{1/2}/\alpha, \quad \gamma_2 = (1 + (\theta - \vartheta)^2)^{1/2}, \quad \gamma_3 = (1 + \alpha^2)^{1/2}, \quad \gamma_4 = (1 + (\theta + \vartheta)^2)^{1/2}.$$

Следствие 1. Для любого $\alpha \neq 0$ матрица $\mathbf{D}(x_2, \alpha)$ является неотрицательно определённой, а её собственные значения ограничены почти всюду на $[0, h]$ и удовлетворяют условиям

$$\omega_4 > \omega_3 \geq \omega_2 > \omega_1 = 0. \quad (32)$$

Следствие 2. Билинейная форма $d(\cdot, \cdot)$ является неотрицательной на $\mathbf{Y}$.

Из равенства (31) и следствия 2 вытекает, что билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ также является неотрицательной на $\mathbf{Z}$. Однако поскольку множество $R(j)$ является собственным подпространством в $\mathbf{Y}$ (лемма 11), можно доказать более сильное утверждение – билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является коэрцитивной на $\mathbf{Z}$.

Введём квадратную матрицу-функцию $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$ четвёртого порядка, столбцами которой являются векторы-функции $\mathbf{f}_n(x_2, \alpha)$, $n = \overline{1, 4}$. При фиксированных значениях x_2 и α матрицу-функцию $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$ можно рассматривать как квадратную матрицу четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Из известных результатов линейной алгебры [17, гл. 7] следует, что справедлива

Лемма 14. Матрица $\mathbf{F}(x_2, \alpha)$ для любого $\alpha \neq 0$ почти всюду на отрезке $[0, h]$ является ортогональной, т.е.

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^T \quad \text{и} \quad \|\mathbf{F}\mathbf{r}\|_{\mathbb{E}^4} = \|\mathbf{r}\|_{\mathbb{E}^4} \quad \text{для любого} \quad \mathbf{r} \in \mathbb{E}^4,$$

где $\mathbb{E}^4$ – евклидово пространство, и имеет место равенство

$$\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4).$$

Следствие 3. Для любого $\mathbf{r} \in \mathbb{E}^4$ и $\mathbf{p} = \mathbf{F}^T \mathbf{r}$ выполняются равенства

$$(\mathbf{D} \mathbf{r}, \mathbf{r})_{\mathbb{E}^4} = (\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{p}, \mathbf{p})_{\mathbb{E}^4} = \omega_2 p_2^2 + \omega_3 p_3^2 + \omega_4 p_4^2. \quad (33)$$

Теорема 4. Билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является коэрцитивной на $\mathbf{Z}$, т.е. существует постоянная $\varrho_z > 0$ такая, что

$$k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq \varrho_z \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{Z}}^2 \quad \text{для любой } \mathbf{z} \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_1 = \{\mathbf{z} \in \mathbf{Z} : \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{Z}} = 1\}$, тогда можно положить

$$\varrho_z = \inf_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_1} k(\mathbf{z}, \mathbf{z}).$$

Из соотношений (30), (31) и (33) следует, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{q} = \mathbf{F}^T j \mathbf{z}$ имеем

$$k(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = [\omega_2 q_2, q_2] + [\omega_3 q_3, q_3] + [\omega_4 q_4, q_4].$$

Из этого равенства и (32) следует, что $\varrho_z \geq 0$. Покажем, что $\varrho_z > 0$. Доказательство проведём методом от противного. Пусть $\varrho_z = 0$. Тогда, поскольку $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ ограничены почти всюду на $[0, h]$ (следствие 1), для любого $\varepsilon > 0$ существует $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in \mathbf{Z}_1$ такой, что для $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{F}^T j \hat{\mathbf{z}}$ выполняются неравенства

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_n] < \varepsilon, \quad n = 2, 3, 4, \quad (34)$$

где

$$\hat{q}_2 = (\hat{z}_1 + (\theta - \vartheta) \hat{z}_2') / \gamma_2, \quad (35)$$

$$\hat{q}_3 = (\hat{z}_1' - \alpha \hat{z}_2) / \gamma_3, \quad (36)$$

$$\hat{q}_4 = (\hat{z}_1 + (\theta + \vartheta) \hat{z}_2') / \gamma_4. \quad (37)$$

Из равенств (35) и (37) следует, что

$$\hat{z}_1 = (\theta(\gamma_2 \hat{q}_2 - \gamma_4 \hat{q}_4) + \vartheta(\gamma_2 \hat{q}_2 + \gamma_4 \hat{q}_4)) / (2\vartheta),$$

$$\hat{z}_2' = -(\gamma_2 \hat{q}_2 - \gamma_4 \hat{q}_4) / (2\vartheta).$$

Возведём обе части каждого из этих равенств в квадрат и проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. С помощью неравенства Коши–Буняковского и (34) несложно получить оценки

$$[\hat{z}_1, \hat{z}_1] < \hat{c}_1 \varepsilon, \quad [\hat{z}_2', \hat{z}_2'] < \hat{c}_4 \varepsilon, \quad (38)$$

где $\hat{c}_1 > 0$ и $\hat{c}_4 > 0$ – константы, не зависящие от ε , $\hat{\mathbf{q}}$ и, следовательно, от $\hat{\mathbf{z}}$.

Из тождества

$$\hat{z}_2(x_2) = \hat{z}_2(0) + \int_0^{x_2} \hat{z}_2'(\xi_2) d\xi_2,$$

учитывая, что $\hat{z}_2(0) = 0$, для $x_2 \in [0, h]$ с помощью неравенства Коши–Буняковского имеем неравенство

$$|\hat{z}_2(x_2)| \leq \int_0^h |\hat{z}_2'(\xi_2)| d\xi_2 \leq h^{1/2} [\hat{z}_2', \hat{z}_2']^{1/2},$$

из которого с учётом (38) следует оценка

$$[\hat{z}_2, \hat{z}_2] < \hat{c}_3 \varepsilon, \quad \hat{c}_3 = h^2 \hat{c}_4. \quad (39)$$

Далее из соотношения (36) имеем

$$\hat{z}'_1 = \gamma_3 \hat{q}_3 + \alpha \hat{z}_2.$$

Возведём обе части этого равенства в квадрат и проинтегрируем по отрезку $[0, h]$. С помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенств (34) и (39) получим оценку

$$[\hat{z}'_1, \hat{z}'_1] < \hat{c}_2 \varepsilon, \quad (40)$$

где $\hat{c}_2 > 0$ – константа, не зависящая от ε , $\hat{q}$ и, следовательно, от $\hat{z}$.

В результате из (38)–(40) следует, что

$$\|\hat{z}\|_{\mathbf{Z}}^2 < \hat{c} \varepsilon, \quad (41)$$

где $\hat{c} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 + \hat{c}_4 > 0$ – константа, не зависящая от ε и $\hat{z}$. Выбирая в (41) $\varepsilon < 1/\hat{c}$, получим неравенство $\|\hat{z}\|_{\mathbf{Z}} < 1$, что противоречит условию $\hat{z} \in \mathbf{Z}_1$. Теорема доказана.

Поскольку билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на $\mathbf{Z}$, а линейная форма $l(\cdot)$ – непрерывной на $\mathbf{Z}$, то из известных результатов (см. [2, гл. 2]) следуют

Теорема 5. *Решение вариационной задачи (28) существует и единственно.*

Теорема 6. *Вариационная задача (28) эквивалентна задаче минимизации функционала энергии: для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ найти вектор-функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ такую, что*

$$J(\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{w} \in \mathbf{Z}} \{J(\mathbf{w}) = k(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - 2l(\mathbf{w})\}. \quad (42)$$

4. Метод последовательных приближений. Для построения вычислительного алгоритма решения рассматриваемой задачи можно использовать метод Бубнова–Галёркина, применяя его непосредственно к решению вариационного уравнения (28), или метод Ритца для решения задачи минимизации функционала энергии (42). В данной работе используется альтернативный подход – метод последовательных приближений на основе принципа сжатых отображений.

Лемма 15. *Для фиксированного числа $\tau > 0$ существует оператор $S : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{s}$, отображающий $\mathbf{Z}$ в себя, такой, что*

$$a(\mathbf{s}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) - \tau(k(\mathbf{z}, \mathbf{w}) - l(\mathbf{w})) \quad \text{для любого } \mathbf{w} \in \mathbf{Z}. \quad (43)$$

Доказательство. Если зафиксировать $\mathbf{z}$, то из лемм 4, 6 и 8 следует, что правая часть (43) является линейным непрерывным функционалом на $\mathbf{Z}$. Утверждение леммы следует из теоремы Вишика–Лакса–Мильграма (см. [2, гл. 2, § 14]).

Теорема 7. *Вариационная задача (28) эквивалентна задаче нахождения неподвижной точки $\mathbf{v}$ оператора S :*

$$\mathbf{v} = S\mathbf{v}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}$ – решение вариационной задачи (28). Положив в (43) $\mathbf{z} = \mathbf{v}$, получим, что $\mathbf{s} = \mathbf{v}$. Обратно, пусть $\mathbf{v}$ – неподвижная точка $\mathbf{v}$ оператора S . Положив в (43) $\mathbf{s} = \mathbf{v}$ и $\mathbf{z} = \mathbf{v}$, получим, что $\mathbf{v}$ удовлетворяет (28). Теорема доказана.

Следствие 4. *Неподвижная точка оператора S не зависит от параметра $\tau > 0$.*

Получим условия, которым должен удовлетворять параметр τ , чтобы оператор S был оператором сжатия, т.е. для любых $\hat{z}, \check{z} \in \mathbf{Z}$ имело бы место неравенство

$$\|S\hat{z} - S\check{z}\| \leq \delta \|\hat{z} - \check{z}\|, \quad 0 < \delta < 1. \quad (44)$$

Пусть $\hat{s} = S\hat{z}$ и $\check{s} = S\check{z}$. Положив в (43) $z = \hat{z}$ и $w = \check{s} - \hat{s}$, а затем $z = \check{z}$ и $w = \hat{s} - \check{s}$, получим

$$\begin{aligned} a(\hat{s}, \check{s} - \hat{s}) &= a(\hat{z}, \check{s} - \hat{s}) - \tau(k(\hat{z}, \check{s} - \hat{s}) - l(\check{s} - \hat{s})), \\ a(\check{s}, \hat{s} - \check{s}) &= a(\check{z}, \hat{s} - \check{s}) - \tau(k(\check{z}, \hat{s} - \check{s}) - l(\hat{s} - \check{s})). \end{aligned}$$

Сложив эти два равенства, имеем

$$a(\bar{s}, \bar{s}) = a(\bar{z}, \bar{s}) - \tau k(\bar{z}, \bar{s}), \quad (45)$$

где $\bar{s} = \hat{s} - \check{s}$, $\bar{z} = \hat{z} - \check{z}$.

Билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на Z (лемма 4), поэтому её можно использовать в качестве скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_a$ на Z . Пространство с новым скалярным произведением обозначим Z_a . Норма в этом пространстве будет определяться равенством $\|z\|_a = a(z, z)^{1/2}$.

Поскольку билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на Z (леммы 8, 9 и теорема 4), несложно доказать, что справедлива

Лемма 16. *Билинейная форма $k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на Z_a , т.е. существуют такие постоянные $\varrho_a > 0$ и $\rho_a > 0$, что*

$$k(z, z) \geq \varrho_a \|z\|_a^2, \quad k(s, z) \leq \rho_a \|s\|_a \|z\|_a \quad \text{для любых } s, z \in Z_a. \quad (46)$$

Из теоремы Вишика–Лакса–Мильграма следует, что существует определённый единственным образом линейный непрерывный оператор K такой, что

$$k(s, z) = (Ks, z)_a, \quad \|K\|_a = \sup_{\|z\|_a=1} \|Kz\|_a \leq \rho_a. \quad (47)$$

Тогда из (45) вытекает, что

$$\|\bar{s}\|_a^2 = (\bar{z}, \bar{s})_a - \tau(K\bar{z}, \bar{s})_a = ((I_a - \tau K)\bar{z}, \bar{s})_a, \quad (48)$$

где I_a – единичный (тождественный) оператор в Z_a .

С помощью неравенства Коши–Буняковского из (48) имеем

$$\|\bar{s}\|_a^2 \leq \|(I_a - \tau K)\bar{z}\|_a \|\bar{s}\|_a. \quad (49)$$

Используя далее (46) и (47), получим оценку

$$\|(I_a - \tau K)\bar{z}\|_a^2 = \|\bar{z}\|_a^2 - 2\tau(K\bar{z}, \bar{z})_a + \tau^2 \|K\bar{z}\|_a^2 \leq (1 - 2\tau\varrho_a + \tau^2\rho_a^2) \|\bar{z}\|_a^2. \quad (50)$$

В результате из неравенств (49) и (50) следует, что

$$\|S\hat{z} - S\check{z}\| \leq (1 - 2\tau\varrho_a + \tau^2\rho_a^2)^{1/2} \|\hat{z} - \check{z}\|. \quad (51)$$

Очевидно, что если $\tau \in (0, 2\varrho_a/\rho_a^2)$, то $(1 - 2\tau\varrho_a + \tau^2\rho_a^2)^{1/2} < 1$ и, следовательно, выполняется условие (44). Таким образом, доказана

Теорема 8. *Оператор S , определённый формулой (43), является сжимающим для τ из интервала $(0, 2\varrho_a/\rho_a^2)$.*

Для нахождения неподвижной точки v оператора S используется принцип сжатых отображений – неподвижная точка отыскивается как предел функциональной последовательности $\{v^n\}$, $n = 0, 1, \dots$, возникающей при решении последовательности вариационных задач

$$a(v^{n+1}, w) = a(v^n, w) - \tau_{n+1}(k(v^n, w) - l(w)) \quad \text{для любого } w \in Z, \quad (52)$$

где $\tau_{n+1} > 0$ – итерационный параметр, который может изменяться от шага к шагу. Начальное приближение $v^0 \in Z$ выбирается произвольно.

Теорема 9. Если выполняются условия

$$\tilde{\tau} = \inf_{n>0} \tau_n > 0, \quad \hat{\tau} = \sup_{n>0} \tau_n < 2\varrho_a/\rho_a^2, \quad (53)$$

то итерационный метод (52) сходится при любом начальном приближении $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{Z}$ к решению вариационной задачи (28).

Доказательство. Поскольку билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и положительно определённой на $\mathbf{Z}$ (лемма 4), а из лемм 4, 6 и 8 вытекает, что правая часть (52) при фиксированном $\mathbf{v}^n$ является непрерывной линейной формой, то из теоремы Вишика–Лакса–Мильграма следует, что решение $\mathbf{v}^{n+1}$ вариационной задачи (52) существует и единственно. Обозначим через S_n оператор, определённый формулой (43) при $\tau = \tau_n$. Тогда $\mathbf{v}^{n+1} = S_{n+1}\mathbf{v}^n$ и из (51) следуют неравенства

$$\|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n\| \leq \delta \|\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}\| \quad \text{для } n > 0, \quad (54)$$

где

$$\delta = \max\{(1 - 2\tilde{\tau}\varrho_a + \tilde{\tau}^2\rho_a^2)^{1/2}, (1 - 2\hat{\tau}\varrho_a + \hat{\tau}^2\rho_a^2)^{1/2}\} < 1.$$

Существование и единственность предела последовательности $\{\mathbf{v}^n\}$ устанавливается с помощью (54) путём рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве принципа сжатых отображений (см. [2, гл. 1, § 4]). Переходя далее в (52) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и принимая во внимание непрерывность билинейных форм $a(\cdot, \cdot)$ и $k(\cdot, \cdot)$, а также условия (53), получаем утверждение теоремы.

Лемма 17. Вариационное уравнение (52) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} a_1(v_1^{n+1}, w_1) &= (1 - \tau_{n+1})a_1(v_1^n, w_1) + \tau_{n+1}b_1(v_2^n, w_1) \quad \text{для любого } w_1 \in Z, \\ a_2(v_2^{n+1}, w_2) &= (1 - \tau_{n+1})a_2(v_2^n, w_2) + \tau_{n+1}b_2(v_1^n, w_2) + \tau_{n+1}l_2(w_2) \quad \text{для любого } w_2 \in Z. \end{aligned} \quad (55)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Система уравнений (55) распадается на два независимых вариационных уравнения, каждое из которых однозначно разрешимо вследствие непрерывности и положительной определённости билинейных форм $a_1(\cdot, \cdot)$ и $a_2(\cdot, \cdot)$ на Z . Поэтому несложно показать, что справедлива

Лемма 18. Итерационный метод (52) эквивалентен итерационному методу

$$a_1(v_1^{n+1/2}, w_1) = b_1(v_2^n, w_1), \quad a_2(v_2^{n+1/2}, w_2) = b_2(v_1^n, w_2) + l_2(w_2) \quad \text{для любых } w_1, w_2 \in Z, \quad (56)$$

$$v_1^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})v_1^n + \tau_{n+1}v_1^{n+1/2}, \quad v_2^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})v_2^n + \tau_{n+1}v_2^{n+1/2}. \quad (57)$$

5. Аппроксимация вариационных задач. Для аппроксимации рассмотренных выше вариационных задач применим метод конечных элементов. Учитывая определение (21) пространства Z , для его аппроксимации используем конечномерное подпространство $Z^* \subset Z$ кусочно-линейных функций. Разобьём отрезок $[0, h]$ на $M - 1$ двухузловых конечных элемента первого порядка и применим стандартную процедуру метода Бубнова–Галёркина [14, гл. 9, § 10] к каждому из вариационных уравнений (56). В результате получим конечномерную аппроксимацию итерационного метода (56), (57):

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{V}_1^{n+1/2} = \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_2^n, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{V}_2^{n+1/2} = \mathbf{B}_2 \mathbf{V}_1^n + \mathbf{L}_2, \quad (58)$$

$$\mathbf{V}_1^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})\mathbf{V}_1^n + \tau_{n+1}\mathbf{V}_1^{n+1/2}, \quad \mathbf{V}_2^{n+1} = (1 - \tau_{n+1})\mathbf{V}_2^n + \tau_{n+1}\mathbf{V}_2^{n+1/2}, \quad (59)$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ – квадратные матрицы порядка M , полученные в результате аппроксимации билинейных форм $a_1(\cdot, \cdot)$, $a_2(\cdot, \cdot)$, $b_1(\cdot, \cdot)$ и $b_2(\cdot, \cdot)$ соответственно; $\mathbf{L}_2 \in \mathbb{R}^M$ – вектор, полученный в результате аппроксимации линейной формы $l_2(\cdot)$; $\mathbf{V}_1^m, \mathbf{V}_2^m \in \mathbb{R}^M$, $m = n, (n + 1)$, – векторы узловых значений искомых функций на соответствующем шаге итерационного метода; $\mathbf{V}_1^{n+1/2}, \mathbf{V}_2^{n+1/2} \in \mathbb{R}^M$ – вспомогательные векторы. Несложно показать, что $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2^T$.

Для вычисления элементов матриц A_1 , A_2 , B_1 и B_2 применяются квадратурные формулы. Тип используемых формул определяется конкретным законом изменения упругих свойств (функций $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$) по толщине полосы.

На каждом шаге итерационного метода (58), (59) требуется решить две независимые СЛАУ (58). Поскольку при использовании двухузловых конечных элементов первого порядка матрицы A_1 и A_2 являются трёхдиагональными [14, гл. 9, § 10], то для численного решения СЛАУ (58) применяется метод прогонки. Несложно показать, что в случае $\alpha \neq 0$ обе матрицы A_1 и A_2 имеют диагональное преобладание, а если $\alpha = 0$ – частичное диагональное преобладание. Следовательно, алгоритм метода прогонки является корректным и устойчивым [18, гл. II].

Применив далее метод Бубнова–Галёркина к вариационному уравнению (28), получим СЛАУ

$$KV = L, \quad (60)$$

где

$$K = A - B, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Лемма 19. Матрицы A_1 , A_2 , A и K являются положительно определёнными.

Доказательство. Поскольку $Z^* \subset Z$, то положительная определённость матриц A_1 , A_2 , A и K следует из положительной определённости билинейных форм $a_1(\cdot, \cdot)$, $a_2(\cdot, \cdot)$, $a(\cdot, \cdot)$ и $k(\cdot, \cdot)$ соответственно.

Установим условия, при которых итерационный метод (58), (59) сходится к решению СЛАУ (60). Непосредственно проверяется, что справедлива

Лемма 20. Итерационный метод (58), (59) эквивалентен итерационному методу

$$AV^{n+1} = AV^n - \tau_{n+1}(KV^n - L). \quad (61)$$

Замечание 3. Итерационный метод (61) представляет собой линейный одношаговый итерационный метод решения СЛАУ (60) с предобуславливателем – матрицей A^{-1} .

Теорема 10 [19, § 34]. Линейный одношаговый итерационный метод (61) сходится к решению СЛАУ (60), если выполняется условие

$$\sup_{n>0} \|T_n\|_2 < 1, \quad (62)$$

где $T_n = I - \tau_n A^{-1}K$ – матрица перехода n -го шага; I – единичная матрица порядка M ; $\|\cdot\|_2$ – спектральная норма матрицы.

Для определения диапазона значений параметра τ_n , для которых выполняется условие (62), используем обобщённое отношение Релея для пучка матриц (K, A) :

$$\Phi(V) = (KV, V)/(AV, V).$$

Пусть

$$\varrho = \min_{V \in Q, V \neq 0} \Phi(V), \quad \rho = \max_{V \in Q, V \neq 0} \Phi(V), \quad (63)$$

где $Q = Q \times Q$, $Q \subset \mathbb{E}^M$ – множество узловых значений функций из Z^* .

Поскольку матрицы A и K являются положительно определёнными, то справедливы следующие утверждения [20, гл. 15].

Лемма 21. Минимальное значение ϱ обобщённого отношения Релея положительно.

Лемма 22. Спектр матрицы $A^{-1}K$ принадлежит отрезку $[\varrho, \rho]$.

Из теоремы 10 с учётом лемм 21 и 22 следуют известные результаты [19, § 34].

Теорема 11. Линейный одношаговый итерационный метод (61) сходится к решению СЛАУ (60), если выполняется условие

$$\sup_{n>0} \tau_n < 2/\rho = \tau_{cr}.$$

Теорема 12. Для линейного стационарного одношагового итерационного метода (61) (метода простой итерации) асимптотически оптимальным будет значение параметра

$$\tau_{\text{opt}} = 2/(\varrho + \rho). \quad (64)$$

6. Алгоритм выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$. Для вычисления асимптотически оптимального значения τ_{opt} в соответствии с формулой (64) требуется найти минимальное ϱ и максимальное ρ значения обобщённого отношения Релея. Для решения задач (63) можно использовать степенной метод со сдвигами [20, гл. 15]. Учитывая лемму 21, при вычислении значения ρ сдвиг полагается равным нулю, а при вычислении ϱ – равным найденному значению ρ . Однако вычислительные затраты, оцениваемые по количеству операций умножения матрицы на вектор, для определения этих двух собственных значений соизмеримы с трудоемкостью самого итерационного метода (58), (59). Поэтому в данной работе разработан эвристический алгоритм выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$, обеспечивающий сходимость итерационного метода (58), (59).

При вычислении передаточной функции $G(\alpha)$ с помощью формулы (18) на некоторой дискретной сетке значений параметра α в качестве начального приближения для итерационного метода (58), (59), как правило, используется либо нулевой вектор, либо решение для соседнего значения α . Проведённые вычислительные эксперименты по исследованию сходимости стационарного ($\tau_n = \tau = \text{const}$) варианта метода показали, что при таком выборе начального приближения последовательность разностей $v_2^{n+1}(h) - v_2^n(h)$ является знакопостоянной при $\tau < \tau_{\text{opt}} - \varepsilon_\tau$ и знакопеременной, если $\tau_{\text{opt}} + \varepsilon_\tau < \tau < \tau_{\text{cr}}$, где $\varepsilon_\tau > 0$ – некоторая малая величина. При $\tau \geq \tau_{\text{cr}}$ указанная последовательность также является знакопеременной, однако возрастающей по абсолютной величине, т.е. итерационный процесс расходится. С учётом этого предлагается следующий алгоритм выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$.

Пусть определены приближение (v_1^n, v_2^n) и значение параметра τ_n . Используя схему (58), (59), вычислим два последующих приближения (v_1^{n+1}, v_2^{n+1}) и (v_1^{n+2}, v_2^{n+2}) , полагая $\tau_{n+2} = \tau_{n+1} = \tau_n$. Далее обозначим

$$\delta_{n+1} = v_2^{n+1}(h) - v_2^n(h), \quad \delta_{n+2} = v_2^{n+2}(h) - v_2^{n+1}(h).$$

Если выполняется условие

$$\delta_{n+1}\delta_{n+2} \geq -\omega\delta_{n+1}^2, \quad (65)$$

где $0 < \omega < 1$ – коэффициент сжатия итерационного метода, то два очередных шага считаются удачными, и итерационный процесс продолжается дальше. Если при этом левая часть неравенства (65) положительна, то значение параметра τ можно увеличить, положив

$$\tau_{n+4} = \tau_{n+3} = \theta\tau_n,$$

где $\theta > 1$ – коэффициент увеличения параметра τ .

Если условие (65) не выполняется, то необходимо повторить вычисление $(n+1)$ -го и $(n+2)$ -го приближений, положив

$$\tau_{n+2} = \tau_{n+1} = \vartheta\tau_n,$$

где $0 < \vartheta < 1$ – коэффициент уменьшения параметра τ .

7. Верификация вычислительного алгоритма. Разработанный вычислительный алгоритм построения передаточной функции реализован на языке FORTRAN 2008 в виде пакета модулей. Для верификации вычислительного алгоритма и программного обеспечения в качестве тестовых выбирались краевые задачи для следующих типов изотропных упругих полос:

- однородные полосы;
- непрерывно-неоднородные полосы, параметры Ламе материала которых являлись экспоненциальными функциями $\lambda(x_2) = \lambda_c \exp(\kappa x_2)$ и $\mu(x_2) = \mu_c \exp(\kappa x_2)$, где λ_c , μ_c и κ – константы;
- кусочно-однородные полосы с полностью сцепленными слоями.

Для упругих полос первого типа известно аналитическое выражение для передаточной функции [7, § 11], а для остальных строились численно-аналитические решения соответствующих краевых задач [8, § 14]. Анализ этих решений показал, что для рассматриваемого класса задач характерно следующее поведение решения: с ростом параметра α вблизи точки $x_2 = h$ возникает зона резкого изменения решения, ширина которой уменьшается по мере дальнейшего увеличения α . При решении таких задач методом конечных элементов целесообразно использовать адаптивные сетки.

В данной работе применялся следующий алгоритм построения сетки. Задавались общее количество конечных элементов и размер $l(\alpha)$ наименьшего конечного элемента, одним из узлов которого является точка $x_2 = h$. Размеры остальных вычислялись таким образом, чтобы образовывать геометрическую прогрессию по мере удаления элементов от точки $x_2 = h$. Эмпирически подобрана зависимость $l(\alpha) = 10^{-3}s$, где $s = 2\pi/\alpha$ – “длина волны”, соответствующая “волновому числу” α .

При наличии разрывов первого рода у функций $\lambda(x_2)$ и $\mu(x_2)$, а именно такие разрывы могут быть у модулей упругости реальных слоистых тел, сетка конечных элементов адаптировалась так, чтобы точки разрывов совпадали с узлами конечных элементов. Такой подход позволяет применять при вычислении элементов матриц A_1 , A_2 , B_1 и B_2 квадратурные формулы для непрерывных функций.

При использовании адаптивных сеток, состоящих из 200 конечных элементов, среднеквадратичные относительные расхождения численных решений, полученных с помощью разработанного алгоритма, с указанными выше решениями тестовых задач не превышали 10^{-5} при проведении вычислений с двойной точностью.

Для рассмотренного выше алгоритма выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$ на основе проведённых вычислительных экспериментов могут быть рекомендованы для использования следующие диапазоны значений параметров: $\omega = 0.4 - 0.6$, $\theta = 1.3 - 1.5$ и $\vartheta = 0.4 - 0.6$. В качестве примера для случая $\omega = 0.5$, $\theta = 1.4$, $\vartheta = 0.5$ в таблице приведена характерная зависимость общего количества итераций N с учётом повторения итераций при уменьшении параметра τ от начального значения параметра τ_0 . Здесь же указаны конечные значения параметра τ_N и количество итераций N_0 для стационарного итерационного метода ($\tau = \tau_0$). В качестве начального приближения решения использовался нулевой вектор. Для данного расчётного случая также были вычислены $\tau_{\text{opt}} = 1.0$ и $\tau_{\text{cr}} = 1.279$. Нетрудно видеть, что независимо от выбора τ_0 в процессе итераций параметр τ_n стремится к τ_{opt} . При отклонении начального значения τ_0 от τ_{opt} скорость сходимости нестационарного итерационного метода снижается, однако не так сильно, как в случае стационарного варианта. При отклонении τ_0 от τ_{opt} на пять порядков число итераций увеличилось менее чем в четыре раза.

Таблица. Результаты вычислительных экспериментов

τ_0	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
τ_N	0.89	1.21	0.80	1.06	0.72	1.00	0.82	0.72	0.94	1.60	1.43
N	84	68	56	42	30	26	36	44	48	54	62
N_0	$> 10^5$	$> 10^5$	28115	2808	277	26	–	–	–	–	–

В результате вычислительных экспериментов установлено, что при использовании одного из указанных выше вариантов начального приближения решения и предложенного алгоритма выбора последовательности параметров $\{\tau_n\}$ итерационный метод (58), (59) сходится для любого начального значения параметра τ_0 , изменяется лишь число итераций.

Отметим ещё одно экспериментально установленное свойство итерационного метода (58), (59). В таблице приведены данные расчётов для 200 конечных элементов. При изменении числа конечных элементов в диапазоне от 50 до 10^5 количество итераций как для нестационарного, так и стационарного вариантов итерационного метода оставалось неизменным. Этот факт можно объяснить удачным выбором предобуславливателя – матрицы A^{-1} , операция умножения которой на вектор выполняется путём решения соответствующей СЛАУ методом прогонки. Кроме того, не изменялись значения τ_{opt} и τ_{cr} .

Заключение. Использование вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений позволило разработать эффективный алгоритм вычисления трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы изотропной стратифицированной упругой полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения. Разработанный вычислительный алгоритм может быть применён и в более общем случае – при наличии на границе полосы касательных напряжений. Изменится лишь вид линейной формы $l(\mathbf{w})$.

Отметим также, что предложенный подход к вычислению передаточной функции может быть обобщен на случай слоистой полосы при неполном сцеплении слоёв и на случай, когда упругая стратифицированная полоса сцеплена с упругой однородной полуплоскостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М., 1983.
2. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., 2000.
3. Бобылев А.А. Применение метода сопряжённых градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2022. № 2. С. 154–172.
4. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // Прикл. математика и механика. 2022. Т. 86. № 3. С. 404–423.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., 1967.
6. Ватульян А.О., Плотников Д.К. К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // Прикл. математика и механика. 2021. Т. 85. № 3. С. 283–293.
7. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974.
8. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham, 2016.
9. Никишин В.С. Статические контактные задачи для многослойных упругих тел // Механика контактных взаимодействий. М., 2001. С. 212–233.
10. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М., 2006.
11. Aizikovich S.M., Galybin A.N., Krenev L.I. Semi-analytical solution for mode I penny-shaped crack in a soft inhomogeneous layer // Int. J. Sol. Struct. 2015. V. 53. P. 129–137.
12. Trubchik I., Evich L., Ladoshva E. Computational model of the deformation of thin gradient coating lying on nondeformable foundation // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1922. Art. 120011.
13. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 2011.
15. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела. М., 1983.
16. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 2002.
17. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск, 1997.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
19. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., 1984.
20. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М., 1983.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 18.09.2022 г.
После доработки 18.09.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

УДК 519.622.1

НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ НЕРАСТЯГИВАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

© 2023 г. И. П. Рязанцева

Введено понятие обобщённой неподвижной точки нерастягивающего оператора на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства. Для её нахождения построен регулирующий алгоритм в форме задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, установлены достаточные условия сильной сходимости получаемых приближений к нормальной обобщённой неподвижной точке при приближённом задании нерастягивающего оператора и выпуклого замкнутого множества, на котором находится искомая обобщённая неподвижная точка оператора. Приведены примеры параметрических функций, обеспечивающих сходимость приближений по норме гильбертова пространства к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора на выпуклом замкнутом множестве этого пространства.

DOI: 10.31857/S0374064123010119, EDN: ODDNEO

1. Постановка задачи. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H , Ω – выпуклое и замкнутое множество из H , $P_\Omega : H \rightarrow \Omega$ – оператор проектирования в H на Ω , $A : H \rightarrow H$ – нерастягивающий оператор на Ω , т.е.

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\| \quad \text{для любых } x, y \in \Omega. \quad (1)$$

Построим операторы $B = E - P_\Omega$, $C = E - AP_\Omega$, где $E : H \rightarrow H$ – единичный оператор в H . Поскольку оператор P_Ω в H является нерастягивающим (см., например, [1, § 1.3]), то с учётом (1) и [1, § 1.3] заключаем, что операторы B и C монотонны на H и обладают свойствами ограниченности и непрерывности, поскольку удовлетворяют условию Липшица.

Отметим, что на множестве Ω оператор $C = E - A$, а B – нулевой оператор.

Определение (ср. с [1, п. 1.11]). Точку $\bar{x} \in \Omega$ назовём *обобщённой неподвижной точкой оператора A на множестве $\Omega \subseteq H$* , если

$$(C\bar{x}, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \text{для любого } x \in \Omega, \quad \bar{x} \in \Omega. \quad (2)$$

Поскольку $D(C) = H$, то неравенство (2) эквивалентно неравенству (см. [1, лемма 1.11.4])

$$(Cx, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \text{для любого } x \in \Omega, \quad \bar{x} \in \Omega. \quad (3)$$

Приведём некоторое пояснение понятия обобщённой неподвижной точки.

Известно (см., например, [1, лемма 1.5.17]), что при всех $x \in H$ элемент $z = P_\Omega x$ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$(z - x, z - y) \leq 0 \quad \text{для любого } y \in \Omega.$$

Пусть x – неподвижная точка оператора $P_\Omega A$, т.е. $x = P_\Omega Ax$, $x \in \Omega$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$(x - Ax, x - y) \leq 0 \quad \text{для любых } x, y \in \Omega.$$

Таким образом, обобщённая неподвижная точка оператора A на множестве Ω в наших условиях совпадает с неподвижной точкой оператора $P_\Omega A$.

Свойство (1) оператора A не гарантирует существование у него неподвижной точки на Ω , а также не обеспечивает сильную сходимость итерационного процесса $x_{n+1} = Ax_n$ к неподвижной точке оператора A (см. [2, гл. 2, § 4]).

Пусть множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, тогда из (3) следуют выпуклость и замкнутость множества N . Ставится задача построения устойчивого метода нахождения некоторой точки из N .

2. Операторный метод регуляризации для задачи с точными данными. Пусть $0 \in \Omega$ и

$$(Cx, x) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geq r > 0, \quad x \in \Omega, \quad C = E - AP_\Omega. \quad (4)$$

Построим в пространстве H операторное уравнение

$$B\tilde{x}(t) + \beta(t)[C\tilde{x}(t) + \alpha(t)\tilde{x}(t)] = 0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (5)$$

Из свойств операторов B и C следует существование единственного решения уравнения (5) при всех $t \geq t_0$ [1, теорема 1.7.5; 3, § 18]. Исследуем поведение $\tilde{x}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Выберем некоторый элемент $x \in N \subset \Omega$. Поскольку $Bx = 0$ при всех $x \in \Omega$, то из (5) получаем равенство

$$\begin{aligned} (B\tilde{x}(t) - Bx, \tilde{x}(t) - x) + \beta(t)[(C\tilde{x}(t) - Cx, \tilde{x}(t) - x) + \\ + (Cx, \tilde{x}(t) - x) + \alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x)] = 0, \quad x \in N. \end{aligned} \quad (6)$$

Если $\tilde{x}(t) \in \Omega$, то условие (2) и монотонность отображений B и C приводят к неравенству

$$(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leq 0,$$

т.е.

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \|x\|, \quad \tilde{x}(t) \in \Omega, \quad x \in N. \quad (7)$$

Пусть теперь $\tilde{x}(t) \notin \Omega$. Умножив (5) скалярно на $\tilde{x}(t)$, имеем равенство

$$(B\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)) + \beta(t)(C\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)) + \alpha(t)\beta(t)\|\tilde{x}(t)\|^2 = 0. \quad (8)$$

Поскольку $0 \in \Omega$ и $B(0) = 0$, то первое слагаемое в (8) неотрицательно. Кроме того, $\tilde{x}(t) \neq 0$, так как $0 \in \Omega$, а $\tilde{x}(t) \notin \Omega$. Предполагая существование неограниченной величины $\tilde{x}(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$, состоящей из точек, не входящих в Ω , и учитывая (4), в (8) приходим к противоречию. Следовательно, принимая во внимание (7), делаем вывод об ограниченности $\tilde{x}(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$. Значит, $\tilde{x}(t) \rightharpoonup \bar{x} \in H$ (для упрощения записей обозначения для подсемейства не меняем).

Пусть

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = 0. \quad (9)$$

Теперь из (5) в силу ограниченности оператора C имеем сходимость $B\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Так как $B : H \rightarrow H$ — максимальный монотонный оператор (см. [1, теорема 1.4.6]), то из сходимостей $\tilde{x}(t) \rightharpoonup \bar{x}$, $B\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ в силу демизамкнутости оператора B вытекает равенство $B\bar{x} = 0$ (см. [1, § 1.4]).

Пусть x — произвольный элемент из Ω , тогда из (6) с учётом монотонности отображений B и C получаем неравенство

$$(Cx, \tilde{x}(t) - x) + \alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leq 0, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Отсюда, устремив t к бесконечности и приняв во внимание первое равенство в (9), а также ограниченность $\tilde{x}(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$, установим неравенство

$$(Cx, \bar{x} - x) \leq 0, \quad \bar{x} \in \Omega \quad \text{для любого} \quad x \in \Omega,$$

т.е. $\bar{x} \in N$.

Пусть теперь в (10) x – произвольный элемент из $N \subset \Omega$, $\bar{y}(t) = P_\Omega \tilde{x}(t) \in \Omega$, $t \geq t_0$, тогда (10) запишем в следующей эквивалентной форме:

$$(Cx, \bar{y}(t) - x) + (Cx, \tilde{x}(t) - \bar{y}(t)) + \alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leq 0.$$

В силу определения обобщённой неподвижной точки первое слагаемое в последнем выражении неотрицательно. Следовательно, имеет место неравенство

$$\alpha(t)(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leq \|Cx\| \|\tilde{x}(t) - \bar{y}(t)\|, \quad x \in N. \quad (11)$$

Используя определение оператора B , равенство (5), ограниченность $\tilde{x}(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$ и ограниченность оператора C , приходим к соотношениям

$$\|\tilde{x}(t) - \bar{y}(t)\| = \|\tilde{x}(t) - P_\Omega \tilde{x}(t)\| = \|B\tilde{x}(t)\| \leq \beta(t)c_1.$$

Здесь и далее c_k , $k \in \mathbb{N}$, – положительные постоянные. Теперь из (11) имеем оценку

$$(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t) - x) \leq c_2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, \quad x \in N, \quad (12)$$

или

$$\|\tilde{x}(t) - x\|^2 + (x, \tilde{x}(t) - x) \leq c_2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, \quad x \in N.$$

Приняв в последнем неравенстве $x = \bar{x}$, с учётом последнего предельного равенства из (9) и слабой сходимости $\tilde{x}(t)$ к $\bar{x}$ при $t \rightarrow \infty$ установим сходимость $\|\tilde{x}(t) - \bar{x}\|$ к нулю при $t \rightarrow \infty$. Теперь, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в (12), получим неравенство $\|\bar{x}\| \leq \|x\|$ при всех $x \in N$. Значит, $\bar{x}$ – обобщённая неподвижная точка оператора A на множестве Ω с минимальной нормой. Далее эту точку обозначаем через x^* . Следовательно, x^* – единственный элемент из N , определяемый соотношением

$$\|x^*\| = \min\{\|x\| : x \in N\} \quad (13)$$

и называемый *нормальной обобщённой неподвижной точкой оператора A на множестве Ω* .

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть $A : H \rightarrow H$ – нестягивающий на Ω оператор, Ω – выпуклое замкнутое множество из H , $0 \in \Omega$, множество N обобщённых неподвижных точек оператора A на Ω непусто, и имеют место условия (4), (9).

Тогда семейство решений $x(t)$ операторного уравнения (5) при $t \rightarrow \infty$ сходится по норме пространства H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке x^* оператора A на множестве Ω (см. (13)).

Обсудим связь сформулированного выше определения обобщённой неподвижной точки с понятием неподвижной точки как решения операторного уравнения $x = Ax$. Пусть $\bar{N}$ – непустое множество неподвижных точек оператора A , входящих в Ω . Если $z \in \text{int } \Omega$ и $z \in \bar{N}$, то из (3) нетрудно получить равенство $Cz = 0$ (см. [1, лемма 1.11.6]). Значит, $z \in \bar{N}$, если $z \in N \cap \text{int } \Omega$. Включение $\bar{N} \subseteq N$ очевидно. Множество $\bar{N}$ может быть пустым, а при этом $N \neq \emptyset$. Докажем это утверждение примером. Пусть $A : R \rightarrow R$ – оператор сдвига, т.е. $Ax = x + a$, $a > 0$, тогда $\bar{N} = \emptyset$ на любом выпуклом замкнутом множестве Ω . Но если $\Omega = \{x : x \leq b\}$, то $N = \{b\}$.

3. Непрерывный метод нахождения обобщённой неподвижной точки оператора на выпуклом замкнутом множестве. Пусть выполнены условия теоремы 1, а данные задачи, поставленной в п. 1, возмущены. Предположим, что вместо множества Ω известно семейство выпуклых замкнутых множеств $\{\Omega_t\}$, $t \geq t_0$, $\Omega_t \subseteq H$, причём

$$r(\Omega, \Omega_t) \leq \sigma(t), \quad (14)$$

где $r(\Omega, \Omega_t)$ – хаусдорфово расстояние в H между множествами Ω и Ω_t из H , $\sigma(t)$ – неотрицательная неубывающая непрерывная функция при $t \geq t_0$, $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Приближения оператора A задаются семейством отображений

$$\{A(t)\}, \quad A(t) : H \rightarrow H, \quad \Omega_t \subseteq D(A_t) = D(A) = H, \quad t \geq t_0,$$

и справедливы неравенства

$$\|A(t)x - Ax\| \leq \delta(t)g(\|x\|) \quad \text{для любых } x \in H \text{ и } t \geq t_0, \quad (15)$$

$$\|A(t)x - A(t)y\| \leq [1 + h(t)]\|x - y\|, \quad (16)$$

здесь $\delta(t)$ и $h(t)$ – функции того же класса, что и $\sigma(t)$; $g(s)$ ($s \geq 0$) – неотрицательная неубывающая функция.

Отметим, что в наших предположениях оператор $A(t) : H \rightarrow H$ может и не иметь обобщённой неподвижной точки на Ω_t .

Пусть $x \in H$, тогда при условии (14) верно неравенство

$$\|P_\Omega x - P_{\Omega_t} x\| \leq c\sqrt{\sigma(t)}, \quad (17)$$

где c – абсолютная постоянная для всех x , принадлежащих ограниченному множеству в H (см. [4, § 3.4]).

Для решения поставленной некорректной задачи будем использовать непрерывный метод регуляризации, сводящийся к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Выбор этого метода обусловлен тем, что имеется большой набор эффективных численных методов решения дифференциальных уравнений, а в начальных условиях задачи Коши можно учесть некоторую априорную информацию о искомом решении, если таковая имеется. Автору неизвестны работы, в которых изучалась бы предложенным методом поставленная в данной статье задача.

Построим дифференциальное уравнение с приближёнными данными

$$\frac{dy(t)}{dt} + B(t)y(t) + \beta(t)[C(t)y(t) + \alpha(t)y(t)] = 0 \quad (18)$$

и с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 \in H. \quad (19)$$

Здесь $B(t) = E - P_{\Omega_t}$, $C(t) = E - A(t)P_{\Omega_t}$, y_0 – произвольный элемент из H , $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – положительные дифференцируемые невозрастающие выпуклые вниз бесконечно малые при $t \rightarrow \infty$ функции, $t \geq t_0$. Следовательно, при $t \leq \tau$ справедливы неравенства (см. [5, § 10, гл. 2])

$$|\beta(t) - \beta(\tau)| \leq \beta'(t)(t - \tau), \quad |\alpha(t) - \alpha(\tau)| \leq \alpha'(t)(t - \tau).$$

Предполагаем, что оператор $A(t)$ непрерывен по t , а оператор $B(t)$ непрерывен по t в гильбертовом пространстве (см., например, [4, § 3.4]). Значит, в наших условиях непрерывность по t слагаемых из (18), не содержащих производную, имеет место. Справедливость условия Липшица для оператора $A(t)$ вытекает из (16), а для оператора $B(t)$ условие Липшица устанавливается на основе справедливости его для оператора проектирования в H на выпуклое замкнутое множество (см., например, [4, § 3.4]).

Теперь в наших предположениях делаем вывод об однозначной разрешимости задачи Коши (18), (19) при $t \geq t_0$ (см. [6, § 33.4]).

Умножив (18) скалярно на $y(t)$, имеем

$$(y'(t), y(t)) + (B(t)y(t), y(t)) + \beta(t)[(C(t)y(t), y(t)) + \alpha(t)\|y(t)\|^2] = 0. \quad (20)$$

Пусть верно неравенство

$$(B(t)y(t), y(t)) + \beta(t)[(C(t)y(t), y(t)) + \alpha(t)\|y(t)\|^2] \geq 0$$

при $\|y(t)\| \geq r_0 > 0$ и хотя бы достаточно больших t . Тогда из (20) при этих t получаем неравенство $(y'(t), y(t)) \leq 0$, т.е. $d(\|y(t)\|^2)/dt \leq 0$. Следовательно, $\|y(t)\|$ – ограниченная на множестве $[t_0, +\infty)$ функция, а значит, справедливо неравенство

$$\|y(t)\| \leq c_0 \quad \text{для любого } t \geq t_0, \quad c_0 > 0. \quad (21)$$

Далее считаем, что условие (21) выполнено.

Построим вспомогательное операторное уравнение с точными данными

$$B\tilde{x}(\tau) + \beta(\tau)[C\tilde{x}(\tau) + \alpha(\tau)\tilde{x}(\tau)] = 0, \quad \tau \geq t_0 \geq 0, \quad (22)$$

и на основании теоремы 1 утверждаем сильную сходимость $\tilde{x}(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ к нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на Ω .

Для проведения дальнейших исследований вычтем (22) из (18) и, умножив результат скалярно на $y(t) - \tilde{x}(\tau)$, придём к равенству

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dy(t)}{dt}, y(t) - \tilde{x}(\tau) \right) + (B(t)y(t) - B\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) + \\ & + (\beta(t)C(t)y(t) - \beta(\tau)C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) + (\alpha(t)\beta(t)y(t) - \alpha(\tau)\beta(\tau)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Определим скалярную функцию

$$\rho(t, \tau) = \frac{\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2}{2},$$

тогда

$$\rho'_t(t, \tau) = (y(t) - \tilde{x}(\tau), y'(t)).$$

Теперь, используя (23), найдём оценку сверху для $\rho(t, \tau)$ при $t \leq \tau$. Прежде всего отметим, что в наших условиях из доказательства теоремы 1 следует ограниченность в H семейства $\{\tilde{x}(t)\}$, $t \geq t_0$. Найдём оценки сверху для последних трёх слагаемых из (23). Учитывая монотонность операторов $B(t)$ при $t \geq t_0$, равенства $B(t) = E - P_{\Omega_t}$, $B = E - P_{\Omega}$, оценку (17), имеем соотношения

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t, \tau) &= (B(t)y(t) - B\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) = (B(t)y(t) - B(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) - \\ &- (B\tilde{x}(\tau) - B(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) \geq -\|B\tilde{x}(\tau) - B(t)\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| = \\ &= -\|P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau) - P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| \geq -c\sqrt{\sigma(t)}\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \Lambda_2(t, \tau) &= (\beta(t)C(t)y(t) - \beta(\tau)C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) = \\ &= \beta(t)(C(t)y(t) - C(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) - \beta(t)(C\tilde{x}(\tau) - C(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) - \\ &- [\beta(\tau) - \beta(t)](C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)). \end{aligned} \quad (25)$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (25). Определение оператора $C(t)$, оценка (16) и нерастяжимость оператора P_{Ω_t} позволяют записать неравенства

$$\begin{aligned} & (C(t)y(t) - C(t)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) = \\ &= \|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2 - (A(t)P_{\Omega_t}y(t) - A(t)P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) \geq \\ &\geq \|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2 - [1 + h(t)]\|P_{\Omega_t}y(t) - P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| \geq -2h(t)\rho(y(t), \tilde{x}(\tau)). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку $0 \in \Omega$ по условию, то свойство нерастяжимости оператора P_{Ω} обеспечивает выполнение неравенства

$$\|P_{\Omega}x\| \leq \|x\| \quad \text{для любого } x \in H.$$

Теперь, используя (15)–(17), запишем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} & \|C(t)\tilde{x}(\tau) - C\tilde{x}(\tau)\| = \|A(t)P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau) - AP_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\| \leq \\ & \leq \|A(t)P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau) - A(t)P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\| + \|A(t)P_{\Omega}\tilde{x}(\tau) - AP_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\| \leq \\ & \leq [1 + h(t)]\|P_{\Omega_t}\tilde{x}(\tau) - P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\| + \delta(t)g(\|P_{\Omega}\tilde{x}(\tau)\|) \leq \\ & \leq c_3([1 + h(t)]\sqrt{\sigma(t)} + \delta(t)) \leq c_4(\delta(t) + \sqrt{\sigma(t)}). \end{aligned} \quad (27)$$

В силу ограниченности оператора C , ограниченности семейств $\{y(t)\}$ (см. (21)) и $\{\tilde{x}(t)\}$ при $t \geq t_0$ делаем вывод о справедливости соотношений

$$[\beta(t) - \beta(\tau)](C\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) \geq -c_5|\beta(t) - \beta(\tau)| \geq -c_5\beta'(t)(t - \tau), \quad t \leq \tau. \quad (28)$$

Таким образом, в силу (25)–(28) установлена оценка

$$\Lambda_2(t, \tau) \geq -2h(t)\rho(y(t), \tilde{x}(\tau)) - c_6[\delta(t) + \sqrt{\sigma(t)} + \beta'(t)(t - \tau)], \quad t \leq \tau. \quad (29)$$

Оценим последнее слагаемое в (23):

$$\begin{aligned} \Lambda_3(t, \tau) &= (\alpha(t)\beta(t)y(t) - \alpha(\tau)\beta(\tau)\tilde{x}(\tau), y(t) - \tilde{x}(\tau)) \geq \\ &\geq \alpha(t)\beta(t)\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\|^2 - |\alpha(t)\beta(t) - \alpha(\tau)\beta(\tau)|\|\tilde{x}(\tau)\|\|y(t) - \tilde{x}(\tau)\| \geq \\ &\geq 2\lambda(t)\rho(t, \tau) - c_7\lambda'(t)(t - \tau), \quad \lambda(t) = \alpha(t)\beta(t), \quad t \leq \tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь, используя (24), (29) и (30), от (23) придём к неравенству

$$\rho'_t(t, \tau) \leq -2\lambda(t)\rho(t, \tau) + c_8\{\delta(t) + h(t) + \sqrt{\sigma(t)} + [\beta'(t) + \lambda'(t)](t - \tau)\}, \quad t \leq \tau. \quad (31)$$

Используя лемму 1 из [5, гл. 2, § 10], из (31) имеем оценку

$$\begin{aligned} \rho(t, \tau) &\leq c_9 \left[\exp \left(-2 \int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right) + \right. \\ &+ \left. \int_{t_0}^t \{\delta(\theta) + h(\theta) + \sqrt{\sigma(\theta)} + [\beta'(\theta) + \lambda'(\theta)](\theta - \tau)\} \exp \left(- \int_{\theta}^t \lambda(s) ds \right) d\theta \right], \quad t \geq t_0, \quad \theta \leq \tau. \end{aligned}$$

Положив здесь $t = \tau$, $\rho(\tau, \tau) = \bar{\rho}(\tau)$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau) &\leq c_9 \left[\exp \left(-2 \int_{t_0}^{\tau} \lambda(s) ds \right) + \int_{t_0}^{\tau} \{\delta(\theta) + h(\theta) + \sqrt{\sigma(\theta)} + [\beta'(\theta) + \lambda'(\theta)](\theta - \tau)\} \times \right. \\ &\times \left. \exp \left(\int_{t_0}^{\theta} \lambda(s) ds \right) d\theta \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} \lambda(s) ds \right) \right], \quad \lambda(t) = \alpha(t)\beta(t), \quad t \geq t_0, \quad \theta \leq \tau. \end{aligned}$$

Разобьём второе интегральное слагаемое в квадратных скобках правой части в нём на две части: в первой части подынтегральная функция содержит сумму $\delta(\theta) + h(\theta) + \sqrt{\sigma(\theta)}$, а во второй – $[\beta'(\theta) + \lambda'(\theta)](\theta - \tau)$. К первому полученному интегральному слагаемому применим правило Лопиталя один раз, а ко второму – дважды, тогда придём к оценке

$$\bar{\rho}(\tau) \leq c_{10} \left[\exp \left(-2 \int_{t_0}^{\tau} \lambda(s) ds \right) + \frac{\delta(\tau) + h(\tau) + \sqrt{\sigma(\tau)}}{\lambda(\tau)} - \frac{\beta'(\tau) + \lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau) + \lambda'(\tau)} \right].$$

Значит, при выполнении неравенства

$$\lambda^2(\tau) + \lambda'(\tau) > 0 \quad (32)$$

условия

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t) + h(t) + \sqrt{\sigma(t)}}{\lambda(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta'(\tau) + \lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau) + \lambda'(\tau)} = 0 \quad (33)$$

обеспечивают сходимость $\bar{\rho}(\tau) = \|y(\tau) - \tilde{x}(\tau)\|^2/2 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Теперь, приняв во внимание доказанную теорему 1 и неравенство

$$\|y(\tau) - x^*\| \leq \|y(\tau) - \tilde{x}(\tau)\| + \|\tilde{x}(\tau) - x^*\|,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Кроме того, предположим, что вместо множества Ω известно семейство выпуклых замкнутых множеств $\{\Omega_t\}$, $\Omega_t \subseteq H$, $t \geq t_0 \geq 0$, приближения оператора $A : H \rightarrow H$ задаются семейством операторов $\{A(t)\}$, $A(t) : H \rightarrow H$ при $t \geq t_0 \geq 0$, причём $A(t)$ непрерывен по t при $t \geq t_0$, $\Omega_t \subseteq D(A(t)) = D(A) = H$, при этом справедливы неравенства (14)–(16). Построим непрерывный регуляризованный метод первого порядка для задачи нахождения обобщённой неподвижной точки оператора A на выпуклом замкнутом множестве Ω в форме задачи Коши (18), (19), где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – положительные дифференцируемые невозрастающие выпуклые вниз бесконечно малые при $t \rightarrow \infty$ функции, и выполнены условия (21), (32), (33).

Тогда единственное решение задачи Коши (18), (19) при $t \rightarrow \infty$ сходится по норме пространства H к единственной нормальной обобщённой неподвижной точке оператора A на выпуклом замкнутом множестве Ω .

Покажем, что множество параметрических функций, обеспечивающих сходимость $y(t)$ к x^* при $t \rightarrow \infty$, непусто.

Пусть

$$\sigma(t) = 1/t^\sigma, \quad h(t) = 1/t^h, \quad \delta(t) = 1/t^\delta, \quad \beta(t) = 1/t^\beta, \quad \alpha(t) = 1/t^\alpha, \quad (34)$$

где $\sigma, h, \delta, \beta, \alpha$ – положительные постоянные. Тогда условия (9) выполняются при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta > \alpha$. Расходимость интеграла из (33) имеет место при $\alpha + \beta \leq 1$. Второе равенство в (33) будет выполнено, если $\alpha + \beta < \max\{\delta, h, \sigma/2\}$. Заметим, что в наших условиях найдётся число $t_0 > \alpha^{1/(1-\alpha)}$ такое, что при $t \geq t_0$ верно неравенство $\alpha^2(t) + \alpha'(t) > 0$. Для выбранных параметрических функций (34) имеем

$$\frac{\beta'(t) + \alpha'(t)}{\alpha^2(t) + \alpha'(t)} = -\frac{\beta t^{\alpha-\beta} + \alpha}{t^{1-\alpha} - \alpha},$$

т.е. и последнее предельное равенство из (33) имеет место. Таким образом, если

$$0 < \alpha < \max\{\beta, 1 - \beta, \delta - \beta, h - \beta, \sigma/2 - \beta\},$$

то функции (34) удовлетворяют условиям теоремы 2.

Для нахождения неподвижных точек нерастягивающих отображений можно использовать и итерационные процессы (см., например, [7–9]). Сходимость методов итеративной регуляризации для операторных уравнений вида $Ax = f$ с монотонными операторами изучалась, например, в монографиях [10, гл. 5; 1, гл. 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alber Ya., Ryazantseva I.* Nonlinear Ill-Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht, 2006.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972.
4. *Рязанцева И.П.* Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород, 2008.
5. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
7. *Browder F.E.* Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces // Arch. Ration Mech. Anal. 1967. V. 24. № 1. P. 82–90.
8. *Halperin B.* Fixed points of nonexpansive maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 957–961.
9. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург, 1993.
10. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М., 1989.

Нижегородский государственный технический
университет имени Р.Е. Алексеева

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 26.09.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.912

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ОБЫКНОВЕННОМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. А. А. Косов, Э. И. Семенов

Рассмотрено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка специального вида, частный случай которого возникает при построении точных решений уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом. Получены условия на параметры, при которых уравнение допускает однократное интегрирование. Приведён ряд примеров построения точных решений, выражаемых через элементарные функции или через функцию Ламберта.

DOI: 10.31857/S0374064123010120, EDN: ODHRIB

В данной работе рассматривается автономное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка относительно неизвестной функции $y = y(x)$ следующего вида:

$$yy'' + \frac{1}{\lambda} y'^2 + (Ay + By^{p-1})y' + \alpha y^2 + \beta y^p = 0, \quad (1)$$

где $\lambda \neq 0$, $p \neq 2$, A , B , α , β – параметры. Отметим, что требование $p \neq 2$ является существенным, так как в противном случае уравнение (1) приводится к виду

$$yy'' + \frac{1}{\lambda} y'^2 + (A + B)yy' + (\alpha + \beta)y^2 = 0. \quad (2)$$

С помощью замены $y'(x) = w(x)y(x)$ ОДУ (2) сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными $w' + (1 + 1/\lambda)w^2 + (A + B)w + \alpha + \beta = 0$, которое легко интегрируется в элементарных функциях. Уравнение (2) с $\lambda = -1$ рассматривал Пенлеве [1, с. 505]. Уравнение (1) при $p = 1$ возникает при построении точных решений многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (см. [2])

$$U_t = \nabla \cdot (U^\lambda \nabla U), \quad U = U(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

которое подстановкой $U(t, \mathbf{x}) = u(\xi, t)^{1/\lambda}$, $\xi = \|\mathbf{x}\|$, сводится к уравнению

$$u_t = uu_{\xi\xi} + \frac{1}{\lambda} u_\xi^2 + \frac{n-1}{\xi} uu_\xi.$$

В работе [2] показано, что, отыскивая автомодельные решения этого уравнения в виде $u(\xi, t) = (\theta t - T)^{-\sigma} W(z)$, $z = \xi(\theta t - T)^{(\sigma-1)/2}$, приходим к ОДУ

$$WW_{zz} + \frac{1}{\lambda} W_z^2 + \left(\frac{n-1}{z} W + \frac{\theta(1-\sigma)}{2} z \right) W_z + \theta\sigma W = 0,$$

которое, в свою очередь, заменой $W(z) = z^2 y(x)$, $x = \ln z$, приводится к уравнению (1) с параметрами $p = 1$, $A = n + 2 + 4/\lambda$, $B = \theta(1 - \sigma)/2$, $\alpha = 2(n + 2/\lambda)$, $\beta = \theta$. ОДУ (1) появляется также при построении решений типа “бегущей волны” одномерного нелинейного уравнения в частных производных следующего вида [3, с. 17]:

$$V_t = V_{\eta\eta} + BV^{\lambda(p-2)/(\lambda+1)} V_\eta + \alpha_1 V + \beta_1 V^{(\lambda(p-1)+1)/(\lambda+1)}, \quad V = V(t, \eta), \quad \lambda \neq -1. \quad (4)$$

В случае $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ уравнение (4) представляет собой обобщённое уравнение Бюргерса [3, с. 17], а если к тому же положить $p = 3 + 1/\lambda$, то (4) сводится к классическому уравнению Бюргерса $V_t = V_{\eta\eta} + BVV_{\eta}$. Отыскивая решения уравнения (4) как $V(t, \eta) = y(x)^{(1+\lambda)/\lambda}$, $x = \eta - At$, в результате редукции придём к ОДУ (1) при следующих соотношениях на параметры: $\beta = \lambda\beta_1/(1 + \lambda)$, $\alpha = \lambda\alpha_1(1 + \lambda)$.

Уравнение (1) подстановкой $y'(x) = w(y)$ сводится к уравнению Абеля второго рода

$$yww' + \frac{1}{\lambda}w^2 + (Ay + By^{p-1})w + \alpha y^2 + \beta y^p = 0, \quad w = w(y), \quad (5)$$

решения которого для некоторых значений параметров можно найти в работе [4, с. 93]. Ниже будет показано, что если между параметрами существуют определённые зависимости, то можно осуществить непосредственное однократное интегрирование уравнения (1) и, как следствие, получить решения для широкого класса параметров.

Утверждение 1. Если $\lambda \neq -1$ и выполнены равенства

$$A = \alpha + \frac{1}{\lambda} + 1, \quad B = \frac{(\lambda(p-1) + 1)\beta}{\lambda + 1}, \quad (6)$$

то общее решение уравнения (1) определяется из ОДУ первого порядка

$$y' + \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}y + \frac{\beta\lambda}{\lambda+1}y^{p-1} = C_1 \exp\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}x\right)y^{-1/\lambda}, \quad (7)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Доказательство. Умножив обе части уравнения (7) на $\exp((\lambda+1)x/\lambda)y^{1/\lambda}$ и проинтегрировав полученное выражение по x , приходим к уравнению (1), параметры которого удовлетворяют соотношениям (6). Утверждение доказано.

В частном случае при $C_1 = 0$ уравнение (7) легко интегрируется и его решение имеет вид

$$y(x) = \left[-\frac{\beta}{\alpha} + C_2 \exp\left(\frac{\alpha\lambda(p-2)}{\lambda+1}x\right) \right]^{1/(2-p)}, \quad (8)$$

где C_2 – произвольная постоянная. В силу утверждения 1 функция (8) будет частным решением ОДУ (1), в котором параметры связаны равенствами (6). Если для уравнения (1) поставить задачу Коши с начальными условиями в начале координат $x = 0$, то, как показывает найденное решение (8), в зависимости от параметра p возможны различные типы начальных условий. Если $p \in (-\infty, 1)$ и $C_2 = \beta/\alpha$, то из формулы (8) получим решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$; при $p = 1$ и $C_2 = \beta/\alpha$ – с условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = -\lambda\beta/(\lambda+1)$; при $p \in (1, 2)$ и $C_2 = \beta/\alpha$ – с нулевыми начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; если $p \in (2, +\infty)$ и $C_2 = \beta/\alpha$ – с условиями $y(0) = \infty$, $y'(0) = \infty$.

Пример 1. Пусть $p = 1 - 1/\lambda$, тогда из второго равенства формулы (6) имеем $B = 0$. В этом случае уравнение (1) упростится и примет вид

$$yy'' + \frac{1}{\lambda}y'^2 + \left(\alpha + \frac{1}{\lambda} + 1\right)yy' + \alpha y^2 + \beta y^{(\lambda-1)/\lambda} = 0. \quad (9)$$

Общее решение ОДУ (9) в силу утверждения 1 определяется из уравнения

$$y' + \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}y = \left(C_1 \exp\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}x\right) - \frac{\beta\lambda}{\lambda+1} \right) y^{-1/\lambda}.$$

Это ОДУ является дифференциальным уравнением Бернулли, общее решение которого задаётся формулой

$$y(x) = \left[\frac{C_1(\lambda+1)}{(\alpha-1)\lambda-1} \exp\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}x\right) + C_2 \exp(-\alpha x) - \frac{\beta}{\alpha} \right]^{\lambda/(\lambda+1)},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если имеет место равенство $\alpha = (\lambda + 1)^2 / (\lambda(\lambda(p - 1) + 1))$, $p \neq 1 - 1/\lambda$, то ОДУ первого порядка (7) заменой $y(x) = \exp(-(\lambda + 1)x / (\lambda(p - 1) + 1))Z(x)$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой функции $Z(x)$:

$$Z' = \exp\left(\frac{(\lambda + 1)(2 - p)}{\lambda(p - 1) + 1}x\right)\left(C_1 Z^{-1/\lambda} - \frac{\beta\lambda}{\lambda + 1} Z^{p-1}\right), \quad Z = Z(x).$$

Пример 2. Пусть $\lambda = -1/3$, $p = 3$, $\alpha = -4$. Тогда ОДУ

$$yy'' - 3y'^2 + \left(-6y + \frac{\beta}{2}y^2\right)y' - 4y^2 + \beta y^3 = 0$$

имеет общее решение, выражающееся через специальную W-функцию Ламберта [5, с. 5]:

$$y(x) = -\frac{\beta e^{-2x}}{2C_1} \left[W\left(-\frac{1}{2C_1} \exp(f(x))\right) + 1 \right]^{-1}, \quad f(x) = -\frac{\beta^2}{8C_1} e^{-2x} + C_2,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Пусть $\lambda = -1/2$ и $p = 1$. Тогда ОДУ (7) является уравнением Риккати, которое подстановкой

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{C_1} \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (10)$$

приводится к следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$u'' - (\alpha + 1)u' + C_1 \beta e^x u = 0.$$

Общее решение этого ОДУ выражается через бесселевы функции первого и второго рода [4, с. 185]. Таким образом, по формуле (10) найдено общее решение нелинейного уравнения

$$yy'' - 2y'^2 + ((\alpha - 1)y + 2\beta)y' + \alpha y^2 + \beta y = 0.$$

В утверждении 1 требуется выполнение условия $\lambda \neq -1$. Если отказаться от этого условия, то при определённых предположениях на параметры можно также произвести непосредственное однократное интегрирование уравнения (1). Так, справедливо

Утверждение 2. Если выполнены равенства

$$A = \alpha + \frac{1}{\lambda} + 1, \quad \beta = \alpha, \quad B = p + \frac{1}{\lambda} - 1, \quad (11)$$

то общее решение уравнения (1) определяется из ОДУ первого порядка

$$y' + y + y^{p-1} = C_1 e^{-\alpha x} y^{-1/\lambda}, \quad (12)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Доказательство. Умножив обе части уравнения (12) на $e^{\alpha x} y^{1/\lambda}$ и проинтегрировав полученное выражение по x , приходим к уравнению (1), параметры которого удовлетворяют соотношениям (11). Утверждение доказано.

С учётом равенств (11) уравнение (1) запишется как

$$yy'' + \frac{1}{\lambda} y'^2 + \left[\left(\alpha + \frac{1}{\lambda} + 1\right)y + \left(p + \frac{1}{\lambda} - 1\right)y^{p-1}\right]y' + \alpha y^2 + \alpha y^p = 0. \quad (13)$$

Пусть $p \neq 2$, тогда при $C_1 = 0$ из (12) получим частное решение ОДУ (13) вида

$$y(x) = \left[\frac{C_2}{e^{(p-2)x} - C_2} \right]^{1/(p-2)},$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Пример 4. Пусть $p = 1 - 1/\lambda$, соответственно $B = 0$. Тогда уравнение (13) упростится и примет вид

$$yy'' + \frac{1}{\lambda} y'^2 + \left(\alpha + \frac{1}{\lambda} + 1\right) yy' + \alpha y^2 + \alpha y^{(\lambda-1)/\lambda} = 0. \quad (14)$$

Общее решение ОДУ (14) в силу утверждения 2 определяется из уравнения Бернулли

$$y' + y = (C_1 \exp(-\alpha x) - 1)y^{-1/\lambda}, \quad y = y(x),$$

общее решение которого задаётся формулами

$$y(x) = \left[\frac{C_1(\lambda + 1)}{(1 - \alpha)\lambda + 1} \exp(-\alpha x) + C_2 \exp\left(-\frac{1 + \lambda}{\lambda} x\right) - 1 \right]^{\lambda/(\lambda+1)}, \quad \lambda \neq -1,$$

$$y(x) = C_2 \exp\left(-2x + \frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right), \quad \lambda = -1,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если имеет место равенство $\alpha = p - 1 + 1/\lambda$, то подстановкой $y(x) = e^{-x}Z(x)$ ОДУ (13) сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой функции $Z(x)$:

$$Z' = (C_1 Z^{-1/\lambda} - Z^{p-1})e^{(2-p)x}, \quad Z = Z(x). \quad (15)$$

Пример 5. Пусть $\lambda = 1$, $p = 4$. Тогда из уравнения (15) в зависимости от знака C_1 по формуле $y(x) = e^{-x}Z(x)$ получим для ОДУ

$$yy'' + y'^2 + (6y + 4y^3)y' + 4y^2 + 4y^4 = 0$$

решения следующих видов:

$$y(x) = \pm e^{-x} [\sqrt{C_1} \operatorname{th}(C_2 - \sqrt{C_1} e^{-2x})]^{1/2}, \quad C_1 > 0,$$

$$y(x) = \pm e^{-x} [\sqrt{-C_1} \operatorname{tg}(\sqrt{-C_1} e^{-2x} + C_2)]^{1/2}, \quad C_1 < 0,$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание. Уравнение (5) является уравнением Абеля второго рода и сводится [4, с. 93] к более простому виду, не содержащему квадрат искомой функции. Для такого уравнения в [4] приводится множество случаев интегрируемости при различных значениях параметров. Например, для $B = 0$ таких интегрируемых случаев набирается около двадцати, в каждом из которых будут свои условия на параметры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-00819).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
2. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных решениях уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60. № 1. С. 123–140.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики: в 2 ч. Ч. 1. М., 2017.
4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.
5. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики. Саров, 2006.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 07.03.2022 г.
После доработки 06.08.2022 г.
Принята к публикации 28.11.2022 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.837.2

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ
ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. Е. М. Мухсинов

В банаховом пространстве исследуется разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина для одной дифференциальной игры, динамика которой описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа.

DOI: 10.31857/S0374064123010132, EDN: ODQUSP

В банаховом пространстве X рассматривается квазилинейная дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) - \sum_{i=1}^n B_i x(t - h_i) \right) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - h_i) + f(u(t), v(t), t) \quad (1)$$

и замкнутым терминальным множеством $M \subset X$, где заканчивается игра.

В игре (1) $t \geq 0$, $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_n = h$, $x(t) \in X$, $U([0, \infty), Y)$ – множество всех измеримых отображений, действующих из множества $[0, \infty)$ в банахово пространство Y , причём на $[0, \infty)$ рассматривается мера Лебега, $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$ – управления преследования, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ – управления убегания, Z – банахово пространство, $A_i : X \rightarrow X$ – линейные ограниченные операторы, а $A : D \rightarrow X$ – линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения D , порождающий сильно непрерывную полугруппу $S(t)$ [1, с. 316]. В дальнейшем предполагаем, что линейные ограниченные операторы $B_i : X \rightarrow X$ такие, что линейные операторы AB_i ограничены [2, с. 259]. Используя полугруппу $S(t)$, можно построить фундаментальное решение $\Phi(t)$ [2, с. 267], для которого справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \left(\Phi(t) - \sum_{i=1}^n B_i \Phi(t - h_i) \right) = A\Phi(t) + \sum_{i=1}^n A_i \Phi(t - h_i),$$

$\Phi(0) = I$ – единичный оператор, а $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

На основании работы [2], следуя А. Фридману [3, с. 95] и Ю.С. Осипову [4, с. 1314], дадим следующее

Определение. Если отображение $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то *решением задачи Коши* для уравнения (1) с начальным положением

$$x(s) = \varphi(s), \quad -h \leq s \leq 0, \quad (2)$$

и соответствующими управлениями $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ будем называть отображение

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \\ & + \int_0^t \Phi(t - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция и интеграл понимается в смысле Бохнера [1, с. 93].

В дальнейшем предполагаем, что отображение $f : Y \times Z \times [0, \infty) \rightarrow X$ измеримо по $t \in [0, \infty)$ и непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$, и существует локально суммируемая функция $\xi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такая, что при любых $u \in Y$, $v \in Z$, $t \in [0, \infty)$ имеет место неравенство $\|f(u, v, t)\| \leq \xi(t)$. Это предположение обеспечивает локальную интегрируемость отображения $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ по Бохнеру.

Для игры (1) исследуем разрешимость задачи преследования в смысле Л.С. Понтрягина [5, с. 308; 6, с. 233; 7, с. 130].

Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (о существовании измеримого селектора у неявно заданного отображения). Пусть отображения $P : [0, \infty) \rightarrow 2^Y$ и $\varphi : [0, \infty) \rightarrow X$ измеримы, а отображение $g : Y \times Z \times [0, \infty) \rightarrow X$ непрерывно по $(u, v) \in Y \times Z$ и измеримо по $t \in [0, \infty)$. Если для любых $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ и почти всех $t \in [0, \infty)$ имеет место включение $\varphi(t) \in g(P(t), v(t), t)$, то отображение $t \rightarrow \{u \in P(t) : \varphi(t) = g(u, v(t), t)\}$ замкнутозначно, измеримо и имеет измеримый селектор, т.е. существует измеримое отображение $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Y$ такое, что $u(t) \in P(t)$ и $\varphi(t) = g(u(t), v(t), t)$ для почти всех $t \in [0, \infty)$.

Доказательство леммы 1 следует из работ [8, с. 56; 9, с. 86].

Лемма 2. Пусть E – отдельное линейное топологическое пространство, отображение $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ непрерывно, а отображение $P : [a, b] \rightarrow 2^E$ секвенциально замкнуто. Тогда множество $\{t \in [a, b] : \varphi(t) \in P(t)\}$ замкнуто.

Доказательство. Если $t_n \in [a, b]$, $t_n \rightarrow t$, $\varphi(t_n) \in P(t_n)$, то в силу непрерывности φ имеем $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t)$. Из секвенциальной замкнутости отображения P следует, что $\varphi(t) \in P(t)$, а это означает, что множество $\{t \in [a, b] : \varphi(t) \in P(t)\}$ замкнуто. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть отображение $P : [a, b] \rightarrow 2^E$ секвенциально замкнуто, где E – отдельное линейное топологическое пространство, полученное в результате надления банахова пространства X ослабленной топологией $\sigma(X, X^*)$ [10, с. 239]. Если M – компактное подмножество E относительно топологии $\sigma(X, X^*)$, то отображение $t \rightarrow M + P(t)$, действующее из $[a, b]$ в 2^E , секвенциально замкнуто.

Лемма 3 доказана в статье [11, с. 81].

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) X , Y – сепарабельные банаховы пространства, а терминальное множество M выпукло и компактно относительно топологии $\sigma(X, X^*)$;
- 2) начальное положение $\varphi(s)$, $-h \leq s \leq 0$, абсолютно непрерывно, и при некотором $T \geq 0$ имеет место включение

$$\left[\Phi(T) - \sum_{i=1}^n \Phi(T - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau \in M - W(T), \quad (4)$$

где $W(t) = \int_0^t \bigcap_{v \in Z} \Phi(t - \tau) f(Y, v, \tau) d\tau$;

- 3) отображение $t \rightarrow W(t)$, $t \in [0, T]$, замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$ и при каждом t непусто и выпукло;

- 4) существует отображение $w : Y \rightarrow Z$ такое, что при всех $u \in Y$, $t \in [0, T]$, $0 \leq s \leq t$, выполняется включение

$$\Phi(t - s) f(u, w(u), s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(t - s) f(Y, v, s),$$

и для каждого $u(\cdot)$ суперпозиция $w(u(\cdot))$ измерима.

Тогда из начального положения φ возможно завершение преследования за оптимальное время

$$T_0 = \min\{T \geq 0 : \text{для которых выполняется (4)}\}.$$

Доказательство. В силу условия 3) отображение $t \rightarrow W(t)$ замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Следовательно, оно секвенциально замкнуто относительно этой топологии. С другой стороны, в силу условия 1) множество M компактно относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Поэтому согласно лемме 3 отображение $t \rightarrow M - W(t)$ секвенциально замкнуто относительно топологии $\sigma(X, X^*)$. Тогда в силу непрерывности отображения

$$t \rightarrow \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau,$$

которое следует из [2, с. 268], в силу условия 2) и доказанной леммы 2 множество $\{T \geq 0 : \text{для которых выполняется (5)}\}$ замкнуто. А это влечёт за собой следующее включение:

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^n \Phi(T_0 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T_0 - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau \in M - W(T_0). \quad (5)$$

На основании (5) существуют некоторая точка $m \in M$ и такой интегрируемый селектор $p(\cdot)$ отображения

$$\tau \rightarrow \bigcap_{v \in Z} \Phi(T_0 - \tau) f(Y, v, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq T_0,$$

что имеет место равенство

$$\left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^n \Phi(T_0 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T_0 - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau = m - \int_0^{T_0} p(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Если выбрано произвольное управление убегания $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$, то в силу леммы 1 найдётся такое управление преследования $u(\cdot) \in U([0, T_0], Y)$, что будет иметь место равенство

$$p(\tau) = \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) \quad (7)$$

для почти всех $\tau \in [0, T_0]$.

Учитывая (6) и (7), для решения (3) задачи (1), (2) имеем

$$\begin{aligned} x(T_0) &= \left[\Phi(T_0) - \sum_{i=1}^n \Phi(T_0 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(T_0 - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = m - \int_0^{T_0} p(\tau) d\tau + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = \\ &= m - \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau + \int_0^{T_0} \Phi(T_0 - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = m \in M. \end{aligned}$$

Отметим, что $u(\tau)$ выбирается по формуле (7), исходя из информации о $v(\tau)$. Если при выборе $u(\tau)$ использовать информацию о $v(\tau)$ и $x(s)$, $0 \leq s \leq \tau$, то время достижения

множества M будет не более числа T_0 . Далее, в силу определения числа T_0 заключаем, что при всех $t \in [0, T_0)$ имеет место следующее соотношение:

$$\left(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + W(t) \right) \cap M = \emptyset. \quad (8)$$

Если $\varepsilon \in (0, T_0)$, то значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot) \in U([0, T_0], Z)$ на отрезке $[0, \varepsilon]$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon, T_0)$ — специальным образом: $v(t) = w(u(t - \varepsilon))$. Тогда в задаче (1), (2) для решения $x(\cdot)$, соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на $[0, T_0)$, имеем

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \\ & + \int_0^t \Phi(t - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau = \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \int_0^\varepsilon \Phi(t - \tau) f(u(\tau), v(\tau), \tau) d\tau + \\ & + \int_\varepsilon^t \Phi(t - \tau) f(u(\tau), w(u(\tau - \varepsilon)), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

В силу равенства (8), условий 1), 3) и теоремы о строгой отделимости (см. [10, с. 109]) множества M и

$$\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + W(t)$$

при всех $t \in [0, T_0)$ строго отделимы, т.е. при всех $t \in [0, T_0)$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\psi \in X^*$ и такие константы c и $\delta > 0$, что справедливы оценки

$$\psi(x) \leq c - \delta < c \leq \psi(m) \quad (9)$$

при всех

$$x \in \left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + W(t)$$

и $m \in M$. Если $\bar{p}(\cdot)$ — произвольный интегрируемый селектор отображения

$$\tau \rightarrow \bigcap_{v \in Z} \Phi(t - \tau) f(Y, v, \tau), \quad \tau \in [0, \varepsilon],$$

то на основании условия 4) и неравенств (9) имеем

$$\psi(x(t)) = \psi \left(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t - \tau - h_i) [A_i \varphi(\tau) + B_i \dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\varepsilon \Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau) d\tau + \int_\varepsilon^t \Phi(t-\tau)f(u(\tau),w(u(\tau-s)),\tau) d\tau \Big) = \\
& = \psi \left(\left[\Phi(t) - \sum_{i=1}^n \Phi(t-h_i)B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=1}^n \int_{-h_i}^0 \Phi(t-\tau-h_i)[A_i\varphi(\tau) + B_i\dot{\varphi}(\tau)] d\tau + \int_0^\varepsilon \bar{p}(\tau) d\tau + \right. \\
& \left. + \int_\varepsilon^t \Phi(t-\tau)f(u(\tau),w(u(\tau-s)),\tau) d\tau \right) + \psi \left(\int_0^\varepsilon \Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau) d\tau - \int_0^\varepsilon \bar{p}(\tau) d\tau \right) \leq \\
& \leq c - \delta + \int_0^\varepsilon \psi \left(\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau) - \bar{p}(\tau) \right) d\tau.
\end{aligned}$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\varepsilon = \theta > 0$ такое, что

$$\left| \int_0^\theta \psi(\Phi(t-\tau)f(u(\tau),v(\tau),\tau) - \bar{p}(\tau)) d\tau \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $\psi(x(t)) \leq c - \delta/2 < c$. Поэтому число $\varepsilon = \theta > 0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать таким образом, что $x(t) \notin M$ при всех $t \in [0, T_0)$, а это и доказывает оптимальность времени преследования T_0 . Теорема доказана.

Замечание. Полученный результат обобщает соответствующие результаты работ [11, с. 81; 12, с. 519; 13, с. 70].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
2. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space // J. of Differ. Equat. 1977. № 25. P. 258–274.
3. Friedman A. Differential games of pursuit in banach space // J. of Math. Analysis and Appl. 1969. V. 25. P. 93–113.
4. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр в системах с распределёнными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 6. С. 1314–1317.
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112 (154). № 3. С. 307–331.
6. Мухсинов Е.М., Муродова М.Н. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний в гильбертовом пространстве // Вестн. Таджикского нац. ун-та. Сер. естеств. наук. 2016. № 1/1 (192). С. 233–236.
7. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
8. Rockafellar T.R. Convex Integral Functionals and Duality // Contribution to Nonlinear Functional Analysis. New York; London, 1971. P. 215–236.
9. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions // Lect. Not. Math. 1977. V. 580. P. 1–278.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.
11. Мухсинов Е.М. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх // Управляемые системы. Вып. 22. Новосибирск, 1982. С. 80–87.
12. Гусятников П.Б., Никольский М.С. Об оптимальности времени преследования // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 3. С. 518–521.
13. Мухсинов Е.М. О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2022. № 2. С. 66–82.

Таджикский государственный
университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.
После доработки 20.08.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.