ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 2 **Февраль 2023**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

www.sciencejournals.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 2, 2023

НЕКРОЛОГ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ХРОНИКА

НЕКРОЛОГ

ВИКТОР ВАЛЕНТИНОВИЧ ВЛАСОВ (18.11.1956–04.01.2023)

DOI: 10.31857/S0374064123020012, EDN: PTFVGN

Редакционная коллегия журнала “Дифференциальные уравнения” с глубоким прискорбием сообщает, что 4 января 2023 г. на 67-м году жизни скоропостижно скончался Власов Виктор Валентинович, известный российский математик, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, член редколлегии журнала.

В.В. Власову неоднократно присуждались гранты Российского фонда фундаментальных исследований, Международного научного фонда, INTAS. В 2000 г. ему была присуждена государственная научная стипендия для выдающихся ученых. Он неоднократно являлся лауреатом конкурсов “Соросовский доцент” и “Соросовский профессор”, а также конкурсов “Профессор года” МГУ.

Области научных интересов: теория функционально-дифференциальных уравнений и спектральная теория несамосопряжённых операторов. В.В. Власову принадлежит ряд значимых результатов об асимптотическом поведении решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, а также им получены неулучшаемые оценки их решений. Автор более 150 научных работ в реферируемых журналах.

Он был отзывчивым, доброжелательным, глубоко порядочным человеком. Выражаем искренние соболезнования его семье и близким, друзьям, коллегам.

Светлая память о Викторе Валентиновиче Власове навсегда сохранится в наших сердцах.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 150–163

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

ОБ ОДНОМ ТИПЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЁХПОЗИЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСНЫМ РЕЛЕ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

© 2023 г. **В. В. Евстафьева, А. М. Камачкин, Д. К. Потапов**

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с трёхпозиционной гистерезисной релейной характеристикой и периодической функцией возмущения. Доказана теорема существования колебательного решения с полным обходом характеристики с возможным выходом в зоны её насыщения за некоторое конечное время и с замкнутой фазовой траекторией произвольной формы. Установлены достаточные условия существования периодических решений с произвольной и симметричной фазовыми траекториями, а также условия несуществования периодического решения с симметричной фазовой траекторией. Приведены численные примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123020024, EDN: PTOKGL

Введение. Математические модели в ряде прикладных задач сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с разрывными правыми частями. Из последних работ по исследованию таких уравнений отметим статьи [1–14]. Разрывные правые части уравнений содержат так называемые "существенные нелинейности" [15, с. 45], которые являются математическими описаниями, например, таких физических эффектов как кулоновское сухое трение или реле. Дифференциальные уравнения с существенными нелинейностями релейного типа описывают нелинейные колебания и изучаются в задачах теории автоматического управления. Вопросы существования колебательных, в том числе периодических, решений дифференциальных уравнений и систем с релейными характеристиками до сих пор вызывают интерес (см. [16–30]).

В данной статье рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с существенной нелинейностью типа реле и возмущением, изучение которого было начато авторами в работах [23, 30]. Несмотря на невысокий порядок уравнения, его полное и детальное аналитическое исследование затрудняет разрывная правая часть, приводящая к сложной динамике и многообразию возможных колебательных решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{y}(t)=\lambda\dot{y}(t)+\alpha N(y(t))+\beta\cos(\omega t+\varphi). \tag{1}$$

Здесь t – время ($t\geqslant 0$), λ, α, β, ω и φ – ненулевые вещественные постоянные, нелинейность $N(y(t))$ является существенной и задаётся характеристикой трёхпозиционного реле с гистерезисом следующим образом:

$$N(y)=\begin{cases}-C, & \text{если } y\leqslant -B \text{ или } -B<y\leqslant -A \text{ и } N_-(y)=-C,\\ 0, & \text{если } -A<y<A \text{ или } -B<y<B \text{ и } N_-(y)=0,\\ C, & \text{если } y\geqslant B \text{ или } A\leqslant y<B \text{ и } N_-(y)=C,\end{cases} \tag{2}$$

где A, B и C – параметры, такие что $0<A<B$ и $C>0$, $N_-(y)$ – предыстория $N(y)$ (ввиду её неоднозначности). Характеристика (2) включает три типовые нелинейности, а именно насыщение, мёртвую зону и гистерезис. Интервалы $(-\infty,-B]$ и $[B,+\infty)$ соответствуют зонам насыщения, $(-A, A)$ – мёртвой зоне, $(-B, -A]$ и $[A, B)$ – зонам неоднозначности (гистерезису). Обе петли гистерезиса обходятся против хода часовой стрелки, что соответствует положительному гистерезису. Для обеспечения отрицательной обратной связи полагаем $\alpha < 0$.

В статьях [23, 30] изучен вопрос существования у уравнения (1) периодических режимов с заданными периодами, выходом в зоны насыщения характеристики $N(y)$ и фазовыми траекториями, имеющими две симметричные точки, одна из которых удовлетворяет условию $y_{\max} > B$ ($y_{\max}$ – максимальное значение решения $y(t)$).

В данной работе рассматриваются колебательные, в том числе периодические, решения уравнения (1) с полным обходом (в обе стороны) характеристики $N(y)$ с возможным выходом в зоны её насыщения, т.е. допускается выполнение неравенства $|y(t)| > B$ за произвольное и заданное время, а также с произвольными и определёнными по расположению на фазовой плоскости траекториями.

Общее решение уравнения (1) и его производная для любого $t \geqslant 0$ имеют вид

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + qt + q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q - \omega q_1 \sin(\omega t + \varphi) + \omega q_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$q = \begin{cases} q^-, & \text{если } N(y) = -C, \\ 0, & \text{если } N(y) = 0, \\ q^+, & \text{если } N(y) = C, \end{cases}$$

$q^- = -q^+ = \alpha C/\lambda$, $q_1 = -\beta/(\lambda^2 + \omega^2)$, $q_2 = q_1\lambda/\omega$, c_1 и c_2 – произвольные постоянные, которые, на самом деле, могут иметь разрывы в точках разрыва нелинейности $N(y(t))$.

Рассмотрим колебательное решение в классе непрерывных функций $y(t)$ для любого $t \geqslant 0$ с полным обходом характеристики $N(y)$ (с возможным выходом в зоны её насыщения) за время T_r и с замкнутой фазовой траекторией, которая проходит через четыре фиксированные точки, лежащие на прямых $y = \pm A$ и $y = \pm B$. Куски траектории между этими прямыми на плоскости $(y, \dot{y})$ соответствуют различным участкам $N(y)$ на плоскости $(y, N(y))$. В полный обход характеристики вовлечены четыре таких участка. Поэтому фазовая траектория, отвечающая одному полному обходу, состоит из четырёх кусков, которые склеиваются в соответствии с методом припасовывания для обеспечения непрерывности $y(t)$ и замкнутости траектории.

Обозначим порядковый номер обхода характеристики через p, а прямые $y = B$, $y = A$, $y = -B$ и $y = -A$ через L_1, L_2, L_3 и L_4 соответственно. Далее рассматриваемому колебательному решению дадим

Определение. Решение $y(t)$ уравнения (1) назовём *T_r-колебательным решением при полном обходе характеристики $N(y)$ с возможным выходом в зоны насыщения*, если существуют положительные числа τ_i $(i = \overline{1,4})$ такие, что выполняется равенство $\sum_{i=1}^4 \tau_i = T_r$, и точки Y^i на фазовой плоскости, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $Y^1 = (y(t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(t_0 + (p-1)T_r)) \in L_1$,

$Y^2 = (y(\tau_1 + t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + t_0 + (p-1)T_r)) \in L_2$,

$Y^3 = (y(\tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r)) \in L_3$,

$Y^4 = (y(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r)) \in L_4$,

где $t_0 \geqslant 0$ – начальный момент времени, $p \in \mathbb{N}$;

2) для всех $p \in \mathbb{N}$ и

любого $t \in [t_0 + (p-1)T_r, \tau_1 + t_0 + (p-1)T_r]$ выполняется равенство $q = q^+$,

любого $t \in (\tau_1 + t_0 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r) \bigcup (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r, t_0 + pT_r)$ выполняется равенство $q = 0$,

любого $t \in [\tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r]$ выполняется равенство $q = q^-$.

На прямой L_i в точке Y^i $(i = \overline{1,4})$ параметр q меняет значение, поскольку на плоскости $(y, N(y))$ при значении y, соответствующем прямой, меняется значение $N(y)$ (т.е. происходит переключение). Поэтому точку Y^i и прямую L_i будем далее называть *точкой переключения* и *прямой переключения* соответственно, число τ_i – *временем перехода* из точки Y^i на прямую L_{i+1}, причём при $i=4$ на прямую L_1, а точки переключения и времена перехода – *параметрами решения.*

Ставится задача исследовать колебательные решения уравнения (1), отвечающие введённому выше определению со значением $t_0=0$, и установить достаточные условия существования периодических решений с произвольной траекторией и с траекторией, симметричной относительно начала координат фазовой плоскости.

2. Система уравнений для параметров решения. Введём обозначения

$$d_1(t) = q_1\cos(\omega t+\varphi) + q_2\sin(\omega t+\varphi), \quad d_2(t) = q_2\cos(\omega t+\varphi) - q_1\sin(\omega t+\varphi)$$

для любого $t \geqslant 0$.

Сначала запишем решение и его производную в новых обозначениях на интервалах согласно условию 2) определения. Затем с помощью замены переменной от функций $y(t)$ и $\dot y(t)$, зависящих от текущего времени t, с неопределёнными постоянными c_1, c_2 перейдём к функциям $y_p^i(\tau)$ и $\dot y_p^i(\tau)$, зависящим от времени перехода τ по i-му куску фазовой траектории при p-м обходе с соответствующими постоянными c_1^i, c_2^i, $i=\overline{1,4}$.

Рассмотрим первый полный обход $N(y)$, т.е. $p=1$. Итак, для любого $t\in[0,\tau_1]$ имеем

$$y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + q^+t + d_1(t), \quad \dot y(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q^+ + \omega d_2(t).$$

Используем замену переменных $\tau = t$. Тогда первый кусок фазовой траектории задаётся для $\tau\in[0,\tau_1]$ следующими функциями:

$$y_1^1(\tau) = c_1^1e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau), \quad \dot y_1^1(\tau) = \lambda c_1^1e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau), \tag{3}$$

причём $c_1^1 = c_1$, $c_2^1 = c_2$.

Затем для любого $t\in(\tau_1,\tau_1+\tau_2)$ имеем $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t)$ и $\dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + \omega d_2(t)$. После замены переменных $\tau = t-\tau_1$ приходим к функциям

$$y_1^2(\tau) = c_1^2e^{\lambda\tau} + c_2^2 + d_1(\tau+\tau_1), \quad \dot y_1^2(\tau) = \lambda c_1^2e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau+\tau_1), \tag{4}$$

которыми задаётся для любого $\tau\in(0,\tau_2)$ второй кусок фазовой траектории. Здесь $c_1^2 = c_1e^{\lambda\tau_1}$, $c_2^2 = c_2$. Далее для любого $t\in[\tau_1+\tau_2,\tau_1+\tau_2+\tau_3]$ имеем $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + q^-t + d_1(t)$, $\dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + q^- + \omega d_2(t)$. Используем замену переменных $\tau = t-\tau_1-\tau_2$. Тогда третий кусок фазовой траектории задаётся для $\tau\in[0,\tau_3]$ следующими функциями:

$$y_1^3(\tau) = c_1^3e^{\lambda\tau} + c_2^3 + q^-\tau + d_1(\tau+\tau_1+\tau_2), \quad \dot y_1^3(\tau) = \lambda c_1^3e^{\lambda\tau} + q^- + \omega d_2(\tau+\tau_1+\tau_2), \tag{5}$$

где $c_1^3 = c_1e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}$, $c_2^3 = c_2 + q^-(\tau_1+\tau_2)$. Наконец, для любого $t\in(\tau_1+\tau_2+\tau_3, T_r)$ имеем $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t)$, $\dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + \omega d_2(t)$. Здесь сделаем замену $\tau = t-\tau_1-\tau_2-\tau_3$. Четвёртый кусок фазовой траектории задаётся для $\tau\in(0,\tau_4)$ функциями

$$y_1^4(\tau) = c_1^4e^{\lambda\tau} + c_2^4 + d_1(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3), \quad \dot y_1^4(\tau) = \lambda c_1^4e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3), \tag{6}$$

где $c_1^4 = c_1e^{\lambda(\tau_1+\tau_2+\tau_3)}$, $c_2^4 = c_2$.

Теперь рассмотрим условие 1) определения для $p=1$ с учётом введённых выше новых функций. Условие $Y^1\in L_1$ в координатной записи означает

$$(y(0),\dot y(0)) = (y_1^1(0),\dot y_1^1(0)) = (y_1^4(\tau_4),\dot y_1^4(\tau_4)) = (B,\dot y^1),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^1 + c_2^1 + d_1(0) = B = c_1^4e^{\lambda\tau_4} + c_2^4 + d_1(T_r), \tag{7}$$

$$\lambda c_1^1 + q^+ + \omega d_2(0) = \dot{y}^1 = \lambda c_1^4 e^{\lambda\tau_4} + \omega d_2(T_r). \tag{8}$$

Условие $Y^2 \in L_2$ означает

$$(y(\tau_1), \dot{y}(\tau_1)) = (y_1^2(0), \dot{y}_1^2(0)) = (y_1^1(\tau_1), \dot{y}_1^1(\tau_1)) = (A, \dot{y}^2),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^2 + c_2^2 + d_1(\tau_1) = A = c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + c_2^1 + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1), \tag{9}$$

$$\lambda c_1^2 + \omega d_2(\tau_1) = \dot{y}^2 = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + q^+ + \omega d_2(\tau_1). \tag{10}$$

Условие $Y^3 \in L_3$ означает

$$(y(\tau_1+\tau_2), \dot{y}(\tau_1+\tau_2)) = (y_1^3(0), \dot{y}_1^3(0)) = (y_1^2(\tau_2), \dot{y}_1^2(\tau_2)) = (-B, \dot{y}^3),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^3 + c_2^3 + d_1(\tau_1+\tau_2) = -B = c_1^2 e^{\lambda\tau_2} + c_2^2 + d_1(\tau_1+\tau_2), \tag{11}$$

$$\lambda c_1^3 + q^- + \omega d_2(\tau_1+\tau_2) = \dot{y}^3 = \lambda c_1^2 e^{\lambda\tau_2} + \omega d_2(\tau_1+\tau_2). \tag{12}$$

Условие $Y^4 \in L_4$ означает

$$(y(\tau_1+\tau_2+\tau_3), \dot{y}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)) = (y_1^4(0), \dot{y}_1^4(0)) = (y_1^3(\tau_3), \dot{y}_1^3(\tau_3)) = (-A, \dot{y}^4),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^4 + c_2^4 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3) = -A = c_1^3 e^{\lambda\tau_3} + c_2^3 + q^-\tau_3 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3), \tag{13}$$

$$\lambda c_1^4 + \omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3) = \dot{y}^4 = \lambda c_1^3 e^{\lambda\tau_3} + q^- + \omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3). \tag{14}$$

Далее находим постоянные c_1^i, c_2^i, $i = \overline{1,4}$. Для этого из левого равенства (7) и правого равенства (9) выражаем постоянные c_1^1, c_2^1. Имеем

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)), \quad c_2^1 = B - c_1^1 - d_1(0). \tag{15}$$

Из левого равенства (9) и правого равенства (11) выражаем постоянные c_1^2 и c_2^2:

$$c_1^2 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1+\tau_2) - d_1(\tau_1)), \quad c_2^2 = A - c_1^2 - d_1(\tau_1). \tag{16}$$

Аналогично получаем из левого равенства (11) и правого равенства (13) значения

$$c_1^3 = (1 - e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A - B + q^-\tau_3 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3) - d_1(\tau_1+\tau_2)), \quad c_2^3 = -B - c_1^3 - d_1(\tau_1+\tau_2), \tag{17}$$

а из левого равенства (13) и правого равенства (7) находим

$$c_1^4 = (1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)), \quad c_2^4 = -A - c_1^4 - d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3). \tag{18}$$

Полученные выражения подставляем в соотношения (8), (10), (12) и (14). Приходим к системе уравнений относительно переменных τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 вида

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\tau_4}(1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)) + \omega d_2(T_r),$$

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1+\tau_2) - d_1(\tau_1)) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+,$$

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^- =$$
$$= \lambda e^{\lambda\tau_2}(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A+B+d_1(\tau_1+\tau_2)-d_1(\tau_1)),$$
$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)) =$$
$$= \lambda e^{\lambda\tau_3}(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^- \qquad (19)$$

и к формулам для нахождения точек переключения

$$Y^1=(B,\dot y^1),\quad Y^2=(A,\dot y^2),\quad Y^3=(-B,\dot y^3),\quad Y^4=(-A,\dot y^4), \qquad (20)$$

где

$$\dot y^1=\lambda(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+q^++\omega d_2(0),$$
$$\dot y^2=\lambda(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A+B+d_1(\tau_1+\tau_2)-d_1(\tau_1))+\omega d_2(\tau_1),$$
$$\dot y^3=\lambda(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^-+\omega d_2(\tau_1+\tau_2),$$
$$\dot y^4=\lambda(1-e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3))+\omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3).$$

Вторые координаты точек переключения получены из левых равенств в (8), (10), (12) и (14), в которых постоянные c_1^1, c_1^2, c_1^3 и c_1^4 заменены на выражения из систем равенств (15)–(18) соответственно.

3. Существование решения с произвольной траекторией. На вопрос о существовании решения уравнения (1) с фазовой траекторией, проходящей через точки переключения $(B,\dot y^1)$, $(A,\dot y^2)$, $(-B,\dot y^3)$ и $(-A,\dot y^4)$, которые произвольным образом располагаются на прямых переключения плоскости $(y,\dot y)$, даёт ответ следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) система уравнений (19) имеет решение τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4, причём $\sum_{i=1}^4\tau_i=T_r$;

2) значения $d_j((p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1+(p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)$, $j=1,2$, не зависят от p.

Тогда существует T_r-колебательное решение уравнения (1) при полном обходе характеристики $N(y)$ с возможным выходом в зоны её насыщения и траекторией, проходящей через четыре точки переключения, которые находятся по формулам (20).

Доказательство. Из условия 2) определения следует, что число τ_i $(i=\overline{1,4})$ является временем перехода между переключениями и отвечает первому моменту попадания решения $y(t)$ на прямую переключения L_{i+1} (при $i=4$ на прямую L_1). Поэтому только одно решение системы уравнений (19), составленное из наименьших значений независимо по каждой переменной τ_i, удовлетворяет условию 2) определения, которое обеспечивает нахождение траектории колебательного решения в допустимых областях фазовой плоскости в моменты между переключениями.

Пусть решение системы уравнений (19) найдено и имеет место равенство $\sum_{i=1}^4\tau_i=T_r$. Тогда точки переключения Y^1, Y^2, Y^3 и Y^4 находятся по формулам (20). Однако и времена перехода, и точки переключения удовлетворяют условиям определения для $p=1$. Это означает, что траектория решения проходит через точки переключения за соответствующие времена перехода при первом полном обходе нелинейной характеристики.

Пусть выполняется условие 2) теоремы 1. Покажем, что тогда выполняются условия определения не только для $p=1$, но и для $p>1$, т.е. существует решение $y(t)$ уравнения (1) с найденными выше параметрами.

Итак, значения $d_j((p-1)T_r)$, $j=1,2$, не зависят от p, поэтому равенства

$$c_1^1+c_2^1+d_1((p-1)T_r)=B,\quad \lambda c_1^1+q^++\omega d_2((p-1)T_r)=\dot y^1,$$

равносильные условию $Y^1\in L_1$, выполняются не только для $p=1$, но и для всех $p\in\mathbb{N}$. Поскольку значения $d_j(\tau_1+(p-1)T_r)$ также не зависят от p, то равенства

$$c_1^2+c_2^2+d_1(\tau_1+(p-1)T_r)=A,\quad \lambda c_1^2+\omega d_2(\tau_1+(p-1)T_r)=\dot y^2,$$

равносильные условию $Y^2 \in L_2$, имеют место для всех $p \in \mathbb{N}$.

Аналогично значения $d_j(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)$ не зависят от p. Значит для всех $p \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$c_1^3 + c_2^3 + d_1(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r) = -B, \quad \lambda c_1^3 + q^- + \omega d_2(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r) = \dot{y}^3,$$

равносильные условию $Y^3 \in L_3$, и равенства

$$c_1^4 + c_2^4 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r) = -A, \quad \lambda c_1^4 + \omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r) = \dot{y}^4,$$

равносильные условию $Y^4 \in L_4$.

Система уравнений (19) была построена для решения $y(t)$, на которое не накладывалось условие $|y(t)| \leqslant B$ для любого $t > 0$. Следовательно, существует T_r-колебательное решение уравнения (1) с возможным выходом в зоны насыщения характеристики $N(y)$ и найденными точками переключения, через которые проходит фазовая траектория не только при первом, но и при последующих обходах характеристики, что отражено в утверждении теоремы 1. Теорема доказана.

Существование периодического решения с периодом заданного вида устанавливает

Следствие 1. *Пусть выполняется условие 1) теоремы 1 и значение T_r кратно $2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Тогда существует T_r-колебательное решение уравнения (1), которое является периодическим решением с периодом T_r.*

Доказательство. Пусть имеет место условие 1) теоремы 1 и $T_r = 2\pi k/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку функции $d_j(t)$, $j = 1, 2$, являются $2\pi/\omega$-периодическими, то они удовлетворяют равенству $d_j(t) = d_j(t+T_r)$ для любого $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что имеют место равенства $d_j(t) = d_j(t+ + (p-1)T_r)$ не только в моменты переключения, что равносильно выполнению условия 2) теоремы 1 (а значит существует искомое T_r-колебательное решение уравнения (1)), но и на интервалах, соответствующих кускам траектории.

Покажем, что в этом случае T_r-колебательному решению уравнения (1) на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ соответствует замкнутая траектория, состоящая из четырёх кусков при первом и последующих обходах характеристики, т.е. $y(t) = y(t+T_r)$ и $\dot{y}(t) = \dot{y}(t+T_r)$ для любого $t \geqslant 0$. Это значит, что решение уравнения (1) является периодическим с периодом T_r.

Запишем функции, задающие куски траектории, для любого $p \in \mathbb{N}$. Для моментов времени $t \in [(p-1)T_r, \tau_1+(p-1)T_r]$ и первого куска траектории с $\tau \in [0, \tau_1]$ имеем функции

$$y_p^1(\tau) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^1(\tau) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau+(p-1)T_r),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (15). Для $t \in (\tau_1+(p-1)T_r, \tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ и второго куска траектории со значением $\tau \in (0, \tau_2)$ имеем

$$y_p^2(\tau) = c_1^2 e^{\lambda\tau} + c_2^2 + d_1(\tau+\tau_1+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^2(\tau) = \lambda c_1^2 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau+\tau_1+(p-1)T_r),$$

где c_1^2, c_2^2 вычисляются по формуле (16). Для $t \in [\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r, \tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r]$ и третьего куска траектории с $\tau \in [0, \tau_3]$ имеем функции

$$y_p^3(\tau) = c_1^3 e^{\lambda\tau} + c_2^3 + q^-\tau + d_1(\tau+\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^3(\tau) = \lambda c_1^3 e^{\lambda\tau} + q^- + \omega d_2(\tau+\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r),$$

где c_1^3, c_2^3 вычисляются по формуле (17). И, наконец, для $t \in (\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r, pT_r)$ и четвёртого куска траектории с $\tau \in (0, \tau_4)$ находим

$$y_p^4(\tau) = c_1^4 e^{\lambda\tau} + c_2^4 + d_1(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^4(\tau) = \lambda c_1^4 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r),$$

где c_1^4, c_2^4 вычисляются по формуле (18).

Поскольку функции $d_j(t)$, $j = 1, 2$, не зависят от p на интервалах, соответствующих кускам траектории, то функции $y_p^i(\tau)$ и $\dot{y}_p^i(\tau)$ также не зависят от p и справедливы равенства $y_p^i(\tau) = y_1^i(\tau)$ и $\dot{y}_p^i(\tau) = \dot{y}_1^i(\tau)$ для любого $p \in \mathbb{N}$. Это означает, что траектория состоит из четырёх кусков на протяжении неограниченного количества обходов. Каждая из функций $y_1^i(\tau)$, $\dot{y}_1^i(\tau)$ непрерывна на соответствующем интервале. Отсюда следует, что функции $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ непрерывны для всех $t \geqslant 0$, за исключением моментов переключения. Однако в силу того, что множество таких моментов времени дискретно, метод припасовывания применим. Поэтому указанные функции непрерывны для всех $t \geqslant 0$ и справедливы равенства

$$y(t) = y(t + T_r), \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(t + T_r),$$

т.е. траектория замкнутая, а решение периодическое с периодом T_r, что и требовалось доказать. Следствие доказано.

4. Периодические решения с симметричной траекторией. Рассмотрим T_r-колебательное решение уравнения (1) с определёнными требованиями к её параметрам и к траектории, а именно периодическое решение с периодом T_r и с фазовой траекторией, симметричной относительно начала координат плоскости $(y, \dot{y})$ (далее T_r-периодическое решение с симметричной траекторией).

Функции $d_1(t)$ и $d_2(t)$ представим в следующем виде:

$$d_1(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\sin\Big(\omega t + \varphi + \operatorname{arctg}\frac{q_1}{q_2} + \pi h\Big),$$

$$d_2(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\sin\Big(\omega t + \varphi - \operatorname{arctg}\frac{q_2}{q_1} + \pi h\Big),$$

где $h = 0$, если $\lambda > 0$, и $h = 1$, если $\lambda < 0$,

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2} = -\frac{\beta}{\omega\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Обозначим через T *полупериод* решения. Достаточное условие существования искомого решения даёт

Теорема 2. *Пусть выполняется условие 1) теоремы 1 и* $\tau_1 = \tau_3$, $\tau_2 = \tau_4$, $T_r = 2T$, *где* $T = \pi k/\omega$, k *– нечётное натуральное число,* $\omega > 0$. *Тогда существует* T_r*-периодическое решение уравнения (1) с симметричной траекторией.*

Доказательство. Если выполняется условие 1) теоремы 1 и T_r кратно $2\pi/\omega$, то, согласно следствию 1, T_r-колебательное решение уравнения (1) является периодическим. Пусть $\tau_1 = \tau_3$, $\tau_2 = \tau_4$ и $T_r = 2T$. Тогда $T = \tau_1 + \tau_2$.

Исходя из симметричности нелинейной характеристики, запишем условия симметричности траектории относительно начала координат плоскости $(y, \dot{y})$ и покажем, что они выполняются, если $T = \pi k/\omega$, k – нечётное натуральное число.

Для первого и третьего кусков траектории имеем условие

$$y_1^1(\tau) = -y_1^3(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = -\dot{y}_1^3(\tau) \quad \text{при всех} \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

выполнение которого равносильно для любого $\tau \in [0, \tau_1]$ равенствам

$$c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau) = -c_1^3 e^{\lambda\tau} - c_2^3 - q^-\tau - d_1(\tau + T),$$

$$\lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau) = -\lambda c_1^3 e^{\lambda\tau} - q^- - \omega d_2(\tau + T). \tag{21}$$

При составлении соотношений (21) использованы равенства (3) и (5). В моменты переключения имеем

$$y_1^1(0) = -y_1^3(0) = B, \quad \dot y_1^1(0) = -\dot y_1^3(0) = \dot y^1,$$

$$y_1^1(\tau_1) = -y_1^3(\tau_3) = A, \quad \dot y_1^1(\tau_1) = -\dot y_1^3(\tau_3) = \dot y^2.$$

Для второго и четвёртого кусков траектории имеем условие

$$y_1^2(\tau) = -y_1^4(\tau), \quad \dot y_1^2(\tau) = -\dot y_1^4(\tau) \quad \text{при всех} \quad \tau \in (0, \tau_2),$$

что равносильно для любого $\tau \in (0,\tau_2)$ равенствам

$$c_1^2 e^{\lambda\tau} + c_2^2 + d_1(\tau+\tau_1) = -c_1^4 e^{\lambda\tau} - c_2^4 - d_1(\tau+\tau_1+T),$$

$$\lambda c_1^2 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau+\tau_1) = -\lambda c_1^4 e^{\lambda\tau} - \omega d_2(\tau+\tau_1+T),$$

которые составлены с помощью (4) и (6).

В моменты переключения имеем

$$y_1^2(0) = -y_1^4(0) = A, \quad \dot y_1^2(0) = -\dot y_1^4(0) = \dot y^2,$$

$$y_1^2(\tau_2) = -y_1^4(\tau_4) = -B, \quad \dot y_1^2(\tau_2) = -\dot y_1^4(\tau_4) = \dot y^3 = -\dot y^1.$$

Если $T = \pi k/\omega$, k – нечётное натуральное число, то для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\sin(x+\pi k) = -\sin x$, а значит $d_j(t) = -d_j(t+T)$ для любого $t \geqslant 0$. Обратимся к формулам (15)–(18), определяющим постоянные c_1^i, c_2^i, $i = \overline{1,4}$. Нетрудно видеть, что $c_1^1 = -c_1^3$, $c_2^1 = -c_2^3$, $c_1^2 = -c_1^4$ и $c_2^2 = -c_2^4$, поскольку $q^- = -q^+$. Очевидно, что условия симметричности траектории выполняются. Теорема доказана.

Ввиду симметричности траектории достаточно рассмотреть первый и второй куски траектории, которые соответствуют решению с обходом характеристики в одну сторону и с двумя точками переключения $Y^1 = (B, \dot y^1)$, $Y^2 = (A, \dot y^2)$ за полупериод.

Выражения, которые определяют постоянные c_1^1, c_2^1 в (15) и c_1^2, c_2^2 в (16), подставим в равенства

$$\lambda c_1^1 + q^+ + \omega d_2(0) = -\lambda c_1^2 e^{\lambda\tau_2} - \omega d_2(T), \quad \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + q^+ + \omega d_2(\tau_1) = \lambda c_1^2 + \omega d_2(\tau_1),$$

равносильные условиям

$$\dot y_1^1(0) = -\dot y_1^2(\tau_2), \quad \dot y_1^1(\tau_1) = \dot y_1^2(0).$$

Приходим к системе уравнений

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ =$$

$$= -\lambda e^{\lambda\tau_2}(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)),$$

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\tau_1}(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ \tag{22}$$

относительно переменных τ_1 и τ_2 таких, что $\tau_1 + \tau_2 = T$ (здесь учтено равенство $d_1(0) = -d_1(T)$), и к формулам для нахождения точек переключения $Y^1 = (B, \dot y^1)$, $Y^2 = (A, \dot y^2)$, $Y^3 = (-B, -\dot y^1)$, $Y^4 = (-A, -\dot y^2)$, где $\dot y^1$ и $\dot y^2$ определены в (20).

Таким образом, система уравнений (19) относительно τ_i, $i = \overline{1,4}$, для T_r-колебательного решения уравнения (1) принимает вид системы уравнений (22) относительно τ_1 и τ_2 для T_r-периодического решения с симметричной траекторией.

Преобразуем систему уравнений (22) к виду, удобному для дальнейшего исследования. Для этого из её первого уравнения, умноженного на $e^{\lambda\tau_1}$, вычтем второе уравнение и получим

$$q^+(e^{\lambda\tau_1} - 1) = \frac{\lambda(e^{\lambda T}+1)}{e^{\lambda\tau_2}-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)).$$

Из последнего равенства выразим слагаемое, содержащее $d_1(\tau_1)$:

$$\lambda(e^{\lambda T}+1)d_1(\tau_1) = q^+(e^{\lambda\tau_1}-1)(1-e^{\lambda\tau_2}) + \lambda(e^{\lambda T}+1)(B+A-d_1(0)).$$

Теперь второе уравнение системы (22) умножим на $e^{\lambda\tau_2}$, сложим с первым уравнением и получим

$$q^+(e^{\lambda\tau_2}+1) = \frac{\lambda(e^{\lambda T}+1)}{e^{\lambda\tau_1}-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)).$$

Аналогично выразим слагаемое, содержащее $d_1(\tau_1)$:

$$\lambda(e^{\lambda T}+1)d_1(\tau_1) = q^+(e^{\lambda\tau_2}+1)(e^{\lambda\tau_1}-1) - \lambda(e^{\lambda T}+1)(B-A+q^+\tau_1-d_1(0)).$$

Приравниваем правые части равенств, которые в своих левых частях содержат одинаковые выражения с $d_1(\tau_1)$ и получаем первое уравнение преобразованной системы. В качестве второго её уравнения рассмотрим второе уравнение системы (22). Поскольку $\tau_1+\tau_2=T$, сделаем замену $\tau_2 = T-\tau_1$. Приходим к преобразованной системе уравнений относительно τ_1 и T:

$$2q^+e^{\lambda(T-\tau_1)} - 2q^+e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)) = -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+\tau_1,$$

$$\lambda(1-e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(B+A-d_1(0)-d_1(\tau_1)) =$$
$$= \lambda e^{\lambda\tau_1}(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)) + q^+, \qquad (23)$$

которая равносильна системе (22).

Условия разрешимости системы уравнений (23) относительно τ_1 при фиксированном T устанавливает

Лемма 1. *Пусть $T=\pi k/\omega$, $\omega>0$, и для некоторого нечётного $k\in\mathbb{N}$ выполняются следующие условия:*

1) если $\lambda>0$ и имеют место неравенства

$$q^+\left(\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} - \frac{T}{2}\right) < B-d_1(0) < 0 \qquad (24)$$

или $\lambda<0$ и имеют место неравенства

$$0 < B-d_1(0) < q^+\left(\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} - \frac{T}{2}\right), \qquad (25)$$

то первое уравнение системы (23) имеет решение $\tau_1\in(0,T)$;

2) при значении τ_1, удовлетворяющем первому уравнению системы (23), имеет место равенство

$$A = \frac{e^{\lambda\tau_1}-e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}(B+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)) -$$
$$- \frac{1-e^{\lambda\tau_1}}{1-e^{\lambda T}}(B-d_1(0)-d_1(\tau_1)) + q^+\frac{(e^{\lambda\tau_1}-1)(e^{\lambda(T-\tau_1)}-1)}{\lambda(1-e^{\lambda T})}, \qquad (26)$$

причём $0<A<B$.

Тогда система уравнений (23) имеет решение τ_1.

Доказательство. При некотором нечётном $k\in\mathbb{N}$ величина $T=\pi k/\omega$ является фиксированной и система уравнений (23) зависит только от переменной τ_1. Рассмотрим первое уравнение системы (23).

Введём обозначения для $t\in[0,T]$

$$f_1(t) = 2q^+e^{\lambda(T-t)} - 2q^+e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)), \quad f_2(t) = -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+t.$$

Заметим, что справедливы равенства

$$f_1(0) = 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)), \quad f_2(T) = -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T,$$

$$f_1(T) = 2q^+(1-e^{\lambda T}) + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)), \quad f_2(0)=0.$$

Пусть $\lambda > 0$. Имеем $q^+ > 0$ и $1-e^{\lambda T} < 0$. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются непрерывными и монотонно убывающими, причём $f_2(t) \leqslant 0$, а функция $f_1(t)$ за счёт свободного члена может принимать как неположительные, так и положительные значения для любого $t\in[0,T]$.

Пусть выполняется левое неравенство в (24). Домножив его обе части на выражение $2\lambda \times \times (e^{\lambda T}+1)$, приходим к неравенству $2q^+(e^{\lambda T}-1) - \lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T < 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0))$ или к неравенству $-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T < -2q^+(e^{\lambda T}-1) + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0))$ после преобразования, которое означает, что $f_2(T) < f_1(T)$.

Пусть выполняется правое неравенство в (24). Итак, если $B-d_1(0)<0$, то $2\lambda(e^{\lambda T}+1)\times \times (B-d_1(0)) < 0$ и выполняется неравенство $f_1(0) < f_2(0)$.

Таким образом, при выполнении неравенств (24) в условии 1) леммы 1 справедливы неравенства $f_1(0) < f_2(0)$ и $f_1(T) > f_2(T)$. В силу непрерывности и монотонности функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ имеет место одно пересечение их графиков, и тогда абсцисса τ_1 точки их пересечения является решением уравнения $f_1(\tau_1) = f_2(\tau_1)$, что отражено в условии 1) леммы 1.

Пусть теперь $\lambda < 0$. Имеем $q^+ < 0$ и $1-e^{\lambda T} > 0$. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются также убывающими, поскольку коэффициент $2q^+e^{\lambda T}$ перед экспонентой $e^{-\lambda t}$ в функции $f_1(t)$ и коэффициент $-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+$ линейной функции $f_2(t)$ принимают отрицательные значения.

Рассмотрим неравенства (25). Если выполняется левое неравенство, т.е. $B-d_1(0)>0$, то $f_1(0) < 0 = f_2(0)$, поскольку $2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)) < 0$. Если имеет место правое неравенство в (25), то справедливо неравенство $2q^+(1-e^{\lambda T}) + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)) > -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T$, из которого следует, что $f_1(T) > f_2(T)$, т.е. графики функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ пересекаются. Следовательно, при выполнении условия 1) леммы 1 первое уравнение системы (23) имеет решение $\tau_1 \in (0,T)$.

Далее рассмотрим второе уравнение системы (23). После приведения к общему знаменателю и преобразования получим равносильное уравнение

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_1})(B+A-d_1(0)-d_1(\tau_1)) =$$

$$= \lambda(e^{\lambda\tau_1}-e^{\lambda T})(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)) + q^+(e^{\lambda\tau_1}-1)(e^{\lambda(T-\tau_1)}-1).$$

Введём для $t\in[0,T]$ обозначения

$$f_3(t) = \lambda(1-e^{\lambda t})(B+A-d_1(0)-d_1(t)),$$

$$f_4(t) = \lambda(e^{\lambda t}-e^{\lambda T})(B-A+q^+t+d_1(t)-d_1(0)) + q^+(e^{\lambda t}-1)(e^{\lambda(T-t)}-1).$$

Напомним, что $-d_1(T) = d_1(0)$. Поэтому

$$f_3(0) = 0, \quad f_3(T) = \lambda(1-e^{\lambda T})(B+A) < 0,$$

$$f_4(0) = \lambda(1-e^{\lambda T})(B-A) < 0, \quad f_4(T) = 0.$$

Отсюда следует, что $f_3(0) > f_4(0)$ и $f_3(T) < f_4(T)$. Поскольку функции $f_3(t)$ и $f_4(t)$ являются непрерывными, то их графики пересекаются.

Пусть имеет место условие 2) леммы 1. Равенство (26) получено из второго уравнения системы (23) при значении τ_1, которое удовлетворяет первому уравнению системы (23). Поэтому выполнение равенства (26) равносильно тому, что решение τ_1 первого уравнения системы (23) удовлетворяет её второму уравнению, т.е. имеет место равенство $f_3(\tau_1) = f_4(\tau_1)$, и τ_1 является абсциссой точки пересечения графиков функций $f_3(t)$ и $f_4(t)$. Таким образом, при выполнении условий 1) и 2) леммы 1 система уравнений (23) имеет решение τ_1 при фиксированном T. Лемма доказана.

Далее условия неразрешимости системы (23) даёт

Лемма 2. *Пусть* $T = \pi k/\omega$, $\omega > 0$, *и для некоторого нечётного* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется следующее условие: при* $\lambda > 0$ *имеет место неравенство*

$$\frac{q^+ e^{\lambda T}}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} \leqslant B - d_1(0), \tag{27}$$

а при $\lambda < 0$ *– неравенство*

$$q^+\left(\frac{e^{\lambda T}}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} - \frac{T}{2}\right) \leqslant B - d_1(0). \tag{28}$$

Тогда система уравнений (23) не имеет решения τ_1 *такого, что* $\tau_1 \in (0, T)$.

Доказательство. Функция $f_1(t)$ имеет горизонтальную асимптоту, которую обозначим через h. Тогда

$$h = -2q^+ e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B - d_1(0))$$

и функция $f_1(t)$ принимает вид $f_1(t) = 2q^+ e^{\lambda T} e^{-\lambda t} + h$.

Пусть выполняется неравенство (27). Перенесём выражение из левой части неравенства в правую часть, приведём к общему знаменателю, умножим обе части на 2 и получим равносильное неравенство

$$0 \leqslant -2q^+ e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B - d_1(0)),$$

которое означает, что $h \geqslant 0$, т.е. $h \geqslant f_2(0) = 0$. Отсюда следует, что при $\lambda > 0$ имеет место неравенство $f_1(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$ и пересечение графиков функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ невозможно, поскольку $f_2(t) \leqslant 0$ на указанном интервале.

Пусть выполняется неравенство (28), после преобразования которого приходим к равносильному неравенству

$$-2q^+ e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B - d_1(0)) \leqslant -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+ T,$$

из которого следует, что $h \leqslant f_2(T)$ и, значит, при $\lambda < 0$ имеем $f_1(0) < f_2(T)$, поскольку $f_1(0) < h$. В силу того, что функция $f_1(t)$ убывает для любого $t \geqslant 0$, неравенство $f_1(0) < f_2(T)$ означает, что на отрезке $[0, T]$ графики функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ не пересекаются. Таким образом, при выполнении условий леммы 2 первое уравнение системы (23) не имеет решения $\tau_1 \in (0, T)$, следовательно, и система уравнений (23) не имеет решения τ_1 при фиксированном $T = \pi k/\omega$. Лемма доказана.

Из леммы 2 очевидно вытекает следующее

Следствие 2. *Пусть выполняется условие леммы 2. Тогда не существует* T_r*-периодического решения уравнения (1) с симметричной траекторией.*

Для демонстрации результатов работы приведём примеры.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) = 0.314159\dot{y}(t) - 0.1N(y(t)) - 0.21\cos(t + 0.196349). \tag{29}$$

Здесь $\lambda = 0.314159$, $\alpha = -0.1$, $\beta = -0.21$, $\omega = 1$ и $\varphi = 0.196349$. Пусть $C = 0.1$ и $B = 0.83$. Тогда $q^+ = 0.031831$, $q_1 = 0.191136$ и $q_2 = 3.298672$. Здесь и далее расчёты проведены с точностью до 10^{-6}.

Обратимся к условиям леммы 1. Пусть $k = 1$. Тогда $T = \pi$. При $\lambda = 0.314159 > 0$ и $d_1(0) = 0.831002$ справедливы неравенства (24), а именно $-0.003699 < -0.001002 < 0$. Первое уравнение системы (23) имеет единственное решение $\tau_1 = 2.739280$, значит $d_1(\tau_1) = 0.487516$. Вычислим параметр A. Имеем $0 < A = 0.493575 < B$. Следовательно, найденное значение τ_1 является решением системы уравнений (23).

Для построения $2T$-периодического решения найдём постоянные:

$$c_1^1 = -c_1^3 = -0.058726, \quad c_2^1 = -c_2^3 = 0.057724, \quad c_1^2 = -c_1^4 = -0.037537, \quad c_2^2 = -c_2^4 = 0.043597.$$

На рис. 1 представлен график симметричной траектории 2π-периодического решения уравнения (29) с выходом в зоны насыщения характеристики (так как $y_{\max} = 3.315021 > 0.83 = B$) и с точками переключения $Y^1 = (0.83, 3.211382)$, $Y^2 = (0.493575, -3.279835)$, $Y^3 = -Y^1$ и $Y^4 = -Y^2$, которые отмечены на рисунке и расположены на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ по ходу часовой стрелки. Куски траектории между точками переключения для всех $p \in \mathbb{N}$ задаются следующими функциями:

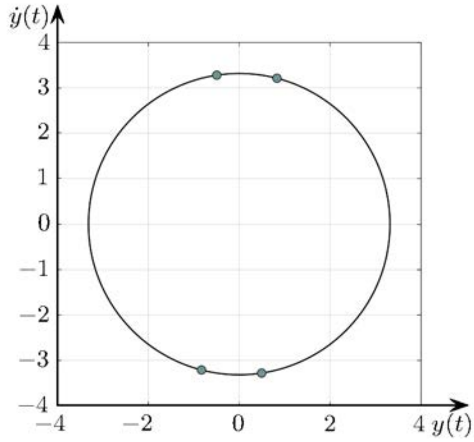

Рис. 1. 2π-периодическое решение $y(t)$ уравнения (29) на фазовой плоскости.

первый кусок для $t \in (2(p-1)\pi, \tau_1 + 2(p-1)\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + q^+ t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = c_1^1 = -0.058726$, $c_2 = c_2^1 = 0.057724$;

второй кусок для $t \in (\tau_1 + 2(p-1)\pi, \pi + 2(p-1)\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = e^{-\lambda \tau_1} c_1^2 = -0.015885$, $c_2 = c_2^2 = 0.043597$;

третий кусок для $t \in (\pi + 2(p-1)\pi, \tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 - q^+ t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} - q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = e^{-\lambda \pi} c_1^3 = 0.021887$, $c_2 = c_2^3 + q^+ \pi = 0.042275$;

четвёртый кусок для $t \in (\tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi, 2p\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = e^{-\lambda(\tau_1 + \pi)} c_1^4 = 0.005916$, $c_2 = c_2^4 = -0.043597$.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) = -0.589048 \dot{y}(t) - 4.36 N(y(t)) - 0.1 \cos(2t + 0.003490). \tag{30}$$

Здесь $\lambda = -0.589048$, $\alpha = -4.36$, $\beta = -0.1$, $\omega = 2$ и $\varphi = 0.003490$. Пусть $C = 0.1$ и $B = 0.6$. Тогда $q^+ = -0.740180$, $q_1 = 0.023004$ и $q_2 = -0.001550$.

Обратимся к условиям леммы 1 при $\lambda < 0$. Пусть $k = 3$. Тогда $T = 3\pi/2 = 4.712389$. Здесь $d_1(0) = 0.022999$. Справедливы неравенства (25), так как $0 < 0.577001 < 0.634818$.

Первое уравнение системы (23) имеет одно решение $\tau_1 = 2.010911$ такое, что $\tau_1 < T$ (второе решение $\tau_1 = 4.872707$ не удовлетворяет уравнению, поскольку нарушается условие $\tau_1 < T$), значит $d_1(\tau_1) = -0.013394$. Параметр A принимает значение $A = 0.063433$, при этом $0 < A < B$. Следовательно, найденное значение τ_1 является решением системы уравнений (23).

Вычислим постоянные: $c_1^1 = -c_1^3 = -1.423776$, $c_2^1 = -c_2^3 = 2.000777$, $c_1^2 = -c_1^4 = 0.821041$ и $c_2^2 = -c_2^4 = -0.744214$.

На рис. 2 представлен график симметричной траектории 3π-периодического решения уравнения (30) с выходом в зоны насыщения характеристики (так как $y_{\max} = 0.607746 > 0.6 = B$) и с точками переключения $Y^1 = (0.6, 0.095320)$, $Y^2 = (0.063433, -0.463884)$, $Y^3 = -Y^1$ и $Y^4 = -Y^2$ на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$.

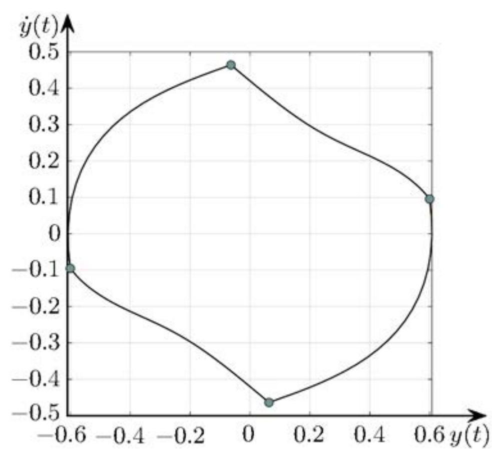

Рис. 2. 3π-периодическое решение $y(t)$ уравнения (30) на фазовой плоскости.

Первый кусок траектории между точками Y^1 и Y^2 описывается функцией с постоянными $c_1 = c_1^1 = -1.423776$, $c_2 = c_2^1 = 2.000777$ и соответствует интервалу $(3(p-1)\pi, \tau_1 + 3(p-1)\pi)$. Второй кусок между точками Y^2 и Y^3 описывается функцией с постоянными $c_1 = e^{-\lambda\tau_1}c_1^2 = 2.684093$, $c_2 = c_2^2 = -0.744214$ и соответствует интервалу $(\tau_1 + 3(p-1)\pi, 1.5\pi + 3(p-1)\pi)$. Третий кусок между точками Y^3 и Y^4 описывается функцией с постоянными $c_1 = e^{-1.5\pi\lambda}c_1^3 = 22.854293$, $c_2 = c_2^3 + 1.5\pi q^+ = -5.488777$ и соответствует интервалу $(1.5\pi + 3(p-1)\pi, \tau_1 + 1.5\pi + 3(p-1)\pi)$. Наконец, четвёртый кусок траектории между точками Y^4 и Y^1 описывается функцией с постоянными $c_1 = e^{-\lambda(\tau_1+1.5\pi)}c_1^4 = -43.084744$, $c_2 = c_2^4 = 0.744214$ и соответствует интервалу $(\tau_1 + 1.5\pi + 3(p-1)\pi, 3p\pi)$.

Заключение. Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле доказаны теоремы существования колебательного и периодического решений с обходом характеристики с возможным выходом в зоны насыщения. Траектории решений проходят за время полного обхода через четыре точки, которые расположены произвольным образом или симметрично на прямых переключения фазовой плоскости. Для периодического решения с симметричной траекторией установлены достаточные условия разрешимости и неразрешимости системы уравнений относительно параметров решения. Рассмотрены численные примеры, демонстрирующие полученные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелин. колебания. 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
2. *Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side // Phys. D: Nonlin. Phenom. 2012. V. 241. № 22. P. 2003–2009.
3. *Потапов Д.К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
4. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2014. № 221. P. 1–6.
5. *Llibre J., Teixeira M.A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // J. Singularities. 2014. V. 10. P. 183–190.
6. *Потапов Д.К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
7. *Самойленко А.М., Нижник И.Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67. № 4. С. 517–554.
8. *Bonanno G., D’Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. V. 1. № 1. P. 125–143.
9. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 4. P. 1–8.
10. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
11. *Bensid S., Diaz J.I.* Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions // Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. V. 22. № 5. P. 1757–1778.
12. *da Silva C.E.L., da Silva P.R., Jacquemard A.* Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40. № 14. P. 5295–5306.
13. *Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челябинский физ.-мат. журн. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
14. *da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Control Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
15. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. М., 2004.
16. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.

17. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
18. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
19. *Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Popov M.A., Kabulova E.G.* Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems // Proc. Engin. 2017. V. 201. P. 578–583.
20. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
21. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.
22. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
23. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Control. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
24. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
25. *Евстафьева В.В.* Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
26. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
27. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
28. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
29. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Неподвижные точки отображения, порождённого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.
30. *Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потапов Д.К.* Периодические режимы в системе автоматического управления с трёхпозиционным гистерезисным реле // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 595–606.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.
После доработки 27.11.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 164–169

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ САМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Д. М. Поляков

Рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора четвёртого порядка с вещественными периодическими коэффициентами и с краевыми условиями типа Неймана. Для этого оператора получена асимптотика собственных значений и формула регуляризованного следа.

DOI: 10.31857/S0374064123020036, EDN: PTUFRY

В гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ рассматривается спектральная задача

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \tag{1}$$

для самосопряжённого оператора четвёртого порядка $H = H(p,q)$ с областью определения

$$D(H) = \{y \in L^2(0,1) : y', y'', y''' + py' \in W_1^1(0,1), \quad y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0,1),$$
$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0\},$$

где коэффициенты p и q являются вещественными периодическими (периода единица) функциями из пространства $L^1(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – факторпространство.

Цель настоящей работы – получить асимптотику собственных значений и формулу следа для дифференциального оператора H.

С точки зрения законов механики оператор H описывает колебания балки с жёстко закреплёнными концами. Кроме того, уравнения четвёртого порядка появляются как модельные уравнения для большого класса параболических уравнений высокого порядка, возникающих в статистической механике, моделях фазового поля, гидродинамике или моделях висячих мостов (см. [1, 2] и используемую там литературу).

В последнее время спектральные свойства оператора H достаточно активно изучаются. В работе [3] получена асимптотика собственных значений, а также решена обратная спектральная задача для оператора H с гладкими коэффициентами. В статье [4] для оператора H были описаны изоспектральные потенциалы. Явная формула для характеристической функции была установлена в [5]. В работе [6] получена асимптотика собственных функций для оператора H, а в статье [7] – оценки отклонений спектральных проекторов и оценки равносходимости спектральных разложений для оператора H с функциями $p, q \in L^2(0,1)$. Наконец, положительность оператора H с $p = 0$ и структура спектра исследовались в [8].

Перейдём к описанию свойств оператора H. Спектр $\sigma(H)$ оператора H является чисто дискретным (см. [9, гл. 1, § 2, 4]). Введём в рассмотрение фундаментальные решения φ_j, $j = \overline{1,4}$, уравнения

$$y^{(4)} + (py')' + qy = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

При этом фундаментальные решения удовлетворяют условиям

$$\varphi_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}, \quad k = 1,2,3, \quad (\varphi_j''' + p\varphi_j')(0,\lambda) = \delta_{j4},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Спектр $\sigma(H)$ состоит из вещественных собственных значений, и справедливо соотношение $\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : D(\lambda) = 0\}$, где D – целая функция вида

$$D(\lambda) = -\det\begin{pmatrix} \varphi_3(1,\lambda) & \varphi_4(1,\lambda) \\ \varphi_3'(1,\lambda) & \varphi_4'(1,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Спектр оператора H – вещественный, полуограниченный снизу и состоит из собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{N}$, которые будут занумерованы (с учётом кратности) следующим образом: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ В невозмущённом случае $(p = q = 0)$ все собственные значения λ_n^0 допускают следующую асимптотику (см. [3, следствие 1]):

$$\lambda_n^0 = (\pi/2 + \pi n)^4 + \mathcal{O}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что все собственные значения λ_n^0 являются простыми (см. [6, теорема 2.1]).

Перейдём к описанию основных результатов настоящей статьи. Первая теорема будет посвящена доказательству асимптотики собственных значений рассматриваемого оператора при высоких энергиях. Указанные асимптотики будут приведены в терминах коэффициентов Фурье функции p в случае, если $p, q \in L^1(\mathbb{T})$. Кроме того, асимптотика собственных значений будет записана с бóльшей точностью (в предположении более гладких коэффициентов).

Введём коэффициенты Фурье для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$f_0 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad \widehat{f}_n = \int\limits_0^1 f(x)e^{-i\pi(2n+1)x}\,dx, \quad \widehat{f}_{sn} = \int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi(2n+1)x)\,dx.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $p, q \in L^1(\mathbb{T})$ и число $n \in \mathbb{N}$ выбрано достаточно большим. Тогда собственные значения λ_n являются простыми и удовлетворяют асимптотике*

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn} + \varkappa_{1,n}) + \mathcal{O}(n), \quad n \to +\infty, \tag{3}$$

где

$$\varkappa_{1,n} = \int\limits_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s}(p(s) + p(1-s))(e^{-\pi(n+1/2)s} - 2\sin\pi(n+1/2) - 2\cos\pi(n+1/2))\,ds.$$

В случае, если $p''', q' \in L^1(\mathbb{T})$, справедливо асимптотическое представление

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn}) + 3\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 - \widehat{q}_{sn} -$$
$$- \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\varkappa_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n \to +\infty, \tag{4}$$

где

$$\varkappa_{2,n} = \int\limits_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s}\left(\frac{1}{2}(p'''(s) - p'''(1-s))\left(\sin(\pi(n+1/2)s) + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{8}\right) + \right.$$
$$\left. + (q'(1-s) - q'(s))\left(\sin(\pi(n+1/2)s) + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{4}\right)\right) ds.$$

В статьях [3, следствие 1] и [6, теорема 3.1] была получена асимптотика собственных значений оператора H для коэффициентов $p \in C^3[0,1]$ и $q \in C^1[0,1]$. Однако указанная асимптотика содержала только главное слагаемое и остаток. В теореме 1 установлена точная асимптотика собственных значений в наиболее общем случае.

Использовав теорему 1, получим формулу следа для оператора H. Рассмотрим оператор $H_t(p_t, q_t)$ вида (1) со сдвигом в коэффициентах, т.е. $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Через $\lambda_n(t)$, $t \in \mathbb{T}$, обозначим собственные значения оператора H_t.

Теорема 2. *Пусть* $p'''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$. *Тогда существует такое число* $N = N(p,q) \in \mathbb{N}$, *что каждая из функций* $\sum_{n=1}^N \lambda_n(t)$ *и* $\lambda_n(t)$, $n > N$, *принадлежит пространству* $C^2(\mathbb{T})$. *Кроме того, имеет место следующая формула следа:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n(t)-\lambda_n(0)-3(p(t)-p(0))\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)+\frac{p''(t)-p''(0)}{2\pi(2n+1)}-\frac{2(q(t)-q(0))}{\pi(2n+1)}\right)=$$

$$=\frac{p''(t)-p''(0)}{2}+q(0)-q(t)+\frac{p^2(t)-p^2(0)}{4}, \tag{5}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\mathbb{T}$.

Асимптотика (4) показывает, что если $p'''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$, то ряд (5) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$. Доказательство теоремы 2 основано на асимптотическом анализе разности резольвент возмущённого и невозмущённого операторов H и H_0.

Теперь кратко опишем схему доказательства теоремы 1. Она будет основана на матричном варианте метода Биркгофа, развиваемого в работах [10, 11]. Пусть $z = \lambda^{1/4}$, $z \in \mathcal{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathcal{Z}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \pi/4)\}$. Введём в рассмотрение параметры $\omega_1 = -\omega_4 = i$, $\omega_2 = -\omega_3 = 1$. Тогда имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}(i\omega_1 z) \leqslant \operatorname{Re}(i\omega_2 z) \leqslant \operatorname{Re}(i\omega_3 z) \leqslant \operatorname{Re}(i\omega_4 z), \quad z \in \mathcal{Z}_+. \tag{6}$$

Определим фундаментальную матрицу $A(x,z)$, $x \in [0,1]$, $z \in \mathcal{Z}_+$, уравнения (2) следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \\ \phi_1''' + p\phi_1' & \phi_2''' + p\phi_2' & \phi_3''' + p\phi_1' & \phi_4''' + p\phi_4' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где ϕ_j, $j = \overline{1,4}$, – фундаментальные решения уравнения (2), удовлетворяющие асимптотике

$$\phi_j(x,z) = e^{izx\omega_j}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})), \quad \phi_j'(x,z) = iz\omega_j e^{izx\omega_j}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \tag{8}$$

при $|z| \to \infty$. Существование таких решений установлено в [9, гл. 2]. Матрично-значная функция A удовлетворяет уравнению

$$A' = \mathcal{P}A, \quad \text{где} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 1 \\ \lambda - q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Следовательно, функция A – решение уравнения (9), для которого выполнена асимптотика

$$A(x,z) = \Omega(z)(\mathbb{I}_4 + \mathcal{O}(z^{-1}))e^{izx\mathcal{T}}, \quad x \in [0,1], \tag{10}$$

при $|z| \to \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$, где $\mathbb{I}_4$ – единичная матрица размерности 4×4 и

$$\mathcal{T} = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \operatorname{diag}(i, 1, -1, -i), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & iz & -iz & z \\ z^2 & -z^2 & -z^2 & z^2 \\ -z^3 & -iz^3 & iz^3 & z^3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Основная идея исследования состоит в асимптотическом анализе фундаментальной матрицы A для достаточно больших $|z|$. Такой анализ является стандартным при изучении спектральных свойств оператора Шрёдингера. Однако в случае оператора четвёртого порядка появляются дополнительные сложности, связанные с тем, что фундаментальная матрица содержит как экспоненциально растущие элементы, так и экспоненциально убывающие элементы при $|z| \to \infty$ в любом направлении.

Перейдём к изучению асимптотического поведения фундаментальной матрицы. Пусть $z \in \in \mathcal{Z}_+$ и A – матрично-значное решение уравнения (9) вида (7). Введём в рассмотрение матрично-значную функцию Y такую, что выполняется равенство

$$A(x,z) = \Omega(z)Y(x,z), \quad x \in [0,1], \quad z \in \mathcal{Z}_+. \tag{12}$$

Подставив это выражение в (9) и использовав тождество $\Omega^{-1}\mathcal{P}\Omega = iz\mathcal{T} + P/z$, получим, что Y удовлетворяет уравнению $Y' - iz\mathcal{T}Y = PY/z$, где P – некоторая матрица, явный вид которой легко записать. Несложно найти обратный оператор к оператору в левой части последнего уравнения (подробнее см. в [11]). Рассмотрим матрично-значную функцию X такую, что

$$Y(x,z) = X(x,z)e^{izx\mathcal{T}}, \quad x \in [0,1], \quad z \in \mathcal{Z}_+. \tag{13}$$

Тогда X – решение дифференциального уравнения

$$X' + iz(X\mathcal{T} - \mathcal{T}X) = PX/z,$$

которое (как и эквивалентное ему уравнение (9)) имеет много решений. Выберем решение X, удовлетворяющее условиям

$$X_{jk}(0,z) = 0, \quad j < k, \quad X_{jk}(1,z) = \delta_{jk}, \quad j \geqslant k.$$

Выбор X приводит к необходимому решению A уравнения (9) вида (7).

Пусть $|z|$ – достаточно большое число. В работе [11] было показано, что X – единственное решение интегрального уравнения

$$X = \mathbb{I}_4 + \frac{KX}{z}, \tag{14}$$

где

$$(KX)_{lj}(x,z) = \int\limits_0^1 K_{lj}(x,s,z)(PX)_{lj}(s,z)\,ds, \quad l,j = \overline{1,4},$$

$$K_{lj}(x,s,z) = \begin{cases} e^{iz(x-s)(\omega_l-\omega_j)}\chi(x-s), & l < j, \\ -e^{iz(x-s)(\omega_l-\omega_j)}\chi(s-x), & l \geqslant j, \end{cases} \quad \chi(s) = \begin{cases} 1, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Оценки (6) показывают, что для ядра интегрального оператора K выполнено неравенство $|K_{lj}(x,s,z)| \leqslant 1$ для всех $l,j = \overline{1,4}$ и $(x,s,z) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathcal{Z}_+$. Тогда, применив метод простых итераций к интегральному уравнению (14), получим асимптотику

$$X(x,z) = \mathbb{I}_4 + \mathcal{O}(z^{-1})$$

при $|z| \to \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$, равномерно по $x \in [0,1]$. Проведённые выше рассуждения показывают, что Y допускает представление (13), где X удовлетворяет полученной асимптотике. Подставив (13) в (12), имеем равенство (10).

Таким образом, установлена теорема о факторизации для матрично-значного решения уравнения (9). Эта теорема играет ключевую роль для доказательства асимптотики собственных значений оператора H.

Теорема 3. *Пусть $p, q \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует матрично-значное решение A уравнения (9) такое, что каждая функция $A(x,\cdot\,)$, $x \in [0,1]$, является аналитической в $\mathcal{Z}_+$ для достаточно большого $|z|$ и удовлетворяет равенству*

$$A(x,z) = \Omega(z)X(x,z)e^{izx\mathcal{T}}, \tag{15}$$

где X – решение интегрального уравнения (14), $\mathcal{T}$ и Ω имеют вид (11).

Согласно формуле (15) фундаментальная матрица A представима в виде произведения матрицы Ω простой структуры, ограниченной матрицы и диагональной матрицы, причём диагональная матрица содержит все экспоненциально растущие слагаемые. Таким образом, становится удобно анализировать свойства фундаментальной матрицы A.

Основываясь на формуле (15) факторизации фундаментальной матрицы A, установим асимптотику характеристической функции D. Напомним, что её нули являются спектром оператора H. Пусть $(x,z)\in[0,1]\times\mathcal{Z}_+$ и значение $|z|$ является достаточно большим. Несложно показать, что справедлива формула

$$D(\lambda)=\frac{\det\phi(z)}{\det A(0,z)}, \tag{16}$$

где

$$\phi(z)=\begin{pmatrix}\phi_1(0,z) & \phi_2(0,z) & \phi_3(0,z) & \phi_4(0,z)\\ \phi_1'(0,z) & \phi_2'(0,z) & \phi_3'(0,z) & \phi_4'(0,z)\\ \phi_1(1,z) & \phi_2(1,z) & \phi_3(1,z) & \phi_4(1,z)\\ \phi_1'(1,z) & \phi_2'(1,z) & \phi_3'(1,z) & \phi_4'(1,z)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из асимптотики (10) и формулы (11) непосредственно следует, что

$$\det A(0,z)=-16iz^6(1+\mathcal{O}(z^{-1})) \tag{18}$$

при $|z|\to\infty,\ z\in\mathcal{Z}_+$. Полученная асимптотика и равенство (16) показывают, что большие положительные нули функции D совпадают с нулями $\det\phi(z)$. Следовательно, возникает необходимость преобразовать определитель матрицы ϕ вида (17). Раскрыв определитель, получим следующую асимптотику:

$$\det\phi(z)=\xi_1(z)\xi_2(z)+\xi_3(z)\xi_4(z)+\mathcal{O}(z^4) \tag{19}$$

в секторе $\mathcal{Z}_+$, где

$$\xi_1(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_3(1,z) & \phi_4(1,z)\\ \phi_3'(1,z) & \phi_4'(1,z)\end{pmatrix},\quad \xi_2(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_1(0,z) & \phi_2'(0,z)\\ \phi_1'(0,z) & \phi_2'(0,z)\end{pmatrix},$$

$$\xi_3(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_2(1,z) & \phi_4(1,z)\\ \phi_2'(1,z) & \phi_4'(1,z)\end{pmatrix},\quad \xi_4(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_3(0,z) & \phi_1(0,z)\\ \phi_3'(0,z) & \phi_1'(0,z)\end{pmatrix}.$$

Подставив асимптотики (18) и (19) в (16), имеем

$$D(\lambda)=\frac{i}{16z^6}(\xi_1(z)\xi_2(z)+\xi_3(z)\xi_4(z)+\mathcal{O}(z^4)) \tag{20}$$

при $|z|\to\infty$. Последнее соотношение показывает, что асимптотический анализ нулей определителя $\det\phi(z)$ размерности 4×4 сводится к анализу нулей суммы произведений определителей размерности 2×2.

Отметим, что асимптотика (8) является достаточно грубой и не даёт точной асимптотики нулей функции D. Однако, применяя теорему Руше, можно вычислить количество нулей в круге большого радиуса, а также их локализацию. Взяв следующие слагаемые итерационного ряда в качестве приближения решения интегрального уравнения (14), мы улучшаем асимптотику фундаментальной матрицы A, а значит, и асимптотику $\phi_j,\ \ j=\overline{1,4}$. Подставляя эту более точную асимптотику ϕ_j в (20), получаем спектральные асимптотики (3) и (4) нулей функции D.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных – кандидатов наук (проект МК-160.2022.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gupta C.P.* Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems // Appl. Anal. 1990. V. 36. P. 157–169.
2. *Peletier L.A., Rodrigues J.A.* Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation // J. Differ. Equat. 2004. V. 203. P. 185–215.
3. *McLaughlin J.R.* An inverse eigenvalue problem of order four – an infinite case // SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 9. № 3. P. 395–413.
4. *Caudill Jr L.F., Perry P.A., Schueller A.W.* Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 29. № 4. P. 935–966.
5. *Boumenir A.* Sampling for the fourth-order Sturm–Liouville differential operator // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 278. P. 542–550.
6. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
7. *Поляков Д.М.* Спектральный анализ несамосопряжённого оператора четвёртого порядка с негладкими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 1. С. 165–184.
8. *Ma R., Wang H., Elsanosi M.* Spectrum of a linear fourth-order differential operator and its applications // Math. Nachr. 2013. V. 286. P. 1805–1819.
9. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
10. *Баданин А.В., Коротяев Е.Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвёртого порядка // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 1–48.
11. *Badanin A., Korotyaev E.L.* Third-order operators with three-point conditions associated with Boussinesq's equation // Appl. Anal. 2021. V. 100. P. 527–560.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.
После доработки 10.06.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 170–182

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

О БАЗИСЕ ГРЁБНЕРА ИДЕАЛА ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

© 2023 г. **А. Е. Руденок, М. Н. Василевич**

Изучены проблема центра и цикличность особых точек системы Куклеса. Необходимые условия центра в начале координат получены как многообразие идеала ляпуновских величин, вычисленных непосредственным решением полиномиальной системы, левые части которой составляют базис Грёбнера идеала. Этот идеал использован также для вычисления цикличности центров и фокусов системы. Доказана теорема, которая позволяет находить цикличность центров полиномиальных систем, используя вместо идеала ляпуновских величин его базис Грёбнера.

DOI: 10.31857/S0374064123020048, EDN: PUHQOJ

Введение. Система Куклеса (см. [1]) представляет собой систему вида

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B + Lx) + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3, \tag{1}$$

где $A,$ $B,$ $K,$ $L,$ $M,$ $N,$ U – вещественные константы.

И.С. Куклес был первым в изучении систем вида (1), и с тех пор они и их обобщения называются *системами Куклеса* и *обобщёнными системами Куклеса.* Считается [2], что решение задачи о различении центра и фокуса для системы Куклеса было дано независимо Н.Г. Ллойдом и Дж.М. Пирсоном [3], а также А.П. Садовским [4, 5] с использованием разных подходов.

В частности, в работе [3] для облегчения вычислений значение коэффициента B было положено равным единице. Это возможно, если $B \neq 0,$ поскольку ляпуновские величины представляют собой однородные (в обобщённом смысле) полиномы. Многообразие центра было получено с помощью решения системы из результантов постоянных Ляпунова и с использованием ресурсов вычислительных центров (Manchester Computing Center и Minnesota Supercomputer Center). Для доказательства достаточности условий центра использовался метод построения первого интеграла с помощью инвариантных алгебраических кривых.

В отличие от авторов [3], А.П. Садовский в статьях [4, 5] полагал коэффициент B равным коэффициенту $N,$ если $BN \neq 0.$ Это возможно по той же причине однородности ляпуновских величин. Основным инструментом исследования в статье [4] является метод Л.А. Черкаса, с помощью которого затруднительно получить необходимые условия центра, но он позволяет сравнительно просто доказывать достаточность условий центра. В работе [5] А.П. Садовский, используя свою программу для вычисления ляпуновских величин в пакете Mathematica 4.0, вычислил первые семь постоянных Ляпунова. Многообразие идеала, образованное из этих многочленов, он нашел с помощью их результантов. Необходимо отметить сложность вычислений этих результантов, степени которых достигали значения 996.

В работе [6], которую можно считать продолжением работы [3], авторы отмечают, что наиболее требовательным аспектом их работы является вычисление результантов многомерных полиномов. В ней они применили разработанное ими программное обеспечение для более эффективного вычисления результантов. Они также использовали модульную арифметику, чтобы избежать необходимости вычислять некоторые очень большие результанты.

В статье [7] показано, что система Куклеса при $N = 0$ может иметь негрубый фокус пятого порядка и не менее пяти малоамплитудных предельных циклов, рождающихся из него. В [8] приведена система со значением $B = 0,$ которая имеет негрубый фокус шестого порядка, из которого рождаются шесть малоамплитудных предельных циклов.

В монографии [9, с. 125] А.П. Садовский вычислил базис Грёбнера идеала, образующие которого состоят из семи ляпуновских величин, а сам базис Грёбнера состоит из пятидесяти семи многочленов. Из-за громоздкости этого базиса трудно найти непосредственно из него многообразие центра.

В работе [10] применяется новый метод получения необходимых и достаточных условий центра, разработанный А. П. Садовским и основанный на методе нормальных форм. Вместо изучения многообразия идеала фокусных величин исследуется многообразие идеала, базисом которого являются полиномы, полученные новым методом. В отличии от статьи [5], в этом исследовании результанты не применялись. Здесь был вычислен радикал идеала, его базис Грёбнера (не представленный в явном виде), а также его многообразие.

В настоящей статье удалось избежать больших вычислений, которые обычно возникают при использовании результантов. Найдено многообразие центра непосредственно при решении полиномиальной системы, левые части которой составляют базис Грёбнера идеала постоянных Ляпунова. Для упрощения вычислений сделаны подходящие замены коэффициентов системы Куклеса или параметризация многообразия идеала. При этом базис Грёбнера идеала оказывается таким, что во всех рассматриваемых в настоящей статье случаях он представлен в полном виде и не составляет труда найти его многообразие. Также находится число малоамплитудных предельных циклов, рождающихся из особой точки типа центр или фокус, с помощью матрицы Якоби вектор-функции, состоящей из постоянных Ляпунова. Доказана теорема, которая позволяет находить цикличность центров полиномиальных систем, используя вместо идеала ляпуновских величин его базис Грёбнера, что существенно сокращает вычисления.

1. Условия центра для системы нелинейных колебаний. Рассмотрим систему нелинейных колебаний третьей степени по переменной y:

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = xP_0(x) + 3xyP_1(x) + y^2P_2(x) + y^3P_3(x). \tag{2}$$

Преобразование

$$y \to \frac{yP_0(x)}{1 - yP_1(x)} \tag{3}$$

переводит систему (2) в систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x}{\varphi(x)}(1 - B_2(x)y^2 - B_3(x)y^3), \tag{4}$$

где

$$\varphi(x) = P_0(x), \quad B_2(x) = -\frac{-3xP_1(x)^2 + P_0(x)P_2(x) + P_0'(x)}{x},$$

$$B_3(x) = -\frac{1}{x}(2xP_1(x)^3 - P_0(x)P_1(x)P_2(x) + P_0(x)^2P_3(x) - P_1(x)P_0'(x) + P_0(x)P_1'(x)). \tag{5}$$

Заметим, что для перехода от системы (2) к системе (4) используется не только замена (3), но и масштабирование независимой переменной t.

Применим к системе (4) преобразование $y \to y/\Psi(x)$, где

$$\Psi(x) = \exp\biggl(-\int\limits_0^x \frac{uB_2(u)}{\varphi(u)}\,du\biggr). \tag{6}$$

С учётом масштабирования переменной t получим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x}{\varphi(x)\Gamma(x)^2}(1 - \Gamma(x)^3B_3(x)y^3), \tag{7}$$

здесь $\Gamma(x) = 1/\Psi(x)$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + xf(x) + y^{2n+1}g(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где $f(x)$, $g(x)$ – голоморфные в окрестности точки $x=0$ функции $f(0)=0$. Введём обозначения

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+f(x)},\quad \beta_1(x)=-\frac{\varphi(x)}{x}g(x),$$

тогда система (8) примет вид

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=\frac{x}{\varphi(x)}(1-y^{2n+1}\beta_1(x)). \tag{9}$$

В дальнейшем будем использовать обозначения для произвольной функции $h(x)$ и заданной функции $\varphi(x)$, голоморфных в окрестности точки $x=0$:

$$d(h)=\frac{\varphi(x)}{x}h'(x).$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\gamma_1=\beta_1,\quad \gamma_3=\frac{\varphi}{x}\gamma_1'=d(\gamma_1),\quad \gamma_5=\frac{\varphi}{x}\gamma_3'=d(\gamma_3),\quad \ldots,\quad \gamma_{2s+1}(x)=d(\gamma_{2s-1}),\quad \ldots \tag{10}$$

Теорема Отрокова [11, с. 110–116]. *Для того чтобы система (9) имела в особой точке $O(0,0)$ центр, необходимо и достаточно, чтобы функции (10) были голоморфными в точке $x=0$.*

Заметим, что хотя Н.Ф. Отроков доказал эту теорему для системы Льенара (т.е. при значении $n=0$ в (9)), из его рассуждений следует, что эта теорема справедлива для системы (9) при всех $n\in\mathbb{N}$.

Будем считать, что в (10) функция $\varphi(x)$ та же, что и в системе (4).

Теорема 1. *Для того чтобы система (4) имела центр в особой точке, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций*

$$B_3,\quad B_5=3B_2B_3+d(B_3),\quad \ldots,\quad B_{2i+1}=(2i-1)B_2B_{2i-1}+d(B_{2i-1}),\quad \ldots \tag{11}$$

была голоморфной в точке $x=0$.

Доказательство. Строим последовательность функций (10) для системы (7). При этом учитываем, что в качестве $\varphi(x)$ будет выбрана функция $\varphi(x)\Gamma(x)^2$, в качестве $\beta_1(x)$ – функция $\Gamma(x)^3B_3(x)$. Учтём также, что из (6) вытекает равенство $\Gamma'(x)=\Gamma(x)xB_2(x)/\varphi(x)$. Имеем последовательность

$$\gamma_1(x)=\Gamma(x)^3B_3(x),$$

$$\gamma_3(x)=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}(\Gamma(x)^3B_3(x))'=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}\left(3\Gamma(x)^3\frac{xB_2(x)}{\varphi(x)}B_3(x)+\Gamma(x)^3(B_3(x))'\right)=$$

$$=\Gamma(x)^5\left(3B_2(x)B_3(x)+\frac{\varphi(x)B_3'(x)}{x}\right)=\Gamma(x)^5B_5(x),$$

$$\gamma_5(x)=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}(\Gamma(x)^5B_5(x))'=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}\left(5\Gamma(x)^5\frac{xB_2(x)}{\varphi(x)}B_5(x)+\Gamma(x)^5(B_5(x))'\right)=$$

$$=\Gamma(x)^7\left(5B_2(x)B_5(x)+\frac{\varphi(x)B_5'(x)}{x}\right)=\Gamma(x)^7B_7(x),\quad \ldots$$

Теорема доказана.

2. Базис Грёбнера и многообразие центра системы Куклеса. Заметим, что в качестве ляпуновских величин системы рассматриваются только те из них, которые не равны тождественно нулю в рассматриваемом классе систем.

Для системы Куклеса (1) из равенства нулю первой ляпуновской величины имеем

$$L=-N-BU. \tag{12}$$

С учётом (12) система (1) примет вид

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B - (N + BU)x) + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3. \tag{13}$$

В системе (13) сделаем замену

$$N \to -BU + N \tag{14}$$

и получим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B - Nx) + (A - U - Mx)y^2 - (N - BU)y^3. \tag{15}$$

Теорема 2. *Для того чтобы система (15) имела центр в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

a) $B = 0,\ \ N = 0;$

b) $U = 0,\ \ N = 0,\ \ A = 0;$

c) $B = 0,\ \ N = -U^2/(3\sqrt{2}),\ \ A = -U,\ \ M = 0,\ \ K = -U^2/3;$

d) $B = 0,\ \ N = U^2/(3\sqrt{2}),\ \ A = -U,\ \ M = 0,\ \ K = -U^2/3;$

e) $M = -2B^2,\ \ K = 0,\ \ A = 0,\ \ N = 0;$

f) $U = 0,\ \ N = -B^2s^2(2 + s^4)/2,\ \ K = -B^2s^4(2 + s^4)/2,\ \ M = B^2(-2 + s^4)(2 + s^4)/2,$ $A = -Bs^2(4 + s^4)/2;$

g) $U = 0,\ \ N = B^2s^2(2 + s^4)/2,\ \ K = -B^2s^4(2 + s^4)/2,\ \ M = B^2(-2 + s^4)(2 + s^4)/2,$ $A = Bs^2(4 + s^4)/2;$

h) $N = BU,\ \ M = (A - U)^2U/(A - 2U),\ \ K = U(-A + U);$

i) $N = B^2s(2+s^2)/2,\ \ A = Bs(4+s^2)/2,\ \ K = -B^2s^2(2+s^2)/2,\ \ M = B(-4B+Bs^4-2sU)/2;$

k) $A = -\dfrac{16U}{(2 + s^2)^2},\ \ B = \dfrac{4(-2 + s^2)U}{s(2 + s^2)^2},\ \ K = -\dfrac{64U^2}{s^2(2 + s^2)^2(4 + s^2)},\ \ M = \dfrac{8(-2 + s^2)U^2}{(2 + s^2)^2(4 + s^2)},$ $N = -\dfrac{32U^2}{s(2 + s^2)^2(4 + s^2)}.$

Здесь s *– произвольный параметр.*

Доказательство. С учётом (12) и (14) формулы (5) примут вид

$$\varphi(x) = 1 - Ax - Kx^2,$$

$$B_2(x) = \frac{1}{x}(U + (A^2 + 3B^2 + 2K + M - AU)x + (AK - AM - KU - 6BN)x^2 + (-KM + 3N^2)x^3),$$

$$\begin{gathered} B_3(x) = B(A^2 + 2B^2 + 2K + M + AU) - N(A + U) + \\ + ((-6B^2 - 3K - M + AU)N - B(-AK + AM + A^2U - KU))x + \\ + (-BK(M + 2AU) + N(AK + AM + 6BN + KU))x^2 + (-BK^2U + N(K^2 + KM - 2N^2))x^3. \end{gathered} \tag{16}$$

Вычислим идеал J, образованный из первых шести ляпуновских величин системы (15), например, используя программу А.П. Садовского [5]. Следует заметить, что в [5] эта программа приведена с опечатками, которые в наших вычислениях исправлены. Первый член идеала J есть полином

$$ABK - ABM - 6B^2N - 3KN - MN + 2A^2BU + 6B^3U + 7BKU + 3BMU - 2ANU + 3ABU^2 - 3NU^2.$$

Остальные пять образующих идеала J мы не приводим из-за их громоздкости, в частности, степень шестого члена идеала равна $\{6, 6, 7, 7, 12, 13\}$ по переменным $\{K, M, N, U, A, B\}$ соответственно и состоит из 9097 слагаемых.

В дальнейшем при вычислении базиса Грёбнера идеала J можем полагать значение U равным либо нулю, либо единице. Это вытекает из того факта, что образующие идеала J представляют собой однородные (в обобщённом смысле) многочлены. Если $U \neq 0$, то замена

$$A \to AU, \quad B \to BU, \quad N \to NU^2, \quad K \to KU^2, \quad M \to MU^2 \tag{17}$$

сводит идеал J к идеалу, который получается из J при значении U, равном единице.

1. Рассмотрим случай $U = 0$.

Положив $U = 0$ в идеале J, получим идеал, который обозначим через j.

1.1. Рассмотрим сначала подслучай $N = 0$.

Базис Грёбнера идеала j в порядке переменных $\{B, M, A, K\}$ равен $\langle ABK^2, AB(M-K)\rangle$. Отсюда получим многообразие этого идеала:

1) $U = 0,\ \ N = 0,\ \ B = 0$;

2) $U = 0,\ \ N = 0,\ \ A = 0$;

3) $U = 0,\ \ N = 0,\ \ K = 0,\ \ M = 0$.

Подставив эти значения в формулы (16), получим:

случай 1) $\varphi(x) = 1 - Kx^2$, $B_2(x) = 3B^2 + 2K + M - KMx^2$, $B_3(x) = B(2B^2 + 2K + M - KMx^2)$, что соответствует симметрии поля направлений системы (15) относительно оси Oy;

случай 2) $B_3(x) = 0$, что соответствует симметрии поля направлений системы (15) относительно оси Ox;

случай 3) функции равны

$$\varphi(x) = 1 - Ax, \quad B_2(x) = A^2 + 3B^2, \quad B_3(x) = B(A^2 + 2B^2).$$

По формулам (13) получим

$$B_5(x) = 3B(A^2 + 2B^2)(A^2 + 3B^2), \quad B_7(x) = 15B(A^2 + 2B^2)(A^2 + 3B^2)^2.$$

Методом математической индукции, используя формулы (11), легко доказать, что

$$B_{2n+1}(x) = (2n-1)!!B(A^2 + 2B^2)(A^2 + 3B^2)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, на основании теоремы 1 система (15) имеет в начале координат центр.

Полученный случай 1) есть частный случай п. a) теоремы 2, при выполнении которого, как легко проверить, $B_3(x) = 0$. В формулировке теоремы 2 полученный случай 3) заменён на более общий случай п. h), который будет рассмотрен далее.

1.2. Рассмотрим теперь подслучай $N \neq 0$. Если $N > 0$, то замена

$$A \to An, \quad B \to Bn, \quad N \to n^2, \quad K \to Kn^2, \quad M \to Mn^2 \tag{18}$$

сводит идеал j к идеалу, в котором $N = 1$. Вычислив базис Грёбнера этого идеала в порядке переменных $\{B, M, A, K\}$, получим

$$g_1 = \langle (1+K^2)^3(4A^2 + 16K + 2A^2K^2 + 8K^3 + K^5),$$

$$(1+K^2)^2(2A^2 - 31K - K^3)(4A^2 + 16K + 2A^2K^2 + 8K^3 + K^5),$$

$$(1+K^2)(-2 + K^2 + KM),$$

$$220 + 148A^2K + 482K^2 + 150A^2K^3 + 610K^4 + 76A^2K^5 +$$

$$+ 331K^6 + 14A^2K^7 + 80K^8 + 7K^{10} + 20A^2M - 30KM,$$

$$(3K + M)(-2 + K^2 + KM),$$

$$(1+K^2)(4A^3 + 360B + 106AK + 6A^3K^2 + 90BK^2 +$$

$$+ 24AK^3 + 2A^3K^4 + 9AK^5 + AK^7 + 90AM),$$

$$-72 + 36AB - 50A^2K - 182K^2 - 44A^2K^3 - 185K^4 -$$

$$- 22A^2K^5 - 96K^6 - 4A^2K^7 - 23K^8 - 2K^{10},$$

$$60A - 4A^3K + 630BK + 89AK^2 - 10A^3K^3 + 90BK^3 - 40AK^4 - 8A^3K^5 -$$

$$- 33AK^6 - 2A^3K^7 - 10AK^8 - AK^{10} + 180BM + 150AKM + 45AM^2,$$

$$254A^2+540B^2+476K+20A^2K^2+485K^3-2A^2K^4-12K^5-$$
$$-8A^2K^6-25K^7-4K^9+270M+270K^2M\rangle.$$

Решив систему $g_1=0$ относительно переменных $\{B,M,A,K\}$ и исключив комплексные случаи, имеем значения

$$B=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-K}\sqrt{2+K^2}},\quad M=-\frac{-2+K^2}{K},\quad A=\mp\frac{\sqrt{-K}(4+K^2)}{\sqrt{2}\sqrt{2+K^2}}.$$

Это многообразие является вещественным, только если K принимает отрицательные значения. Положив $K=-s^2$ и применив замену, обратную к (18), получим многообразие

$$U=0,\quad \frac{K}{N}=-s^2,\quad \frac{B}{\sqrt{N}}=\frac{\sqrt{2}}{s\sqrt{2+s^4}},\quad \frac{M}{N}=\frac{-2+s^4}{s^2},\quad \frac{A}{\sqrt{N}}=\frac{s(4+s^4)}{\sqrt{2}\sqrt{2+s^4}}. \tag{19}$$

Из третьего равенства в (19) выразим $N=B^2s^2(2+s^4)/2$. Подставив это выражение в остальные равенства (19), получим п. $f)$ теоремы. При этих значениях коэффициентов функция $B_3(x)$ в формулах (16) равна нулю, т.е. система (15) имеет центр в начале координат.

Аналогично рассматривается случай $N<0$. При этом будет получен п. $g)$ теоремы.

2. Рассмотрим случай $U=1$.

2.1. Пусть $B=0$.

Тогда базис Грёбнера идеала J, вычисленный в порядке переменных $\{N,K,M,A\}$, равен

$$h=\langle(1+A)N,MN,(1+3K)N,N(-1+18N^2)\rangle.$$

Решив систему $h=0$ относительно переменных $\{N,K,M,A\}$, получим три случая:
1) $B=0,\ \ N=0$;
2) $B=0,\ \ U=1,\ \ N=-1/(3\sqrt{2}),\ \ K=-1/3,\ \ M=0,\ \ A=-1$;
3) $B=0,\ \ U=1,\ \ N=1/(3\sqrt{2}),\ \ K=-1/3,\ \ M=0,\ \ A=-1$.

Во всех трёх случаях функция $B_3(x)=0$, т.е. система (15) имеет центр в начале координат.

Случай 1) уже рассмотрен выше. Применив к случаям 2), 3) преобразование, обратное к (17), получим пп. $c)$, $d)$ теоремы.

2.2. Предположим теперь, что $B\neq 0$.

В системе (15) и в идеале J сделаем замену

$$N\to NB. \tag{20}$$

Получим систему

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x(1-Ax-Kx^2)-3Bx(1-Nx)y+(A-U-Mx)y^2+B(U-N)y^3. \tag{21}$$

Идеал J перейдет в идеал, который после сокращения на множитель B обозначим как J_1. Положим в нем $U=1$, $B=\sqrt{b}$ и обозначим полученный идеал J_2. Вычислив его базис Грёбнера в порядке переменных $\{b,M,K,A,N\}$, имеем

$$g_2=\langle(K+AN-N^2)(A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2),$$
$$(K+AN-N^2)(-K-AN+KN+N^2+AN^2),(A^2+4K+AK)(K+AN-N^2),$$
$$A^2-K-AK+AM-4AN-3A^2N-3KN-2MN+3N^2+3AN^2,$$
$$2AK+KM+A^2N-2KN-2AKN-AN^2+3KN^2+MN^2,$$
$$(-1+N)(A+A^2+2b+2K+M-N-AN),$$
$$-A-A^2+A^3-2b+2Ab-K+2AK+A^2K+2bK+2K^2-M+N+$$
$$+4AN+A^2N+4KN+AKN+2MN-3N^2-2AN^2-3KN^2-MN^2\rangle.$$

Замечание 1. Объединив замены (14) и (20), получим замену $N \to -BU+NB$, ключевую в данной работе. Она позволила представить базис Грёбнера идеала ляпуновских величин системы Куклеса (при условии $UB \neq 0$) в простом виде g_2. В статье [10] базис Грёбнера содержит пятьдесят семь многочленов, из которых затруднительно вычислить многообразие идеала. Впервые эта замена представлена в материалах конференции [12].

2.2.1. Учитывая разложение пятого члена базиса g_2 на множители, рассмотрим сначала случай $N=1$.

Решив систему $g_2=0$ относительно переменных $\{N,K,M,A\}$, получим

$$N=1, \quad M=\frac{(-1+A)^2}{-2+A}, \quad K=1-A. \tag{22}$$

Формулы (16) при выполнении условий (22) примут вид

$$\varphi(x)=(-1+x)(-1-x+Ax),$$

$$B_2(x)=\frac{1}{(-2+A)x}(2+A+(-3+6A-4A^2+A^3-6b+3Ab)x-$$
$$-2(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)x^2+(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)x^3),$$
$$B_3(x)=-\frac{(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)(-1+x)^3}{-2+A}.$$

Используя формулы (13), вычислим

$$B_5(x)=-\frac{3(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)(-1+x)^5}{(-2+A)^2},$$

$$B_7(x)=-\frac{15(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)^2(-1+x)^7}{(-2+A)^3}.$$

Легко показать, используя метод математической индукции и систему (13), что справедлива формула

$$B_{2n+1}(x)=-\frac{(2n-1)!!(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)}{(-2+A)^n}\times$$
$$\times(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)^{n-1}(-1+x)^{2n+1}.$$

Так как при этом условия теоремы 1 выполняются, то полученное многообразие идеала (22) есть многообразие центра системы (15). Выполнив в нём преобразование, обратное к (17), получим случай п. $h)$ теоремы 2.

2.2.2. Рассмотрим теперь случай $A+A^2+2b+2K+M-N-AN=0$. Вычислив (при выполнении этого условия и условия $N\neq 1$) базис Грёбнера идеала, построенного на базисе g_2, в порядке переменных $\{b,M,K,A,N\}$ будем иметь

$$g_3=\langle (K+AN-N^2)(A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2),$$
$$(K+AN-N^2)(-K-AN+KN+N^2+AN^2), (A^2+4K+AK)(K+AN-N^2),$$
$$A^2-K-AK+AM-4AN-3A^2N-3KN-2MN+3N^2+3AN^2,$$
$$2AK+KM+A^2N-2KN-2AKN-AN^2+3KN^2+MN^2,$$
$$A+A^2+2b+2K+M-N-AN\rangle.$$

Рассмотрим случаи, соответствующие разложению первого члена этого базиса на множители.

2.2.2.1. В случае $K+AN-N^2=0$, решив систему $g_3=0$, получим многообразия идеала J_2:

1) $b=-\dfrac{(A-N)^3}{2(A-2N)}$, $M=\dfrac{(A-N)(-A+2N+2AN-3N^2)}{A-2N}$, $K=(N-A)N$;

2) $b=-M/2$, $K=0$, $A=0$, $N=0$.

Случай 2) есть случай п. $e)$ теоремы. В случае 1), поскольку $b=B^2$, с целью избавиться от иррациональности введём параметр s по формуле

$$s^2=-\frac{2(A-2N)}{A-N}.$$

Получим многообразие центра в параметрическом виде:

$$N=\frac{1}{2}B^2s(2+s^2),\quad A=\frac{1}{2}Bs(4+s^2),\quad K=-\frac{1}{2}B^2s^2(2+s^2),\quad M=\frac{1}{2}B(-4B+Bs^4-2sU).$$

Выполнив в нём преобразование, обратное к (17), получим случай п. $i)$ теоремы 2. При этих значениях в (16) $B_3(x)=0$.

2.2.2.2. В случае $A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2=0$ базис Грёбнера идеала, построенного на базисе g_3, в порядке переменных $\{b,M,K,A,N\}$ равен

$$h_1=\langle A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2,-K-AN+KN+N^2+AN^2,$$

$$A^2+4K+AK,2A+M-3N-3AN,-A+A^2+2b+2K+2N+2AN\rangle.$$

Решив систему $h_1=0$ и исключив комплексный случай, получим действительное многообразием идеала в виде

$$b=\frac{-3A^2-A^3\mp 2A\sqrt{-A}}{2(4+A)},\quad K=-\frac{A^2}{4+A},$$

$$M=\frac{-2A+A^2\pm 3A\sqrt{-A}}{4+A},\quad N=\frac{2A+A^2\pm A\sqrt{-A}}{(1+A)(4+A)}.$$

Введём параметр s по формуле $A=-16(2+s^2)^{-2}$. Учтём, что $b=B^2$. Возвращаясь к старым переменным (используя преобразования (17), (20)), получим многообразие

$$A=-\frac{16U}{(2+s^2)^2},\quad B=\frac{4(-2+s^2)U}{s(2+s^2)^2},\quad K=-\frac{64U^2}{s^2(2+s^2)^2(4+s^2)},$$

$$M=\frac{8(-2+s^2)U^2}{(2+s^2)^2(4+s^2)},\quad N=-\frac{32U^2}{s(2+s^2)^2(4+s^2)}.$$

Легко проверить, что при этом $B_3(x)=0$, т.е. это многообразие принадлежит многообразию центра системы (15). Это случай п. $k)$ теоремы 2. Теорема 2 доказана.

3. Цикличность центров системы Куклеса в семействе систем Куклеса. Будем рассматривать систему Куклеса при возмущениях, не выводящих её за пределы семейства систем

$$\dot{x}=-y+\lambda x,\quad \dot{y}=x+\lambda y+\sum_{i+j=2}^{3}a_{i,j}x^iy^j. \tag{23}$$

Явные выражения параметров системы (15) в случаях центра в формулировке теоремы 2 позволяют легко найти цикличности этих центров.

Обозначим $\Lambda=(K,M,N,U,A,B)$. Будем считать Λ точкой в шестимерном аффинном пространстве A^* параметров системы (15). Точку $\Lambda_0\in A^*$ будем называть *центром* (*фокусом*), если соответствующая система (15) имеет центр (фокус) в особой точке $(x,y)=(0,0)$.

Введём вектор-функцию
$$F(\Lambda) = (L_1, L_2, \ldots, L_m), \tag{24}$$
где $L_i \ \ (i = \overline{1,m})$ – постоянные Ляпунова системы (15). Точку $\Lambda_0 \in A^*$ будем называть *фокусом n-го порядка*, если выполняются соотношения
$$F(\Lambda_0) = (0, 0, \ldots, 0, L_n(\Lambda_0), \ldots), \quad L_n(\Lambda_0) \neq 0.$$
Точку $\Lambda_0 \in A^*$ будем называть *центром n-го порядка*, если в любой достаточно малой её окрестности в пространстве A^* имеется фокус n-го порядка.

Пусть Λ_0 – центр или фокус n-го порядка. Будем говорить, что Λ_0 имеет *цикличность*, равную n, если для любой достаточно малой ε-окрестности точки $(x,y) = (0,0)$ существует δ-окрестность точки $\Lambda_0 \in A^*$, в которой есть фокус, имеющий n предельных циклов, расположенных в ε-окрестности точки $(x,y) = (0,0)$.

Для вычисления цикличности центров системы Куклеса в семействе систем (24) справедлива следующая

Теорема Кристофера [13]. *Предположим, что c – точка на многообразии центров в пространстве параметров и первые $L_1, \ \ldots, \ L_k$ ляпуновские величины имеют независимые линейные части (относительно их разложения по всем параметрам возмущения). Тогда точка c лежит на компоненте многообразия центров коразмерности не менее $k+1$, добавляя параметр следа L_0, и существуют бифуркации, которые порождают k предельных циклов локально из центра, соответствующего значению параметра c.*

Замечание 2. Если в теореме Кристофера не требовать, чтобы многообразия центров имели коразмерность, в точности равную $k+1$, то условие строгой последовательности линейно независимых по линейным частям ляпуновских величин несущественно. Можно, например, начинать её формулировку следующим образом: если якобиан первых n ляпуновских величин в точке c имеет ранг k, $k \leqslant n$, то точка c лежит на компоненте многообразия центров коразмерности не менее $k+1$.

Обозначим через $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_k$ линейно независимые линейные части первых n ляпуновских величин. Потребуем для последовательности $\lambda_0, \ \lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_k$, где λ_0 – параметр линейной части системы (см. (23)), выполнения условий:

1) она должна быть знакочередующейся;

2) $|\lambda_0| \ll |\lambda_1| \ll |\lambda_2| \ll \ldots \ll |\lambda_k|$.

Здесь $\ll$ означает "много меньше". Эти условия гарантируют существование вокруг особой точки $O(0,0)$ возмущённой системы $k+1$ замкнутых кривых без контакта, внутри которых имеется k малоамплитудных предельных циклов.

Используя замечание 2, можно утверждать следующее. Пусть c – точка на многообразии центров в пространстве параметров. Так как многообразие идеала и многообразие, задаваемое уравнениями $g = 0$, где g – базис Грёбнера идеала, одно и то же, то ранг якобиана образующих базиса Грёбнера, вычисленный в точке c, также как и ранг якобиана образующих идеала, определяет оценку снизу коразмерности многообразия центров, на котором лежит эта точка. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Предположим, что c – точка на многообразии центров в пространстве параметров. Если якобиан образующих базиса Грёбнера идеала ляпуновских величин в точке c имеет ранг k, то точка c лежит на компоненте многообразия центров коразмерности не менее $k+1$, добавляя параметр следа L_0, и существуют бифуркации, которые порождают k предельных циклов локально из центра, соответствующего значению параметра c.*

В статье [14] авторы, комментируя теорему Кристофера, замечают, что фактически существуют аналогичные предыдущие результаты, полученные С. Чиконе и М. Джейкобсом [15, 16], а также М. Хан [17] применяет их для системы Льенара. Со своей стороны заметим, что этот метод применён ещё раньше в работе [18] (лемма 1 и теорема 5).

Теорема 4. *В случае выполнения условий теоремы 2 соответствующий центр системы Куклеса (15) имеет в классе систем Куклеса (23) цикличность k не меньше чем:*

a) $k = 3$, *если* $AMU(-AM + A^2U + 2MU - 2AU^2 + U^3) \neq 0$;

b) $k = 4$, *если* $BKM \neq 0$;

c), d) $k=5$, *если* $U\neq 0$;
e) $k=4$, *если* $BU\neq 0$;
f), g) $k=4$, *если* $Bs\neq 0$;
h) $k=4$, *если* $BU(A^3+2AB^2-3A^2U-4B^2U+3AU^2-U^3)\neq 0$;
i) $k=4$, *если* $Bs(2Bs+Bs^3-2U)U\neq 0$;
k) $k=5$, *если* $U\neq 0$.

Доказательство. Через $DF(\Lambda)$ обозначим матрицу Якоби вектор-функции (24). Если $\Lambda=\{K,M,N,U,A,B\}$ – вектор параметров нелинейных частей системы (15), Λ_0 – центр и $\operatorname{rank}(DF(\Lambda))=n$ при значениях $\Lambda=\Lambda_0$, то Λ_0 имеет цикличность не менее $n+1$ в классе систем (23). На самом деле, в силу теоремы Кристофера условие $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0))=n$ гарантирует рождение n малоамплитудных предельных циклов, ещё один дополнительный предельный цикл рождается при возмущении первой постоянной Ляпунова $L+N$ (см. формулы (13), (15)), функционально независимой от других постоянных Ляпунова.

Легко вычислить матрицу Якоби $DF(\Lambda)$ вектор-функции $F(\Lambda)$, $\Lambda=\{K,M,N,U,A,B\}$, параметры которой состоят из образующих идеала J ляпуновских величин системы (15):

$$DF(\Lambda)=\{\{AB-3N+7BU,-AB-N+3BU,-6B^2-3K-M-2AU-3U^2,$$
$$2A^2B+6B^3+7BK+3BM-2AN+6ABU-6NU,BK-BM+4ABU-2NU+3BU^2,$$
$$AK-AM-12BN+2A^2U+18B^2U+7KU+3MU+3AU^2\},\ldots\}.$$

Подставив сюда последовательно значения параметров из условий теоремы 2 (вычислив миноры максимального порядка, не равные тождественно нулю) и условия, при которых хотя бы один из них ненулевой, получим условия теоремы 2. Теорема 4 доказана.

Теорема 3 даёт возможность при вычислении цикличности избежать громоздких вычислений, которые появляются при использовании теоремы Кристофера. Вычислим цикличность центров системы Куклеса (15), если $UB\neq 0$, используя базис g_2. Из полиномов g_2, учитывая, что $b=B^2$, и возвращаясь к старым переменным, а также используя преобразования (17), (20), получаем полиномы

$$\langle(B^2K+ABN-N^2)(A^2N^2-2A^2BNU+5AN^2U+A^2B^2U^2-4ABNU^2+4N^2U^2),$$
$$(B^2K+ABN-N^2)(-BKN-AN^2+B^2KU+ABNU-N^2U),$$
$$(B^2K+ABN-N^2)(AK+A^2U+4KU),$$
$$-AB^2K+AB^2M-3A^2BN-3BKN-2BMN+3AN^2+A^2B^2U-B^2KU-4ABNU+3N^2U,$$
$$B^2KM-2ABKN+3KN^2+MN^2+2AB^2KU+A^2BNU-2BKNU-AN^2U,$$
$$(-N+BU)(A^2B+2B^3+2BK+BM-AN+ABU-NU),$$
$$A^2B^2K+2B^4K+2B^2K^2+ABKN-3KN^2-MN^2+A^3B^2U+2AB^4U+2AB^2KU+A^2BNU+$$
$$+4BKNU+2BMNU-2AN^2U-A^2B^2U^2-2B^4U^2-B^2KU^2-B^2MU^2+4ABNU^2-$$
$$-3N^2U^2-AB^2U^3+BNU^3\rangle.$$

Заметим, что многообразие идеала, построенное на этих полиномах, совпадает с многообразием идеала J, если $UB\neq 0$. Вычисляя их якобиан по всем переменным и подставляя в него последовательно значения параметров из пп. e), h), i), k), а также учитывая, что ещё один дополнительный предельный цикл рождается при возмущении первой постоянной Ляпунова $L+N$, получаем, что соответствующий центр системы Куклеса (15) имеет в классе систем (23) цикличность не меньшую чем:
e) $k=4$, если $BU\neq 0$;
h) $k=4$, если $BU(A^3+2AB^2-3A^2U-4B^2U+3AU^2-U^3)\neq 0$;
i) $k=4$, если $Bs(2Bs+Bs^3-2U)U\neq 0$;
k) $k=5$, если $(-2+s^2)U\neq 0$,

как и в теореме 4. Заметим, что расхождение в дополнительном условии в п. $k)$ объясняется тем, что если $-2+s^2=0$, то из условий п. $k)$ имеем $B=0$, что было исключено при построении базиса g_2.

4. Цикличность фокуса седьмого порядка в классе систем Куклеса. В статье [5] А.П. Садовский рассмотрел систему Куклеса при возмущениях, не выводящих её за пределы семейства систем (23), и доказал существование системы с порядком фокуса равным семи, из которого рождается семь малоамплитудных предельных циклов. Цикличность особых точек он доказывал возмущением коэффициентов интеграла Ляпунова невозмущённой системы и построением топографической системы, состоящей из замкнутых кривых без контакта.

Рассмотрим систему (21) и идеал J_1 её ляпуновских величин. Известно [5], что система Куклеса имеет фокус седьмого порядка при четырнадцати различных значениях параметров системы. Для системы (21) при условии $U=1$ они вычисляются решением полиномиальных уравнений, полученных из базиса Грёбнера G идеала, образованного первыми пятью членами идеала J_1. Если вычислить G в порядке переменных $\{B,M,K,N,A\}$ и исключить случаи $K+AN-N^2=0$, $A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2=0$ (они рассмотрены в пп. 2.2.2.1 и 2.2.2.2), то первый его член есть многочлен от переменной A степени, равной 92. Можно говорить о семи различных действительных значениях многообразия этого идеала, поскольку остальные семь отличаются только знаком параметра B. Для одного из них с точностью до 60 знаков после запятой имеем

$$\begin{gathered}\Lambda_0=\{U=1,\quad A=7.990822516433026126692544037552789373404880787563321705746\,4,\\ N=1.31131183432056751555854336458228774131322885613266672389\,72,\\ K=-5.8688951619243736152944517091401487512751768807163046666217,\\ M=-0.0646901377171405031116142201347285831386829008073203160783,\\ B=5.7754361832649848697427677464763643462622157734387390916148\}.\end{gathered}\tag{25}$$

Подставляя эти значения в J_1, получим

$$J_1=\{0.\cdot 10^{-56},0.\cdot 10^{-53},0.\cdot 10^{-49},0.\cdot 10^{-46},0.\cdot 10^{-43},$$

$$6944017.8535466603795156186841580511746802742\,8\},$$

это подтверждает, что Λ_0 – фокус седьмого порядка. Напомним, что первая постоянная Ляпунова равна нулю в силу условия (12).

Следующая теорема справедлива для любых полиномиальных систем с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения.

Теорема 5. *Если* Λ_0 *– фокус порядка* n *в аффинном пространстве параметров системы,* $F(\Lambda)$ *– вектор-функция (24), состоящая из первых* $n-1$ *ляпуновских величин и* $\operatorname{rank}(DF(\Lambda))=n-1$ *при значениях* $\Lambda\Lambda_0$, *то* Λ_0 *имеет цикличность, в точности равную* $n-1$ *в классе систем с такими же параметрами (без возмущения параметров линейной части), и цикличность, в точности равную* n *в классе систем, полученных добавлением к этим параметрам параметра* λ_0 *линейной части системы.*

Доказательство. В статье [18] рассматривается рождение предельных циклов из особых точек системы с однородными нелинейностями третьей степени и доказана теорема (лемма 1 и теорема 5), сформулированная для этой системы, но доказательство которой не нарушает общности, и её можно применить к полиномиальным системам с нелинейностями любой степени. Хотя она сформулирована с употреблением ранга линейно независимых линейных частей ляпуновских величин возмущённой системы, очевидно, что вместо этого можно применить ранг матрицы Якоби ляпуновских величин системы.

Теорема 6 [18]. *Если* Λ_0 *– фокус порядка* n *в аффинном пространстве параметров системы* A^*, $F(\Lambda)$ *– вектор-функция, состоящая из первых* $n-1$ *ляпуновских величин системы и* $\operatorname{rank}(DF(\Lambda))=n-1$ *при значениях* $\Lambda=\Lambda_0$, *то для любой достаточно малой окрестности* *точки $O(0,0)$ существует сколь угодно малое возмущение значений точки Λ_0 в пространстве A^* (без возмущения линейной части) такое, что в этой окрестности имеется не менее $n-1$ предельных циклов возмущённой системы.*

Очевидно,что если возмутить и линейную часть этой системы, то можно получить не менее n малоамплитудных предельных циклов возмущённой системы.

С другой стороны, цикличность фокуса Λ_0 не может быть больше n согласно теореме о рождении предельных циклов из сложного фокуса.

Теорема 7 [19, с. 264]. *Если $O(0,0)$ – сложный фокус кратности n динамической системы (A) класса $N \geqslant 2n+1$ или аналитической, то существуют числа ε, δ такие, что всякая система $(\overline{A})$, δ-близкая до ранга $2n+1$ к системе (A), имеет не более n предельных циклов, расположенных в ε-окрестности точки $O(0,0)$.*

Теорема 5 доказана.

Теорема 8. *Фокус (25) системы (21) имеет цикличность, в точности равную семи в классе систем (23).*

Доказательство. Вычислим матрицу Якоби вектор-функции $F(\Lambda)$, $\Lambda=\{U,A,N,K,M,B\}$, параметры которой состоят из образующих идеала J_1 ляпуновских величин системы (21):

$$DF(\Lambda)=\{\{2A^2+6B^2+7K+3M-2AN+6AU-6NU, K-M+4AU-2NU+3U^2,$$

$$-6B^2-3K-M-2AU-3U^2, A-3N+7U, -A-N+3U, -12B(N-U)\},\ldots\}.$$

Левый верхний минор пятого порядка этой матрицы при значениях (25) равен

$$-7.87769127520645398995945367801899487432474682013432266 7\cdot 10^{16},$$

т.е. $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0))=5$. Если к вектор-функции $F(\Lambda)$ добавить первую компоненту $L+NB$, функционально не зависящую от других (см. формулы (12), (14), (20)), а к значениям (25) добавить соответствующее значение параметра $L=-NB$, то получим вектор-функцию $F(\Lambda)$ и значения параметров $\Lambda_0=\{L_0,U_0,B_0,M_0,K_0,N_0,A_0\}$, для которых $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0))=6$. По утверждению теоремы 5 это гарантирует рождение ровно семи малоамплитудных предельных циклов, расположенных в окрестности особой точки $O(0,0)$ системы (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куклес И.С.* О некоторых случаях отличия фокуса от центра // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. № 5. С. 208–211.
2. *Gine J.* Center conditions for generalized polynomial Kukles systems // Commun. Pure Appl. Anal. 2017. V. 16. № 2. P. 417–426.
3. *Lloyd N.G., Pearson J.M.* Computing centre conditions for certain cubic systems // J. Comp. Appl. Math. 1992. V. 40. № 3. P. 323–336.
4. *Садовский А.П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 236–244.
5. *Садовский А.П.* Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 472–481.
6. *Pearson J.M., Lloyd N.G.* Kukles revisited: advances in computing techniques // Comput. Math. Appl. 2010. V. 60. № 10. P. 2797–2805.
7. *Christopher C.I., Lloyd N.Ci.* On the paper of Jin and Wang cont cerning the conditions for a centre in certain cubic systems // Bull. London Math. Soc. 1990. V. 22. P. 5–12.
8. *Lloyd N.G., Pearson J.M.* Conditions for a centre and the bifurcation of limit cycles in a class of cubic systems // Bifurcations of Planar Vector Fields. Lect. Notes in Math. 1990. V. 1455. P. 230–242.
9. *Садовский А.П.* Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2008.
10. *Садовский А.П., Маковецкая Т.В., Чергинец Д.Н.* Радикал идеала фокусных величин комплексной системы Куклеса // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 4–11.
11. *Отроков Н.Ф.* Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький, 1972.
12. *Руденок А.Е., Шуба А.С.* Базис Гребнера идеала ляпуновских величин системы Куклеса // Материалы Междунар. науч. конф. “Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. 7–10 декабря 2015 г. Минск, 2015. Ч. 1. С. 86–87.

13. *Christopher C.* Estimating limit cycle bifurcations from centers // Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2005. P. 23–35.
14. *Cruz L., Romanovski V.G., Torregrosa J.* The center and cyclicity problems for quartic linear-like reversible systems // Nonlin. Anal. 2020. V. 190. P. 1–19.
15. *Chicone C., Jacobs M.* Bifurcation of critical periods for plane vector fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 312. № 2. P. 433–486.
16. *Chicone C., Jacobs M.* Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones // J. Differ. Equat. 1991. V. 91. № 2. P. 268–326.
17. *Han M.* Liapunov constants and Hopf cyclicity of Liénard systems // Ann. Differ. Equat. 1999. V. 15. № 2. P. 113–126.
18. *Руденок А.Е.* О предельных циклах двумерной автономной системы с нелинейностями третьей степени // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 825–834.
19. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 22.11.2022 г.
После доработки 22.11.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 183–192

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

© 2023 г. Ю. П. Апаков, С. М. Мамажонов

Рассмотрена первая краевая задача в прямоугольной области для неоднородного дифференциального уравнения четвёртого порядка с младшими членами. Доказана единственность решения поставленной задачи. Решение получено в явном виде с помощью построенной функции Грина.

DOI: 10.31857/S037406412302005X, EDN: PULUDA

Введение. Решение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвёртого порядка (см. [1–4]). Их классификации и решению краевых задач для этих уравнений посвящена книга [5]. В статьях [6–11] изучен ряд корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками.

В работе [12] рассмотрена задача с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом. Начально-граничная задача для уравнения колебания балки решена в статье [13]. В [14] изучена краевая задача для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина. Задача для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками, имеющего сингулярный коэффициент, исследована в работе [15].

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$U_{xxxx}(x,y)-U_{yy}(x,y)+A_1(x)U_{xxx}(x,y)+A_2(x)U_{xx}(x,y)+$$
$$+A_3(x)U_x(x,y)+A_4(x)U(x,y)+A_5(x)U_y(x,y)=F(x,y),$$

где $A_i(x)$, $i=\overline{1,5}$, и $F(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

С помощью замены

$$U(x,y)=u(x,y)\exp\left(-\frac{1}{4}\int\limits_0^x A_1(\xi)\,d\xi+\frac{A_5(x)}{2}y\right)$$

это уравнение приводится к уравнению

$$L[u]\equiv u_{xxxx}+a_1(x)u_{xx}+a_2(x)u_x+a_3(x)u-u_{yy}=f(x,y), \tag{1}$$

где

$$a_1(x)=A_2(x)-\frac{3A_1'(x)}{2}-\frac{3(A_1(x))^2}{8},\quad a_2(x)=\frac{(A_1(x))^3}{8}-\frac{A_1(x)A_2(x)}{2}-A_1''(x)+A_3(x),$$

$$a_3(x)=\frac{3(A_1(x))^2A_1'(x)}{16}-\frac{A_1'''(x)}{4}+\frac{3(A_1'(x))^2}{16}-\frac{3(A_1'(x))^3}{32}-\frac{3(A_1(x))^4}{256}-$$
$$-\frac{A_1'(x)A_2(x)}{4}+\frac{(A_1(x))^2A_2(x)}{16}-\frac{A_1(x)A_3(x)}{4}+\frac{(A_5(x))^2}{4}+A_4(x),$$

$$f(x,y)=F(x,y)\exp\biggl(\frac{1}{4}\int\limits_0^x A_1(\xi)\,d\xi-\frac{A_5(x)}{2}y\biggr).$$

Задача (1)–(4). Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega)\bigcap C^{3,1}_{x,y}(\bar\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<p,\ \ 0<y<q\}$ и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,q)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant p, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\quad u(p,y)=\psi_2(y),\quad u_{xx}(0,y)=\psi_3(y),\quad u_{xx}(p,y)=\psi_4(y),\quad 0\leqslant y\leqslant q, \tag{3}$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $f(x,y)\in C^{0,1}_{x,y}(\bar\Omega)$ – заданные функции, причём

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\quad i=\overline{1,4},\quad f(x,0)=f(x,q)=0. \tag{4}$$

Отметим, что уравнение (1) рассмотрено в работе [12] при $a_1=a_2=0$, $a_3=-c(x,t)$, а в статьях [13–15] при $a_1=a_2=a_3=0$. В этих работах рассмотрен случай, когда $\psi_i(x)=0$ и начальные условия отличны от нуля.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Если задача (1)–(4) имеет решение, то при выполнении условий* $a_1(x)\leqslant 0$, $2a_3(x)+a_1''(x)-a_2'(x)\geqslant 0$ *оно единственно.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача (1)–(4) имеет два решения: $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar\Omega$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u]\equiv 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\biggl(uu_{xxx}-u_xu_{xx}+a_1(x)uu_x-\frac{1}{2}a_1'(x)u^2+\frac{1}{2}a_2(x)u^2\biggr)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+$$

$$+u_{xx}^2-a_1(x)u_x^2+\biggl(a_3(x)+\frac{1}{2}a_1''(x)-\frac{1}{2}a_2'(x)\biggr)u^2+u_y^2=0. \tag{5}$$

Проинтегрировав равенство (5) по области Ω, с учётом однородных краевых условий получим

$$\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_{xx}^2\,dx\,dy-\int\limits_0^p\int\limits_0^q a_1(x)u_x^2\,dx\,dy+\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2\,dx\,dy+\int\limits_0^p\int\limits_0^q\biggl(a_3(x)+\frac{1}{2}a_1''(x)-\frac{1}{2}a_2'(x)\biggr)u^2\,dx\,dy=0,$$

откуда следует, что $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\bar\Omega$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если выполняется неравенство*

$$C<\frac{\mu_1^3(1-e^{-2\mu_1p})^2}{p(2\mu_1^2+3\mu_1(1+e^{-4\mu_1p})+3)},$$

в котором $\mu_1=\sqrt{\pi/(2q)}$, $C=\max\limits_{\xi\in[0,p]}\{|a_i(\xi)|,|a_i'(\xi)|,|a_1''(\xi)|\}$, $i=1,2,3$, *то решение задачи (1)–(4) существует.*

Доказательство. Решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y),$$

где функция $v(x,y)$ является решением задачи

$$L[v] \equiv v_{xxxx} + a_1(x)v_{xx} + a_2(x)v_x + a_3(x)v - v_{yy} = 0,$$

$$\begin{gathered} v(x,0) = v(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \\ v(0,y) = \psi_1(y), \quad v(p,y) = \psi_2(y), \\ v_{xx}(0,y) = \psi_3(y), \quad v_{xx}(p,y) = \psi_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \end{gathered} \tag{6}$$

а функция $w(x,y)$ – решением задачи

$$L[w] \equiv w_{xxxx} + a_1(x)w_{xx} + a_2(x)w_x + a_3(x)w - w_{yy} = f(x,y),$$

$$\begin{gathered} w(x,0) = w(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \\ w(0,y) = w(p,y) = w_{xx}(0,y) = w_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q. \end{gathered} \tag{7}$$

Решение задачи (6) ищем в виде

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{8}$$

После подстановки (8) в (6) и разделения переменных получим относительно функции $Y(y)$ следующую спектральную задачу:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(q) = 0. \tag{9}$$

Известно [16, с. 200], что нетривиальное решение задачи (9) существует при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

которым соответствуют собственные функции

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n}{q} y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставив (8) в (6), получим относительно функции $X(x)$ задачу

$$X^{(4)} + a_1(x)X'' + a_2(x)X' + a_3(x)X + \lambda_n X = 0,$$

$$X(0) = \psi_{1n}, \quad X(p) = \psi_{2n}, \quad X''(0) = \psi_{3n}, \quad X''(p) = \psi_{4n}, \tag{10}$$

где $\psi_{in} = (2/q)\int_0^q \psi_i(\eta)\sin(\pi n\eta/q)\,d\eta$, $i = \overline{1,4}$.

Введём обозначение

$$V(x) = X(x) - \rho(x), \tag{11}$$

$$\rho_n(x) = \psi_{1n} + \left(\frac{\psi_{2n} - \psi_{1n}}{p} - \frac{2\psi_{3n} + \psi_{4n}}{6}p\right)x + \frac{\psi_{3n}}{2}x^2 + \frac{\psi_{4n} - \psi_{3n}}{6p}x^3, \tag{12}$$

с помощью которого задача (10) принимает вид

$$\begin{gathered} V_n^{(4)} + \lambda_n V_n = \lambda_n g_n(x) - a_1(x)V_n'' - a_2(x)V_n' - a_3(x)V_n, \\ V_n(0) = V_n(p) = V_n''(0) = V_n''(p) = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

здесь

$$g_n(x) = \left(\frac{x-p}{p} + \frac{a_2(x) - pa_3(x) + xa_3(x)}{\lambda_n p}\right)\psi_{1n} - \left(\frac{x}{p} + \frac{a_2(x) + xa_3(x)}{\lambda_n p}\right)\psi_{2n} +$$

$$+\left(\frac{2xp^2-3px^2+x^3}{6p}-\frac{3px^2a_3(x)+x^3a_3}{6\lambda_n p}\right)\psi_{3n}+$$

$$+\frac{6xa_1(x)+2p^2a_2(x)-6pxa_2(x)-6pa_1(x)+3x^2a_2(x)+2p^2xa_3(x)}{6\lambda_n p}\psi_{3n}+$$

$$+\left(\frac{xp^2-x^3}{6p}+\frac{p^2a_2(x)-6xa_1(x)-3x^2a_2(x)+xp^2a_3(x)-x^3a_3(x)}{6\lambda_n p}\right)\psi_{4n}.$$

Согласно теореме Гильберта [17, с. 224] решение задачи (13) определяется по формуле

$$V_n(x)=\lambda_n\int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^p G_n(x,\xi)(a_1(\xi){V_n}''(\xi)+a_2(\xi){V_n}'(\xi)+a_3(\xi)V_n(\xi))\,d\xi, \qquad (14)$$

где функция Грина

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases}G_n^1(x,\xi), & 0\leqslant x<\xi,\\ G_n^2(x,\xi), & \xi<x\leqslant p,\end{cases}$$

$$G_n^1(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\{[\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))+$$

$$+\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))]\cos(\mu_n x)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n x)+$$

$$+[\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))-$$

$$-\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))]\sin(\mu_n x)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n x)\},$$

$$G_n^2(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\{[\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))+$$

$$+\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))]\cos(\mu_n(x-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(x-p))+$$

$$+[\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))-$$

$$-\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))]\sin(\mu_n(x-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(x-p))\}.$$

Здесь

$$\mu_n=\sqrt{\frac{\pi n}{2q}},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$a_{11}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{12}=\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{13}=-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),$$

$$a_{14}=-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi),\quad a_{21}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$

$$a_{22}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$

$$a_{23}=\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi),\quad a_{24}=-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),$$

$$a_{31}=-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{32}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{33}=\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi),$$

$$a_{34}=-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),\quad a_{41}=-\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$

$$a_{42}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$

$$a_{43}=\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),\quad a_{44}=\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi).$$

Вычислив определитель Δ, имеем

$$\Delta=-e^{2\mu_n p}\bar{\Delta},$$

где $\bar{\Delta}$ определяется по формуле

$$\bar{\Delta} = \frac{1 + e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos(2\mu_n p)e^{-2\mu_n p}$$

и для него справедлива оценка снизу

$$|\bar{\Delta}| \geqslant \frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu_1 p})^2 = \delta > 0.$$

Проинтегрировав по частям равенство (14), получим

$$V_n(x) = \lambda_n \int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^p (-G_{n\xi\xi}a_1(\xi) + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi))G_{n\xi} + (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi))G_n)V_n\,d\xi. \tag{15}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём обозначения

$$V_{0n}(x) = \lambda_n \int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\bar{G_n}(x,\xi) = -a_1(\xi)G_{n\xi\xi} + (a_2(\xi) - 2a_1'(\xi))G_{n\xi} + (a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi))G_n,$$

в результате чего равенство (15) примет вид

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int\limits_0^p \bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)\,d\xi \tag{16}$$

– интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Запишем решение (16) с помощью резольвенты

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int\limits_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)\,d\xi, \tag{17}$$

где

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_{1n}(x,\xi) + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi) = \int\limits_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds, \quad m = 2,3,\ldots, \quad \bar{G}_{1n}(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi).$$

Оценим функции $G_n(x,\xi)$, $G_{n\xi}(x,\xi)$ и $G_{n\xi\xi}(x,\xi)$:

$$|G_n(x,\xi)| \leqslant \frac{K}{\mu_n^3}, \quad |G_{n\xi}(x,\xi)| \leqslant \frac{K}{\mu_n^2}(1 + e^{-4\mu_n p}), \quad |G_{n\xi\xi}(x,\xi)| \leqslant \frac{2K}{\mu_n},$$

здесь $K = 1/(2\delta) = (1 - e^{-2\mu_1 p})^{-2}$. Тогда для функции $\bar{G}_n(x,\xi)$ справедлива оценка

$$|\bar{G}_n(x,\xi)| \leqslant CK\left(\frac{2}{\mu_n} + \frac{3}{\mu_n^2}(1 + e^{-4\mu_n p}) + \frac{3}{\mu_n^3}\right).$$

Оценим теперь решение (17). Имеем неравенство

$$|R_n(x,\xi)| \leqslant |\bar G_{1n}(x,\xi)| + |\bar G_{2n}(x,\xi)| + \ldots + |\bar G_{mn}(x,\xi)| + \ldots,$$

для правой части которого составим мажорирующий ряд. Введём обозначение

$$J = CK\bigg(\frac{2}{\mu_1} + \frac{3}{\mu_1^2}(1+e^{-4\mu_1 p}) + \frac{3}{\mu_1^3}\bigg)$$

и найдём

$$|\bar G_{1n}(x,\xi)| \leqslant |\bar G_n(x,\xi)| \leqslant J,$$

$$|\bar G_{mn}(x,\xi)| \leqslant \int\limits_0^p |\bar G_{1n}(x,s)||\bar G_{(m-1)n}(s,\xi)|ds \leqslant J^m p^{m-1}, \quad i=2,3,\ldots$$

Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{\infty}(Jp)^m. \tag{18}$$

Условие теоремы 2 можно записать в виде

$$CKp\bigg(\frac{2}{\mu_1} + \frac{3}{\mu_1^2}(1+e^{-4\mu_1 p}) + \frac{3}{\mu_1^3}\bigg) < 1,$$

откуда следует неравенство $Jp<1,$ ввиду которого ряд (18) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится и её оценка имеет вид

$$|R_n(x,\xi)| \leqslant \frac{J}{1-Jp}. \tag{19}$$

В каждом из интервалов $0\leqslant\xi<x$ и $x<\xi\leqslant p$ функция $G_n(x,\xi),$ рассматриваемая как функция от переменной $\xi,$ является решением уравнения

$$G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi) + \lambda_n G_n(x,\xi) = 0.$$

Подставив $G_n(x,\xi) = -G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)/\lambda_n$ в $V_{0n}(x),$ имеем

$$V_{0n}(x) = -\int\limits_0^x G^2_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi - \int\limits_x^p G^1_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi.$$

Учитывая равенство $G^1_{n\xi\xi\xi}(x,x) - G^2_{n\xi\xi\xi}(x,x) = 1,$ интегрируем по частям $V_{0n}(x)$ один раз и находим

$$V_{0n}(x) = g_n(x) + g_n(0)G^2_{n\xi\xi\xi}(x,0) - g_n(p)G^1_{n\xi\xi\xi}(x,p) + \int\limits_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n'(\xi)\,d\xi.$$

С учётом условий (4) интегрируем по частям ψ_{in} три раза:

$$\psi_{in} = -\frac{q^3}{\pi^3 n^3}\,\frac{2}{q}\int\limits_0^q \psi_i'''(\eta)\cos\bigg(\frac{\pi n}{q}\eta\bigg)\,d\eta = -\bigg(\frac{q}{\pi}\bigg)^3\frac{\Psi_{in}}{n^3}, \quad i=\overline{1,4},$$

где $\Psi_{in} = (2/q)\int_0^q \psi_i'''(\eta)\cos(\pi n\eta/q)\,d\eta$, $i=\overline{1,4}$. Отсюда получим следующие неравенства:

$$|\psi_{in}| \leqslant \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3}, \quad i=\overline{1,4}.$$

В результате имеем оценку

$$|V_{0n}(x)| \leqslant \frac{M_1}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|), \tag{20}$$

здесь $M_1>0$ – известное число.

Согласно (19), (20) запишем

$$|V_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|)\frac{M_1}{1-Jp}. \tag{21}$$

В силу формул (8), (11) и (12) решение задачи (6) имеет вид

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x)+\rho_n(x))\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right).$$

Исследуем полученный ряд на сходимость. С учётом (21) и неравенства

$$|\rho_n(x)| \leqslant \frac{M_2}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|),$$

где $M_2>0$ – известное число, получим оценку

$$|v(x,y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|)\left(\frac{M_1}{1-Jp}+M_2\right) < \infty.$$

Теперь покажем равномерную сходимость $v_{xxxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим оценку

$$|v_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|),$$

где $M_3>0$ – известное число.

Для того чтобы показать сходимость правой части этого неравенства, используем неравенства Коши–Буняковского и Бесселя:

$$|v_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_3\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{1n}|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{2n}|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{3n}|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{4n}|^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \leqslant$$

$$\leqslant M_3(\|\psi_1'''(y)\|+\|\psi_2'''(y)\|+\|\psi_3'''(y)\|+\|\psi_4'''(y)\|)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty,$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{in}|^2 \leqslant \|\psi_i'''(y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad i=\overline{1,4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая неравенство

$$|v_{yy}(x,y)| \leqslant |v_{xxxx}(x,y)| + |a_1(x)||v_{xx}(x,y)| + |a_2(x)||v_x(x,y)| + |a_3(x)||v(x,y)|,$$

заключаем, что и v_{yy} тоже сходится.

Теперь решение задачи (7) ищем в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(x)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right).$$

Разложим функцию $f(x,y)$ в ряд Фурье

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right),$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$f_n(x)=\frac{2}{q}\int\limits_0^q f(x,\eta)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta.$$

В результате получим задачу

$$\chi_n^4(x)+\lambda_n\chi_n(x)=f_n(x)-a_1(x)\chi_n''(x)-a_2(x)\chi_n'(x)-a_3(x)\chi_n(x),$$

$$\chi_n(0)=\chi_n(p)=\chi_n''(0)=\chi_n''(p)=0,$$

решение которой имеет вид

$$\chi_n(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^p G_n(x,\xi)(a_1(\xi)\chi_n''(\xi)+a_2(\xi)\chi_n'(\xi)+a_3(\xi)\chi_n(\xi))\,d\xi.$$

Проинтегрировав по частям второй интеграл, находим

$$\chi_n(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^p(-G_{n\xi\xi}a_1(\xi)+(a_2(\xi)-2a_1'(\xi))G_{n\xi}+(a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi))G_n)\chi_n(\xi)\,d\xi.$$

Введём обозначения

$$\chi_{0n}(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\bar G_n(x,\xi)=-a_1(\xi)G_{n\xi\xi}+(a_2(\xi)-2a_1'(\xi))G_{n\xi}+(a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi))G_n,$$

в результате получим

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int\limits_0^p\bar G_n(x,\xi)\chi_n(\xi)\,d\xi$$

– интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решение которого определяется по формуле

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int\limits_0^p R_n(x,\xi)\chi_{0n}(\xi)\,d\xi.$$

С учётом условий (4) интегрируем по частям $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{q}{\pi n}\Phi_n(x),$$

где $\Phi_n(x) = (2/q)\int_0^q f_\eta(x,\eta)\cos(\pi n\eta/q)\,d\eta$.

Учитывая

$$G_n(x,\xi) = -\frac{G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)}{\lambda_n},$$

находим выражение

$$\chi_{0n}(x) = -\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^p G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi,$$

проинтегрировав которое по частям один раз, с учётом $G^1_{n\xi\xi\xi}(x,x) - G^2_{n\xi\xi\xi}(x,x) = 1$ получим

$$\chi_{0n}(x) = \frac{1}{\lambda_n}\biggl(f_n(x) + f_n(0)G^2_{n\xi\xi\xi}(x,0) - f_n(p)G^1_{n\xi\xi\xi}(x,p) + \int\limits_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)f'_n(\xi)\,d\xi\biggr).$$

В результате имеем неравенство

$$|\chi_{0n}(x)| \leqslant \frac{M_4}{n^3}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi'_n(x)|), \tag{22}$$

где $M_4 > 0$ – известное число. В силу (19) и (22) находим оценку

$$|\chi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi'_n(x)|)\frac{M_4}{1-Jp}.$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$|w(x,y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi'_n(x)|)\frac{M_4}{1-Jp} < \infty,$$

откуда следует, что решение задачи (7) сходится.

Покажем равномерную сходимость $w_{xxxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим

$$|w_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi'_n(x)|),$$

где $M_5 > 0$ – известное число.

Для правой части этого неравенства используем неравенства Коши–Буняковского и Бесселя:

$$|w_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_5\biggl(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(x)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi'_n(x)|^2}\biggr) \times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \leqslant M_5(\|f_y(x,y)\| + \|f_y(0,y)\| + \|f_y(p,y)\| + \|f_{xy}(x,y)\|)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty,$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(x)|^2 \leqslant \|f_y(x,y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(0)|^2 \leqslant \|f_y(0,y)\|^2_{L_2(0,q)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(p)|^2 \leqslant \|f_y(p,y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\Phi'_n(x)|^2 \leqslant \|f_{xy}(x,y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая оценку

$$|w_{yy}(x,y)| \leqslant |w_{xxxx}(x,y)| + |a_1(x)||w_{xx}(x,y)| + |a_2(x)||w_x(x,y)| + |a_3(x)||w(x,y)| + |f(x,y)|,$$

заключаем, что и w_{yy} тоже сходится. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Турбин М.В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел–Балкли // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 246–257.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
3. *Шабров С.А.* Об оценках функций влияния одной математической модели четвёртого порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2015. № 2. С. 168–179.
4. *Benney D.J., Luke J.C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. V. 43. P. 309–313.
5. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. Ташкент, 2000.
6. *Джураев Т.Д., Апаков Ю.П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 1. С. 40–51.
7. *Apakov Yu.P., Rutkauskas S.* On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlin. Anal.: Modeling and Control. 2011. V. 16. № 3. P. 255–269.
8. *Апаков Ю.П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64. № 1. Р. 3–13.
9. *Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю.* Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечётного порядка // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66. № 10. Р. 1318–1331.
10. *Апаков Ю.П., Жураев А.Х.* Третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 9. Р. 1274–1281.
11. *Apakov Yu.P.* On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 9. P. 1754–1761.
12. *Аманов Д., Мурзамбетова М.Б.* Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2013. Вып. 1. С. 3–10.
13. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
14. *Иргашев Б.Ю.* Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами // Бюлл. Ин-та математики. 2019. № 6. С. 23–29.
15. *Urinov A.K., Azizov M.S.* Boundary value problems for a fourth order partial equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 3. P. 632–640.
16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
17. *Hilbert D.* Nachrichten von der Konigl Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingem. Mathematisch-physikalische Klasse. Gottingem, 1904.

Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 07.09.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 193–207

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, К. В. Семенов

Рассматривается параболическое уравнение с одной пространственной переменной с Дини-непрерывными коэффициентами. Для этого уравнения доказывается существование классического фундаментального решения и приводятся оценки. Условие на характер непрерывности старшего коэффициента уравнения является точным для существования фундаментального решения.

DOI: 10.31857/S0374064123020061, EDN: PUMUJR

Введение. Хорошо известно, что для равномерно-параболического уравнения с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера, существует классическое фундаментальное решение, которое строится методом Леви (см., например, [1, с. 404]).

В работе [2] доказано существование фундаментального решения для параболического уравнения произвольного порядка с одной пространственной переменной в случае Дини-непрерывных коэффициентов уравнения, если соответствующий модуль непрерывности ω_0 удовлетворяет условию Дини "дважды", а именно, если

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z)=\int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0.$$

В дальнейшем этот результат был обобщен на случай параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной (см. [3]). В статье [4] доказано существование классического фундаментального решения для одного уравнения со многими пространственными переменными при приведённом выше условии "дважды"-Дини. Во всех этих работах используется классический метод Леви.

С другой стороны, в статье [5] показано, что в случае, когда старший коэффициент уравнения не удовлетворяет условию Дини (см. ниже (1)), а именно, если не выполнено условие сходимости соответствующего интеграла, классическое фундаментальное решение может не существовать.

До сих пор оставался открытым вопрос, можно ли построить фундаментальное решение для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами, если модуль непрерывности удовлетворяет только условию Дини (см. ниже (1)). Сложность построения фундаментального решения в этом случае заключается в том, что прямое использование классического метода Леви не позволяет отказаться от условия "дважды"-Дини, приведённого выше.

В настоящей работе доказано существование классического фундаментального решения для параболического уравнения с одной пространственной переменной при условии Дини (см. ниже (1)), т.е., как следует из [5], при точных условиях на характер гладкости старшего коэффициента уравнения. Для этого предложен метод, который можно назвать *модифицированным методом Леви.* Отличие от классического метода заключается в конструкции интегрального слагаемого (объёмного потенциала) в представлении фундаментального решения, а именно в этом потенциале используется ядро специального вида (параметрикс), которое строится с помощью регуляризованных коэффициентов уравнения.

Кроме того, в настоящей статье допускается определённый рост младших коэффициентов уравнения при $t\to 0+$.

Статья состоит из четырёх пунктов. В п. 1 приводятся необходимые сведения и формулируется основная теорема. В п. 2 строится параметрикс Γ_0. Фундаментальное решение для параболического уравнения, в котором отсутствует младший член, строится в п. 3. В п. 4 приводится доказательство основной теоремы.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Функцию $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ называем *модулем непрерывности*, если (см. [6, с. 147]): $\omega(0) = 0$; ω не убывает; ω непрерывна на $[0,+\infty)$; ω *полуаддитивна*, т.е. $\omega(z_1 + z_2) \leqslant \omega(z_1) + \omega(z_2)$.

Если ω – модуль непрерывности, то

$$\frac{\omega(x)}{x} \leqslant 2\frac{\omega(y)}{y}, \quad x \geqslant y > 0.$$

Для модуля непрерывности справедливо неравенство (см. [7])

$$\omega(|x|)\exp(-|x|^2/t) \leqslant C\omega(t^{1/2})\exp(-c|x|^2/t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

при некоторых постоянных $C, c > 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω *удовлетворяет условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(x) = \int\limits_0^x \frac{\omega(z)}{z}dz < +\infty, \quad x > 0. \tag{1}$$

В этом случае функция $\tilde{\omega}$ также является модулем непрерывности, причём $\omega(x) \leqslant 2\tilde{\omega}(x)$.

Пусть $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leqslant T\}$. В полосе D рассматривается равномерно-параболический оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u.$$

Предполагаем, что коэффициенты оператора L – вещественнозначные функции, при этом коэффициент a задан в $\bar{D}$, коэффициенты b и c заданы в D, и выполнены условия:

(a) $\delta \leqslant a(x,t) \leqslant A$, $(x,t) \in \bar{D}$, для некоторых $\delta, A > 0$;

(b) функция a непрерывна в $\bar{D}$, причём имеет место оценка

$$|\Delta_x a(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x|), \quad (x,t), (x + \Delta x, t) \in \bar{D},$$

где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини, функции b и c непрерывны в D и

$$|b(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad |\Delta_x b(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}},$$

$$|c(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}, \quad |\Delta_x c(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t},$$

$(x,t), (x + \Delta x, t) \in D$.

Здесь и далее для любой функции $f(x,t)$ обозначаем $\Delta_x f(x,t) = f(x + \Delta x, t) - f(x,t)$.

Положим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \bar{D} \times \bar{D} : t > \tau\}$. Функцию $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, называем *фундаментальным решением* уравнения $Lu = 0$, если:

1) функции Γ, $\partial\Gamma/\partial t$, $\partial\Gamma/\partial x$, $\partial^2\Gamma/\partial x^2$ непрерывны в D^*;

2) при любых фиксированных (ξ,τ) из $\mathbb{R} \times [0,T)$ функция $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ по переменным $(x,t) \in \mathbb{R} \times (\tau, T]$;

3) для любой непрерывной финитной функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и для любого $\tau \in [0,T)$ интеграл (потенциал Пуассона)

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau)h(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \leqslant t \leqslant T,$$

является ограниченным решением задачи Коши

$$Lu = 0 \text{ в } \mathbb{R}\times(\tau, T], \quad u(x,\tau) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из единственности решения задачи Коши (см., например, [1, с. 29]) следует, что фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ единственно.

Пусть $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функция, определённая равенствами $\rho(x) = C\exp(1/(x^2-1))$ при $|x| < 1$ и $\rho \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, где постоянная C выбирается из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(y)\,dy = 1.$$

Введём обозначения

$$\hat{a}(x,t;s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(x - sy, t)\rho(y)\,dy = \frac{1}{s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(y,t)\rho\left(\frac{x-y}{s}\right)dy, \quad (x,t)\in\bar{D}, \quad s \geqslant 0,$$

и

$$Q(x,t,\tau;r) = \int\limits_{\tau}^{t} \hat{a}(x,\theta;r^{1/4})\,d\theta, \quad x\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T, \quad r\geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию

$$Z(x,t;z,\tau;r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\sigma}\exp(-Q(z,t,\tau;r)\sigma^2)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(2\pi Q(z,t,\tau;r))^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Q(z,t,\tau;r)}\right),$$

$x, z\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r\geqslant 0$, и положим (см. [8, с. 17])

$$Z_1(x,t;\xi,\tau) \equiv Z(x,t;\xi,\tau;0) = \frac{1}{(2\pi Q(\xi,t,\tau;0))^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Q(\xi,t,\tau;0)}\right), \quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (a) и (b). Тогда для уравнения $Lu = 0$ существует фундаментальное решение $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, и для него выполнены оценки*

$$\left|\frac{\partial^{k+l}\Gamma}{\partial t^l\partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{2}$$

при этом для разности

$$W(x,t;\xi,\tau) \equiv \Gamma(x,t;\xi,\tau) - Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau)$$

справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^{k+l}W}{\partial t^l\partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{3}$$

$(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, $0\leqslant 2l+k\leqslant 2$.

Здесь и далее через C и c обозначены положительные постоянные, зависящие от коэффициентов a, b, c и числа T, конкретный вид которых для нас не важен.

2. Параметрикс $\boldsymbol{\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau)}$. Функции $\hat a(x,t;s)$ обладают свойствами

$$\delta\leqslant \hat a(x,t;s)\leqslant A,\quad |\hat a(x,t;s)-a(x,t)|\leqslant \omega_0(s),$$

$$\left|\frac{\partial^k\hat a}{\partial x^k}(x,t;s)\right|\leqslant\frac{C_k}{s^k},\quad \left|\Delta_x\frac{\partial^k\hat a}{\partial x^k}(x,t;s)\right|\leqslant\frac{C_k}{s^k}\omega_0(|\Delta x|),$$

где $(x,t),(x+\Delta x,t)\in\bar D$, $s>0$, $k\in\mathbb N\bigcup\{0\}$.

Из этих свойств следуют неравенства

$$\delta(t-\tau)\leqslant Q(x,t,\tau;r)\leqslant A(t-\tau),\quad x\in\mathbb R,\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad r\geqslant 0,$$

$$|Q(x,t,\tau;r)-Q(x,t,\tau;0)|\leqslant C\omega_0(r^{1/4})(t-\tau),$$

$$\left|\frac{\partial^k Q}{\partial x^k}(x,t,\tau;r)\right|\leqslant C_k(t-\tau)(r^{-1/4})^k,$$

$$\left|\Delta_x\frac{\partial^k Q}{\partial x^k}(x,t,\tau;r)\right|\leqslant C_k\omega_0(|\Delta x|)(t-\tau)(r^{-1/4})^k,$$

здесь $x\in\mathbb R$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r>0$, $k\in\mathbb N$.

Функция $Z(x-\xi,t;z,\tau;r)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\hat a(z,t;r^{1/4})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0$$

с коэффициентом, зависящим от параметров $z\in\mathbb R$, $r\geqslant 0$, и обладает свойствами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(x-\xi,t;z,\tau;r)\,d\xi=1,\tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^{l+k}Z}{\partial t^l\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;r)\right|\leqslant C_{k,l}(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right),\tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial^k Z}{\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;r)-\frac{\partial^k Z}{\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;0)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_k\omega_0(r^{1/4})(t-\tau)^{-(1+k)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right),$$

$$\left|\Delta_z\frac{\partial^{l+k}Z}{\partial t^l\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;r)\right|\leqslant C_{k,l}\frac{\omega_0(|\Delta z|)}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right),$$

$x,\xi,z\in\mathbb R$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r\geqslant 0$, $k,l\geqslant 0$.

Кроме того, для полных производных функции $Z(x-\xi,t;x,\tau;r)$ по переменной x справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}Z(x-\xi,t;x,\tau;r)\right|\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^{(k+1)/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\sum_{l=0}^k\frac{(t-\tau)^{l/2}}{r^{l/4}},\tag{6}$$

$x,\xi\in\mathbb R$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r>0$, $k=0,1,2,3$.

Положим

$$Z_0(r,t)=\frac{1}{(2\pi t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),\quad r\geqslant 0,\quad t>0,$$

и рассмотрим функцию

$$\Gamma_0(x,t;z;\tau) = 2\int\limits_0^{+\infty} Z_0(r,t-\tau)Z(x,t;z,\tau;r)\,dr, \quad x,\xi,z\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T. \tag{7}$$

Из (4)–(6) следуют равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau)\,d\xi = 1 \tag{8}$$

и оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^l\partial x^k}\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{9}$$

$(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, $0\leqslant 2l+k\leqslant 2$.

Заметим, что поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial Z_0}{\partial t}(r,t-\tau)\,dr = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^2 Z_0}{\partial r^2}(r,t-\tau)\,dr = 0, \quad t>\tau,$$

то справедливо представление

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial Z_0}{\partial t}(r,t-\tau)\right)Z(x-\xi,t;x,\tau;r)\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\partial Z_0}{\partial t}(r,t-\tau)\right)(Z(x-\xi,t;x,\tau;r) - Z(x-\xi,t;x,\tau;0))\,dr, \quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*. \tag{10}$$

Рассмотрим параболический оператор L_1 с коэффициентами a, b, удовлетворяющими условиям (a) и (b):

$$L_1 u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пусть

$$K(x,t;\xi,\tau) = L_{1x,t}\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau) =$$

$$= (a(\xi,t)-a(x,t))\frac{\partial^2\Gamma_0}{\partial x^2}(x-\xi,t;x,\tau) + b(x,t)\frac{\partial\Gamma_0}{\partial x}(x-\xi,t;x,\tau), (x,t;\xi,\tau)\in D^*. \tag{11}$$

Обозначим $\omega_1(x)=\omega_0(x^{1/4})$, $x\geqslant 0$. Из (8) и (9)–(11) следуют равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = 0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T, \tag{12}$$

и оценки

$$|K(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{13}$$

$$|\Delta_x K(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}}\left(\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right), \tag{14}$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau)\in D^*$.

Пусть функция μ непрерывна в D^* и удовлетворяет условиям

$$|\mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),$$

$$|\Delta_x \mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\omega(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \biggl(\exp\biggl(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) + \exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr),$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*$, где ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1). Рассмотрим *объёмный потенциал*

$$V\mu(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

где функция Γ_0 задана формулой (7). Из (8) и (9) следует, что потенциал $V\mu$ имеет непрерывные в D^* производные

$$\frac{\partial V\mu}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 V\mu}{\partial x^2}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma_0(x-y,t;x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy, \tag{16}$$

$$\frac{\partial V\mu}{\partial t}(x,t;\xi,\tau) = \mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= \mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}(x-y,t;x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy, \tag{17}$$

и справедливы оценки

$$\biggl|\frac{\partial^{k+l} V\mu}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\biggr| \leqslant C\frac{\tilde\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{18}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l+k \leqslant 2$. Из (15)–(17) следует равенство

$$L_{1x,t}V\mu(x,t;\xi,\tau) = \mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*. \tag{19}$$

3. Фундаментальное решение для оператора L_1.

Лемма 1. *Пусть ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини и*

$$J_{\lambda,\omega}(t)=\int\limits_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau}e^{-\lambda\tau}\,d\tau,\quad t\geqslant 0,\quad \lambda>0.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $\lambda=\lambda(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $\lambda\geqslant\lambda(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$J_{\lambda,\omega}(t)\leqslant\varepsilon,\quad t\geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Фиксируем $t_0>0$ так, что $J_{\lambda,\omega}(t_0)\leqslant 2\tilde{\omega}(\sqrt{t_0})<\varepsilon/2$. Из этой оценки сразу следует утверждение леммы для $t\in(0,t_0]$. Если $t>t_0$, то имеют место неравенства

$$J_{\lambda,\omega}(t)\leqslant J_{\lambda,\omega}(t_0)+2\frac{\omega({t_0}^{1/2})}{{t_0}^{1/2}}\int\limits_{t_0}^t\frac{e^{-\lambda\tau}}{\tau^{1/2}}\,d\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+C\frac{1}{\lambda^{1/2}},$$

откуда, выбирая λ достаточно большим, получаем утверждение леммы.

В этом и только в этом пункте зафиксируем постоянную c из оценок (13), (14) и через H обозначим линейное пространство непрерывных в D^* функций μ, для которых конечна величина

$$\|\mu\|_H=\sup_{D^*}\biggl(|\mu(x,t;\xi,\tau)|\frac{(t-\tau)^{3/2}}{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}\exp\biggl(\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr)+$$
$$+\sup_{D^*}\biggl(|\Delta_x\mu(x,t;\xi,\tau)|\frac{(t-\tau)^{3/2}}{\omega_1(|\Delta x|)}\biggl(\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)+\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr)^{-1}\biggr).$$

Отметим, что H – банахово пространство с нормой $\|\mu\|_H$.

Лемма 2. *Для любой функции $F\in H$ интегральное уравнение*

$$\mu(x,t;\xi,\tau)+\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy=F(x,t;\xi,\tau),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,\tag{20}$$

имеет единственное решение $\mu\in H$ и справедливо неравенство

$$\|\mu\|_H\leqslant C\|F\|_H.\tag{21}$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (20) на $e^{-\lambda(t-\tau)}$, где $\lambda>0$ будет выбрано ниже. Тогда получим эквивалентное (20) уравнение

$$\mu^*(x,t;\xi,\tau)+\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\mu^*(y,\eta;\xi,\tau)\,dy=F^{(\lambda)}(x,t;\xi,\tau),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,\tag{22}$$

где $K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)=K(x-y,t;x,\eta)e^{-\lambda(t-\eta)}$, $F^{(\lambda)}(x,t;\xi,\tau)=F(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$, $\mu^*(x,t;\xi,\tau)=\mu(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$.

Через $A^{(\lambda)}$ обозначим линейный оператор, действующий на функции $\mu\in H$ по формуле

$$A^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy,\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*.$$

Докажем, что для достаточно большого $\lambda>0$ оператор $A^{(\lambda)}:H\to H$ является сжимающим.

Установим сначала, что существует $\lambda_1 > 0$ такое, что для любой функции $\mu \in H$ и для любых $\lambda \geqslant \lambda_1$ справедливо неравенство

$$|A^{(\lambda_1)}\mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{1}{4}\|\mu\|_H \frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*. \tag{23}$$

Имеем (см. оценку (13)) соотношения

$$|A^{(\lambda)}\mu| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)^{3/2}} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{(\eta-\tau)^{3/2}}\, d\eta \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-y)^2}{t-\eta}\biggr) \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr)\, dy =$$

$$= C\|\mu\|_H \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) \int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\, d\eta.$$

Но выполняется оценка

$$\Biggl(\int\limits_\tau^{(t+\tau)/2} + \int\limits_{(t+\tau)/2}^t\Biggr) \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} e^{-\lambda(t-\eta)}\, d\eta \leqslant C\frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau} J_{\lambda,\omega_1}(t),$$

поэтому

$$|A^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) J_{\lambda,\omega_1}(t)$$

и, следовательно (см. лемму 1), существует $\lambda_1 > 0$ такое, что для любых $\lambda \geqslant \lambda_1$ верно неравенство (23).

Покажем далее, что существует число $\lambda_2 > 0$ такое, что для любой функции $\mu \in H$ и для любых $\lambda \geqslant \lambda_2$ справедлива оценка

$$|\Delta_x A^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{1}{4}\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \biggl(\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) + \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr), \tag{24}$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*$.

В случае $2|\Delta x|^2 \geqslant t-\tau$ неравенство (24) сразу следует из (23). Пусть $2|\Delta x|^2 \leqslant t-\tau$. В этом случае в силу (12) справедливо представление

$$\Delta_x A^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x+\Delta x-y,t;x+\Delta x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x+\Delta x,\eta;\xi,\tau)]\, dy -$$

$$- \int\limits_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x,\eta;\xi,\tau)]\, dy +$$

$$+ \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x,\eta;\xi,\tau))\Delta_x K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\, dy +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy \equiv I_1 - I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим интеграл I_1:

$$|I_1| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_{t-|\Delta x|^2}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)^{3/2}} e^{-\lambda(t-\eta)} \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-y)^2}{t-\eta}\right) \times$$

$$\times \frac{\omega_1(|x+\Delta x-y|)}{(\eta-\tau)^{3/2}}\left(\exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right)+\exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{\eta-\tau}\right)\right)dy \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int\limits_{t-|\Delta x|^2}^{t} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} e^{-\lambda(t-\eta)}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Аналогично для I_2 получаем оценку

$$|I_2| \leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Оценим I_3, пользуясь неравенством $(a-b)^2 \geqslant a^2/2 - b^2$, $a,b \in \mathbb{R}$:

$$|I_3| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{(x-y)^2}{t-\eta}\right) \times$$

$$\times \frac{\omega_1(|x-y|)}{(\eta-\tau)^{3/2}}\left(\exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right)+\exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{\eta-\tau}\right)\right)dy \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} e^{-\lambda(t-\eta)}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Наконец, оценим I_4:

$$|I_4| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{(x-y)^2}{t-\eta}\right) \times$$

$$\times \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{(\eta-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\right) e^{-\lambda(t-\eta)}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) \int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} e^{-\lambda(\eta-\tau)}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Из оценок для интегралов $I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ и из леммы 1, выбрав достаточно большое $\lambda_2 > 0$, получаем (24).

Полагая $\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, заключаем, что для оператора $A^{(\lambda_0)} : H \to H$ выполняется неравенство $\|A^{(\lambda_0)}\| \leqslant 1/2$, и, следовательно, оператор $A^{(\lambda_0)} : H \to H$ является сжимающим. Поэтому интегральное уравнение (22) для $\lambda = \lambda_0$ имеет единственное решение $\mu^* \in H$. Возвращаясь к уравнению (20), приходим к выводу, что функция $\mu(x,t;\xi,\tau) = \mu^*(x,t;\xi,\tau)e^{\lambda_0(t-\tau)}$ является единственным решением уравнения (20) из пространства H и справедливо неравенство (21). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть коэффициенты уравнения $L_1u = 0$ удовлетворяют условиям (a) и (b). Тогда для уравнения $L_1u=0$ существует фундаментальное решение $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in D^*$. Оно имеет вид*

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + W_0(x,t;\xi,\tau), \tag{25}$$

где

$$W_0(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{26}$$

$\mu \in H$ – решение интегрального уравнения

$$\mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -L_{1x,t}Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau), (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{27}$$

и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l}\Gamma_1}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{28}$$

причём

$$\left|\frac{\partial^{k+l}W_0}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\frac{\tilde\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{29}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*,\ \ 0 \leqslant 2l+k \leqslant 2.$

Доказательство. Ищем фундаментальное решение уравнения $L_1u = 0$ в виде

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{30}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, где $\mu \in H$ – функция, подлежащая определению.

Потребуем, чтобы функция Γ_1 для любых фиксированных $\xi \in \mathbb{R}$ и $\tau \in [0,T)$ удовлетворяла уравнению $L_1u = 0$ по переменным x и t:

$$L_{1x,t}\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = 0.$$

Тогда (см. (19)) для отыскания функции $\mu \in H$ получаем интегральное уравнение (27). В силу свойств функции Z_1 правая часть (27) принадлежит пространству H и, следовательно, в силу леммы 2 уравнение (27) имеет единственное решение $\mu \in H$. Подставляя это решение в (30), определяем функцию Γ_1.

Из (5) и (18) следует, что определённая таким образом функция Γ_1 непрерывна в D^* вместе со своими производными $\partial\Gamma_1/\partial t$, $\partial\Gamma_1/\partial x$, $\partial^2\Gamma_1/\partial x^2$ и справедливы оценки (28) и (29).

Кроме того, в силу (4) для любой непрерывной и ограниченной функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, справедливо соотношение

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,\tau+0)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)h(\xi)\,d\xi = h(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < T.$$

Таким образом, функция Γ_1 из (25) является фундаментальным решением уравнения $L_1 u = 0$. Лемма доказана.

Замечание. Из единственности решения задачи Коши следует равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T. \tag{31}$$

Уточним теперь оценку (29).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и Γ_1 – фундаментальное решение уравнения $L_1 u = 0$. Тогда для функции W_0 из (26) справедливы представление*

$$W_0(x,t;\xi,\tau) = -\int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;y,\eta) L_{1y,\eta} Z_1(y-\xi,\eta,\xi,\tau)\,dy$$

и оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l} W_0}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{32}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l+k \leqslant 2$.

Доказательство. Положим

$$\nu(x,t;\xi,\tau) = L_{1x,t} Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) = (a(\xi,t)-a(x,t))\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}(x-\xi,t;\xi,\tau) + b(x,t)\frac{\partial Z_1}{\partial x}(x-\xi,t;\xi;\tau)$$

и

$$W_1(x,t;\xi,\tau) = -\int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;y,\eta) L_{1y,\eta} Z_1(y-\xi,\eta,\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*.$$

Функция $\nu \in H$, поэтому потенциал W_1 имеет непрерывные в D^* производные (см. (31))

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) = -\int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}(x,t;\xi,\tau) = -\int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -\int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t;y,\eta)[\nu(y,\eta;\xi,\tau) - \nu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy, \tag{34}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}(x,t;\xi,\tau) = -\nu(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t}(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -\nu(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Gamma_1}{\partial t}(x,t;y,\eta)[\nu(y,\eta;\xi,\tau) - \nu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy. \qquad (35)$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$L_{1x,t}W_1(x,t;\xi,\tau) = -\nu(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{1x,t}\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy = -\nu(x,t;\xi,\tau). \quad (36)$$

Из (33)–(35) и того, что $\nu \in H,$ получаем оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l}W_1}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}}\exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \qquad (37)$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*,\ \ 0 \leqslant 2l+k \leqslant 2.$

Из равенства (36) заключаем, что сумма $Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + W_1(x,t;\xi,\tau)$ также является фундаментальным решением уравнения $L_1u = 0$ и, следовательно, совпадает с $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau).$ Отсюда делаем вывод, что $W_1 \equiv W_0$ в D^* и (см. (37)) справедливы оценки (32). Лемма доказана.

4. Доказательство основной теоремы. Пусть Γ_1 – фундаментальное решение уравнения $L_1u = 0,$ существование которого доказано в лемме 3. Для Γ_1 имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l}\Gamma_1}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \qquad (38)$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*,\ \ 0 \leqslant 2l+k \leqslant 2.$

В этом и только в этом пункте зафиксируем постоянную c_1 из неравенства (38).

Пусть H_1 – множество непрерывных функций $\nu : D^* \to \mathbb{R},$ для которых конечна величина

$$\|\nu\|_{H_1} = \sup_{D^*}\frac{t^{1/2}(t-\tau)}{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}\exp\left(c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)|\nu(x,t;\xi,\tau)|.$$

Заметим, что H_1 – банахово пространство с нормой $\|\nu\|_{H_1}.$

Лемма 5. *Пусть Γ_1 – фундаментальное решение уравнения $L_1u = 0.$ Тогда интегральное уравнение*

$$\nu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta)\Big)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy = F_1(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \quad (39)$$

где $F_1(x,t;\xi,\tau) = -c(x,t)\Gamma_1(x,t;\xi,\tau),$ имеет единственное решение $\nu \in H_1.$ Для этого решения справедлива оценка

$$|\Delta_x\nu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right), \qquad (40)$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*.$

Доказательство. Заметим, что в силу условия (b) и оценок (38) функция $F_1 \in H_1.$ Умножим обе части уравнения (39) на $e^{-\lambda(t-\tau)},$ где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже. Тогда получим эквивалентное (39) интегральное уравнение

$$\nu^*(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)}(c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta))\nu^*(y,\eta;\xi,\tau)\,dy = F_1^*(x,t;\xi,\tau), \qquad (41)$$

где $\nu^*(x,t;\xi,\tau)=\nu(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$, $F_1^*(x,t;\xi,\tau)=F_1(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$.

Через $B^{(\lambda)}$ обозначим линейный оператор, действующий на функции $\nu\in H_1$ по формуле

$$B^{(\lambda)}\nu(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda(t-\eta)}(c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta))\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy,\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*.$$

Докажем, что существует число $\lambda_1>0$ такое, что оператор $B^{(\lambda_1)}:H_1\to H_1$ – сжимающий. В самом деле, имеем (см. условие (b) для коэффициента c)

$$|B^{(\lambda)}\nu|\leqslant C\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)}\frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta^{1/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant C\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)}\frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant C\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)J_{\lambda,\omega_0}(t).$$

В силу свойств интеграла $J_{\lambda,\omega_0}(t)$ (см. лемму 1) выбираем $\lambda_1>0$ таким, что $CJ_{\lambda,\omega_0}(t)<1/2$ при любых $\lambda\geqslant\lambda_1$. Тогда для любой функции $\nu\in H_1$ получаем оценку

$$|B^{(\lambda)}\nu|\leqslant\frac12\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,$$

если $\lambda\geqslant\lambda_1$. Таким образом, имеем

$$\|B^{(\lambda_1)}\nu\|_{H_1}\leqslant\frac12\|\nu\|_{H_1}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (41) при $\lambda=\lambda_1$ имеет единственное решение $\nu^*\in$ $\in H_1$. Отсюда, полагая $\nu=\nu^*e^{\lambda_1(t-\tau)}$, делаем вывод, что $\nu\in H_1$ – единственное решение уравнения (39).

Докажем неравенство (40). В случае $t-\tau\leqslant|\Delta x|^2$ оценка (40) сразу следует из того, что $\nu\in H_1$.

Пусть $t-\tau>|\Delta x|^2$. Положим

$$B\nu(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy,\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,$$

и рассмотрим $\Delta_xB\nu$. Имеем

$$|\Delta_xB\nu(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma_1(x,t;y,\eta)\Delta_xc(x,t)\nu(y,\eta;\xi,\tau)|\,dy+$$

$$+\int\limits_\tau^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|c(x+\Delta x,t)\Delta_x\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t(t-\tau)^{1/2}}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t\frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\,d\eta+C\frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}\frac{|\Delta x|}{(t-\tau)^{1/2}}\times$$

$$\times\left(\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\eta}\right)+\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\eta}\right)\right)\int\limits_{\tau}^{t}\frac{1}{(t-\eta)^{1/2}}\frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)}\left(\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\eta}\right)+\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\eta}\right)\right),\tag{42}$$

$(x,t;\xi,\tau),(x+\Delta x,t;\xi,\tau)\in D^*$.

Оценим $|\Delta_x F_1(x,t;\xi,\tau)|$ в случае $t-\tau\leqslant|\Delta x|^2$:

$$|\Delta_x F_1(x,t;\xi,\tau)|\leqslant|\Delta_x c(x,t)\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)|+|c(x+\Delta x,t)\Delta_x\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)+$$

$$+C\frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}\frac{|\Delta x|}{t-\tau}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right)+\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right)+\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая (42), получаем окончательно оценку (40). Лемма доказана.

Пусть $\nu\in H_1$ – решение интегрального уравнения (39). Тогда справедливы неравенства

$$|\nu(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)$$

и

$$|\Delta_x\nu(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right)+\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right),$$

$(x,t;\xi,\tau),(x+\Delta x,t;\xi,\tau)\in D^*$.

Из этих оценок, равенства (31) и оценок (38) следует, что для функции

$$W_2(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy\tag{43}$$

справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^{k+l}W_2}{\partial t^l\partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C\tilde\omega_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right),\tag{44}$$

$(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, $0\leqslant 2l+k\leqslant 2$.

Доказательство теоремы. Пусть $\nu\in H_1$ – решение интегрального уравнения (39), существование которого доказано в лемме 5, и функция W_2 задана формулой (43). Тогда из свойств функции Γ_1 и оценок (44) получаем, что функция

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)+W_2(x,t;\xi,\tau),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,$$

является фундаментальным решением уравнения $Lu=0$ и выполнены оценки (2).

Кроме того, из представления (25) следует равенство

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + W_0(x,t;\xi,\tau) + W_2(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

из которого, учитывая оценки (32) и (44), получаем неравенства (3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
3. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
4. *Zhenyakova I.V., Cherepova M.F.* The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients // J. of Math. Sci. 2022. V. 264. № 5. P. 581–602.
5. *Ильин А.М.* О фундаментальном решении параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 4. С. 768–771.
6. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
7. *Камынин Л.И.* О гладкости тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
8. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 22.09.2022 г.
После доработки 22.09.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 208–222

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ЯДРА РЕЛАКСАЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров

Рассматривается многомерная обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального волнового уравнения. В прямой задаче требуется найти функцию смещения из начально-краевой задачи, в обратной – определить ядро интегрального члена, зависящего как от временно́й, так и от одной пространственной переменных. Доказывается локальная однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций, непрерывных по одной из переменных и аналитических по другой, на основе метода шкал банаховых пространств вещественных аналитических функций.

DOI: 10.31857/S0374064123020073, EDN: PUSIWP

Введение. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + \int\limits_0^t k(x,\alpha)u(x,z,t-\alpha)\,d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,l), \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_z|_{z=0} = \psi(x,t), \quad u_z|_{z=l} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа, $\psi(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция; $l > 0$ – некоторое фиксированное вещественное число.

Нахождение функции $u(x,t)$ из задачи (1)–(3) при известной $k(x,t)$ называется *прямой задачей.*

Обратная задача заключается в определении ядра $k(x,t)$ интегро-дифференциального уравнения (1), если относительно решения задачи (1)–(3) известно, что

$$u(x,0,t) = f(x,t), \quad t \geqslant 0,$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

В обратных задачах для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, когда ядро интеграла зависит только от одной переменной, во многих случаях имеют место теоремы глобальной однозначной разрешимости [1–4]. Для многомерных обратных задач известны только специальные случаи, для которых установлена разрешимость. Функции, непрерывные по одной из переменных и аналитические по другим переменным, относятся классу функций, в которых имеет место разрешимость. Идея применения метода шкал банаховых пространств аналитических функций к многомерным обратным задачам, развитая в работах Л.В. Овсянникова [5] и Л. Ниренберга [6], принадлежит В.Г. Романову. В своих работах [7–9] он применил этот метод (с некоторыми модификациями) к вопросам локальной разрешимости многомерных обратных задач. В статьях [10–13] на его основе исследованы многомерные обратные задачи определения свёрточного ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка. Задача, которая исследуется в данной работе, относится к числу многомерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Следуя работам [7] и [14, с. 92], введём понятие шкалы банаховых пространств аналитических функций одного вещественного аргумента.

Пусть $h(x),\ x\in\mathbb{R}$, является вещественной функцией, для которой имеет место следующее соотношение:

$$\|h\|_s(r):=\sup_{|x|\leqslant r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\left|\frac{d^n}{dx^n}h(x)\right|<\infty,$$

где $r>0,\ s>0$ – некоторые параметры. Множество функций $h(x)$, для которых выполнено неравенство $\|h\|_s(r)<\infty$, является *банаховым пространством аналитических функций* и обозначается $A_s(r)$. Далее параметр r будет считаться фиксированным, а s рассматриваться как переменный параметр. Так как параметр r фиксирован, будем в дальнейшем для сокращения записей опускать его и использовать обозначения $\|h\|_s,\ A_s$ вместо $\|h\|_s(r),\ A_s(r)$. Совокупность пространств A_s для $s\in(0,s_0),\ s_0>0$, образует *шкалу банаховых пространств*. При этом если $h(x)\in A_s$, то $h(x)\in A_{s'}$ для всех $s'\in(0,s)$, следовательно, $A_s\subset A_{s'}$, если $s'<s$ и имеет место неравенство [14, с. 92]

$$\left\|\frac{d^n}{dx^n}h\right\|_{s'}\leqslant n^n\frac{\|h\|_s}{(s-s')^n}\tag{4}$$

для любого положительного целого числа n.

Будем считать, что векторная функция принадлежит пространству A_s, если все её компоненты являются элементами A_s. Нормой в A_s назовём максимальную из норм в A_s (компонент этой функции).

Ниже рассматриваются функции, которые являются аналитическими по $x\in\mathbb{R}$ и зависят от переменных $(z,t)\in\Omega$, где Ω – некоторая компактная область с кусочно-гладкой границей. В связи с этим нам потребуется

Определение. Функция $\omega=\omega(x,z,t)\in C(A_s,\Omega)$, если $\omega\in A_s$ для всех $(z,t)\in\Omega$, непрерывна в Ω как элемент пространства A_s и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\|\omega\|_{C(A_s,\Omega)}:=\sup_{(z,t)\in\Omega}\|\omega\|_s(z,t)<\infty.$$

Очевидно, что $C(A_s,\Omega)$ – банахово пространство.

1. Исследование прямой задачи. Рассмотрим задачу (1)–(3) в области $\mathbb{B}=\mathbb{B}_1\bigcup\mathbb{B}_2$, в которой

$$\mathbb{B}_1=\mathbb{R}\times G_1,\quad G_1=\{(z,t):0<z<l,\ \ 0<t<z\},$$

$$\mathbb{B}_2=\mathbb{R}\times G_2,\quad G_2=\{(z,t):0<z<l,\ \ z<t<2l-z\}.$$

Лемма. *Пусть* $(k(x,t),\psi(x,t))\in C(A_s,[0,T])$. *Тогда решение* $u(x,z,t)$ *уравнения (1) при условиях (2), (3):*

1) в области $\mathbb{B}_1$ *тождественно равно нулю;*

2) в области $\mathbb{B}_2$ *удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:*

$$u(x,z,t)=-\int\limits_0^{t-z}\psi(x,\tau)\,d\tau-\int\limits_0^{t-z}\int\limits_0^{\tau/2}\left[u_{xx}(x,\xi,\tau-\xi)+\int\limits_0^{\tau-2\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+\tau-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{t-z}^{t}\int\limits_{\tau-t+z}^{(2\tau-t+z)/2}\left[u_{xx}(x,\xi,-\xi+2\tau-t+z)+\int\limits_0^{-2\xi+2\tau-t+z}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+2\tau-t+z-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi\,d\tau,\tag{5}$$

причём справедливы равенства

$$u(x,z,z+0)=0,\quad u_t(x,z,z+0)=-\psi(x,0),\quad u_{tt}(x,z,z+0)=-\psi_t(x,0)-\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,0)z=:g(x,z).$$

Доказательство. В области $\mathbb{B}_0\subset\mathbb{B}_1$ согласно формуле Даламбера получим интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x,z,t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle(z,t)}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^\tau k(x,\alpha)u(x,\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau,\tag{6}$$

где $\triangle(z,t)=\{(\xi,\tau):z-t+\tau\leqslant\xi\leqslant z+t-\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant t\}$, $\mathbb{B}_0=\mathbb{R}\times G_0$, а $G_0=\{(z,t):0\leqslant z\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant l/2-|z-l/2|\}$.

Докажем, что уравнение (6) имеет только нулевое решение в классе функций, принадлежащих пространству $C(A_s,\mathbb{B}_0)$.

Рассмотрим область $\triangle(z_1,t_1)$ с произвольной фиксированной точкой $(z_1,t_1)\in G_0$. Пусть $k(x,t)\in C(A_{s_0},[0,l])$, $s_0>0$. Введём обозначения

$$K:=\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|k(t)\|_{s_0},\quad U(t):=\max_{z_1-t_1+t\leqslant t\leqslant z_1+t_1-t}\|u(z,t)\|_{s_0}.$$

Тогда, использовав формулу (4) при $n=2$, из (6) получим неравенство

$$U(t)\leqslant\frac{t_1}{2}\int\limits_0^t\Big[\frac{4}{(s(\tau)-s)^2}+t_1K\Big]U(\tau)\,d\tau,\quad t\in(0,t_1),\quad s\in(0,s_0).$$

Здесь в качестве функции $s(\tau)$ можно взять $s(\tau)=[s+s_0(1-\tau/t_1)]/2$. Тогда для $(t,s)\in\in(0,t_1)\times(0,s_0)$ переменная точка $(\tau,s(\tau))\in(0,t_1)\times(0,s_0)$ при любом $\tau\in(0,t)$. Из (4) следует оценка

$$U(t)\leqslant\frac{t_1(4+t_1s_0K)}{2}\int\limits_0^t\frac{1}{(s(\tau)-s)^2}U(\tau)\,d\tau,\quad t\in(0,t_1),\quad s\in(0,s_0).$$

Отсюда, согласно неравенству Гроноулла, имеем, что $U(t)=0$, $t\in(0,t_1)$. Так как (z_1,t_1) – произвольная точка области G_0, то $u\equiv0$ в области $\mathbb{B}_0$. Лемма доказана.

Замечание. Следует отметить, что доказательство тождества $u(x,z,t)\equiv0$ для $(x,z,t)\in\in\mathbb{B}_0$ может быть проведено с использованием формулы Пуассона, дающей решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения. Применение этой формулы в области $\mathbb{B}_0$ к уравнению (1) с нулевыми начальными данными (2) приведёт к интегральному уравнению вольтеровского типа первого рода относительно функции u, которое имеет только нулевое решение.

Продолжим доказательство первой части леммы. Возьмём произвольную точку $(x,z,t)\in\in\mathbb{B}_1\backslash\mathbb{B}_0$. В уравнении (1) перенесём u_{zz} в левую часть и представим волновой оператор $(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial z^2)$ в виде $(\partial/\partial t+\partial/\partial z)(\partial/\partial t-\partial/\partial z)$. Проинтегрировав полученное равенство вдоль характеристики $dz/dt=1$ от точки $(x,z-t,0)$ до точки (x,z,t), как и в работе [2] получим

$$(u_t-u_z)(x,z,t)-(u_t-u_z)(x,z-t,0)=\int\limits_0^t\Big[u_{xx}(x,z,\tau)+\int\limits_0^\tau k(x,\tau-\alpha)u(x,\tau-t+x,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\tau.$$

Использовав данные (2), запишем последнее соотношение в виде

$$(u_t-u_x)|_{x=l}=\int\limits_{t/2}^t\Big[u_{xx}(x,z,\tau)+\int\limits_0^\tau k(x,\tau-\alpha)u(x,\tau-t+x,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\tau,\quad t\in(0,l).$$

Далее, с помощью граничного условия (3) при $z=l$ отсюда находим

$$u(x,l,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\tau/2}^{\tau}\Big[u_{xx}(x,\tau,\theta)+\int\limits_0^{\theta}k(x,\theta-\alpha)u(x,\theta-\tau+l,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\theta\,d\tau.$$

Если сделать замену переменных θ на ξ во внутреннем интеграле по формуле $\theta-\tau+l=\xi$, то последнее уравнение принимает вид

$$u(x,l,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{l-\tau/2}^{l}\Big[u_{xx}(x,\tau-l+\xi,\tau)+\int\limits_0^{\tau-l+\xi}k(x,\tau-l+\xi-\alpha)u(x,\xi,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau. \tag{7}$$

Проинтегрировав уравнение (1) вдоль характеристики $dz/dt=1$ от точки $(x,z-t,0)$ до точки (x,z,t), получим

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\Big)u(x,z,t)=\int\limits_{(l+z-t)/2}^{z}\Big[u_{xx}(x,\xi,t)+\int\limits_0^{\xi+t-z}k(x,\xi+t-z-\alpha)u(x,\xi,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi.$$

Далее, интегрируя это равенство вдоль характеристики $dz/dt=-1$ от точки (x,z,t) до точки $(x,l,t+z-l)$ и используя формулу (7), находим уравнение для $u(x,z,t)$ в области $\mathbb{B}_1\backslash\mathbb{B}_0$:

$$u(x,z,t)=\int\limits_0^{t+z-l}\int\limits_{l-\tau/2}^{l}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^{\xi+\tau-l}k(x,\xi+\tau-l-\alpha)u(\xi,\alpha,\tau)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{t+z-l}^{t}\int\limits_{(l+z-t-2\tau)/2}^{-\tau+z+t}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^{\xi+2\tau-z-t}k(x,\xi+2\tau-z-t-\alpha)u(\xi,\alpha,\tau)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau,$$

где $(x,z,t)\in\mathbb{B}_1\backslash\mathbb{B}_0$. Тот факт, что это уравнение имеет только нулевое решение в классе функций, принадлежащих пространству $C(A_s,\mathbb{B}_1\backslash\mathbb{B}_0)$, доказывается так же, как и для уравнения (6).

В области $\mathbb{B}_2$ проинтегрируем уравнение (1) вдоль характеристики $dz/dt=-1$ и получим равенство

$$(u_t+u_x)(x,0,t)=-\int\limits_0^{t/2}\Big[u_{xx}(x,\xi,t-\xi)+\int\limits_0^{-2\xi+t}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+t-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi.$$

С учётом граничного условия (3) из этого соотношения получим

$$u(x,0,t)=-\int\limits_0^t\psi(x,\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau/2}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau-\xi)+\int\limits_0^{\tau-2\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+\tau-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau.$$

Используем этот результат и проинтегрируем уравнение (1) при условиях (2), (3) по характеристикам $dz/dt=-1$ и $dz/dt=1$. Тогда получим уравнение (5) в области $\mathbb{B}_2$. Первая часть леммы доказана.

Из (5) вытекает равенство

$$u(x,z,t)|_{t=z+0}=0. \tag{8}$$

Следовательно,
$$f(x,0)=0. \tag{9}$$

Заменим переменную интегрирования τ на β по формуле $t-\tau=\beta$ во внешнем интеграле последнего слагаемого в уравнении (5). Далее, продифференцировав его по переменной t, получим

$$u_t(x,z,t)=-\psi(x,t-z)-\int\limits_0^{(t-z)/2}\biggl[u_{xx}(x,\xi,t-\xi-z)+\int\limits_0^{t-z-2\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+t-z-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{z}\int\limits_{z-\beta}^{(t-2\beta+z)/2}\biggl[u_{xxt}(x,\xi,t-\xi-2\beta+z)+\int\limits_0^{-2\xi+t-2\beta+z}k(x,\alpha)u_t(x,\xi,-\xi+t-2\beta+z-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi\,d\beta.$$

Отсюда
$$u_t(x,z,z+0)=-\psi(x,0),$$
$$u_{tt}(x,z,t)=-\psi_t(x,t-z)-\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,0)z-$$
$$-\int\limits_0^{(t-z)/2}\biggl[u_{xxt}(x,\xi,t-\xi-z)+\int\limits_0^{t-z-2\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+t-z-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi-$$
$$-\int\limits_0^{z}\int\limits_{z-\beta}^{(t-2\beta+z)/2}\biggl[u_{xxtt}(x,\xi,t-\xi-2\beta+z)-\psi(x,0)k(x,t-2\xi-2\beta+z)+$$
$$+\int\limits_0^{-2\xi+t-2\beta+z}k(x,\alpha)u_t(x,\xi,-\xi+t-2\beta+z-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi\,d\beta.$$

Следовательно,
$$u_{tt}(x,z,z+0)=-\psi(x,0)-\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,0)z.$$

Лемма доказана.

2. Исследование обратной задачи. В области $\mathbb{B}_2$ воспользуемся формулой Даламбера для представления решения уравнения (1) с данными Коши (2) на оси $z=0$:

$$u(x,z,t)=\frac{1}{2}[f(x,t+z)+f(x,t-z)]+\frac{1}{2}\int\limits_{t-z}^{t+z}\psi(x,\tau)\,d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{z}\int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\biggl[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^{\tau-\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\tau\,d\xi. \tag{10}$$

В уравнении (10) переходим к пределу при $t\longrightarrow z+0$ с учётом условий (8) и (9):

$$f(x,2z)=-\int\limits_0^{2z}\psi(x,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{z}\int\limits_{\xi}^{2z-\xi}\biggl[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^{\tau-\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\tau\,d\xi. \tag{11}$$

Продифференцировав по t уравнение (11), получим равенство

$$\left[f_t(x,t) = -\psi(x,t) + \int_0^{t/2}\left(u_{xx}(x,\xi,t-\xi) + \int_0^{t-2\xi} k(x,\alpha)u(x,\xi,t-\xi-\alpha)\,d\alpha\right)d\xi\right]_{t=2z},$$

из которого следует, что

$$f_t(x,0) = -\psi(x,0),$$

$$\left[f_{tt}(x,t) = -\psi_t(x,t) + \int_0^{t/2}\left(u_{xxt}(x,\xi,t-\xi) + \int_0^{t-2\xi} k(x,\alpha)u_t(x,\xi,t-\xi-\alpha)\,d\alpha\right)d\xi\right]_{t=2z}. \tag{12}$$

Таким образом,

$$f_{tt}(x,0) = -\psi_t(x,0).$$

Продифференцировав ещё два раза по t уравнение (12) и разрешив полученное соотношение относительно $k(x,z)$, получим

$$k(x,z) = \frac{2}{\psi(x,0)}\Big(g_{xx}(x,z) - f_{tttt}(x,z) - \psi_{ttt}(x,z)\Big) + \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int_0^{z/2} k(x,z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{2}{\psi(x,0)}\int_0^{z/2}\left[v_{xx}(x,\xi,z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} k(x,\alpha)v(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi, \tag{13}$$

где введено обозначение

$$v(x,t,z) := u_{ttt}(x,t,z). \tag{14}$$

Продифференцировав уравнение (10) три раза по переменной t последовательно, получим равенства

$$u_t(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_t(x,t+z) + f_t(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi(x,t+z) - \psi(x,t-z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{z}\left[u_{xx}(x,\xi,t+z-\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} k(x,\alpha)u(x,\xi,t+z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{z}\left[u_{xx}(x,\xi,t-z+\xi) + \int_0^{t-z} k(x,\alpha)u(x,\xi,t-z+\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi, \tag{15}$$

$$u_{tt}(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_{tt}(x,t+z) + f_{tt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_t(x,t+z) - \psi_t(x,t-z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{z}\left[u_{xxt}(x,\xi,t+z-\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} k(x,\alpha)u_t(x,\xi,t+z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{z}\left[u_{xxt}(x,\xi,t-z+\xi) + \int_0^{t-z} k(x,\alpha)u_t(x,\xi,t-z+\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi, \tag{16}$$

$$u_{ttt}(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_{ttt}(x,t+z) + f_{ttt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z) - \psi_{tt}(x,t-z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[u_{xxtt}(x,\xi,t+z-\xi)-\psi(x,0)k(x,t+z-2\xi)+\int\limits_0^{t+z-2\xi}k(x,\alpha)u_{tt}(x,\xi,t+z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[u_{xxtt}(x,\xi,t-z+\xi)-\psi(x,0)k(x,t+z)+\int\limits_0^{t-z}k(x,\alpha)u_{tt}(x,\xi,t-z+\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi. \quad (17)$$

Уравнения (10), (13), (15)–(17) определяют в области Δ замкнутую систему интегральных уравнений относительно пяти неизвестных функций $u(x,z,t)$, $u_t(x,z,t)$, $u_{tt}(x,z,t)$, $u_{ttt}(x,z,t)$, $k(x,z)$. Если в уравнении (17) выразить функцию $u_{tt}(x,z,t)$ через $u_{ttt}(x,z,t)$ как

$$u_{tt}(x,z,t)=\int\limits_z^t u_{\tau\tau\tau}(x,z,\tau)\,d\tau+g(x,z) \quad (18)$$

и подставить в уравнение (17), то количество уравнений можно свести к минимуму, т.е. вместо пяти уравнений можно рассмотреть два уравнения, а именно, (17) и (13) относительно двух неизвестных функций $u_{ttt}(x,z,t)$, $k(x,z)$. Далее по $u_{ttt}(x,z,t)$ можно найти функцию $u_{tt}(x,z,t)$ по формуле (18). Функции $u_t(x,z,t)$ и $u(x,z,t)$ находятся аналогичным образом:

$$u_t(x,z,t)=\int\limits_z^t u_{\tau\tau}(x,z,\tau)\,d\tau-\psi(x,0), \quad u(x,z,t)=\int\limits_z^t u_\tau(x,z,\tau)\,d\tau.$$

В дальнейшим будем считать, что в формуле (17) вместо функции $u_{tt}(x,z,t)$ поставлено выражение (18). Таким образом, уравнения (17) и (13) определяют в Δ замкнутую систему интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $u_{ttt}(x,z,t)$, $k(x,z)$.

Воспользовавшись обозначением (14), с учётом (18) запишем уравнение (17) в виде

$$v(x,z,t)=\frac{1}{2}\left[f_{ttt}(x,t+z)+f_{ttt}(x,t-z)\right]+\frac{1}{2}\left[\psi_{tt}(x,t+z)-\psi_{tt}(x,t-z)\right]+g(x,z)(z-x)z-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}v_{xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)k(x,t+z-2\xi)+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\left(k(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}v(x,\xi,\tau)\,d\tau\right)d\alpha-$$

$$-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}v_{xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)k(x,t-z)-\int\limits_0^{t-z}\left(k(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}v(x,\xi,\tau)\,d\tau\right)d\alpha\Bigg]d\xi. \quad (19)$$

Теорема 1. *Пусть* $|\psi(x,0)|\geqslant\mu_0>0$, $(f(x,+0),f_t(x,+0),f_{tt}(x,+0))\in A_{s_0}$,

$$(f(x,t),f_t(x,t),f_{tt}(x,t),f_{ttt}(x,t),f_{tttt}(x,t))\in C_t(A_{s_0},[0,2l],),$$

$$(\psi(x,t),\psi_t(x,t),\psi_{tt}(x,t),\psi_{ttt}(x,t))\in C_t(A_{s_0},[0,2l],),$$

$$\max\{\|f\|_{s_0}(t),\|f_t\|_{s_0}(t),\|f_{tt}\|_{s_0}(t),\|f_{ttt}\|_{s_0}(t),\|f_{tttt}\|_{s_0}(t)\}\leqslant R_0, \quad t\in[0,2l],$$

где μ_0 *и* $R_0>0$ *– заданные числа.*

Тогда найдётся такое $a\in(0,l)$, *что для любого* $s\in(0,s_0)$ *в области* $\Gamma_{sl}=B_2\bigcap\{(x,z,t):0\leqslant z\leqslant a(s_0-s)\}$ *существует единственное решение системы уравнений (19), (13), для которого* $v(x,z,t)\in C(A_{s_0},F)$, $k(x,z)\in C(A_{s_0},[0,a(s_0-s)])$, $F=\{(z,t,s):(z,t)\in G_2$, $0<z<a(s_0-s)\}$, *причём имеют место оценки*

$$\|v-v_0\|_s(z,t)\leqslant R_0, \quad \|k-k_0\|_s(z)\leqslant\frac{R_0}{s_0-s},$$

где

$$v_0 := \frac{1}{2}l[f_{ttt}(x,t+z)+f_{ttt}(x,t-z)]+\frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z)-\psi_{tt}(x,t-z)]+g(x,z)(z-x)z,$$

$$k_0 := \frac{2}{\psi(x,0)}(g_{xx}(x,z)-f_{tttt}(x,z)-\psi_{ttt}(x,z)).$$

Доказательство. Для дальнейших вычислений удобно ввести обозначения

$$\varphi_1(x,z,t) := v(x,z,t), \quad \varphi_2(x,z) := k(x,z),$$

$$\varphi_1^0(x,z,t) := \frac{1}{2}[f_{ttt}(x,t+z)+f_{ttt}(x,t-z)]+\frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z)-\psi_{tt}(x,t-z)]+g(x,z)(z-\xi)z,$$

$$\varphi_2^0(x,z) := \frac{2}{\psi(x,0)}\left(\frac{1}{2}g_{xx}(x,z)-f_{tttt}(x,z)-\psi_{ttt}(x,z)\right).$$

Тогда из уравнений (19) и (13) получим равенства

$$\varphi_1(x,z,t)=\varphi_1^0(x,z,t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\varphi_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\varphi_2(x,t+z-2\xi)+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\Bigg(\varphi_2(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}\varphi_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)\,d\alpha-$$

$$-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}\varphi_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)\varphi_2(x,t-z)-\int\limits_0^{t-z}\Bigg(\varphi_2(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}\varphi_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi,$$

$$\varphi_2(x,z)=\varphi_2^0(x,z)+\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\varphi_2(x,z-2\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\Bigg[\varphi_{1xx}(x,\xi,z-\xi)+\int\limits_0^{z-2\xi}\varphi_2(x,\alpha)\varphi_1(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi.$$

Пусть числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$ определяемые рекуррентными соотношениями

$$a_{n+1}=a_n\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1},$$

образуют убывающую числовую последовательность, и число a является пределом этой последовательности:

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=a_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}.$$

Положительное число $a_0<l/s_0$ будет выбрано позже. Построим последовательные приближения следующим образом:

$$\varphi_1^{n+1}(x,z,t)=\varphi_1^0(x,z,t)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\varphi_{1xx}^n(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\varphi_2^n(x,t+z-2\xi)+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\Bigg(\varphi_2^n(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}\varphi_1^n(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)\,d\alpha-$$

$$
-\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi}\varphi^n_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)\varphi^n_2(x,t-z)-\int\limits_0^{t-z}\biggl(\varphi^n_2(x,\alpha)\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha}\varphi^n_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\biggr)\,d\alpha\biggr]\,d\xi,
$$

$$
\varphi^{n+1}_2(x,z)=\varphi^0_2(x,z)+\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\varphi^n_2(x,z-2\xi)\,d\xi+
$$

$$
+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\biggl[\varphi^n_{1xx}(x,\xi,z-\xi)+\int\limits_0^{z-2\xi}\varphi^n_2(x,\alpha)\varphi^n_1(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi.
$$

Определим функцию $s'_n(z)$ по формуле

$$
s'_n(z)=\frac{s+\nu^n(z)}{2},\qquad \nu^n(z)=s_0-\frac{z}{a_n}. \tag{20}
$$

Введём обозначение $\omega^n_i:=\varphi^{n+1}_i-\varphi^n_i,\ \ i=1,2.$ При $n=0$ имеют место соотношения

$$
\omega^0_1(x,z,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{z}\biggl[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi}\varphi^0_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\varphi^0_2(x,t+z-2\xi)+
$$

$$
+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\biggl(\varphi^0_2(x,\alpha)\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha}\varphi^0_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\biggr)\,d\alpha-
$$

$$
-\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi}\varphi^0_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)\varphi^0_2(x,t-z)-\int\limits_0^{t-z}\biggl(\varphi^0_2(x,\alpha)\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha}\varphi^0_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\biggr)\,d\alpha\biggr]\,d\xi,
$$

$$
\omega^0_2(x,z)=\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\varphi^0_2(x,z-2\xi)\,d\xi+
$$

$$
+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\biggl[\varphi^0_{1xx}(x,\xi,z-\xi)+\int\limits_0^{z-2\xi}\varphi^0_2(x,\alpha)\varphi^0_1(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi.
$$

При $n=1$ имеем

$$
\omega^1_1(x,z,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{z}\biggl[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi}\omega^0_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\omega^0_2(x,t+z-2\xi)+
$$

$$
+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha}(\omega^0_2(x,\alpha)\varphi^1_1(x,\xi,\tau)+\varphi^0_2(x,\alpha)\omega^0_1(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha-\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi}\omega^0_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+
$$

$$
+\psi(x,0)\omega^0_2(x,t-z)-\int\limits_0^{t-z}\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha}(\omega^0_2(x,\alpha)\varphi^1_1(x,\xi,\tau)+\varphi^0_2(x,\alpha)\omega^0_1(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha\biggr]\,d\xi,
$$

$$\omega_2^1(x,z) = \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \omega_2^0(x, z-2\xi)\, d\xi + \frac{2}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \Bigg[\omega_{1xx}^0(x,\xi,z-\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{z-2\xi} l(\omega_2^0(x,\alpha)\varphi_1^1(x,\xi,z-\xi-\alpha) + \varphi_2^0(x,\alpha)\omega_1^0(x,\xi,z-\xi-\alpha))\, d\alpha \Bigg] d\xi.$$

Таким образом, для любого n получим равенства

$$\omega_1^n(x,z,t) = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{z} \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi} \omega_{1xx}^{n-1}(x,\xi,\tau)\, d\tau - \psi(x,0)\omega_2^{n-1}(x, t+z-2\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{t+z-2\xi} \int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} (\omega_2^{n-1}(x,\alpha)\varphi_1^n(x,\xi,\tau) + \varphi_2^{n-1}(x,\alpha)\omega_1^{n-1}(x,\xi,\tau))\, d\tau\, d\alpha - \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi} \omega_{1xx}^{n-1}(x,\xi,\tau)\, d\tau +$$

$$+ \psi(x,0)\omega_2^{n-1}(x, t-z) - \int\limits_0^{t-z} \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} (\omega_2^{n-1}(x,\alpha)\varphi_1^n(x,\xi,\tau) + \varphi_2^{n-1}(x,\alpha)\omega_1^{n-1}(x,\xi,\tau))\, d\tau\, d\alpha \Bigg] d\xi,$$

$$\omega_2^n(x,z) = \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \omega_2^{n-1}(x, z-2\xi)\, d\xi + \frac{2}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \Bigg[\omega_{1xx}^{n-1}(x,\xi,z-\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{z-2\xi} (\omega_2^{n-1}(x,\alpha)\varphi_1^n(x,\xi,z-\xi-\alpha) + \varphi_2^{n-1}(x,\alpha)\omega_1^{n-1}(x,\xi,z-\xi-\alpha))\, d\alpha \Bigg] d\xi.$$

Дальше покажем, что если выбрать $a_0 \in (0,l)$ подходящим образом, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют места неравенства

$$\lambda_n = \max\Bigg\{ \sup_{(z,t,s)\in F_n} \Bigg[\|\omega_1^n\|_s(z,t) \frac{\nu^n(z)-s}{z} \Bigg], \sup_{(z,t,s)\in F_n} \Bigg[\|\omega_2^n\|_s(z) \frac{(\nu^n(z)-s)^2}{z} \Bigg] \Bigg\} < \infty, \tag{21}$$

$$\|\varphi_1^{n+1} - \varphi_0^{n+1}\|_s(z,t) \leqslant R_0, \quad \|\varphi_2^{n+1} - \varphi_0^{n+1}\|_s(z) \leqslant \frac{R_0}{(s_0-s)^2}, \tag{22}$$

где $F_n = l\{(z,t,s) : (z,t) \in G_2,\ 0 < z < a_n(s_0-s),\ 0 < s < s_0\}$. Пусть $n=0$, тогда с учётом (4) получим оценку

$$\|\omega_1^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{1}{2} \Bigg| \int\limits_0^{z} \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi} \|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau + |\psi(x,0)| \|\varphi_2^0\|_s(t+z-2\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{t+z-2\xi} \Bigg(\|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} \|\varphi_1^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau \Bigg) d\alpha - \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi} \|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau + |\psi(x,0)| \|\varphi_2^0\|_s(t-z) -$$

$$- \int\limits_0^{t-z} \Bigg(\|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} \|\varphi_1^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau \Bigg) d\alpha \Bigg] d\xi \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^z \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi} \frac{4R_0\,d\tau}{(s'(\xi)-s)^2} + 2p_0R_0 + \int\limits_0^{t+z-2\xi} R_0^2(t+z-2\xi-\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi} \frac{4R_0\,d\tau}{(s'(\xi)-s)^2} + \int\limits_0^{t-z} R_0^2(t-z-2-\alpha)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi,$$

где $p_0 = \|\psi(x,0)\|_s$.

Воспользовавшись формулой (20), отсюда имеем

$$\|\omega_1^0\|_s(z,t) \leqslant \int\limits_0^z (z-\xi)\Bigg[\frac{16R_0l}{(\nu^0(z)-s)^2} + p_0R_0 + 2lR_0^2t\Bigg]\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant a_0R_0\Big[16l + s_0^2(p_0 + 2l^2R_0)\Big]\frac{z}{\nu^0(z)-s}, \quad (z,t,s)\in F_0.$$

Аналогично оцениваем и другую компоненту:

$$\|\omega_2^0\|_s(z) \leqslant \left|\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\right| \int\limits_0^{z/2} \|\varphi_2^0\|_s(z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\Bigg[\|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi,z-\xi) + \int\limits_0^{z-2\xi}\|\varphi_2^0\|_s(\alpha)\|\varphi_1^0\|_s(\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R_0}{\mu_0}\Big[24 + s_0^2R_0(1+l)\Big]\frac{z}{(\nu^0(z)-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F_0.$$

При получении этих неравенств были использованы неравенства

$$\frac{1}{\nu^0(\xi)-s} \leqslant \frac{1}{\nu^0(z)-s}, \quad \nu^0(z)-s < s_0,$$

справедливые для $\xi\in(0,z)$, $s\in(0,s_0)$, $(z,t,s)\in F_0$. Данные оценки показывают верность неравенства (21) при $n=0$. Далее, для $(z,t,s)\in F_1$ находим

$$\|\varphi_1^1-\varphi_0^0\|_s(z,t) = \|\omega_1^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{a_0\lambda_0 z}{\nu^0(z)-s} \leqslant a_0\lambda_0,$$

$$\|\varphi_2^1-\varphi_0^0\|_s(z) = \|\omega_2^0\|_s(z) \leqslant \frac{a_0\lambda_0 z}{(\nu^0(z)-s)^2} \leqslant \frac{4a_0\lambda_0}{(s_0-s)}.$$

Таким образом, если выбрать a_0 так, чтобы $4a_0\lambda_0 \leqslant R_0$, то неравенства (22) будут выполняться для $n=0$.

Методом математической индукции покажем, что неравенства (21), (22) имеют место и для других n, если выбрать a_0 подходящем образом. Пусть неравенства (21), (22) справедливы для $n=1,2,\ldots,j$. Тогда для $(z,t,s)\in F_{j+1}$ имеем

$$\|\omega_1^{j+1}\|_s(z,t) \leqslant \frac{1}{2}\Bigg|\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi}\|\omega_{1xx}^j\|_s(\xi,\tau)\,d\tau + |\psi(x,0)|\|\omega_2^j\|_s(t+z-2\xi) +$$

$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}(\|\omega_2^j\|_s(\alpha)\|\varphi_1^{j+1}\|_s(\xi,\tau)+\|\varphi_2^j\|_s(\alpha)\|\omega_1^j\|_s(\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}\|\omega_{1xx}^j\|_s(\xi,\tau)\,d\tau+$$

$$+|\psi(x,0)|\|\omega_2^j\|_s(t-z)-\int\limits_0^{t-z}\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}(\|\omega_2^j\|_s(\alpha)\|\varphi_1^{j+1}\|_s(\xi,\tau)\|\varphi_2^j\|_s(\alpha)\|\omega_1^j\|_s(\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha\bigg]\,d\xi\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\bigg|\int\limits_0^z\bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\frac{4a_0\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(\nu^j(\xi)-s)}\,d\tau+\frac{2a_0\lambda_j\xi p_0}{(\nu^j(\xi)-s)^2}+$$

$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\bigg(\frac{4a_0\lambda_j\xi R_0}{\nu^j(\xi)-s}+\frac{a_0\lambda_j(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2}\bigg)(t+z-2\xi-\alpha)\,d\alpha-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}\frac{4a_0\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(\nu^j(\xi)-s)}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t-z}\bigg(\frac{4a_0\lambda_j\xi R_0}{\nu^j(\xi)-s}+\frac{a_0\lambda_j(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2}\bigg)(t-z-\alpha)\,d\alpha\bigg]\,d\xi\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_j a_0 s_0[16l^2R_0s_0+1+s_0^2+2p_0]\frac{z}{\nu^{j+1}(z)-s}=:\lambda_j a_0\eta_1(R_0,l,s_0,p_0)\frac{z}{\nu^{j+1}(z)-s}.$$

Здесь в промежуточных выкладках функция $s'(\xi)$ взята в виде (20) при $n=j$ и использованы оценки

$$\|\varphi_1^{j+1}\|_s(z,t)\leqslant 2R_0,\quad \|\varphi_2^{j+1}\|_s(z)\leqslant R_0\frac{1+s_0^2}{(s_0-s)},$$

справедливые согласно индуктивному предположению, а также очевидные неравенства $a_j\leqslant a_0$ и $\nu^{j+1}(z)<\nu^j(z)$.

Рассуждая аналогично для ω_2^{j+1}, получаем, что

$$\|\omega_2^{j+1}\|_s(z)\leqslant\bigg|\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\omega_2^j(x,z-2\xi)\,d\xi+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\bigg[\omega_{1xx}^j(x,\xi,z-\xi)+$$

$$+\int\limits_0^{z-2\xi}(\omega_2^j(x,\alpha)\varphi_1^{j+1}(x,\xi,z-\xi-\alpha)+\varphi_2^j(x,\alpha)\omega_1^j(x,\xi,z-\xi-\alpha))\,d\alpha\bigg]\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_j a_0\frac{2R_0}{\mu_0}[4l+(4+l+1+s_0^2)s_0]\frac{z}{(\nu^{j+1}(z)-s)^2}=:\lambda_j a_0\eta_2(R_0,\mu_0,l,s_0)\frac{z}{(\nu^{j+1}(z)-s)^2},\quad (z,t,s)\in F_0.$$

Из полученных оценок следуют неравенства

$$\lambda_{j+1}\leqslant\lambda_j\rho,\quad \lambda_{j+1}<\infty,\quad \rho:=a_0\max\{\eta_1,\eta_2\}.$$

Вместе с тем для $(x,t,s)\in F_{j+2}$ имеем

$$\|\varphi_i^{j+2}-\varphi_i^0\|_s(z,t)\leqslant\sum_{n=0}^{j+1}\|\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n\|_s(z,t)=\sum_{n=0}^{j+1}\|\omega_i^n\|_s(z,t)\leqslant\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n z}{(\nu^n(z)-s)^i}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(s_0-s)^{i-1}}\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n a_n^i a_{j+2}}{(a_n-a_{j+2})^i}\leqslant\frac{\lambda_0 a_0}{(s_0-s)^{i-1}}\sum_{n=0}^{j+1}\rho^n(n+1)^{2i},\quad i=1,2.$$

Выберем $a_0 \in (0, l)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho < 1, \quad \lambda_0 a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (n+1)^4 \leqslant R_0.$$

Тогда

$$\|\varphi_i^{j+2} - \varphi_i^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{R_0}{(s_0 - s)^{i-1}}, \quad (x,t,s) \in F_{j+2}, \quad i = 1,2.$$

Так как выбор не зависит от номера приближений, то последовательные приближения φ_i^n, $i = 1,2$, принадлежат пространству $C(A_s, F)$, $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, и для них имеют место неравенства

$$\|\varphi_i^n - \varphi_i^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{R_0}{(s_0 - s)^{i-1}}, \quad (x,t,s) \in F, \quad i = 1,2.$$

При $s \in (0, s_0)$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})$ сходятся равномерно в норме пространства $C(A_s, F)$, поэтому $\varphi_i^n \to \varphi_i$. Предельные функции являются элементами $C(A_s, F)$ и удовлетворяют уравнениям (19) и (13).

Докажем теперь единственность найденного решения. Пусть $\varphi_i^{(1)}$ и $\varphi_i^{(2)}$ – любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\varphi_i^{(j)} - \varphi_i^0\|_s(z,t) \leqslant R_0, \quad i,j = 1,2, \quad (x,t,s) \in F.$$

Обозначим их разность через $\widetilde{\varphi}_i := \varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}$, $i = 1,2$, и пусть

$$\mu := \max\left\{ \sup_{(z,t,s)\in F} \left[\|\widetilde{\varphi}_1\|_s(z,t) \frac{\nu(z) - s}{z} \right], \sup_{(z,t,s)\in F} \left[\|\widetilde{\varphi}_2\|_s(z) \frac{(\nu(z) - s)^2}{z} \right] \right\} < \infty,$$

где

$$\nu(z) = s_0 - \frac{z}{a}, \quad a = a_0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1}.$$

Тогда из уравнений (19) и (13) для функций $\widetilde{\varphi}_i$ можно получить следующие соотношения:

$$\widetilde{\varphi}_1(x,z,t) = -\frac{1}{2} \int_0^z \Bigg[\int_\xi^{t+z-\xi} \widetilde{\varphi}_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau - \psi(x,0)\widetilde{\varphi}_2(x,t+z-2\xi)p(x,\xi) +$$

$$+ \int_0^{t+z-2\xi} \int_\xi^{t+z-\xi-\alpha} (\varphi_2^1(x,\alpha)\widetilde{\varphi}_1(x,\xi,\tau) + \widetilde{\varphi}_2(x,\alpha)\varphi_1^2(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha - \int_\xi^{t-z+\xi} \widetilde{\varphi}_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau -$$

$$- \psi(x,0)\widetilde{\varphi}_2(x,t-z) - \int_0^{t-z} \int_\xi^{t-z+\xi-\alpha} (\varphi_2^1(x,\alpha)\widetilde{\varphi}_1(x,\xi,\tau) + \widetilde{\varphi}_2(x,\alpha)\varphi_1^2(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha \Bigg] d\xi,$$

$$\widetilde{\varphi}_2(x,z) = \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)} \int_0^{z/2} \varphi_2(x,z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x,0)} \int_0^{z/2} \left[\varphi_{1xx}(x,\xi,z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} (\varphi_2^1(x,\alpha)\widetilde{\varphi}_1(x,\xi,z-\xi-\alpha)\widetilde{\varphi}_2(x,\alpha)\varphi_1^2(x,\xi,z-\xi-\alpha))\,d\alpha \right] d\xi.$$

Применив к ним оценки, приведённые выше, находим неравенство $\lambda < \lambda\rho'$, где $\rho' < \rho < 1$. Следовательно, $\lambda = 0$. Поэтому $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i^{(2)}$, $i = 1, 2$. Теорема доказана.

3. Оценка устойчивости. Введём в рассмотрение множество $\mathfrak{F}$ пары функций (ψ, f), являющихся элементами $C_t([0, 2l], A_{s_0})$, $s_0 > 0$, для которых выполнены условия теоремы 1 при фиксированных R_0, l, s_0. Имеет место следующая теорема условной устойчивости.

Теорема 2. *Пусть* $(\psi^1, f^1) \in \mathfrak{F}$ *и* $(\psi^2, f^2) \in \mathfrak{F}$. *Тогда для соответствующих решений* (v^1, k^1) *и* (v^2, k^2) *уравнений (19) и (13) имеют место оценки*

$$\|v^1 - v^2\|_s(z, t) \leqslant C\sigma, \quad \|k^1 - k^2\|_s(z) \leqslant \frac{C\sigma}{s_0 - s}, \quad 0 < s < s_0, \tag{23}$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от R_0, l, s_0,

$$\sigma = \max\Big\{\max\|f^1 - f^2\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1 - \psi^2\|_{s_0}(t),\ \max\|f^1_t - f^2_t\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1_t - \psi^2_t\|_{s_0}(t),$$

$$\max\|f^1_{tt} - f^2_{tt}\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1_{tt} - \psi^2_{tt}\|_{s_0}(t),\ \max\|f^1_{ttt} - f^2_{ttt}\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1_{ttt} - \psi^2_{ttt}\|_{s_0}(t),$$

$$\max\|f^1_{tttt} - f^2_{tttt}\|_{s_0}(t)\Big\}, \quad t \in [0, 2l].$$

Доказательство. Введём обозначения $\widetilde{v} := v^1 - v^2$, $\widetilde{k} := k^1 - k^2$, $\widetilde{f} := f^1 - f^2$, $\widetilde{\psi} := \psi^1 - \psi^2$, $\widetilde{g} := g^1 - g^2$, как в книге [14, с. 18]. Тогда из соотношений (19) и (13) получим

$$\widetilde{v}(x, z, t) = \frac{1}{2}[\widetilde{f}_{ttt}(x, t + z) + \widetilde{f}_{ttt}(x, t - z)] + \frac{1}{2}[\widetilde{\psi}_{tt}(x, t + z) - \widetilde{\psi}_{tt}(x, t - z)] + \widetilde{g}(x, z)(z - \xi)z -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^z \Big[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi} \widetilde{v}_{xx}(x, \xi, \tau)\, d\tau - \psi(x, 0)\widetilde{k}(x, t + z - 2\xi) + \int\limits_0^{t+z-2\xi}\Big(k^1(x, \alpha)\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} \widetilde{v}(x, \xi, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \widetilde{k}(x, \alpha)\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} v^2(x, \xi, \tau)\, d\tau\Big)\, d\alpha - \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi} \widetilde{v}_{xx}(x, \xi, \tau)\, d\tau + \psi(x, 0)\widetilde{k}(x, t - z) -$$

$$- \int\limits_0^{t-z}\Big(k^1(x, \alpha)\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} \widetilde{v}(x, \xi, \tau)\, d\tau + \widetilde{k}(x, \alpha)\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} v^2(x, \xi, \tau)\, d\tau\Big)\, d\alpha\Big]\, d\xi, \tag{24}$$

$$\widetilde{k}(z, t) = \frac{2}{\psi(x, 0)}(\widetilde{g}_{xx}(x, z) - \widetilde{f}_{tttt}(x, z) - \widetilde{\psi}_{ttt}(x, z)) + \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)}\int\limits_0^{z/2} \widetilde{k}(x, z - 2\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x, 0)}\int\limits_0^{z/2}\Big[\widetilde{v}_{xx}(x, \xi, z - \xi) + \int\limits_0^{z-2\xi}(k^1(x, \alpha)\widetilde{v}(x, \xi, z - \xi - \alpha) + \widetilde{k}(x, \alpha)v^2(x, \xi, z - \xi - \alpha))\, d\alpha\Big]\, d\xi, \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\|\widetilde{v}_0\|_{s_0}(x, z) \leqslant 2\sigma, \quad \|\widetilde{k}_0\|_{s_0} \leqslant 2\sigma. \tag{26}$$

Из теоремы 1 следуют оценки

$$\|\widetilde{v}\|_s(z, t) \leqslant 2R_0, \quad \|\widetilde{k}\|_s(z) \leqslant R_0\frac{1 + s_0^2}{s_0 - s}.$$

Применив к линейной системе уравнений (24), (25) метод последовательных приближений (как при доказательстве теоремы 1), находим при том же выборе постоянной a_0 для решения этой системы справедливые неравенства

$$\|\widetilde{v}-\widetilde{v}_0\|_s \leqslant C_1\sigma, \quad \|\widetilde{k}-\widetilde{k}_0\|_s \leqslant \frac{C_1\sigma}{s_0-s}, \quad (z,t)\in P_{sT}, \quad 0<s<s_0.$$

В этих неравенствах C_1 зависит от R_0, l, s_0. Следовательно, с учётом (26) получим неравенства (23). Теорема доказана.

Заключение. Полученная теорема о локальной однозначной разрешимости двумерной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения дополняет совокупность результатов по исследованию многомерных обратных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 72–82.
2. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 855–867.
3. *Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 136–144.
4. *Safarov J.Sh.* Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // J. of Siberian Federal Univ. Math. & Phys. 2018. V. 11. № 6. P. 753–763.
5. *Овсянников Л.В.* Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 789–792.
6. *Nirenberg L.* Topics in Nonlinear Functional Analysis. New York, 1974.
7. *Романов В.Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 275–283.
8. *Романов В.Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 4. С. 125–134.
9. *Романов В.Г.* О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 4. С. 807–811.
10. *Дурдиев Д.К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 574–582.
11. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Вып. 4 (29). С. 37–47.
12. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17. № 4. С. 18–43.
13. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. № 2. С. 269–285.
14. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. М., 2005.

Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Diplomat University, г. Ташкент, Узбекистан

Поступила в редакцию 27.11.2021 г.
После доработки 06.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 223–235

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.2

КОРРЕКТНОСТЬ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. А. И. Кожанов, А. В. Дюжева

Исследуется корректность в пространствах Соболева некоторых аналогов нелокальной задачи Самарского–Ионкина для эллиптических уравнений второго порядка. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – решений, имеющих все обобщённые по Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение. Изучаются некоторые спектральные задачи для эллиптических уравнений с нелокальным условием Самарского–Ионкина.

DOI: 10.31857/S0374064123020085, EDN: PUUISH

Введение. Нелокальными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи с условиями, связывающими значения решения и (или) его производных в граничных точках со значениями решения и (или) его производных в точках иных граничных или внутренних многообразий. Важной вехой в развитии теории нелокальных задач, особенно применительно к эллиптическим уравнениям (которым и посвящена настоящая статья), явилась статья А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1], опубликованная в 1969 г. В ней был предложен новый подход к постановке нелокальных краевых задач, с тех пор он активно используется многими авторами. С различными аспектами, связанными с теорией нелокальных краевых задач, прежде всего для эллиптических уравнений, можно ознакомиться в работах [2–17]; в частности, в монографиях [11, 13, 15] можно найти обширную библиографию и примеры задач математического моделирования, приводящих к нелокальным краевым задачам для эллиптических уравнений.

Особую роль для развития теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений сыграли работы [18–21] (формально эти работы были связаны с параболическими уравнениями, но предложенные в них постановки задач и использованные методы оказались актуальными и для других классов уравнений). В [18, 19] изучалась нелокальная задача для одномерного уравнения параболического типа второго порядка, возникающая при моделировании некоторых неклассических процессов теплопроводности. Для этой задачи был предложен метод, основанный на разложении решения по специальной биортогональной системе функций, и с его помощью были установлены существование и устойчивость решения. В дальнейшем метод работ [18, 19] успешно применялся в исследованиях близких нелокальных задач для гиперболических уравнений второго порядка, параболических уравнений четвёртого порядка, некоторых других уравнений.

В 1980 г. была опубликована статья А.А. Самарского [20], в которой для параболических уравнений с одной пространственной переменной была также предложена постановка нелокальной по пространственной переменной задачи, включающая постановки как классических начально-краевых задач, так и задачу Н.И. Ионкина (из работ [18, 19]). Исследованию разрешимости нелокальных задач с условием А.А. Самарского посвящены работы Н. Лажетича, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной и многих других авторов.

Наконец, отметим статью [21], в которой изучена разрешимость задачи Н.И. Ионкина для одномерных параболических уравнений с переменными коэффициентами. Метод исследования отличался от метода работ [18, 19], но в ней разрешимость была установлена в весовых пространствах.

Именно задача Н.И. Ионкина, или, в терминологии последнего времени, задача Самарского–Ионкина, но для эллиптических уравнений с выделенной переменной, и будет предметом исследования в настоящей статье; используемый при этом метод будет отличаться как от метода работ [18, 19], такь и от метода работы [21].

Все построения и рассуждения будем вести с использованием пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и описания свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [22–24].

Уточним, что цель работы – исследовать корректности тех или иных задач в классах регулярных решений – решений, имеющих все обобщённые по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

В работе изучим нелокальные задачи Самарского–Ионкина для некоторых модельных уравнений. Обобщения полученных результатов на более общие уравнения и на некоторые другие задачи приведём в конце статьи.

1. Постановка задач. Пусть x – точка интервала $(0,1)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ – точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для упрощения бесконечно-дифференцируемой) границей, Q – цилиндр $(0,1)\times\Omega$, $S=(0,1)\times\partial\Gamma$ – боковая граница Q. Далее, пусть $c(x,y)$, $f(x,y)$ и $\gamma(y)$ – заданные функции, определённые при $x\in[0,1]$, $y\in\overline{\Omega}$, $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $u(x,y)$ определяется равенством

$$\mathcal{L}u=u_{xx}+\Delta_y u+c(x,y)u$$

(Δ_y – оператор Лапласа по переменным $y_1,\ \ldots,\ y_n$).

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}u=f(x,y), \tag{1}$$

удовлетворяющую условиям

$$u|_S=0, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\gamma(y)u(1,y),\quad u_x(1,y)=0,\quad y\in\Omega. \tag{3}$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1), удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u_x(0,y)=\gamma(y)u_x(1,y),\quad u(1,y)=0,\quad y\in\Omega. \tag{4}$$

Условие (4) в случае $\gamma(y)\equiv 1$ представляет собой нелокальное условие Ионкина из работы [18], и в этом случае нелокальная задача II фактически и будет задачей Самарского–Ионкина для эллиптических уравнений.

Нелокальная задача I, безусловно, имеет самостоятельное значение. Вместе с тем, как будет показано ниже, она тесно связана с нелокальной задачей II.

Наряду с нелокальными задачами I и II, в работе будут изучены и спектральные задачи, связанные с ними, а именно, задачи I и II в случае $c(x,y)\equiv\mathrm{const}$, $\gamma(y)\equiv\mathrm{const}$.

2. Разрешимость нелокальной задачи I. Приведём результаты о существовании и единственности решений нелокальной задачи I в пространстве $W_2^2(Q)$.

Пусть $\phi(y)$ – произвольная функция из пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega \phi^2(y)\,dy\leqslant d_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \phi_{y_i}^2(y)\,dy, \tag{5}$$

в котором постоянная d_0 определяется лишь областью Ω (см. [22–24]).

Далее, пусть $\psi(x)$ – функция из пространства $W_2^1([0,1])$. Имеет место неравенство

$$\psi^2(1)\leqslant\delta^2\int\limits_0^1 x\psi'^2(x)\,dx+\left(2+\frac{1}{\delta^2}\right)\int\limits_0^1 x\psi^2(x)\,dx, \tag{6}$$

где δ – произвольное положительное число. Для доказательства этого неравенства достаточно в тождестве

$$\psi^2(1) = 2\int_0^1 x\psi^2(x)\,dx + 2\int_0^1 x^2\psi(x)\psi'(x)\,dx$$

применить ко второму слагаемому правой части неравенство Юнга.

Неравенства (5) и (6) понадобятся в дальнейших выкладках.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,y) - \frac{1}{d_0} < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}, \tag{7}$$

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad |\gamma(y)| \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad y \in \overline{Q}. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ *такой, что* $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$, *нелокальная задача I разрешима в пространстве* $W_2^2(Q)$ *и притом единственным образом.*

Доказательство. Пусть выполняется условие

$$|\gamma(y)| \leqslant \gamma_0 < 1 \quad \text{при} \quad y \in \overline{Q}. \tag{9}$$

Для положительного числа ε и для числа λ из отрезка $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}u - \varepsilon\Delta_y u_{xx} = f(x,y), \tag{10}$$

удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y) = \lambda\gamma(y)u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{11}$$

Определим банахово пространство V:

$$V = \{v(x,y) : v(x,y) \in W_2^2(Q), \quad v_{xx}(x,y) \in L_2(0,1; W_2^2(\Omega)),$$

$$\|v\|_V = (\|v\|^2_{W_2^2(Q)} + \|v_{xx}\|^2_{L_2(0,1;W_2^2(\Omega))})^{1/2}\}.$$

Покажем, что при фиксированном ε, при всех λ из отрезка $[0,1]$ и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$ краевая задача (10), (2), (11) будет иметь решение $u(x,y)$, принадлежащее пространству V.

Введём функцию $w(x,y) = u(x,y) - \lambda\gamma(y)u(1,y)$. Вследствие условия (9) функцию $u(x,y)$ нетрудно выразить через $w(x,y)$:

$$u(x,y) = w(x,y) + \gamma_1(\lambda,y)w(1,y), \quad \gamma_1(\lambda,y) = \frac{\lambda\gamma(y)}{1-\lambda\gamma(y)}.$$

Далее, краевая задача (10), (2), (11) преобразуется в задачу: найти функцию $w(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}w - \varepsilon\Delta_y w_{xx} + \gamma_1(\lambda,y)\Delta_y w(1,y) + 2\sum_{i=1}^n \gamma_{1y_i}(\lambda,y)w_{y_i}(1,y) + \Delta_y\gamma_1(\lambda,y)w(1,y) = f(x,y), \tag{12}$$

удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$w(0,y) = 0, \quad w_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{13}$$

Согласно теореме о методе продолжения по параметру [25, гл. III, § 14], краевая задача (12), (2), (13) будет разрешима в пространстве V при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$ для всех чисел λ из отрезка $[0,1]$, если: 1) задача (12), (2), (13) разрешима в пространстве V для $\lambda=0$; 2) для всевозможных решений $w(x,y)$ краевой задачи (12), (2), (13) выполняется априорная оценка

$$\|w\|_V \leqslant R_0\|f\|_{L_2(Q)} \tag{14}$$

с постоянной R_0, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω и, быть может, числом ε.

Разрешимость краевой задачи (12), (2), (13) в пространстве V при $\lambda=0$ очевидна. Далее, наличие требуемой оценки (14) установим с помощью техники, которая в дальнейшем будет неоднократно использоваться: искомая оценка будет получена вначале на всевозможных решениях краевой задачи (10), (2), (11), а затем перенесена на решение задачи (12), (2), (13) с помощью представленной выше связи между функциями $u(x,y)$ и $w(x,y)$.

Всюду далее считаем, что ε – число из интервала $(0,\varepsilon_0)$; величину числа ε_0 уточним ниже.

Умножим уравнение (10) на функцию $-xu(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. После несложных преобразований получим равенство

$$\int\limits_Q\left[xu_x^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2-xcu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+$$

$$+\frac12\int\limits_\Omega[1-\lambda^2\gamma^2(y)]u^2(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega[1-\lambda^2\gamma^2(y)]\biggl(\sum_{i=1}^n u_{y_i}^2(1,y)\biggr)dy=$$

$$=-\int\limits_Q xfu\,dx\,dy+\varepsilon\lambda^2\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\gamma(y)\gamma_{y_i}(y)u_{y_i}(1,y)u(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\gamma_{y_i}^2u(1,y)\,dy.$$

Используя условия (7) и (9), а также применяя неравенство Юнга и учитывая неравенство (5), нетрудно от данного неравенства перейти к следующему:

$$\int\limits_Q\left[xu_x^2+c_1xu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+\frac{1-\gamma_0^2}{4}\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon(1-\gamma_0^2)}{4}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant c_2\int\limits_Q f^2\,dx\,dy+\varepsilon c_3\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy, \tag{15}$$

здесь числа c_1 и c_2 положительны и определяются функцией $c(x,y)$ и областью Ω, а число c_3 определяется лишь функцией $\gamma(y)$. Если теперь число ε_0 принадлежит интервалу $(0,(1-\gamma_0^2)/(4c_3))$, то при $\varepsilon<\varepsilon_0$ из неравенства (15) вытекает априорная оценка

$$\int\limits_Q\left[xu_x^2+xu^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy\leqslant M_1\int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{16}$$

с постоянной M_1, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

На следующем шаге умножим уравнение (10) на функцию $x\Delta_y u(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Повторяя по сути выкладки, с помощью которых была получена оценка (16), но дополнительно учитывая саму оценку (16), получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) выполняется априорная оценка

$$\int\limits_Q [xu_{xy_i}^2 + x(\Delta_y u)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_x)^2]\,dx\,dy + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy +$$

$$+\,\varepsilon \int\limits_\Omega (\Delta_y u(1,y))^2\,dy \leqslant M_2 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{17}$$

с постоянной M_2, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Умножим теперь уравнение (10) на функцию $-x\Delta_y u_{xx}(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Действуя аналогично предыдущему, дополнительно используя оценки (16) и (17), получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) имеет место третья априорная оценка

$$\int\limits_Q [xu_{xxy_i}^2 + x(\Delta_y u_x)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_{xx})^2]\,dx\,dy + \int\limits_\Omega (\Delta_y u(1,y))^2\,dy \leqslant M_3 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{18}$$

с постоянной M_3, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Умножим уравнение (10) на функцию $u_{xx}(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Используя формулу интегрирования по частям, оценку (18), оценку в $L_2(\Omega)$ для функции $\Delta_y u(0,y)$ (являющуюся следствием первого условия (11)), неравенство (5), условие (7), неравенство

$$\int\limits_\Omega u_x^2(0,y)\,dy \leqslant \int\limits_Q u_{xx}^2\,dx\,dy,$$

а также применяя неравенство Юнга, получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) справедлива оценка

$$\int\limits_Q \left[u_{xx}^2 + \sum_{i=1}^n (u_{xy_i}^2 + u^2)\right] dx\,dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{xxy_i}^2\,dy \leqslant M_4 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{19}$$

с постоянной M_4, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω и числом ε.

На следующем шаге умножим уравнение (10) на функцию $-\varepsilon\Delta_y u_{xx}(x,y)$. Интегрируя по цилиндру Q и повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) имеет место оценка

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n u_{xxy_i}^2 + (\Delta_y u_x)^2 + \varepsilon(\Delta_y u_{xx})^2\right] dx\,dy \leqslant M_5 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{20}$$

с постоянной M_5, вновь определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω и числом ε.

Из оценок (19) и (20) очевидным образом вытекает суммарная оценка

$$\|u\|_V \leqslant M_0 \|f\|_{L_2(Q)}^2 \tag{21}$$

с постоянной M_0, определяющейся вновь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, областью Ω, а также числом ε.

Учитывая, что функция $w(x,y)$ представляется через функцию $u(x,y)$ соотношением $w(x,y) = u(x,y) - \lambda\gamma(y)u(1,y)$, получаем, что для функции $w(x,y)$ имеет место искомая оценка (14). Как уже упоминалось выше, из этой оценки следует, что краевая задача (12), (2), (13) разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$. Но тогда и краевая задача (10), (2), (11) будет разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$, в том числе и при $\lambda = 1$.

Для осуществления процедуры предельного переход по ε в уравнении (10) необходимо установить наличие априорных оценок, равномерных по ε.

Прежде всего заметим, что равномерными по ε будут априорные оценки (16) и (17). Далее в равенстве, полученном после умножения уравнения (10) на функцию $-x\Delta_y u_{xx}(x,y)$ и интегрирования по Q, преобразуем правую часть:

$$-\int\limits_Q xf\Delta_y u_{xx}\,dx\,dy = \int\limits_Q (xf)_x\Delta_y u_x\,dx\,dy.$$

Применив неравенство Юнга, получим, что для решения $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) (при $\lambda = 1$) выполняется оценка

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n xu_{xxy_i} + x(\Delta_y u_x)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_{xx})^2\right] dx\,dy + \int\limits_\Omega [\Delta_y u(1,y)]^2\,dy \leqslant M_6\int\limits_Q (f^2+f_x^2)\,dx\,dy \quad (22)$$

с постоянной M_6, определяющейся лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Повторяя далее действия, которые привели к оценкам (19) и (20), но при этом учитывая оценку (22), получаем, что для функции $u(x,t)$ выполняется оценка

$$\int\limits_Q \left[u_{xx}^2 + \sum_{i=1}^n u_{xy_i}^2 + \varepsilon^2(\Delta_y u_{xx})^2\right] dx\,dy \leqslant M_7\int\limits_Q (f^2+f_x^2)\,dx\,dy, \quad (23)$$

постоянная M_7 в которой определяется лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Последняя требуемая оценка

$$\int\limits_Q (\Delta_y u)^2\,dx\,dy \leqslant M_8\int\limits_Q (f^2+f_x^2)\,dx\,dy \quad (24)$$

очевидным образом вытекает из оценок (19), (20), (22) и (23).

Полученных оценок уже вполне достаточно для осуществления процедуры предельного перехода. Действительно, выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ чисел из интервала $(0,\varepsilon_0)$, сходящуюся к нулю. Далее, из семейства $\{u_m(x,y)\}_{m=1}^\infty$ решений краевых задач (10), (2), (11) в случае $\lambda = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_m$ выберем подсемейство $\{u_{m_k}(x,y)\}_{m=1}^\infty$ такое, что для некоторой функции $u(x,y)$ имеют место сходимости при $k\to\infty$: $u_{m_k}(x,y)\to u(x,y)$ слабо в $W_2^2(Q)$, $\varepsilon_{m_k}\Delta_y u_{m_k xx}(x,y)\to 0$ слабо в $L_2(Q)$, $u_{m_k}(0,y)\to u(0,y)$ слабо в $W_2^2(\Omega)$, $u_{m_k}(1,y)\to u(1,y)$ слабо в $W_2^2(\Omega)$ (вследствие свойства рефлексивности гильбертова пространства это возможно). Очевидно, что предельная функция $u(x,y)$ и будет искомым решением краевой задачи I при выполнении условия (9).

Пусть теперь выполняется более общее условие (8). Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (10) и удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y) = (1-\varepsilon)\gamma(y)u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y\in\Omega.$$

Согласно доказанному выше, эта задача при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ имеет решение $u(x,y)$, принадлежащее пространству V. Повторяя рассуждения и выкладки, проведённые выше, но дополнительно используя неравенство (6) (с фиксированными числом δ), получаем, что для функции $u(x,y)$ имеет место оценка

$$\int\limits_Q [u_{xx}^2 + \sum_{i=1}^n u_{xy_i}^2 + (\Delta_y u)^2 + \varepsilon^2(\Delta_y u_{xx})^2]\,dx\,dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(0,y)\,dy + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy \leqslant M_9 \int\limits_Q (f^2 + f_x^2)\,dx\,dy$$

с постоянной M_9, определяющейся лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω. Данной оценки вполне достаточно для выбора соответствующей сходящейся к искомому решению $u(x,y)$ нелокальной задачи I последовательности.

Единственность в пространстве $W_2^2(Q)$ решения нелокальной задачи I очевидным образом вытекает из оценки

$$\int\limits_Q (xu_x^2 + xu^2)\,dx\,dy \leqslant M \int\limits_Q f^2\,dx\,dy,$$

справедливой при выполнении как условия (9), так и условия (8). Из этой оценки и из неравенства (6) вытекает, что для решения $u(x,y)$ нелокальной задачи I в случае $f(x,y) \equiv 0$ выполняется условие $u(0,y) = 0$. Другими словами, функция $u(x,y)$ будет решением однородной смешанной краевой задачи из пространства $W_2^2(Q)$ для эллиптического уравнения. Как хорошо известно [23], данное решение – тождественно нулевая функция, а это и означает единственность решения нелокальной задачи I. Теорема доказана.

Пусть γ_0 и γ_1 – фиксированные числа такие, что $0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 1 \leqslant \gamma_1$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma_0 \leqslant \gamma(y) \leqslant \gamma_1 \quad \textit{при} \quad y \in \overline{\Omega}; \tag{25}$$

$$c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,y) - \frac{1}{d_0} + 2\gamma_1^2(\gamma_1^2 - 1) < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}. \tag{26}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ такой, что $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ и при том единственным образом.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру. Изучим сначала случай $\gamma_0 > 0$.

Для положительного числа ε и для чисел λ из отрезка $[0,1]$ рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (10) и удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y) - \gamma_0 u(1,y) = \lambda[\gamma(y) - \gamma_0]u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{27}$$

Поскольку $\gamma_0 \leqslant 1$, то краевая задача (10), (2), (27) при $\lambda = 0$, при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$ будет разрешима в пространстве V (см. доказательство теоремы 1). Для доказательства разрешимости этой же задачи для остальных чисел λ из отрезка $[0,1]$ вновь перейдём к вспомогательной задаче для дифференциального уравнения вида (12).

Положим

$$w(x,y) = u(x,y) - \frac{\lambda(x^2 - 2x)}{\gamma_0}[\gamma(y) - \gamma_0]u(1,y),$$

$$\beta_0(\lambda,y) = 1 + \frac{\lambda[\gamma(y) - \gamma_0]}{\gamma_0}, \quad \beta_1(\lambda,y) = \frac{\lambda[\gamma(y) - \gamma_0]}{\gamma_0\beta_0(\lambda,y)}.$$

Заметим, что функция $\beta_0(\lambda,y)$ положительна при $\lambda \in [0,1]$, $y \in \overline{\Omega}$, и что имеет место равенство

$$u(x,y) = w(x,y) + (x^2 - 2x)\beta_1(\lambda,y)w(1,y).$$

Это равенство позволяет перейти от краевой задачи для функции $u(x,y)$ к краевой задаче для функции $w(x,y)$, причём для функции $w(x,y)$ должны выполняться локальные краевые условия смешанной задачи, а именно, условие (2) и условия

$$w(0,y)=\gamma_0 w(1,y), \quad w_x(1,y)=0, \quad y\in\Omega.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 1, для разрешимости полученной краевой задачи для функции $w(x,y)$, а также для разрешимости в пространстве V нелокальной краевой задачи (10), (2), (27) при $\lambda\in[0,1]$, достаточно показать, что имеет место равномерно по λ оценка (21).

Для получения нужной оценки умножим уравнение (10) на функцию $-xu(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\int\limits_Q \left[xu_x^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2 - xcu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy=$$

$$=\int\limits_\Omega ([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u^2(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u_{y_i}^2(1,y)\,dy+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega[(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]\gamma_{y_i}(y)u_{y_i}(1,y)u(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\gamma_{y_i}^2(y)u^2(1,y)\,dy-\int\limits_Q xfu\,dx\,dy. \quad (28)$$

Используя неравенство (6), в котором $\delta^2=1/(2(\gamma_1^2-1))$, оценим первое слагаемое в правой части (28):

$$\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u^2(1,y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant(\gamma_1^2-1)\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy\leqslant\frac12\int\limits_Q xu_x^2\,dx\,dy+2\gamma_1^2(\gamma_1^2-1)\int\limits_Q xu^2\,dx\,dy. \quad (29)$$

Далее, вновь используя (6), нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\Bigg|\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u_{y_i}^2(1,y)\,dy+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega[(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]\gamma_{y_i}(y)u_{y_i}(1,y)u(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\gamma_{y_i}^2(y)u^2(1,y)\,dy\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left[\delta_1\sum_{i=1}^n\int\limits_Q xu_{xy_i}^2\,dx\,dy+C(\delta_1)\sum_{i=1}^n\int\limits_Q xu_{y_i}^2\,dx\,dy+C_1\int\limits_Q xu_x^2\,dx\,dy+C_2\int\limits_Q xu^2\,dx\,dy\right], \quad (30)$$

в котором δ_1 – произвольное положительное число, $C(\delta_1)$ определяется помимо числа δ_1 также функцией $\gamma(y)$, C_1 и C_2 – положительные числа, определяющиеся лишь функцией $\gamma(y)$. Зафиксируем число $\delta_1=1/2$. Положим

$$\varepsilon_1=\min\left\{\frac{1}{C(1/2)},\frac{1}{2C_1},\frac{C_0}{C_2}\right\}.$$

Если изначально число ε принадлежит интервалу $(0, \varepsilon_1)$, то из (28)–(30) вследствие условия (26) вытекает априорная оценка

$$\int\limits_Q \left[xu_x^2 + \sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2 + xu^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right] dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy \leqslant M_{10} \int\limits_Q f^2\,dx\,dy, \tag{31}$$

постоянная M_{10} в которой определяется лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$.

Последовательно умножая уравнение (10) на функции $x\Delta_y u(x,y)$ и $-x\Delta_y u_{xx}(x,y)$, интегрируя по цилиндру Q, используя условия (27), неравенство (15) и условия (25) и (26), учитывая также оценку (31), получаем, что для решений краевой задачи (10), (2), (27) выполняются оценки

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2 + x(\Delta_y u)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_x)^2\right] dx\,dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy + \varepsilon \int\limits_\Omega [\Delta_y u(1,y)]^2\,dy \leqslant M_{12} \int\limits_Q f^2\,dx\,dy, \tag{32}$$

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n xu_{xxy_i}^2 + x(\Delta_y u_x)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_{xx})^2\right] dx\,dy + \int\limits_\Omega [\Delta_y u(1,y)]^2\,dy \leqslant M_{13} \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{33}$$

с числом M_{12}, определяемым областью Ω, функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, и числом M_{13}, определяемым областью Ω, функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также числом ε.

Из оценок (31)–(33) следует справедливость оценки (21) и, далее, разрешимость в пространстве V краевой задачи (10), (2), (27) в случае $\gamma_0 > 0$ при всех λ из отрезка $[0,1]$, при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$.

Если теперь в интеграле с функцией $-xf(x,y)\Delta_y u_{xx}(x,y)$ дополнительно проинтегрировать по частям, то получим, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (27) выполняется равномерная по ε оценка (22). В свою очередь, из этой оценки следует, что выполняются равномерные по ε оценки (23) и (24).

Из полученных равномерных по ε априорных оценок вытекает, что существует последовательность решений краевой задачи (10), (2), (27) с $\lambda = 1$, сходящаяся к решению $u(x,y)$ из пространства $W_2^2(Q)$ нелокальной задачи I.

Пусть теперь $\gamma_0 = 0$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (10), удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y) = [\varepsilon + \gamma(y)]u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{11'}$$

Как следует из доказанного выше, при фиксированном ε эта задача разрешима в пространстве V. Повторяя доказательство априорных оценок (31), (32), (23) и (24), нетрудно теперь уже из семейства решений задачи (10), (2), (11') выбрать последовательность, сходящуюся к искомому решению нелокальной задачи I.

Единственность решения нелокальной задачи I в пространстве $W_2^2(Q)$ очевидна. Теорема доказана.

3. Разрешимость нелокальной задачи II. Исследование разрешимости нелокальной задачи II будет проведено с помощью результатов, полученных в п. 2.

Теорема 3. *Пусть выполняется одно из условий:*

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad |\gamma(y)| \leqslant 1 \quad \textit{при} \quad y \in \overline{\Omega}, \quad (xc_x(x,y))_x \geqslant 0,$$

$$c(x,y) - \frac{1}{d_0} < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}; \tag{34}$$

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma(y) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad y \in \overline{\Omega}, \quad \max_{\Omega} \gamma(y) = \gamma_1 > 1, \quad (xc_x(x,y))_x \geqslant 0,$$

$$c(x,y) - \frac{1}{d_0} + 2\gamma_1^2(\gamma_1^2 - 1) < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}. \tag{35}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ *такой, что* $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$, $f_{xx}(x,y) \in L_2(Q)$, $f(1,y) = 0$ *при* $y \in \overline{\Omega}$, *нелокальная задача II имеет решение* $u(x,y)$ *такое, что* $u(x,y) \in W_2^2(Q)$, $u_x(x,y) \in W_2^2(Q)$, *причём это решение единственно.*

Доказательство. Пусть $g(x,y)$ – заданная функция. Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}v - c_x(x,y) \int\limits_x^1 v(z,y)\,dz = g(x,y), \tag{36}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3). В этой задаче уравнение (36) лишь незначительно отличается от уравнения (1). Заменяя (36) уравнением

$$\mathcal{L}v - \lambda c_x(x,y) \int\limits_x^1 v(z,y)\,dz = g(x,y)$$

с параметром λ из отрезка $[0,1]$, повторяя доказательство теоремы 1 при выполнении условия (34) или теоремы 2 при выполнении условия (35), а также дополнительно используя условие $(xc_x(x,y))_x \geqslant 0$, нетрудно показать, что краевая задача (36), (2), (3) будет иметь решение $v(x,y)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Положим $g(x,y) = f_x(x,y)$, $u(x,y) = -\int_x^1 v(z,y)\,dz$. Уравнение (36) для функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + \Delta_y u + cu - f) = 0. \tag{37}$$

Справедливо равенство $u_{xx} + \Delta_y u + cu - f = 0$. Отсюда следует, что построенная по функции $v(x,y)$ функция $u(x,y)$ будет решением уравнения (1). Выполнение краевых условий (2) и (4) для функции $u(x,y)$, принадлежность функции $u(x,y)$ требуемому классу очевидны. Следовательно, найденная функция $u(x,y)$ и будет искомым решением нелокальной задачи II.

В классе $\{u(x,y) : u(x,y) \in W_2^2(Q),\ u_x(x,y) \in W_2^2(Q)\}$ единственность решений нелокальной задачи II очевидна. Теорема доказана.

4. Собственные числа нелокальных задач I и II. Опишем некоторые свойства собственных чисел эллиптических задач с нелокальными условиями Самарского–Ионкина.

Спектральная задача I. Найти числа λ и γ, для которых задача

$$u_{xx} + \Delta_y u = \lambda u, \quad (x,y) \in Q,$$

$$u(x,y)|_S = 0,$$

$$u(0,y) = \gamma u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega,$$

имеет нетривиальное решение $u(x,y)$, принадлежащие пространству $W_2^2(Q)$.

Спектральная задача II. Найти числа λ и γ, для которых задача

$$u_{xx} + \Delta_y u = \lambda u, \quad (x,y) \in Q,$$

$$u(x,y)|_S = 0,$$

$$u_x(0,y) = \gamma u_x(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega,$$

имеет нетривиальное решение $u(x,y)$, принадлежащие пространству $W_2^2(Q)$.

Исследование разрешимости спектральных задач I и II будет проведено с помощью классического метода разделения переменных.

Как хорошо известно (см., например, [24]), существуют последовательности $\{w_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно собственных функций и собственных чисел спектральной задачи

$$\Delta_y w(y) = \beta w(y), \quad y \in \Omega,$$

$$w(y)|_{\Gamma} = 0.$$

Более того, известно, что все собственные числа β_k отрицательны, имеют конечную кратность, последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно расположить в монотонно убывающую последовательность, имеющую единственную предельную точку $-\infty$, функции $w_k(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, принадлежат пространству $W_2^2(Q)$ и образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$.

Пусть λ – число из промежутка $(-\infty, \beta_1]$. Обозначим через $k_0(\lambda)$ натуральное число такое, что $\beta_{k_0(\lambda)+1} < \lambda \leqslant \beta_{k_0(\lambda)}$.

Теорема 4. *Действительное число λ будет собственным числом спектральной задачи I, если выполняется одно из условий:*

1) $\lambda \leqslant \beta_1$, $\gamma = \cos\sqrt{\beta_k - \lambda}$ для некоторого натурального числа k такого, что $1 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant k_0(\lambda)$;

2) $\lambda \leqslant \beta_1$, $\gamma = (e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} + e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})/2$ для некоторого натурального числа k такого, что $k \geqslant k_0(\lambda) + 1$;

3) $\lambda > \beta_1$, $\gamma = (e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} - e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})/2$ для некоторого натурального числа k.

Доказательство. Определим функцию $\phi_k(x)$ как решение задачи

$$\phi_k''(x) + (\beta_k - \lambda)\phi_k(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$\phi_k(0) = \gamma\phi_k(1), \quad \phi_k'(1) = 0.$$

При выполнении одного из условий 1)–3) функция ϕ_k будет ненулевой. Положив далее $u_k(x, y) = \phi_k(x)w_k(y)$, получим ненулевое решение спектральной задачи I, а это и означает требуемое. Теорема доказана.

Теорема 5. *Действительное число λ будет собственным числом спектральной задачи II, если выполняется одно из условий 1)–3) теоремы 4.*

Доказательство этой теоремы очевидно.

Некоторые следствия из теоремы 4 и 5 будут приведены в следующем пункте.

5. Комментарии и дополнения.

5.1. Приведём простой пример, показывающий, что подход, предложенный в настоящей работе, можно использовать и в других ситуациях.

Пусть $b(x, y)$ и $c(x, y)$ – заданные в $\overline{Q}$ функции, $\mathcal{M}$ – оператор, действие которого определяется равенством

$$\mathcal{M}v = v_{xx} + \Delta_y v + b(x, y)v_x + c(x, y)v.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$b(x, y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, y) \in C^1(\overline{Q}),$$

$$b(x, y) \leqslant 0, \quad c(x, y) - \frac{1}{2}b_x(x, y) - \frac{1}{d_0} < 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \overline{Q},$$

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma^2(y) \leqslant 1 - \frac{1}{2}b(1, y) \quad \text{при} \quad y \in \overline{\Omega}.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ такой, что $f(x, y) \in L_2(Q)$, $f_x(x, y) \in L_2(Q)$, нелокальная задача с условиями (2), (3) для уравнения $\mathcal{M}v = f$ имеет решение $u(x, y)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$, и притом ровно одно.

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Нетрудно установить для уравнения $\mathcal{M}v = f$ также и теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3.

Заметим, что теорема 6 и аналогичные ей теоремы показывают, что для задач с обобщённым условием Самарского–Ионкина существенную роль могут играть младшие члены.

5.2. Результаты о разрешимости нелокальных задач I и II нетрудно получить и для других более общих, чем (1), уравнений. Например, оператор Лапласа Δ_y можно заменить более общим эллиптическим оператором второго порядка, действующим по переменным $y_1, \ldots, y_n$, вторую производную по x можно заменить дифференциальным выражением $\partial(a(x,y)u_x)/\partial x$ с положительной функцией $a(x,y)$. Далее Δ_y можно заменить оператором $(-1)^{m+1}\Delta_y^m u$ (с естественными дополнительными граничными условиями на множестве S), вместо граничного условия (2) можно задавать граничное условие второй или третьей краевых задач.

5.3. Как следует из п. 1, нелокальная задача II в случае $\gamma \equiv 1$ является собственно задачей с условием Ионкина, а именно, условием периодического вида $u(0,y) = u(1,y)$ при $y \in \Omega$. В общем же случае нелокальная задача II может быть и задачей с условием антипериодичности $u(0,y) = -u(1,y)$, и задачей, в которой на подмножестве Ω_1 из Ω задаётся условие $u(0,y) = u(1,y)$, на другом подмножестве Ω_2 – условие $u(0,y) = -u(1,y)$, на третьем же подмножестве Ω_3 – обычное условие Дирихле $u(0,y) = 0$.

5.4. Условия $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$ теорем 1 и 2 можно заменить условием $f(x,y) \in L_2(0,1;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Это следует из равенства

$$-\int\limits_Q xf\Delta_y u_{xx}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q xf_y\Delta_y u_{xx}\,dx\,dy,$$

которое можно использовать при получении равномерной по ε оценки (23).

Аналогичные изменения можно внести и в формулировку теоремы 3.

5.5. Теоремы о разрешимости нелокальных задач I и II, а также теоремы о собственных числах спектральных задач I и II говорят прежде всего о том, что корректность краевых задач для эллиптических уравнений с обобщённым условием Самарского–Ионкина существенным образом определяется младшим коэффициентом и функцией (числом) γ. И если в теоремах существования 1–3 важнейшим является условие отрицательности коэффициента $c(x,y)$, то в спектральных задачах (дающих, в частности, условия неединственности решений) существенную роль может сыграть коэффициент γ. Например, при подходящем выборе числа γ как в спектральной задаче I, так и в спектральной задаче II любое действительное число λ может оказаться собственным числом. И наоборот, нетрудно найти числа γ, для которых спектральные задачи I и II не будут иметь действительных собственных чисел (таковыми, например, будут все числа γ из промежутка $(-\infty,-1)$).

Работа выполнена в рамках госзадания “Программа фундаментальных исследований Самарского государственного университета в области химических наук и материаловедения” (тема № FSSE-2020-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 117–131.
3. *Романко В.К.* Однозначная разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения 1977. Т. 13. № 2. С. 324–335.
4. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
5. *Бицадзе А.В.* К теории нелокальных краевых задач // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 17–19.
6. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках// Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 139–156.

7. *Моисеев Е.И.* О базисности собственных функций одной нелокальной краевой задачи// Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 3. С. 556–589.
8. *Жура Н.А.* Краевые задачи Бицадзе–Самарского для эллиптических в смысле Дуглиса–Ниренберга систем // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 81–91.
9. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* Условия фредгольмовости одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1993. Т. 333. № 3. С. 290–292.
10. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 184. С. 121–160.
11. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications // Operator Theory. Advances and Applications. V. 91. Basel; Boston; Berlin, 1997.
12. *Гущин А.К.* Об условии компактности одного класса операторов и его приложении к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 17–36.
13. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., 2006.
14. *Ashyraliev A., Akay N.* A note on the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic difference equations// Appllied Mathematics Computation. 2006. V. 175. № 1. P. 49–60.
15. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. математика. Фунд. направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.
16. *Ashyraliev A., Akay N.* A note on the Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space // Math. Anal. and Appl. 2008. V. 344. P. 557–563.
17. *Kozhanov A.I.* Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 741–752.
18. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
19. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
20. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
21. *Юрчук Н.И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.
22. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
23. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
24. *Triebel H.* Interpolation Theory. Functional Spaces. Differential Operators. Berlin, 1980.
25. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1973.

Институт математики
имени С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск,
Самарский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 236–251

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ОБ ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЙ У ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ∞-ЛАПЛАСИАНОМ

© 2023 г. **А. А. Коньков**

Для дифференциальных неравенств с ∞-лапласианом в главной части найдены условия отсутствия решений в неограниченных областях. Приведены примеры, демонстрирующие точность этих условий.

DOI: 10.31857/S0374064123020097, EDN: PVDQWT

Введение. Рассмотрим задачу

$$\Delta_\infty u \geqslant f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где Ω – неограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$,

$$\Delta_\infty u = \frac{1}{2}\nabla|\nabla u|^2\nabla u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

– ∞-оператор Лапласа, а f – некоторая функция такая, что выполняется неравенство

$$f(x,t) > 0 \tag{2}$$

для всех $t > 0$ и $x \in \Omega$. Обозначим через B_r и S_r, соответственно, открытый шар и сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Будем предполагать, что $S_r \bigcap \Omega \neq \varnothing$ для всех $r > r_*$, где $r_* > 0$ – некоторое вещественное число. Пусть также найдутся вещественные числа $\sigma > 1$ и $\theta > 1$ такие, что

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma}\\ \zeta\in(t/\theta,t\theta)}} f(x,|x|\zeta) \geqslant q(r)g(t) \tag{3}$$

для всех $t > 0$ и $r > r_*$, где $\Omega_{r,\sigma} = \{x \in \Omega : r/\sigma < |x| < r\sigma\}$, а q и g – неотрицательные измеримые функции, причём $\inf\limits_K g > 0$ для любого компакта $K \subset (0,\infty)$.

Решения задачи (1) будем понимать в вязкостном смысле (см. [1, 2]). Если $\partial\Omega = \varnothing$, т.е. $\Omega = \mathbb{R}^n$, то краевое условие в (1) считается выполненным автоматически.

Явление отсутствия нетривиальных решений у дифференциальных уравнений и неравенств (blow-up) исследовалось многими авторами [3–19]. В случае когда главная часть дифференциального оператора имеет дивергентный вид, хорошо зарекомендовал себя метод нелинейной емкости, основные идеи которого изложены в работах [6, 18]. Для неравенств (1) этот метод, очевидно, не работает. В предположении, что Ω – ограниченная область, явление blow-up для неравенств вида (1) изучалось в статьях [20–22], в которых рассматривался так называемый “граничный blow-up” или, другими словами, “большие решения”, стремящиеся к бесконечности при приближении к границе $\partial\Omega$. Зависимость правой части от пространственной переменной в работах [20–22] по существу не учитывалась. В случае неограниченных областей условия отсутствия нетривиальных решений задачи (1) до настоящего момента не были известны. Теорема, доказанная в данной работе, устраняет этот пробел.

Определение 1. Функция $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху в точке* $x \in \overline{\Omega}$, если выполняется неравенство

$$\limsup_{y\to x} u(y) \leqslant u(x).$$

Говорим, что функция u *полунепрерывна сверху на множестве* $\mathcal{G} \subset \overline{\Omega}$, если она полунепрерывна сверху в каждой точке $x \in \mathcal{G}$.

Определение 2. *Суперджетом второго порядка* $J^{2,+}_{\Omega} u(x)$ функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \Omega$ называется множество упорядоченных пар (v, A), где $v \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор и A – симметрическая $n \times n$-матрица такие, что справедлива оценка

$$u(y) - u(x) \leqslant \langle v, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle A(y - x), y - x\rangle + \bar{\bar{o}}(|y - x|^2)$$

для всех y из некоторой окрестности точки x. Здесь и ниже угловыми скобками обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что в случае $u \in C^2(\Omega)$ множество $J^{2,+}_{\Omega} u(x)$ не пусто для любой точки $x \in \Omega$, так как

$$(Du(x), D^2 u(x)) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x),$$

где $Du(x)$ – вектор градиента, а $D^2 u(x)$ – матрица вторых производных функции u в точке x.

Определение 3. Функция $u \geqslant 0$ называется *неотрицательным решением задачи* (1), если она полунепрерывна сверху на множестве $\overline{\Omega}$, равна нулю на границе $\partial\Omega$, и при этом для любой точки $x \in \Omega$ такой, что $J^{2,+}_{\Omega} u(x) \neq \varnothing$, выполнено соотношение

$$\langle Av, v\rangle \geqslant f(x, u(x)) \tag{4}$$

для всех $(v, A) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$.

В общем случае (см. [1]) полунепрерывная сверху функция u называется *вязкостным решением неравенства*

$$F(x, u, Du, D^2 u) \leqslant 0 \quad \text{в области} \quad \Omega,$$

где F – некоторая функция, если для любой точки $x \in \Omega$ такой, что $J^{2,+}_{\Omega} u(x) \neq \varnothing$, выполнено соотношение

$$F(x, u(x), v, A) \leqslant 0 \tag{5}$$

для всех $(v, A) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$. В частности, полагая

$$F(x, u, Du, D^2 u) = f(x, u) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{6}$$

в формуле (5), будем иметь неравенство (4).

Для того чтобы классические решения были одновременно вязкостными, на функцию F накладывается условие вырожденной эллиптичности

$$F(x, \zeta, v, A) \leqslant F(x, \zeta, v, B)$$

для всех $x \in \Omega$, вещественных чисел ζ, векторов $v \in \mathbb{R}^n$ и симметрических $n \times n$-матриц $A \geqslant B$. Последнее неравенство понимается в смысле квадратичных форм. Именно, говорим, что $A \geqslant B$, если

$$\langle Av, v\rangle \geqslant \langle Bv, v\rangle$$

для всех $v \in \mathbb{R}^n$. Функция F, определённая формулой (6), очевидно, условию вырожденной эллиптичности удовлетворяет.

1. Формулировка основных результатов. Справедливы следующие утверждения.

Теорема. *Пусть выполнены соотношения*

$$\int_1^{\infty} (g(t)t)^{-1/4}\, dt < \infty, \quad \int_{r_*}^{\infty} q(r)\, dr = \infty. \tag{7}$$

Тогда любое неотрицательное решение задачи (1) тождественно равно нулю.

Частным случаем (1) является задача

$$\Delta_\infty u \geqslant c(|x|)u^\lambda \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

где c – положительная монотонно невозрастающая функция.

Следствие. *Предположим, что* $\lambda > 3$ *и*

$$\int\limits_{r_*}^{\infty} r^\lambda c(r)\,dr = \infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение задачи (8) тождественно равно нулю.

Теорема и следствие из неё будут доказаны в п. 3. Сейчас приведём примеры, демонстрирующие точность этих результатов.

Пример 1. Рассмотрим неравенство

$$\Delta_\infty u \geqslant c_0(1+|x|)^s u^\lambda \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $c_0 = \text{const} > 0$. Согласно следствию условия

$$\lambda > 3 \quad \text{и} \quad s \geqslant -\lambda - 1$$

гарантируют, что любое неотрицательное решение неравенства (9) тождественно равно нулю. Эти условия являются точными. Действительно, не представляет труда убедиться в том, что в случае $\lambda > 3$ и $s < -\lambda - 1$, выражение

$$u(x) = \begin{cases} |x|^{-(4+s)/(\lambda-3)} - r_0^{-(4+s)/(\lambda-3)}, & |x| > r_0, \\ 0, & |x| \leqslant r_0, \end{cases}$$

где $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число, определяет неотрицательное решение (9). При этом в случае $\lambda \leqslant 3$ несколько более сложными рассуждениями можно показать, что неравенство (9) имеет нетривиальное неотрицательное решение для всех $s \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Будем исследовать критический показатель $s = -\lambda - 1$ в правой части (9). Пусть функция $u \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta_\infty u \geqslant c_0(1+|x|)^{-\lambda-1}\ln^\mu(2+|x|)u^\lambda \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

где $c_0 = \text{const} > 0$. Применив следствие, получим, что при

$$\lambda > 3 \quad \text{и} \quad \mu \geqslant -1 \tag{11}$$

функция u тождественно равна нулю. В то же время прямыми вычислениями можно убедиться в том, что при $\lambda > 3$ и $\mu < -1$ формула

$$u(x) = \begin{cases} |x|\ln^{-(\mu+1)/(\lambda-3)}|x| - r_0\ln^{-(\mu+1)/(\lambda-3)} r_0, & |x| > r_0, \\ 0, & |x| \leqslant r_0, \end{cases}$$

где $r_0 > 0$ достаточно велико, задаёт неотрицательное решение (10). Таким образом, в (11) второе условие, как и первое, является точным. Можно показать, что в случае $\lambda \leqslant 3$ неравенство (10) имеет нетривиальное неотрицательное решение для всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Исследуем критический показатель $\lambda = 3$ в (9). Рассмотрим неравенство

$$\Delta_\infty u \geqslant c_0(1+|x|)^s u^3 \ln^\nu(2+u) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

где $c_0 = \text{const} > 0$. В соответствии с теоремой если

$$\nu > 4 \quad \text{и} \quad s \geqslant -4, \tag{13}$$

то любое неотрицательное решение неравенства (12) тождественно равно нулю. При этом если $\nu > 4$ и $s < -4,$ то функция

$$u(x) = \begin{cases} e^{|x|^{(4+s)/(4-\nu)}} - e^{r_0^{(4+s)/(4-\nu)}}, & |x| > r_0, \\ 0, & |x| \leqslant r_0, \end{cases}$$

где $r_0 > 0$ достаточно велико, является неотрицательным решением (12). Если же нарушено первое условие в (13), т.е. $\nu \leqslant 4,$ то неравенство (12) имеет нетривиальное неотрицательное решение для любого $s \in \mathbb{R}.$ Тем самым оба условия в (13) являются точными.

2. Вспомогательные утверждения. Ниже будем предполагать, что выполнены условия (7). Возьмём функцию $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}),$ положительную на интервале $(-1,1),$ равную нулю на множестве $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ и такую, что справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\,dt = 1.$$

Обозначим

$$\omega_\delta(t) = \frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{t}{\delta}\right), \quad \delta > 0.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mu > 1,$ $\nu > 1$ *и* $0 < \alpha \leqslant 1$ *– вещественные числа, а* $\eta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *и* $H : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *– измеримые функции, причём*

$$\eta(t) \leqslant \inf_{(t/\mu,t\mu)} H$$

для всех $t \in (0,\infty).$ *Тогда имеет место оценка*

$$\left(\int\limits_{M_1}^{M_2} \eta^{-\alpha}(t)t^{\alpha-1}\ dt\right)^{1/\alpha} \geqslant C \int\limits_{M_1}^{M_2} \frac{dt}{H(t)}$$

для всех вещественных чисел $M_1 > 0$ *и* $M_2 > 0$ *таких, что* $M_2 \geqslant \nu M_1,$ *где постоянная* $C > 0$ *зависит только от* $\alpha,$ ν *и* $\mu.$

Лемма 2. *Пусть* $0 < r_1 < r_2$ *и* $0 < \alpha \leqslant 1$ *– вещественные числа, а* $\eta : (r_1, r_2) \to [0,\infty)$ *– измеримая функция, тогда*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\int\limits_{r_1}^{\rho} \eta(\xi)\,d\xi\right)^\alpha d\rho \geqslant C \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{\xi}{r_2}\right)^\alpha (\xi\eta(\xi))^\alpha\,d\xi,$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от* $\alpha.$

Лемма 3. *Пусть* $0 < r_1 < r_2$ *и* $0 < \alpha < 1$ *– вещественные числа, а* $\eta : (r_1, r_2) \to [0,\infty)$ *– измеримая функция, тогда*

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(\xi)\,d\xi\right)^\alpha \geqslant C \int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(\xi)\varkappa^{\alpha-1}(\xi)\,d\xi, \tag{14}$$

где $\varkappa(\xi) = \int_\xi^{r_2} \eta(\zeta)\,d\zeta,$ *а постоянная* $C > 0$ *зависит только от* $\alpha.$

Замечание. Если $\varkappa(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (r_1, r_2),$ то $\eta(\zeta) = 0$ для почти всех $\zeta \in \in (\xi, r_2).$ В этом случае будем считать, что в правой части (14) величина $\eta(\xi)\varkappa^{\alpha-1}(\xi)$ также равна нулю.

Лемма 4. *Пусть* $\gamma > 0$, $\lambda > 1$ *и* $r_0 > r_*$ *– вещественные числа, а* $p : [r_*, \infty) \to [0, \infty)$ *– локально суммируемая функция такая, что*

$$rp(r) \Bigg/ \int\limits_{r_*}^{r} p(\xi)\, d\xi \leqslant \gamma$$

для всех $r \geqslant r_0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\int\limits_{r_*}^{\lambda r} p(\xi)\, d\xi \leqslant C \int\limits_{r_*}^{r} p(\xi)\, d\xi$$

для всех $r \geqslant r_0$, *где постоянная* $C > 0$ *зависит только от* γ *и* λ.

Доказательство леммы 1 можно найти в [13, лемма 2.3]. Леммы 2 и 3 доказаны в работе [12, леммы 2.2 и 2.3], а лемма 4 – в [14, лемма 2.7].

Лемма 5. *Пусть* $\mu > 1$ *– вещественное число, а* $H : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *– измеримая функция такая, что*

$$\eta(t) = \inf_{(t/\mu, t\mu)} H > 0$$

для всех $t \in (0, \infty)$ *и при этом*

$$\int\limits_{1}^{\infty} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt < \infty. \tag{15}$$

Тогда существует бесконечно гладкая функция $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $h(t) \leqslant H(t)$ *для всех* $t \in (0, \infty)$;

2) $h(t_2) \geqslant h(t_1)$ *для всех* $t_2 \geqslant t_1 > 0$;

3) для любого вещественного числа $\alpha > 0$ *найдётся постоянная* $\beta > 0$, *зависящая только от* α *и* μ, *такая, что* $h(\alpha t) \leqslant \beta h(t)$ *для всех* $t \geqslant 2$;

4) имеет место неравенство

$$\int\limits_{1}^{\infty} (h(t)t)^{-1/4}\, dt < \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Возьмём $t_k = \mu^{k/4}$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Рассуждая по индукции, построим последовательность монотонно неубывающих функций $h_k : [1, t_k] \to (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

i) $h_k(t) \leqslant h_s(t) \leqslant H(t)$ для всех $t \in [1, t_s]$, $1 \leqslant s \leqslant k$;

ii) $h_k(\mu^{1/4} t) \leqslant \mu^2 h_k(t)$ для всех $t \in [1, t_{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$;

iii) для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{1}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt \leqslant \frac{\mu^{1/2}}{1 - \mu^{-1/16}} \int\limits_{1}^{t_k} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt. \tag{17}$$

Обозначим

$$\gamma_k = \sup_{(t_{k-1}, t_{k+1})} \eta, \quad k \in \mathbb{N},$$

и пусть $h_1 = \gamma_1$. Предположим теперь, что для некоторого $k \geqslant 2$ функция h_{k-1} уже известна. Возьмём

$$h_k(t) = \begin{cases} \min\{\gamma_k, h_{k-1}(t)\}, & t \in [1, t_{k-1}], \\ \min\{\gamma_k, h_{k-1}(t_{k-1})\}, & t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

если
$$\mu h_{k-1}(t_{k-1}) \geqslant \gamma_k, \tag{18}$$
и
$$h_k(t) = \begin{cases} h_{k-1}(t), & t \in [1, t_{k-1}], \\ \dfrac{t_k - t + \mu(t - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} h_{k-1}(t_{k-1}), & t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$
если условие (18) не выполнено. Несложно увидеть, что h_k удовлетворяет условиям i) и ii). Покажем, что для h_k справедливо неравенство (17). В случае $k = 1$ это неравенство следует из определений h_1 и γ_1. Пусть $k \geqslant 2$ и при этом
$$\int\limits_1^{t_s} (h_s(t)t)^{-1/4}\,dt \leqslant \frac{\mu^{1/2}}{1 - \mu^{-1/16}} \int\limits_1^{t_s} (\eta(t)t)^{-1/4}\,dt \tag{19}$$
для всех $1 \leqslant s \leqslant k - 1$. Предположим сначала, что имеет место (18) и пусть $s \geqslant 0$ – минимальное целое число такое, что $\mu h_k(t_s) \geqslant h_k(t_k)$. Из определения функции h_k следует, что $h_s = h_k$ на промежутке $[1, t_s]$. Поскольку
$$h_k(t) \geqslant \frac{h_k(t_k)}{\mu} \geqslant \frac{\gamma_k}{\mu^2}$$
для всех $t \in (t_s, t_k)$, получим
$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt \leqslant \frac{4}{3}\mu^{1/2}\gamma_k^{-1/4} t_k^{3/4}.$$
Объединив последнее неравенство с очевидным соотношением
$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (\eta(t)t)^{-1/4}\,dt \geqslant \frac{4}{3}\gamma_k^{-1/4}(t_k^{3/4} - t_{k-1}^{3/4}) = \frac{4}{3}\gamma_k^{-1/4}(1 - \mu^{-3/16}) t_k^{3/4},$$
будем иметь соотношение
$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt \leqslant \frac{\mu^{1/2}}{1 - \mu^{-3/16}} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (\eta(t)t)^{-1/4}\,dt. \tag{20}$$
Если $s = 0$, то (20) немедленно влечёт за собой (17). Предположим, что $s \geqslant 1$. Так как $s \leqslant k - 1$, то справедлива оценка (19), сложив которую с (20), получим неравенство (17).

Предположим теперь, что (18) не выполнено. Тогда $h_k(t_k) = \mu h_k(t_{k-1})$. Пусть $s \geqslant 1$ – наименьшее целое число такое, что $h_k(t_k) = \mu^{k-s} h_k(t_s)$. Имеем
$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt = \mu^{-(i-s)/16} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt$$
для всех $s \leqslant i \leqslant k - 1$, поэтому выполняется оценка
$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt \leqslant \frac{1}{1 - \mu^{-1/16}} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt. \tag{21}$$

В то же время, учитывая монотонность функции h_k и то обстоятельство, что

$$h_k(t_s) = h_k(t_{s-1}) \geqslant \gamma_s/\mu,$$

будем иметь $h_k(t) \geqslant \eta(t)/\mu$ для всех $t \in (t_s, t_{s+1})$. Таким образом, принимая во внимание (21), получаем неравенство

$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt \leqslant \frac{\mu^{1/4}}{1-\mu^{-1/16}} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (\eta(t)t)^{-1/4}\,dt.$$

Поскольку $h_s = h_k$ на промежутке $[1, t_s]$, то, складывая последнее выражение с оценкой (19), снова приходим к (17).

Заметим, что ввиду (15) справедливо соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = \infty$, поэтому последовательность функций h_k, $k \in \mathbb{N}$, стабилизируется при $k \to \infty$ на любом компакте, принадлежащем множеству $[1,\infty)$. В частности, для всех $t \in [1,\infty)$ существует предел

$$\tilde h(t) = \lim_{k\to\infty} h_k(t).$$

Продолжим функцию $\tilde h$ на всю вещественную ось, положив, что $\tilde h(t) = \min\{\tilde h(1), \inf\limits_{(t,1]} H\}$ при $t \in (0,1)$ и $\tilde h(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 0]$. Для завершения доказательства леммы 5 остаётся взять

$$h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_{1/2}(t-\tau)\tilde h\left(\tau - \frac{1}{2}\right) d\tau, \quad t > 0.$$

Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения будем проводить в несколько шагов. Договоримся обозначать через C положительные, возможно, различные постоянные, зависящие только от σ и θ.

Шаг 1. Применив лемму 5, где $\mu = \theta^{1/2}$ и $H(t) = \sup\limits_{(t/\mu, t\mu)} g$, будем иметь монотонно неубывающую бесконечно гладкую функцию $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такую, что выполняется оценка

$$h(4t) \leqslant Ch(t) \tag{22}$$

для всех $t \geqslant 2$, справедливо условие (16) и при этом

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x, |x|\zeta) \geqslant q(r)h(t) \tag{23}$$

для всех $t > 0$ и $r > r_*$.

Шаг 2. Возьмём непрерывную функцию $p : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и вещественное число $R_* > r_*$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$p(r) = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant r \leqslant R_*;$$

$$p(r) = e^{-1/(r-R_*)+1} p(R_*+1) > 0 \quad \text{для всех} \quad R_* < r \leqslant R_* + 1; \tag{24}$$

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma^{1/4}}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x, |x|\zeta) \geqslant p(r)h(t) \quad \text{для всех} \quad t > 0, \quad r > R_*; \tag{25}$$

$$rp(r) \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad r \geqslant 0; \tag{26}$$

$$\int\limits_{r_*}^{\infty} p(r)\, dr = \infty. \tag{27}$$

Покажем, что такие функция p и вещественное число R_* существуют, причём R_* можно сделать сколь угодно большим. Положим

$$Q_\delta(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(r-\rho) Q(\rho)\, d\rho, \quad \delta > 0,$$

где

$$Q(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho \in (-\infty, r_*], \\ \sup\limits_{(\sigma^{-1/4}\rho, \sigma^{1/4}\rho) \bigcap (r_*, \infty)} q, & \rho \in (r_*, \infty). \end{cases}$$

Принимая во внимание (23), будем иметь

$$\inf_{\substack{x \in \Omega_{r, \sigma^{1/2}} \\ \zeta \in (\theta^{-1/2} t, \theta^{1/2} t)}} f(x, |x|\zeta) \geqslant Q_\delta(r) h(t) \tag{28}$$

для всех $t > 0$ и $r > r_*$, где $\delta > 0$ – достаточно малое вещественное число. В то же время для любого $\delta > 0$ найдётся вещественное число $r_\delta > r_*$ такое, что $\inf\limits_{(\sigma^{-1/8} r, \sigma^{1/8} r)} Q_\delta \geqslant q(r)$ для всех $r \in [r_\delta, \infty)$. Обозначим

$$M_\delta(r) = \min\left\{Q_\delta(r), \frac{1}{r}\right\}.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{r_*}^{\infty} M_\delta(r)\, dr = \infty \tag{29}$$

для любого $\delta > 0$. В самом деле, пусть в каждой окрестности бесконечности найдётся вещественное число $r > 0$ такое, что $q(r) \geqslant 1/r$. Тогда $M_\delta(\rho) \geqslant \sigma^{-1/8}/\rho$ для всех $\rho \in$ $\in (\sigma^{-1/8} r, \sigma^{1/8} r)$, поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_{\sigma^{-1/8} r}^{\sigma^{1/8} r} M_\delta(\rho)\, d\rho = \frac{1}{4} \sigma^{-1/8} \ln \sigma.$$

Согласно необходимому признаку сходимости несобственного интеграла это доказывает (29). Предположим теперь, что $q(r) < 1/r$ для всех $r > 0$ из некоторой окрестности бесконечности. В этом случае получим

$$M_\delta(r) \geqslant \min\left\{q(r), \frac{1}{r}\right\} = q(r)$$

для всех достаточно больших $r > 0$, и (29) следует из второго условия (7).

Таким образом, остаётся взять

$$p(r) = \begin{cases} 0, & r \in [0, R_*], \\ e^{-1/(r-R_*)+1} M_\delta(R_* + 1), & r \in (R_*, R_* + 1], \\ M_\delta(r), & r \in (R_* + 1, \infty), \end{cases}$$

где вещественные числа $R_* > r_*$ и $\delta > 0$ выбраны так, чтобы было справедливо неравенство $M_\delta(R_* + 1) > 0$ и при этом имело бы место (25). Существование таких вещественных чисел следует из условий (28) и (29). Можно увидеть, что в случае когда R_* достаточно велико, соотношение (28) влечёт за собой (25). Действительно, если $R_* > 1/(\sigma^{1/4}-1)$, то справедливо включение $\Omega_{r,\sigma^{1/4}} \subset \Omega_{R_*+1,\sigma^{1/2}}$ для всех $r \in (R_*, R_*+1)$, поэтому имеет место неравенство

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma^{1/4}}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x,|x|\zeta) \geqslant \inf_{\substack{x\in\Omega_{R_*+1,\sigma^{1/2}}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x,|x|\zeta)$$

для всех $r \in (R_*, R_*+1)$. Ввиду того что на промежутке (R_*, R_*+1) функция p не превосходит $Q_\delta(R_*+1)$, это позволяет утверждать, что (25) выполнено для всех $r \in (R_*, R_*+1)$. Наконец, если $r \in [R_*+1, \infty)$, то неравенство (28) влечёт за собой (25), так как для этих r значение функции p не превосходит Q_δ. Заметим также, что ввиду (29) в любой окрестности бесконечности найдётся точка, в которой функция M_δ положительна.

Шаг 3. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dr^2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = \frac{1}{2}p(r)h(w/r) \quad \text{при} \quad r>0, \quad w(0)=\varepsilon, \quad \frac{dw}{dr}(0)=0, \tag{30}$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое вещественное число. Локально решение этой задачи, очевидно, существует. В частности, на промежутке $[0, R_*]$ этим решением является функция $w=\varepsilon$. Пусть

$$R_{\max} = \sup \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ – множество вещественных чисел $R>0$ таких, что решение задачи (30) существует на промежутке $[0,R)$. Сводя (30) к интегральному уравнению

$$w(r) = \varepsilon + \int_0^r \left(\frac{3}{2}\int_0^\rho p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi\right)^{1/3} d\rho, \tag{31}$$

стандартными рассуждениями, например методом сжимающихся отображений, можно показать, что $R_{\max} > R_*$, причём на промежутке $[0, R_{\max})$ решение задачи (30) является единственным. Несложно также показать, что $w \in C^2([0, R_{\max}))$. В самом деле, w – бесконечно гладкая функция на множестве $[0, R_*)$, так как на этом множестве w – константа. В то же время, продифференцировав (31), будем иметь равенства

$$\frac{dw(r)}{dr} = \left(\frac{3}{2}\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi\right)^{1/3}, \quad \frac{d^2w(r)}{dr^2} = \frac{1}{2}p(r)h(w/r)\left(\frac{3}{2}\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi\right)^{-1/3}$$

для всех $r \in (R_*, R_{\max})$. Поскольку $\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi > 0$ для всех $r \in (R_*, R_{\max})$, то функция w дважды непрерывно дифференцируема на множестве $(R_*, R_{\max})$. Согласно (24) справедливо соотношение

$$\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi = (r-R_*)^2 e^{-1/(r-R_*)+1} p(R_*+1)h(\varepsilon/R_*) + \bar{\bar{o}}((r-R_*)^2 e^{-1/(r-R_*)+1})$$

при $r \to R_*+0$, поэтому функция w дважды дифференцируема в точке R_*, причём

$$\frac{dw(R_*)}{dr} = \frac{d^2w(R_*)}{dr^2} = 0.$$

Осталось только заметить, что

$$\lim_{r\to R_*} \frac{dw(r)}{dr} = \lim_{r\to R_*} \frac{d^2w(r)}{dr^2} = 0.$$

Покажем теперь, что
$$R_{\max} < \infty. \tag{32}$$
Предположим противное, пусть решение задачи (30) существует на всём множестве $[0,\infty)$. Положив $(w(r)-\varepsilon)/r = v(r)$ в уравнении (31), получим
$$v(r) = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \biggl(\frac{3}{2}\int\limits_0^\rho p(\xi)h(v+\varepsilon/\xi)\,d\xi\biggr)^{1/3} d\rho. \tag{33}$$

Продифференцировав (33), будем иметь
$$\frac{dv(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\biggl(r\varphi(r) - \int\limits_0^r \varphi(\rho)\,d\rho\biggr) \tag{34}$$

для всех $r>0$, где
$$\varphi(\rho) = \biggl(\frac{3}{2}\int\limits_0^\rho p(\xi)h(v+\varepsilon/\xi)\,d\xi\biggr)^{1/3}. \tag{35}$$

Заметим, что на множестве $[0,R_*]$ функции v и φ тождественно равны нулю. Так как φ монотонно не убывает на промежутке $(0,\infty)$, правая часть формулы (34) неотрицательна, поэтому v – монотонно неубывающая функция на промежутке $[0,\infty)$. Можно также показать, что
$$\lim_{r\to\infty} v(r) = \infty. \tag{36}$$
В самом деле, из условия (27) и положительности функции h следует, что $v(\rho_*)>0$ для некоторого вещественного числа $\rho_*>R_*$. Таким образом, справедливы соотношения
$$v(r) \geqslant \frac{1}{r}\int\limits_{r/2}^r \biggl(\frac{3}{2}\int\limits_{\rho_*}^\rho p(\xi)h(v+\varepsilon/\xi)\,d\xi\biggr)^{1/3} d\rho \geqslant \frac{1}{2}h^{1/3}(v(\rho_*))\biggl(\frac{3}{2}\int\limits_{\rho_*}^{r/2} p(\xi)\,d\xi\biggr)^{1/3} \to \infty$$

при $r\to\infty$. Возьмём вещественное число $r_0>r_*$ такое, что $\varepsilon/r_0 \leqslant 1$, $v(r_0)\geqslant 4$ и
$$rp(r)\bigg/\int\limits_{r_*}^r p(\xi)\,d\xi \leqslant 1 \tag{37}$$

для всех $r\geqslant r_0$. Ввиду (36), (26) и (27) такое вещественное число r_0 существует. Положим
$$r_i = \sup\{r\in(r_{i-1},2r_{i-1}) : v(r)\leqslant 2v(r_{i-1})\}, \quad i\in\mathbb{N}.$$
Несложно увидеть, что $r_i\to\infty$ при $i\to\infty$. В противном случае имеет место условие (32).

Лемма 6. *Пусть* $v(r_{i+1})\geqslant 2v(r_{i-1})$ *для некоторого* $i\geqslant 1$, *тогда*
$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} (h(t)t)^{-1/4}\,dt \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} p(\xi)\,d\xi\biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\xi)\,d\xi\biggr)^{-3/4}. \tag{38}$$

Доказательство. Согласно (33) справедливо неравенство
$$v(r_{i+1}) \geqslant \frac{h^{1/3}(v(r_{i-1}))}{r_{i+1}}\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \biggl(\frac{3}{2}\int\limits_{r_{i-1}}^\rho p(\xi)\,d\xi\biggr)^{1/3} d\rho,$$

объединив которое с оценкой

$$\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \biggl(\int\limits_{r_{i-1}}^{\rho} p(\xi)\,d\xi\biggr)^{1/3} d\rho \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi,$$

вытекающей из леммы 2, получим

$$\frac{v(r_{i+1})}{h^{1/3}(v(r_{i-1}))} \geqslant \frac{C}{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi. \tag{39}$$

Применив далее лемму 3, приходим к соотношению

$$\biggl(\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi\biggr)^{3/4} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3} \varkappa^{-1/4}(\xi)\,d\xi, \tag{40}$$

где

$$\varkappa(\xi) = \int\limits_{\xi}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\zeta)p(\zeta))^{1/3}\,d\zeta.$$

Несложно увидеть, что

$$(r_{i+1}-\xi)^{1/3}\varkappa^{-1/4}(\xi) = \biggl(\frac{1}{(r_{i+1}-\xi)^{4/3}} \int\limits_{\xi}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\zeta)p(\zeta))^{1/3}\,d\zeta\biggr)^{-1/4} \geqslant \biggl(\frac{1}{r_{i+1}-\xi} \int\limits_{\xi}^{r_{i+1}} p^{1/3}(\zeta)\,d\zeta\biggr)^{-1/4}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_{i+1})$. При этом ввиду (37) имеем

$$p^{1/3}(\zeta) \leqslant \zeta^{-1/3} \biggl(\int\limits_{r_*}^{\zeta} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{1/3} \leqslant \xi^{-1/3} \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{1/3}$$

для всех $\zeta \in (\xi, r_{i+1})$. Таким образом,

$$(r_{i+1}-\xi)^{1/3}\varkappa^{-1/4}(\xi) \geqslant \xi^{1/12} \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{-1/12}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_{i+1})$ и неравенство (40) позволяет утверждать, что справедлива оценка

$$\biggl(\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} ((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi\biggr)^{3/4} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \xi^{1/12} p^{1/3}(\xi)\,d\xi \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{-1/12}.$$

Объединив последнее выражение с формулой (39), получим

$$\frac{v^{3/4}(r_{i+1})}{h^{1/4}(v(r_{i-1}))} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \xi^{-2/3} p^{1/3}(\xi)\,d\xi \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{-1/12}. \tag{41}$$

Согласно (37) для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_{i+1})$ справедливо соотношение

$$\xi^{-2/3} p^{1/3}(\xi) = (p(\xi)\xi)^{-2/3} p(\xi) \geqslant p(\xi) \Bigl(\int\limits_{r_*}^{\xi} p(\rho)\,d\rho \Bigr)^{-2/3} \geqslant p(\xi) \Bigl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\,d\rho \Bigr)^{-2/3},$$

поэтому неравенство (41) приводит к оценке

$$\frac{v^{3/4}(r_{i+1})}{h^{1/4}(v(r_{i-1}))} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} p(\xi)\,d\xi \Bigl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\,d\rho \Bigr)^{-3/4}. \tag{42}$$

Принимая во внимание (22) и тот факт, что $v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) \geqslant v(r_{i+1})/2$, будем иметь

$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} (h(t)t)^{-1/4}\,dt \geqslant \frac{v(r_{i+1}) - v(r_{i-1})}{(h(v(r_{i+1}))v(r_{i+1}))^{1/4}} \geqslant \frac{v^{3/4}(r_{i+1})}{2h^{1/4}(v(r_{i+1}))} \geqslant \frac{Cv^{3/4}(r_{i+1})}{h^{1/4}(v(r_{i-1}))}.$$

Тем самым (42) влечёт за собой неравенство (38). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $v(r_{i+1}) < 2v(r_{i-1})$ *для некоторого* $i \geqslant 1$, *тогда*

$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\,d\xi \Bigl(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\,d\rho \Bigr)^{-2/3}. \tag{43}$$

Доказательство. Из условий леммы, очевидно, следует, что $r_i = 2r_{i-1}$ и $r_{i+1} = 2r_i$. Учитывая (34), получаем

$$v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} v'(r)\,dr \geqslant \frac{1}{r_{i+1}^2} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \psi(r)\,dr, \tag{44}$$

где

$$\psi(r) = r\varphi(r) - \int\limits_0^r \varphi(\rho)\,d\rho.$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что $\psi'(r) = r\varphi'(r) \geqslant 0$ для всех $r > 0$. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\psi(r) = \int\limits_0^r \xi\varphi'(\xi)\,d\xi \geqslant \int\limits_{r_{i-1}}^r \xi\varphi'(\xi)\,d\xi$$

для всех $r \in (r_{i-1}, r_{i+1})$, поэтому (44) влечёт за собой оценку

$$v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) \geqslant \frac{1}{r_{i+1}^2} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \xi\varphi'(\xi)\,d\xi\,dr \geqslant \frac{C}{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \varphi'(\xi)\,d\xi\,dr,$$

объединив которую с элементарным неравенством

$$\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \varphi'(\xi)\,d\xi\,dr \geqslant \int\limits_{r_i}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \varphi'(\xi)\,d\xi\,dr \geqslant (r_{i+1} - r_i) \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} \varphi'(\xi)\,d\xi,$$

будем иметь

$$v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} \varphi'(\xi)\, d\xi. \tag{45}$$

В то же время, продифференцировав (35), получим

$$\varphi'(\xi) = 2^{-1/3}3^{-2/3}p(\xi)h(v(\xi)+\varepsilon/\xi)\Bigg(\int\limits_{r_*}^{\xi} p(\rho)h(v+\varepsilon/\rho)\,d\rho\Bigg)^{-2/3} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-1/3}3^{-2/3}p(\xi)\frac{h(v(r_{i-1}))}{h^{2/3}(2v(r_i))}\Bigg(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\,d\rho\Bigg)^{-2/3}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_i)$. Так как $h(2v(r_i)) \leqslant Ch(v(r_{i-1}))$ ввиду условия (22), то это позволяет утверждать, что

$$\varphi'(\xi) \geqslant Cp(\xi)h^{1/3}(v(r_{i-1}))\Bigg(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\,d\rho\Bigg)^{-2/3}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_i)$. Тем самым формула (45) влечёт за собой оценку

$$\frac{v(r_{i+1}) - v(r_{i-1})}{h^{1/3}(v(r_{i-1}))} \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\,d\xi\Bigg(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\,d\rho\Bigg)^{-2/3},$$

объединение которой с неравенством

$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant \frac{C(v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}))}{h^{1/3}(v(r_{i-1}))}$$

приводит к (43). Лемма доказана.

Для натурального числа m через $\Xi_{1,m}$ обозначим множество целых чисел $1 \leqslant i \leqslant m$, удовлетворяющих условию $v(r_{i+1}) \geqslant 2v(r_{i-1})$. Пусть также $\Xi_{2,m} = \{1,\ldots,m\} \setminus \Xi_{1,m}$.

Ввиду (36) и (27) найдётся натуральное число l такое, что выполняются неравенства $v(r_m) \geqslant 2v(r_0)$ и

$$\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\,d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r_*}^{r_m} p(\xi)\,d\xi \tag{46}$$

для всех $m \geqslant l$. Покажем, что справедлива оценка

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} (h(t)t)^{-1/4}\,dt \geqslant C\Bigg(\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\xi)\,d\xi\Bigg)^{1/4} \tag{47}$$

для всех $m \geqslant l$. Предположим сначала, что

$$\sum_{i\in\Xi_{1,m}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\,d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\,d\xi. \tag{48}$$

Тогда, суммируя оценку (38) леммы 6 по всем $i \in \Xi_{1,m}$, будем иметь

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} (h(t)t)^{-1/4}\,dt \geqslant C\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\,d\xi\biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\xi)\,d\xi\biggr)^{-3/4},$$

откуда ввиду (46) и неравенства

$$\int\limits_{r_*}^{r_m} p(\xi)\,d\xi \geqslant C\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\xi)\,d\xi, \tag{49}$$

вытекающего из леммы 4, немедленно следует (47). Предположим теперь, что условие (48) не выполнено. В этом случае очевидно, что

$$\sum_{i\in\Xi_{2,m}}\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\,d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, суммируя оценку (43) леммы 7 по всем $i \in \Xi_{2,m}$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant C\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\,d\xi\biggl(\int\limits_{r_*}^{r_m} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{-2/3},$$

объединив которое с (46) и (49), получим неравенство

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant C\biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\rho)\,d\rho\biggr)^{1/3}. \tag{50}$$

Поскольку h – монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая условию (22), лемма 1 позволяет утверждать, что

$$\biggl(\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} (h(t)t)^{-1/4}\,dt\biggr)^{4/3} \geqslant C\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)}.$$

Объединив последнюю оценку с формулой (50), снова имеем (47).

Переходя в (47) к пределу при $m \to \infty$, получаем противоречие с условиями (16) и (27), что доказывает справедливость условия (32). Заметим, что ввиду (32) справедливо соотношение

$$\lim_{r\to R_{\max}-0} w(r) = \infty, \tag{51}$$

иначе решение задачи (30) существует на промежутке $(0,R)$ для некоторого $R > R_{\max}$.

Шаг 4. Ниже будем предполагать, что u – неотрицательное решение задачи (1). Нам потребуется принцип сравнения в следующей простой форме.

Лемма 8. *Пусть* $U \in C^2(B_R\bigcap\Omega)\bigcap C(\overline{B_R\bigcap\Omega})$ *– классическое решение неравенства* $\Delta_\infty U \leqslant \mathcal{F}(x,U)$ *в* $B_R\bigcap\Omega$, *неотрицательное на множестве* $B_R\bigcap\Omega$ *и такое, что выполняется условие*

$$U|_{\partial(B_R\bigcap\Omega)} \geqslant u|_{\partial(B_R\bigcap\Omega)}, \tag{52}$$

где $R > 0$ – вещественное число, а $\mathcal{F}$ – некоторая функция, монотонно неубывающая по последнему аргументу, причём имеет место неравенство

$$\mathcal{F}(x,t) < f(x,t) \tag{53}$$

для всех $x \in B_R \bigcap \Omega$ и $t > 0$. Тогда

$$U \geqslant u \quad \text{в} \quad \overline{B_R \bigcap \Omega}. \tag{54}$$

Доказательство. От противного предположим, что $\sup\limits_{\overline{B_R \bigcap \Omega}} (u - U) > 0$. Функция $u - U$ полунепрерывна сверху на множестве $\overline{B_R \bigcap \Omega}$, поэтому существует точка $x \in \overline{B_R \bigcap \Omega}$ такая, что
$$u(x) - U(x) = \sup_{\overline{B_R \bigcap \Omega}} (u - U).$$

Ввиду (52) можно также утверждать, что $x \in B_R \bigcap \Omega$. Тем самым имеют место соотношения

$$u(y) - u(x) \leqslant U(y) - U(x) = \langle DU(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2U(x)(y - x), y - x\rangle + \bar{\bar{o}}(|y - x|^2)$$

для всех y из некоторой окрестности точки x, где $DU(x)$ – градиент, а $D^2U(x)$ – матрица вторых производных функции U в точке x, откуда следует, что $(DU(x), D^2U(x)) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$. Подставив $v = DU(x)$ и $A = D^2U(x)$ в (4), будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geqslant f(x, u(x)) > \mathcal{F}(x, u(x)).$$

Таким образом, принимая во внимание неравенства

$$\mathcal{F}(x, u(x)) \geqslant \mathcal{F}(x, U(x)) \geqslant \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j},$$

приходим к заключению, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} > \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

3. Доказательство теоремы и следствия. Согласно задаче (30) шага 3 в п. 2 функция $U(x) = w(|x|)$ является классическим решением уравнения $\Delta_\infty U = \mathcal{F}(x, U)$ в $B_{R_{\max}}$, положительным в шаре $B_{R_{\max}}$, где

$$\mathcal{F}(x,t) = \begin{cases} 2^{-1} p(|x|) h(t/|x|), & R_* < |x| < R_{\max}, \quad t > 0, \\ 0, & |x| \leqslant R_*, \quad t > 0. \end{cases}$$

Так как решение задачи (1) полунепрерывно сверху на $\overline{\Omega}$, функция u ограничена на замыкании множества $B_{R_{\max}} \bigcap \Omega$, поэтому в силу (51) найдётся вещественное число $R \in (R_*, R_{\max})$, для которого выполнено неравенство (52). Принимая во внимание (2) и (25), можно также утверждать, что имеет место (53). Тем самым по лемме 8 справедливо соотношение (54), откуда, в свою очередь, следует, что $u|_{B_{R_*} \bigcap \Omega} \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно сделать сколь угодно малым, а $R_* > r_*$ – сколь угодно большим, очевидно, получим, что $u(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$. Теорема доказана.

Для доказательства следствия возьмём $f(x,t) = c(|x|)t^{\lambda}$, $g(t) = t^{\lambda}$, $q(r) = 4^{-\lambda}r^{\lambda}c(r/2)$, $\sigma = \theta = 2$ в соотношении (3) и воспользуемся теоремой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272), а также при поддержке Российского университета дружбы народов (программа стратегического академического лидерства).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1992. V. 27. P. 1–67.
2. *Lu G., Wang P.* Inhomogeneous infinity Laplace equation // Adv. Math. 2008. V. 217. P. 1838–1868.
3. *Асташова И.В.* Единственность решений уравнений второго порядка типа Эмдена–Фаулера // Проблемы мат. анализа. 2021. Т. 109. С. 11–16.
4. *Асташова И.В.* Об асимптотическом поведении сингулярных решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 597–606.
5. *Astashova I.V.* On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics / Eds. S. Pinelas, T. Caraballo, P. Kloeden, J. Graef. Cham, 2018. V. 230 P. 1–12.
6. *Baras P., Pierre M.* Singularités éliminables pour des équations semilinéaires // Ann. Inst. Fourier. 1984. V. 34. P. 185–205.
7. *Галахов Е.И.* Разрешимость эллиптического уравнения с градиентной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 661–669.
8. *Galakhov E.I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
9. *Галахов Е.И., Салиева О.А., Фино А.З.* Отсутствие глобальных слабых решений для эволюционных уравнений с дробным лапласианом // Мат. заметки. 2020. Т. 108. Вып. 6. С. 911–919.
10. *Keller J.B.* On solutions of $\Delta u = f(u)$ // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 503–510.
11. *Кондратьев В.А., Ландис Е.М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб. 1988. V. 135 (177). № 3. С. 346–360.
12. *Kon'kov A.A.* On global solutions of the radial p-Laplace equation // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 3437–3451.
13. *Коньков А.А.* О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. Мат. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–126.
14. *Коньков А.А.* О свойствах решений одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. семинара имени И.Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 195–222.
15. *Корпусов М.О., Матвеева А.К.* О критических показателях для слабых решений задачи Коши для одного нелинейного уравнения составного типа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 4. С. 96–136.
16. *Корпусов М.О., Панин А.А.* О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 383–395.
17. *Корпусов М.О., Шафир Р.С.* О разрушении решений задач Коши для нелинейных уравнений теории сегнетоэлектричества // Журн. теор. и мат. физики. 2022. Т. 212. № 3. С. 327–339.
18. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 2001. Т. 234. С. 3–383.
19. *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$ // Pacific J. Math. 1957. V. 7. P. 1641–1647.
20. *Mi L.* Blow-up rates of large solutions for infinity Laplace equations // Appl. Math. Comp. 2017. V. 298. P. 36–44.
21. *Mohammed A., Mohammed S.* Boundary blow-up solutions to degenerate elliptic equations with non-monotone inhomogeneous terms // Nonlin. Anal. 2012. V. 75. P. 3249–3261.
22. *Wan H.* The exact asymptotic behavior of boundary blow-up solutions to infinity Laplacian equations // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67. № 97. P. 1–14.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 12.10.2022 г.
После доработки 12.10.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 252–256

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ АЛГОРИТМА "СУПЕР-СКРУЧИВАНИЯ"

© 2023 г. В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий

Для алгоритма "супер-скручивания" приводится новый способ доказательства необходимых и достаточных условий глобальной асимптотической устойчивости. Новый метод основывается на получении полного аналитического решения системы для "наихудшего" возмущения и позволяет получить критерий в более простой, полностью вещественной форме, а также найти оценки для наихудшей (мажорирующей) траектории.

DOI: 10.31857/S0374064123020103, EDN: PVEYXZ

Введение. Задачи управления для динамических систем в условиях неопределённости, т.е. при наличии у системы неизвестных входных воздействий, занимают важное место в современной теории управления. Данной проблематике посвящены, в частности, монографии [1, 2]. Одной из основных задач управления для систем с неопределённостью является задача стабилизации. Популярными алгоритмами для решения этой задачи являются методы систем с переменной структурой, теория которых развивается ещё с середины 60-х гг. прошлого века [1, 3]. Среди используемых алгоритмов свою эффективность доказали алгоритм скручивания [4] и алгоритм "супер-скручивания" [5, 6]. Для последнего в работе [6] было доказано существование параметров, при которых данный алгоритм управления является алгоритмом скольжения второго порядка, что означает существование устойчивого скользящего режима второго порядка. Это, в свою очередь, означало существование параметров алгоритма, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы управления.

В дальнейшем с помощью метода функций Ляпунова были получены алгебраические достаточные условия для параметров системы, выполнение которых обеспечивает устойчивость системы (см. [7, 8]). Кроме того, в статьях [9, 10] была проанализирована система алгоритма "супер-скручивания" с "наихудшим" входным воздействием. Такой подход позволил получить в [9] необходимые и достаточные условия на параметры алгоритма, обеспечивающие сходимость системы к началу координат, однако аналитически не было найдено полное решение системы с "наихудшим" входным воздействием, а определены только координаты его пересечения с одной из координатных осей. Цель настоящей работы – найти альтернативный способ доказательства необходимого и достаточного условия, основанного на получении полного аналитического решения системы с "наихудшим" входным воздействием. Данный алгебраический критерий не требует выполнения операций над комплексными числами, что делает его менее сложным.

1. Постановка задачи. Рассматривается система алгоритма "супер-скручивания" [5]

$$\dot{x}_1 = x_2 - k\,\mathrm{sgn}\,(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi - \mu\,\mathrm{sgn}\,(x_1), \tag{1}$$

где ξ – неизвестный измеримый ограниченный сигнал, $|\xi| \leqslant \xi_0$.

Требуется получить аналитическое решение системы (1) с "наихудшей" помехой и новый полностью вещественнозначный вид необходимых и достаточных условий сходимости системы (1) к началу координат при любом возмущении $\xi(t)$ из рассматриваемого класса.

2. Фазовые траектории. Заметим, что система (1) центрально симметрична относительно начала координат (т.е. семейство траекторий системы при всевозможных $\xi(t)$ из рассматриваемого класса симметрично), поэтому все последующие рассуждения будем проводить для правой полуплоскости, т.е. при $x_1 \geqslant 0$.

Рассмотрим первую четверть координатной плоскости. Заметим, что траектория системы (1) при $x_2 > 0$ не может перейти во вторую четверть из первой, так как в малой окрестности оси $x_1 = 0$ при $x_2 > 0$, например в области $kx_1^{1/2} < x_2$, имеет место неравенство $\dot{x}_1 > 0$. Значит, поскольку всюду в правой полуплоскости выполняются соотношения $\dot{x}_2 \leqslant -\mu+\xi_0 < 0$, траектория системы (1) из первой четверти может либо перейти в четвёртую, либо сойтись к началу координат. Из четвёртой же четверти, поскольку $\dot{x}_1 \leqslant x_2 < 0$, $\dot{x}_2 \leqslant -\mu + \xi_0 < 0$, система (1) может перейти только в третью четверть.

3. Наихудшее возмущение. Заметим, что траектории системы (1) с произвольными ξ будут ограничены траекторией системы (1) с $\xi = \xi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1)$. Действительно, в области, где x_1 возрастает, траектории систем вида (1) будут ограничены траекторией системы с наибольшим $\dot{x}_2$, т.е. с $\xi = \xi_0$. В области же, где x_1 убывает, ограничивающей будет система с наименьшим $\dot{x}_2$, т.е. с $\xi = -\xi_0$. В силу того, что траектории системы с наихудшим ξ ограничивают траектории системы с любым другим $\xi(t)$, а также приведённых выше рассуждений о фазовом портрете системы, для глобальной асимптотической устойчивости системы (1) необходима и достаточна асимптотическая устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - k \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) - \mu \operatorname{sgn}(x_1). \tag{2}$$

Всюду далее будем рассматривать систему (2) в правой полуплоскости.

Начнём рассмотрение с области $x_2 > kx_1^{1/2}$, т.е. при $\dot{x}_1 > 0$ (область (a) на рисунке). Положим начальные условия равными $(0, x_2^0)$. Решив второе уравнение системы (2) $\dot{x}_2 = \xi_0 - \mu$ и сделав замену переменной $z = \sqrt{x_1}$, получим

$$\dot{z} = \frac{a - bt}{2z} - \frac{k}{2}, \tag{3}$$

где $a = x_2^0$, $b = \mu - \xi_0$.

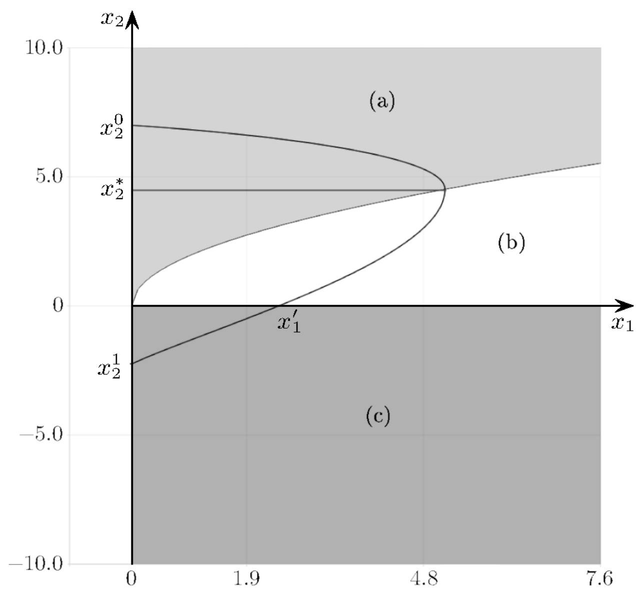

Рисунок. Рассматриваемые области полуплоскости.

С помощью замены переменной времени $\tau = t - a/b$ получим равенство

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-b\tau}{2z} - \frac{k}{2}.$$

Будем искать z в виде $z(\tau) = \tau u(\tau)$. В результате имеем соотношения

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\left(u^2 + \frac{k}{2}u + \frac{b}{2}\right)^{-1} u\,du = -\left(\left(u + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{b}{2}\right)^{-1} u\,du. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k^2 < 8b,$ т.е. когда знаменатель правой части уравнения (4) всюду положителен. Проинтегрировав правую и левую части уравнения, находим

$$C = \frac{1}{2}\ln\left(z^2 + \frac{k}{2}z\tau + \frac{b}{2}\tau^2\right) - \frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4u+k}{\sqrt{8b-k^2}}\right). \qquad (5)$$

Начальные условия имеют вид $t_0 = 0,$ $z(t_0) = 0,$ т.е. $\tau_0 = -a/b,$ $u(\tau_0) = 0.$ Условие достижения границы области есть равенство $\dot z = 0,$ т.е. $kz = a - bt,$ а значит, $u = -b/k.$ Подставив начальные и конечные условия, получим

$$x_2' = \frac{ak}{\sqrt{2b}}\exp\left\{\frac{-k}{\sqrt{8b-k^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}} + \operatorname{arctg}\frac{4b-k^2}{k\sqrt{8b-k^2}}\right)\right\},$$

где x_2' – координата по оси x_2 точки выхода системы (2) при $k^2 < 8(\mu-\xi_0)$ из области $\dot x_1 > 0$ (из области (a) в (b) на рисунке).

Теперь рассмотрим случай, когда $k^2 > 8b,$ т.е. когда у знаменателя правой части (4) есть корни

$$u_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-8b}}{4}.$$

При этом в области (a) $\dot x_1 > 0,$ т.е. $a - bt > kz,$ а значит $-b/k < u < 0.$ Заметим, что

$$\frac{k - \sqrt{k^2-8b}}{4} > \frac{b}{k},$$

тогда выражение $u - u_{1,2}$ положительно всюду в области. Уравнение (4) преобразуется к виду

$$-\frac{d\tau}{\tau} = \frac{A\,du}{u-u_1} + \frac{B\,du}{u-u_2},$$

где $A = \dfrac{u_1}{u_1-u_2},$ $B = \dfrac{-u_2}{u_1-u_2}.$ Проинтегрировав левую и правую части уравнения, имеем

$$C - \ln(-\tau) = A\ln(u-u_1) + B\ln(u-u_2).$$

Подставив начальные и конечные условия такие же, как и в случае $k^2 < 8b,$ найдём

$$x_2'' = \frac{-kau_1}{-b-ku_1}\left(\frac{u_2(b+ku_1)}{u_1(b+ku_2)}\right)^B,$$

где x_2'' – координата точки выхода системы (2) при $k^2 \geqslant 8(\mu-\xi_0)$ из области $\dot x_1 > 0$ (из области (a) в область (b) на рисунке).

Перейдём к рассмотрению области $x_2 < kx_1^{1/2}.$ Заметим, что система (2) приводится в этой области к виду (3), где $b = \mu + \xi_0,$ $a = x_2^*$ (т.е. x_2' либо $x_2'',$ в зависимости от выбора параметров) – координата перехода системы в эту область ((b) на рисунке). Это означает, что если $k^2 < 8(\mu+\xi_0),$ $\tau < 0,$ то для решения будет выполнено уравнение (5). Начальные условия для рассмотрения системы в этой области положим следующие: $t = 0,$ $kz = a,$ т.е. $u = -b/k.$ Подставив их, получим значение

$$C = \ln\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\operatorname{arctg}\frac{-4b+k^2}{k\sqrt{8b-k^2}}.$$

Перейдём в уравнении (5) к пределу при $\tau \to 0-0$ и получим

$$z_1 = \frac{a}{k}\exp\left\{\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{-4b+k^2}{k\sqrt{8b-k^2}}\right)\right\}, \qquad (6)$$

где $z_1 = \sqrt{x_1'}$, x_1' – координата перехода системы (2) в четвёртую четверть координатной плоскости (из области (b) в область (c) на рисунке). Заметим, что если $8b > k^2$, то $z_1 > 0$.

В четвёртой четверти (область (c) на рисунке) для системы также будет выполнено уравнение (4). Проинтегрировав его, имеем

$$C = \frac{1}{2}\ln\left(z^2 + \frac{k}{2}z\tau + \frac{b}{2}\tau^2\right) - \frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4u+k}{\sqrt{8b-k^2}}\right).$$

Перейдём к пределу при $\tau \to 0+0$ и подставим конечное условие $u = 0$, соответствующее точке перехода в третью четверть. В результате найдём

$$|x_2^1| = z_1\sqrt{2b}\exp\left\{\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\right)\right\}, \tag{7}$$

где x_2^1 – координата перехода системы (2) в третью четверть координатной плоскости.

Объединив (6) и (7), находим

$$|x_2^1| = \frac{x_2^*\sqrt{2(\mu+\xi_0)}}{k^2}\exp\left\{\left(-k\pi + k\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}\right\}. \tag{8}$$

Заметим, что при $k^2 \to 8(\mu+\xi_0)-0$ имеет место $|x_2^1| \to 0$. Из того факта, что траектории системы (2) с большими k ограничивают траектории системы с меньшими значениями, а также из приведённых рассуждений о фазовых траекториях системы следует, что при $k^2 \geqslant 8(\mu+\xi_0)$ траектория системы (2) будет сходиться к началу координат в первой четверти координатной плоскости.

Подставив x_2' или x_2'' вместо x_2^* в уравнение (8), получим, что при $k^2 < 8(\mu-\xi_0)$ выполняется равенство

$$\frac{|x_2^1|}{x_2^0} = \sqrt{\frac{\mu+\xi_0}{\mu-\xi_0}}\exp\left\{\left(-k\pi + k\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2} - \right.$$
$$\left. - k\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu-\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu-\xi_0)-k^2}\right\} = \nu_1(\mu,\xi_0,k),$$

а при $8(\mu-\xi_0) \leqslant k^2 < 8(\mu+\xi_0)$ – равенство

$$\frac{|x_2^1|}{x_2^0} = \sqrt{\frac{2u_1(\mu+\xi_0)}{ku_1+(\mu-\xi_0)}}\left(\frac{u_2(ku_1+(\mu-\xi_0))}{u_1(ku_2+(\mu-\xi_0))}\right)^B \times$$
$$\times \exp\left\{\left(-k\pi + k\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}\right\} = \nu_2(\mu,\xi_0,k).$$

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости системы (2), а значит, доказана

Теорема. *Система (1) с ограниченным входным сигналом $|\xi| \leqslant \xi_0$ глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\nu(\mu,\xi_0,k) < 1,$$

где

$$\nu = \begin{cases} \nu_1, & 0 < k < \sqrt{8(\mu-\xi_0)}, \\ \nu_2, & \sqrt{8(\mu-\xi_0)} \leqslant k < \sqrt{8(\mu+\xi_0)}, \\ 0, & k \geqslant \sqrt{8(\mu+\xi_0)}. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. Управление при неопределённости. М., 1997.
2. *Fridman L., Shtessel Yu., Edwards Ch., Levant A.* Sliding Mode Control and Observation. New York, 2014.
3. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
4. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1338–1342.
5. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
6. *Levant A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
7. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Automat. Control. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
8. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
9. *Seeber R., Horn M.* Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2018. P. 120–125.
10. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.12.2022 г.
После доработки 02.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 257–269

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.957+517.988

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2023 г. А. В. Чернов

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с неограниченным максимальным монотонным оператором в гильбертовом пространстве, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние. При этом использованы обобщение теоремы Минти–Браудера и результаты о тотально глобальной разрешимости данного уравнения, полученные автором ранее. В качестве примера рассматривается полулинейное волновое уравнение.

DOI: 10.31857/S0374064123020115, EDN: PVQFXY

Введение. На сегодняшний день различным вопросам теории управляемости линейных систем (как сосредоточенных, так и распределённых) посвящена достаточно обширная литература (см., например, [1, § 4.9; 2–5; 6, § 8.10; 7, гл. 5; 8] и библиографию в них). Для случая нелинейных распределённых систем достаточные условия управляемости носили зачастую локальный характер (см., например, [9; 10; 11, гл. 7; 12]). Проблема управляемости нелинейных распределённых систем стала активно изучаться с конца прошлого века, см. обзор [13] по абстрактным уравнениям в банаховом пространстве, а также работы [14–16] и монографию [17], касающиеся главным образом эволюционных уравнений второго порядка того или иного конкретного вида. При этом исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления или случая, когда распределённое управление сосредоточено на части области.

В статье [18] были получены достаточные условия поточечной управляемости по вектору нелинейных функционалов для нелинейных распределённых систем, допускающих представление в виде вольтеррова функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна в лебеговом пространстве. Управления предполагались кусочно-постоянными вектор-функциями. В качестве примеров рассматривались первая краевая задача для уравнения диффузии и смешанная задача для уравнения переноса.

Проблема получения нелокальных достаточных условий точной управляемости распределённых систем представляется в известной степени актуальной. По этой теме имеет смысл выделить, например, следующие результаты, наиболее близкие к полученным в данной статье.

В работе [19] рассматривалась нелинейная интегро-дифференциальная система вида

$$x'(t)+Ax(t)=(Bu)(t)+f(t,x(t))+\int\limits_0^t g\biggl(t,s,x(s),\int\limits_0^s K(s,\tau,x(\tau))\,d\tau\biggr)\,ds,\quad t\in J=[0,a],$$

$$x(0)=x_0$$

в банаховом пространстве X с управлением $u\in L_2(J,U)$, U – банахово пространство; A – линейный оператор, генератор компактной полугруппы $T(t)$, $t>0$, на X, $B:U\to X$ – линейный ограниченный оператор. Все нелинейные операторы правой части непрерывны и равномерно ограничены (откуда следует существование слабого решения). Точная нелокальная управляемость устанавливается при условии точной управляемости линейной системы

$$x'(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0$$

на подпространство V. Аналогичный результат был получен и для полулинейной системы соболевского типа

$$(Kx'(t)) + Ax(t) = Bu(t) + f(t, x(t)), \quad t \in J, \quad x(0) = x_0,$$

а также её обобщений на интегро-дифференциальный случай (см. [13, § 3]).

В [20] установлены достаточные условия точной управляемости в нуль для некоторых классов абстрактного эволюционного уравнения вида

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве X, с управлением $u \in L_2(0, T; U)$, U – гильбертово пространство; $f : X \to X$; A – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы; $B : U \to X$ – линейный ограниченный оператор. Функция f предполагается непрерывно дифференцируемой по Фреше с равномерно ограниченной производной. Полученные абстрактные результаты применяются к уравнению теплопроводности. Точная управляемость в нуль доказывается при условии точной нуль-управляемости и равномерной наблюдаемости соответствующей линеаризованной системы.

В статье [21] рассматривается абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + Ay(t) = g(y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

в гильбертовом пространстве H; A – положительно определённый, самосопряжённый оператор с областью определения $D(A) \subset H$; $B : U \to H$ – линейный ограниченный оператор, U – гильбертово пространство. Кроме того, накладываются специальные условия относительно гельфандовой тройки оператора A. Предполагается, что функция $g : H \to H$ непрерывно дифференцируема по Фреше, причём производная удовлетворяет некоторым специальным условиям [21, формулы $(H5)$, $(H5)'$], и накладывается специальное условие [21, формула $(H6)$] на финальное время T (грубо говоря, оно должно быть достаточно велико). Полученные абстрактные результаты применяются к полулинейному волновому уравнению

$$y'' - \Delta y = g(y) + \chi_\omega(x)u(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega,$$

$$y(\cdot, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad y'(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где $\omega \subset \Omega$ – подобласть области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $g \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$, $g' \in L_\infty(\mathbb{R})$; $T \geqslant 2 \dim \Omega$ (см. [21, теорема 4.1]).

Отдельно отметим работу [22], в которой была установлена точная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с нелинейностью, удовлетворяющей глобальному условию Липшица, при условии достаточной малости промежутка времени. Управляемость доказывалась с помощью классической теоремы Минти–Браудера о разрешимости операторного уравнения первого рода с монотонным хеминепрерывным оператором, удовлетворяющим условию коэрцитивности. В данной статье рассмотрен случай абстрактного полулинейного эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве с максимальным монотонным оператором и нелинейностью, удовлетворяющей локальному условию Липшица. Получены достаточные условия точной управляемости, в некотором смысле аналогичные условиям в [22], при этом использовано обобщение теоремы Минти–Браудера, полученное в статье [23]. В качестве примера приведено полулинейное волновое уравнение.

1. Предварительные построения и соглашения. Пусть X – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_X$, $G : X \to X$ – инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \in [0, T]$, с областью определения $D(G) \subset X$, $z \in Z = L_2([0, T]; X)$, $x_0 \in X$. Следуя [1, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X)

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1 [1, теорема 4.8.3]. *Для любых* $z \in Z$ *и* $x_0 \in X$ *существует единственная функция* $x : [0,T] \to X$ *такая, что для всех* $y \in D(G^*)$ *функция* $[x(t), y]_X$ *абсолютно непрерывна на* $[0,T]$, *и имеют место равенства*

$$\frac{d}{dt}[x(t), y]_X = [x(t), G^* y]_X + [z(t), y]_X$$

$$\textit{для п.в.} \quad t \in [0,T], \quad \lim_{t \to +0}[x(t), y]_X = [x_0, y] \quad \textit{для любого} \quad y \in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)z(s)\, ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Лемма 1.2 [1, следствие 4.8.1]. *Для любых* $z \in Z$, $x_0 \in X$ *существует единственная слабо непрерывная функция* $x : [0,T] \to X$ *такая, что для всех* $y \in D(G^*)$ *имеем*

$$[x(t), y]_X = [x_0, y]_X + \int_0^t [x(s), G^* y]_X\, ds + \int_0^t [z(s), y]_X\, ds$$

и, более того, эта функция представляется формулой (2).

Напомним (см., например, [24, гл. III, с. 72; 25, с. 96]), что функция $x : [0,T] \to X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y \in X^*$ функция $y[x(t)]$ непрерывна на отрезке $[0,T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x : [0,T] \to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w([0,T]; X)$. Для дальнейшего изложения важно, что норма $\|x(t)\|_X$ всякой функции $x \in \mathbb{C}_w([0,T]; X)$ ограничена на $[0,T]$. С другой стороны (см., например, [26, гл. IV, теорема 1.9, с. 154]), всякая функция $x \in \mathbb{C}_w([0,T]; X)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Стало быть, имеет место включение $\mathbb{C}_w([0,T]; X) \subset L_\infty([0,T]; X)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой во множестве $\mathbb{C}_w([0,T]; X)$ утверждается в леммах 1.1, 1.2, будем называть *слабым решением* задачи (1).

Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие G. Оператор $B = -G$ является максимальным монотонным, т.е. $[Bx, x]_X \geqslant 0$ для всех $x \in D(B) = D(G)$ (монотонность), и множество значений $\{(I+B)[x] : x \in D(G)\} = X$ (максимальность).

Замечание 1.1. Пусть G – произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условию G. Тогда по теореме Хилле–Иосиды (см. [27, теорема 7.4, с. 185]) для любого $x_0 \in D(G)$ существует единственное решение $x \in \mathbb{C}^1([0,+\infty); X) \bigcap \mathbb{C}([0,+\infty); D(G))$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} - Gx = 0, \quad x(0) = x_0,$$

причём $\|x(t)\|_X \leqslant \|x_0\|_X$, $\|dx/dt\|_X = \|Gx(t)\|_X \leqslant \|Gx_0\|_X$ для всех $t \geqslant 0$. Тем самым (см. [27, замечание 5, с. 190] для любого $t \geqslant 0$ определён линейный оператор $D(G) \ni x_0 \to x(t) \in D(G)$. Более того, так как область определения максимального монотонного оператора $D(-G) = D(G)$ плотна в X [27, предложение 7.1, с. 181], $\|x(t)\|_X \leqslant \|x_0\|_X$, то указанный линейный оператор можно продолжить по непрерывности до линейного ограниченного оператора $S_G(t) : X \to X$. Как указано в работе [27, замечание 5, с. 190], легко проверить, что $S_G(t)$ обладает следующими свойствами:

(a) $\|S_G(t)\| \leqslant 1$ для всех $t \geqslant 0$;

(b) $S_G(t_1 + t_2) = S_G(t_1)S_G(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \geqslant 0$, $S_G(0) = I$;

(c) $\lim\limits_{t \to +0} \|S_G(t)x_0 - x_0\|_X = 0$ для всех $x_0 \in X$.

Свойство (b) означает, что семейство $\{S_G(t), t \geqslant 0\}$ является полугруппой, свойство (c) – что эта полугруппа сильно непрерывна и, таким образом, оператор G автоматически является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $S(t) = S_G(t)$. Свойство (a) означает, что имеем полугруппу сжатий. В обратную сторону, если задана сильно непрерывная полугруппа сжатий на X, то существует единственный оператор G, удовлетворяющий условию G и такой, что $S(t) = S_G(t)$ для всех $t \geqslant 0$. В силу сказанного выше справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Пусть выполнено условие* G *и*

$$A[z](t) = \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

– слабое решение задачи (1) при $x_0 = 0$, $z \in Z$. *Тогда для п.в.* $t \in [0,T]$ *справедлива оценка*

$$\|A[z](t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds.$$

2. Точная управляемость в линейном случае. Предполагая, что выполнено условие G, $y_0 \in X$, рассмотрим задачу Коши для управляемого линейного эволюционного уравнения

$$y'(t) = Gy(t) + u(t), \quad t \in [0,T], \quad y(0) = y_0, \tag{3}$$

где $u(t)$ – управляющая функция из класса $\mathbb{C}_w([0,T];X)$. Обозначим через $y(t;u)$ слабое решение задачи (3), отвечающее управлению u. Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$ такое, что

$$\lim_{t\to T-0}[y(t;u), z]_X = [y_1, z] \quad \text{для любого} \quad z \in D(G^*).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1 [1, § 4.3]. *Пусть* G *– инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы* $S(t)$, $t \geqslant 0$. *Тогда* $S(t)^*$ *– тоже сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором* G^*.

Отметим, что уже из того факта, что линейный оператор является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, следует его замкнутость и плотность вложения его области определения в пространстве X (см. [1, § 4.1, с. 210, 213]).

Далее будем дополнительно предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие G*. Справедливы равенства $[Gx, x] = 0$ для всех $x \in D(G)$; $[G^*x, x] = 0$ для всех $x \in D(G^*)$.

Непосредственно из леммы 2.1, условия G^* и утверждения из [1, следствие 4.3.1] (с учётом того, что мы рассматриваем случай вещественного пространства X, тогда как в [1] речь идет о комплексном X, которое там обозначается буквой H) вытекает

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* G, G^*. *Тогда* $\|S(t)x\|_X = \|S(t)^*x\|_X = \|x\|_X$ *для любых* $x \in X$, $t \geqslant 0$.

Напомним следующее известное определение.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega \subset \mathcal{X}$ – заданное множество. Оператор $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω, если для всех $x, y \in X$, $z \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}$ таких, что $z + ty \in \Omega$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to 0}\langle F[z+ty] - F[z], x\rangle = 0.$$

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [28, теорема 2.1].

Лемма 2.3. *Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве* $\mathcal{X}$ *задан хеминепрерывный монотонный оператор* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, *удовлетворяющий условию коэрцитивности*

$$\langle F(x), x\rangle \geqslant \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ – *вещественная функция при* $t \geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = +\infty$. *Тогда оператор* F *осуществляет сюръективное отображение пространства* $\mathcal{X}$ *на (всё) пространство* $\mathcal{X}^*$. *Иными словами, для каждого* $y \in \mathcal{X}^*$ *уравнение* $F[x] = y$ *имеет решение* $x \in \mathcal{X}$.

Как известно [29, гл. V, § 7, с. 236], гильбертово пространство X является рефлексивным, причём в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\cdot\,,\cdot]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить пространства X и X^*. Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности оператора $F : X \to X$ достаточно его сильной монотонности:

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X \geqslant \alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2 \text{ для любых } \xi_1,\xi_2 \in X, \quad \alpha>0 \text{ при } \gamma(t)=\alpha t-\|F(0)\|_X.$$

Для произвольного $x \in X$ положим $u(t) = S(T-t)^*x$. Фактически $u(t) = z(T-t)$, где $z(t)$ – слабое решение задачи

$$z'(t) = G^*z(t), \quad t \in [0,T], \quad z(0) = x,$$

поэтому $u \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$. Определим оператор $F : X \to X$ формулой

$$F[x] = y(T;u), \quad u(t) = S(T-t)^*x.$$

Нам понадобится также

Условие G′. Справедливы неравенства $\|S(t)^*x\|_X \geqslant a(t)\|x\|_X$ для всех $x \in X$ и п.в. $t \in [0,T]$ при $a \in L_2^+[0,T]$, $a \neq 0$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* G *и* G′. *Тогда оператор* F *является сильно монотонным.*

Доказательство. Действительно, слабое решение задачи (3) определяется формулой

$$y(t;u) = S(t)y_0 + \int\limits_0^t S(t-s)u(s)\,ds,$$

откуда имеем $F[x] = y(T;u) = S(T)y_0 + \int_0^T S(T-s)S(T-s)^*x\,ds$. Таким образом, для любых $\xi_1,\xi_2 \in X$ получаем соотношения

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X = \int\limits_0^T [S(T-s)S(T-s)^*(\xi_1-\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X\,ds =$$

$$= \int\limits_0^T [S(T-s)^*(\xi_1-\xi_2),S(T-s)^*(\xi_1-\xi_2)]_X\,ds \geqslant \alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2, \quad \alpha = \int\limits_0^T a^2(t)\,dt > 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть выполнено условие G. Согласно лемме 2.2 для выполнения условия G′ достаточно выполнения условия G*.

Лемма 2.5. *Пусть выполнено условие* G. *Тогда оператор* F *является хеминепрерывным на* X.

Доказательство. Повторяя рассуждения из начала доказательства леммы 2.4, для произвольных $\xi_1,\xi_2 \in X$ получаем, что

$$\|F[\xi_1]-F[\xi_1+\tau\xi_2]\|_X \leqslant \int\limits_0^T \|S(T-s)S(T-s)^*\tau\xi_2\|_X\,ds = |\tau|\int\limits_0^T \|S(T-s)S(T-s)^*\xi_2\|_X\,ds \to 0$$

при $\tau \to 0$. Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 2.3–2.5 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* G *и* G′. *Тогда для любого* $y_1 \in X$ *поставленная задача управления имеет решение вида* $u(t) = S(T-t)^* x,\ \ x \in X$.

3. Тотально глобальная разрешимость управляемого полулинейного эволюционного уравнения. Далее (на протяжении всей статьи) считаем, что условие G выполнено. Прежде всего рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (1). Как уже пояснялось выше, при выполнении условия G для любых $x_0 \in X,\ \ z \in Z$ в множестве $\mathbb{C}_w([0,T];X)$ существует единственное слабое решение задачи (1) и это решение даётся формулой (2). Решение, отвечающее $x_0 \in X$ при $z = 0$, будем обозначать $x = \Theta[x_0](t) = S(t)x_0$. Решение, отвечающее $z \in Z$ при $x_0 = 0$, будем обозначать $x = A[z](t)$. Далее, считая элемент $x_0 \in X$ фиксированным, положим $\theta(t) = \Theta[x_0](t)$. Как видно из представления (2), слабое решение задачи (1) можно записать в виде

$$x(t) = \theta(t) + A[z](t), \quad t \in [0,T].$$

По отдельности рассмотрим следующие два случая.

I. Случай ограниченного множества управлений. Пусть $E = L_\infty([0,T];X),\ \ \sigma \geqslant 0$ – заданное число, $u \in E$ – управляющая функция, $\|u\|_E \leqslant \sigma$. Совокупность всех таких управляющих функций будем обозначать через $\mathcal{D}$. Предположим, кроме того, что задана функция (оператор) $f : [0,T] \times X \to X$, удовлетворяющая условиям:

Условие $\mathbf{F_1}$. Для всех $x \in E$ отображение $[0,T] \ni t \to f(t,x(t))$ принадлежит классу $Z = L_2([0,T];X)$.

Условие $\mathbf{F_2}$. Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $x, y \in X,\ \ \|x\|_X, \|y\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$ имеем оценку

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|x-y\|_X.$$

Условие $\mathbf{F_3}$. Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X + \sigma \leqslant \mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M > 0,\ \ \xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$.

Замечание 3.1. Условие F_3 можно заменить следующим.

Условие $\mathbf{F'_3}$. Существует функция $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t) : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и такая, что для п.в. $t \in [0,T]$ имеем неравенство $\|f(t,0)\|_X + \sigma \leqslant \mathcal{N}_2(t)$.

Действительно, предположим, что выполнены условия F_2 и F'_3. Оценим

$$\|f(t,\xi)\|_X + \sigma \leqslant \|f(t,\xi) - f(t,0)\|_X + \|f(t,0)\|_X + \sigma \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|\xi\|_X + \mathcal{N}_2(t) \leqslant \mathcal{N}_1(t,M),$$

где $\mathcal{N}_1(t,M) \equiv \mathcal{N}(t,M)M + \mathcal{N}_2(t)$. Однако, как видно из формулировки следующей далее теоремы 3.2, важно иметь в качестве функции $\mathcal{N}_1(t,M)$ не хотя бы какую-то оценку сверху, а оценку наиболее точную.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение

$$x'(t) = Gx(t) + f(t,x(t)) + u(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$

понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$x(t) = \theta(t) + A[f(\cdot,x(\cdot)) + u(\cdot)](t), \quad t \in [0,T], \quad x \in E. \tag{5}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* $\mathrm{F}_1,\ \ \mathrm{F}_2,\ \ \mathrm{G}$. *Тогда, каково бы ни было* $u \in$ $\in L_2([0,T];X)$, *уравнение (5) не может иметь более одного решения.*

Доказательство вытекает непосредственно из работы [30, теорема 1].

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* F_1 – $\mathrm{F}_3,\ \ \mathrm{G},\ \ \|\theta(t)\|_X \leqslant \omega(t)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, *где* $\omega \in L_\infty[0,T]$. *Предположим, что задача Коши*

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{N}_1(t, \omega(t) + \beta(t)), \quad t \in (0,T], \quad \beta(0) = 0 \tag{6}$$

имеет решение – абсолютно непрерывную функцию $\beta(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$. *Тогда для любого управления* $u \in \mathcal{D}$ *уравнение (5) имеет решение* $x \in \mathbb{C}_w([0,T],X)$, *удовлетворяющее оценке*

$$\|x(t)\|_X \leqslant \|\theta(t)\|_X + \beta(t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T].$$

Доказательство вытекает непосредственно из [30, теорема 2].

II. Случай неограниченного множества управлений. Теперь будем считать, что управление $u \in E$ произвольно. Заменим условие F_3 следующими условиями.

Условие $\mathbf{F_4}$. Существуют число $r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0, +\infty)$, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X \leqslant \mathcal{N}_0(M)$ для любых $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$, $\max\limits_{r \in [0,r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$.

Условие $\mathbf{F_5}$. Для всякого $\sigma \geqslant 1$ имеем

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(r) + \sigma} = +\infty.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* F_4, F_5, *а число* $\sigma \geqslant 1$ *произвольно фиксировано. Тогда условие* F_3 *выполнено при*

$$\mathcal{N}_1(t,r) = \mathcal{N}_1(r) = \begin{cases} \mathcal{N}_0(r_0) + \sigma, & r \in [0, r_0], \\ \mathcal{N}_0(r) + \sigma, & r > r_0. \end{cases}$$

И более того, задача (6) при $\omega(t) \equiv \|\theta\|_E$ *заведомо имеет решение – неотрицательную абсолютно непрерывную функцию* $\beta(\cdot;\sigma)$, *зависящую от параметра* σ.

Доказательство. Выполнение условия F_3 очевидно. Пусть $M \geqslant \|\theta\|_E$ – произвольное число. Без ограничения общности рассуждений можем считать, что $r_0 \geqslant M$ (в противном случае надо просто увеличить r_0 и это не нарушит наших предположений). Пользуясь условием F_5, рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_1(M+r)} = \int\limits_M^{+\infty} \frac{d\xi}{\mathcal{N}_1(\xi)} \geqslant \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{\mathcal{N}_0(\xi) + \sigma} = +\infty.$$

Таким образом, $J = +\infty$. В соответствии с теоремой Уинтнера [31, теорема 5.1, с. 44] это означает, что задача (6) при $\omega \equiv M$ имеет решение на произвольном отрезке $[0,T]$. Лемма доказана.

Непосредственно из теоремы 3.2 и леммы 3.1 вытекает

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_5, G *и, кроме того,* $\|\theta(t)\|_X \leqslant \omega(t)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, *где* $\omega \in L_\infty[0,T]$. *Тогда для любого* $u \in E$ *уравнение (5) имеет единственное решение* $x \in \mathbb{C}_w([0,T],X)$, *причём* $\|x(t)\|_X \leqslant \omega(t) + \beta(t;\sigma)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, $\sigma \geqslant \|u\|_E$.

4. Точная управляемость полулинейного эволюционного уравнения. Считая выполненными условия F_1, F_2, F_4, F_5, G, G', будем рассматривать задачу (4), понимая её слабое решение как решение уравнения (5).

В соответствии с результатами п. 3 при сделанных предположениях каждому управлению $u \in E = L_\infty([0,T];X)$ отвечает единственное решение $x = x(\cdot;u) \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$ задачи (4).

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $x_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$ такое, что $\lim\limits_{t \to T-0} [x(t;u), z]_X = [x_1, z]$ для любого $z \in D(G^*)$.

Наряду с оператором $F : X \to X$, определённым в п. 2, рассмотрим оператор $Q : X \to X$, определяемый формулой $Q[z] = x[T;u]$, $\quad u = S(T-t)^* z$. При этом будем считать, что $y_0 = x_0$. В п. 2 уже было показано, что F – монотонный хеминепрерывный оператор, удовлетворяющий условию коэрцитивности с функцией $\gamma(r) = \alpha r - \alpha_0$, где

$$\alpha = \int\limits_0^T a^2(t)\,dt > 0, \quad \alpha_0 = \|F(0)\|_X, \quad F(0) = S(T)x_0.$$

При выполнении условия G^* имеем $a \equiv 1$, $\alpha = T$.

Условие $\mathbf{F_6}$. Существуют число $\nu > 0$ и предел $\lim\limits_{r\to+\infty}\{\gamma(r) - \nu\mathcal{N}_0(r)\} > 0$.

Лемма 4.1. *Из* F_6 *следует условие* F_5.

Доказательство. Согласно F_6, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что

$$\mathcal{N}_0(r) < \frac{\gamma(r)}{\nu}, \quad \alpha r > \alpha_0 \quad \text{для любого} \quad r \geqslant r_0.$$

Тогда получаем соотношения

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(r) + \sigma} > \nu \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\gamma(r) + \nu\sigma} = \nu \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\alpha r - \alpha_0 + \nu\sigma} = +\infty.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из [23, теорема 1.1, замечание 2.2] вытекает

Лемма 4.2. *Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве* $\mathcal{X}$ *задан хеминепрерывный монотонный оператор* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, *удовлетворяющий условию коэрцитивности*

$$\langle F(x), x\rangle \geqslant \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(r)$ *– вещественная функция при* $r \geqslant 0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\gamma(r) = +\infty$; $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– непрерывная неубывающая функция такая, что существует* $\lim\limits_{r\to+\infty}\{\gamma(r) - \mu(r)\} = +\infty$. *Тогда для любого* $z \in \mathcal{X}^*$ *существует число* $\sigma > 0$, *зависящее лишь от функций* $\gamma(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ *и элемента* z, *такое, что для всякого хеминепрерывного оператора* $Q : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, *удовлетворяющего оценке*

$$\|Q[x] - F[x]\|_{\mathcal{X}^*} \leqslant \mu(\|x\|_{\mathcal{X}}) \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathcal{X},$$

уравнение $Q[x] = z$ *имеет по крайней мере одно решение* $x \in \mathcal{X}$ *со свойством* $\|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant \sigma$.

Пусть $\|S(t)x_0\|_X \leqslant M$ для п.в. $t \in [0,T]$, $\|z\|_X \leqslant \sigma$, откуда следуют неравенства

$$\|u(t)\|_X \leqslant \|S(T-t)^*z\|_X \leqslant \|S(T-t)^*\|\sigma = \|S(T-t)\|\sigma \leqslant \sigma;$$

$\beta(t;\sigma)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{N}_0(M + \beta(t)) + \sigma, \quad t \in (0,T], \quad \beta(0) = 0.$$

Как показано в п. 3, имеет место оценка

$$\|x(t;u)\|_X \leqslant M + \beta(t;\sigma) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Согласно условию F_6 найдётся число $r_1 > 0$ такое, что $\nu\mathcal{N}_0(r) < \gamma(r)$, $\alpha r > \alpha_0$ для всех $r \geqslant r_1$. Положим

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\nu}, \quad C_0 = (e^{\alpha_1 T} - 1)M + e^{\alpha_1 T}\gamma(r_1) + \frac{\alpha_0}{\alpha}, \quad \psi(\nu,T) = \frac{e^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1} - T.$$

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_0^T \|f(s,x(s;u))\|_X\,ds \leqslant \widetilde{\mu}(\sigma) \equiv \begin{cases} r_1-\sigma T & \text{при}\ \ \beta(T;\sigma)\leqslant r_1, \\ \psi(\nu,T)\sigma+C_0 & \text{при}\ \ \beta(T;\sigma)> r_1. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственно из оценки (7) и условия F_4 получаем

$$\int\limits_0^T \|f(s,x(s;u))\|_X\,ds \leqslant \int\limits_0^T \mathcal{N}_0(M+\beta(t;\sigma))\,dt = \beta(T;\sigma)-\sigma T.$$

В случае $\beta(T;\sigma)\leqslant r_1$ утверждение очевидно. Рассмотрим противоположный случай. Положим для краткости $\beta(t)=\beta(t;\sigma)$. Исходя из определения функции $\beta(t)$ и числа r_1, путём разделения переменных при $\beta(t)>r_1$ получаем

$$t=\int\limits_0^t \frac{\beta'(\xi)\,d\xi}{\mathcal{N}_0(M+\beta(\xi))+\sigma} = \int\limits_{\beta(0)}^{\beta(t)} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(M+r)+\sigma} \geqslant \int\limits_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu\,dr}{\nu\mathcal{N}_0(M+r)+\nu\sigma} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu\,dr}{\gamma(M+r)+\nu\sigma} = \int\limits_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu\,dr}{\alpha(M+r)-\alpha_0+\nu\sigma} = \frac{1}{\alpha_1}\ln\left|\frac{\alpha\beta(t)+\alpha M-\alpha_0+\nu\sigma}{\alpha r_1-\alpha_0+\alpha M+\nu\sigma}\right|.$$

Следовательно,

$$\alpha\beta(t)+\alpha M-\alpha_0+\nu\sigma\leqslant e^{\alpha_1 t}[\gamma(r_1)+\alpha M+\nu\sigma],\quad \beta(t)\leqslant\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha_1 t}-1)[\alpha M+\nu\sigma]+\frac{\alpha_0}{\alpha}+e^{\alpha_1 t}\gamma(r_1).$$

Таким образом, $\beta(T;\sigma)-\sigma T\leqslant\psi(\nu,T)\sigma+C_0$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'. *Тогда справедлива оценка*

$$\|Q[z]-F[z]\|_X\leqslant\widetilde{\mu}(\|z\|_X)\quad \text{для любого}\quad z\in X.$$

Доказательство. Пусть $u=S(T-t)^*z$, $z\in X$, откуда следует неравенство $\|u\|_E\leqslant \leqslant\|z\|_X$. Имеем

$$x(t;u)=\theta(t)+A[f(\cdot,x(\cdot;u))+u(\cdot)](t),\quad t\in[0,T],\quad y(t;u)=\theta(t)+A[u(\cdot)](t),\quad t\in[0,T],$$

соответственно $x(t;u)-y(t;u)=A[f(\cdot,x(\cdot;u))](t)$, $t\in[0,T]$. Следовательно, согласно леммам 1.3 и 4.3 имеют место соотношения

$$\|Q[z]-F[z]\|_X=\|x(T;u)-y(T;u)\|_X\leqslant\int\limits_0^T\|f(s,x(s;u))\|_X\,ds\leqslant\widetilde{\mu}(\|z\|_X).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'. *Тогда оператор* Q *является хеминепрерывным.*

Доказательство. Выберем произвольно $\xi_1,\xi_2\in X$ и для $\tau\in[-1;1]$ положим $u_\tau=S(T-t)^*[\xi_1+\tau\xi_2]$, $\overline{x}_\tau(t)=x(t;u_\tau)$, $\sigma=\|\xi_1\|_X+\|\xi_2\|_X$. Согласно (7) и оценкам, установленным при доказательстве леммы 4.3, для $t\in[0,T]$ имеем

$$\|\overline{x}_\tau(t)\|_X\leqslant M+\beta(T;\sigma)\leqslant\overline{M},\quad \overline{M}=M+\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha_1 T}-1)[\alpha M+\nu\sigma]+\frac{\alpha_0}{\alpha}+e^{\alpha_1 T}\gamma(r_1),$$

при этом $\overline{x}_\tau(t) = \theta(t) + A[f(\cdot, \overline{x}_\tau) + u_\tau](t)$. Следовательно,

$$\overline{x}_\tau(t) - \overline{x}_0(t) = A[f(\cdot, \overline{x}_\tau) - f(\cdot, \overline{x}_0) + u_\tau - u_0](t).$$

Согласно лемме 1.3 и условию F_2 получим неравенства

$$\|\overline{x}_\tau(t) - \overline{x}_0(t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|f(s, \overline{x}_\tau) - f(s, \overline{x}_0)\|_X\, ds + |\tau|\sigma \leqslant \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, \overline{M})\|\overline{x}_\tau(s) - \overline{x}_0(s)\|_X\, ds + |\tau|\sigma.$$

Рассмотрим оператор $\Phi : L_\infty[0,T] \to L_\infty[0,T]$, определяемый формулой

$$\Phi[z](t) = \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, \overline{M}) z(s)\, ds.$$

Пользуясь результатами работы [32], нетрудно показать, что спектральный радиус $\rho(\Phi) = 0$. Тогда в силу обобщённой леммы Гронуолла получаем оценку

$$\|\overline{x}_\tau - \overline{x}_0\|_E \leqslant \|R(\Phi)[|\tau|\sigma]\|_{L_\infty} \leqslant |\tau|\sigma\|R(\Phi)\|, \quad R(\Phi) = \sum_{k=0}^\infty \Phi^k,$$

откуда следует, что

$$\|Q[\xi_1] - Q[\xi_1 + \tau\xi_2]\|_X = \|x(T; u_\tau) - x(T; u_0)\|_X \leqslant |\tau|\sigma\|R(\Phi)\| \to 0$$

при $\tau \to 0$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G' *и, кроме того,* $\psi(\nu, T) < \alpha$. *Тогда для любого* $x_1 \in X$ *поставленная задача управления имеет решение вида*

$$u = S(T-t)^* z, \quad z \in X.$$

Доказательство. В силу леммы 4.1 условие F_5 выполнено. Как уже было сказано, определяемый в п. 2 оператор $F : X \to X$ является монотонным, хеминепрерывным оператором, удовлетворяющим условию коэрцитивности с функцией $\gamma(r) = \alpha r - \alpha_0$. Поскольку оператор $Q : X \to X$ был определён формулой $Q[z] = x(T; u)$, $u = S(T-t)^* z$, то для доказательства утверждения теоремы достаточно установить разрешимость уравнения $Q[z] = x_1$ для всех $x_1 \in X$. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что выполнены условия леммы 4.2 при $\mathcal{X} = X$. Пусть $\widetilde{\mu}(\sigma)$ – функция из формулировки леммы 4.3. Учитывая определение функции $\beta(t; \sigma)$ и, в частности, монотонность $\beta(T; \sigma)$ по $\sigma \geqslant 0$, рассмотрим следующие два случая.

1. Если $\beta(T; 0) \geqslant r_1$, то, очевидно, $\beta(T; \sigma) > r_1$ для всех $\sigma > 0$. Полагаем

$$C_1 = C_0, \quad \mu(\sigma) = \widetilde{\mu}(\sigma) = \psi(\nu, T)\sigma + C_1.$$

2. Если $\beta(T; 0) < r_1$, то найдётся $\sigma_1 > 0$ такое, что $\beta(T; \sigma_1) = r_1$. Здесь полагаем

$$C_1 = C_0 + r_1, \quad \mu(\sigma) = \begin{cases} \psi(\nu, T)\sigma_1 + C_1 & \text{при} \ \ 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, \\ \psi(\nu, T)\sigma + C_1 & \text{при} \ \ \sigma > \sigma_1. \end{cases}$$

Отметим, что в обоих случаях функция $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ будет непрерывной и неубывающей, и по построению $\widetilde{\mu}(\sigma) \leqslant \mu(\sigma)$ для всех $\sigma \geqslant 0$. Поэтому согласно лемме 4.4 справедлива оценка

$$\|Q[z] - F[z]\|_X \leqslant \mu(\|z\|_X) \quad \text{для любого} \quad z \in X.$$

При этом

$$\gamma(r)-\mu(r)=\{\alpha-\psi(\nu,T)\}r-\alpha_0-C_1\to+\infty \quad \text{при} \quad r\to+\infty.$$

Наконец, по лемме 4.5 оператор Q хеминепрерывен. Таким образом, выполнены все условия леммы 4.2. Теорема доказана.

5. Волновое уравнение. Пусть $T>0$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество с границей Γ. Положим $Q=\Omega\times(0,T]$, $\Sigma=\Gamma\times(0,T]$. В качестве управляемой начально-краевой задачи рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t):\overline{\Omega}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=g(x,t,\varphi)+U(x,t), \quad (x,t)\in Q; \tag{8}$$

$$\varphi\,\big|_{\Sigma}=0; \tag{9}$$

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=\psi_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{10}$$

В работе [27, п. 10.3] рассматривалась аналогичная задача при $g\equiv 0$, $U\equiv 0$. Управляющую функцию будем представлять в виде $U=w+v'_t$. Следуя [27, п. 10.3], перепишем уравнение (8) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\psi+v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\Delta\varphi+g(t,\varphi)+w, \quad (x,t)\in Q. \tag{11}$$

Обозначим $\eta=(\varphi,\psi)^*$ (здесь $*$ – знак транспонирования), $u=(v,w)^*$; $\eta(t)=\eta(\cdot,t)$, $u(t)= = u(\cdot,t)$, $g(t,\varphi)=g(\cdot,t,\varphi)$. Тогда систему (11) можно записать в виде

$$\frac{d\eta}{dt}=G\eta+f(\cdot,\eta)+u,$$

где

$$G\eta=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{pmatrix}\eta=\begin{pmatrix}\psi\\ \Delta\varphi\end{pmatrix}, \quad f(t,\eta)=\begin{pmatrix}0\\ g(t,\varphi)\end{pmatrix}.$$

Опять же следуя [27, замечание 7, с. 338], будем использовать на пространствах $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $X=\mathbb{H}^1_0(\Omega)\times L_2(\Omega)$ скалярные произведения

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2\,dx \;\text{ на }\; \mathbb{H}^1_0(\Omega), \quad [\eta_1,\eta_2]_X=\int\limits_\Omega\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2\,dx+\int\limits_\Omega\psi_1\psi_2\,dx \;\text{ на }\; X,$$

и в качестве области определения оператора G возьмём

$$D(G)=\{\mathbb{H}^2(\Omega)\bigcap\mathbb{H}^1_0(\Omega)\}\times\mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие (9) встраивается в область определения $D(G)$. В итоге задача (8)–(10) переписывается в виде абстрактного дифференциального уравнения (4). Заметим, что

$$\|f\|_X=\sqrt{[f,f]_X}=\|g(t,\varphi)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда условия F_1, F_2, F_4 конкретизируются следующим образом.

Условие $\mathbf{F_1}$. Для всех $\varphi\in E$ отображение $[0,T]\ni t\to g(t,\varphi(t))$ принадлежит классу $Z=L_2([0,T];L_2(\Omega))$.

Условие $\mathbf{F_2}$. Существует функция $\mathcal{N}=\mathcal{N}(t,M):[0,T]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, суммируемая по $t\in[0,T]$ и неубывающая по $M\in\mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\varphi_i\in\mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\|\varphi_i\|\leqslant M$, $i=1,2$, п.в. $t\in[0,T]$ имеем

$$\|g(t,\varphi_1)-g(t,\varphi_2)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{N}(t,M)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}.$$

Условие $\mathbf{F_4}$. Существуют число $r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0, +\infty)$, такая, что $\|g(t,\xi)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{N}_0(M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\|\xi\| \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$, $\max\limits_{r\in[0,r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$.

Как показано в [27, замечание 7, с. 338], операторы G и $G^* = (-G)$ являются максимальными монотонными, причём $[G\eta,\eta]_X = 0$ для всех $\eta \in D(G)$. Стало быть, выполнены условия G и G*. Согласно лемме 2.2 отсюда следует выполнение условия G$'$ при $a \equiv 1$, $\alpha = T$. Таким образом, применима теорема 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М., 1980.
2. *Carthel C., Glowinski R., Lions J.L.* On exact and approximate boundary controllabilities for the heat equation: a numerical approach // J. of Optim. Theory and Appl. 1994. V. 82. № 3. P. 429–484.
3. *Lebeau G., Robbiano L.* Contrôle exact de l'equation de la chaleur // Comm. Partial Differ. Equat. 1995. V. 20. № 1–2. P. 335–356.
4. *Васильев Ф.П.* О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
5. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управляемость упругих колебаний систем с распределёнными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 11. С. 2032–2044.
6. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М., 2002.
7. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М., 2004.
8. *Zuazua E.* Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems / Eds. C.M. Dafermos et al. Handbook of differential equations: Evolutionary equations. V. III. Amsterdam, 2007. P. 527–621.
9. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
10. *Розанова А.В.* Управляемость для нелинейного абстрактного эволюционного уравнения // Мат. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 4. С. 553–567.
11. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
12. *Klamka J.* Constrained exact controllability of semilinear systems // Syst. Control Lett. 2002. V. 47. № 2. P. 139–147.
13. *Balachandran K., Dauer J.P.* Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey // J. of Optim. Theory and Appl. 2002. № 1. P. 7–28.
14. *Pighin D., Zuazua E.* Controllability under positivity constraints of semilinear heat equations // Math. Control Relat. Fields. 2018. V. 8. № 3–4. P. 935–964.
15. *Klamka J., Avetisyan A.S., Khurshudyan A.Zh.* Exact and approximate distributed controllability of processes described by KdV and Boussinesq equations: the Green's function approach // Arch. Control Sci. 2020. V. 30. № 1. P. 177–193.
16. *Cannarsa P., Komornik V., Loreti P.* One-sided and internal controllability of semilinear wave equations with infinitely iterated logarithms // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002. V. 8. № 3. P. 745–756.
17. *Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu.* Controllability of Evolution Equations. Lecture Notes Ser. V. 34. Seoul, 1996.
18. *Чернов А.В.* О достаточных условиях управляемости нелинейных распределённых систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
19. *Balachandran K., Dauer J.P., Balasubramaniam P.* Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space // J. of Optim. Theory and Appl. 1995. V. 84. P. 83–91.
20. *Mahmudov N.I.* Exact null controllability of semilinear evolution systems // J. Glob. Optim. 2013. V. 56. № 2. P. 317–326.
21. *Zhang X.* Exact controllability of semilinear evolution systems and its application // J. Optimization Theory Appl. 2000. V. 107. № 2. P. 415–432.
22. *Liu W., Williams G.H.* Exact internal controllability for the semilinear heat equation // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 211. P. 258–272.
23. *Чернов А.В.* Об одном обобщении метода монотонных операторов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 535–544.
24. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

25. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М., 1979.
26. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
27. *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2011.
28. *Качуровский Р.И.* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2 (140). С. 121–168.
29. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.
30. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с неограниченным оператором // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 331–349.
31. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
32. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 23.11.2022 г.
После доработки 16.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 270–274

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.5

О БИФУРКАЦИИ ПОРОГОВ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА В ПРИСУТСТВИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

© 2023 г. Д. И. Борисов, Д. А. Зезюлин

Рассмотрен оператор Шрёдингера на плоскости с ограниченным потенциалом $V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x,y)$, где V_1 – вещественный потенциал, V_2 и W – финитные комплексные потенциалы, ε – малый параметр, в предположении, что нижняя часть спектра одномерного оператора Шрёдингера $\mathcal{H}_1 = -d^2/dx^2 + V_1(x)$ состоит из пары изолированных собственных значений, а существенный спектр оператора $\mathcal{H}_2 = -d^2/dy^2 + V_2(y)$ имеет виртуальный уровень на нижнем крае и спектральную сингулярность внутри. Дополнительно считаем, что происходит определённое наложение собственных значений оператора $\mathcal{H}_1$ с виртуальным уровнем и спектральной сингулярностью оператора $\mathcal{H}_2$, приводящее к возникновению особого порога в существенном спектре возмущённого оператора, причём возмущение приводит к бифуркации этого порога в собственные значения и резонансы с удвоением кратности. Сценарий бифуркации, описываемый в настоящей работе, качественно отличается от ранее известных.

DOI: 10.31857/S0374064123020127, EDN: PVRLHB

1. Постановка задачи. Основной объект исследования настоящей работы – двумерный оператор Шрёдингера

$$\mathcal{H}^\varepsilon = -\Delta_{x,y} + V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x,y)$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) := W_2^2(\mathbb{R}^2)$, где $\Delta_{x,y}$ – оператор Лапласа по декартовым координатам (x,y) на плоскости $\mathbb{R}^2$, потенциалы V_1, V_2, W – равномерно ограниченные измеримые функции своих переменных. Функция V_1 – вещественная, функции V_2 и W – комплекснозначные и финитные. Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ замкнут и m-секториален.

Определим вспомогательные операторы

$$\mathcal{H}_1 := -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad \mathcal{H}_2 := -\frac{d^2}{dy^2} + V_2(y)$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с областями определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_1) = \mathfrak{D}(\mathcal{H}_2) = W_2^2(\mathbb{R})$. Оператор $\mathcal{H}_1$ самосопряжён, оператор $\mathcal{H}_2$ m-секториален, и, благодаря финитности потенциала V_2, существенный спектр оператора $\mathcal{H}_2$, определяемый в терминах характеристических последовательностей, есть полуось $[0,+\infty)$. На потенциал V_1 налагаем следующее условие: существует константа c_0 такая, что спектр оператора $\mathcal{H}_1$ левее точки c_0 состоит из пары собственных значений Λ_0, Λ_1. Условие на потенциал V_2: существует $\delta > 0$ такое, что полоса $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0, \ |\operatorname{Im}\lambda| < \delta\}$ содержится в резольвентном множестве оператора $\mathcal{H}_2$; кроме этого оператор $\mathcal{H}_2$ имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра $\lambda = 0$ и спектральную сингулярность во внутренней точке существенного спектра $\lambda = \mu > 0$, и выполняется равенство

$$\Lambda_0 + \mu = \Lambda_1 =: \lambda_0. \tag{1}$$

Поясним понятия виртуального уровня и спектральной сингулярности. Пусть уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + V_2\right)\Phi = \lambda\Phi \tag{2}$$

на множестве $\mathbb{R}$ имеет нетривиальное решение со следующим поведением:

$$\Phi(y) = C_\pm e^{i\sqrt{\lambda}|y|}, \quad \pm y > a, \tag{3}$$

где $C_\pm$ – некоторые фиксированные константы, не зависящие от y, ветвь корня выбрана подходящим образом, $a > 0$ – достаточно большое число. Очевидно, что ни одна из констант

C_+ и C_- не равна нулю, так как иначе функция $\Phi(y)$ тождественно обращалась бы в нуль. Если условие (3) выполнено для $\lambda = 0,$ то будем считать, что на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_2$ имеется виртуальный уровень. Если условие (3) выполнено для некоторого $\lambda = \mu > 0,$ то говорим, что μ – это спектральная сингулярность внутри существенного спектра оператора $\mathcal{H}_2$. Обзор исследований спектральных сингулярностей несамосопряжённых операторов приведён, например, в работе [1].

Повторив выкладки из доказательства леммы 1 в статье [2], несложно показать, что существенный спектр оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ есть полуось $[\Lambda_0, +\infty).$ В него вложено число

$$\lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_0 + \mu,$$

которое называем *внутренним порогом* спектра. Равенство (1) означает, что при $\varepsilon = 0$ этому порогу соответствуют две обобщённые собственные функции $\Psi_i(x)\Phi_i(y),$ $i = 0, 1,$ оператора $\mathcal{H}^0$.

Изучим бифуркацию порога λ_0 в собственные значения и/или резонансы оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при возмущении потенциалом $\varepsilon W.$ Резонансы стандартным образом определим как полюса соответствующих локальных мероморфных продолжений резольвенты через существенный спектр.

Имеется большое число исследований, посвящённых бифуркации порогов в существенном спектре эллиптических операторов под действием локализованных возмущений. Небольшой обзор на эту тему приведён в работах [2–4]. Также отметим статьи [5–7] для дифференциальных операторов и [8, 9] – для разностных операторов. Типичной является ситуация, когда совокупная кратность собственных значений и/или резонансов, возникающих из заданного порога, совпадает с кратностью самого порога, понимаемой в подходящем смысле. Имеются также примеры нарушения сохранения совокупной кратности, а именно, её увеличения под действием возмущения. Для задач на плоскости и в трёхмерных слоях такой эффект связан с логарифмической особенностью фундаментального решения (см. [10, 11]). Известен также эффект возникновения и накопления неограниченного числа резонансов и собственных значений вдоль заданного отрезка в существенном спектре под действием разбегающихся возмущений (см. [12, 13]).

Данная работа посвящена изучению иного механизма увеличения совокупной кратности и является продолжением исследований из статей [2–4], в которых рассматривались операторы более общего вида, чем $\mathcal{H}^\varepsilon$, но в принципиально другой ситуации: предполагалось, что $V_2 \equiv 0.$ Было показано, что тогда в существенном спектре присутствуют пороги, соответствующие собственным значениям оператора $\mathcal{H}_1$, и локализованные возмущения приводят к бифуркациям этих порогов в собственные значения и резонансы, причём количество (с учётом кратности) возникающих собственных значений и резонансов до двух раз превосходит кратность порога. Суть такого эффекта связана с наличием двух локальных мероморфных продолжений резольвенты в окрестности порогов из верхней полуплоскости в нижнюю и наоборот, и возникающие собственные значения и резонансы есть полюса этих продолжений. Оба продолжения имеют одинаковое количество полюсов, и для каждого из них были найдены первые члены их асимптотических разложений, а также достаточные условия, определяющие, какому именно спектральному объекту (собственному значению или резонансу) соответствует заданный полюс.

Рассмотрим случай $V_2 \not\equiv 0$ и дополнительно предположим, что оператор $\mathcal{H}_2$ имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра и спектральную сингулярность внутри. Дополнительно считаем, что собственные значения оператора $\mathcal{H}_1$ удовлетворяют равенству (1), что можно понимать как “наложение” собственных чисел и спектральной сингулярности во внутреннем пороге λ_0. Основной результат настоящей работы утверждает, что такое наложение качественно меняет бифуркационную картину в окрестности порога λ_0, и при некоторых дополнительных условиях из порога λ_0 возникают четыре спектральных объекта, но при этом соответствующие локальные мероморфные продолжения имеют *разное* число возникающих полюсов. Подчеркнём, что порогу λ_0 соответствуют только две линейно независимые обобщённые собственные функции.

2. Основные результаты. Пусть $\Psi_i = \Psi_i(x)$, $i = 0, 1$, – нормированные в $L_2(\mathbb{R})$ вещественнозначные собственные функции оператора $\mathcal{H}_1$, соответствующие собственным значениям Λ_0, Λ_1. Ввиду одномерности оператора $\mathcal{H}_1$ каждое из этих собственных значений – простое. Через $\Phi_i = \Phi_i(y)$, $i = 0, 1$, обозначим нетривиальные решения уравнения (2) с поведением (3), соответствующие случаям $\lambda = \mu$ $(i = 0)$ и $\lambda = 0$ $(i = 1)$. Считаем, что для $\lambda = \mu$ существует единственное (с точностью до множителя) нетривиальное решение указанного типа. Дополнительно считаем, что решения Φ_i можно нормировать следующим образом:

$$(C_-^{(1)})^2 + (C_+^{(1)})^2 = 1, \quad \int\limits_{-a}^{a} ((\Phi_0')^2 + V_2\Phi_0^2 + \mu\Phi_0^2)\,dy = 2\sqrt{\mu}.$$

Здесь через $C_\pm^{(1)}$ обозначаем константы $C_\pm$ из асимптотики (3), соответствующие решению Φ_1.

Зафиксируем $\theta > 0$ и введём весовые пространства $W_{2,\theta}^2(\mathbb{R})$ и $W_{2,\theta}^2(\mathbb{R}^2)$ как подпространства функций из $W_2^2(\mathbb{R})$ и $W_2^2(\mathbb{R}^2)$ с конечными нормами, определяемыми равенствами

$$\|u\|^2_{W_{2,\theta}^2(\mathbb{R})} := \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}, e^{-\theta|y|}\,dy)} + \|u'\|^2_{L_2(\mathbb{R}, e^{-\theta|y|}\,dy)} + \|u''\|^2_{L_2(\mathbb{R}, e^{-\theta|y|}\,dy)},$$

$$\|u\|^2_{W_{2,\theta}^2(\mathbb{R}^2)} := \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, e^{-\theta|y|}\,dx\,dy)} + \|\partial_{x,y}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, e^{-\theta|y|}\,dx\,dy)} + \|\partial^2_{x,y}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, e^{-\theta|y|}\,dx\,dy)},$$

где $\partial_{x,y}u$ и $\partial^2_{x,y}u$ обозначают соответственно наборы всех первых и вторых производных функции u. Для заданной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$, через $L_{2,\Omega}(\mathbb{R}^n)$ обозначаем подпространство функций из пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ с носителями в замыкании области Ω.

Следующее утверждение описывает локальные мероморфные продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

Теорема 1. *Для всех достаточно малых ε существуют два локальных мероморфных продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в окрестности внутреннего порога λ_0 существенного спектра, а именно: для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и каждого $\tau \in \{-1, +1\}$ при достаточно малых ε существуют число $\theta > 0$ и ограниченный оператор $\mathcal{R}_\tau^\varepsilon(k)$, действующий из $L_{2,\Omega}(\mathbb{R}^2)$ в $W_{2,\theta}^2(\mathbb{R}^2)$, и мероморфный по k из некоторой фиксированной малой окрестности нуля в комплексной плоскости. Размер этой окрестности не зависит от ε. При выполнении неравенств $\operatorname{Re} k > 0$ и $\tau \operatorname{Im} k^2 < 0$ оператор $\mathcal{R}_\tau^\varepsilon(k)$ совпадает с резольвентой $(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda_0 + k^2)^{-1}$, суженной на пространство $L_{2,\Omega}(\mathbb{R}^2)$. Если k^ε – полюс оператора $\mathcal{R}_\tau^\varepsilon(k)$, то существует нетривиальное решение ψ_τ^ε уравнения*

$$(-\Delta_{x,y} + V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x, y) - \lambda_0 + (k^\varepsilon)^2)\psi_\tau^\varepsilon = 0 \tag{4}$$

в $\mathbb{R}^2$, которое при $\pm y > b$ с некоторым фиксированным b, не зависящим от ε, представляется следующим образом:

$$\psi_\tau^\varepsilon(x, y) = c_\pm^{(\varepsilon,0)}\Psi_0(x)e^{i\tau\sqrt{\mu - (k^\varepsilon)^2}|y|} + c_\pm^{(\varepsilon,1)}\Psi_1(x)e^{-k^\varepsilon|y|} + \psi_\tau^{\varepsilon,\perp}(x, y), \tag{5}$$

где $c_\pm^{(\varepsilon,i)}$, $i = 0, 1$, – некоторые константы, $\psi_\tau^{\varepsilon,\perp} \in W_{2,\theta}^2(\mathbb{R}^2)$ – некоторая функция.

Полюсам мероморфных продолжений $\mathcal{R}_{\pm 1}^\varepsilon(k)$ соответствуют нетривиальные решения задачи (4), (5). Если заданное решение попадает в пространство $W_2^2(\mathbb{R}^2)$, то соответствующий полюс по формуле $\lambda^\varepsilon = \lambda_0 - (k^\varepsilon)^2$ порождает собственное значение оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Если же заданное решение не попадает в пространство $W_2^2(\mathbb{R}^2)$, то соответствующий полюс по той же формуле порождает резонанс.

Введём ещё два условия:

$$K_j := \int\limits_{\mathbb{R}^2} W(x, y)\Psi_j(x)\Phi_j(y)\Psi_1(x)\Phi_1(y)\,dx\,dy \neq 0, \quad j = 0, 1. \tag{6}$$

Представим эти числа в виде $K_j = |K_j|e^{i\theta_j}$, $j = 0, 1$, где $\theta_j \in [0, 2\pi)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства (6). При достаточно малых ε оператор $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{-1}(k)$ имеет ровно один полюс $k_0(\varepsilon)$, а оператор $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{+1}(k)$ – ровно три полюса $k_j(\varepsilon)$, $j = 1,2,3$, сходящихся к нулю при $\varepsilon \to +0$. Каждый из этих полюсов простой, и ему соответствует единственное нетривиальное решение задачи (4), удовлетворяющее представлению (5). Асимптотики этих полюсов имеют вид*

$$k_0(\varepsilon) = -\varepsilon K_1 + O(\varepsilon^2), \quad k_j(\varepsilon) = |K_0K_1|^{1/3} e^{i(\theta_0+\theta_1+2\pi j)/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon), \quad j = 1,2,3. \tag{7}$$

Полюса $k_j(\varepsilon)$, $j = 0,1,2,3$, порождают собственные значения или резонансы оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}$ по формуле

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_0 - k_j^2(\varepsilon). \tag{8}$$

Если $\theta_1 \in (\pi, 3\pi/2)$, то полюс $k_0(\varepsilon)$ порождает собственное значение, а если $\theta_1 \in (0,\pi) \bigcup (3\pi/2, 2\pi)$, то он порождает резонанс. Если $\theta_0+\theta_1 \in (\pi/2, 2\pi)$, то полюс $k_2(\varepsilon)$ порождает собственное значение, а полюса $k_1(\varepsilon)$, $k_3(\varepsilon)$ – резонансы. Если $\theta_0+\theta_1 \in (5\pi/2, 4\pi)$, то полюс $k_1(\varepsilon)$ порождает собственное значение, а полюса $k_2(\varepsilon)$, $k_3(\varepsilon)$ – резонансы. Если $\theta_0+\theta_1 \in (0,\pi/2) \bigcup (2\pi, 5\pi/2)$, то все три полюса $k_j(\varepsilon)$, $j = 1,2,3$, порождают резонансы.

Кратко обсудим основные результаты. Точка λ_0 является внутренним порогом в существенном спектре предельного оператора $\mathcal{H}^0$, который получается из $\mathcal{H}^{\varepsilon}$ при $\varepsilon = 0$. Этому порогу соответствуют две обобщённые собственные функции, имеющие вид $\Psi_j(x)\Phi_j(y)$, $j = 0,1$. Возмущение потенциалом εW приводит к бифуркации порога λ_0 в четыре спектральных объекта, соответствующих полюсам $k_j(\varepsilon)$, $j = 0,1,2,3$, операторов $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{\pm}(k)$, возникающих как локальные мероморфные продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}$ в окрестности порога λ_0 из верхней полуплоскости в нижнюю и наоборот. Резонансы и собственные значения оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}$ удобно рассматривать как полюса этих мероморфных продолжений; тип спектрального объекта определяется поведением на бесконечности соответствующего нетривиального решения задачи (4), (5).

Одновременное наличие виртуального уровня и спектральной сингулярности у оператора $\mathcal{H}_2$ и условие (1) приводят к неожиданному эффекту при бифуркации этого порога: помимо ожидаемого удвоения кратности (с двух до четырёх) возникающие четыре полюса образованы одним полюсом оператора $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{-1}(k)$ и тремя полюсами оператора $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{+1}(k)$. Такая несимметричность резко контрастирует с результатами работ [2–4], где аналогичные локальные мероморфные продолжения резольвент всегда имели *одинаковое* количество полюсов. Поэтому можно утверждать, что наложение собственных значений и спектральной сингулярности в смысле равенства (1) качественно меняет структуру полюсов мероморфных продолжений резольвенты.

Обсудим ещё спектральную природу возникающих полюсов. Полюс $k_0(\varepsilon)$ оператора $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{-1}(k)$ может порождать как собственное значение, так и резонанс. Среди полюсов оператора $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{+1}(k)$ только $k_1(\varepsilon)$ и $k_2(\varepsilon)$ могут соответствовать собственным значениям, в то время как остальные два полюса всегда соответствуют резонансам. Реализация конкретной ситуации определяется аргументами θ_0 и θ_1 чисел K_0 и K_1. В результате, в окрестности порога λ_0 реализуется одна из трёх возможных ситуаций: возникают или четыре резонанса, или одно собственное значение и три резонанса, или два собственных значения и два резонанса. Все эти объекты описываются общей формулой (8), и с учётом (7) верны асимптотики

$$\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0 - K_1^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_0 - |K_0K_1|^{2/3} e^{2i(\theta_0+\theta_1+2\pi j)/3} \varepsilon^{4/3} + O(\varepsilon^{5/3}), \quad j = 1,2,3.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guseinov G.Sh.* On the concept of spectral singularities // Pramana – J. Phys. 2009. V. 73. № 3. P. 587–603.
2. *Borisov D.I., Zezyulin D.A., Znojil M.* Bifurcations of thresholds in essential spectra of elliptic operators under localized non-Hermitian perturbations // Stud. Appl. Math. 2021. V. 146. № 4. P. 834–880.

3. *Borisov D.I., Zezyulin D.A.* Bifurcations of essential spectra generated by a small non-Hermitian hole. I. Meromorphic continuations // Russ. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 4. P. 416–433.
4. *Borisov D.I., Zezyulin D.A.* Bifurcations of essential spectra generated by a small non-Hermitian small hole. II. Eigenvalues and resonances // Russ. J. Math. Phys. 2022. V. 29. № 3. P. 321–341.
5. *Назаров С.А.* Сохранение пороговых резонансов и отцепление собственных чисел от порога непрерывного спектра квантовых волноводов // Мат. сб. 2021. Т. 212. № 7. С. 84–121.
6. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
7. *Гатауллин Т.М., Карасёв М.В.* О возмущении квазиуровней оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом // Теор. мат. физ. 1971. Т. 9. № 2. С. 252–263.
8. *Лакаев С.Н., Абдухакимов С.Х.* Пороговые эффекты в системе двух фермионов на оптической решётке // Теор. мат. физ. 2020. Т. 203. № 2. С. 251–268.
9. *Лакаев С.Н., Улашов С.С.* Существование и аналитичность связанных состояний двухчастичного оператора Шрёдингера на решётке // Теор. мат. физ. 2012. Т. 170. № 3. С. 393–408.
10. *Gesztesy F., Holden H.* A unified approach to eigenvalues and resonances of Schrödinger operators using Fredholm determinants // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 123. № 1. P. 181–198.
11. *Борисов Д.И.* Возмущение края существенного спектра волновода с окном. I. Убывающие резонансные решения // Пробл. мат. анализа. 2014. Т. 77. С. 19–54.
12. *Borisov D.I., Zezyulin D.A.* Sequences of closely spaced resonances and eigenvalues for bipartite complex potentials // Appl. Math. Lett. 2020. V. 100. ID 106049.
13. *Klopp F.* Resonances for large one-dimensional “ergodic” systems // Analysis and PDE. 2016. V. 9. № 2. P. 259–352.

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Башкирский государственный педагогический
университет имени М. Акмуллы, г. Уфа,
Университет Градца Кралове, Чехия,
Национальный исследовательский университет ИТМО,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 21.11.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 275–279

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.72

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГЕНЕРАТОРА ПОЛУГРУППЫ, ПОРОЖДАЕМОЙ ВОЛЬТЕРРОВЫМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

© 2023 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Изучены спектральные свойства линейного оператора, являющегося генератором полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Такие интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные с частными производными, возникающие в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью, а также имеют много других важных приложений. Установленные результаты о базисности Рисса корневых векторов генератора полугруппы могут быть использованы при изучении свойств решений интегро-дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123020139, EDN: PVYKCS

Введение. В статье изучаются спектральные свойства линейного оператора $\mathbb{A}$, являющегося генератором полугруппы, порождаемой интегро-дифференциальным уравнением с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются операторными моделями задач теории вязкоупругости, теории распространения тепла в средах с памятью и имеют много важных приложений (см. [1–5]). В предлагаемой статье продолжается исследование вещественной и невещественной частей спектра оператора $\mathbb{A}$ и устанавливается базисность Рисса корневых векторов в подпространстве, отвечающем невещественной части его спектра.

1. Определения. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и A – положительный самосопряжённый оператор, $A^* = A \geqslant \varkappa_0 I$, $\varkappa_0 > 0$, имеющий компактный обратный оператор в H, I – тождественный оператор в пространстве H. Пусть B – неотрицательный самосопряжённый оператор в пространстве H с областью определения $D(B)$ такой, что $D(A) \subseteq D(B)$ и $\|Bx\| \leqslant \varkappa\|Ax\|$, $0 < \varkappa < 1$, для любого $x \in D(A)$.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int\limits_l^t K_1(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_l^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad u(t) = \varphi(t), \quad t \in [l, 0], \quad -\infty \leqslant l < 0, \tag{2}$$

где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1, 2$, допускают представление

$$K_i(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где положительные меры $d\mu_i$, $i = 1, 2$, порождены неубывающими непрерывными справа функциями μ_i. Интеграл (3) понимается в смысле Стилтьеса. При этом предполагается, что функции μ_i, $i = 1, 2$, представляют собой сумму абсолютно непрерывной функции и функции скачков, сингулярная компонента отсутствует. Дополнительно будем предполагать выполнение следующих условий:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Определение 1. Вектор-функция $u(t)$ называется *классическим* решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2). Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, принимающих значения в пространстве H, для которых выполнено условие

$$\|\xi\|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} \|\xi(s)\|^2_H \, d\mu_k(s)\right)^{1/2} < +\infty.$$

Эти пространства являются сепарабельными гильбертовыми пространствами (см. [6, с. 142]).

Замечание 1. Формально достаточно определить элементы $\xi(s)$ пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ на подмножестве $\bigcup_{k=1}^2 \operatorname{supp} d\mu_k \subset \mathbb{R}_+$.

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) B, \quad Q_1 := A^{1/2} A_0^{-1/2}, \quad Q_2 := B^{1/2} A_0^{-1/2}.$$

Замечание 2. Из самосопряжённости операторов A и B и условия (4) следует, что оператор A_0 является самосопряжённым и положительным. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [7, гл. 1, теорема 7.1]) вытекает, что оператор A_0 обратим, а операторы $Q_1 := A^{1/2} A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2} A_0^{-1/2}$, A_0^{-1} являются ограниченными в пространстве H.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $D(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Рассмотрим линейные операторы $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau \xi(\tau)$ в пространстве Ω_k, $k = 1, 2$, с областями определения $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau \xi(\tau) \in \Omega_k\}$.

Введём линейные операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$, $k = 1, 2$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \operatorname{supp} d\mu_k,$$

тогда сопряжённые операторы имеют вид $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$, $k = 1, 2$,

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) \, d\mu_k(\tau), \quad k = 1, 2.$$

Замечание 3. Пусть выполнены условия (4), тогда операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ и $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$, $k = 1, 2$, являются ограниченными.

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|^2_{\mathbb{H}} = \|v\|^2_H + \|\xi_0\|^2_H + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|^2_{\Omega_k}, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^2 \operatorname{supp} d\mu_k,$$

которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством*.

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},\ \ \xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2},\ \ \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k),\ \ k = 1, 2\right\},$$

действующий по правилу

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^{\text{т}} = \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\right], A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau),\ \ k = 1, 2\right)^{\text{т}},$$

где через $^{\text{т}}$ обозначена операция транспонирования матрицы.

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде произведения операторных матриц

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Введём четырёхкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in D(\mathbb{A}), \quad Z_0 = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$$

и рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения в пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t), \tag{5}$$

$$Z(0) = Z_0. \tag{6}$$

Определение 2. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in \mathbb{H}$, принимающая значения из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (5), (6), если она принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{A})) \bigcap C([0,+\infty), D(\mathbb{A}))$ по переменной t для любого $\tau \in \bigcup_{k=1}^{2} \operatorname{supp} d\mu_k$, удовлетворяет уравнению (5) и начальному условию (6).

В работе [8] показано, что при выполнении условий (4) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ максимально диссипативный и, следовательно, является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

В статье [9] доказана теорема о существовании и единственности классического решения $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau))$ задачи (5), (6), где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), в предположениях, что данные задачи (1), (2) удовлетворяют следующим условиям: $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$, вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in (l, 0]$, причём $\varphi(t) \in H_1$ и $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in (l, 0]$, $\varphi(t) \in C((l,0], H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C((l,0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, кроме того, $\lim\limits_{t \to l}[A\varphi(t)] = 0$, $-\infty \leqslant l < 0$, а данные задачи (5), (6) удовлетворяют условию $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$, где функции $\xi_{0k}(\tau)$, $k = 1, 2$, заданы формулами

$$\xi_{0k}(\tau) := \int\limits_{l}^{0} \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2.$$

Также получены оценка нормы решения задачи (5), (6) в пространстве $\mathbb{H}$ и оценка энергетической нормы решения задачи (1), (2) в пространстве H.

2. Спектральный анализ оператора $\mathbb{A}$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1) с начальными условиями

$$u(+0) = 0, \quad u^{(1)}(+0) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t < 0,$$

получаем уравнение $L(\lambda)\hat{u}(\lambda)=0$, где $\hat{u}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $u(t)$, оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет вид

$$L(\lambda)=\lambda^2 I+A+B-\hat{K}_1(\lambda)A-\hat{K}_2(\lambda)B,$$

$\hat{K}_i(\lambda)$, $i=1,2$, – преобразования Лапласа ядер $K_i(t)$, $i=1,2$, имеющие представления

$$\hat{K}_i(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda+\tau},\quad i=1,2.$$

Определение 3. Множество значений $\lambda\in\mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$, если для любого $\lambda\in R(L)$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Множество $\sigma(L)=\mathbb{C}\backslash R(L)$ называется *спектром оператор-функции* $L(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4) и* $\operatorname{supp} d\mu_k\subset(d,+\infty)$, *где* $d>0$, $k=1,2$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *и спектр оператора* $\mathbb{A}$ *лежат в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\lambda<0\}$, *при этом невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *совпадает с невещественным спектром оператора* $\mathbb{A}$, *симметричен относительно вещественной оси, состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности, не имеющих конечных точек накопления.*

Доказательство теоремы 1 содержится в статье [10]. Условия (4) являются существенными для устойчивости задачи (1), (2). Определим локализацию невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$ и оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда меры $d\mu_k(\tau)$, $k=1,2$, имеют компактный носитель.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4) и носитель меры* $d\mu_k(\tau)$, $k=1,2$, *принадлежит отрезку* $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$. *Тогда невещественная часть спектра оператора* $\mathbb{A}$ *и оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит множеству*

$$\Omega:=\{\lambda\in\mathbb{C}:\alpha_1\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\alpha_2\},$$

где

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}\sup_{\|f\|=1}\left[\frac{K_1(0)(Af,f)+K_2(0)(Bf,f)}{((A+B)f,f)}\right],\quad f\in D(A),\tag{7}$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\left[\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{(Af,f)\,d\mu_1(\tau)}{((A+B)f,f)+\tau^2}+\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{(Bf,f)\,d\mu_2(\tau)}{((A+B)f,f)+\tau^2}\right],\quad f\in D(A).\tag{8}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в статье [11].

Пусть носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k=1,2$, принадлежат отрезку $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$. Тогда на основании представлений (23), (35) из работы [8] и теоремы 7 из [11] заключаем, что вещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству $[-d_2,\tilde{x}_0)$, где точка $\tilde{x}_0$ принадлежит интервалу $(-d_1,0)$. Кроме того, из утверждения теоремы 7 следует существование такого числа $\delta>0$, что внутри контура $\Gamma=\{x+iy\in\mathbb{C}:x\in[-d_2-\delta,\tilde{x}_0+\delta],\ y=\pm\delta\}$ нет невещественных точек спектра оператора $\mathbb{A}$.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ проектор Рисса: $\mathbb{Q}=-1/(2\pi i)\int_\Gamma(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{-1}d\lambda$.

Рассмотрим подпространства $\mathbb{H}_1:=\mathbb{Q}\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_2:=(\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbb{H}$. Подпространство $\mathbb{H}_1$ отвечает вещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$.

3. Базисность Рисса из подпространств. Приведём хорошо известные определения из монографий [12] и [13].

Определение 4. Последовательность $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^\infty$ ненулевых подпространств $\mathcal{H}_k\subset\mathcal{H}$ называется *базисом* (из подпространств) пространства $\mathcal{H}$, если любой вектор $x\in\mathcal{H}$ разлагается единственным образом в ряд вида $x=\sum_{k=1}^\infty x_k$, где $x_k\in\mathcal{H}_k$, $k\in\mathbb{N}$, сходящийся по норме пространства $\mathcal{H}$.

Определение 5. Базис из подпространств $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *эквивалентным ортогональному базису* (базисом Рисса) в пространстве $\mathcal{H}$, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор $\mathcal{A}$ такой, что система подпространств $\{\mathcal{A}\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $\mathcal{H}$.

Следуя [14], через $\Re$ обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определённых при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r)\in\Re$ существует постоянная $a>1$, для которой $\nu(ar)\geqslant 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть $\Im$ – множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что $\nu(r+\delta r)\leqslant(1+\varepsilon)\nu(r)$.

Обозначим через $N(t)$ число собственных значений оператора $(A+B)^{1/2}$ (с учётом кратности), меньших t $(t>0)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 3 (о базисности Рисса из подпространств). *Пусть выполнено условие (4), носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k=1,2$, принадлежат отрезку $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$, и выполнены условия*

$$N(t)\in\Re\bigcap\Im,\quad t\to+\infty,\quad \lim_{t\to+\infty}(N(t)t^{-1})<\infty.$$

Тогда существует такая последовательность положительных чисел t_k

$$\{t_k\}_{k=1}^{\infty},\quad t_{-k}=-t_k,\quad t_k<t_{k+1},\quad k\in\mathbb{Z};\quad t_k\to\pm\infty,\quad k\to\pm\infty,\quad t_0=0,$$

что система корневых подпространств $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathbb{A}$, соответствующих прямоугольникам $\pi_k=\{\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}:\alpha_1\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\alpha_2, t_{k-1}<\operatorname{Im}\lambda\leqslant t_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, где α_1 и α_2 определяются формулами (7), (8), является базисом, эквивалентным ортогональному в подпространстве $\mathbb{H}_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New-York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства. М., 1961.
7. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
8. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1410–1426.
10. *Rautian N.A.* On the properties of the generators of semigroups associated with Volterra integro-differential equations // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1652–1664.
11. *Rautian N.A.* Studying Volterra integro-differential equations by methods of the theory of operator semigroups // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1665–1684.
12. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1967.
13. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинёв, 1986.
14. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 396–420.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.
После доработки 15.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 280–282

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.4+517.988.63

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАВНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов

Исследована разрешимость периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой выделена главная нелинейная часть, являющаяся положительно однородным (порядка больше единицы) отображением, остальная часть называется возмущением. Доказано, что если невозмущённая система уравнений не имеет ненулевых ограниченных решений, то периодическая задача разрешима при любом возмущении тогда и только тогда, когда отлично от нуля вращение положительно однородного отображения на единичной сфере. Полученный результат представляет интерес с точки зрения применения и развития методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123020140, EDN: PWFIRZ

1. Введение и основной результат. Рассмотрим периодическую задачу следующего вида:

$$x'(t) = P(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, \omega), \tag{1}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{2}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство n-мерных векторов, $n \geqslant 2$, $\omega > 0$, $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – непрерывное и положительно однородное отображение порядка $m > 1$, т.е. $P(\lambda y) \equiv \lambda^m P(y)$ для любого $\lambda > 0$. Отображение $f : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно, ω-периодично по t и удовлетворяет условию

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{-m} \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} |f(t, y)| = 0.$$

Отображение P называем *главной положительно однородной нелинейностью*, а отображение f – *возмущением*. Множество таких возмущений f обозначим через $\mathbb{R}(n, \omega, m)$.

Решением периодической задачи (1), (2) называем вектор-функцию $x \in C^1([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет системе уравнений (1) и условию периодичности (2). Такое решение ω-периодично и гладко продолжимо на $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$. Разрешимость задачи (1), (2) исследована в следующей постановке: каким условиям должно удовлетворять отображение P, чтобы при любом возмущении $f \in \mathbb{R}(n, \omega, m)$ существовало хотя бы одно решение задачи (1), (2).

Периодическая задача вида (1), (2) исследована в работах [1; 2, с. 331–338]. Из результатов этих работ следует, что для заданного непрерывного и положительно однородного (порядка $m > 1$) отображения P задача (1), (2) разрешима при любом $f \in \mathbb{R}(n, \omega, m)$, если выполнены два условия:

1) невозмущённая система уравнений

$$z'(t) = P(z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{3}$$

не имеет ненулевых ограниченных решений;

2) вращение $\gamma(P)$ векторного поля $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ на единичной сфере $|y| = 1$ отлично от нуля.

В настоящей работе доказано, что если выполнено условие 1), то выполнение условия $\gamma(P) \neq 0$ также необходимо для разрешимости задачи (1), (2) при любом $f \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть для заданного непрерывного и положительно однородного (порядка $m > 1$) отображения $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ система уравнений (3) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда для разрешимости задачи (1), (2) при любом $f \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$ необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(P) \neq 0$.*

Сформулированная теорема в частных случаях доказана в статьях [3, 4]. В [4] выведена формула эффективного вычисления $\gamma(P)$ для одного класса градиентных векторных полей.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано многими авторами. Можно отметить работы [5, 6], где применяются идеи и методы, близкие к предложенным в настоящей работе. Например, в [6] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в $\mathbb{R}^n$, чтобы при любом её ω-периодическом возмущении она имела ω-периодическое решение.

2. Доказательство теоремы. Достаточность условия $\gamma(P) \neq 0$ следует из результатов работ [1; 2, с. 331–338].

Необходимость. Пусть $\gamma(P) = 0$. Используя теорему Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля [2, с. 24, теорема 5.2], построим отображение $f \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$, при котором задача (1), (2) неразрешима. Согласно теореме Хопфа из равенства $\gamma(P) = 0$ вытекает, что векторное поле $P(y)$ можно непрерывно продолжить без нулей внутри шара $|y| < 1$ некоторой формулой $Q(y)$: $P(y) = Q(y)$ при $|y| = 1$ и $Q(y) \neq 0$ при $|y| < 1$.

Рассмотрим систему уравнений

$$x'(t) = P(x(t)) + g(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где отображение g определено формулой

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geqslant 1, \\ Q(y) - P(y), & |y| < 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$ и

$$P(y) + g(y) \neq 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Верна следующая

Лемма. *Система уравнений (4) при некотором $\omega_0 > 0$ не имеет ω_0-периодических решений.*

Доказательство. Предположим, что такое число $\omega_0 > 0$ не существует. Тогда существует последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, системы уравнений (4) с периодами $\omega_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. В силу периодичности решений имеем

$$\frac{1}{\omega_k}\int\limits_0^{\omega_k} \langle P(x_k(t)) + g(x_k(t)), y\rangle dt = 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если вектор-функции $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно ограничены, т.е. справедливо неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{t\in\mathbb{R}^1} |x_k(t)| < \infty, \tag{7}$$

то они, как решения системы уравнений (4), равностепенно непрерывны. Без ограничения общности можно считать, что последовательность функций $x_k(t)$ равномерно сходится к функции $x_0(t)$ на отрезке $[0,1]$. Перейдём в (6) к пределу при $k \to \infty$ и получим равенство

$$\langle P(x_0(0)) + g(x_0(0)), y\rangle = 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

что противоречит (5). Таким образом, для завершения доказательства леммы остаётся показать оценку (7).

Предположим, что оценка (7) не верна. Тогда можно считать, что

$$r_k = \max_{t\in\mathbb{R}^1} |x_k(t)| = |x_k(t_k)| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $k \in \mathbb{N}$. Для этих функций имеем

$$z_k'(t) = P(z_k(t)) + r_k^{-m} g(z_k(t)), \quad |z_k(t)| \leqslant |z_k(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу, получим

$$z_0'(t) = P(z_0(t)), \quad |z_0(t)| \leqslant |z_0(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

а это противоречит тому, что система уравнений (3) не имеет ненулевых ограниченных решений. Следовательно, оценка (7) верна. Лемма доказана.

В системе уравнений (4) произведём замену $z(t) = \lambda_0 x(\lambda_0^{m-1} t)$, где $\lambda_0 = (\omega_0/\omega)^{1/(m-1)}$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$z'(t) = P(z(t)) + \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Очевидно, что всякому ω-периодическому решению системы (8) соответствует ω_0-периодическое решение системы (4), поэтому в силу леммы 1 система уравнений (8) не имеет ω-периодических решений. Таким образом, при $f(y) = \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} y)$ задача (1), (2) неразрешима. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 3. С. 510–513.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
3. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Критерии существования периодических и ограниченных решений для трёхмерных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 157–172.
4. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2022. № 4. С. 37–48.
5. *Звягин В.Г., Корнев С.В.* Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений // Соврем. математика. Фунд. направления. 2015. Т. 58. С. 59–81.
6. *Перов А.И., Каверина В.К.* Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 269–272.

Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 27.07.2022 г.
После доработки 27.07.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 283–292

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2022. Т. 58. № 8; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064123020152, EDN: PWFOAU

А. В. Ильин, А. С. Фурсов (МГУ ВМК, Москва, Россия), “О задаче стабилизации переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями” (26.09.2022).

В статье [1] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаково для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для её решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага – переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы.

В настоящей работе предлагается обобщить приведённую задачу стабилизации на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении, а именно рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t-\theta_\sigma), \quad y(t) = c_\sigma x(t), \quad \sigma \in S_\tau, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\sigma : R_+ \to I = \{1,\ldots,m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \to \{A_1,\ldots,A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b\circ\sigma$, $c_\sigma = c\circ\sigma$ и $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1,\ldots,b_m\}$, $c : I \to \{c_1,\ldots,c_m\}$, $\theta : I \to \{\theta_1,\ldots,\theta_m\}$. Здесь $\theta_i > 0$ – величины постоянных запаздываний, причём θ_i/θ_j – рациональное число для любой пары $i, j \in I$.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i, A_i, b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t-\theta_i), \quad y(t) = c_i x(t).$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$), начальном условии $x(0) = x_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(t-\theta_i), \quad x(0) = x_0.$$

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Для переключаемой линейной системы (1) с заданным $\tau > 0$ и ненаблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in S_\tau$ требуется построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{[t/T]} u[jT]S(t - jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \tag{2}$$

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \tag{3}$$

обеспечивающий S_τ-устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t - \theta_\sigma),$$
$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_\sigma x[lT], \quad \sigma(t) \in S_\tau, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \tag{4}$$

где

$$u(t - \theta_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{[(t-\theta_i)/T]} (Hv[lT] + hc_\sigma x[lT])S(t - \theta_i - jT), & \text{если } \ t \geqslant \theta_i, \\ 0, & \text{если } \ 0 \leqslant t < \theta_i. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы, $l = [t/T]$, т.е.

$$lT \leqslant t < (l+1)T, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Здесь T – период квантования по времени t (считаем, что $T < \tau$ и для любого i найдётся такое $\gamma_i \in N$, что $\theta_i = \gamma_i T$), $[\,\cdot\,]$ – целая часть действительного числа, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $q \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1\times r}$, $h \in \mathbb{R}$ (r – порядок регулятора), $u[\,\cdot\,]$, $y[\,\cdot\,]$, $v[\,\cdot\,]$ – дискретные функции, определённые на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [2, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) называем *S_τ-устойчивой*, а регулятор (2), (3) – *стабилизирующим*, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_\tau$ для соответствующего решения выполнено условие

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad l = [t/T]. \tag{5}$$

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подход, разработанный в статье [1], модифицируя его с учётом наличия соизмеримых запаздываний в режимах исходной переключаемой системы (1). При этом предполагается, что общая схема построения цифрового регулятора (2), (3) должна включать следующие основные шаги:

1) переход от непрерывной системы (1) к её точной дискретной модели (см. [1]) с учётом, что на её входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель является переключаемой дискретной системой с режимами, описываемыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);

2) описание режимов полученной дискретной модели с помощью передаточных функций;

3) построение семейства $\mathcal{R}$ одновременно стабилизирующих регуляторов на основе алгоритма SIVIA [3, с. 81] для режимов дискретной модели, представленных передаточными функциями;

4) построение процедуры поиска на множестве $\mathcal{R}$ стабилизирующего дискретного регулятора вида (3) с использованием метода расширения динамического порядка [4, с. 205] и достаточного условия устойчивости переключаемых дискретных систем на основе метода функций Ляпунова [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература. 1. Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1132–1141. 2. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления. СПб, 2002. 3. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2007. 4. Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.

А. К. Деменчук (ИМ НАН Беларуси, Минск, Беларусь) “Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с диагональным представлением среднего значения матрицы коэффициентов” (10.10.2022).

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $n\times n$-матрица, B – постоянная $n\times r$-матрица, $r \leqslant n$.

Исследование вопросов управляемости периодических систем развивалось в двух направлениях. В первом предполагалось, что спектр частот решения разрешённой относительно производной дифференциальной системы полностью определяется частотами её правой части (см., например, [1, 2] и др.). Начало второго было предопределено в работах Х. Массеры [3], Я. Курцвейля и О. Вейводы [4], Н.П. Еругина [5] и др., в которых, в частности, установлено, что система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать такие решения, что пересечение частотных модулей решения и правой части системы тривиально. Позднее такие решения были названы *сильно нерегулярными*, их частотный спектр – *асинхронным*, а описываемые ими колебания – *асинхронными*. Отметим, что в периодическом случае сильная нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и самой системы. Асинхронные колебания реализованы в ряде технических устройств (см. [6] и др.). Для указанного направления была поставлена задача построения систем, обладающих сильно нерегулярными периодическими решениями в виде задачи управления асинхронным спектром [7; 8, гл. 3]. Вопросы разрешимости данной задачи для системы (1) с программным управлением и с нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в работе [9], а с невырожденным – в [10]. Случай максимального ранга матрицы при управлении изучен в статье [11].

В настоящем докладе обсуждается случай, когда у матрицы при управлении имеется нулевой блок, а среднее значение матрицы коэффициентов линейным невырожденным преобразованием приводится к диагональному виду.

В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых $\operatorname{Exp}(u)$ содержится в модуле частот $\operatorname{Mod}(A)$ матрицы коэффициентов $A(\cdot)$. Применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = u(t), \quad \operatorname{Mod}(u) \subseteq \operatorname{Mod}(A) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L.

Как отмечено выше, если матрица при управлении имеет максимальный ранг, то решение такой задачи известно [11]. Поэтому далее считаем, что ранг матрицы B меньше числа её столбцов, т.е.

$$\operatorname{rank} B = r_1 < r. \tag{4}$$

В таком случае из книги [12, с. 20] вытекает, что найдётся постоянная неособенная $n \times n$-матрица S такая, что у $n\times r_1$-матрицы D, полученной при умножении слева матрицы B на S, последние $n - r_1$ строк будут нулевыми, т.е.

$$D = SB = \begin{bmatrix} D_{r_1,r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} D_{r_1,r} = r_1. \tag{5}$$

Один из алгоритмов построения такого рода матрицы S для преобразования столбцов приведён в работе [8, с. 43].

В дальнейшем будем также предполагать, у матрицы $C(t) = SA(t)S^{-1}$ среднее значение является диагональной матрицей:

$$\hat{C} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega C(s)\,ds = \operatorname{diag}(\hat{c}_{11},\ldots,\hat{c}_{nn}), \quad \det\hat{C} = 0. \tag{6}$$

Введём линейную замену переменных

$$y = Sx, \quad \det S \neq 0, \tag{7}$$

где матрица S определяется условием (5). Тогда система (1) приводится к системе

$$\dot{y} = SA(t)S^{-1}y + SBu = C(t)y + Dy. \tag{8}$$

Отметим, что в силу неособенности матрицы S преобразования (7) множества частот матриц коэффициентов систем (1) и (8) совпадают.

Тогда поставленная задача будет равносильна следующей задаче: выбрать такое программное управление (2), чтобы система

$$\dot{y} = C(t)x + Du(t)$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L. Для описанного класса систем (1) исследуем вопрос о разрешимости задачи управления асинхронным спектром. Пусть L – целевое множество частот, элементы которого попарно различны, соизмеримы между собой, и ненулевые среди них несоизмеримы с числом $2\pi/\omega$. Обозначим через $C_1(t)$ матрицу размерности $r_1\times n$, составленную из последних r_1 строк матрицы коэффициентов $C(t)$ системы (8). Справедлива

Теорема. *Для класса систем (1), подчинённых условиям (4), (6), задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима в том и только в том случае, когда матрица $C_1(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, т.е.*

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} C_1 < n,$$

при этом сильно нерегулярное решение системы (3) может быть только стационарным.

Замечание. Если на целевое множество наложить дополнительное условие об отсутствии нулевой частоты, то в такой усиленной постановке задача управления асинхронным спектром для класса систем (1), (4), (6) не разрешима.

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ “Конвергенция–2025” (подпрограмма “Математические модели и методы”).

Литература. 1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968. 2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 3. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45. 4. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370. 5. Еругин Н.П. О периодических решениях дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 148–152. 6. Пеннер Д.И., Дубошинский Д.Б., Козаков Д.Б. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406. 7. Деменчук А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42. 8. Деменчук А.К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Саарбрюккен, 2012. 9. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики. 2018. Т. 26. № 1. С. 11–16. 10. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2020. Т. 28. № 1–2. С. 11–16. 11. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2019. Т. 27. № 1–2. С. 23–28. 12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.

С. Н. Попова, М. В. Федорова (УдГУ, Ижевск, Россия) "Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы" (24.10.2022).

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на множестве $\mathbb{R}$ матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова [1] свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$.

Выбрав управление $u(\cdot)$ в системе (1) в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, получим замкнутую систему вида

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем считать, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $U(\cdot)$ кусочно-непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы (3) с выбранным управлением $U(\cdot)$ определён полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A + BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + BU)$.

Определение 1 [2]. Будем говорить, что система (3) обладает свойством *пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова*, если найдутся такие $\ell > 0$ и $\delta > 0$, что для любого набора чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, удовлетворяющих неравенству $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leqslant \delta$, существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| \leqslant \ell \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\mu_i - \lambda_i(A)|$ и $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 2 [3]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $\vartheta > 0$, что матрица Калмана

$$W(t, t+\vartheta) \equiv \int\limits_t^{t+\vartheta} X(t,s)B(s)B^{\mathrm{T}}(s)X^{\mathrm{T}}(t,s)\,ds$$

системы (1) удовлетворяет неравенству $W(t, t+\vartheta) \geqslant \alpha E$ при всех $t \in \mathbb{R}$; здесь $X(t,s)$ – матрица Коши свободной системы (2), E – единичная матрица.

Определение 3 [1]. Показатели Ляпунова системы (2) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всякой кусочно-непрерывной функции $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Q(t)\| < \delta$, выполнено неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i(A) - \lambda_i(A+Q)| < \varepsilon;$$

здесь $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ – полный спектр показателей Ляпунова возмущённой системы $\dot{y} = (A(t) + Q(t))y$.

В работе [4] установлено, что если система (1) равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы (2) устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы (3) пропорционально локально управляем. Заметим, что условие равномерной полной управляемости системы (1) не является необходимым для пропорциональной локальной управляемости спектра Ляпунова даже в случае устойчивости показателей системы (2).

Пример. Определим последовательность моментов времени $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ рекуррентными формулами $t_1 = 1$, $t_{2k} = kt_{2k-1}$, $t_{2k+1} = k + t_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, и рассмотрим кусочно-линейную и непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию $b(\cdot)$ такую, что $b(t) \equiv 1$ при $t \in (-\infty, 2)$ и $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})$; $b(t) \equiv 0$ при $t \in [t_{2k} + 1/2, t_{2k+1} - 1/2)$, где $k = 2, 3, \ldots$ Рассмотрим систему (1), где $n = m = 2$, $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ – нулевая матрица, $B(t) = \operatorname{diag}(b(t), 1)$. Эта система не является равномерно вполне управляемой, так как для каждого $\vartheta > 0$ найдётся номер $k \equiv [\vartheta] + 2$ такой, что для матрицы Калмана этой системы и для вектора $\xi = \operatorname{col}(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ имеет место равенство $\xi^{\mathrm{T}} W(t_{2k} + 1/2, t_{2k} + 1/2 + \vartheta)\xi = 0$. Свободная система $\dot{x} = 0$ стационарна, поэтому её полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A) = (0, 0)$ устойчив.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и возьмём любую пару чисел $-\delta \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \delta$. Замкнём систему (1) обратной связью $u = U(t)x$, где $U(t) \equiv \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2)$. Получим систему $\dot{x} = \operatorname{diag}(b(t)\mu_1, \mu_2)x$, полный спектр показателей Ляпунова которой состоит из чисел $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Кроме того, $\|U(t)\| \leqslant \max_{j=1,2} |\mu_j - \lambda_j(A)|$. Это означает, что для построенной системы выполнены условия определения 1, где $\delta > 0$ – произвольное число и $\ell = 1$.

Для нахождения необходимых и достаточных условий пропорциональной локальной управляемости спектра применим концепцию оболочки Бебутова линейной управляемой системы.

Систему (1) отождествим с функцией $t \mapsto \sigma(t) \equiv (A(t), B(t)) \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$. Обозначим через $\sigma_s(t) \equiv \sigma(t + s)$ сдвиг σ на $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma)$ – замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{R}\}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma)$ может быть задана равенством

$$\rho(\widetilde{\sigma}, \widehat{\sigma}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{\|\widetilde{\sigma}(t) - \widehat{\sigma}(t)\|, |t|^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(\sigma), \rho)$ компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы σ. Каждую функцию $\widehat{\sigma}(\cdot) = (\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ отождествим с линейной управляемой системой

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема. *Пусть показатели Ляпунова системы (2) устойчивы. Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Пример (продолжение). Так как рассмотренная система не является равномерно вполне управляемой, то из теоремы следует, что в её оболочке Бебутова содержится система, для которой замкнутая система не обладает свойством пропорциональной локальной управляемости спектра. Действительно, несложно проверить, что оболочка Бебутова содержит систему $\dot{x} = \operatorname{diag}(0, 1)u$, замыкая которую произвольной обратной связью $u = U(t)x$ с матрицей $U(\cdot) = \{u_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^2$, получаем систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Каждая фундаментальная система решений системы (4) содержит решение $x(\cdot)$ с ненулевой первой координатой $x_1(\cdot)$. Для показателя Ляпунова этого решения имеем неравенство $\lambda[x] \geqslant \lambda[x_1] = 0$. Следовательно, для каждого допустимого матричного управления $U(\cdot)$ справедливо неравенство $\lambda_2(A + BU) \geqslant 0$. Это означает, что невозможно добиться выполнения равенства $\lambda_2(A+BU) = \mu_2$, где $\mu_2 < 0$. Следовательно, полный спектр замкнутой системы (4) не является пропорционально локально управляемым.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119. 4. Попова С.Н. К свойству пропорциональной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1578–1579.

А. А. Козлов (ПГУ им. Евфросинии Полоцкой, Полоцк, Беларусь) "Равномерная глобальная достижимость дискретных периодических систем" (14.11.2022).

Пусть $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ – множества целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное евклидово пространство; $\mathcal{M}_{mn}$ – пространство вещественных $m\times n$-матриц со спектральной (операторной) нормой; $\mathcal{M}_n := \mathcal{M}_{nn}$; $E \in \mathcal{M}_n$ – единичная матрица.

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные ω-периодические последовательности вещественных $n\times n$- и $n\times m$-матриц $(\omega \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$ соответственно; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие. Матричная функция $A : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_n$ также является *вполне ограниченной* [2] на $\mathbb{Z}$, т.е. при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k)$ обратима и найдётся число $a \geqslant 1$ такое, что будет справедливо неравенство $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|) \leqslant a.$

Управление в системе (1) выберем линейным по состоянию $u(k) = U(k)x(k)$, где $U(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – некоторая последовательность вещественных $m\times n$-матриц. В результате получим замкнутую линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Определение 1. Матричное управление $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{mn}$ будем называть *допустимым* [3] для системы (1), если выполнены условия:

1) управление $U(\cdot)$ ограничено на $\mathbb{Z}$, т.е. справедливо неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|U(k)\| < \infty;$$

2) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k) + B(k)U(k)$ обратима, причём имеет место оценка

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| < \infty.$$

Обозначим через $X_U(k,s) \in \mathcal{M}_n$, $k,s \in \mathbb{Z}$, матрицу Коши [1, с. 13–14] системы (2) с управлением U, а через $X(k,s) := X_0(k,s) \in \mathcal{M}_n$, $k,s \in \mathbb{Z}$, – матрицу Коши системы (2) с нулевым управлением, т.е. линейной дискретной системы $x(k+1) = A(k)x(k)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Будем говорить, что дискретная система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если существует такое число $T > 0$, что для любых $r > 0$ и $\rho > 0$ найдётся величина $d = d(r,\rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $\Lambda \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|\Lambda - E\| \leqslant r$ и $|\det\Lambda| \geqslant \rho$, и всякого числа $k_0 \in \mathbb{Z}$ существует допустимое управление $U\colon [k_0, k_0+T] \to \mathcal{M}_{mn}$, удовлетворяющее при всех $k \in [k_0, k_0+T]$ оценке $\|U(k)\| \leqslant d(r,\rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы (2) с этим управлением на данном отрезке выполнение равенства $X_U(k_0+T, k_0) = \Lambda$.

Впервые термин "равномерная глобальная достижимость" был введен В.А. Зайцевым и Е.Л. Тонковым в работе [4] для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Свойство равномерной глобальной достижимости линейной системы (2) с дискретным временем (равно как и с непрерывным) даёт возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном целочисленном временно́м отрезке фиксированной длины $T \in \mathbb{N}$, т.е. позволяет построить такое допустимое управление U, что множество $\{x_i(k), k \in \mathbb{Z}\}_{i=1}^n$ линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями – соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1,n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ – через время T будет совпадать с произвольным наперёд заданным базисом этого пространства.

Задача о равномерной глобальной достижимости зачастую (см., например, [5, с. 281–324]) решается при условии равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей (2).

Определение 3 [6, 7]. Система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости*, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что при любых числе $k_0 \in \mathbb{Z}$ и векторе $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдётся управление $u(k)$, $k = \overline{k_0, k_0+K-1}$, удовлетворяющее оценке $\|u(k)\| \leqslant \alpha\|x_1\|$, при котором для решения $x(k)$ системы (1) с этим управлением u и начальным условием $x(k_0) = 0$ обеспечивается равенство $x(k_0+K) = x_1$.

В статье [8] автором настоящей работы получен критерий равномерной глобальной достижимости линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В представленном докладе предложен частичный перенос этих результатов (достаточного условия) на дискретные периодические системы (2). Таким образом, основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть матрица $A(\cdot)$ системы (1) вполне ограничена, а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{Z}$. Тогда если дискретная система управления (1) с ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая дискретная система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Данная теорема использует подход С.Н. Поповой, предложенный ею в [9], и основана на следующем утверждении, установленном коллективом авторов в работе [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть матрица $A(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, вполне ограничена, $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – ограничена, и система (1) является равномерно вполне управляемой. Тогда для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ существует матрица $F = F(k_0) \in \mathcal{M}_n$, обеспечивающая выполнение следующего свойства: при любых $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существуют не зависящие от k_0 величины $\beta_1(r,\rho) > 0$ и $\beta_2(r,\rho) > 0$ такие, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_n$, главные угловые миноры которой не меньшие величины ρ, а сама матрица удовлетворяет оценке $\|H - E\| \leqslant r$, найдётся управление $U = U(k)$, $k = \overline{k_0, k_0+K-1}$, при котором выполняются соотношения $\max\limits_{k\in\{k_0,\ldots,k_0+K-1\}} \|U(k)\| \leqslant \beta_1(r,\rho)\|H - E\|$ и $\max\limits_{k\in\{k_0,\ldots,k_0+K-1\}} \|(A(k)+B(k)U(k))^{-1}\| \leqslant \beta_2(r,\rho)$, а для матрицы Коши системы (2) – равенство $X_U(k_0+K, k_0) = X(k_0+K, k_0)FHF^{-1}$.*

Также теорема 1 основана на найденной автором настоящей работы факторизации произвольной квадратной матрицы с отделённым от нуля положительным определителем.

Теорема 3. *Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $H \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det H \geqslant \rho > 0$, найдутся величина $\theta = \theta(\rho) > 0$ и матрицы $H_i \in \mathcal{M}_n$, $i = \overline{1,5}$, все главные угловые миноры которых не меньше величины θ, такие, что выполняется равенство $H = \prod_{i=1}^5 H_i$.*

Литература. 1. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск, 2001. 2. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255. 3. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems // SIAM J. on Control and Optimiz. 2017. V. 55. № 2. P. 671–692. 4. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56. 5. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 6. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119. 7. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. 8. Козлов А.А. Критерий равномерной глобальной достижимости линейных периодических систем // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 221–236. 9. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.

В. Е. Хартовский (ФИТМ ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь) "О методах асимптотической оценки решения линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием" (05.12.2022).

Объект исследования – линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{k\times m}[\lambda]$ – множество полиномиальных матриц); λ_h – оператор сдвига, определённый для заданного $h > 0$ правилом $\lambda_h f(t) = f(t-h)$; $y(t)$, $t > 0$, – наблюдаемый выходной сигнал. Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием $x(t) = \eta(t)$, $t \in [-mh, 0]$, где η – неизвестная кусочно-непрерывная функция. Считаем, что уравнение (1) удовлетворяет условию полной регулярности: $\deg|pD - A(0)| = \operatorname{rank} D$. Заметим, что класс вполне регулярных систем (1) содержит в себе класс систем нейтрального типа. Кроме того, к таким системам в ряде случаев сводятся непрерывно-дискретные системы.

Требуется на основании выхода (2) получить оценку решения $x(t)$ уравнения (1).

Для систем нейтрального типа различные задачи получения оценки решения при помощи асимптотических наблюдателей исследованы в работах [1–3] (см. также библиографию в них), а в статьях [4, 5] построены финитные наблюдатели, ошибка которых есть финитная функция. В настоящем докладе подход, предложенный в [1; 2, с. 375], обобщается на случай системы (1), (2).

Обозначим

$$\deg C(\lambda) = m, \quad B_k = \left(\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}C(\lambda)|_{\lambda=0}\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{0,m},$$

и составим дескрипторное уравнение

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \quad g(i) = \widetilde{g}_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r. \quad (3)$$

Решение задачи (3) существует тогда и только тогда, когда $\widetilde{g}_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1,m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) – матрицы, построенные специальным образом, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ – произвольный вектор (см. [6]). Пусть $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$ – любое фиксированное решение системы $B_0T_1S + \sum_{i=1}^{m} B_iT_i = 0$, $T_kS = T_{k-1}$, $k = \overline{2,m}$. Положим $T = T_m$, $G_0 = B_0T$, $G_i = G_{i-1}S + B_iT$, $i = \overline{1,m-1}$, $G(\lambda) = (\sum_{i=0}^{m-1}\lambda^i G_i)^{\mathrm{T}}$. Способ выбора всех возможных матриц S в зависимости от их спектра описан в работе [7].

Определим наблюдатель

$$\frac{d}{dt}(Dz(t)) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{M}_{00}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{M}_{01}[z_{1t}] + \mathfrak{M}_{02}[z_{2t}] - \mathfrak{M}_{00}[y_t],$$

$$\dot z_1(t) = \mathfrak{M}_{10}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{M}_{11}[z_{1t}] + \mathfrak{M}_{12}[z_{2t}] - \mathfrak{M}_{10}[y_t],$$

$$z_2(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z(t) + M_{21}(\lambda)z_1(t) + M_{22}(\lambda_h)z_2(t) - M_{20}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0. \quad (4)$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$; запись $\mathfrak{M}_{ij}[f_t]$ для кусочно-непрерывной функции $f(t)$ означает функцию вида

$$\mathfrak{M}_{ij}[f_t] = J_{ij}(\lambda_h)f(t) + \sum_{k=0}^{m_{ij}}\int_0^h J_{ij}^{(k)}(s)f(t-kh-s)ds,$$

где $J_{ij}(\lambda)$ – полиномиальная матрица, функции $J_{ij}^{(k)}(s)$ имеют вид

$$J_{ij}^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde m_k} e^{\alpha_{ijk\rho}s}(J_{ij1}^{(k\rho)}(s)\cos(\beta_{ijk\rho}s) + J_{ij2}^{(k\rho)}(s)\sin(\beta_{ijk\rho}s))$$

($\alpha_{ijk\rho}, \beta_{ijk\rho} \in \mathbb{R}$, $J_{ij1}^{(k\rho)}(s)$, $J_{ij2}^{(k\rho)}(s)$ – полиномиальные матрицы подходящих размеров); матрицы $M_{20}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n}[\lambda]$, $M_{2j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_j}[\lambda]$, $j = 1, 2$, $M_{22}(0) = 0$; t_0 – некоторый момент времени.

Зададим для системы (4) начальные условия

$$z(t) = \tilde{z}(t), \quad z_i(t) = \tilde{z}_i(t), \quad t \in [t_0 - h_1, t_0], \quad i = 3, 4. \tag{5}$$

Здесь h_1 – длина отрезка последействия системы (4), $\tilde{z}$, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ – кусочно-непрерывные функции. Компонента z вектора решения $\operatorname{col}[z, z_1, z_2]$ системы (4) есть оценка решения x системы (1), $\varepsilon = z - x$ – ошибка оценивания. Обозначим $W(p,\lambda) = pD - A(\lambda)$; Γ_1, Γ_2 – фундаментальные матрицы решений алгебраических уравнений $\gamma D = 0_{1\times n}$, $D\gamma = 0_{n\times 1}$; $\Delta(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица системы (4).

Теорема 1. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (4) такой, что $\varepsilon(t)$ является векторной компонентой решения однородной $(y \equiv 0)$ системы (4), для которой $|\Delta(p, e^{-ph})| = \nu d(p, e^{-ph})$, где $d(p, e^{-ph})$ – любой наперёд заданный характеристический квазиполином (с достаточно большой величиной $\deg_p d(p,\lambda)$), $\nu \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Таким образом, выбирая характеристический квазиполином однородной $(y \equiv 0)$ системы (4), можно в силу теоремы 1 построить наблюдатель (4), ошибка оценивания которого стремится к нулю с заданной скоростью.

Предположим, что условия (6) нарушаются. Выясним возможности асимптотической оценки решения системы (1), (2) в этом случае. Обозначим через $\mu_i(S)$ собственные значения матрицы S, ρ_S – спектральный радиус матрицы S, $\rho_S = \max\{|\mu_i(S)|\}$.

Теорема 2. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (4) такой, что $\|\varepsilon(t)\| \to 0$ при $t \to 0$, каково бы ни было начальное условие (5), достаточно, чтобы существовала матрица S, для которой $\rho_S < 1$, и выполнялись условия*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \\ G(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \\ G(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть для системы (1), (2) выполняются условия (7) и существует матрица S, для которой $\rho_S \leqslant 1$, и размеры всех жордановых клеток матрицы S, отвечающих собственным значениями $\mu_i(S)$ таким, что $|\mu_i(S)| = 1$, равны единице. Тогда существует наблюдатель (4) такой, что для любого начального условия (5) найдутся $\beta \in \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, обеспечивающие неравенство $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \beta + \omega(t)$, $t > t_0 + k_0 h$.*

Литература. 1. Хартовский В.Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422. 2. Хартовский В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно, 2022. 3. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716. 4. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102. 5. Метельский А.В., Хартовский В.Е. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285. 6. Хартовский В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Вып. 2. С. 290–311. 7. Хартовский В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. С. 102–121.