

ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 3

Март 2023



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 3, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов <i>О. Г. Антоновская</i>	295
Об одной неклассической задаче на собственные значения, имеющей нелинеаризуемые решения <i>Д. В. Валовик, В. Ю. Мартынова</i>	303
О спектральных свойствах дифференциальных операторов высокого порядка с периодическими краевыми условиями <i>Н. Б. Керимов</i>	314
Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с одномасштабным внутренним слоем <i>Р. Е. Симаков</i>	333

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Нелокальная задача с интегральным условием склеивания для нагруженного парабола-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто <i>О. Х. Абдуллаев</i>	350
Нелокальная обратная задача по времени для уравнения колебаний балки с интегральным условием <i>У. Д. Дурдиев</i>	358
Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене <i>Н. В. Зайцева, А. Б. Муравник</i>	368
Обратные аттракторы модели Бингама <i>В. Г. Звягин, А. С. Устюжанинова</i>	374

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений с оператором Гаммерштейна–Стилтьеса на полуоси <i>Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян</i>	380
--	-----

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Многошаговые методы для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка <i>М. В. Булатов, Л. С. Соловарова</i>	389
Численный метод оптимизации дифракционной эффективности тонкослойных покрытий с дифракционными решётками <i>В. Ю. Мартынова, Ю. Г. Смирнов, А. В. Тихонравов</i>	400

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Об устойчивости решений задач управления для нелинейной модели
реакции–диффузии–конвекции

Р. В. Бризицкий, П. А. Максимов

409

О некоторых экстремальных задачах, связанных с перемещением в поле скоростей

П. В. Николенко

422

Письмо в редакцию

В. В. Амелькин

432

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51+517.926

О СОХРАНЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ
ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕЁ КОЭФФИЦИЕНТОВ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Для автономной линейной однородной асимптотически устойчивой дифференциальной системы получены достаточные условия на малость возмущений в классе автономных линейных однородных систем, при выполнении которых квадратичная форма, являющаяся функцией Ляпунова для исходной системы, будет функцией Ляпунова и для возмущённой системы.

DOI: 10.31857/S0374064123030019, EDN: QTWXLY

Введение. Важное место в прямом (втором) методе Ляпунова занимает задача о построении в явном виде функции Ляпунова для тех или иных классов дифференциальных систем [1–3]. Для установления свойства устойчивости и нахождения качественных характеристик нелинейных непрерывных (дискретных) динамических систем, допускающих линеаризацию, вблизи их равновесных состояний могут быть использованы функции Ляпунова квадратичного вида [3, с. 33–45; 4, с. 120–132], построенные для соответствующих линеаризованных систем. При этом могут решаться вопросы построения квадратичной функции Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, которые определяются особенностями исходной задачи [5–7]. Например, при решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы [8, 9], возникает необходимость использования ограничений на величину первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова $V(x)$ на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$, причём существенным является такой выбор её параметров, при котором выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) обеспечивается с заданным [10, 11] (в том числе максимальным [12, 13]) запасом.

В данной работе изучается вопрос, при каких условиях квадратичная функция Ляпунова, построенная для автономной линейной дифференциальной системы, будет оставаться функцией Ляпунова при изменении коэффициентов системы.

1. Квадратичная функция Ляпунова, удовлетворяющая заданному ограничению, для автономных линейных однородных систем дифференциальных уравнений.

1.1. Для фиксированного числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим автономную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

и квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$V(x) = x^T K x \quad (K^T = K). \quad (2)$$

Элементы постоянных $n \times n$ -матриц A и K вещественные. Первая производная $\dot{V}_{(1)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (1) также является квадратичной формой:

$$\dot{V}_{(1)}(x) = x^T (A^T K + K A) x. \quad (3)$$

Далее считаем, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы коэффициентов A системы (1), т.е. корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E_n) = 0$, имеют отрицательные

вещественные части, и что квадратичная форма (2) положительно определена (здесь и ниже E_n – единичная $n \times n$ -матрица). Это предположение означает, в частности, что у системы (1) имеется [4, с. 35] квадратичная функция Ляпунова.

В работе [10] доказана

Теорема 1. Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) и на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0 = \text{const} > 0$ функции $V(x)$ максимальное значение её первой производной (3) в силу системы (1) равно δV_0 . Тогда для собственных значений λ_i , $i = \overline{1, n}$, матрицы коэффициентов системы (1) справедливо неравенство $2 \max_{i=\overline{1, n}} \text{Re } \lambda_i \leq \delta < 0$, а коэффициенты квадратичной формы (2) удовлетворяют равенству

$$\det(A^T K + K A - \delta K) = 0. \quad (4)$$

Замечание. В дальнейшем матрицу $A^T K + K A$ квадратичной формы (3) обозначаем через A_K . Очевидно, что матрица A_K симметрична: $A_K = A_K^T$. Пусть $A_K = (A_{km})_{k,m=1}^n$. Если $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ и $K = (K_{ik})_{i,k=1}^n$, то для элементов матрицы A_K очевидны равенства

$$A_{km} = \sum_{i=1}^n (K_{im} a_{ik} + K_{ik} a_{im}), \quad k, m = \overline{1, n}, \quad (5)$$

в которых учтена симметричность матрицы K ($K_{ik} = K_{ki}$ для всех $k, i = \overline{1, n}$). В этих обозначениях равенство (4) запишется в виде $\det(A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^n = 0$.

Доказательство теоремы 1, приведённое в работе [10], основывается на решении соответствующей экстремальной задачи. Дадим другое её

Доказательство. Так как (2) – положительно определённая квадратичная форма, то корректно задан регулярный пучок $A_K - \mu K$ квадратичных форм [14, гл. 10, § 6], где μ – числовой параметр. Пусть $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ – характеристические числа этого пучка [14, гл. 10, § 6], т.е. корни уравнения

$$\det(A_K - \mu K) = 0 \quad (6)$$

(все корни этого уравнения вещественные [14, гл. 10, § 6]). Тогда, согласно [14, гл. 10, § 7], имеет место равенство

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} = \mu_n. \quad (7)$$

Так как отношение $x^T A_K x / x^T K x$ квадратичных форм на любой прямой, проходящей через начало координат, принимает, за исключением точки $x = 0$, одно и то же значение (вообще говоря, своё для каждой прямой), то

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} = \max_{V(x)=V_0>0} \frac{\dot{V}_{(1)}(x)}{V(x)} = \delta. \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) заключаем, что $\mu_n = \delta$, а значит, так как μ_n – корень уравнения (6), справедливо равенство (4).

По условию теоремы 1 квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1), поэтому квадратичная форма (3) отрицательно определена, а значит, $\mu_n = \delta < 0$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы остаётся установить справедливость неравенства $\delta \geq 2 \max_{i=\overline{1, n}} \text{Re } \lambda_i$. Пусть, без нарушения общности, вещественная часть собственного значения λ_n матрицы A не меньше, чем вещественные части остальных её собственных значений. Могут представиться только два случая: 1) $\text{Im } \lambda_n = 0$; 2) $\text{Im } \lambda_n \neq 0$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

В случае 1) обозначим через $y \in \mathbb{R}^n$ собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ_n . Тогда $Ay = \lambda_n y$ и $y^T A^T = \lambda_n y^T$. Поэтому верно равенство

$$y^T A_K y = y^T (A^T K + K A) y = \lambda_n (y^T K y + y^T K y) = 2 \lambda_n y^T K y,$$

в силу которого получаем оценку

$$\delta = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} \geq \frac{y^T A_K y}{y^T K y} = \frac{2\lambda_n y^T K y}{y^T K y} = 2\lambda_n = 2 \operatorname{Re} \lambda_n.$$

В случае 2) собственному значению $\lambda_n = \alpha + i\beta$ матрицы A отвечает в пространстве $\mathbb{C}^n$ собственный вектор $y = y_1 + iy_2$, где $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. Раскрывая в равенстве $A(y_1 + iy_2) = (\alpha + i\beta)(y_1 + iy_2)$ скобки и отделяя вещественную и мнимую части, получаем $Ay_1 = \alpha y_1 - \beta y_2$, $Ay_2 = \beta y_1 + \alpha y_2$ и, следовательно, $y_1^T A^T = \alpha y_1^T - \beta y_2^T$, $y_2^T A^T = \beta y_1^T + \alpha y_2^T$. В силу двух последних соотношений несложно убедиться в том, что имеет место равенство

$$y_i^T A_K y_i = 2\alpha y_i^T K y_i + (-1)^i \beta (y_1^T K y_2 + y_2^T K y_1), \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Выберем тот вектор y_i , для которого второе слагаемое в правой части равенства (9) неотрицательно. Тогда при таком y_i вследствие (9) справедливо неравенство $y_i^T A_K y_i \geq 2\alpha y_i^T K y_i$, в силу которого и положительной определённости квадратичной формы (2) получаем оценку

$$\delta = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} \geq \frac{y_i^T A_K y_i}{y_i^T K y_i} \geq \frac{2\alpha y_i^T K y_i}{y_i^T K y_i} = 2\alpha = 2 \operatorname{Re} \lambda_n.$$

Теорема доказана.

1.2. Заметим, что уравнение (6) может быть записано в виде $P_n(\mu) = 0$, где

$$P_n(\mu) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \dots + a_{n-1} \mu + a_n, \quad (10)$$

$$a_k = (-1)^k (\det K)^{-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \det K^{i_1, i_2, \dots, i_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad a_n = (-1)^n (\det K)^{-1} \det A_K, \quad (11)$$

а матрица $K^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ на одноимённые столбцы матрицы A_K . Коэффициенты (11) многочлена (10) получаются, если раскрыть определитель в (6) и разделить получившийся многочлен на коэффициент при старшей степени μ . Как отмечено в доказательстве теоремы 1, все корни многочлена $P_n(\mu)$ (см. (10)) вещественные [14, гл. 10, § 6].

Предположим, что построена квадратичная форма (2), которая является функцией Ляпунова системы (1). Пусть коэффициенты системы (1) изменились, т.е. система приняла вид

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x, \quad (12)$$

где $\Delta A = (\Delta a_{ij})_{i,j=1}^n$ — постоянная вещественная матрица. Тогда для матрицы $(A + \Delta A)_K$ первой производной $\dot{V}_{(12)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (12) очевидно равенство

$$(A + \Delta A)_K = (A + \Delta A)^T K + K(A + \Delta A) = (A^T K + K A) + ((\Delta A)^T K + K \Delta A) = A_K + (\Delta A)_K.$$

Поэтому величины A_{km} (см. (5)) преобразуются к виду $A_{km} + \Delta A_{km}$, где

$$\Delta A_{km} = \sum_{i=1}^n (K_{im} \Delta a_{ik} + K_{ik} \Delta a_{im}), \quad k, m = \overline{1, n}, \quad (13)$$

уравнение (6) примет вид

$$\det (A_K + (\Delta A)_K - \mu K) = 0, \quad (14)$$

а вместо многочлена (10) получим многочлен

$$P_n^\Delta(\mu) = \mu^n + (a_1 + \Delta a_1) \mu^{n-1} + (a_2 + \Delta a_2) \mu^{n-2} + \dots + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1}) \mu + a_n + \Delta a_n, \quad (15)$$

где Δa_k – сумма произведений всех миноров матрицы $(\Delta A)_K = (\Delta A_{ij})_{i,j=1}^n$ до порядка k включительно на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1, i_2, \dots, i_k}$. В частности, нужный нам в дальнейшем коэффициент Δa_n равен

$$\Delta a_n = \frac{(-1)^n}{\det K} \sum_{p=1}^n \omega_p, \quad (16)$$

здесь

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta A_{ij} A_j^i, \quad \omega_n = \det (\Delta A)_K \quad (17)$$

и

$$\omega_q = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \sum_{j_1 < \dots < j_q} \begin{vmatrix} \Delta A_{i_1, j_1} & \Delta A_{i_1, j_2} & \dots & \Delta A_{i_1, j_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta A_{i_q, j_1} & \Delta A_{i_q, j_2} & \dots & \Delta A_{i_q, j_q} \end{vmatrix} A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_q}, \quad q = \overline{2, n-1}, \quad (18)$$

где A_j^i – алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в матрице A_K , а $A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_q}$ – алгебраическое дополнение минора матрицы A_K , построенного на строках с номерами $i_1, \dots, i_q$ и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_q$. Многочлен (15) и величина (16) получаются, если раскрыть определитель в (14) с учётом равенств (13) и разделить получившийся многочлен на коэффициент при старшей степени μ .

Задача, рассматриваемая в работе, состоит в нахождении условий, которым должны удовлетворять возмущения, чтобы квадратичная функция Ляпунова (2), построенная для системы (1), оставалась функцией Ляпунова и для возмущённой системы (12). В следующем пункте уточним постановку задачи.

2. Об условиях, дающих решение задачи. Функция Ляпунова (2), построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (12), если и только если все собственные значения матрицы $A_K + (\Delta A)_K$ будут отрицательными.

2.1. Так как матрица $A_K + (\Delta A)_K$ симметричная, то все её собственные значения вещественны (см., например, [15, с. 204]). Значит, если у матрицы $A_K + (\Delta A)_K$ все собственные значения отрицательны, то все коэффициенты её характеристического многочлена $P_n^\Delta(\mu)$ положительны, что очевидно следует из формул Виета. Как хорошо известно [16, с. 92], для многочлена с вещественными коэффициентами (все корни которого не обязательно вещественны) условие положительности всех коэффициентов является необходимым условием того, чтобы все корни этого многочлена имели отрицательную вещественную часть, но, вообще говоря, не достаточным для многочленов степени выше двух. В рассматриваемом же нами случае многочлена, все корни которого вещественны, это необходимое условие является и достаточным. Действительно, если все коэффициенты многочлена, имеющего только вещественные корни, положительны, то значения этого многочлена на неотрицательной полуоси положительны, а значит, все его корни лежат на отрицательной полуоси. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (12), если и только если для матрицы ΔA выполняются неравенства $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$.*

Таким образом, чтобы проверить, будет ли квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова системы (1), также и функцией Ляпунова системы (12), нужно в дополнение к найденным положительным коэффициентам a_k , $k = \overline{1, n}$, (см. формулы (11)) найти величины Δa_k , $k = \overline{1, n}$, (см. формулы (16)) и проверить выполнимость неравенств $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Для проверки этого необходимого и достаточного условия нужно вычислить все величины Δa_k , $k = \overline{1, n}$, что связано с большим количеством довольно объёмных вычислений. Можно предложить достаточное условие, для проверки которого требуется вычислить фактически только элемент Δa_n .

Чтобы сформулировать это достаточное условие, рассмотрим, наряду с системой (12), также параметрическое семейство уравнений

$$\dot{x} = (A + \tau \Delta A)x, \quad (19)$$

параметр τ в котором изменяется на отрезке $[0, 1]$, и в которое системы (1) и (12) входят при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ соответственно. Обозначим через $\Delta a_n(\tau)$ величину Δa_n , вычисленную при фиксированном τ для системы (19) по формуле (16), т.е. для системы (19) нужно в формулах (17) и (18) заменить ΔA_{ij} на $\tau \Delta A_{ij}$ и $(\Delta A)_K$ на $(\tau \Delta A)_K$. Тогда очевидно, что величина $\Delta a_n(\tau)$ представляет собой многочлен степени n переменной τ с нулевым свободным членом:

$$\Delta a_n(\tau) = \frac{(-1)^n}{\det K} \sum_{p=1}^n \omega_p \tau^p.$$

Обозначим через $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ многочлен $P_n^{\Delta}(\mu)$ (см. (15)), построенный для системы (19). Свободный член многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ равен $\Delta a_n(\tau) + a_n$ и является многочленом степени n с положительным свободным членом.

Предложение 1. *Если многочлен $\Delta a_n(\tau) + a_n$ при всех $\tau \in [0, 1]$ положителен, то квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет функцией Ляпунова и для системы (12).*

Доказательство. У многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$, поскольку он при любом $\tau \in [0, 1]$ является характеристическим многочленом симметрической матрицы, все корни вещественные. Корни многочлена являются непрерывными функциями его коэффициентов, поэтому корни многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ – непрерывные функции параметра τ . Так как при $\tau = 0$ все корни лежат на отрицательной полуоси, то, если бы при изменении параметра τ от 0 до 1 хотя бы один из корней перешёл на неотрицательную полуось, он, поскольку является непрерывной функцией τ , должен был бы при некотором значении $\tau_0 \in (0, 1]$ стать равным нулю. Но тогда при $\tau = \tau_0$ многочлен $\Delta a_n(\tau) + a_n$, являясь произведением корней многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$, должен равняться нулю, что противоречит условию предложения. Предложение доказано.

2.2. Поставим следующую задачу: для матрицы A найти такое значение $\varepsilon(A) > 0$, чтобы для любой матрицы ΔA , удовлетворяющей неравенству $\|\Delta A\| < \varepsilon(A)$, матрица $A_K + (\Delta A)_K$ была бы невырожденной (а значит, все её собственные значения имели бы отрицательные вещественные части). В приведённой постановке задачи величина $\varepsilon(A)$ зависит от выбора матричной нормы [15, с. 351], но заранее фиксировать эту норму нецелесообразно, а её выбор в каждом конкретном случае должен отдельно оговариваться.

Из теоремы 2 вытекает, что величина $\varepsilon(A)$ равна наибольшему из тех d , при которых для любой матрицы ΔA , принадлежащей открытому шару $\|\Delta A\| < d$, выполняются неравенства $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Из этой задачи на максимум для системы $n+1$ неравенств (содержащей $n^2 + 1$ неизвестных: n^2 элементов матрицы ΔA и величина d) получить в общем случае для величины $\varepsilon(A)$ выражение через элементы матрицы A , по-видимому, довольно сложно, если вообще возможно. Конечно, приведённое выше неравенство $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, можно, как это следует из предложения 1, заменить условием: свободный член $\Delta a_n(\tau) + a_n$ многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ при всех $\tau \in [0, 1]$ положителен. Но, по-видимому, аналитические трудности нахождения величины $\varepsilon(A)$ из этих условий сравнимы с трудностями нахождения этой величины из приведённой выше системы $n+1$ неравенств. Поэтому сформулируем два достаточных условия, решающих данную задачу.

Матрица $A_K + (\Delta A)_K$ будет невырожденной, если норма матрицы возмущения $(\Delta A)_K$ не превосходит радиуса невырожденности [17, с. 118–119] матрицы A_K . Другими словами, имеет место

Лемма. *Если матрица A_K отрицательно определена, то матрица $A_K + (\Delta A)_K$ будет отрицательно определённой при любой матрице $(\Delta A)_K$, удовлетворяющей неравенству*

$$\|(\Delta A)_K\| < \|A_K^{-1}\|^{-1} = \min_{i=\overline{1, n}} |\Lambda_i(A_K)|,$$

где $\Lambda_i(A_K)$ ($i = \overline{1, n}$) – собственные значения матрицы A_K . (Через $\|\cdot\|$ обозначена спектральная норма матрицы [15, с. 357].)

Из леммы очевидно вытекает

Предложение 2. Если матрица A_K отрицательно определена и выполняется неравенство

$$\|\Delta A\| < (2\|K\|)^{-1} \min_{i=\overline{1,n}} |\Lambda_i(A_K)|,$$

то отрицательно определённой будет и матрица $A_K + (\Delta A)_K$.

3. Два частных случая построения квадратичной функции Ляпунова с заданным максимумом на её поверхности уровня первой производной. Пусть квадратичная функция Ляпунова для системы (1) строится в соответствии с методикой работы [11], основанной на переходе к каноническим координатам.

3.1. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) вещественны и различны; без нарушения общности считаем, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Тогда существует линейное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

где B – невырожденная $n \times n$ -матрица, приводящее систему (1) к каноническому виду [1, с. 121]

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1, n}, \quad A = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]. \quad (20)$$

(У матрицы B её k -й столбец является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ_k , $k = \overline{1, n}$.) При этом квадратичные формы (2) и (3) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$ и $\dot{W}_{(20)}(\xi)$, причём (см. [10])

$$\max_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\dot{W}_{(20)}}{W}, \quad \min_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \min_{W=V_0} \frac{\dot{W}_{(20)}}{W}.$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно предполагать, что система (1) имеет канонический вид (20). Тогда равенства (5) примут вид

$$A_{km} = (\lambda_m + \lambda_k)K_{km}, \quad k, m = \overline{1, n},$$

а уравнение (6) запишется следующим образом:

$$\det ((\lambda_k + \lambda_m - \mu)K_{km})_{k,m=1}^n = 0. \quad (21)$$

Построим для системы (1) квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую равенству $\max_{V=V_0>0} \dot{V}_{(20)} = \delta V_0$, где в качестве заранее выбранной величины δ можно взять любое число из полуинтервала $[2\lambda_n, 0)$.

Квадратичную функцию Ляпунова с $\max_{V=V_0>0} \dot{V}_{(20)} = \delta V_0$ зададим следующим образом:

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}\xi_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2, \quad (22)$$

где $K_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$, $K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}$, а $R(\delta) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta)^{-2}$, т.е. матрица K построенной квадратичной формы имеет вид

$$K = \text{diag} \left[K_{11}, \dots, K_{n-2,n-2}, \begin{pmatrix} K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n-1,n} & K_{nn} \end{pmatrix} \right]. \quad (23)$$

Несложно убедиться в том, что при условии $\delta \in [2\lambda_n, 0)$ величина $R(\delta)$ принадлежит полуинтервалу $(0, 1]$, а квадратичные формы с матрицами K и A_K (матрицы A и K определены в (20) и (23)) соответственно положительно и отрицательно определены. Корнями уравнения (21) являются $\mu_1 = 2\lambda_1, \dots, \mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}, \mu_{n-1} = 2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) - \delta, \mu_n = \delta$ (то, что

первые $n - 2$ из этих значений корни уравнения (21), очевидно, в том, что два последних из них корни, проще всего убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (21)). При этом в рассматриваемом случае при выборе матрицы квадратичной формы (23) наибольшим корнем уравнения (21) будет δ .

3.2. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) различны, причём среди корней с наибольшей вещественной частью имеются комплексно-сопряжённые между собой.

Пусть сначала корни $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ характеристического уравнения вещественны и только $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = \max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i$, $\beta \neq 0$. Тогда существует линейное невырожденное преобразование координат, приводящее систему (1) к каноническому виду [1, с. 121]

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad A = \operatorname{diag} \left[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right] \quad (24)$$

(здесь и в аналогичном случае ниже матрицу коэффициентов получившейся после линейной замены координат дифференциальной системы мы обозначаем снова через A). При этом квадратичные формы (2) и (3) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$ и $\dot{W}_{(24)}(\xi)$, причём (см. [10]) справедливы равенства

$$\max_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \max_{W=W_0} \frac{\dot{W}_{(25)}}{W}, \quad \min_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \min_{W=W_0} \frac{\dot{W}_{(25)}}{W}.$$

В этом случае для канонической системы дифференциальных уравнений (24) квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0} \dot{V} = \delta V_0$, можно искать [11] в виде (22), где

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2), \quad C(\delta) = (\delta - 2\alpha)^2\beta^{-2} + 4. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться в том, что корнями уравнения (6) являются $\mu_1 = 2\lambda_1, \dots, \mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}$, $\mu_{n-1} = 4\alpha - \delta$, $\mu_n = \delta$. В рассматриваемом случае при выборе (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет δ .

Пусть теперь среди корней характеристического уравнения имеется, кроме пары $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, ещё одна пара комплексно-сопряжённых корней, скажем, пара $\lambda_{i-1,i} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\beta_1 \neq 0$, а остальные корни вещественные. Тогда линейным невырожденным преобразованием координат система (1) может быть приведена к виду, аналогичному (24), но с матрицей

$$A = \operatorname{diag} \left[\lambda_1, \dots, \lambda_{i-2}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{n-2}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right].$$

Если искать квадратичную функцию Ляпунова для канонической системы в виде (22), где $K_{n-1,n-1}$ и K_{nn} связаны равенством (25), считая коэффициенты $K_{i-1,i-1}$ и K_{ii} равными между собой ($K_{i-1,i-1} = K_{ii}$), то корнями уравнения (6) будут $\mu_1 = 2\lambda_1, \dots, \mu_{i-2} = 2\lambda_{i-2}$, $\mu_{i-1} = 2\alpha_1$, $\mu_i = 2\alpha_1$, $\mu_{i+1} = 2\lambda_{i+1}$, $\mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}$, $\mu_{n-1} = 4\alpha - \delta$, $\mu_n = \delta$. В рассматриваемом случае при выборе (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет также δ .

Случай, когда среди корней характеристического уравнения имеется несколько пар комплексно-сопряжённых корней, рассматривается аналогично.

Таким образом, если наибольшему значению вещественных частей корней характеристического уравнения соответствует пара комплексно-сопряжённых корней, корнями уравнения (6) являются $\mu_1 = 2 \operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \mu_{n-2} = 2 \operatorname{Re} \lambda_{n-2}$, $\mu_{n-1} = 4\alpha - \delta$, $\mu_n = \delta$. И в рассматриваемом случае при выборе согласно (23), (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет δ .

Переходя обратно от канонических переменных к переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, получим квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую заданным ограничениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М., 1966.
3. *Косякин А.А., Шамриков Б.М.* Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983.
4. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
5. *Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А.* Об одном методе нахождения решения матричного уравнения Ляпунова с заданным спектром // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36. № 4. С. 528–531.
6. *Сарыбеков Р.А.* Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 5. С. 1159–1167.
7. *Комаров Ю.А., Хусаинов Д.Я.* Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 750–753.
8. *Пропой А.И.* О проблеме устойчивости движения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 51–60.
9. *Антоновская О.Г., Горюнов В.И.* Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 12–18.
10. *Антоновская О.Г.* О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
11. *Антоновская О.Г.* Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
12. *Антоновская О.Г.* О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1562–1563.
13. *Антоновская О.Г.* Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2 (501). С. 19–23.
14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.
15. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
16. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М., 2014.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 30.01.2020 г.
После доработки 30.12.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.4+517.988.57

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ,
ИМЕЮЩЕЙ НЕЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ РЕШЕНИЯ

© 2023 г. Д. В. Валовик, В. Ю. Мартынова

Исследуется одна нелинейная задача на собственные значения специального вида, возникающая в электродинамике. Задача ставится для системы двух уравнений с краевыми условиями первого рода и двумя дополнительными локальными условиями. Спектральный параметр в задаче один, ещё два параметра появляются в указанных выше локальных условиях, на которые накладывается дополнительное ограничение. Таким образом, в задаче имеются два неизвестных параметра: один спектральный, второй – некоторый дополнительный параметр, который подбирается так, чтобы существовало нетривиальное решение изучаемой задачи. Доказывается существование нелинеаризуемых решений задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030020, EDN: QUAOCW

1. Постановка задачи. Пусть $I = (0, 1)$, $\bar{I} = [0, 1]$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $A = (0, A)$, где $A > 0$ – известная постоянная, λ , A_1 , A_2 – вещественные параметры, a_1 , a_2 , α_1 , $\alpha_2 > 0$ – вещественные постоянные. На протяжении всей статьи индекс j принимает значения 1, 2.

Рассмотрим систему уравнений

$$u_1'' = -(a_1 - \lambda + \alpha_1 u_1^2)u_1, \quad u_2'' = -(a_2 - \lambda + \alpha_2 u_2^2)u_2 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$u_1'|_{x=0} = A_1, \quad u_2'|_{x=0} = A_2, \quad (3)$$

$$u_1|_{x=h} = 0, \quad u_2|_{x=h} = 0 \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2, \quad (5)$$

где $x \in \bar{I}$, $A_j \in A$ и $\lambda, \alpha_j \in \mathbb{R}_+$.

Задача $\mathcal{P}$ состоит в том, чтобы определить такие тройки (λ, A_1, A_2) , для которых существуют (нетривиальные) функции $u_j \equiv u_j(x; \lambda, \alpha_j, A_j)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям (2)–(5), где u_j дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in \bar{I}$.

Замечание 1. Несмотря на то, что функции u_1 , u_2 связаны условием (5):

$$u_1'^2|_{x=0} + u_2'^2|_{x=0} = A^2,$$

уравнения (1) можно изучать отдельно, и поэтому задача $\mathcal{P}$ разбивается на две: задача $\bar{\mathcal{P}}_1$ для функции u_1 и параметров λ , A_1 и задача $\mathcal{P}_2$ для функции u_2 и параметров λ , A_2 , где $\lambda \equiv \lambda(A_1)$ определяется из задачи $\mathcal{P}_1$, параметр A_1 подбирается так, чтобы u_2 удовлетворяло второму уравнению в (1) и соответствующим условиям из (2)–(4); параметр A_2 определяется по формуле

$$A_2(A_1) = \sqrt{A^2 - A_1^2} > 0.$$

Отметим, что поскольку изучаемые уравнения нелинейны относительно искомых функций стандартных краевых условий (например, первого рода) уже недостаточно для определения

дискретных собственных значений. Необходимо использовать дополнительные условия, которые могут быть как локальными, так и нелокальными (нелокальные условия, в частности, возникают при применении вариационных методов). Мы используем локальные дополнительные условия (3).

Обратим внимание читателя на то, что хотя уравнения изучаемой задачи и интегрируются в эллиптических функциях, мы не используем этот факт. В нелинейной оптике (да и в других разделах нелинейной математической физики) возникают более сложные нелинейности, для которых подход на основе эллиптических функций невозможен. В то же время используемый нами подход с некоторыми модификациями может быть применён и к более сложным нелинейностям (необходимо лишь перейти к другой переменной в интеграле и провести необходимые оценки, см., например, [1]).

2. Разрешимость задачи $\mathcal{P}$. Для удобства введём обозначения $v_j = A_j^{-1}u_j$ и $\beta_j^2 = \alpha_j A_j^2$. В этих обозначениях из (1)–(5) имеем систему

$$v_1'' = -(a_1 - \lambda + \beta_1^2 v_1^2)v_1, \quad v_2'' = -(a_2 - \lambda + \beta_2^2 v_2^2)v_2 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad (7)$$

$$v_1'(0) = 1, \quad v_2'(0) = 1, \quad (8)$$

$$v_1(1) = 0, \quad v_2(1) = 0 \quad (9)$$

и с дополнительным условием

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = A^2, \quad (10)$$

где $\beta_j \in B_j = (0, \sqrt{\alpha_j}A)$.

Заметим, что $\beta_j \rightarrow +0$ при $A_j \rightarrow +0$ при фиксированном $\alpha_j > 0$ и наоборот, т.е. $\beta_j \rightarrow +0$ при $\alpha_j \rightarrow +0$ при фиксированном $A_j > 0$. Кроме того, если $A_1 \rightarrow A - 0$, то $\beta_2 \rightarrow +0$ (при фиксированном $\alpha_2 > 0$), а также если $A_2 \rightarrow A - 0$, то $\beta_1 \rightarrow +0$ (при фиксированном $\alpha_1 > 0$).

Фактически задача $\mathcal{P}$ была эквивалентно переформулирована в новых обозначениях. Теперь задача $\mathcal{P}$ состоит в определении троек $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$, для которых существуют (нетривиальные) функции $v_j \equiv v_j(x; \lambda, \beta_j)$, удовлетворяющие системе (6) и условиям (7)–(10), где v_j предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по $x \in \bar{I}$.

Из условий (5), (10) и введённых обозначений видно, что задача $\mathcal{P}$ изучается при условии $\beta_j \in (0, \sqrt{\alpha_j}A)$. Несмотря на это, некоторые вспомогательные результаты этого пункта сформулированы (и доказаны) при условии $\beta_j \in \mathbb{R}_+$.

Для начала найдём первые интегралы уравнений системы (6). Умножив на $2v_j'$ и проинтегрировав по $[0, x]$, имеем

$$v_j'^2 = C_j - (a_j - \lambda)v_j^2 - \frac{\beta_j^2}{2}v_j^4. \quad (11)$$

Используя условия (7) и (8), находим значения $C_1 = C_2 = 1$.

Для исследования задачи $\mathcal{P}$ будет модифицирован метод интегрального характеристического уравнения [1]. Введём новые переменные

$$\tau_j = v_j^2, \quad \eta_j = \frac{v_j'}{v_j}. \quad (12)$$

Ниже используем обозначения τ_j , $\tau_j(x)$, $\tau_j(x; \lambda, \beta_j)$, а также η_j , $\eta_j(x)$, $\eta_j(x; \lambda, \beta_j)$.

В новых обозначениях система (6) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \tau_1' &= 2\tau_1\eta_1, & \eta_1' &= -(\eta_1^2 + a_1 - \lambda + \beta_1^2\tau_1), \\ \tau_2' &= 2\tau_2\eta_2, & \eta_2' &= -(\eta_2^2 + a_2 - \lambda + \beta_2^2\tau_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (11) при условиях (7), (8) принимают вид

$$\frac{\beta_j^2}{2}\tau_j^2 + (\eta_j^2 + a_j - \lambda)\tau_j - 1 = 0. \quad (14)$$

Поскольку $\tau_j \geq 0$, то, выражая τ_j из (14), получаем

$$\tau_j = \frac{-(\eta_j^2 + a_j - \lambda) + \sqrt{(\eta_j^2 + a_j - \lambda)^2 + 2\beta_j^2}}{\beta_j^2}.$$

Подставив найденные соотношения во второе и четвертое уравнения системы (13), имеем

$$\eta'_j = -\sqrt{(\eta_j^2 + a_j - \lambda)^2 + 2\beta_j^2},$$

откуда следует, что $\eta'_j < 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. функция $\eta_j(x)$ монотонно убывает. Из второй формулы (12) видно, что $\eta_j(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда v_j не обращается в нуль. Предположим, что v_j имеет $n_j \geq 0$ нулей $x_{j,i} \in I$, $i = \overline{1, n_j}$, тогда $\eta_j(x)$ имеет n_j точек разрыва $x_{j,i}$, $i = \overline{1, n_j}$. Если $n_j = 0$, то v_j не обращается в нуль при $x \in I$.

Очевидно, что если $v_j(x) \not\equiv 0$, то $v'_j(x_{j,i}) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n_j}$. Действительно, если решение v_j задачи (6) обращается в нуль вместе со своей производной v'_j в какой-то точке, то из классических результатов о (локальном) существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения следует, что $v_j(x) \equiv 0$ [2, с. 73]. Таким образом, все точки разрыва являются точками разрыва второго рода.

Пусть $I_{j,i} = (x_{j,i}, x_{j,i+1})$, где $i = \overline{0, n_j}$, $x_{j,0} = 0$, $x_{j,n_j+1} = 1$; если $n_j = 0$, то $I_{j,0} = I$.

Из условий (7), (8) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \tau_j(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \eta_j(x) = +\infty. \quad (15)$$

Так как $\eta'_j < 0$, то получаем условия

$$\lim_{x \rightarrow x_{j,i}} \tau_j(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_{j,i} \pm 0} \eta_j(x) = \pm\infty, \quad i = \overline{1, n_j}. \quad (16)$$

С учётом (9) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \tau_j(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \eta_j(x) = -\infty. \quad (17)$$

Подчеркнём, что условия (17) выполняются только на решениях задачи $\mathcal{P}$.

Таким образом, функции $\tau_j(x)$ и $\eta_j(x)$ могут быть определены на каждом интервале $I_{j,i}$ как решения уравнений (14) с подходящими условиями, выбранными из (15)–(17).

Теперь рассмотрим уравнение

$$\eta'_j = -w_j(\eta_j; \lambda, \beta_j) \quad (18)$$

на каждом интервале $I_{j,i}$, где

$$w_j(\eta_j; \lambda, \beta_j) \equiv \sqrt{(\eta_j^2 + a_j - \lambda)^2 + 2\beta_j^2} > 0.$$

Введём также обозначение

$$T_j(\lambda, \beta_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda, \beta_j)}. \quad (19)$$

Имеет место следующее

Утверждение 1. Задача Коши (6)–(8) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, её (классическое) решение $v_j \equiv v_j(x; \lambda, \beta_j)$ непрерывно зависит от точки $(x, \lambda, \beta_j) \in \bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, и справедливо равенство

$$n_j T_j(\lambda, \beta_j) + \int_{\eta_j(1)}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda, \beta_j)} = 1, \quad (20)$$

где $n_j \geq 0$ – количество нулей функции $v_j \equiv v_j(x; \lambda, \beta_j)$, поскольку $x \in I$, а $\eta_j(1)$ не обязательно равно $-\infty$.

Доказательство. Учитывая, что $w_j(\eta_j; \lambda, \beta_j) > 0$, интегрируя (18) на каждом интервале $I_{j,i}$, $i = \overline{1, n_j}$, используя условия (15)–(16), приходим к системе

$$\begin{aligned} 0 < x_{j,1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{j,1}(s; \lambda, \beta_j)}, \\ 0 < x_{j,i} - x_{j,i-1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{j,i}(s; \lambda, \beta_j)}, \quad i = \overline{2, n_j}, \\ 0 < 1 - x_{n_j} &= \int_{\eta_j(1)}^{+\infty} \frac{ds}{w_{j,n_j+1}(s; \lambda, \beta_j)}, \end{aligned} \quad (21)$$

подробный вывод которой дан, например, в работе [1].

Заметим, что в (21) правые части конечны, так как левые части конечны. Следовательно, все несобственные интегралы в (21) сходятся. Из этого факта вытекает существование $\eta_j \equiv \eta_j(x)$ на каждом интервале $I_{j,i}$, $i = \overline{1, n_j}$.

Из соотношений (11) следует, что при фиксированных λ , β_j переменная v_j , а значит, и переменная v'_j ограничены.

Учитывая существование функции $\eta_j \equiv \eta_j(x)$ и ограниченность функций v_j и v'_j , приходим к выводу, что функции $v_j(x)$ и $v'_j(x)$ определены для всех $x \in \bar{I}$. Другими словами, доказано, что решение $v_j \equiv v_j(x; \lambda, \beta_j)$ задачи Коши (6)–(8) существует и определено глобально для $x \in \bar{I}$. Единственность этого решения и его непрерывность (и дифференцируемость) по $x \in \bar{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\beta_j \in \mathbb{R}_+$ являются результатом гладкости правых частей уравнений в (6) относительно v_j , λ , β_j [3, с. 178; 4, с. 118].

Суммируя уравнения в (21), имеем

$$\begin{aligned} x_{j,1} + x_{j,2} - x_{j,1} + x_{j,3} - x_{j,2} + \dots + x_{j,n_j} - x_{j,n_j-1} + 1 - x_{j,n_j} = \\ = n_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda, \beta_j)} + \int_{\eta_j(1)}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda, \beta_j)}. \end{aligned}$$

Формулы (20) легко получаются из найденного соотношения. Утверждение доказано.

При условиях (9) и (10) формулы (20) приводят к интегральным характеристическим уравнениям (ИХУ), для которых имеет место следующая

Теорема 1. Тройка $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $\bar{n}_j \geq 0$ такие, что λ , β_1 и β_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\bar{\Phi}_1(\lambda, \beta_1; n_1) \equiv (n_1 + 1)T_1(\lambda, \beta_1) = 1, \quad \bar{\Phi}_2(\lambda, \beta_2; n_2) \equiv (n_2 + 1)T_2(\lambda, \beta_2) = 1 \quad (22)$$

при $n_j = \bar{n}_j$. В этом случае собственные функции $v_j \equiv v_j(x; \lambda, \beta_j)$, соответствующие решению $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$, имеют $\bar{n}_j$ простых нулей $x_{j,i} = iT_j(\lambda, \beta_j) \in I$, где $i = \overline{1, \bar{n}_j}$.

Доказательство. Из формулы (9) видно, что $v_j|_{x=1} = 0$. Так как $\eta'_j < 0$, $\eta_j = v'_j/v_j$, а v_j и v'_j не обращаются в нуль в одной и той же точке, то $\lim_{x \rightarrow 1-0} \eta_j(x) = -\infty$. Теперь ИХУ (22) получаются из формулы (20) при условиях (9) и (10). Заметим, что условия (9) приводят к условиям (17).

Из доказательства утверждения 1 следует, что любое решение задачи $\mathcal{P}$ удовлетворяет системе (22) при некотором $n_j = \bar{n}_j$.

Тот факт, что любое решение λ , β_1 , β_2 уравнений (22) является решением $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ задачи $\mathcal{P}$, доказывается аналогично тому, как это сделано в статье [5].

Формула для нулей $x_{j,i}$ собственной функции v_j получается из формул (21). Теорема доказана.

С учётом замечания 1 видно, что любое уравнение системы (22) можно изучать независимо от другого. Докажем несколько фактов о функциях T_j , на которые будем опираться при дальнейших рассуждениях.

Утверждение 2. Для любого фиксированного $\beta_j \in \mathbb{R}_+$ справедливы следующие свойства:

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} T_j(\lambda, \beta_j) = \delta_j, \quad (23)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} T_j(\lambda, \beta_j) = 0, \quad (24)$$

где $\delta = \delta_j(\beta_j)$ является конечной положительной величиной.

Доказательство. Формула (23) получается из следующих рассуждений. Действительно, подынтегральные выражения в (19) положительны на $\mathbb{R}$. Это означает, что $T_j > 0$ и можно найти его максимальное значение, которое обозначим через δ_j . Очевидно, что эти δ_j непрерывно зависят от β_j .

Теперь, используя неравенство

$$\frac{1}{|p| + q} \leq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{|p| + q}, \quad (25)$$

где $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, выясним поведение T_j при $\lambda \rightarrow +\infty$.

В соответствии с (19) и (25) получаем

$$2\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) \leq T_j(\lambda, \beta_j) \leq 2\sqrt{2}\bar{T}_j(\lambda, \beta_j), \quad (26)$$

где

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + a_j - \lambda| + \sqrt{2}\beta_j}. \quad (27)$$

В приведённых ниже расчётах используется обозначение $s_* = \sqrt{\lambda - a_j}$, где предполагается, что $\lambda > a_j + \sqrt{2}\beta_j$. Таким образом, имеем

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \int_0^{s_*} \frac{ds}{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j - s^2} + \int_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j)} = I_1 + I_2,$$

следовательно,

$$2(I_1 + I_2) \leq T_j(\lambda, \beta_j) \leq 2\sqrt{2}(I_1 + I_2) \quad (28)$$

при условии $\lambda > a_j + \sqrt{2}\beta_j$.

Вычислим интегралы I_1 и I_2 :

$$I_1 = \int_0^{s_*} \frac{ds}{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j - s^2} = \frac{2 \ln(\sqrt{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j} + \sqrt{\lambda - a_j}) - \ln(\sqrt{2}\beta_j)}{2\sqrt{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j}}, \quad (29)$$

$$I_2 = \int_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j)} = \frac{2 \ln(\sqrt{\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j} + \sqrt{\lambda - a_j}) - \ln(\sqrt{2}\beta_j)}{2\sqrt{\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j}}. \quad (30)$$

После элементарных преобразований находим, что

$$I_1 = O\left(\frac{\ln \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{и} \quad I_2 = O\left(\frac{\ln \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (31)$$

для достаточно больших положительных λ . Очевидно, что $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_j = 0$.

Учитывая неравенство (28), из формул (31) следует, что условие (24) справедливо при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим случай $\lambda \rightarrow -\infty$. Если $\lambda < 0$, то из (27) находим

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + a_j + |\lambda| + \sqrt{2}\beta_j}. \quad (32)$$

Интеграл (32) вычисляется точно:

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \frac{\pi}{2\sqrt{|\lambda| + a_j + \sqrt{2}\beta_j}}. \quad (33)$$

Учитывая неравенство (26), из формулы (33) следует, что (24) имеет место при $\lambda \rightarrow -\infty$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Пусть $\delta_j(\beta_j) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} T_j(\lambda, \beta_j)$, где $\beta_j \in \mathbb{R}_+$. Справедливо следующее равенство:

$$\lim_{\beta_j \rightarrow +0} \delta_j(\beta_j) = +\infty. \quad (34)$$

Доказательство. Пусть $\lambda = a_j$. Тогда, очевидно, $T_j(a_j, \beta_j) \leq \delta_j(\beta_j)$. Учитывая (26) и вычисляя T_j и $\bar{T}_j$ при $\lambda = a_j$, получаем неравенства

$$2\bar{T}_j(a_j, \beta_j) \leq T_j(a_j, \beta_j) \leq \delta_j(\beta_j), \quad (35)$$

где

$$\bar{T}_j(a_j, \beta_j) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2}\beta_j} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{\beta_j}}. \quad (36)$$

Из (36) следует, что $\lim_{\beta_j \rightarrow +0} \bar{T}_j(a_j, \beta_j) = +\infty$. Формулы (35) и (36) подразумевают выполнение (34). Утверждение доказано.

Используя утверждение 2, можно получить следующее

Утверждение 4. Для любого $\beta_j \in \mathbb{R}_+$ существует целое число $n_j^0 \geq 0$ такое, что уравнение $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$ имеет хотя бы одно отрицательное $\lambda = \lambda_{-n_j}$ и одно положительное $\lambda = \lambda_{n_j}$ решения для любых $n_j = n_j^0, n_j^0 + 1, \dots$, где $\lambda_{\pm n_j}$ зависит от β_j и n_j . Кроме того,

$$\lim_{n_j \rightarrow +\infty} \lambda_{\pm n_j} = \pm\infty.$$

Доказательство. Действительно, всегда существует целое число n_j^0 такое, что $(n_j + 1)\delta_j > 1$ при $n_j = n_j^0, n_j^0 + 1, \dots$ (см. формулу (23)). В то же время в соответствии с формулой (24) имеем $(n_j + 1)T_j(\lambda, \beta_j) \rightarrow +0$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ для любых $n_j = n_j^0, n_j^0 + 1, \dots$. Из этого следует, что уравнение $\bar{\Phi}_j = 1$ имеет по крайней мере два решения $\lambda = \lambda$ при каждом $n_j = n_j^0, n_j^0 + 1, \dots$. Очевидно, начиная с некоторого целого числа $n_j' \geq n_j^0$, эти два решения имеют разные знаки. Рис. 1 объясняет этот факт с геометрической точки зрения. Утверждение доказано.

Итак, рассмотрим функцию

$$\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j).$$

Далее важно изучить, что происходит с решением $\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j)$ уравнения $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$ при $\beta_j \rightarrow +0$.

Утверждение 5. Пусть $\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j)$ – решение уравнения $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$. Существует целое число $n_j' \geq 0$ такое, что справедлива формула

$$\lim_{\beta_j \rightarrow +0} \lambda(\beta_j; n_j) = +\infty \quad (37)$$

для каждого $n_j = n_j', n_j' + 1, \dots$

Доказательство. С учётом оценок (26) и (28) необходимо проанализировать результаты расчётов (29) и (30). Из (29) и (30) легко видеть, что I_1 и I_2 увеличиваются при уменьшении $\beta_j > 0$. Таким образом, чем меньше положительные β_j , тем больше становится (положительное) λ , что доказывает (37). Утверждение доказано.

Результаты утверждения 5 можно сформулировать без введения целого числа n_j' . В самом деле, свойство (37) характеризует решения $\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j)$ уравнения $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$, которые не связаны с решениями соответствующей линейной задачи при $\beta_j \rightarrow +0$. Говоря о соответствующей линейной задаче, имеем в виду ИХУ $\bar{\Phi}_j(\lambda, 0; n_j) = 1$, где $\lambda \in (-\infty, a_j)$, отвечающее линейной задаче при $\beta_j = 0$, т.е. (линейной) задаче Штурма–Лиувилля для уравнения $u_j'' = -(a_j - \lambda)u_j$ при условиях $u_j(0) = u_j(1) = 0$.

Другой момент, который следует отметить, заключается в следующем. В утверждении 5 говорится только о положительных решениях. Из оценок (26) и (28) и расчётов (32), (33) можно заметить, что при $a_j > 0$ свойство (37) не выполняется для всех отрицательных λ . При этом если брать отрицательные a_j , то свойство (37) будет выполняться лишь для конечного числа отрицательных λ .

Основной результат этой работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2 (о разрешимости задачи $\mathcal{P}$). Для любого конечного целого числа $n > 0$ существуют не менее n решений $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ задачи $\mathcal{P}$, где $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из (10).

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ – решение первого уравнения системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$. Пусть $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – минимальное и максимальные значения $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ при $\beta_1 \in (0, \sqrt{\alpha_1}A)$. Ранее было показано, что $\lim_{\beta_1 \rightarrow +0} \lambda(\beta_1; \bar{n}_1) = +\infty$. Это означает, что $\lambda_{\max} = +\infty$.

Заметим, что функция $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ не обязательно непрерывна относительно β_1 для всех $\beta_1 \in (0, \sqrt{\alpha_1}A)$. Более того, функция $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ может не существовать для некоторых интервалов $(\beta_1', \beta_1'') \subset (0, \sqrt{\alpha_1}A)$. Все это легко видеть из рис. 1.

Тот факт, что $\lambda_{\max} = +\infty$, даёт возможность выбрать $\lambda_{\min}$ следующим образом. Пусть интервал $(0, \beta_1^0)$, где $\beta_1^0 \leq \sqrt{\alpha_1}A$, является максимальным интервалом, для которого функция $\lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ непрерывна относительно $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$, и пусть $\lambda'_{\min}$ – минимальное значение $\lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ при $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$. Заметим, что $\beta_1^0 > 0$ всегда существует. Геометрическая интерпретация приведённого выше рассуждения показана на рис. 2.

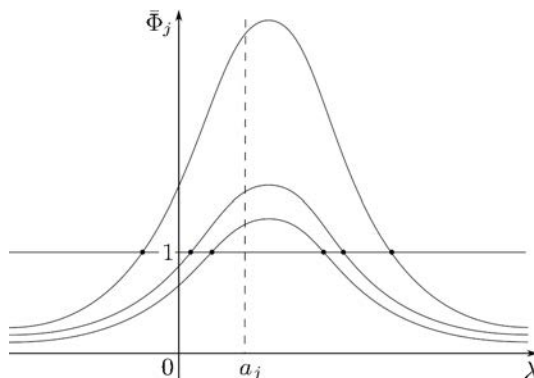


Рис. 1. Геометрический смысл доказательства утверждения 4.

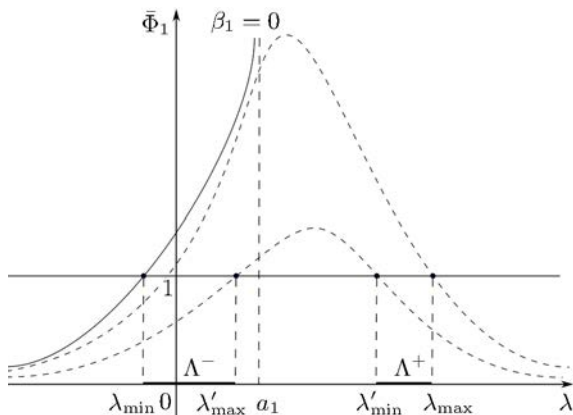


Рис. 2. Графики зависимости $\bar{\Phi}_1$ от λ для различных значений β_1 и фиксированного n_1 . Сплошная кривая соответствует линейному случаю, т.е. $\beta_1 = 0$; верхняя штриховая кривая соответствует β_1 вблизи $+0$, нижняя — $\beta_1 = \sqrt{a_1}A$. Интервал $(\lambda_{\min}, \lambda'_{\max})$ всегда остаётся ограниченным, интервал $(\lambda'_{\min}, \lambda_{\max})$ можно сделать сколь угодно большим.

существует $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$ такое, что для $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ верно равенство $T_2(\lambda, \beta_2) = 1$. Таким образом, найдено решение $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = 0$.

Второй случай. Если $T_{\max} < 1$, то существует целое число $\bar{n}_2$ такое, что

$$(\bar{n}_2 + 1)T_{\min} < 1 < (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}.$$

Теперь, применяя рассуждения, которые использовали выше, заключаем, что существует $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$ такое, что для $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ верно равенство $(\bar{n}_2 + 1)T_2(\lambda, \beta_2) = 1$. Таким образом, находим решение $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = \bar{n}_2$.

При этом случай $T_{\min} > 1$ невозможен. Действительно, $T_j \rightarrow +0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и при фиксированном $\beta_j > 0$, т.е. чтобы получить “маленькие” $T_{\min}$ нужно использовать достаточно

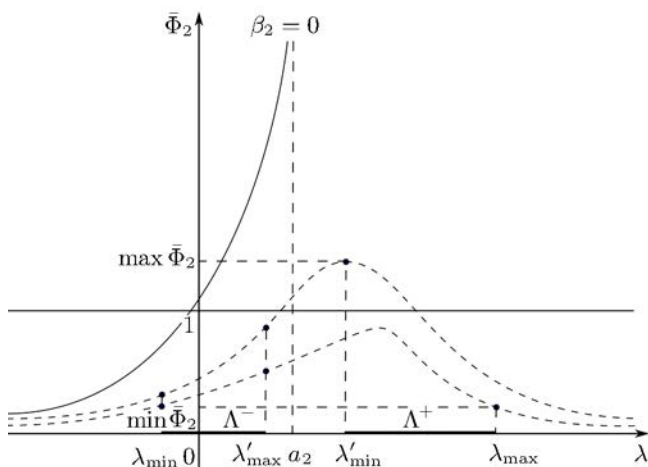


Рис. 3. Графики зависимости $\bar{\Phi}_2$ от λ для различных значений $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ и фиксированного $\bar{n}_2$. Сплошная кривая соответствует линейному случаю, т.е. $\beta_2 = 0$; две штриховые кривые соответствуют минимально возможному $\beta_2 = \beta_2|_{\beta_1=\beta_1^0}$ (с максимумом, большим единицы) и максимально возможному $\beta_2 = \beta_2|_{\beta_1=0}$ (с максимумом, меньшим единицы).

Теперь покажем, что можно выбрать удовлетворяющие (10) $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ такие, что второе уравнение в системе (22) выполняется при некотором $n_2 = \bar{n}_2$.

Подставив $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$, где β_2 определяется из условия (10) и $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$, в $T = T_2(\lambda(\beta_1; \bar{n}_1), \beta_2(\beta_1))$, оценим его минимальные и максимальные значения.

Итак, пусть

$$T_{\min} = \min_{\beta_2(\beta_1)} T_2(\lambda(\beta_1; \bar{n}_1), \beta_2(\beta_1))$$

и

$$T_{\max} = \max_{\beta_2(\beta_1)} T_2(\lambda(\beta_1; \bar{n}_1), \beta_2(\beta_1))$$

при $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$; в данном случае $\lambda(\beta_1; \bar{n}_1) \in (\lambda'_{\min}, \lambda_{\max})$.

Возможен один из двух случаев.

Первый случай. Если $T_{\min} < 1 < T_{\max}$, то в силу непрерывной зависимости λ и β_2 от β_1 и непрерывной зависимости T_2 от λ и β_2 суще-

ствует $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$ такое, что для $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ верно равенство $T_2(\lambda, \beta_2) = 1$.

Таким образом, находим решение $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = 0$.

Второй случай. Если $T_{\max} < 1$, то существует целое число $\bar{n}_2$ такое, что

$$(\bar{n}_2 + 1)T_{\min} < 1 < (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}.$$

Теперь, применяя рассуждения, которые использовали выше, заключаем, что существует $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$ такое, что для $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ верно равенство $(\bar{n}_2 + 1)T_2(\lambda, \beta_2) = 1$. Таким образом, находим решение $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = \bar{n}_2$.

При этом случай $T_{\min} > 1$ невозможен. Действительно, $T_j \rightarrow +0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и при фиксированном $\beta_j > 0$, т.е. чтобы получить “маленькие” $T_{\min}$ нужно использовать достаточно

большие $\lambda = \lambda(\beta_1, n_1)$. Как показано выше, $\lambda = \lambda(\beta_1, n_1) \rightarrow +\infty$ при $\beta_1 \rightarrow +0$. Однако в этом случае β_2 не стремится к нулю, и, следовательно, можно утверждать, что при достаточно больших λ функцию T_2 можно сделать меньше единицы. Таким образом, получаем либо первый случай, либо второй. Геометрическая интерпретация приведённого выше рассуждения показана на рис. 3.

Как сказано в утверждении 4, если рассматривать какое-либо уравнение $\bar{\Phi}_j = 1$ отдельно от второго, то можно утверждать, что оно имеет по крайней мере два решения λ для любых возможных n_j , начиная с некоторого n_j^0 . Очевидно также, что при больших n_j эти два решения имеют разные знаки. Интересно понять, можно или нет доказать существование по крайней мере двух решений для каждого случая, в котором существует одно решение. Главный факт, который помог

нам доказать существование решений задачи $\mathcal{P}$, заключается в том, что интервал $(\lambda'_{\min}, \lambda'_{\max})$ можно сделать сколь угодно большим (см. рис. 2), и он играет ключевую роль для исследования второго уравнения системы (22). Действительно, это позволяет доказать, что функцию T_2 можно сделать меньше любого фиксированного значения при достаточно больших $\lambda \in (\lambda'_{\min}, \lambda'_{\max})$. В то же время интервал $(\lambda_{\min}, \lambda'_{\max})$, содержащий второе решение уравнения $\Phi_1 = 1$ (рассматриваемое отдельно от другого уравнения), нельзя выбрать так, чтобы его длина превышала всякое наперёд заданное число (см. рис. 3). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1 (о разрешимости задачи $\mathcal{P}$). Для любого конечного целого числа $n > 0$ существует не менее n решений (λ, A_1, A_2) задачи $\mathcal{P}$, где $A_2 = A_2(A_1)$ определяется из (5).

В классической (линейной) теории Штурма–Лиувилля широко используется понятие характеристической функции [6, с. 33]. В случае задачи $\mathcal{P}$ характеристическая функция может быть введена аналогичным образом.

Имеем следующее

Утверждение 6. Любая тройка $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in V_j$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе

$$v_1(1; \lambda, \beta_1) = 0, \quad v_2(1; \lambda, \beta_2) = 0, \quad (38)$$

где $v_j(x; \lambda, \beta_j)$ являются решениями задачи Коши (6)–(8), а $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из условия (10).

Доказательство. Пусть $v_j = v_j(x; \lambda, \beta_j)$ – решение задачи Коши (6)–(8), где $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из формулы (10). Если тройка $\lambda, \beta_1, \beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ удовлетворяет (38), то, очевидно, тройка $(\lambda, \beta_1, \beta_2(\beta_1))$ является решением задачи $\mathcal{P}$ и $v_j(x; \lambda, \beta_j)$ – собственные функции.

Пусть тройка $\lambda = \bar{\lambda}^* \in \mathbb{R}$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^* \in V_1$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$ – решение (38). Рассмотрим задачу Коши (6)–(8), где $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, а $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*$ определяется из (10) при $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$. Согласно утверждению 1 нетривиальное решение $v_j = v_j(x; \bar{\lambda}^*, \bar{\beta}_j^*)$ этой задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от точки $(x, \lambda, \beta_j) \in \bar{I} \times \mathbb{R} \times V_j$. Если (38) выполняется для $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$ для этого решения задачи Коши, то тройка $(\bar{\lambda}^*, \bar{\beta}_1^*, \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*))$ является решением задачи $\mathcal{P}$. Предположим, что для этого решения задачи Коши система (38) не выполняется при $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$. Следовательно, существует неединственное решение задачи Коши (6)–(8), где $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$; для одного из них (38) выполняется, а для другого нет. Этот вывод противоречит утверждению 1. Поэтому предположение о существовании решения задачи Коши (6)–(8), для которой (38) не выполняется, неверно. Утверждение доказано.

Используя теорему 1 и утверждение 6, получаем следующий результат.

Следствие 2. Любое решение $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in V_j$ ИХУ (22), где $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из (10), является решением (38) и наоборот.

Объединяя утверждения 2, 3, 5, теорему 2 и следствие 2, получаем

Следствие 3. Для любого целого числа $n > 0$ задача $\mathcal{P}$ имеет не менее n решений $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$v_1(1; \lambda - \delta, \beta_1) \cdot v_1(1; \lambda + \delta, \beta_1) < 0, \quad v_2(1; \lambda - \delta, \beta_2) \cdot v_2(1; \lambda + \delta, \beta_2) < 0,$$

где $v_j(x; \lambda, \beta_j)$ являются решениями задачи Коши (6)–(8), $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из (10), $\delta > 0$ – достаточно малая постоянная такая, что интервал $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ не содержит какого-либо другого решения λ .

Стоит заметить, что вопрос о существовании нелинеаризуемых решений в нелинейных задачах зависит от используемых дополнительных условий.

3. Физический смысл задачи $\mathcal{P}$. Пусть $\Sigma := \{(x, y, z) : 0 < x < 1, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – плоский диэлектрический волновод, расположенный в декартовой системе координат $Oxyz$. На границах $x = 0$, $x = 1$ волновод имеет идеально проводящие экраны.

Задача $\mathcal{P}$ описывает распространение двух ТЕ-волн в нелинейном волноводе Σ , которые связаны условием (5). Одна из волн гармонически зависит от переменной z , а вторая – от y .

Введём электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которое представляет собой сумму двух ТЕ-волн $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, распространяющихся в волноводе Σ , где $\omega > 0$ – круговая частота,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= (0, E_y(x)e^{i\gamma z}, 0)^T, & \mathbf{E}_2 &= (0, 0, E_z(x)e^{i\gamma y})^T, \\ \mathbf{H}_1 &= (H_{x1}(x)e^{i\gamma z}, 0, H_z(x)e^{i\gamma z})^T, & \mathbf{H}_2 &= (H_{x2}(x)e^{i\gamma y}, H_y(x)e^{i\gamma y}, 0)^T,\end{aligned}\quad (39)$$

γ – вещественная постоянная распространения ТЕ-волн. Электромагнитная монохроматическая ТЕ-волна – это волна, имеющая конфигурацию, определяемую формулой $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)e^{-i\omega t}$ или $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)e^{-i\omega t}$, где электрическая и магнитная компоненты электромагнитного поля определены формулами (39).

Диэлектрическая проницаемость внутри волновода описывается диагональным тензором

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 + \beta_1 E_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 + \beta_1 E_z^2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 1$, $\beta_1 > 0$ – вещественные постоянные, $\star$ – элемент тензора, не влияющий на распространение волн. Такой тензор соответствует тензорной нелинейности Керра [7, с. 162]. Скалярный случай нелинейности Керра является основным нелинейным законом в нелинейной оптике [8, 9], а также возникает в других областях нелинейной математической физики [10, 11]. В связи с тем, что основная задача носит векторный характер, логично использовать тензорную нелинейность.

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (40)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Таким образом, поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям (40) и касательные компоненты $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ обращаются в нуль на идеально проводящих экранах ($x = 0$, $x = 1$).

Подставляя (39) в уравнения Максвелла (40), получаем

$$E_y'' = \gamma^2 E_y - k_0^2(\varepsilon_1 + \beta_1 E_y^2)E_y, \quad E_z'' = \gamma^2 E_z - k_0^2(\varepsilon_2 + \beta_1 E_z^2)E_z, \quad (41)$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}H_{x1} &= -\gamma(\omega\mu_0)^{-1}E_y, & H_y &= -(i\omega\mu_0)^{-1}E_z', \\ H_{x2} &= \gamma(\omega\mu_0)^{-1}E_z, & H_z &= (i\omega\mu_0)^{-1}E_y'.\end{aligned}$$

На границах $x = 0$, $x = 1$ имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}E_y|_{x=0} &= 0, & E_z|_{x=0} &= 0, \\ E_y'|_{x=0} &= A_1, & E_z'|_{x=0} &= A_2, \\ E_y|_{x=1} &= 0, & E_z|_{x=1} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, условия (3) имеют ясный физический смысл – это значение одной из компонент поля на границе волновода (условие вполне естественное с точки зрения теории волноводов). Кроме того, будем считать, что квадрат модуля магнитного поля является фиксированной величиной, т.е. имеют место равенства

$$|\mathbf{H}|^2|_{x=0} = \frac{(E_y')^2 + (E_z')^2}{\omega^2\mu_0^2} \Big|_{x=0} = -\frac{A^2}{\omega^2\mu_0^2}.$$

Используя обозначения $u_1 = E_y$, $u_2 = E_z$, $\gamma^2 = \lambda$, $a_j = k_0^2\varepsilon_j$, $\alpha_j = k_0^2\beta_j$, из (41) получаем систему (6). Сформулированная физическая задача о распространении волн эквивалентна задаче $\mathcal{P}$. Подобная задача была рассмотрена в работе [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-00020).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurseeva V.Yu., Moskaleva M.A., Valovik D.V.* Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: linearisable and non-linearisable solutions // *Asymptot. Anal.* 2020. V. 119. № 1–2. P. 39–59.
2. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
5. *Валовик Д.В.* Исследование одной нелинейной задачи на собственные значения методом интегрального характеристического уравнения // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 2. С. 175–189.
6. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
7. *Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D.* Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves / Eds. H.-E. Ponath and G.I. Stegeman. Amsterdam; London; New York; Tokyo, 1991.
8. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
9. *Boyd R.W.* Nonlinear Optics. New York; London, 2003.
10. *Fibich G.* The Nonlinear Schrödinger Equation. Cham; Heidelberg; New York; Dordrecht; London, 2015.
11. *Cazenave T.* Semilinear Schrödinger equations // *Courant lecture notes in mathematics of American Mathematical Society.* V. 10. 2003.
12. *Мартынова В.Ю.* Распространение гибридных ТЕ-ТЕ-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой // *Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки.* 2021. № 4 (60). С. 27–45.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.25

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. Н. Б. Керимов

Исследуются спектральные свойства дифференциального оператора L_0 , порождённого дифференциальным выражением $l_0(y) = (-1)^m y^{2m} + q(x)y$, $0 < x < 1$, и краевыми условиями $y^{(s)}(1) - y^{(s)}(0) = 0$ ($s = \overline{0, 2m-1}$), где $m \in \mathbb{N}$, $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1^+(0, 1) = \{q(x) \in L_1(0, 1) : \int_0^1 q(t)e^{-2\pi ikt} dt = 0, k \leq 0\}$.

DOI: 10.31857/S0374064123030032, EDN: QUDPJS

1. Введение. Постановка задачи. Известно [1; 2; 3, гл. XIX], что система корневых функций дифференциального оператора произвольного чётного порядка с усиленно регулярными краевыми условиями образует безусловный базис пространства L_2 .

В работе [4] доказано, что система корневых функций дифференциального оператора чётного порядка с не усиленно регулярными краевыми условиями образует базис в пространстве L_2 . Существуют примеры дифференциальных операторов с не усиленно регулярными краевыми условиями, системы корневых функций которых не образуют базис в пространстве L_2 (см., например, [2, 5, 6]).

Через L обозначим дифференциальный оператор

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y' - (-1)^\sigma y'(0) = 0, \quad y(1) - (-1)^\sigma y(0) = 0, \quad (2)$$

где $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0, 1)$ и $\sigma = 0, 1$. Отметим, что краевые условия (2) (так называемые периодические и антипериодические краевые условия) регулярны, но не усиленно регулярны.

В статьях [7–10] исследованы различные спектральные свойства оператора (1), (2) при $\sigma = 0$. В основном в этих работах рассматриваются такие комплекснозначные потенциалы $q(x)$, что соответствующие системы корневых функций содержат конечное число присоединённых функций (для дифференциальных операторов высокого порядка см., например, [11–15]).

Базисность в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора с не усиленно регулярными краевыми условиями (особенно в случае, когда система корневых функций содержит бесконечное число присоединённых функций) исследована сравнительно мало.

В [16] была изучена одна неклассическая задача распространения тепла в однородном стержне. Методом разделения переменных она сводится к краевой задаче

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1),$$

краевые условия которой являются регулярными, но не усиленно регулярными. Все собственные значения этой задачи, начиная со второго, двукратны, а общее число присоединённых функций бесконечно. Тем не менее в работе было установлено, что специальным образом выбранная система корневых функций образует безусловный базис в $L_2(0, 1)$.

В работе [17] исследуются спектральные свойства дифференциального оператора (1), (2) при $q(x) = Ae^{2\pi irx}$, где $A \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ – произвольные ненулевые постоянные. Установлено,

что система корневых функций оператора L содержит бесконечное число присоединённых функций. Доказано, что специальным образом выбранная система корневых функций этого оператора образует базис пространства $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, причём при $p = 2$ этот базис является безусловным.

Отметим также статьи [18] и [19], посвящённые исследованию спектральных свойств некоторых несамосопряжённых дифференциальных операторов и операторов с периодическими коэффициентами.

Пусть $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_2(0, 1)$ и

$$q_k = \int_0^1 q(t) e^{-2\pi i k t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Класс $L_1^+(0, 1)$ определим следующим образом:

$$L_1^+(0, 1) = \{q(x) \in L_1(0, 1) : q_k = 0, \quad k \leq 0\}.$$

В дальнейшем через L_0 будем обозначать дифференциальный оператор, порождённый дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^m y^{(2m)} + q(x)y, \quad (3)$$

заданным на интервале $(0, 1)$, и краевыми условиями

$$y^{(s)}(1) - y^{(s)}(0) = 0, \quad s = \overline{0, 2m-1}, \quad (4)$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $q(x)$ – произвольная функция из класса $L_1^+(0, 1)$.

Данная работа посвящена исследованию спектральных свойств (структуры) множества собственных значений и системы корневых функций, базисных свойств в пространствах $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, дифференциального оператора L_0 при условии $q(x) \in L_1^+(0, 1)$.

2. Основные результаты. Введём некоторые обозначения. Пусть $\{T_{2n}\}_{n=1}^{n=\infty}$ – произвольная фиксированная числовая последовательность, $\nu(l) = (\nu_1, \dots, \nu_e) \in \mathbb{Z}^l$,

$$\mathbb{Z}_k^l(r) = \{\nu(l) \in \mathbb{Z}^l : k > \nu_1 > \dots > \nu_l > r, \quad |\nu_j| \neq n, \quad j = \overline{1, l}\},$$

$$A_{k,n} = q_{k-n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(r)} \frac{q_{k-\nu_1} \dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \dots (n^{2m} - \nu_l^{2m})}, \quad (5)$$

$$B_{k,n} = q_{k-n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(r)} \frac{q_{k-\nu_1} \dots q_{\nu_{l-1}-k_e} q_{\nu_l+n}}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \dots (n^{2m} - \nu_l^{2m})}, \quad (6)$$

$$B_n = B_{n,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : B_n = 0\}, \quad \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}/\mathbb{N}_1, \quad (8)$$

$$\Phi_{k,1}^{(n)} = \frac{A_{k,n}}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m})}, \quad k \geq n+1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (9)$$

$$\Phi_{k,2}^{(n)} = \frac{A_{k,n}}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m})}, \quad k \geq -n+1, \quad k \neq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

$$\Phi_{k,1}(n) = 0, \quad \Phi_{n,1}(n) = 1, \quad k < n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (11)$$

$$\Phi_{k,2}(n) = 0, \quad \Phi_{n,2}(n) = 0, \quad \Phi_{-n,2}(n) = 1, \quad k < -n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

$$D_k(n) = \left[\Phi_{k,1}^{(n)} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{q_{k-\nu_1} \dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} \Phi_{\nu_l,1}^{(n)}}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \dots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right] \times \\ \times \frac{1}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m})}, \quad k \geq n+1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

$$D_k(n) = 0, \quad k \leq n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

$$\Psi_k(n) = \Phi_{k,1}(n)T_{2n} - \frac{1}{B_n}\Phi_{k,2}(n) + D_k(n), \quad k \geq -n+1, \quad k \neq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

$$\Psi_k(n) = 0 (k < -n+1), \quad \Psi_n(n) = T_{2n}, \quad \Psi_{-n}(n) = -B_n^{-1}, \quad (16)$$

$$W_{2n}(x) = e^{-2\pi i n x} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} \Phi_{k,2}(n)e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

$$u_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,1}(0)e^{2\pi i k x}, \quad (18)$$

$$u_{2n-1}(x) = e^{2\pi i n x} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n)e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (19)$$

$$u_{2n}(x) = W_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (20)$$

$$u_{2n-1}(x) = (-B_n)^{1/2} \left[e^{2\pi i n x} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n)e^{2\pi i k x} \right], \quad k \in \mathbb{N}_2, \quad (21)$$

$$u_{2n}(x) = (-B_n)^{1/2} \sum_{k=-n}^{\infty} \Psi_k(n)e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}_2. \quad (22)$$

Заметим, что согласно (13)–(17) имеет место равенство

$$u_{2n}(x) = T_{2n}u_{2n-1}(x) + (-B_n)^{-1/2}W_{2n}(x) + (-B_n)^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k(n)e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}_2. \quad (23)$$

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ – последовательность всех собственных значений дифференциального оператора L_0 , пронумерованных в порядке возрастания абсолютных величин и без учёта кратностей.

Теорема 1. Пусть $q(x) \in L_1^+(0,1)$. Тогда последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ дифференциального оператора L_0 обладает следующими свойствами:

(а) $\lambda_n = (2\pi n)^{2m}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(б) λ_0 – простое собственное значение, а λ_n – двукратное собственное значение при любом $n \in \mathbb{N}$;

(с) собственному значению λ_0 соответствует собственная функция $u_0(x)$, определённая равенством (18);

(д) при $n \in \mathbb{N}_1$ собственному значению λ_n соответствуют собственная функция $u_{2n-1}(x)$, определённая равенством (19), и собственная функция $u_{2n}(x)$, определённая равенством (20);

(е) при $n \in \mathbb{N}_2$ собственному значению λ_n соответствуют собственная функция $u_{2n-1}(x)$, определённая равенством (21), и присоединённая функция $u_{2n}(x)$, определённая равенством (22).

Теорема 2. Пусть $p \in (1, \infty)$ – произвольное фиксированное число и $q(x) \in L_1^+(0,1)$. Тогда система корневых функций дифференциального оператора L_0 обладает следующими свойствами:

(а) если $|\mathbb{N}_2| < \infty$, то система корневых функций дифференциального оператора L_0 образует базис пространства $L_p(0,1)$, и при $p = 2$ этот базис является безусловным;

(б) если $|\mathbb{N}_2| = \infty$, то специальным образом выбранная система корневых функций дифференциального оператора L_0 образует базис пространства $L_p(0,1)$, и при $p = 2$ этот базис является безусловным.

Теорема 3. Пусть $p \in (1, \infty)$ – произвольное фиксированное число и $|\mathbb{N}_2| = \infty$. Тогда необходимым и достаточным условием базисности в $L_p(0, 1)$ системы корневых функций дифференциального оператора L_0 является существование постоянной C_1 , обеспечивающей для всех $n \in \mathbb{N}_2$ справедливость неравенства

$$|T_{2n}B_n| \leq C_1. \quad (24)$$

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Пусть $q(x) \in L_1^+(0, 1)$ и L_0 – дифференциальный оператор (3), (4).

Лемма 1. Пусть $\Phi_{k,1}(n)$, $\Phi_{k,2}(n)$, $D_k(n)$ – числа, определённые равенствами (9), (10), (13). Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| \leq C_2, \quad \sum_{\substack{k=n+1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| \leq C_1(n), \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |D_{k,n}| \leq C_3, \quad (25)$$

где C_2 , C_3 – некоторые постоянные, а $C_1(n)$ – постоянная, зависящая только от n .

Доказательство. Предположим, что

$$P_{n,s} = \sum_{\nu=n+s}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Пусть $s \geq 2$, $\nu \geq n+s$ и $x \in [\nu-1, \nu]$. Имеем $1/(\nu^{2m} - n^{2m}) \leq 1/(x^{2m} - n^{2m})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_{n,s} &= \sum_{\nu=n+s}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}} \leq \sum_{\nu=n+s}^{\infty} \int_{\nu-1}^{\nu} \frac{dx}{x^{2m} - n^{2m}} = \int_{n+s-1}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m} - n^{2m}} = \\ &= \begin{cases} \int_{s-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m}}, & n=0, \\ \frac{1}{n^{2m-1}} \int_{1+(s-1)/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m} - 1}, & n \geq 1 \end{cases} \leq \begin{cases} \frac{1}{(2m-1)(s-1)^{2m-1}}, & n=0, \\ \frac{1}{n^{2m-1}} \int_{1+(s-1)/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}, & n \geq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2m-1)(s-1)^{2m-1}}, & n=0, \\ \frac{1}{2n^{2m-1}} \ln \left(1 + \frac{2n}{s-1} \right), & n \geq 1 \end{cases} \leq \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$P_{n,s} \geq \frac{1}{s-1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad S \leq 2. \quad (27)$$

Кроме того, заметим, что

$$P_{n,1} = P_{n,2} + \frac{1}{(n+1)^{2m} - n^{2m}} \leq 1 + 1 = 2. \quad (28)$$

Пусть

$$R_0 = \int_0^1 |q(x)| dx. \quad (29)$$

Очевидно, что справедлива оценка

$$|q_k| = \left| \int_0^1 q(x) e^{-2\pi i k x} dx \right| \leq R_0. \quad (30)$$

Заметим, что если $\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(n)$, то $k > \nu_1 \dots \nu_l > n$ и, следовательно, имеет место неравенство $\nu_r \geq n + l - r + 1$, $r = \overline{1, l}$. Отсюда и из (5), (26)–(30) получим соотношения

$$\begin{aligned} |A_{k,n}| &\leq R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml} (\nu_1^{2m} - n^{2m}) \dots (\nu_l^{2m} - n^{2m})} \leq \\ &\leq R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}} (P_{n,1} \dots P_{n,l}) \leq R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml} (l-1)!} = C_4, \end{aligned}$$

где C_4 – некоторая постоянная. Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_{k,n}|}{k^{2m} - n^{2m}} \leq \frac{C_4 P_{n,1}}{(2\pi)^{2m}} \leq \frac{2C_4}{(2\pi)^{2m}} = C_2.$$

Первое из неравенств (25) доказано.

Ввиду (6) и (30) получим

$$\begin{aligned} |B_{k,n}| &\leq R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml} |\nu_1^{2m} - n^{2m}| \dots |\nu_l^{2m} - n^{2m}|} \leq \\ &\leq R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}} \left(\sum_{\nu \neq n}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \right)^l + \sum_{l=2n+2}^{\infty} \frac{R_0^{l+1} E_{k,n}^{(l)}}{(2\pi)^{2ml}}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$E_{k,n}^{(l)} = \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{R_0^{l+1}}{\|\nu_1^{2m} - n^{2m}\| \dots |\nu_l^{2m} - n^{2m}|}.$$

Отсюда в силу (27) вытекает, что для всех $l \geq 2n + 2$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} E_{k,n}^{(l)} &= \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \sum_{\substack{\nu=-n+2 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \dots \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \leq \\ &\leq \left(\sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \right)^{2n} (P_{n,2} \dots P_{n,l-2n}) \leq \left(\sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \right)^{2n} \frac{1}{(l-2n-1)!}. \end{aligned}$$

Следовательно, используя (31), легко получим неравенство $|B_{k,n}| \leq C_2(n)$, $k \geq -n+1$, $k \neq n$, где $C_2(n)$ – некоторая постоянная, зависящая только от n . Тогда ввиду (10) имеем

$$\sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| \leq \frac{C_2(n)}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\substack{\nu=-n+2 \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} = C_1(n).$$

Третье из неравенств (25) доказывается аналогично первому. Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m} - k^{2m})\Phi_{k,1}(n) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (32)$$

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m} - k^{2m})\Phi_{k,2}(n) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,2}(n), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (33)$$

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m} - k^{2m})\Psi_k(n) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{k-\nu} \Psi_\nu(n) + \Phi_{k,1}(n), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Доказательство. Докажем (32). Сходимость ряда в правой части равенства (32) следует из леммы 1 и из (11), (30).

Пусть $k \leq n$. В этом случае в силу (11) равенство (32) равносильно $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) = 0$. Поскольку $q(x) \in L_1^+(0,1)$, то из соотношения $q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) \neq 0$ и (11) следует неравенство $k > \nu \geq n$. Таким образом, (32) справедливо при $k \leq n$.

Пусть $k > n$. Тогда согласно (5), (9) и (11) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) &= q_{k-n} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) = q_{k-n} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q_{k-\nu} \times \\ &\times \left[q_{\nu-n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_\nu^l(n)} \frac{q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right] \frac{1}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m} - \nu^{2m})} = \\ &= q_{k-n} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{q_{k-\nu} q_{\nu-n}}{(2\pi)^{2m(l+1)}(n^{2m} - \nu_1^{2m})} + \\ &+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_\nu^l(n)} \frac{q_{k-\nu} q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2m(l+1)}(n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})(n^{2m} - \nu^{2m})} = \\ &= q_{k-n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_\nu^l(n)} \frac{q_{k-\nu} q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} = (2\pi)^{2m}(n^{2m} - k^{2m})\Phi_{k,1}(n). \end{aligned}$$

Равенство (32) доказано.

Докажем равенство (33). Сходимость ряда в правой части (33) следует из леммы 1 и из (30).

Пусть $k \leq -n$. В этом случае в силу (12) равенство (33) равносильно $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) = 0$. Как и в первом случае из соотношения $q_{k-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) = 0$ и из (12) следует неравенство $k > \nu \geq -n$. Следовательно, (33) справедливо при $k \leq -n$.

Если $k = n$, то (33) равносильно $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) = 0$. Заметим, что согласно (12), (6)–(8) при $n \in \mathbb{N}_1$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) &= q_0 \Phi_{n,2}(n) + q_{2n} \Phi_{-n,2}(n) + \sum_{|\nu| \neq n}^{\infty} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) = \\ &= q_{2n} + \sum_{|\nu| \neq n}^{\infty} q_{n-\nu} \left[q_{\nu+n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in \mathbb{Z}_\nu^l(-n)} \frac{q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l+n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right] \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m} - \nu^{2m})} = B_n = 0. \end{aligned}$$

Пусть $k > -n$ и $k \neq n$. Используя (10), (6) и (12), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) &= q_{k-n} \Phi_{n,2}(n) + q_{k+n} \Phi_{-n,2}(n) + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) = q_{k+n} + \\ &+ \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \left[q_{\nu+n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in Z_{\nu}^l(-n)} \frac{q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu+n}}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right] \frac{1}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu^{2m})} = \\ &= q_{k+n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l) \in Z_{\nu}^l(-n)} \frac{q_{k-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu+n}}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} = (2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m}) \Phi_{k,2}(n). \end{aligned}$$

Равенство (33) доказано.

Сходимость ряда в правой части (33) следует из леммы 1 и из (15), (30). В силу (16), (11) и (12) при $k \leq -n$ равенство (34) равносильно $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Psi_{\nu}(n) = 0$. Как и в предыдущих случаях из соотношения $q_{k-\nu} \Psi_{\nu}(n) \neq 0$ получим $k > \nu \leq -n$. Таким образом, (34) справедливо при $k \leq -n$.

При $k = n$ (34) в силу (11) равносильно равенству

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Psi_{\nu}(n) + 1 = 0. \quad (35)$$

Ввиду (15) и (16) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Psi_{\nu}(n) + 1 &= \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \Psi_{\nu}(n) + 1 - \frac{q_{2n}}{B_n} = \\ &= T_{2n} \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) - \frac{1}{B_n} \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} D_{\nu}(n) + 1 - \frac{q_{2n}}{B_n}. \end{aligned} \quad (36)$$

В силу (11) и (14) имеем

$$\sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,1}(n) = \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} D_{\nu}(n) = 0.$$

Отсюда и из (36) следует равенство

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} q_{n-\nu} \Psi_{\nu}(n) + 1 = 1 - \frac{1}{B_n} \left(q_{2n} + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) \right). \quad (37)$$

С другой стороны, в силу формул (6), (7) и (10) имеем

$$q_{2n} + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} \Phi_{\nu,2}(n) = 0. \quad (38)$$

Равенство (35) является следствием (37) и (38).

Докажем (34) при $k \geq -n+1$, $k \neq n$. В данном случае (34) равносильно равенству

$$(2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m}) \Psi_k(n) = \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{n-\nu} \Psi_{\nu}(n) + T_{2n} q_{k-n} - \frac{1}{B_n} q_{k+n} + \Phi_{k,1}(n).$$

Согласно обозначениям (5)–(15) имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \Psi_{\nu}(n) + T_{2n} q_{k-n} - \frac{1}{B_n} q_{k+n} + \Phi_{k,1}(n) = \\
& = T_{2n} \left(q_{k-n} + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \left(q_{\nu-n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\nu}^l(n)} \frac{q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left. \frac{1}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - \nu^{2m})} \right) - \frac{1}{B_n} \left(q_{k+n} + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \times \right. \\
& \quad \times \left. \left(q_{\nu+n} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\nu}^l(n)} \frac{q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} q_{\nu_l+n}}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right) \frac{1}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - \nu^{2m})} \right) + \\
& \quad + \left(\Phi_{k,1}(n) + \sum_{\substack{\nu=-n+1 \\ \nu \neq n}}^{\infty} q_{k-\nu} \left(\Phi_{\nu,1}(n) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\nu}^l(n)} \frac{q_{\nu-\nu_1} \cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l} \Phi_{\nu_l,1}(n)}{(2\pi)^{2ml} (n^{2m} - \nu_1^{2m}) \cdots (n^{2m} - \nu_l^{2m})} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left. \frac{1}{(2\pi)^{2m} (n^{2m} - \nu^{2m})} \right) = T_{2n} A_{k,n} - \frac{1}{B_n} B_{k,n} + D_k(n) (2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m}) = \\
& = \left(T_{2n} \Phi_{k,1}(n) - \frac{1}{B_n} \Phi_{k,2}(n) + D_k(n) \right) (2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m}) = (2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m}) \Psi_k(n).
\end{aligned}$$

Равенство (34) доказано. Лемма доказана.

Лемма 3. Справедливы следующие оценки:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| = O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad (39)$$

$$\sum_{k=-n+1}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| = O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad (40)$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |D_k(n)| = O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right). \quad (41)$$

Доказательство. Пусть $n \geq 3$ и

$$E(n) = \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{|n^{2m} - \nu^{2m}|}. \quad (42)$$

Заметим, что

$$E(n) = \frac{1}{n^{2m}} + E_1(n) + E_2(n), \quad (43)$$

где

$$E_1(n) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{n^{2m} - \nu^{2m}}, \quad E_2(n) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}}. \quad (44)$$

Если $x \in [\nu, \nu + 1]$, $\nu = \overline{1, n-2}$, то имеем

$$\frac{1}{n^{2m} - \nu^{2m}} \leq \frac{1}{n^{2m} - x^{2m}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{n^{2m} - \nu^{2m}} \leq \sum_{\nu=1}^{n-2} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{n^{2m} - x^{2m}} \leq \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}.$$

Отсюда и из (44) легко вывести неравенство

$$E_1(n) \leq \frac{2 \ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \quad (45)$$

Как и выше, при $x \in [\nu-1, \nu]$, $\nu \geq n+2$, имеем $1/(\nu^{2m} - n^{2m}) \leq 1/(x^{2m} - n^{2m})$, откуда следует неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}} &\leq \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \int_{\nu-1}^{\nu} \frac{dx}{x^{2m} - n^{2m}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2m} - n^{2m}} \leq \\ &\leq \frac{1}{n^{2m-1}} \int_{1+1/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n^{2m-1}} \leq \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (44) приходим к оценке

$$E_2(n) \leq \frac{1}{(n+1)^{2m} - n^{2m}} + \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \leq \frac{2 \ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \quad (46)$$

В силу (42)–(46) имеем

$$E(n) \leq \frac{5 \ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \quad (47)$$

Пусть $n_0 \geq 3$ – фиксированное целое число такое, что при всех $n \geq n_0$ имеют место неравенства

$$\frac{R_0 E(n)}{(2\pi)^{2m}} \leq \frac{5R_0 \ln(n+1)}{(2\pi)^{2m} n^{2m-1}} \leq \frac{1}{2},$$

где R_0 – число, определённое равенством (29). Тогда в силу (5), (9), (42) и (47) при $n \geq n_0$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| &\leq R_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v \in \mathbb{Z}_l^1(n)} \frac{R_0^l}{(2\pi)^{2ml} |n^{2m} - \nu_1^{2m}| \dots |n^{2m} - \nu_l^{2m}|} \right] \frac{1}{(2\pi)^{2m} |n^{2m} - k^{2m}|} \leq \\ &\leq R_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R_0 E(n)}{(2\pi)^{2m}} \right)^l \right] \frac{1}{(2\pi)^{2m} |n^{2m} - k^{2m}|} \leq \frac{2R_0 E(n)}{(2\pi)^{2m}} \leq \frac{10R_0 \ln(n+1)}{(2\pi)^{2m} n^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Оценка (39) доказана.

Оценки (40) и (41) доказываются совершенно аналогично. Лемма доказана.

Лемма 4. Если существует присоединённая функция дифференциального оператора L_0 , соответствующая собственной функции $y_0(x)$, то справедливо равенство $\int_0^1 y_0^2(x) dx = 0$.

Это утверждение доказывается аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [17].

Лемма 5 [17]. Пусть выполнены следующие условия:

a) y_0, y_1 – функции из класса $L_2(0, 1)$ и $\int_0^1 y^2(x) dx = 0$, $\int_0^1 y_0(x)y_1(x) dx = 1$;

b) функции ψ_0 и ψ_1 определены равенствами $\psi_0 = -(\bar{a} + c_0)\bar{y}_0 + \bar{y}_1$, $\psi_1 = \bar{y}_0$, где a – произвольное фиксированное число и $c_0 = \int_0^1 y_1^2(x) dx$.

Тогда справедливы равенства $(y_0, \psi_0) = (ay_0 + y_1, \psi_1) = 1$, $(y_0, \psi_1) = (ay_0 + y_1, \psi_1) = 0$.

Элементы системы $\{\nu_n(x)\}_{n=0}^\infty$ определим следующим образом:

$$\overline{v_0(x)} = u_0(x), \quad \overline{v_{2n-1}(x)} = u_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (48)$$

$$\overline{v_{2n}(x)} = u_{2n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (49)$$

$$\overline{v_{2n-1}(x)} = -T_{2n}^* u_{2n-1}(x) + \frac{1}{(-B_n)^{1/2}} W_{2n}(x) + (-B_n)^{1/2} \sum_{k=n+1}^\infty D_k(n) e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad (50)$$

$$T_{2n}^* = T_{2n} \frac{1}{B_n} \left(\Phi_{0,2}^2(n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k,2}(n) \Phi_{-k,2}(n) \right). \quad (51)$$

Лемма 6. Справедливы асимптотические формулы

$$u_{2n-1}(x) = \overline{v_{2n}(x)} = e^{2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \quad (52)$$

$$u_{2n}(x) = \overline{v_{2n-1}(x)} = e^{-2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \quad (53)$$

$$u_{2n-1}(x) = \overline{v_{2n}(x)} = (-B_n)^{1/2} e^{2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \quad (54)$$

$$u_{2n}(x) = T_{2n}(-B_n)^{1/2} e^{2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right) + \\ + (-B_n)^{-1/2} e^{2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \quad (55)$$

$$\overline{v_{2n-1}(x)} = -T_{2n}(-B_n)^{1/2} e^{2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right) + \\ + (-B_n)^{-1/2} e^{2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty. \quad (56)$$

Доказательство. Формулы (52)–(54) являются простыми следствиями обозначений (17)–(21), (48), (49) и леммы 3.

Докажем формулу (56) (формула (55) доказывается совершенно аналогично).

Заметим, что согласно лемме 3 и равенству (17) справедливы равенства

$$\Phi_{0,2}^2(n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k,2}(n) \Phi_{-k,2}(n) = O\left(\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty,$$

$$W_{2n}(x) = e^{-2\pi i n x} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, в силу (6) и (7) имеем

$$B_n = q_{2n} + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) = O(1), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty.$$

Равенство (55) является следствием последних трёх равенств и (50), (51), (54).

В дальнейшем норму в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, будем обозначать через $\|\cdot\|_p$. Лемма доказана.

Пусть запись $b_n = O^*(1)$, где $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная числовая последовательность, означает выполнение неравенства $d_1 \leq |b_n| \leq d_2$, $n \in \mathbb{N}$, где d_1 и d_2 – некоторые положительные постоянные.

Лемма 7. При $p \in (1, \infty)$ имеют место соотношения

$$\|u_{2n-1}\|_p = \|v_{2n}\|_p = 1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \quad (57)$$

$$\|u_{2n}\|_p = \|v_{2n-1}\|_p = 1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \quad (58)$$

$$\|u_{2n-1}\|_p = \|v_{2n}\|_p = |B_n|^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \quad (59)$$

$$\|u_{2n}\|_p = |B_n|^{-1/2} [T_{2n} B_n + 1] O^*(1), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \quad (60)$$

$$\|v_{2n-1}\|_p = |B_n|^{-1/2} [T_{2n} B_n + 1] O^*(1), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty. \quad (61)$$

Доказательство данной леммы дословно повторяет доказательство леммы 3.5 из [17].

Лемма 8 [17]. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H и $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ – произвольная ограниченная числовая последовательность. Тогда система $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$, где $\psi_0 = \varphi_0$, $\psi_{2n-1} = \varphi_{2n-1}$ и $\psi_{2n} = a_n \varphi_{2n-1} + \varphi_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, является базисом Рисса пространства H .

Лемма 9. Пусть n – фиксированное целое неотрицательное число, $R(x) \in L_1(0, 1)$, $F(x) \in L_1(0, 1)$, $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_1$, $r_k = \int_0^1 R(x) e^{-2\pi i k x} dx$, $k \in \mathbb{Z}$, $F_k = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i k x} dx$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$(2\pi)^{2m} (n^{2m} - k^{2m}) \theta_k = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} r_{k-\nu} \theta_\nu + F_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

Тогда функция

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e^{2\pi i k x} \quad (63)$$

принадлежит классу $W_1^{2m}(0, 1)$ и является решением краевой задачи

$$(-1)^m u^{(2m)}(x) + R(x) u(x) = (2\pi n)^{2m} u(x) - F(x), \quad (64)$$

$$u^{(s)}(1) - u^{(s)}(0) = 0, \quad s = \overline{0, 2m-1}. \quad (65)$$

Доказательство. В силу условия $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_1$ функциональный ряд в правой части (63) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, 1]$. Следовательно,

$$\int_0^1 R(x) u(x) e^{-2\pi i k x} dx = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \theta_\nu \int_0^1 R(x) e^{-2\pi i (k-\nu) x} dx = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} z_{k-\nu} \theta_\nu, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (66)$$

Из (62) и (66) находим, что при $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$(-1)^m (2\pi i k)^{2m} \theta_k = \int_0^1 [(2\pi k)^{2m} u(x) - R(x) u(x) - F(x)] e^{-2\pi i k x} dx, \quad (67)$$

т.е. числа $(-1)^m (2\pi i k)^{2m} \theta_k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются коэффициентами Фурье функции

$$Q(x) = (2\pi n)^{2m} u(x) - R(x) u(x) - F(x). \quad (68)$$

Пусть

$$Q_k = \int_0^1 Q(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (69)$$

Согласно [20, п. 10.1.5] ряд

$$\sum_{k \neq 0} \frac{Q_k}{2\pi i k} e^{2\pi i k x} \quad (70)$$

равномерно сходится при $x \in [0, 1]$. Заметим также, что ряды

$$\sum_{k \neq 0} \frac{Q_k}{(2\pi i k)^s} e^{2\pi i k x}, \quad s = \overline{2, 2m-1},$$

сходятся абсолютно и равномерно при $x \in [0, 1]$.

Ввиду (67)–(69)

$$Q_k = (-1)^m (2\pi i k)^{2m} \theta_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (71)$$

Отсюда и из рассуждений выше следует, что ряды

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi i k)^{2m} \theta_k e^{2\pi i k x}, \quad s = \overline{0, 2m-1},$$

сходятся равномерно на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, $u(x) \in C^{2m-1}[0, 1]$, при $s = \overline{0, 2m-1}$

$$u^{(s)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi i k)^s \theta_k e^{2\pi i k x}, \quad (72)$$

и ряд в правой части (72) сходится равномерно на $[0, 1]$. Отсюда также следует, что функция $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям (65).

Используя интегрирование по частям, находим

$$\int_0^1 \left(\int_0^x Q(t) dt \right) e^{-2\pi i k x} dx = \frac{Q_k}{2\pi i k}, \quad k \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того,

$$\int_0^1 \left(\int_0^x Q(t) dt \right) dx = - \int_0^1 x Q(x) dx = d_0.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $\int_0^x Q(t) dt$, $0 \leq x \leq 1$, имеет вид

$$\int_0^x Q(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{Q_k e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} + d_0$$

и равномерно сходится при $x \in [0, 1]$. Следовательно, ряд (70), или согласно (71) ряд

$$(-1)^m \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi i k)^{2m-1} \theta_k e^{2\pi i k x},$$

является рядом Фурье функции $\int_0^x Q(t) dt - d_0$ при $x \in [0, 1]$. Отсюда и из (72) получим равенство

$$(-1)^m u^{(2m-1)}(x) = \int_0^x Q(t) dt - d_0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

которое означает, что $(-1)^m u^{(2m-1)}(x) \in W_1^1(0, 1)$ и при почти всех $x \in (0, 1)$ имеет место $(-1)^m u^{(2m-1)}(x) = Q(x)$. Отсюда и из (68) следует, что уравнение (64) удовлетворяется при почти всех $x \in (0, 1)$. Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов. Докажем, что функция $u_{2n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, является собственной функцией дифференциального оператора L_0 , соответствующей собственному значению $\lambda = (2\pi n)^{2m}$.

Введём обозначения $R(x) = q(x)$, $F(x) = 0$, $\theta_k = \Phi_{k,1}(n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что согласно (25) и (32) выполняются все условия леммы 9. Следовательно, функция $u(x) = u_{2n-1}(x)$ принадлежит классу $W_1^{2m}(0, 1)$ и является решением краевой задачи (64), (65) при $R(x) = q(x)$, $F(x) = 0$.

Используя леммы 1, 2 и 9, совершенно аналогичным образом доказывается, что функция $u_{2n}(x)$, $n \in \mathbb{N}_1 \cup \{0\}$, является собственной функцией дифференциального оператора L_0 , соответствующей собственному значению $\lambda = (2\pi n)^{2m}$.

Заметим, что $\int_0^1 u_0^2(x) dx = 1$. Тогда в силу леммы 4 не существует присоединённой функции, соответствующей собственной функции $u_0(x)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}_2$ – фиксированное число, $R(x) = q(x)$, $F(x) = u_{2n-1}(x)$, $\theta_k = (-B_n)^{1/2} \psi_k(n)$. Ввиду (15), (16), (11), (12), (14) и (25) имеем соотношения

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\theta_k| \leq |T_{2n}| |B_n|^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| + |B_n|^{-1/2} \sum_{k=-n}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| + |B_n|^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |D_k(n)| < \infty.$$

Следовательно, удовлетворяются все условия леммы 9.

Таким образом, функция

$$u(x) = u_{2n}(x) = (-B_n)^{1/2} \sum_{k=-n}^{\infty} \psi_k(n) e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}_2,$$

принадлежит классу $W_1^{2m}(0, 1)$ и является решением краевой задачи (64), (65) при $R(x) = q(x)$, $F(x) = u_{2n-1}(x)$, т.е. функция $u_{2n}(x)$ ($n \in \mathbb{N}_2$) является присоединённой функцией дифференциального оператора L_0 , соответствующей собственному значению $(2\pi n)^{2m}$ и собственной функции $u_{2n-1}(x)$.

Тем самым доказано, что каждое из чисел $(2\pi n)^{2m}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является собственным значением дифференциального оператора L_0 , причём при $n \geq 1$ число $(2\pi n)^{2m}$ является по меньшей мере двукратным собственным значением.

Пусть L_0^* – дифференциальный оператор, сопряжённый к L_0 , оператор L_0^* порожден дифференциальным выражением $l_0^*(v) = (-1)^m v(2m) + \overline{q(x)} v(x)$ и краевыми условиями $v^{(s)}(1) - v^{(s)}(0) = 0$, $s = \overline{0, 2m-1}$.

Предположим, что $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система, определённая равенствами (47)–(50). Очевидно, что каждое из чисел $(2\pi n)^{2m}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является собственным значением оператора L_0^* и при $n \geq 1$ число $(2\pi n)^{2m}$ – двукратное, по меньшей мере, собственное значение этого оператора. Нетрудно заметить, что функция $v_0(x)$ является собственной функцией оператора L_0^* , соответствующей простому собственному значению $\lambda = 0$; при $n \in \mathbb{N}_1$ каждая из функций $v_{2n-1}(x)$ и $v_{2n}(x)$ является собственной функцией оператора L_0^* , соответствующей собственному значению $(2\pi n)^{2m}$; при $n \in \mathbb{N}_2$ функция $v_{2n}(x)$ является собственной функцией оператора L_0^* , соответствующей собственному значению $(2\pi n)^{2m}$; при $n \in \mathbb{N}_2$ функция $v_{2n-1}(x)$ является присоединённой функцией оператора L_0^* , соответствующей собственной функции $v_{2n}(x)$ и собственному значению $(2\pi n)^{2m}$.

Докажем, что система $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ биортогонально сопряжена к системе $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ или, что то же самое, имеет место равенство

$$(u_n, v_\nu) = \int_0^1 u_n(x) \overline{v_\nu(x)} dx = \delta_{n,\nu}, \quad n, \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\delta_{n,\nu}$ – символ Кронекера.

Заметим, что $u_{2n-1}(x)$, $u_{2n}(x)$ – корневые функции оператора L_0 , соответствующие собственному значению $\lambda = (2\pi n)^{2m}$; $v_{2\nu-1}(x)$, $v_{2\nu}(x)$ – корневые функции оператора L_0^* , соответствующие значению $\mu = (2\pi\nu)^{2m}$. Поскольку при $n \neq \nu$ имеет место $\lambda \neq \mu = \bar{\mu}$, то отсюда и из сказанного выше следует справедливость равенств $(u_{2n-1}, v_{2\nu-1}) = 0$, $(u_{2n}, v_{2\nu-1}) = 0$, $(u_{2n-1}, v_{2\nu}) = 0$, $(u_{2n}, v_{2\nu}) = 0$, где $n \neq \nu$, $n, \nu \in \mathbb{N}$. По той же причине $(u_0, v_\nu) = 0$, $(u_n, v_0) = 0$, где $\nu, n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, нужно доказать выполнение равенств

$$(u_0, v_0) = 1, \quad (u_{2n-1}, v_{2n-1}) = 1, \quad (u_{2n-1}, v_{2n}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (73)$$

$$(u_{2n}, v_{2n-1}) = 0, \quad (u_{2n}, v_{2n}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (74)$$

Согласно (17)–(19) и (48), (49) при $n \in \mathbb{N}_1$ имеем

$$\begin{aligned} (u_0, v_0) &= \int_0^1 u_0^2(x) dx = 1, \\ (u_{2n-1}, v_{2n-1}) &= \int_0^1 u_{2n-1}(x) u_{2n}(x) dx = \int_0^1 \left[1 + \sum_{k=-n+1}^{\infty} \Phi_{k,2}(n) e^{2\pi i(k+n)x} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n) e^{2\pi i(k-n)x} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=-n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n) \Phi_{\nu,2}(n) e^{2\pi i(k+\nu)x} dx \right] = 0, \\ (u_{2n-1}, v_{2n}) &= \int_0^1 u_{2n-1}^2(x) dx = \int_0^1 \left[e^{4\pi i n x} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n) e^{2\pi i(k+n)x} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n) \Phi_{\nu,1}(n) e^{2\pi i(k+\nu)x} dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Равенства (74) при $n \in \mathbb{N}_1$ доказываются совершенно аналогично.

Для доказательства равенств (73) и (74) в случае $n \in \mathbb{N}_2$ используем лемму 5. Пусть $n \in \mathbb{N}_2$ и

$$y_0 = u_{2n-1}(x), \quad y_1 = \frac{1}{(-B_n)^{1/2}} W_n(x) + (-B_n)^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k(n) e^{2\pi i k x}, \quad (75)$$

$$a = T_{2n}, \quad c_0 = \int_0^1 y_1^2(x) dx. \quad (76)$$

Используя (17), нетрудно убедиться в том, что имеет место равенство

$$c_0 = -\frac{1}{B_n} \left(\Phi_{0,2}^2(n) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,2}(n) \Phi_{-k,2}(n) \right). \quad (77)$$

Таким образом, согласно (21)–(23) и (49)–(51) при $n \in \mathbb{N}_2$ имеем

$$u_{2n-1} = y_0, \quad u_{2n} = a y_0 + y_1, \quad \overline{v_{2n-1}} = -(a + c_0) y_0 + y_1, \quad \overline{v_{2n}} = y_0. \quad (78)$$

Кроме того, легко убедиться в том, что в рассматриваемом случае справедливы равенства

$$\int_0^1 y_0^2(x) dx = 0, \quad \int_0^1 y_0(x) y_1(x) dx = 1.$$

Отсюда и из (75)–(78) с учётом леммы 5 следуют равенства (73), (74) при $n \in \mathbb{N}_2$.

Заметим, что периодические краевые условия регулярны. Следовательно [21, с. 74], достаточно большие по абсолютной величине собственные значения дифференциального оператора L_0 лежат в $O(n^{2m-3/2})$ окрестностях точек $(2\pi n)^{2m}$, где $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ и n_0 – некоторое достаточно большое натуральное число; кроме того, в каждой такой окрестности лежат или два простых собственных значения, или одно двукратное собственное значение. Отсюда и из сказанного выше следует, что если S_0 – система корневых функций дифференциального оператора L_0 , содержащая систему $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$, то имеет место равенство

$$S_0 = \{U_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty} = S_1 \cup \{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty},$$

где S_1 – либо пустое множество, либо содержит только конечное число корневых функций.

Так как периодические краевые условия регулярны, то система S_0 полна и минимальна в пространстве $L_2(0, 1)$ (см., например, [4]). Если S_0^* – система, биортогонально сопряжённая в $L_2(0, 1)$ к системе S_0 , хорошо известно, что S_0^* является системой всех корневых функций дифференциального оператора L_0^* и в данном случае справедливо равенство

$$S_0^* = \{V_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty} = S_1^* \cup \{v_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty},$$

где S_1^* – либо пустое множество, либо содержит конечное число корневых функций дифференциального оператора L_0^* . Заметим, что $|S_1| = |S_1^*|$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $|\mathbb{N}_1| = |\mathbb{N}_2| = \infty$. Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично.

Из леммы 7 легко получим соотношение

$$\|u_{2n-\gamma}\|_2 \|v_{2n-\gamma}\|_2 = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), & \text{если } \gamma = 1 \text{ и } n \in \mathbb{N}_1, \\ (|T_{2n}B_n| + 1)O^*(1), & \text{если } \gamma = 0 \text{ и } n \in \mathbb{N}_2. \end{cases} \quad (79)$$

Пусть выполняется неравенство (24). Отсюда и из (79) следует существование постоянной C , обеспечивающей для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнение неравенства

$$\|U_n\|_2 \|V_n\|_2 \leq C. \quad (80)$$

Докажем, что каждая из систем S_0 и S_0^* является безусловным базисом пространства $L_2(0, 1)$. Поскольку S_0 и S_0^* полны в пространстве $L_2(0, 1)$, биортогонально сопряжены и $|S_1| = |S_1^*| < \infty$, то достаточно доказать [22, с. 375], что каждая из систем

$$\left\{ \frac{u_n(x)}{\|u_n\|_2} \right\}_{n=0}^{n=\infty} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{v_n(x)}{\|v_n\|_2} \|u_n\|_2 \|v_n\|_2 \right\}_{n=0}^{n=\infty}$$

является бесселевой, т.е. для всех $f \in L_2(0, 1)$ выполняются условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f, u_n)|^2}{\|u_n\|^2} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f, u_n)|^2}{\|v_n\|^2} \|u_n\|^2 \|v_n\|^2 < \infty. \quad (81)$$

Согласно (80) последнее неравенство в (81) может быть заменено условием

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f, v_n)|^2}{\|v_n\|^2} < \infty.$$

Для доказательства первого неравенства из (81) достаточно доказать сходимость рядов

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_j} \frac{|(f, u_{2n-1})|^2}{\|u_{2n-1}\|_2^2}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_j} \frac{|(f, u_{2n})|^2}{\|u_{2n}\|_2^2}, \quad (82)$$

где $f \in L_2(0, 1)$ и $j = 1, 2$.

Пусть

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{2n-1}(x) = e^{2\pi i n x}, \quad \varphi_{2n}(x) = e^{-2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (83)$$

Так как система (83) образует ортонормированный базис пространства $L_2(0, 1)$, то она также является бесселевой.

Всюду в дальнейшем через C (с нижним индексом) будем обозначать некоторые положительные постоянные.

Пусть n_0 – некоторое достаточно большое целое число. Согласно (56)–(59) имеем

$$\|u_{2n-1}\|_2 \geq C_3, \quad \|u_{2n}\|_2 \geq C_4, \quad n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (84)$$

$$\|u_{2n-1}\|_2 \geq C_5|B_n|^{1/2}, \quad \|u_{2n}\|_2 \geq C_6|B_n|^{-1/2}, \quad n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}_2. \quad (85)$$

Кроме того, при всех $f \in L_2(0, 1)$ в силу (52)–(55) и (24) находим

$$|(f, u_{2n-1})|^2 \leq C_7 \left(|(f, \varphi_{2n-1})|^2 + \|f\|_2^2 \frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}} \right), \quad n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (86)$$

$$|(f, u_{2n})|^2 \leq C_8 \left(|(f, \varphi_{2n})|^2 + \|f\|_2^2 \frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}} \right), \quad n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad (87)$$

$$|(f, u_{2n-1})|^2 \leq C_9|B_n|^{-1} \left(|(f, \varphi_{2n-1})|^2 + \|f\|_2^2 \frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}} \right), \quad n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad (88)$$

$$|(f, u_{2n})|^2 \leq C_{10}|B_n|^{-1} \left(|(f, \varphi_{2n-1})|^2 + |(f, \varphi_{2n})|^2 + \|f\|_2^2 \frac{\ln^2(n+1)}{n^{2m-1}} \right), \quad n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}_2. \quad (89)$$

Сходимость рядов (82) следует из оценок (84)–(89). Например, ввиду (85) и (89) при всех $n \geq n_0$ и $n \in \mathbb{N}_2$ имеем

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_2 \\ n \geq n_0}} \frac{|(f, u_{2n})|^2}{\|u_{2n}\|_2^2} \leq C_{11} \left[\sum_{n=n_0}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 + \|f\|_2^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{n^{2m-1}} \right] < \infty.$$

Таким образом, доказано, что каждая из систем S_0 и S_0^* образует безусловный базис пространства $L_2(0, 1)$.

Теперь докажем, что система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ содержит все корневые функции дифференциального оператора L_0 или, что то же самое, что $S_1 = \emptyset$.

Пусть

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x), \quad \psi_{2n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x), \quad \psi_{2n}(x) = \varphi_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

$$\psi_{2n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x), \quad \psi_{2n}(x) = -T_{2n}B_n, \quad \varphi_{2n-1}(x) + \varphi_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

Так как система (83) является ортонормированным базисом пространства $L_2(0, 1)$ и выполняется условие (24), то в силу леммы 8 система $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса этого же пространства.

Заметим, что при выполнении условия (24) в силу (52)–(55) имеем равенства

$$u_{2n-1}(x) = \psi_{2n-1}(x) + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad u_{2n}(x) = \psi_{2n}(x) + O\left(\frac{\ln^2(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty,$$

$$(-B_n)^{-1/2}u_{2n-1}(x) = \psi_{2n-1}(x) + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right),$$

$$(-B_n)^{1/2}u_{2n}(x) = \psi_{2n}(x) + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty.$$

Согласно этим соотношениям соответствующая перестановка системы

$$\{u_0(x)\} \cup \{u_{2n-1}(x), u_{2n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}_1} \cup \{(-B_n)^{1/2}u_{2n-1}(x), (-B_n)^{1/2}u_{2n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}_2} \quad (90)$$

является квадратично близкой к системе $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Кроме того, система (90) также минимальна. Следовательно (см. [22, с. 374]), эта система образует базис пространства $L_2(0, 1)$. Поскольку $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ есть часть базиса S_0 , то $S_1 = \emptyset$. Таким образом, система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ содержит все корневые функции дифференциального оператора L_0 .

Теорема 1 и часть теоремы 2, относящаяся к базисности в $L_2(0, 1)$, доказаны.

Предположим, что $1 < p < 2$ и p фиксировано. Поскольку система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $L_2(0, 1)$, то эта система полна и в пространстве $L_p(0, 1)$. Следовательно (см. [23, с. 19]), для базисности в $L_p(0, 1)$ этой системы необходимо и достаточно существование постоянной $M_1 > 0$, обеспечивающей при всех $l \in \mathbb{N}$ справедливость неравенства

$$\left\| \sum_{n=0}^l (f, v_n) u_n \right\|_p \leq M_1 \|f\|_q, \quad (91)$$

где $f(x)$ – произвольная функция из $L_p(0, 1)$.

Пусть выполняется неравенство (24). Отсюда и из леммы 7 получим, что имеет место оценка

$$\|u_n\|_p \|v_n\|_q \leq C_{12}, \quad (92)$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Отсюда следует, что неравенство (91) равносильно существованию постоянной $M_2 > 0$, обеспечивающей при всех $l \in \mathbb{N}$ выполнение неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^{2l} (f, v_n) u_n \right\|_p \leq M_2 \|f\|_p, \quad (93)$$

где $f(x)$ – произвольная функция из $L_p(0, 1)$.

Положим

$$J_l(f) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in \mathbb{N}_1}}^l \sum_{j=0}^1 (f, v_{2n-j}) u_{2n-j} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \in \mathbb{N}_2}}^l \sum_{j=0}^1 (f, v_{2n-j}) u_{2n-j}. \quad (94)$$

Тогда неравенство (93) примет вид $\|J_l(f)\|_p \leq M_2 \|f\|_p$. Непосредственное вычисление с использованием леммы 6 показывает, что при $n \in \mathbb{N}$ (случаи $n \in \mathbb{N}_1$ и $n \in \mathbb{N}_2$ рассматриваются отдельно) имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^1 (f, v_{2n-j}) u_{2n-j} = \\ &= (f, \varphi_{2n-1}) \varphi_{2n-1} + (f, \varphi_{2n}) \varphi_{2n} + (f, \varphi_{2n-1}) O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) + (f, \varphi_{2n}) O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right) + \\ &+ \left(f, O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right)\right) \varphi_{2n-1} + \left(f, O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right)\right) \varphi_{2n} + \left(f, O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right)\right) O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (94) следует

$$J_l(f) = J_{l,1}(f) + J_{l,2}(f) + J_{l,3}(f) + J_{l,4}(f),$$

где

$$\begin{aligned} J_{l,1}(f) &= \sum_{n=1}^{2l} (f, \varphi_n) \varphi_n, & J_{l,2}(f) &= \sum_{n=1}^{2l} \left(f, O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right)\right) \varphi_n, \\ J_{l,3}(f) &= \sum_{n=1}^{2l} (f, \varphi_n) O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), & J_{l,4}(f) &= \sum_{n=1}^{2l} \left(f, O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right)\right) O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определённая равенствами (83), является равномерно ограниченным базисом пространства $L_p(0, 1)$ [24, с. 594]. Следовательно, существует постоянная $M_3 > 0$, обеспечивающая при всех $l \in \mathbb{N}$ справедливость неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^{2l} (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|_p \leq M_3 \|f\|_p$$

или, что то же самое,

$$\|J_{l,1}(f)\|_p \leq M_3 \|f\|_p. \quad (95)$$

Далее, поскольку $1 < p < 2$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|J_{l,2}(f)\|_p &\leq \|J_{l,2}(f)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{2l} \left| \left(f, O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_{13} \|f\|_1 \left(\sum_{n=1}^{2l} \frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}} \right)^{1/2} \leq C_{14} \|f\|_p. \end{aligned} \quad (96)$$

Из теоремы Рисса (см. [25, с. 154]) следует, что

$$\|J_{l,3}(f)\|_p \leq C_{15} \sum_{n=1}^{2l} |(f, \varphi_n)| \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \leq C_{15} \left(\sum_{n=1}^{2l} |(f, \varphi_n)|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{2l} \frac{\ln^p(n+1)}{n^{(2m-1)p}} \right)^{1/p} \leq C_{16} \|f\|_p. \quad (97)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\|J_{l,4}(f)\|_p \leq C_{17} \|f\|_1 \sum_{n=1}^{2l} \frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}} \leq C_{18} \|f\|_p. \quad (98)$$

Неравенство (94) является следствием (95)–(98).

Пусть $2 < p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Заметим, что $1 < q < 2$ и система $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой корневых функций дифференциального оператора L_0 . Как доказано выше, система корневых функций такого оператора образует базис пространства $L_r(0, 1)$ при любом $r \in (1, 2)$, в частности при $r = q$. Таким образом, система $\{\overline{v_n(x)}\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_q(0, 1)$. Следовательно, биортогонально сопряжённая система $\{\overline{u_n(x)}\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_p(0, 1)$. Последнее означает, что система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ также образует базис пространства $L_p(0, 1)$. Теорема 2 и часть теоремы 3 (достаточность условия (24) для базисности) доказаны.

Пусть $1 < p < \infty$ и $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_p(0, 1)$. Хорошо известно, что в этом случае имеет место неравенство (92). Для завершения доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что в силу (59)–(61) неравенства (24) и (92) равносильны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
2. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. Т. 2. № 39. С. 82–83.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т. 3. М., 1974.
4. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными условиями // Вестн. Московского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 1982. Т. 6. С. 12–21.
5. Макин А.С. Об одном классе краевых задач для оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1058–1068.

6. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4 (370). С. 77–182.
7. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Мат. заметки. 1988. Т. 64. № 4. С. 558–563.
8. Макин А.С. О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи // Докл. РАН. 2006. Т. 406. № 4. С. 452–457.
9. Шкаликов А.А., Велиев О.А. О базисности Рисса собственных и присоединённых функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 671–676.
10. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Сходимость спектральных разложений операторов Хилла с тригонометрическими многочленами как потенциалы // Докл. РАН. 2011. Т. 436. № 1. С. 11–13.
11. Kerimov N.B., Kaya U. Spectral properties of some regular boundary value problems for fourth order differential operators // Central Eur. J. of Math. 2013. V. 11. № 1. P. 94–111.
12. Kerimov N.B., Kaya U. Some problems of spectral theory of fourth order differential operators with regular boundary conditions // Arabian J. of Math. 2014. V. 3. № 1. P. 49–61.
13. Kerimov N.B., Kaya U. Spectral asymptotics and basis properties of fourth order differential operators with regular boundary conditions // Math. Methods in the Appl. Sci. 2014. V. 37. № 5. P. 609–779.
14. Gunes H., Kerimov N.B., Kaya U. Spectral properties of fourth order differential operators with periodic and antiperiodic boundary conditions // Results in Math. 2015. V. 68. № 3–4. P. 501–518.
15. Керимов Н.Б. О спектральных свойствах некоторых краевых задач для дифференциальных операторов высокого порядка // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 2. С. 131.
16. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
17. Керимов Н.Б. Об одной краевой задаче типа задачи Н.И. Ионкина // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1267–1280.
18. Гасымов М.Г. Спектральный анализ одного класса несамосопряжённых дифференциальных операторов второго порядка // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 1. С. 14–19.
19. Гасымов М.Г. Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 2. С. 277–280.
20. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М., 1985.
21. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
22. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
23. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М., 1984.
24. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
25. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965.

Университет Хазар,
г. Баку, Азербайджан,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку

Поступила в редакцию 04.12.2022 г.
После доработки 04.12.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
С ОДНОМАСШТАБНЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

© 2023 г. Р. Е. Симаков

Рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень, а другое – три непересекающихся простых (однократных) корня. Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденных уравнений являются простыми, но также не совпадает с разложениями в исследованных ранее задачах с двукратными корнями, в частности, внутренний переходный слой оказывается одномасштабным.

DOI: 10.31857/S0374064123030044, EDN: QUJPPV

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = F(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{dv}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ и $v(x, \varepsilon)$ – искомые скалярные функции, F и f – заданные функции в области $D = I_u \times I_v \times [0, 1] \times [0, \varepsilon_0]$, I_u и I_v – некоторые интервалы изменения переменных u и v , $\varepsilon_0 > 0$.

При $\varepsilon = 0$ уравнения (1) принимают вид

$$F(u, v, x, 0) = 0, \quad f(u, v, x, 0) = 0. \quad (3)$$

В данной работе ставятся вопросы о существовании и асимптотике по параметру ε решения задачи (1), (2) с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x_* отрезка $[0, 1]$ (назовём её *точкой перехода*), где решение совершает быстрый переход из малой окрестности одного решения вырожденной системы (3) в малую окрестность другого её решения. Такие решения называются *контрастными структурами типа ступеньки* (КСТС).

Опишем кратко структуру работы. В п. 1 приводятся условия, обеспечивающие существование искомой КСТС в задаче (1), (2). В п. 2 строится формальная асимптотика КСТС, причём построение ведётся раздельно слева и справа от точки перехода. В п. 3 проводится сшиваание асимптотик в точке x_* и строится асимптотическое приближение для этой точки. В п. 4 доказывается существование решения задачи (1), (2) с построенной асимптотикой. В п. 5 приводится пример задачи вида (1), (2), на котором иллюстрируется построение асимптотики решения. В п. 6 содержатся некоторые замечания в отношении рассмотренной задачи и других возможных задач о КСТС.

Сформулируем условия, при которых задача (1), (2) будет рассматриваться ниже.

Условие А1. Функция $F(u, v, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$F(u, v, x, \varepsilon) = h(x)(u - \varphi(v, x))^2 - \varepsilon F_1(u, v, x, \varepsilon),$$

где $h(x) > 0$ при $x \in [0, 1]$ и $\varphi(v, x) \in I_u$ при $(v, x) \in I_v \times [0, 1]$.

Из условия A1 следует, что корень $u = \varphi(v, x)$ первого уравнения (3) является двукратным. Отметим, что КСТС в сингулярно возмущённых задачах с кратными корнями исследовались во многих работах, краткий обзор которых можно найти в [1]. В данной статье асимптотика решения имеет свои качественные особенности, относящиеся, прежде всего, к переходному слою.

Условие A2. Уравнение $g(v, x) := f(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0$ имеет три простых корня $v = \psi_i(x) \in I_v$, $i = 1, 2, 3$, причём

$$\psi_1(x) < \psi_2(x) < \psi_3(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4)$$

Условие A3. Функции $h(x)$, $\varphi(v, x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $F_1(u, v, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими при $(u, v, x, \varepsilon) \in D$.

Требуемый порядок гладкости этих функций зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Так как далее речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать их бесконечно дифференцируемыми.

Условие A4. Уравнение

$$I(x) := \int_{\psi_1(x)}^{\psi_3(x)} g(v, x) dv = 0$$

имеет корень $x = x_0 \in (0, 1)$, и

$$I'(x_0) < 0. \quad (5)$$

Будем искать решение задачи (1), (2), удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi(\psi_1(x), x), & 0 \leq x < x_0, \\ \varphi(\psi_3(x), x), & x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x, \varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \leq x < x_0, \\ \psi_3(x), & x_0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Чтобы сформулировать остальные условия, определим несколько кривых на плоскости переменных (v, x) и в пространстве переменных (u, v, x) :

$$l_1 = \{(v, x) : v = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0\}, \quad l_2 = \{(v, x) : \psi_1(x_0) \leq v \leq \psi_3(x_0), \quad x = x_0\},$$

$$l_3 = \{(v, x) : v = \psi_3(x), \quad x_0 \leq x \leq 1\},$$

$$L_i = \{(u, v, x) : u = \varphi(v, x), (v, x) \in l_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad l = \bigcup_{i=1}^3 l_i, \quad L = \bigcup_{i=1}^3 L_i.$$

Отметим, что l_i и L_i , $i = 1, 2, 3$, – гладкие кривые, а l и L – непрерывные кривые, составленные из трёх гладких звеньев.

Условие A5. $F_1(u, v, x, 0) > 0$ в точках кривых L_1 и L_3 .

Условие A6. $\partial g(v, x) / \partial v > 0$ в точках кривых l_1 и l_3 .

Условие A7. Выполнены неравенства

$$\int_{\psi_1(x_0)}^v g(s, x_0) ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(x_0) < v \leq \psi_2(x_0)$$

и

$$\int_{\psi_3(x_0)}^v g(s, x_0) ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(x_0) \leq v < \psi_3(x_0).$$

Условие A8. Имеют место неравенства

$$G_1(v, x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(x_0) \leq v \leq \psi_2(x_0)$$

и

$$G_3(v, x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(x_0) \leq v \leq \psi_3(x_0),$$

где

$$G_i(v, x) := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v, x)g(v, x) + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(v, x) \int_{\psi_i(x)}^v g(s, x) ds + F_1(\varphi(v, x), v, x, 0), \quad i = 1, 3.$$

Условие A9. $\partial \varphi(v, x)/\partial v > 0$ в точках кривой l .

Условие A10. $\partial f(u, v, x, 0)/\partial u < 0$ в точках кривой L .

Заметим, что неравенства в условиях A5–A10 останутся верными при замене x_0 на x_* в определениях кривых l и L , если точка x_* принадлежит достаточно малой и не зависящей от ε окрестности точки x_0 .

2. Построение асимптотики. Определим точку перехода x_* как точку пересечения v -компоненты искомого решения с корнем ψ_2 : $v(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*)$, и поставим на отрезках $[0, x_*]$ и $[x_*, 1]$ две вспомогательные задачи, аналогичные задаче (1), (2) с добавлением граничных условий

$$v^{(-)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad v^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*). \quad (7)$$

Индексами $(-)$ и $(+)$ будем отмечать функции, определяемые соответственно из левой и правой вспомогательных задач.

Считая x_* фиксированной точкой из достаточно малой окрестности точки x_0 , будем строить асимптотики решений вспомогательных задач в виде

$$U^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}u(\xi_{\mp}, \varepsilon) + P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}, \varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau, \varepsilon), \quad (8)$$

$$V^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}v(\xi_{\mp}, \varepsilon) + P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}, \varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau, \varepsilon). \quad (9)$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$, $\bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u(\xi_-, \varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi_-, \varepsilon)$ и $P^{(-)}u(\zeta_-, \varepsilon)$, $P^{(-)}v(\zeta_-, \varepsilon)$ – погранслоиные части асимптотики в окрестности точки $x = 0$, $\xi_- = x/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta_- = x/\varepsilon^{3/4}$ – погранслоиные переменные; $\Pi^{(+)}u(\xi_+, \varepsilon)$, $\Pi^{(+)}v(\xi_+, \varepsilon)$ и $P^{(+)}u(\zeta_+, \varepsilon)$, $P^{(+)}v(\zeta_+, \varepsilon)$ – погранслоиные части асимптотики в окрестности точки $x = 1$, $\xi_+ = (1-x)/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta_+ = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ – погранслоиные переменные; $Q^{(\mp)}u(\tau, \varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\tau, \varepsilon)$ – внутрислоиные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в окрестности точки перехода x_* , $\tau = (x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$ – внутрислоиная переменная. Каждое слагаемое в правых частях представлений (8), (9) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε .

2.1. Регулярные части асимптотики. Регулярные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x).$$

Уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$ будем получать стандартным способом (см. [2, с. 29]) из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{u}^{(\mp)}}{dx^2} = F(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon), \quad (10)$$

$$\varepsilon \frac{d^2 \bar{v}^{(\mp)}}{dx^2} = f(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon). \quad (11)$$

В нулевом порядке имеем вырожденные системы уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(\mp)}, \bar{v}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0, \quad f(\bar{u}_0^{(\mp)}, \bar{v}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0,$$

из которых в соответствии с (6) получаем

$$\begin{aligned}\bar{u}_0^{(-)}(x) &= \varphi(\psi_1(x), x), & \bar{v}_0^{(-)}(x) &= \psi_1(x), & 0 \leq x \leq x_*, \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) &= \varphi(\psi_3(x), x), & \bar{v}_0^{(+)}(x) &= \psi_3(x), & x_* \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned}\bar{f}_u^{(\mp)}(x) &:= \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0), & \bar{f}_v^{(\mp)}(x) &:= \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0), \\ \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) &:= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x), x), & \bar{g}_v^{(\mp)}(x) &:= \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x), x) = \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x).\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения (10) не содержат членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т.е. членов первого порядка. Во втором порядке получаем квадратные уравнения

$$h(x)[\bar{u}_1^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}]^2 = \bar{F}_1^{(\mp)}(x) := F_1(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0).$$

В силу условия А5 они имеют по два корня, из которых выбираем положительные:

$$\bar{u}_1^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)} = a^{(\mp)}(x) := \sqrt{h^{-1}(x)\bar{F}_1^{(\mp)}(x)}.\quad (13)$$

Вторые уравнения для $\bar{u}_1^{(\mp)}$, $\bar{v}_1^{(\mp)}$ получаем из равенства (11):

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)} = 0.\quad (14)$$

Определители систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (13), (14) равны

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x) = \bar{g}_v^{(\mp)}(x).$$

В силу условия А6 СЛАУ (13), (14) однозначно разрешимы:

$$\bar{u}_1^{(\mp)}(x) = \bar{f}_v^{(\mp)}(x)(\bar{g}_v^{(\mp)}(x))^{-1}a^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{f}_u^{(\mp)}(x)(\bar{g}_v^{(\mp)}(x))^{-1}a^{(\mp)}(x).$$

Для каждого $i = 2, 3, \dots$ из равенств (10), (11) находятся СЛАУ относительно $\bar{u}_i^{(\mp)}$, $\bar{v}_i^{(\mp)}$ такого же типа, как (13), (14):

$$\bar{u}_i^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)} = a_i^{(\mp)}(x), \quad \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_i^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)} = b_i^{(\mp)}(x),$$

где $a_i^{(\mp)}(x)$, $b_i^{(\mp)}(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_j^{(\mp)}(x)$ с номерами $j < i$. Отсюда однозначно определяются функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$.

2.2. Погранслоиные части асимптотики. Погранслоиные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\Pi^{(\mp)}u(\xi_{\mp}, \varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)}u(\xi_{\mp}), & \Pi^{(\mp)}v(\xi_{\mp}, \varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)}v(\xi_{\mp}), \\ P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}, \varepsilon) &= \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}), & P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}, \varepsilon) &= \varepsilon^{5/4} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}).\end{aligned}$$

Функции $\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_{\mp})$, $\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_{\mp})$ и $P_i^{(\mp)}u(\zeta_{\mp})$, $P_i^{(\mp)}v(\zeta_{\mp})$ определяются точно так же, как погранслоиные функции в первой вспомогательной задаче в работе [3]. Все они находятся в явном виде и экспоненциально убывают с ростом соответствующей погранслоиной переменной.

2.3. Внутрислойные части асимптотики. Внутрислойные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$Q^{(\mp)}u(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}u(\tau), \quad Q^{(\mp)}v(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}v(\tau).$$

Стандартным способом (см. [2, с. 28]) для функций $Q^{(\mp)}u$, $Q^{(\mp)}v$ получаем системы уравнений

$$\varepsilon \frac{d^2 Q^{(\mp)}u}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}F, \quad \frac{d^2 Q^{(\mp)}v}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}f, \quad (15)$$

где

$$Q^{(\mp)}F := [F(\bar{u}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}u, \bar{v}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}v, x, \varepsilon) - F(\bar{u}^{(\mp)}, \bar{v}^{(\mp)}, x, \varepsilon)]|_{x=x_*+\sqrt{\varepsilon}\tau},$$

функции $Q^{(\mp)}f$ имеют аналогичные выражения. Из этих систем также стандартным способом будем последовательно для $i = 0, 1, 2, \dots$ извлекать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}u$, $Q_i^{(\mp)}v$.

Для $Q_0^{(\mp)}u$, $Q_0^{(\mp)}v$ получаем системы уравнений

$$\begin{aligned} F(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*, 0) &= 0, \\ \frac{d^2 Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2} &= f(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}u, \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*, 0), \end{aligned}$$

здесь и далее до конца этого пункта уравнения для функций с индексами $(-)$ и $(+)$ рассматриваются на полупрямых $\tau \leq 0$ и $\tau \geq 0$ соответственно. Из первых уравнений этих систем следуют равенства

$$\bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}u = \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*), \quad (16)$$

в силу которых вторые уравнения, используя вид функции $g(v, x)$ (см. условие A2), можно записать в виде

$$\frac{d^2 Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2} = g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v, x_*). \quad (17)$$

Чтобы получить граничные условия при $\tau = 0$, подставим выражения (9) для $V^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ в равенства (7) вместо $v^{(\mp)}(x, \varepsilon)$. В результате получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)}v(0) = \psi_2(x_*). \quad (18)$$

Отсюда находим

$$Q_0^{(\mp)}v(0) = \psi_2(x_*) - \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*). \quad (19)$$

Отметим, что $\psi_2(x_*) - \bar{v}_0^{(-)}(x_*) = \psi_2(x_*) - \psi_1(x_*) > 0$ и $\psi_2(x_*) - \bar{v}_0^{(+)}(x_*) = \psi_2(x_*) - \psi_3(x_*) < 0$ (см. (4)).

В качестве вторых граничных условий для функций $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ и также для остальных функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $i = 1, 2, \dots$, возьмём стандартные условия на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

В силу условия A7 задачи (17), (19), (20) для функций $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ сводятся стандартным способом к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\tau} = \left(2 \int_0^{Q_0^{(\mp)}v} g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + s, x_*) ds \right)^{1/2} \quad (21)$$

с начальными условиями (19). Уравнения интегрируются в квадратурах, их решения являются возрастающими функциями и имеют экспоненциальные оценки

$$0 < Q_0^{(-)}v(\tau) \leq c \exp(\kappa\tau), \quad \tau \leq 0; \quad -c \exp(-\kappa\tau) \leq Q_0^{(+)}v(\tau) < 0, \quad \tau \geq 0.$$

Из равенств (16) находим

$$\begin{aligned} Q_0^{(\mp)}u(\tau) &= \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) - \bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) = \\ &= \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) - \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*), x_*). \end{aligned} \quad (22)$$

Функции $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$ и их производные также имеют экспоненциальные оценки:

$$|Q_0^{(-)}u(\tau)| \leq c \exp(\kappa\tau), \quad \tau \leq 0; \quad |Q_0^{(+)}u(\tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (23)$$

Несложные вычисления показывают, что справедливы равенства

$$Q_1^{(\mp)}v(\tau) = 0, \quad Q_1^{(\mp)}u(\tau) = 0,$$

а для функций $Q_2^{(\mp)}u$, $Q_2^{(\mp)}v$ вследствие (15) получаем системы уравнений

$$h(x_*)(Q_2^{(\mp)}u - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + \phi^{(\mp)}(\tau))^2 = B^{(\mp)}(\tau), \quad (24)$$

$$\frac{d^2 Q_2^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}u + \hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + \chi^{(\mp)}(\tau), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}_u^{(\mp)}(x, \tau) &:= \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x, 0), \\ \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x, \tau) &:= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x), \end{aligned}$$

$\hat{f}_v^{(\mp)}(x, \tau)$, $\hat{f}_x^{(\mp)}(x, \tau)$ и $\hat{\varphi}_x^{(\mp)}(x, \tau)$ имеют аналогичный смысл,

$$\phi^{(\mp)}(\tau) := \left(\frac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) \frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_x^{(\mp)}(x_*, \tau) \right) \tau + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_*) - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) \bar{v}_1^{(\mp)}(x_*),$$

$$B^{(\mp)}(\tau) := \frac{d^2 Q_0^{(\mp)}u}{d\tau^2}(\tau) + F_1(\varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*), \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*, 0), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(\mp)}(\tau) &:= (\hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_*)) \left(\frac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) \tau + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_*) \right) + \\ &+ (\hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_*)) \left(\frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) \tau + \bar{v}_1^{(\mp)}(x_*) \right) + (\hat{f}_x^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_*)) \tau, \end{aligned}$$

$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$ и $\bar{f}_v^{(\mp)}(x)$ определены в (12), $\bar{f}_x^{(\mp)}(x)$ вводится аналогичным образом.

Дифференцируя дважды выражения (22) для функций $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$ и используя (17) и (21), приходим к равенствам

$$\frac{d^2 Q_0^{(\mp)}u}{d\tau^2}(\tau) = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) + 2\hat{\varphi}_{vv}^{(\mp)}(x_*, \tau) \int_{\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*)}^{\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau)} g(s, x_*) ds.$$

Поэтому выражения (26) для $B^{(\mp)}(\tau)$ можно записать в виде

$$B^{(-)}(\tau) = G_1(\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau), x_*), \quad B^{(+)}(\tau) = G_3(\bar{v}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}v(\tau), x_*),$$

функции $G_i(v, x)$ введены в условии А8.

Так как

$$\psi_1(x_*) < \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v(\tau) \leq \psi_2(x_*) \quad \text{при} \quad \tau \leq 0$$

и

$$\psi_2(x_*) \leq \bar{v}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}v(\tau) < \psi_3(x_*) \quad \text{при} \quad \tau \geq 0,$$

из условия А8 следует, что $B^{(-)}(\tau) > 0$ при $\tau \leq 0$ и $B^{(+)}(\tau) > 0$ при $\tau \geq 0$. Тогда из уравнений (24) получаем

$$Q_2^{(\mp)}u = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + b^{(\mp)}(\tau) - \phi^{(\mp)}(\tau), \quad (27)$$

где

$$b^{(\mp)}(\tau) = \sqrt{h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\tau)} \geq c > 0,$$

берём положительные значения корней из $h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\tau)$.

Из определений (26) для $B^{(\mp)}(\tau)$, используя экспоненциальные оценки функций $Q_0^{(\mp)}v$, $d^2Q_0^{(\mp)}u/d\tau^2$ и равенства (13) для $a^{(\mp)}(x)$, получаем

$$b^{(\mp)}(\mp\infty) = \sqrt{h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\mp\infty)} = \sqrt{h^{-1}(x_*)\bar{F}_1^{(\mp)}(x_*)} = a^{(\mp)}(x_*).$$

Кроме того, из выражений для $\phi^{(\mp)}(\tau)$ следует, что $\phi^{(\mp)}(\mp\infty) = a^{(\mp)}(x_*)$, а функции $r_2^{(\mp)}(\tau) := b^{(\mp)}(\tau) - \phi^{(\mp)}(\tau)$ имеют экспоненциальные оценки вида (23):

$$|r_2^{(-)}(\tau)| \leq c \exp(\kappa\tau), \quad \tau \leq 0; \quad |r_2^{(+)}(\tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Такие же оценки имеют функции $\chi^{(\mp)}(\tau)$.

Подставляя выражения (27) для $Q_2^{(\mp)}u$ в уравнения (25) и учитывая, что

$$\hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)\hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) + \hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) := \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*),$$

приходим к следующим уравнениям для функций $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$:

$$\frac{d^2Q_2^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + q_2^{(\mp)}(\tau), \quad (28)$$

где $q_2^{(\mp)}(\tau) = \chi^{(\mp)}(\tau) + \hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)r_2^{(\mp)}(\tau)$, функции $q_2^{(\mp)}(\tau)$ имеют оценки вида (23).

Граничные условия для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$ следуют из (18) и (20):

$$Q_2^{(\mp)}v(0) = -\bar{v}_1^{(\mp)}(x_*), \quad Q_2^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \quad (29)$$

Решения задач (28), (29) выражаются формулами

$$Q_2^{(\mp)}v(\tau) = \Phi_{(\mp)}(\tau) \left(\frac{Q_2^{(\mp)}v(0)}{\Phi_{(\mp)}(0)} + \int_0^\tau \Phi_{(\mp)}^{-2}(s) \int_{\mp\infty}^s \Phi_{(\mp)}(t) q_2^{(\mp)}(t) dt ds \right),$$

где $\Phi_{(\mp)}(\tau) := dQ_0^{(\mp)}v(\tau)/d\tau$. Отсюда для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$ следуют экспоненциальные оценки вида (23). Зная $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$, по формулам (27) находим функции $Q_2^{(\mp)}u(\tau)$, для которых, очевидно, также справедливы оценки вида (23).

При $i = 3, 4, \dots$ для $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ получаются линейные системы уравнений, которые приводятся к виду, аналогичному (27), (28):

$$Q_i^{(\mp)}u = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_i^{(\mp)}v + r_i^{(\mp)}(\tau), \quad (30)$$

$$\frac{d^2 Q_i^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_i^{(\mp)}v + q_i^{(\mp)}(\tau), \quad (31)$$

где функции $r_i^{(\mp)}(\tau)$ и $q_i^{(\mp)}(\tau)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_j^{(\mp)}v(\tau)$ с номерами $j < i$ и имеют оценки вида (23).

Граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ извлекаются из (18), (20):

$$Q_i^{(\mp)}v(0) = -\bar{v}_{i/2}^{(\mp)}(x_*), \quad Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \quad (32)$$

где $\bar{v}_{i/2}^{(\mp)}(x_*) = 0$, если i – нечётное число.

Решения задач (31), (32) задаются формулами, аналогичными выражениям для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$, а функции $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$ определяются после этого формулами (30). Из этих формул для функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$ получаются оценки вида (23).

Сохраняя прежние обозначения для внутрислойных и погранслойных функций, будем далее считать, что все они умножены на бесконечно дифференцируемые срезающие функции (см. [2, с. 82]).

3. Сшивание асимптотик в точке перехода. Формальные асимптотические ряды $V^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ удовлетворяют в точке перехода равенствам

$$V^{(-)}(x_*, \varepsilon) = V^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad (33)$$

причём их построение проводилось для произвольного x_* из достаточно малой окрестности точки x_0 . Будем искать асимптотическое приближение для точки перехода в виде

$$x_* = X_n := \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/4} x_i, \quad (34)$$

где x_0 определено в условии А4, а остальные коэффициенты x_i , $i \geq 1$, выбираются таким образом, чтобы также выполнялось формальное равенство

$$\sqrt{\varepsilon} \left(\frac{dV^{(-)}}{dx}(X_n, \varepsilon) - \frac{dV^{(+)}}{dx}(X_n, \varepsilon) \right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}). \quad (35)$$

Подставим в (35) ряды (9) с учётом того, что производные $\Pi^{(\mp)}$ -функций и $P^{(\mp)}$ -функций равны нулю в точке X_n . Придём к равенству

$$\sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \left(\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(X_n) - \frac{d\bar{v}_i^{(+)}}{dx}(X_n) \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} \left(\frac{dQ_i^{(-)}v}{d\tau}(0, X_n) - \frac{dQ_i^{(+)}v}{d\tau}(0, X_n) \right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}),$$

в записи которого отражён тот факт, что внутрислойные $Q^{(\mp)}$ -функции зависят от параметра $x_* = X_n$. Подставим в это равенство выражение (34), разложим левую часть в ряд по целым

степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$ и будем приравнивать к нулю коэффициенты разложения при степенях $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{n/4}$. В нулевом порядке, используя выражения (21) для производных, получаем

$$J(x_0) := \frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0, x_0) - \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}(0, x_0) = \left(2 \int_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v, x_0) dv \right)^{1/2} - \left(2 \int_{\psi_3(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v, x_0) dv \right)^{1/2} = 0,$$

где последнее равенство имеет место в силу условия A4, причём $J'(x_0) < 0$ в силу (5).

Для следующих коэффициентов x_i суммы (34) последовательно при $i = \overline{1, n}$ получаются линейные уравнения

$$J'(x_0)x_i = a_i, \quad (36)$$

где числа a_i рекуррентно выражаются через x_j с номерами $j < i$, которые на i -м шаге уже известны, причём $a_1 = 0$. Так как $J'(x_0) \neq 0$, уравнение (36) имеет единственное решение

$$x_1 = 0, \quad x_i = (J'(x_0))^{-1}a_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Итак, для точки перехода построено асимптотическое приближение (34), обеспечивающее выполнение формальных равенств (35). Докажем, что в этой точке также справедливы формальные равенства

$$U^{(-)}(X_n, \varepsilon) - U^{(+)}(X_n, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}), \quad \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{dU^{(-)}}{dx}(X_n, \varepsilon) - \frac{dU^{(+)}}{dx}(X_n, \varepsilon) \right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}). \quad (37)$$

С этой целью введём обозначения

$$u^{(\mp)}(\tau, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau, X_n, \varepsilon), \quad v^{(\mp)}(\tau, \varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau, X_n, \varepsilon)$$

и запишем разложения $u^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$, $v^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$ в ряды по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$u^{(-)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} u_i^{(-)}(\tau), \quad v^{(-)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} v_i^{(-)}(\tau), \quad \tau \leq 0, \quad (38)$$

$$u^{(+)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} u_i^{(+)}(\tau), \quad v^{(+)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4} v_i^{(+)}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (39)$$

Главные члены этих разложений имеют вид

$$u_0^{(\mp)}(\tau) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau, x_0), \quad v_0^{(\mp)}(\tau) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v(\tau, x_0).$$

Из (33), (35) вытекают равенства

$$v_i^{(-)}(0) = v_i^{(+)}(0), \quad \frac{dv_i^{(-)}}{d\tau}(0) = \frac{dv_i^{(+)}}{d\tau}(0), \quad i = \overline{0, n}, \quad (40)$$

причём

$$v_0^{(\mp)}(0) = \psi_2(x_0), \quad \frac{dv_0^{(\mp)}}{d\tau}(0) = \frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\tau}(0, x_0) = \left(2 \int_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v, x_0) dv \right)^{1/2} =: \Phi_0. \quad (41)$$

Докажем, что имеют место аналогичные равенства для $u_i^{(\mp)}(\tau)$:

$$u_i^{(-)}(0) = u_i^{(+)}(0), \quad \frac{du_i^{(-)}}{d\tau}(0) = \frac{du_i^{(+)}}{d\tau}(0), \quad i = \overline{0, n}. \quad (42)$$

Отсюда вытекают формальные равенства (37). Введём для $i = \overline{0, n}$ функции

$$u_i(\tau) = \begin{cases} u_i^{(-)}(\tau), & \tau \leq 0, \\ u_i^{(+)}(\tau), & \tau > 0, \end{cases} \quad v_i(\tau) = \begin{cases} v_i^{(-)}(\tau), & \tau \leq 0, \\ v_i^{(+)}(\tau), & \tau \geq 0. \end{cases}$$

Из уравнений (17) следует, что функция $v_0(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 v_0}{d\tau^2} = g(v_0, x_0), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

а равенства (41) показывают, что она удовлетворяет начальным условиям

$$v_0(0) = \psi_2(x_0), \quad \frac{dv_0}{d\tau}(0) = \Phi_0.$$

Тогда $v_0(\tau)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty < \tau < \infty$.

Функцию $u_0(\tau)$ в силу равенств (16) можно записать в виде $u_0(\tau) = \varphi(v_0(\tau), x_0)$, откуда следует, что $u_0(\tau)$ также является бесконечно гладкой функцией при всех τ и, значит, выполнены равенства (42) при $i = 0$.

Докажем, что $u_i(\tau)$ и $v_i(\tau)$ – бесконечно гладкие функции для всех $i = \overline{1, n}$. Для $u^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$, $v^{(\mp)}(\tau, \varepsilon)$ из (10), (11) и (15) запишем системы уравнений

$$\varepsilon \frac{d^2 u^{(\mp)}}{d\tau^2} = F(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon), \quad \frac{d^2 v^{(\mp)}}{d\tau^2} = f(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon).$$

Подставим в них разложения (38) и (39). Точно так же как в п. 2.3 извлекались уравнения для $Q_i^{(\mp)}u$, $Q_i^{(\mp)}v$, отсюда для $u_i^{(\mp)}$, $v_i^{(\mp)}$ получим системы уравнений

$$u_i^{(\mp)} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v_0(\tau), x_0)v_i^{(\mp)} + r_i(\tau), \quad (43)$$

$$\frac{d^2 v_i^{(\mp)}}{d\tau^2} = \frac{\partial g}{\partial v}(v_0(\tau), x_0)v_i^{(\mp)} + q_i(\tau), \quad (44)$$

где $r_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ выражаются рекуррентно через $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$ с номерами $j < i$ и являются бесконечно гладкими функциями, если таковыми являются $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$. Из (44) и (40) следует, что функция $v_i(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 v_i}{d\tau^2} = \frac{\partial g}{\partial v}(v_0(\tau), x_0)v_i + q_i(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

с начальными условиями

$$v_i(0) = v_i^{(\mp)}(0), \quad \frac{dv_i}{d\tau}(0) = \frac{dv_i^{(\mp)}}{d\tau}(0).$$

Поэтому $v_i(\tau)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty < \tau < \infty$. Из (43) следует теперь, что $u_i(\tau)$ также бесконечно гладкая функция.

Таким образом, выполнены равенства (42) и, значит, в точке X_n справедливы формальные равенства (37).

4. Обоснование асимптотики.

4.1. Теорема об асимптотике решения. Обозначим через $U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ и $V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ следующие частичные суммы формальных асимптотических рядов (8), (9):

$$\begin{aligned} U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i^{(\mp)}(x) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)} u(\xi_{\mp}) + \\ &+ \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)} u(\zeta_{\mp}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)} u(\tau, x_*), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i/2} \bar{v}_i^{(\mp)}(x) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} \Pi_i^{(\mp)} v(\xi_{\mp}) + \\
&+ \varepsilon^{5/4} \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/4} P_i^{(\mp)} v(\zeta_{\mp}) + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/4} Q_i^{(\mp)} v(\tau, x_*).
\end{aligned} \quad (46)$$

Из алгоритма построения асимптотики следуют равенства

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon(U_n^{(-)}, V_n^{(-)}) &= O(\varepsilon^{n/2+1}), \quad M_\varepsilon(V_n^{(-)}, U_n^{(-)}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in (0, x_*), \\
L_\varepsilon(U_n^{(+)}, V_n^{(+)}) &= O(\varepsilon^{n/2+1}), \quad M_\varepsilon(V_n^{(+)}, U_n^{(+)}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in (x_*, 1), \\
\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon, x_*) &= \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(1, \varepsilon, x_*) = 0, \quad \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(0, \varepsilon, x_*) = \frac{dV_n^{(+)}}{dx}(1, \varepsilon, x_*) = 0, \\
V_n^{(-)}(x_*, \varepsilon, x_*) &= V_n^{(+)}(x_*, \varepsilon, x_*) = \psi_2(x_*),
\end{aligned}$$

где

$$L_\varepsilon(U, V) := \varepsilon^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - F(U, V, x, \varepsilon), \quad M_\varepsilon(V, U) := \varepsilon \frac{d^2 V}{dx^2} - f(U, V, x, \varepsilon). \quad (47)$$

Теорема. Пусть выполнены условия A1–A10. Тогда для любого целого $n \geq 0$ при всех достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad v(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in [0, 1], \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned}
U_n(x, \varepsilon) &= \begin{cases} U_n^{(-)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & 0 \leq x \leq X_{2n+1}, \\ U_n^{(+)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & X_{2n+1} < x \leq 1; \end{cases} \\
V_n(x, \varepsilon) &= \begin{cases} V_n^{(-)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & 0 \leq x \leq X_{2n+1}, \\ V_n^{(+)}(x, \varepsilon, X_{2n+1}), & X_{2n+1} < x \leq 1; \end{cases} \quad \tau = \frac{x - X_{2n+1}}{\sqrt{\varepsilon}}.
\end{aligned} \quad (49)$$

4.2. О методе доказательства теоремы. Докажем теорему с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. построив верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) на основе формальных асимптотических рядов (8), (9) (см. [4]). Напомним понятия верхнего и нижнего решений для задачи (1), (2).

Определение. Две пары функций $\bar{U}(x, \varepsilon)$, $\bar{V}(x, \varepsilon)$ и $\underline{U}(x, \varepsilon)$, $\underline{V}(x, \varepsilon)$, принадлежащих по переменной x классу $C^{(2)}(0, 1) \cap C^{(1)}[0, 1]$, называются *упорядоченными верхним и нижним решениями* задачи (1), (2), если они удовлетворяют следующим условиям:

1) при $x \in [0, 1]$ выполнены неравенства (условие упорядоченности)

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq \bar{U}(x, \varepsilon) \quad \text{и} \quad \underline{V}(x, \varepsilon) \leq \bar{V}(x, \varepsilon);$$

2) при $x \in (0, 1)$ справедливы неравенства

$$L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}), \quad M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U})$$

(операторы L_ε и M_ε определены равенствами (47));

3) имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{U}}{dx}(0, \varepsilon) &\leq 0 \leq \frac{d\underline{U}}{dx}(0, \varepsilon), \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(0, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{d\underline{V}}{dx}(0, \varepsilon), \\
\frac{d\bar{U}}{dx}(1, \varepsilon) &\geq 0 \geq \frac{d\underline{U}}{dx}(1, \varepsilon), \quad \frac{d\bar{V}}{dx}(1, \varepsilon) \geq 0 \geq \frac{d\underline{V}}{dx}(1, \varepsilon).
\end{aligned}$$

В случае если верхнее и нижнее решения

$$\overline{U}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \overline{x}, \\ \overline{U}^{(+)}(x, \varepsilon), & \overline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \overline{V}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \overline{x}, \\ \overline{V}^{(+)}(x, \varepsilon), & \overline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (50)$$

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \underline{x}, \\ \underline{U}^{(+)}(x, \varepsilon), & \underline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \underline{V}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \underline{V}^{(-)}(x, \varepsilon), & 0 \leq x \leq \underline{x}, \\ \underline{V}^{(+)}(x, \varepsilon), & \underline{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (51)$$

не являются гладкими в точках $\overline{x}$ и $\underline{x}$ соответственно, они должны удовлетворять дополнительным условиям (см. [4]):

4) справедливы неравенства

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) \geq \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon), \quad \frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) \geq \frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon);$$

5) справедливы неравенства

$$\frac{d\underline{U}^{(-)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon) \leq \frac{d\underline{U}^{(+)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon), \quad \frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon) \leq \frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx}(\underline{x}, \varepsilon).$$

При этом неравенства условия 2) должны выполняться всюду на интервале $(0, 1)$, за исключением точек $\overline{x}$ и $\underline{x}$ для верхнего и нижнего решений соответственно.

Условие 2) сформулировано для случая, когда функции F и f удовлетворяют в области

$$G_0 = \{(u, v, x, \varepsilon) : \underline{U}(x, \varepsilon) \leq u \leq \overline{U}(x, \varepsilon), \quad \underline{V}(x, \varepsilon) \leq v \leq \overline{V}(x, \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\} \quad (52)$$

условию квазимоноотонности, т.е. функция $F(u, v, x, \varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v , а функция $f(u, v, x, \varepsilon)$ – невозрастающей функцией аргумента u . Ниже будет показано, что в рассматриваемой задаче это свойство имеет место.

Если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u = u(x, \varepsilon)$, $v = v(x, \varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, \varepsilon), \quad \underline{V}(x, \varepsilon) \leq v(x, \varepsilon) \leq \overline{V}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1]. \quad (53)$$

4.3. Оценки производных функции F . Введём обозначения

$$\tilde{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) := \tilde{u}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)} u(\tau, x_*) + \sqrt{\varepsilon}(\tilde{u}_1^{(\mp)}(x) + \Pi_0^{(\mp)} u(\xi_{\mp}) + Q_2^{(\mp)} u(\tau, x_*)),$$

$$\tilde{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) := \tilde{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)} v(\tau, x_*) + \sqrt{\varepsilon}(\tilde{v}_1^{(\mp)}(x) + \Pi_0^{(\mp)} v(\xi_{\mp}) + Q_2^{(\mp)} v(\tau, x_*)),$$

$$\tilde{F}_u^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) := \frac{\partial F}{\partial u}(\tilde{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*), \tilde{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*), x, \varepsilon),$$

аналогично определяется $\tilde{F}_v^{(\mp)}$.

Для производных $\tilde{F}_u^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ и $\tilde{F}_v^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*)$ при достаточно малых ε нетрудно получить оценки (см. [3])

$$\tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, x_*) \geq c_0 \sqrt{\varepsilon} > 0, \quad x \in [0, x_*], \quad \tilde{F}_u^{(+)}(x, \varepsilon, x_*) \geq c_0 \sqrt{\varepsilon} > 0, \quad x \in [x_*, 1], \quad (54)$$

$$\tilde{F}_v^{(-)}(x, \varepsilon, x_*) \leq -c \sqrt{\varepsilon} < 0, \quad x \in [0, x_*], \quad \tilde{F}_v^{(+)}(x, \varepsilon, x_*) \leq -c \sqrt{\varepsilon} < 0, \quad x \in [x_*, 1]. \quad (55)$$

Так как при $n \geq 1$ имеют место равенства

$$U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) = \tilde{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) + O(\varepsilon^{3/4}), \quad V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) = \tilde{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon, x_*) + O(\varepsilon^{3/4}),$$

оценки (55) обеспечивают квазимоноотонность функции F . Отметим, что при доказательстве этих оценок используется условие A9.

4.4. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2). Введём точки $\bar{x}(\varepsilon)$ и $\underline{x}(\varepsilon)$:

$$\bar{x}(\varepsilon) = X_{2n+1} - \varepsilon^{(n+1)/2}\delta, \quad \underline{x}(\varepsilon) = X_{2n+1} + \varepsilon^{(n+1)/2}\delta,$$

где δ – положительное число, которое будет выбрано ниже. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) построим отдельно слева и справа от точек $\bar{x}$ и $\underline{x}$ соответственно в виде (50), (51). В точках $\bar{x}$ и $\underline{x}$ будем сшивать функции $\bar{U}^{(\mp)}$, $\bar{V}^{(\mp)}$ и $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ так, чтобы они удовлетворяли равенствам

$$\bar{U}^{(\mp)}(\bar{x}, \varepsilon) = \frac{U_n^{(-)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x}) + U_n^{(+)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x})}{2} + \varepsilon^{(n+1)/2}\mu, \quad \bar{V}^{(\mp)}(\bar{x}, \varepsilon) = \psi_2(\bar{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}\mu, \quad (56)$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(\underline{x}, \varepsilon) = \frac{U_n^{(-)}(\underline{x}, \varepsilon, \underline{x}) + U_n^{(+)}(\underline{x}, \varepsilon, \underline{x})}{2} - \varepsilon^{(n+1)/2}\mu, \quad \underline{V}^{(\mp)}(\underline{x}, \varepsilon) = \psi_2(\underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}\mu. \quad (57)$$

Отсюда следует непрерывность функций $\bar{U}$, $\bar{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$. Здесь μ – положительное число, которое выбирается далее вместе с δ так, чтобы обеспечить выполнение условий 4) и 5) определения.

Будем строить функции $\bar{U}^{(\mp)}$, $\bar{V}^{(\mp)}$, $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ как модификацию функций $U_n^{(\mp)}$ и $V_n^{(\mp)}$, определённых в (45), (46):

$$\bar{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \bar{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}(\alpha^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \bar{Q}^{(\mp)}u(\bar{\tau}) + \bar{\Lambda}_{\mp}e^{\pm\gamma\bar{\sigma}}),$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}(\alpha^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \underline{Q}^{(\mp)}u(\underline{\tau}) + \underline{\Lambda}_{\mp}e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}),$$

$$\bar{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \bar{x}) + \varepsilon^{(n+1)/2}(\beta^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \bar{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})) + \varepsilon^{n/2+1}k\bar{\Lambda}_{\mp}(1 - e^{\pm\gamma\bar{\sigma}}),$$

$$\underline{V}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon, \underline{x}) - \varepsilon^{(n+1)/2}(\beta^{(\mp)}(x) + e^{-\xi_{\mp}} + \underline{Q}^{(\mp)}v(\underline{\tau})) - \varepsilon^{n/2+1}k\underline{\Lambda}_{\mp}(1 - e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}),$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{x - \bar{x}}{\varepsilon^{3/4}}, \quad \underline{\tau} = \frac{x - \underline{x}}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \underline{\sigma} = \frac{x - \underline{x}}{\varepsilon^{3/4}}, \quad \gamma = \sqrt{c_0},$$

постоянная c_0 определена в (54). Считаем, что все функции, зависящие от “растянутых” переменных, умножены на срезающие функции.

Определим функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ как решения СЛАУ

$$\alpha^{(\mp)} - \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A, \quad \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A,$$

где $A > 0$ – число, которое будет выбрано ниже достаточно большим. Так как определители этих систем, равные $\bar{g}_v^{(\mp)}(x)$, отличны от нуля в силу условия A6, существуют единственные решения

$$\alpha^{(\mp)}(x) = \frac{\bar{f}_v^{(\mp)}(x) + \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)}{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)}A, \quad \beta^{(\mp)}(x) = \frac{1 - \bar{f}_u^{(\mp)}(x)}{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)}A.$$

В следующем пункте будет показано как выбрать числа A , δ , μ , k , $\bar{\Lambda}_{\mp}$, $\underline{\Lambda}_{\mp}$ и функции $\bar{Q}^{(\mp)}u$, $\bar{Q}^{(\mp)}v$, $\underline{Q}^{(\mp)}u$, $\underline{Q}^{(\mp)}v$, чтобы для всех достаточно малых ε две пары функций (50) и (51) были верхним и нижним решениями задачи (1), (2).

4.5. Проверка выполнения условий определения. Пусть $n \geq 1$. Заметим, что функции $F(u, v, x, \varepsilon)$ (в силу неравенств (55)) и $f(u, v, x, \varepsilon)$ (в силу условия A10) удовлетворяют условию квазимоноотонности для достаточно малых ε в области G_0 (см. (52)).

Проверим выполнение неравенств $L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) \leq 0$ и $M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) \leq 0$ условия 2) на интервале $(0, \bar{x})$, где $\bar{U} = \bar{U}^{(-)}$, $\bar{V} = \bar{V}^{(-)}$. Выражения для $L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V})$ и $M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U})$ после длинных, но простых преобразований принимают вид

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) = & \varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{U}^{(-)}}{dx^2} - F(\bar{U}^{(-)}, \bar{V}^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+1}) - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} A - \\ & - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} (\bar{Q}^{(-)} u - \hat{\varphi}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v + O(Ae^{\kappa \bar{\tau}})) - \\ & - \varepsilon^{(n+1)/2} \bar{\Lambda}_- e^{\gamma \bar{\sigma}} (\tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) - c_0 \sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon^{n/2+5/4} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) = & \varepsilon \frac{d^2 \bar{V}^{(-)}}{dx^2} - f(\bar{U}^{(-)}, \bar{V}^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \varepsilon^{(n+1)/2} A + \\ & + \varepsilon^{(n+1)/2} \left(\frac{d^2 \bar{Q}^{(-)} v}{d\bar{\tau}^2} - \hat{f}_u^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} u - \hat{f}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v + O(Ae^{\kappa \bar{\tau}}) \right) - \\ & - \varepsilon^{(n+1)/2} \bar{\Lambda}_- e^{\gamma \bar{\sigma}} (\hat{f}_u^{(-)}(x, \bar{\tau}, \bar{x}) + kc_0) + \varepsilon^{n/2+1} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2). \end{aligned} \quad (59)$$

Определим функции $\bar{Q}^{(-)} u$, $\bar{Q}^{(-)} v$ как решение задачи

$$\begin{aligned} \bar{Q}^{(-)} u - \hat{\varphi}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v &= \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa \bar{\tau}}, \\ \frac{d^2 \bar{Q}^{(-)} v}{d\bar{\tau}^2} &= \hat{f}_u^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} u + \hat{f}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v - \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa \bar{\tau}}, \\ \bar{Q}^{(-)} v(0) &= \mu - \beta^{(-)}(\bar{x}), \quad \bar{Q}^{(-)} v(-\infty) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

где число $\bar{C}^{(-)}$ выбирается достаточно большим, чтобы слагаемые $O(Ae^{\kappa \bar{\tau}})$ в правых частях равенств (58), (59) удовлетворяли неравенствам $|O(Ae^{\kappa \bar{\tau}})| \leq \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa \bar{\tau}}$. Эта задача аналогична задаче (30)–(32), и её решение находится в явном виде

$$\bar{Q}^{(-)} v(\bar{\tau}, \bar{x}) = \Phi_{(-)}(\bar{\tau}, \bar{x}) \left(\frac{\mu - \beta^{(-)}(\bar{x})}{\Phi_{(-)}(0, \bar{x})} + \int_0^{\bar{\tau}} \Phi_{(-)}^{-2}(s, \bar{x}) \int_{-\infty}^s \Phi_{(-)}(t, \bar{x}) \bar{q}^{(-)}(t, \bar{x}) dt ds \right),$$

$$\bar{Q}^{(-)} u(\bar{\tau}, \bar{x}) = \hat{\varphi}_v^{(-)}(\bar{x}, \bar{\tau}, \bar{x}) \bar{Q}^{(-)} v(\bar{\tau}, \bar{x}) + \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa \bar{\tau}},$$

где $\bar{q}^{(-)}(t, \bar{x}) = (\hat{f}_u^{(-)}(\bar{x}, t, \bar{x}) - 1) \bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa t}$.

Первое граничное условие (60) обеспечивает выполнение второго равенства в (56) для знака $(-)$. Определим число $\bar{\Lambda}_-$ так, чтобы выполнялось первое равенство в (56):

$$\bar{\Lambda}_- = \frac{U_n^{(+)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x}) - U_n^{(-)}(\bar{x}, \varepsilon, \bar{x})}{2\varepsilon^{(n+1)/2}} - \alpha^{(-)}(\bar{x}) - \bar{Q}^{(-)} u(0, \bar{x}) + \mu.$$

Число $\bar{\Lambda}_-$ зависит от ε , но является ограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как разность в числителе дроби есть величина порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$. Заметим, что $\bar{\Lambda}_- > 0$ при достаточно большом μ .

Выражение (58) теперь принимает вид

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(\bar{U}, \bar{V}) = & O(\varepsilon^{n/2+1}) - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} A - \tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) \varepsilon^{(n+1)/2} (\bar{C}^{(-)} Ae^{\kappa \bar{\tau}} + O(Ae^{\kappa \bar{\tau}})) - \\ & - \varepsilon^{(n+1)/2} \bar{\Lambda}_- e^{\gamma \bar{\sigma}} (\tilde{F}_u^{(-)}(x, \varepsilon, \bar{x}) - c_0 \sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon^{n/2+5/4} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равенства не зависит от A , поэтому сумму первых двух слагаемых в силу (54) можно сделать отрицательной выбором достаточно большого A . Третье слагаемое является отрицательным при достаточно большом $\overline{C}^{(-)}$. С учётом (54) четвёртое слагаемое также будет отрицательным при $\overline{\Lambda}_- > 0$. Так как $n \geq 1$, то пятое и шестое слагаемые имеют более высокий порядок малости по ε , чем первые четыре, и, значит, при достаточно малых ε не изменят знака всей суммы, т.е. будет выполнено неравенство

$$L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0, \quad x \in (0, \overline{x}).$$

Выражение (59) принимает вид

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) &= O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \varepsilon^{(n+1)/2} A - \varepsilon^{(n+1)/2} (\overline{C}^{(-)} A e^{\kappa \overline{\tau}} + O(A e^{\kappa \overline{\tau}})) - \\ &- \varepsilon^{(n+1)/2} \overline{\Lambda}_- e^{\gamma \overline{\tau}} (\hat{f}_u^{(-)}(x, \overline{\tau}, \overline{x}) + k c_0) + \varepsilon^{n/2+1} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2). \end{aligned}$$

С той лишь разницей, что здесь отрицательность четвёртого слагаемого обеспечивается за счёт выбора достаточно большого k , отсюда получаем выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0, \quad x \in (0, \overline{x}).$$

На интервале $(\overline{x}, 1)$, где $\overline{U} = \overline{U}^{(+)}$, $\overline{V} = \overline{V}^{(+)}$, неравенства $L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0$ и $M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0$ проверяются точно так же. Аналогичным образом доказывается, что на интервалах $(0, \underline{x})$ и $(\underline{x}, 1)$ выполнены неравенства для нижнего решения $L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) > 0$ и $M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) > 0$.

Таким образом, функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 2) определения для случая негладких верхнего и нижнего решений. Кроме того, эти функции являются непрерывными на отрезке $[0, 1]$, так как $\overline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$ и $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ по построению удовлетворяют равенствам (56), (57).

Условие 1) упорядоченности верхнего и нижнего решений проверяется стандартным способом (см. [5]).

Легко проверяется, что функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 3) определения. Перейдём к проверке условия 4). Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) &= \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon, \overline{x}) - \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon, \overline{x}) + \varepsilon^{n/2-1/4} \gamma (\overline{\Lambda}_- + \overline{\Lambda}_+) + \\ &+ \varepsilon^{(n+1)/2} \left(\frac{d\alpha^{(-)}}{dx}(\overline{x}) - \frac{d\alpha^{(+)}}{dx}(\overline{x}) \right) + \varepsilon^{n/2} \left(\frac{d\overline{Q}^{(-)} u}{d\overline{\tau}}(0, \overline{x}) - \frac{d\overline{Q}^{(+)} u}{d\overline{\tau}}(0, \overline{x}) \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Из формальных равенств (37) следует, что

$$\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(X_{2n+1}, \varepsilon, X_{2n+1}) - \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(X_{2n+1}, \varepsilon, X_{2n+1}) = O(\varepsilon^{n/2}),$$

а так как $\overline{x} - X_{2n+1} = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, то это равенство останется верным и при замене X_{2n+1} на $\overline{x}$. При этом выражение (61) примет вид

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) = \varepsilon^{n/2-1/4} \gamma (\overline{\Lambda}_- + \overline{\Lambda}_+) + O(\varepsilon^{n/2}).$$

Выше было показано, что $\overline{\Lambda}_- > 0$ при достаточно большом μ ; такое же неравенство получается для $\overline{\Lambda}_+$. Следовательно, при достаточно малых ε рассматриваемая разность будет положительной, т.е. будет выполнено первое неравенство условия 4).

Разность производных V -компонент верхнего решения приводится к виду

$$\frac{d\bar{V}^{(-)}}{dx}(\bar{x}, \varepsilon) - \frac{d\bar{V}^{(+)}}{dx}(\bar{x}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2}) - \varepsilon^{n/2}\delta J'(x_0) + O(\varepsilon^{n/2+1/4}),$$

где слагаемое $O(\varepsilon^{n/2})$ не зависит от δ . Так как $J'(x_0) < 0$ в силу (5), отсюда следует, что при достаточно большом δ и достаточно малых ε разность в левой части равенства будет положительной, т.е. будет выполнено второе неравенство из условия 4).

Условие 5) определения проверяется точно так же.

Таким образом, при $n \geq 1$ две пары функций $\bar{U}(x, \varepsilon)$, $\bar{V}(x, \varepsilon)$ и $\underline{U}(x, \varepsilon)$, $\underline{V}(x, \varepsilon)$, определённые формулами (50) и (51), являются для достаточно больших A , k , δ , μ и достаточно малых ε упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (1), (2).

4.6. Завершение доказательства теоремы. Из существования упорядоченных верхнего и нижнего решений задачи (1), (2) следует, что эта задача для достаточно малых ε имеет решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам (53), а так как $\bar{U}$, $\bar{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ отличаются от U_n , V_n на величины порядка $O(\varepsilon^{n/2})$, то и решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ отличается от U_n , V_n на величины того же порядка, т.е.

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad v(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0, 1].$$

Эти оценки нетрудно улучшить, если написать их для номера $n+1$ и воспользоваться тем, что $U_{n+1}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $V_{n+1}(x, \varepsilon) = V_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $x \in [0, 1]$. Тогда для $n \geq 0$ получим равенства (48). Теорема доказана.

Следствие 1. Имеют место предельные равенства (6).

Следствие 2. Предельным положением при $\varepsilon \rightarrow 0$ кривой $l_\varepsilon = \{(u, v, x) : u = u(x, \varepsilon), v = v(x, \varepsilon), 0 \leq x \leq 1\}$ (т.е. графика решения задачи (1), (2)) является кривая L .

Следствие 3. При каждом $t = \overline{0, n-1}$ для решения $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$ справедливы равенства вида (48), в которых n заменено на t .

Следствие 4. Для производных решения задачи (1), (2) справедливы асимптотические представления

$$\frac{du}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dU_n}{dx}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad \frac{dv}{dx}(x, \varepsilon) = \frac{dV_n}{dx}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0, 1].$$

5. Пример. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = (u - v)^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon \frac{dv}{dx^2} = v^3 - u + (v^2 - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad 0 < x < 1, \quad (62)$$

с граничными условиями (2). Легко проверяется выполнение условий A1–A10, где

$$\varphi(v, x) = v, \quad g(v, x) = (v^2 - 1) \left(v + x - \frac{1}{2} \right), \quad \psi_1(x) = -1, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2} - x, \quad \psi_3(x) = 1,$$

$$I(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - x \right), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Построим асимптотику решения нулевого порядка, т.е. функции $U_0(x, \varepsilon)$, $V_0(x, \varepsilon)$ (см. (49)). Для функций регулярной части находим $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x) = \mp 1$. Все погранслоиные функции нулевого порядка оказываются равными нулю (это связано с тем, что в данном при-
мере $\bar{u}_0^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_0^{(\mp)}(x)$ – постоянные).

Внутрислойную часть асимптотики следует строить при $x_* = X_1 = x_0 + \varepsilon^{1/4}x_1 = x_0 = 1/2$. Функции $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ определяются как решения задач (21), (19). В отличие от общего случая, в данном примере удаётся найти их в явном виде:

$$Q_0^{(\mp)}v(\tau) = \frac{\pm 2}{1 + \exp(\mp\sqrt{2}\tau)}.$$

Из (22) следует равенство $Q_0^{(\mp)}u(\tau) = Q_0^{(\mp)}v(\tau)$.

Таким образом, асимптотика нулевого порядка в задаче (62), (2) имеет вид

$$U_0(x, \varepsilon) = V_0(x, \varepsilon) = \begin{cases} -1 + \frac{2}{1 + \exp(-\sqrt{2}\tau)}, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - \frac{2}{1 + \exp(\sqrt{2}\tau)}, & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \tau = \frac{x - 1/2}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

По доказанной теореме существует решение этой задачи, которое отличается от $U_0(x, \varepsilon)$, $V_0(x, \varepsilon)$ на величину $O(\sqrt{\varepsilon})$.

6. Заключительные замечания.

1. В данной задаче внутренний переходный слой описывается функциями, зависящими от одной растянутой переменной τ , т.е. является одномасштабным, что нехарактерно для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) с различными степенями малого параметра при вторых производных. В исследованных ранее задачах такого типа с кратным корнем вырожденного уравнения внутренний слой оказывался двухмасштабным. Для случая простых корней одномасштабный внутренний слой был описан, например, в работе [6].

2. Если функция h (см. условие A1) зависит не только от x , но также от u и v , причём $h(u, v, x) > 0$ при $(u, v, x) \in I_u \times I_v \times [0, 1]$, то качественные особенности асимптотики решения с переходным слоем сохраняются, но выкладки становятся более громоздкими.

3. Представляет интерес случай, когда корень $u = \varphi(v, x)$ первого уравнения (3) является трёхкратным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефёдов Н.Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
3. Бутузов В.Ф., Симаков Р.Е. Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 435–465.
4. Нефёдов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
5. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущённой системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
6. Левашова Н.Т., Петровская Е.С. Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки // Учен. зап. физ. ф-та Моск. ун-та. 2014. № 3. С. 143101.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.11.2022 г.
После доработки 26.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

© 2023 г. О. Х. Абдуллаев

Для параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа, содержащего нелинейное нагруженное слагаемое, исследуется нелокальная задача с интегральным условием склеивания. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – с применением теории интегральных уравнений. Определяются классы и достаточные условия для заданных функций, обеспечивающих однозначную разрешимость исследуемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030056, EDN: QUNKQU

Введение. Данная работа посвящена исследованию нелокальной задачи с интегральными условиями склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_CD_{0y}^\alpha u + f_1(x, y; u(x; 0)) & \text{при } x > 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f_2(x, y; u(x + y; 0)) & \text{при } x > 0, \quad y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f_3(x, y; u_y(0; x + y)) & \text{при } x < 0, \quad y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

с оператором Капуто [1, с. 108]

$${}_CD_{0y}^\alpha f(y) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^y (y - z)^{-\alpha} f'(z) dz$$

дробного порядка $0 < \alpha < 1$, где $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$, – заданные функционалы, действующие на следы решения уравнения (1) и его производной по переменной y .

Локальная задача с разрывными условиями склеивания (но без интегрального слагаемого) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \operatorname{sign}(xy)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 + \operatorname{sign}(xy)}{2} {}_CD_{0t}^\alpha u = f(x, y), \quad \alpha \in (0, 1),$$

была изучена в статье [2]. Следует отметить, что это уравнение линейное (причём без нагруженной части). При исследовании поставленной задачи с линейными условиями для него были получены линейное дифференциальное уравнение (относительно $u(x, 0) = \tau_1(x)$) и линейное интегральное уравнение типа Вольтерры второго рода (относительно $u_y(0, y) = \tau_2'(y)$) со слабой особенностью, однозначная разрешимость которой сразу следует из теории интегральных уравнений.

Локальные и нелокальные задачи с непрерывными и разрывными условиями склеивания для нагруженных уравнений параболо-гиперболических типа с одной линией изменения типа, содержащие различные интегро-дифференциальные операторы целого и дробного порядков, были изучены в работах [3–6] и др. Хотелось бы отметить, что уравнения и задачи, рассмотренные в этих работах, не содержат нелинейные части.

Задачи для уравнений смешанного типа с двумя и тремя линиями изменения типа целого и дробного порядка рассмотрены в статьях [7–10] и др.

В работах [11] и [12] доказана однозначная разрешимость различных локальных и нелокальных краевых задач с интегральными условиями склеивания для парабола-гиперболического уравнения с нелинейной нагруженной частью и дифференциальным оператором Капуто, имеющего только одну линию изменения типа.

1. Постановка задачи и основные функциональные соотношения. Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной отрезками A_1A_2 , A_2B_2 прямых $x = l$, $y = h$ при $x > 0$, $y > 0$ и A_1C_1 , C_1B_1 на характеристиках $x - y = l$, $x + y = 0$ уравнения (1) при $x > 0$, $y < 0$, а также отрезками B_1C_2 , C_2B_2 на характеристиках $x + y = 0$, $y - x = h$ уравнения (1) при $x < 0$, $y > 0$, здесь $l, h = \text{const} > 0$. Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_1 , а гиперболические части – через Ω_2 при $x > 0$ и Ω_3 при $x < 0$.

Задача NL. Требуется найти решение $u(x; y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W = \{u : u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_3 \cup B_1C_2) \cap C^2(\Omega_2 \cup \Omega_3); u_{xx}, {}_CD_{0y}^\alpha u \in C(\Omega_1)\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(l; t) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x; -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l/2, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dy}u(-y/2; y/2) = a_1(y)u_x(-0; y) + a_2(y)u_y(-0; y) + a_3(y)u(0; y) + a_4(y), \quad 0 < y < h, \quad (4)$$

и интегральным условиям склеивания

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x; y) &= \lambda_1(x)u_y(x; -0) + \lambda_2(x)u_x(x; -0) + \lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)u^{p_1}(t; 0) dt + \\ &+ \lambda_4(x)u^{p_2}(x; 0) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < l, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_x(+0; y) &= \mu_1(y)u_x(-0; y) + \mu_2(y)u_y(-0; y) + \mu_3(y) \int_0^y r_2(t)u(0; t) dt + \\ &+ \mu_4(y)u(0; y) + \mu_5(y), \quad 0 < y < h, \end{aligned} \quad (6)$$

где $a_k(y)$, $\lambda_k(x)$, $\mu_k(y)$, $k = \overline{1, 5}$, $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $r_1(x)$, $r_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, причём $\sum_{k=1}^4 \lambda_k^2(x) \neq 0$, $\sum_{i=1}^3 a_k^2(x) \neq 0$ и $\sum_{k=1}^4 \mu_k^2(x) \neq 0$.

Учитывая решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad u_y(x, -0) = \nu_1^-(x), \quad 0 < x < l,$$

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq h; \quad u_x(-0, y) = \nu_2^-(y), \quad 0 < y < h,$$

а также используя краевые условия (3) и (4), находим основные функциональные соотношения

$$\nu_1^-(x) = \tau_1'(x) - \psi'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1(\xi)\right) d\xi, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned} (2a_1(y) + 1)\nu_2^-(y) &= (1 - 2a_2(y))\tau_2'(y) - 2a_3(y)\tau_2(y) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^y f_3\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_2'(\xi)\right) d\xi - 2a_4(y), \quad 0 < y < h, \end{aligned} \quad (8)$$

соответственно из гиперболических областей Ω_2 и Ω_3 .

2. Исследование задачи NL. Введём обозначения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, y) = \nu_1^+(x), \quad u_x(+0, y) = \nu_2^+(y).$$

Из интегральных условий склеивания (5), (6) имеем

$$\nu_1^+(x) = \lambda_1(x)\nu_1^-(x) + \lambda_2(x)\tau_1'(x) + \lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt + \lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < l, \quad (9)$$

$$\nu_2^+(y) = \mu_1(y)\nu_2^-(y) + \mu_2(y)\tau_2'(y) + \mu_3(y) \int_0^y r_2(t)\tau_2(t) dt + \mu_4(y)\tau_2(y) + \mu_5(y), \quad 0 < y < h. \quad (10)$$

Далее из параболического уравнения (1) при $y \rightarrow +0$ с учётом равенства $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} f(y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} f(y)$ (см. [13, с. 35]) и интегрального условия склеивания (9) получим

$$\begin{aligned} \tau_1''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu_1^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau_1'(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x) + f_1(x, 0; \tau_1(x)) - \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (7) в (11), запишем интегро-дифференциальное уравнение относительно $\tau_1(x)$:

$$\begin{aligned} \tau_1''(x) - \Gamma(\alpha)(\lambda_1(x) + \lambda_2(x))\tau_1'(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x) + f_1(x, 0; \tau_1(x)) + \\ + \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x) \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1(\xi)\right) d\xi - \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) + \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\psi'\left(\frac{x}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) запишем в следующем виде:

$$\tau_1''(x) - \beta(x)\tau_1'(x) + \Phi(x; \tau_1(x)) = g(x), \quad (13)$$

где $\beta(x) = \Gamma(\alpha)(\lambda_1(x) + \lambda_2(x))$,

$$\begin{aligned} \Phi(x; \tau_1(x)) = f_1(x, 0; \tau_1(x)) + \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x) \int_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1(\xi)\right) d\xi - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x) \int_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t) dt - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x), \\ g(x) = \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) + \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\psi'(x/2). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть существуют значения p_1 и p_2 , удовлетворяющие неравенству

$$|z_1^{p_i}(x) - z_2^{p_i}(x)| \leq L(p_i)|z_1(x) - z_2(x)|, \quad L(p_i) = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

для всех функций $z_i(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, $i = 1, 2$, кроме того, функции $f_i(\cdot)$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют условию Липшица по третьему аргументу, т.е. имеют место оценки

$$|f_1(x, 0; z_1(x)) - f_1(x, 0; z_2(x))| \leq L_1|z_1(x) - z_2(x)|, \quad L_1 = \text{const} > 0, \quad (16)$$

$$\left| f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; z_1(\xi)\right) - f_2\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; z_2(\xi)\right) \right| \leq L_2 |z_1(\xi) - z_2(\xi)|, \quad L_2 = \text{const} > 0, \quad (17)$$

$$\left| f_3\left(\frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+y}{2}; z_1(\xi)\right) - f_3\left(\frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+y}{2}; z_2(\xi)\right) \right| \leq L_3 |z_1(\xi) - z_2(\xi)|, \quad L_3 = \text{const} > 0. \quad (18)$$

Тогда справедлива

Теорема. Пусть числа $p_1, p_2 \geq 1$, $a_3(y)\mu_1(y) \neq 0$, функции $f_i(\cdot) \in C(\bar{\Omega}_i \times \mathbb{R}) \cap C^1(\Omega_i \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют условию Липшица по третьему аргументу и имеют место условия

$$\lambda_i(x), \lambda_5(x), r_1(x) \in C[0, l] \cap C^1(0, l), \quad i = \overline{1, 4}, \quad \psi(x) \in C[0, l/2] \cap C^2(0, l/2), \quad (19)$$

$$a_i(y), \mu_i(y), \mu_5(y), \varphi(y), r_2(y) \in C[0, h] \cap C^1(0, h), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (20)$$

$$2a_1(y) + 1 \neq 0, \quad \mu_i(y)(1 - 2a_2(y)) + \mu_2(y)(2a_1(y) + 1) \neq 0, \quad (21)$$

$$l^2 e^{\beta_0} (L_1 + c_3 + l(c_1 L_2 + c_2)) < 1, \quad (22)$$

где $\beta_0 = \Gamma(\alpha)(\|\lambda_1(x)\|_C + \|\lambda_2(x)\|_C)$, $c_1 = \Gamma(\alpha)\|\lambda_1(x)\|_C/2$, $c_2 = \Gamma(\alpha)L(p_1)\|\lambda_3(x)\|_C\|r_1(x)\|_C$, $c_3 = \Gamma(\alpha)L(p_2)\|\lambda_4(x)\|_C$. Тогда решение задачи NL существует и единственно.

Доказательство. Заметим, что нелинейное дифференциальное уравнение (13) с условиями $\tau_1(0) = \psi(0)$ и $\tau_1(l) = \varphi(0)$ (эти условия вытекают из краевых условий (2) и (3)) легко сводится к нелинейному интегральному уравнению вида

$$\tau_1(x) - g_1(x) = \int_0^l \Phi(z; \tau_1(z)) K_1(x, z) dz \equiv I(\tau_1), \quad (23)$$

где

$$K_1(x, z) = B^-(x) \begin{cases} \delta(x) \int_z^l B(t) dt - \int_x^l B(t) dt & \text{при } 0 \leq z \leq x, \\ \delta(x) \int_z^l B(t) dt - \int_z^l B(t) dt & \text{при } x \leq z \leq l, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \int_0^l g(z) K_1(x, z) dx + (\varphi(0) - \psi(0))\delta(x) + \psi(0), \quad \delta(x) = \int_x^l B(t) dt \Big/ \int_0^l B(t) dt,$$

$B(x) = \exp(\int_0^x \beta(t) dt)$, $B^-(x) = \exp(-\int_0^x \beta(t) dt)$, причём, учитывая класс заданных функций (19), имеем

$$|K_1(x, z)| \leq k_{01} = l e^{\beta_0}, \quad |g_1(x)| \leq g_{01} = \Gamma(\alpha) k_{01} l (\|\lambda_5(x)\|_C + \|\lambda_1(x)\varphi'(x/2)\|_C) + |\varphi(0)|. \quad (24)$$

В случае если $p_1 = p_2 = 1$ и $f_j(\cdot)$, $j = 1, 2, 3$, – линейные функции относительно третьего аргумента, однозначная разрешимость интегрального уравнения (23) следует из единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода [14, с. 78, теорема 2] (т.е. в этом случае отдельно доказывается единственность решения задачи).

Пусть функции $f_i(\cdot)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (16) и (17), тогда из (14), учитывая класс заданных функций (см. (19)) и используя неравенство (15), получаем

$$|\Phi(z; \tilde{\tau}_1(z)) - \Phi(z; \tilde{\tau}_2(z))| \leq L_1 |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| + c_1 L_2 \left| \int_0^x |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| dz \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + c_2 \left| \int_0^x |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| dz \right| + c_3 |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| = \\
& = (L_1 + c_3) |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| + (c_1 L_2 + c_2) \left| \int_0^x |\tilde{\tau}_1(z) - \tilde{\tau}_2(z)| dz \right|, \quad (25)
\end{aligned}$$

где $\tilde{\tau}(x) = \tau_1(x)$. Разрешимость интегрального уравнения (23) доказываем методом последовательных приближений, при этом функциональную последовательность относительно функции $\tilde{\tau}(x)$ построим с помощью рекуррентного уравнения

$$\tilde{\tau}_n(x) = \int_0^l \Phi(z; \tilde{\tau}_{n-1}(z)) K_1(x, z) dz + g_1(x),$$

где $\tilde{\tau}_0(x) = g_1(x)$.

Учитывая неравенства $|\Phi(z; \tilde{\tau}(z))| \leq \Phi_0$, $\Phi_0 = \text{const} > 0$, и (24), (25), можно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{aligned}
|\tilde{\tau}_1(x) - \tilde{\tau}_0(x)| & \leq k_{01} l \Phi_0, \quad |\tilde{\tau}_2(x) - \tilde{\tau}_1(x)| \leq k_{01}^2 l^2 (L_1 + c_3 + l(c_1 L_2 + c_2)) \Phi_0, \quad \dots \\
\dots, \quad |\tilde{\tau}_n(x) - \tilde{\tau}_{n-1}(x)| & \leq k_{01}^n l^n (L_1 + c_3 + l(c_1 L_2 + c_2))^{n-1} \Phi_0. \quad (26)
\end{aligned}$$

В силу условия (22) из оценки (26) следует, что оператор в правой части интегрального уравнения (23) является сжимающим. Следовательно, для оператора $I(\tau_1)$ существует единственная неподвижная точка, т.е. интегральное уравнение (23) имеет единственное решение в классе $C[0, l] \cap C^2(0, l)$. После определения функции $\tau_1(x)$ из функционального соотношения (7) находим $\nu_1(x)$. Таким образом, решение исследуемой задачи в области Ω_2 можно восстановить как решение задачи Коши.

Далее, воспользовавшись решением первой краевой задачи для параболического уравнения в области Ω_1 , находим второе функциональное соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2^+(y)$ на отрезке $B_1 B_2$, которое имеет вид [2, формула (2.12); 15, формула (11)]

$$\nu_2^+(y) = - \int_0^y K(y-t) \tau_2'(t) dt + \Phi_1(y), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}
K(y-t) &= \frac{1}{(y-t)^\beta} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e_{1,\beta}^{1,1-\beta} \left(-\frac{2nl}{(y-t)^\beta} \right) \right], \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \\
\Phi_1(y) &= 2 \int_0^y \sum_{m=0}^{\infty} (y-\eta)^{-\beta-1} e_{1,\beta}^{1,-\beta} \left(-\frac{2ml+1}{(y-\eta)^\beta} \right) \varphi(\eta) d\eta - \\
&- \int_0^l \sum_{m=0}^{\infty} y^{-\alpha} e_{1,\beta}^{1,1-\alpha} \left(-\frac{2ml-\xi}{y^\beta} \right) \tau_1(\xi) d\xi - \lim_{x \rightarrow +0} \int_0^y \int_0^l G_x(x, y, \xi, \eta) f_1(\xi, \eta, \tau_1(\xi)) d\xi d\eta, \\
V(x, y; \eta) &= \lim_{\xi \rightarrow l} G_\xi(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{y-\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sign}(x + (2n+1)l) e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{x + (2n+1)l}{(y-\eta)^\beta} \right), \\
\bar{G}(x, \xi, y) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \eta^{-\alpha} G(x, y, \xi, \eta) d\eta,
\end{aligned}$$

$$e_{1,\beta}^{1,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\gamma - \beta n)}$$

– функция типа Райта [13, с. 23], а

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y - \eta)^{\alpha/2-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2} \left(-\frac{|x - \xi + 2nl|}{(y - \eta)^{\alpha/2}} \right) - e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2} \left(-\frac{|x + \xi + 2nl|}{(y - \eta)^{\alpha/2}} \right) \right]$$

– функции Грина первой краевой задачи [13, с. 123; 16]. Заметим, что ядро $K(y-t)$, представленное в виде ряда функций типа Райта, имеет слабую особенность (см. [13, формулы (2.2.5), (2.2.24)]), т.е. $|K(y-t)| \leq \text{const} \times (y-t)^{-\beta}$. Также можно убедиться, что $|\Phi_1(y)| \leq \text{const}$ (см. [13, с. 108]).

Пусть $2a_1(y) + 1 \neq 0$. Тогда, учитывая (8), (10) и (27), получаем

$$\begin{aligned} & A_1(y)\tau_2'(y) - A_2(y) \int_0^y \tau_2'(t) dt + \mu_3(y) \int_0^y \tau_2'(z) dz \int_z^y r_2(t) dt + \\ & + \int_0^y K(y-t)\tau_2'(t) dt - \tilde{A}_3(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) dt = F(y), \\ & F(y) = \Phi_1(y) + \psi(0) \left(\mu_3(y) \int_0^y r_2(t) dt - A_2(y) \right) - \mu_5(y) + \frac{2a_4(y)\mu_1(y)}{1 + 2a_1(y)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_3(y)\mu_1(y)/(2 + 4a_1(y))$. Далее, учитывая условие (21), последнее уравнение запишем в виде

$$\tau_2'(y) + \int_0^y K_2(t, y)\tau_2'(t) dt = F^*(y) - A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) dt, \quad (28)$$

где

$$K_2(t, y) = \frac{\mu_3(y) \int_t^y r_2(z) dz + K(y-t) - A_2(y)}{A_1(y)}, \quad A^*(y) = -\frac{\tilde{A}_3(y)}{A_1(y)}, \quad F^*(y) = \frac{F(y)}{A_1(y)},$$

причём, учитывая класс заданных функций (см. (20)) и неравенства $|K(y-t)| \leq \text{const} \times (y-t)^{-\beta}$, $|\Phi_1(y)| \leq \text{const}$, имеем

$$|A^*(y)| \leq A_0, \quad |K_2(t, y)| \leq k_{02}(y-t)^{-\beta}, \quad |F^*(y)| \leq F_0, \quad \left| f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) \right| \leq f_{03},$$

где $A_0, k_{02}, F_0, f_{03} = \text{const} > 0$.

Так как ядро интегрального уравнения (28) имеет слабую особенность и правая часть этого уравнения является непрерывной функцией, то, основываясь на теории интегральных уравнений Вольтерры второго рода, запишем решение в виде

$$\begin{aligned} \tau_2'(y) = & F^*(y) + \int_0^y R(t, y)F^*(t) dt - A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right) dt - \\ & - \int_0^y R(t, y)A^*(t) dt \int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_2'(z)\right) dz, \end{aligned} \quad (29)$$

где $R(t, y)$ – резольвента ядра $K_2(t, y)$, причём $|R(t, y)| \leq r_0(y - t)^{-\beta}$, $r_0 = \text{const} > 0$. Полученное уравнение (29) исследуем также методом последовательных приближений.

Рассмотрим рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} \tau_n^*(y) = & -A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_{n-1}^*(t)\right) dt - \\ & - \int_0^y R(t, y) A^*(t) dt \int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_{n-1}^*(z)\right) dz + \tilde{F}(y), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\tilde{F}(y) = F^*(y) + \int_0^y R(t, y) F^*(t) dt$, причём $|\tilde{F}(y)| \leq \tilde{F}_0$.

Пусть функция $f_3(\cdot, \cdot; \tau_2'(t))$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу (см. условие (18)), т.е.

$$|f_3(\cdot, \cdot; \tau_1^*(t)) - f_3(\cdot, \cdot; \tau_2^*(t))| \leq L_3 |\tau_1^*(t) - \tau_2^*(t)|, \quad L_3 = \text{const} > 0,$$

где $\tau^*(t) = \tau_2'(t)$. Тогда, предполагая $\tau_0^*(y) = \tilde{F}(y)$ и учитывая (30), составим функциональную последовательность относительно $\tau^*(y)$, сходимость которой следует из неравенств

$$\begin{aligned} |\tau_1^*(y) - \tau_0^*(y)| & \leq \left| A^*(y) \int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_0^*(t)\right) dt \right| + \\ & + \left| \int_0^y R(t, y) A^*(t) dt \int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_0^*(z)\right) dz \right| \leq A_0 f_{03} y + A_0 r_0 f_{03} \frac{y^2}{2} \leq cy, \\ |\tau_2^*(y) - \tau_1^*(y)| & \leq cL_3 \left| A^*(y) \int_0^y t dt \right| + c \left| \int_0^y A^*(t) R(t, y) dt \int_0^t z dz \right| \leq \\ & \leq cA_0 L_3 \frac{y^2}{2!} + cA_0 r_0 \frac{y^3}{3!} \leq cA_0 (L_3 + r_0) \frac{y^2}{2!}, \quad \dots \\ \dots, \quad |\tau_n^*(y) - \tau_{n-1}^*(y)| & \leq cA_0 (L_3 + r_0)^{n-1} \frac{y^n}{n!} \end{aligned}$$

при $0 < y < h \leq 1$. Отметим также, что если $1 < y < h < \infty$, то можно получить аналогичные неравенства, из которых следует сходимость функциональной последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$.

Пусть предел последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$ есть функция $\hat{\tau}_2(y)$, т.е. $\tau_2'(y) = \hat{\tau}_2(y)$, тогда, учитывая равенство $\tau_2(0) = \psi(0)$, находим

$$\tau_2(y) = \int_0^y \hat{\tau}(t) dt + \psi(0).$$

Пусть $2a_1(y) + 1 \equiv 0$. Тогда при выполнении одного из условий: $2a_2(y) - 1 \neq 0$ или $a_3(y) \neq 0$, из (8) можно найти $\tau_2(y)$. Далее, определяя из соотношения (27) функцию $\nu_2^+(y)$, находим $\nu_2^-(y)$ из интегрального условия склеивания (10) при условии $\mu_1(y) \neq 0$. Следовательно, решение задачи NL можно будет восстановить и в областях Ω_1 и Ω_3 соответственно как решение первой краевой задачи [13, с. 108; 16] и задачи Коши [2]. Так как искомые функции являются решениями нелинейных интегральных и функциональных уравнений, для которых с помощью принципа сжимающих отображений найдены условия однозначной разрешимости, из полученного результата также следует единственность решения поставленной задачи. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies. V. 204. Amsterdam, 2006.
2. *Kadirkulov B.J.* Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative // Electronic J. of Differ. Equat. 2014. V. 57. P. 1–7.
3. *Сабитов К.Б., Мелишева Е.П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 62–76.
4. *Сабитов К.Б.* Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31–42.
5. *Abdullaev O.Kh., Sadarangani K.* Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative // Electron. J. of Differ. Equat. 2016. V. 164. P. 1–10.
6. *Исломов Б.И., Абдуллаев О.Х.* Задача типа Геллершtedта для нагруженного уравнения параболическо-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдели-Кобера дробного порядка // Изв. вузов. Математика. 2020. № 106. С. 33–46.
7. *Ефимов А.В.* О краевых задачах с операторами Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. 2004. Т. 26. С. 16–20.
8. *Елеев В.А., Лесев В.Н.* О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа // Владикавказ. мат. журн. 2001. Т. 3. № 4. С. 9–22.
9. *Karimov E.T., Sotvoldiev A.I.* Existence of solutions to non-local problems for parabolic-hyperbolic equations with three lines of type changing // Electron. J. of Differ. Equat. 2013. V. 138. P. 1–5.
10. *Исломов Б., Холбеков Ж.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-I // Узбекский мат. журн. 2015. № 4. С. 47–57.
11. *Yuldashev T.K., Abdullaev O.Kh.* Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 5. P. 1113–1123.
12. *Abdullaev O.Kh.* Solvability of BVPs for the parabolic-hyperbolic equation with non-linear loaded term // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14. № 2. P. 133–145.
13. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
14. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.
15. *Сопуев А., Дж. Т. Джусураев* Краевые задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1009–1015.
16. *Matichuev M.O.* Solutions of the main boundary value problems for the time-fractional telegraph equation by the Green function method // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20. № 1. P. 190–211.

Институт математики имени В.И. Романовского,
г. Ташкент, Узбекистан
Ташкентский международный университет Кимё,
Узбекистан

Поступила в редакцию 10.08.2021 г.
После доработки 11.12.2022 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ВРЕМЕНИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2023 г. У. Д. Дурдиев

Исследована прямая задача для поперечных колебаний однородной балки конечной длины с нелокальными по времени условиями, получены необходимое и достаточное условия существования её решения. Для прямой задачи изучена обратная задача по определению коэффициентов, зависящих от времени, при младшей производной и правой части уравнения. Доказаны существование и единственность решения обратной задачи. Для решения используется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к интегральному уравнению и к системе интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123030068, EDN: QUWSCE

Введение. Большинство задач о колебаниях балок находят широкое применение в строительной механике, в теории устойчивости ходовых валов, а их решения приводят к дифференциальным уравнениям высших порядков [1, с. 143–147]. В статье [2] приведён подробный анализ зарубежных публикаций и результатов в области динамического поведения неоднородных балок. В работах [3–6] исследуется разрешимость начально-краевых задач для уравнения колебания балки с различными краевыми условиями. Аналитическому решению дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий посвящена статья [7].

Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения получили название *обратных задач* математической физики. Обратные задачи по определению ядер в интегро-дифференциальных уравнениях из теории вязкоупругости исследованы в [8–10]. В работах [11–13] применён метод решения обратных задач, основанный на представлении решения двумерных обратных задач в виде тригонометрического полинома по одной из пространственных переменных. В статье [14] рассматривается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента в уравнении поперечных колебаний балки, который с физической точки зрения представляет собой её жёсткость. С численными методами решений обратных задач можно ознакомиться в работах [15–20]. В работе [21] рассмотрена обратная задача, связанная с восстановлением второго момента площади поперечного сечения для балки с использованием схемы сдвигающейся равномерно распределённой нагрузки. Эффективность вариационного метода для решения обратной задачи нахождения коэффициентов в уравнении Эйлера–Бернулли продемонстрирована в статье [22].

В данной работе изучены прямая задача с нелокальными по времени условиями и обратная задача с интегральными условиями переопределения для уравнения поперечных колебаний однородной балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее уравнение поперечных колебаний балки длины l , опирающейся на концы:

$$w_{tt} + a^2 w_{xxxx} + q(t)w = f(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (1)$$

где $a^2 = EJ/(\rho S)$, $f(x, t)$ – внешняя сила, ρ – плотность балки, S – площадь её поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, $\Sigma = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ – прямоугольная область, T – временной интервал. По всей длине балка поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $q(t)$.

Прямая задача. Найти в области Σ решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$w(x, 0) + \delta_1 w(x, T) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) + \delta_2 w_t(x, T) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \psi(l) = 0,$$

$$w(0, t) = w_{xx}(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Определение. Решением задачи (1)–(3) назовём функцию $w(x, t)$ из класса $C_{x,t}^{4,2}(\Sigma)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество, при положительных числах δ_1, δ_2 и достаточно гладких функциях $q(t), f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$.

Обратная задача. Пусть $f(x, t) = g(t)f_0(x)$. Найти функции $q(t)$ и $g(t)$, $t \in [0, T]$, по известным равенствам

$$\int_0^l y_i(x)w(x, t) dx = Y_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где $y_i(x), Y_i(t)$, – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l y_i(x)\varphi(x) dx = Y_i(0) + \delta_1 Y_i(T), \quad \int_0^l y_i(x)\psi(x) dx = Y_i'(0) + \delta_2 Y_i'(T), \quad Y(t) \neq 0. \quad (5)$$

2. Исследование прямой задачи. С помощью обозначения $F(x, t) := f(x, t) - q(t)w(x, t)$ уравнение (1) примет вид $w_{tt} + a^2 w_{xxx} = F(x, t)$.

Решение задачи (1)–(3) ищется как

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)X_k(x), \quad (6)$$

где $w_k(t) = \sqrt{(2/l)} \int_0^l w(x, t) \sin(\mu_k x) dx$, $X_k(x) = \sqrt{(2/l)} \sin(\mu_k x)$, $\mu_k = \pi k/l$, $k \in \mathbb{N}$.

Подставив функцию (6) в уравнение (1) и условия (2), после разделения переменных получим задачу

$$w_k''(t) + \lambda_k^2 w_k(t) = F_k(t; q, w), \quad \lambda_k = a\mu_k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < t \leq T, \quad (7)$$

$$w_k(0) + \delta_1 w_k(T) = \varphi_k, \quad w_k'(0) + \delta_2 w_k'(T) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

где

$$F_k(t; q, w) = f_k(t) - q(t)w_k(t), \quad (9)$$

$$f_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x, t) \sin(\mu_k x) dx, \quad (10)$$

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin(\mu_k x) dx, \quad \psi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin(\mu_k x) dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Решение задачи (7), (8) запишем в следующем виде [23]:

$$w_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, w) ds, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\rho_k(T) &= 1 + (\delta_1 + \delta_2) \cos(\lambda_k T) + \delta_1 \delta_2, \\ E_k(t) &= \varphi_k(\cos \lambda_k t + \delta_2 \cos(\lambda_k(T-t))) + \frac{\psi_k}{\lambda_k}(\sin(\lambda_k t) - \delta_1 \sin(\lambda_k(T-t))), \\ G_k(t, s) &= \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_k \rho_k(T)} [\delta_1 \sin(\lambda_k(T-t)) \cos(\lambda_k s) + \delta_2 \cos(\lambda_k(T-t)) \sin(\lambda_k s) + \\ + \delta_1 \delta_2 \sin(\lambda_k(s-t))], & s \in [0, t], \\ -\frac{1}{\lambda_k \rho_k(T)} [\delta_1 \sin(\lambda_k(T-t)) \cos(\lambda_k s) + \delta_2 \cos(\lambda_k(T-t)) \sin(\lambda_k s) + \\ + \delta_1 \delta_2 \sin(\lambda_k(s-t))] + \frac{1}{\lambda_k} \sin(\lambda_k(s-t)), & s \in [t, T]. \end{cases}\end{aligned}$$

Подставив выражение (12) в (6), получим

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, w) ds \right\} \sin(\mu_k x). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и условии $1 + \delta_1 \delta_2 > \delta_1 + \delta_2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\rho_k(T)} \leq \frac{1}{1 - (\delta_1 + \delta_2) + \delta_1 \delta_2} \equiv \beta > 0. \quad (14)$$

Теорема 1 [24]. Пусть $\alpha, \lambda, \mu > 0$ и $g(t)$ – непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция на отрезке $[a, b]$, причём $a < b \leq +\infty$. Кроме того, предположим, что $\omega(t)$ интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$ и такая, что выполняется неравенство

$$\omega(t) \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} \omega(\zeta) d\zeta + \mu \int_a^b \omega(\zeta) d\zeta + g(t)$$

для каждой $t \in [a, b]$. Если $0 \leq \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha) < 1$, то

$$\omega(t) \leq E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) \omega_0 + g(t) - E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) g(a) + \lambda \int_a^t (t-\zeta)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\zeta)^\alpha) g(\zeta) d\zeta,$$

где

$$\begin{aligned}\omega_0 &\leq \frac{1}{1 - \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha)} \times \\ &\times \left(\mu \int_a^b g(\zeta) d\zeta - \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha) g(a) + \mu \lambda \int_a^b (b-\zeta)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(b-\zeta)^\alpha) g(\zeta) d\zeta \right).\end{aligned}$$

В теореме 1 используется двухпараметрическая функция Миттаг-Лёффлера

$$E_{\alpha,\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma + \alpha k)}, \quad \alpha, \gamma > 0, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

в частности, при $\gamma = 1$ она становится однопараметрической функцией Миттаг-Лёффлера, т.е. $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$ [25, с. 40–49].

Подставив в (12) функцию $F_k(t; q, w)$ (9), имеем

$$w_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T f_k(s) G_k(t, s) ds - \int_0^T q(s) w_k(s) G_k(t, s) ds.$$

Оценим эту функцию с учётом вида функции $E_k(t)$ при $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} |w_k(t)| \leq & \beta(1 + \delta_2) |\varphi_k| + \frac{\beta(1 + \delta_1)}{\lambda_k} |\psi_k| + \frac{\beta\delta}{\lambda_k} \int_0^T |f_k(s)| ds + \frac{\beta}{\lambda_k^2} \int_t^T |f_k(s)| ds + \\ & + \frac{\bar{q}\beta\delta}{\lambda_k} \int_0^t |w_k(s)| ds + \frac{\bar{q}\beta}{\lambda_k} \left(\delta + \frac{1}{\lambda_k} \right) \int_0^T |w_k(s)| ds, \end{aligned}$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2$, $\bar{q} = \max_{s \in [0, T]} |q(s)|$. Применив теорему 1 при $\alpha = 1$ к последнему неравенству, ввиду (15) получим следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $0 < C_{2k}(e^{C_{1k}T} - 1)/C_{1k} < 1$, тогда справедлива оценка

$$|w_k(t)| \leq \lambda_k \tilde{C} g_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{\bar{q}\beta\delta}{\lambda_k}, \quad C_{2k} = \frac{\bar{q}\beta}{\lambda_k} \left(\delta + \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad \tilde{C} = \frac{\delta}{\lambda_1\delta(2 - e^{C_{1k}T}) + e^{C_{1k}T} - 1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_k &= \beta(1 + \delta_2) |\varphi_k| + \frac{\beta(1 + \delta_1)}{\lambda_k} |\psi_k| + \frac{\beta}{\lambda_k} \left(\delta + \frac{1}{\lambda_1} \right) \int_0^T |f_k(s)| ds, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, учитывая (17), из оценки (16) имеем

$$|w_k(t)| \leq \bar{C}_1 (\lambda_k |\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|),$$

где $\|f_k\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)|$. Используя равенство (7) и неравенство (12), получаем оценку

$$|w_k''(t)| \leq \bar{C}_2 (\lambda_k^3 |\varphi_k| + \lambda_k^2 |\psi_k| + \lambda_k^2 \|f_k(t)\| + \bar{q} |w_k|) \leq \bar{C}_2 (\bar{q} + \lambda_k^2) (\lambda_k |\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|).$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. При любом $t \in [0, T]$ и для достаточно больших k справедливы оценки

$$|w_k(t)| \leq \bar{C}_1 (k^2 |\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|_C), \quad |w_k''(t)| \leq \bar{C}_2 (k^6 |\varphi_k| + k^4 |\psi_k| + k^4 \|f_k(t)\|_C),$$

здесь и далее $\bar{C}_i$ – положительные постоянные.

Формально из (6) составим ряды

$$w_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k''(t) \sin(\mu_k x), \quad (18)$$

$$w_{xxxx} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) \sin(\mu_k x). \quad (19)$$

Ряды (6), (18) и (19) при любых $(x, t) \in \bar{\Sigma}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$\bar{C}_3 \sum_{k=1}^{\infty} (k^6 |\varphi_k| + k^4 |\psi_k| + k^4 \|f_k(t)\|).$$

Имеет место следующая вспомогательная

Лемма 3. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^6[0, l], \quad \varphi^{VII}(x) \in L_2[0, l], \\ \varphi(0) &= \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(l) = \varphi^{VI}(0) = \varphi^{VI}(l) = 0, \\ \psi(x) &\in C^4[0, l], \quad \psi^V(x) \in L_2[0, l], \quad \psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = \psi^{IV}(0) = \psi^{IV}(l) = 0, \\ f(x, t) &\in C(\bar{\Sigma}) \cap C_x^4(\Sigma), \quad f_{xxxx}(x, t) \in L_2(\Sigma), \\ f(0, t) &= f(l, t) = f''_{xx}(0, t) = f''_{xx}(l, t) = f_{xxxx}^{IV}(0, t) = f_{xxxx}^{IV}(l, t) = 0, \end{aligned}$$

то имеют место равенства

$$\varphi_k = \frac{1}{\mu_k^7} \varphi_k^{VII}, \quad \psi_k = \frac{1}{\mu_k^5} \psi_k^V, \quad f_k(t) = \frac{1}{\mu_k^5} f_k^V(t), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{VII} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{VII}(x) \cos(\mu_k x) dx, \quad \psi_k^V = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^V(x) \cos(\mu_k x) dx, \\ f_k^V(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxxx}^V(x, t) \cos(\mu_k x) dx, \end{aligned}$$

и справедливы оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_k^{VII}|^2 \leq \|\varphi^{VII}\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_k^V|^2 \leq \|\psi^V\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_k^V(t)|^2 \leq \|f^V(t)\|_{L_2[0, l] \times C[0, T]}^2. \quad (21)$$

Применив в интеграле для φ_k метод интегрирования по частям семь раз, а в интегралах для ψ_k и $f_k(t)$ – пять раз (см. (10) и (11)), с учётом условий леммы 3 получим равенства (20). Неравенства (21) представляют собой неравенства Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций φ_k^{VII} и ψ_k^V по системе косинусов $\{\sqrt{(2/l)} \cos(\mu_k x)\}$ на интервале $(0, l)$. Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (20) и (21) ряды (6), (18) и (19) сходятся равномерно в прямоугольнике $\bar{\Sigma}$, следовательно, функция (13) является решением задачи (1)–(3).

3. Исследования обратной задачи. Пусть $f(x, t) = f_0(x)g(t)$, где $f_0(x)$ – известная функция. Тогда $F_k(t; g, q, w) = f_{0k}g(t) - q(t)w_k(t)$. Умножив обе части уравнения (1) на $y_i(x)$, $i = 1, 2$, и проинтегрировав от 0 до l по переменной x , с учётом условий (4) получим уравнения

$$g(t) \int_0^l f_0(x) y_1(x) dx - q(t) Y_1(t) = Y_1''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) y_{1k}, \quad (22)$$

$$g(t) \int_0^l f_0(x) y_2(x) dx - q(t) Y_2(t) = Y_2''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) y_{2k}, \quad (23)$$

где $y_{ik} = \sqrt{(2/l)} \int_0^l y_i(x) \sin(\mu_k x) dx$, $k = 1, 2$.

Введём обозначения

$$\int_0^l f_0(x)y_1(x) dx = \alpha_1, \quad \int_0^l f_0(x)y_2(x) dx = \alpha_2$$

и предположим, что

$$\mathcal{Y}(t) = \alpha_2 Y_1(t) - \alpha_1 Y_2(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Тогда из (22) и (23) находим

$$g(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) (Y_1(t)y_{2k} - Y_2(t)y_{1k}) \right\}, \quad (25)$$

$$q(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ \alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) (\alpha_1 y_{2k} - \alpha_2 y_{1k}) \right\}. \quad (26)$$

После подстановки функции (12) в (25) и (26) получим следующие интегральные уравнения относительно функций $g(t)$ и $q(t)$:

$$g(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t) + \right. \\ \left. + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s) F_k(s; g, q, w) ds \right\} (Y_1(t)y_{2k} - Y_2(t)y_{1k}) \right\}, \quad (27)$$

$$q(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ \alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t) + \right. \\ \left. + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s) F_k(s; g, q, w) ds \right\} (\alpha_1 y_{2k} - \alpha_2 y_{1k}) \right\}. \quad (28)$$

Рассмотрим функциональное пространство $B_{2,T}^7$ [23] – множество всех функций вида (6), рассматриваемых в $\bar{\Sigma}$ с нормой $\|w(x,t)\|_{B_{2,T}^7} = J_T(u)$, где $w_k(t) \in C[0,T]$ и

$$J_T(w) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

В дальнейшем будем обозначать через $E_{2,T}^7$ топологическое произведение $B_{2,T}^7 \times C[0,T] \times C[0,T]$, где норма элемента $z = \{w, g, q\}$ определяется по формуле

$$\|z\|_{E_{2,T}^7} = \|w(x,t)\|_{B_{2,T}^7} + \|g(t)\|_{C[0,T]} + \|q(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что пространства $B_{2,T}^7$ и $E_{2,T}^7$ являются банаховыми пространствами [26].

Теперь рассмотрим в пространстве $E_{2,T}^7$ оператор

$$\Lambda(w, g, q) = \{\Lambda_1(w, g, q), \Lambda_2(w, g, q), \Lambda_3(w, g, q)\},$$

где

$$\Lambda_1(w, g, q) = \tilde{w}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{w}_k(t) \sin(\mu_k x), \quad \Lambda_2(w, g, q) = \tilde{g}(t), \quad \Lambda_3(w, g, q) = \tilde{q}(t),$$

а функции $\tilde{w}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{q}(t)$ равны правым частям (12), (27) и (28) соответственно.

Учитывая неравенство (14), имеем

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{w}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{l}} \beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \\ + \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k|)^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}, \quad (29)$$

где $\kappa = 1 + 2\beta\delta$,

$$\|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \beta(1 + \delta_1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k|)^2 \right)^{1/2} + \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad (30)$$

$$\|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \beta(1 + \delta_1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k|)^2 \right)^{1/2} + \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (31)$$

Из (29)–(31) соответственно получим оценки

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{w}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \\ + \frac{2\beta}{l} \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \\ \|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + a^2 \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \right. \right. \\ \left. + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{l}{2}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \right] \right\}, \\ \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + a^2 \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \right. \right. \\ \left. + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{l}{2}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \right] \right\},$$

$$+ \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{l}{2}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \Big] \Big\}$$

или

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{w}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq L_1(T) + M_1(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N_1(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (32)$$

$$\|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} \leq L_2(T) + M_2(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N_2(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (33)$$

$$\|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq L_3(T) + M_3(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N_3(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (34)$$

где

$$L_1(T) = \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$M_1(T) = \frac{2\beta}{l} \kappa T \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]}, \quad N_1(T) = \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T,$$

$$L_2(T) = \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + a^2 \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} \right] \right\},$$

$$M_2(T) = a^2 \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \kappa T \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$N_2(T) = a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \kappa T,$$

$$L_3(T) = \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + a^2 \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} \right] \right\},$$

$$M_3(T) = a^2 \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \kappa T \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$N_3(T) = a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \kappa T.$$

Из неравенств (32)–(34) следует оценка

$$\|\tilde{w}(x, t)\|_{B_{2,T}^7} + \|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} + \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ \leq L(T) + M(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (35)$$

где $L(T) = L_1(T) + L_2(T) + L_3(T)$, $M(T) = M_1(T) + M_2(T) + M_3(T)$, $N(T) = N_1(T) + N_2(T) + N_3(T)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, леммы 2, (24) и следующее условие:

$$(L(T) + 2)(M(T) + N(T)(L(T) + 2)) < 2. \quad (36)$$

Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение в шаре $B_R = \{z : \|z\|_{E_{2,T}^7} \leq R\}$.

Доказательство. Введём обозначение $z = (w(x, t), g(t), q(t))^*$ и запишем систему уравнений (13), (27), (28) в операторном виде

$$z = Az, \quad (37)$$

где $A = (A_1, A_2, A_3)^*$, $A_1(z)$, $A_2(z)$ и $A_3(z)$ определяются правыми частями (13), (27) и (28), соответственно.

Аналогично из (35) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in B_R$ справедливы оценки

$$\|Az\|_{E_{2,T}^7} \leq L(T) + M(T)\|g(t)\|_{C[0,T]} + N(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \|Az_1 - Az_2\|_{E_{2,T}^7} &\leq M(T)\|g_1(t) - g_2(t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ N(T)R(\|q_1(t) - q_2(t)\|_{C[0,T]} + \|w_1(x, t) - w_2(x, t)\|_{B_{2,T}^7}). \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда в силу (36) из (38) и (39) следует, что оператор A действует в шаре B_R и удовлетворяет принципу сжимающего отображения. Следовательно, по теореме Банаха оператор A имеет единственную неподвижную точку $\{w, g, q\}$ в шаре B_R , являющуюся решением операторного уравнения (37).

Таким образом, функция $w(x, t)$ как элемент пространства $B_{2,T}^7$ непрерывна и имеет непрерывные производные $w_{tt}(x, t)$ и $w_{xxxx}(x, t)$ в прямоугольнике $\bar{\Sigma}$.

Из (9) легко видеть, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \|w_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \|f_0'(x)g(t) + q(t)w_x(x, t)\|_{L_2[0,l]}\right], \end{aligned}$$

откуда следует, что $w_{tt}(x, t)$ непрерывна в $\bar{\Sigma}$.

Замечание. Неравенство (36) выполняется при достаточно малых значениях T .

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и условия (5), (24). Тогда задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение в шаре B_R пространства $E_{2,T}^7$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2022-890).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.
2. Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок // Инж. вестн. Дона. 2017. <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>.
3. Baysal O., Hasanov A. Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90.
4. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
5. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
6. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1379–1391.

7. *Karchevsky A.L.* Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types // *J. of Appl. and Industr. Math.* 2020. Т. 14. № 4. С. 648–665.
8. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.
9. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
10. *Durdiev U.D.* An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media // *J. of Appl. and Industr. Math.* 2019. V. 13. № 4. P.
11. *Romanov V.G.* A problem of recovering a special two dimension potential in a hyperbolic equation // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2016. V. 4. № 1. P. 32–46.
12. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
13. *Durdiev U.D., Totieva Zh.D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2019. V. 42. № 18. P. 1–12.
14. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 1. С. 37–44.
15. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // *Сиб. журн. вычислит. математики.* 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
16. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
17. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2020. Т. 17. С. 179–189.
18. *Maciag A., Pawinska A.* Solution of the direct and inverse problems for beam // *Comp. Appl. Math.* 2016. V. 35. P. 187–201.
19. *Maciag A., Pawinska A.* Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the trefftz functions // *J. of Theor. and Appl. Mech.* 2013. V. 51. № 3. P. 543–552.
20. *Guojin Tan, Jinghui Shan, Chunli Wu, Wensheng Wang.* Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // *Adv. in Mech. Engin.* 2017. V. 9. № 11. P. 1–17.
21. *Moaveni S., Hyde R.* Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2016. V. 24. № 6. P. 990–1010.
22. *Marinov T.T., Vatsala A.S.* Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation // *Comput. and Math. with Appl.* 2008. V. 56. P. 400–410.
23. *Megraliev Ya.T., Azizbayov E.I.* A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition // *Electron. J. of Qualitative Theory of Differen. Equat.* 2021. № 28. P. 1–12.
24. *Xiao-Li Ding, Bashir Ahmad.* A generalized Volterra–Fredholm integral inequality and its applications to fractional differential equations // *Adv. in Difference Equat.* 2018. V. 2018. Art. 91.
25. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Application of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
26. *Tekin I., Mehraliyev Y.T., Ismailov M.I.* Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein–Gordon equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2019. V. 42. № 10. P. 3739–3753.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 15.10.2022 г.
После доработки 07.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.929

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
СО СДВИГОМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ВЕКТОР
В СВОБОДНОМ ЧЛЕНЕ

© 2023 г. Н. В. Зайцева, А. Б. Муравник

В полупространстве для гиперболических дифференциально-разностных уравнений с оператором сдвига общего вида в свободном члене (или в нелокальном операторном потенциале) построены трёхпараметрические семейства решений. Доказано, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа соответствующих дифференциально-разностных операторов положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

DOI: 10.31857/S037406412303007X, EDN: QUXGJY

Введение. В современной теории дифференциальных уравнений одним из важнейших направлений является исследование задач для дифференциально-разностных уравнений, что объясняется их многочисленными приложениями. И если обыкновенным дифференциально-разностным уравнениям посвящено значительное число работ (см., например, [1–4] и библиографию в них), то дифференциально-разностные уравнения с частными производными изучены в гораздо меньшей степени.

В настоящее время наиболее полно и подробно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений (см., например, [5–9]). В статьях [10–13] изучен вопрос классической разрешимости начальных и модельных задач для таких уравнений в неограниченных областях.

Краевые задачи для параболических уравнений со сдвигами рассматриваются в [14, 15] и в монографии [16]. Гиперболическим дифференциально-разностным уравнениям со сдвигами по времени посвящены работы [17–19], а со сдвигами по пространственным переменным – статьи [20–25].

В данной работе в полупространстве $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ исследуется вопрос существования (и построения в явном виде) гладких решений гиперболического дифференциально-разностного уравнения

$$u_{tt}(x, t) - a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) + bu(x - h, t) = 0, \quad (1)$$

где $a \neq 0$, $b > 0$ – заданные вещественные числа; $h := (h_1, \dots, h_n)$ – заданный вектор с действительными координатами, длина которого не равна нулю.

Определение. Функция $u(x, t)$ называется *классическим решением* уравнения (1), если в каждой точке полупространства $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ существуют классические производные u_{tt} и $u_{x_j x_j}$ ($j = \overline{1, n}$) и в каждой точке этого полупространства выполняется соотношение (1).

1. Построение решений уравнения. Применим формально к уравнению (1) преобразование Фурье по n -мерной переменной x :

$$\widehat{f}(\xi) := F_x[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx,$$

где $\xi \cdot x$ – скалярное произведение, и перейдём к двойственной переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Согласно операционной схеме (см. работы [12, 13, 24]) и с учётом формул [26, с. 163, 164]

$$F_x[f(x - x_0)] = e^{ix_0 \cdot \xi} F_x[f], \quad F_x[D_x^\alpha D_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_t^\beta F_x[f]$$

получим для функции $\widehat{u}(\xi, t) := F_x[u](\xi, t)$ начальную задачу

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} + (a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi) + ib \sin(h \cdot \xi)) \widehat{u} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\widehat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \widehat{u}_t(\xi, 0) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

решение которой определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2i\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - \varphi(\xi))} - e^{tG_1(\xi)} e^{-i(tG_2(\xi) + \varphi(\xi))}]. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin \varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos \varphi(\xi), \quad (3)$$

$$\rho(\xi) := [(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi))^2 + b^2 \sin^2(h \cdot \xi)]^{1/4}, \quad (4)$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)}. \quad (5)$$

Подробные вычисления, аналогичные данным, приведены в статье [22].

Применим теперь к равенству (2) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим соотношения

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2i\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - \varphi(\xi))} - e^{tG_1(\xi)} e^{-i(tG_2(\xi) + \varphi(\xi))}] e^{-ix \cdot \xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi)} - e^{tG_1(\xi)} e^{-i(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)}] d\xi = \\ &= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho(\xi)} [e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) + ie^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \\ &\quad - e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + ie^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Используем полученное интегральное представление ниже, выбрав по аналогии с работой [20] в качестве частных линейно независимых решений уравнения (1) функции, содержащие синус.

2. Существование классических решений уравнения. Доказана следующая

Теорема. При выполнении условия

$$a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi) > 0 \quad (6)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ функции

$$F(x, t; \xi) := e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \quad (7)$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \quad (8)$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (5), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

Доказательство. Проверим сначала, что функция (7) удовлетворяет уравнению (1). Для этого вычислим производные

$$\begin{aligned} F_{x_j}(x, t; \xi) &= \xi_j e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \\ F_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= -\xi_j^2 e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \\ F_t(x, t; \xi) &= G_1(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi), \\ F_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + \\ &\quad + 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Найдём теперь значения выражений $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ и $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ в формуле (9).

Так как функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), то имеет место равенство

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin(2\varphi(\xi)).$$

Из (5) следует, что $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$ и, значит, $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$. В работах [12, 13, 24] показано, что при выполнении неравенства $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ справедливы соотношения

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(2\varphi(\xi))}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)} \frac{|a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)|}{\rho^2(\xi)}.$$

С учётом выполнения условия (6) отсюда получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)} \frac{a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{b \sin(h \cdot \xi)}{\rho^2(\xi)},$$

а значит,

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = b \sin(h \cdot \xi). \quad (10)$$

Далее при установленном выше неравенстве $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ и выполнении условия (6) получим

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = -\rho^2(\xi) \cos(2\varphi(\xi)) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = -a^2 |\xi|^2 - b \cos(h \cdot \xi). \quad (11)$$

С учётом найденных выражений (10) и (11) функция (9) принимает вид

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) &= [-(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + \\ &\quad + b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)] e^{tG_1(\xi)}. \end{aligned}$$

Подставим производные F_{tt} и $F_{x_j x_j}$ в уравнение (1):

$$\begin{aligned} F_{tt}(x, t; \xi) - a^2 \sum_{j=1}^n F_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= \left[-(a^2 |\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + \right. \\ &\quad \left. + b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + a^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) \right] e^{tG_1(\xi)} = \\ &= [-b \cos(h \cdot \xi) \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi)] e^{tG_1(\xi)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -b \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi - h \cdot \xi) e^{tG_1(\xi)} = \\
&= -b \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + (x - h) \cdot \xi) e^{tG_1(\xi)} = -bF(x - h, t; \xi).
\end{aligned}$$

Проверим теперь, что функция (8) удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле. Для этого найдём производные:

$$\begin{aligned}
H_{x_j}(x, t; \xi) &= -\xi_j e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \\
H_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= -\xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \\
H_t(x, t; \xi) &= -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) + G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \\
H_{tt}(x, t; \xi) &= [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)] e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \\
&\quad - 2G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi). \tag{12}
\end{aligned}$$

С учётом выражений (10) и (11) запишем функцию (12) в виде

$$\begin{aligned}
H_{tt}(x, t; \xi) &= [-(a^2|\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \\
&\quad - b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi)] e^{-tG_1(\xi)}.
\end{aligned}$$

Подставим производные H_{tt} и $H_{x_j x_j}$ в уравнение (1):

$$\begin{aligned}
H_{tt}(x, t; \xi) - a^2 \sum_{j=1}^n H_{x_j x_j}(x, t; \xi) &= \left[-(a^2|\xi|^2 + b \cos(h \cdot \xi)) \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) - \right. \\
&\quad \left. - b \sin(h \cdot \xi) \cos(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) + a^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi) \right] e^{-tG_1(\xi)} = \\
&= -b \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi + h \cdot \xi) e^{-tG_1(\xi)} = \\
&= -b \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - (x - h) \cdot \xi) e^{-tG_1(\xi)} = -bH(x - h, t; \xi).
\end{aligned}$$

Отметим, что при выполнении условия (6) функции (4) и (5) (а значит, и функции (7), (8)) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$, так как подкоренное выражение в формуле (4) всегда положительно, а знаменатель аргумента арктангенса в (5) не обращается в нуль. Таким образом, построенные решения (7), (8) уравнения (1) действительно являются гладкими и, более того, бесконечно гладкими. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условия (6) семейство функций

$$G(x, t; A, B, \xi) := C_1 e^{tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi) + C_2 e^{-tG_1(\xi)} \sin(tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi), \tag{13}$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (5), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых значениях параметров $C_{1,2} \in \mathbb{R}^1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

3. Классы уравнений, удовлетворяющих условию теоремы. Очевидно, что при $\xi_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, и $b > 0$ условие (6) теоремы и следствия выполняется.

При выполнении неравенства $|h \cdot \xi| < \pi/2$ условие теоремы также выполняется всегда, так как косинус такого аргумента положителен.

Рассмотрим случай $|h \cdot \xi| \geq \pi/2$. Имеем

$$|h \cdot \xi| = |h||\xi| |\cos(\widehat{h, \xi})| \geq \frac{\pi}{2},$$

т.е.

$$|\xi| \geq \frac{\pi}{2|h||\cos(\widehat{h, \xi})|} \geq \frac{\pi}{2|h|}.$$

Таким образом, неравенство (6) будет выполнено, если коэффициенты и сдвиги уравнения подчиняются соотношению

$$\frac{\pi}{2|h|} > \sqrt{\frac{b}{a^2}}, \quad (14)$$

так как в этом случае $|\xi|^2 > b/a^2$ или $a^2|\xi|^2 > b \geq b|\cos(h \cdot \xi)|$ для любого значения аргумента косинуса.

Замечание. Условие (14) является достаточным, гарантирующим существование классических решений уравнения (1), определяемых по формуле (13).

Авторы признательны А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284; вторым автором – при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор № 075-03-2020-223/3, ФССФ-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley, 1958.
2. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
3. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
5. *Hartman P., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential functional equations // *Acta Math.* 1966. V. 115. P. 271–310.
6. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. Basel; Boston; Berlin, 1997.
7. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2007. Т. 26. С. 3–132.
8. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. II // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2009. Т. 33. С. 3–179.
9. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // *Успехи мат. наук.* 2016. Т. 71. Вып. 5 (431). С. 3–112.
10. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // *Мат. заметки.* 2020. Т. 108. № 5. С. 764–770.
11. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // *Уфимский мат. журн.* 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
12. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами в полупространстве // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2022. Т. 62. № 6. С. 987–993.
13. *Муравник А.Б.* Эллиптические уравнения со сдвигами общего вида в полупространстве // *Мат. заметки.* 2022. Т. 111. № 4. С. 571–580.
14. *Shamin R.V., Skubachevskii A.L.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // *Funct. Differ. Equat.* 2001. V. 8. P. 407–424.
15. *Йаакбариев А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // *Изв. вузов. Математика.* 2015. № 4. С. 17–25.
16. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2014. Т. 52. С. 3–143.
17. *Зарубин А.Н.* Задача Коши для дифференциально-разностного нелокального волнового уравнения // *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41. № 10. С. 1406–1409.
18. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2008. Т. 30. С. 3–173.
19. *Акбари Фаллахи А., Йаакбариев А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // *Дифференц. уравнения.* 2016. Т. 52. № 3. С. 352–365.

20. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
21. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.
22. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.
23. *Зайцева Н.В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.
24. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 628–637.
25. *Зайцева Н.В.* Классические решения одного многомерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с разнонаправленными сдвигами в потенциалах // Мат. заметки. 2022. Т. 112. № 6. С. 810–819.
26. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 17.12.2022 г.
После доработки 02.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОБРАТНЫЕ АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ БИНГАМА

© 2023 г. В. Г. Звягин, А. С. Устюжанинова

На основе теории траекторных обратных аттракторов исследуется качественное поведение слабых решений для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным. Для рассматриваемой модели вводится семейство траекторных пространств и доказывается существование обратных аттракторов.

DOI: 10.31857/S0374064123030081, EDN: QVGQQY

Введение. Теория траекторных аттракторов была создана М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым [1] и независимо от них Дж. Селлом [2]. В этой теории порождаемая уравнением динамика описывается в терминах траекторий – функций времени, представляющих собой сценарии развития системы. При этом не требуется, чтобы сценарии, разделяющие общее начальное значение, совпадали. Позже В.Г. Звягиным и Д.А. Воротниковым [3] было предложено обобщение этой теории, а именно удалось избавиться от требования инвариантности пространства траекторий, что позволило получить новые результаты о существовании аттракторов для различных моделей неньютоновской гидродинамики [3–6].

В работе [7] идеи траекторных аттракторов из монографии [3] были перенесены на теорию обратных аттракторов. Предложенный подход был применён для трёхмерной системы Навье–Стокса. В дальнейшем эта теория была применена для доказательства существования обратных аттракторов различных моделей гидродинамики [8, 9].

В данной статье доказывается существование обратных аттракторов модели Бингама.

1. Обратные аттракторы пространств траекторий. Приведём необходимые определения и факты из работы [7]. Пусть E и E_0 – банаховы пространства, $E \subset E_0$ и E рефлексивно. Рассмотрим класс функций $\mathcal{T} = C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_{\infty, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$. Отметим, что имеет место включение $\mathcal{T} \subset C_w(\mathbb{R}_+; E)$ (см. [10, лемма 8.1]). Поэтому для любой $u \in \mathcal{T}$ имеем, что для всех $t \geq 0$ функция $u(t) \in E$.

Каждому $\tau \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие непустое множество $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$. Множества $\mathcal{H}_\tau^+$ называются *пространствами траекторий*, а их элементы – *траекториями*. Семейство $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ будем называть *семейством пространств траекторий*.

Зададим класс семейств множеств $\mathfrak{D}$ над E , причём будем считать, что для каждого семейства $\mathbf{D} = \{D_t\} \in \mathfrak{D}$ имеем $D_t \neq \emptyset$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Для каждого $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$ рассмотрим семейство $\mathbf{H}^+(\mathbf{D}) = \{\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})\}$, где $\{\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})\} = \{v \in \mathcal{H}_\tau^+ : v(0) \in D_\tau\}$.

Обозначим через $T(h)$ оператор сдвига $(T(h)g)(s) = g(s+h)$, где $h \geq 0$, $g \in \mathcal{T}$, а для семейства $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$, $P_\tau \subset \mathcal{T}$, и для $h \in \mathbb{R}$ обозначим $(T(h)P)_\tau = T(h)P_{\tau-h}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, состоящее из непустых множеств $\mathcal{T}$, называется *траекторным обратным аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если:

(i) $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$ -компактным, т.е. P_θ компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$, и для каждого $\theta \in \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\tilde{\varphi}_\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для каждой траектории $v \in P_\theta$ при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\|v(t)\|_{L_\infty(t, t+1; E)} \leq \tilde{\varphi}_\theta(t)$;

(ii) $T(h)\mathbf{P} = \mathbf{P}$ для всех $h \geq 0$;

(iii) $\mathbf{P}$ является обратно притягивающим, т.е. для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и для любого $\theta \in \mathbb{R}$ при $\tau \rightarrow -\infty$ выполняется соотношение

$$\sup_{v \in \mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{u \in P_\theta} \|T(\theta - \tau)v - u\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \rightarrow 0.$$

Траекторный обратный аттрактор $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$, $\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{T}$, для $\mathbf{H}^+$ называется *минимальным*, если он содержится в любом траекторном обратном аттракторе $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$.

Определение 2. Семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta \subset E\}$ называется *минимальным обратным аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если:

- (i) $\mathcal{A}_\theta$ компактно в E_0 и ограничено в E при всех $\theta \in \mathbb{R}$;
- (ii) для всех $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется условие обратного притягивания, т.е. при $\tau \rightarrow -\infty$ выполняется соотношение

$$\sup_{v \in \mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{a \in \mathcal{A}_\theta} \|v(\theta - \tau) - a\|_{E_0} \rightarrow 0;$$

- (iii) $\mathbf{A}$ содержится в любом $\mathbf{A}' = \{\mathcal{A}'_\theta\}$, $\mathcal{A}'_\theta \subset E$, удовлетворяющем условиям (i) и (ii).

Определение 3. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, называется *обратно поглощающим* для $\mathbf{H}^+$, если для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и любого $\theta \in \mathbb{R}$ существует число $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leq \theta$ такое, что для всех $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ имеет место включение $T(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta$, и функция $\tau_{\mathbf{D}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает.

Приведём теоремы из [7], необходимые для доказательства основного результата.

Теорема 1. Пусть для $\mathbf{H}^+$ существует $\mathcal{T}$ – относительно компактное обратно поглощающее семейство $\mathbf{P}$, и пусть $\overline{\mathbf{P}}$ – замыкание $\mathbf{P}$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. Тогда существует минимальный траекторный обратный аттрактор $\mathbf{U} \subset \overline{\mathbf{P}}$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ – минимальный траекторный обратный аттрактор для $\mathbf{H}^+$. Тогда семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\}$, где $\mathcal{A}_\theta = \{u(0) : u \in \mathcal{U}_\theta\} \subset E$, является минимальным обратным аттрактором для $\mathbf{H}^+$.

2. Модель Бингама движения жидкости. Движение несжимаемой среды с единичной плотностью описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \text{Div } \sigma + \nabla p = f, \quad \text{div } v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (\tau; +\infty). \quad (1)$$

Здесь $\Omega = \prod_{i=1}^3 (0, l_i) \subset \mathbb{R}^3$, $v(x, t)$ – вектор скорости, $p(x, t)$ – давление в жидкости, $f(x, t)$ – плотность внешних сил. Через $\text{Div } \sigma$ обозначается вектор, координаты которого являются дивергенциями столбцов девиатора тензора напряжений σ .

Система уравнений, описывающая движение среды Бингама, получается добавлением к (1) реологического соотношения

$$\sigma = 2\mu \mathcal{E}(v) + \tau^* \mathcal{E}(v)/|\mathcal{E}(v)| \quad \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad |\sigma| \leq \tau^* \quad \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (\tau; +\infty), \quad (2)$$

где $\mu > 0$ – вязкость жидкости, $\tau^* > 0$ – константа, описывающая порог текучести жидкости, а $\mathcal{E}(v) = 1/2(\nabla v + (\nabla v)^T)$ – тензор скоростей деформаций.

Для системы (1), (2) рассмотрим периодическую по пространственным переменным задачу с начальным условием

$$v|_{t=\tau}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Глобальное существование слабых решений задачи (1)–(3) было доказано В.В. Шелухиным [11]. Существование аттракторов модели Бингама в двумерном случае на основе теории динамических систем было доказано Г.А. Серегиным [12]. В статье [4] было установлено существование минимального траекторного и глобального аттракторов в двумерном и трёхмерном случаях. В работе [13] было доказано, что аттракторы аппроксимации сходятся к аттракторам модели Бингама в смысле полуотклонения в соответствующих метрических пространствах.

Вместе с задачей (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \text{Div } \sigma + \nabla p = F, \quad \text{div } v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0; +\infty); \quad (4)$$

$$\sigma = 2\mu \mathcal{E}(v) + \tau^* \mathcal{E}(v)/|\mathcal{E}(v)| \quad \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad |\sigma| \leq \tau^* \quad \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0; +\infty), \quad (5)$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

В системе (4) значение F заранее не уточняется. Если $F(x, t) = f(x, t + \tau)$, то задача (4)–(6) получается из задачи (1)–(3) линейной заменой переменного t , переводящей τ в 0.

Пусть $C_{\text{per}}^\infty(\Omega)^3$ – пространство периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^3$ и периодами l_i , $i = 1, 2, 3$. Через V^1 , V^2 , V^0 обозначим пополнение $\Phi = \{\phi \in C_{\text{per}}^\infty(\Omega)^3 : \int_\Omega \phi dx = 0, \operatorname{div} \phi = 0\}$ по нормам $W_2^1(\Omega)^3$, $W_2^2(\Omega)^3$, $L_2(\Omega)^3$ соответственно. Подробное определение пространств, а также их свойства можно найти в [14, гл. 2]. Обозначим $Q_T = \Omega \times [0, T]$.

Введём пространство

$$W[0, T] = \{u : u \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad u' \in L_2(0, T; V^{-2})\}.$$

Определение 4. Пусть $a \in V^0$, $F \in L_2(0, T; V^0)$. Слабым решением задачи (4)–(6) на отрезке $[0, T]$ назовём пару функций (v, σ) , где $v \in W[0, T]$, $\sigma \in L_2(Q_T)^9$, таких, что для всех $\varphi \in V^2$ и для почти всех $t \in (0, T)$ выполнены тождество

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_\Omega F \varphi dx,$$

реологическое соотношение (5) и начальное условие $v(0) = a$.

Определение 5. Пусть $F \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$. Слабым решением задачи (4)–(6) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$ с производной $v' \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-2})$, если для любого $T > 0$ существует $\sigma \in L_2(Q_T)^9$ такое, что пара $(v|_{[0,T]}, \sigma)$ является слабым решением задачи (4)–(6) на отрезке $[0, T]$.

3. Существование траекторий. Определим $\alpha = \mu/2K_0^2$, где K_0 – константа из неравенства Пуанкаре: $\|u\|_{V^0} \leq K_0 \|u\|_{V^1}$, $\mu > 0$ – вязкость жидкости из реологического соотношения (2).

Теорема 3. Задача (4)–(6) имеет слабое решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее при всех $t \geq 0$ неравенствам

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L_\infty(t, t+1; V^0)} + \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)} \leq \\ & \leq C_2 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(\|a\|_{V^0}^2 + C_1 \int_0^{t+1} e^{2\alpha s} \|F(s)\|_{V^0}^2 ds \right) + C_1 \|F\|_{L_2(t, t+1; V^0)}^2 \right), \\ & \|v'\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} \leq C_3 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(\|a\|_{V^0}^2 + C_1 \int_0^{t+1} e^{2\alpha s} \|F(s)\|_{V^0}^2 ds \right) + \|F\|_{L_2(t, t+1; V^0)}^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для доказательства теоремы используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Аналогичное доказательство может быть найдено в [13, 15].

Перейдём к исследованию обратных аттракторов. Будем предполагать, что в (1) функция $f \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}; V^0)$ и для всех $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^t e^{2\alpha \xi} \|f(\xi)\|_{V^0}^2 d\xi < \infty.$$

В качестве банаховых пространств для класса $\mathcal{T}$ возьмём $E = V^0$ и $E_0 = V^{-1}$. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ задачи (1)–(3) рассматривается множество слабых решений v задачи (4)–(6) с $F = T(\tau)f$ (где $T(\tau)$ – оператор сдвига) и некоторым начальным условием (своим для каждого v), удовлетворяющих при всех $t \in \mathbb{R}_+$ оценке

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L_\infty(t, t+1; V^0)} + \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)} \leq \\ & \leq C_2 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_1 \int_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s} \|f(s + \tau)\|_{V^0}^2 ds \right) + C_1 \|f\|_{L_2(t+\tau, t+\tau+1; V^0)}^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Эти пространства траекторий образуют семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}_\tau^+\}$.

Теорема 4. Для каждого $a \in V^0$ существует траектория $v \in \mathcal{H}_\tau^+$, $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая начальному условию $v(0) = a$.

Для доказательства достаточно в условиях теоремы 3 положить $F = T(\tau)f$.

Замечание. Для пространств траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ имеет место включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$.

Доказательство. Из неравенства (8) в силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}_+$ получаем, что $v \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$. Кроме того, по теореме 3 функция $v' \in L_2(t, t+1; V^{-2})$. В силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}_+$ получаем, что $v' \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-2})$. Так как V^0 компактно вложено в пространство V^{-1} , то по теореме Обена–Симона [16] функция $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{-1})$ и $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$. Замечание доказано.

Опишем класс притягивающих семейств множеств. Пусть $\mathcal{R}$ – множество функций $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ таких, что функция $\tau \mapsto e^{2\alpha\tau}r^2(\tau)$ возрастает и $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{2\alpha\tau}r^2(\tau) = 0$. Класс $\mathfrak{D}$ состоит из семейств $\mathbf{D} = \{D_\tau\}$ ($D_\tau \subset V^0$), для которых существуют функции $r_{\mathbf{D}} \in \mathcal{R}$ такие, что $\|w\|_{V^0} \leq r_{\mathbf{D}}(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $w \in D_\tau$.

Теорема 5. Семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+$ имеет минимальный траекторный обратный аттрактор $\mathbf{U}$ и минимальный обратный аттрактор $\mathbf{A} = \mathbf{U}(0)$.

Доказательство. Построим семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, $\theta \in \mathbb{R}$, которое $\mathcal{T}$ -относительно компактно и обратно поглощающее. Утверждение теоремы будет следовать из теорем 1, 2. Пусть множество P_θ состоит из функций $v \in \mathcal{T}$, удовлетворяющих неравенствам ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L_\infty(t, t+1; V^0)} + \|v\|_{L_2(t, t+1; V^1)} \leq \\ & \leq C_2 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(1 + C_1 \int_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{V^0}^2 ds \right) + C_1 \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\|v'\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} \leq C_3 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(1 + C_1 \int_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{V^0}^2 ds \right) + \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 \right)^2. \quad (10)$$

Зафиксируем $\theta \in \mathbb{R}$. Из неравенств (9) и (10) следует, что для любого $t \geq 0$ множество P_θ ограничено в $L_\infty(t, t+1; V^0)$ и в $L_2(t, t+1; V^1)$, а множество $P'_\theta = \{v' : v \in P_\theta\}$ ограничено в $L_2(t, t+1; V^{-2})$. По теореме Обена–Симона [16] для тройки пространств $V^0 \subset V^{-1} \subset V^{-2}$ множество P_θ относительно компактно в $C([t, t+1], V^{-1})$. В силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}_+$ множество P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^{-1})$.

Требуемое для $\mathcal{T}$ -относительной компактности неравенство выполняется с функцией

$$(\tilde{\varphi}_\theta(t))^2 = C_2 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(1 + C_1 \int_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s} \|f(s + \theta)\|_{V^0}^2 ds \right) + C_1 \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 \right).$$

Таким образом, семейство $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$ -относительно компактным.

Покажем, что $\mathbf{P}$ является обратно поглощающим. Пусть $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$. Возьмём число $\theta \in \mathbb{R}$ и покажем, что существует такое $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leq \theta$, что при $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется включение

$$T(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta \quad (11)$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает. По определению класса $\mathfrak{D}$ для семейства $\mathbf{D}$ существует функция $r_{\mathbf{D}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для $w \in D_\tau$ имеет место оценка $\|w\|_{V^0} \leq r_{\mathbf{D}}(\tau)$, и функция $\chi(\tau) = e^{2\alpha\tau}r_{\mathbf{D}}^2(\tau)$ возрастает и стремится к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$. В силу монотонности χ имеет возрастающую обратную функцию χ^{-1} . Рассмотрим неравенство $\chi(\tau) \leq e^{2\alpha\theta}$. В силу свойств χ это неравенство выполняется либо на всей оси, либо на луче $(-\infty, \chi^{-1}(e^{2\alpha\theta})]$. В первом случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \theta$, во втором – $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \min\{\chi^{-1}(e^{2\alpha\theta}), \theta\}$, т.е. $\tau_{\mathbf{D}}$ всегда возрастает, удовлетворяет неравенству $\tau_{\mathbf{D}} \leq \theta$, а при $\tau \leq \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется условие $e^{-2\alpha(\theta-\tau)}r_{\mathbf{D}}^2(\tau) \leq 1$.

Докажем включение (11) для $\tau \leq \tau_D(\theta)$. Возьмём функцию $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ такую, что $v(0) \in D_\tau$, и покажем, что $T(\theta - \tau)v \in P_\theta$. Достаточно показать, что $u = T(\theta - \tau)v$ удовлетворяет (9) и (10).

По определению $\mathcal{H}_\tau^+$ функция v является решением задачи (4)–(6) с правой частью $F = T(\tau)f$ и удовлетворяет (8). Тогда $u = T(\theta - \tau)v$ является решением (4)–(6) с правой частью $F = T(\theta - \tau)T(\tau)f = T(\theta)f$ и удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_\infty(t, t+1; V^0)} + \|u\|_{L_2(t, t+1; V^1)} &= \|T(\theta - \tau)v\|_{L_\infty(t, t+1; V^0)} + \|T(\theta - \tau)v\|_{L_2(t, t+1; V^1)} = \\ &= \|v\|_{L_\infty(t+\theta-\tau, t+\theta-\tau+1; V^0)} + \|v\|_{L_2(t+\theta-\tau, t+\theta-\tau+1; V^1)} \leq \\ &\leq C_2 \left(1 + C_1 \|T(\tau)f\|_{L_2(t+\theta-\tau, t+\theta-\tau+1; V^0)}^2 + e^{-2\alpha(t+\theta-\tau)} \left(\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_1 \int_{-\infty}^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha s} \|T(\tau)f(s)\|_{V^0}^2 ds \right) \right) \leq \\ &\leq C_2 \left(1 + C_1 \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 + e^{-2\alpha t} \left(e^{-2(\theta-\tau)} (r_D(\tau))^2 + C_1 \int_{-\infty}^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha(s-\theta+\tau)} \|f(s+\tau)\|_{V^0}^2 ds \right) \right) \leq \\ &\leq C_2 \left(1 + C_1 \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 + e^{-2\alpha t} \left(1 + C_1 \int_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s} \|f(s+\theta)\|_{V^0}^2 ds \right) \right). \end{aligned}$$

Оценка (9) для $u = T(\theta - \tau)v$ доказана. Докажем (10) для $u' = T(\theta - \tau)v'$. Так как v – слабое решение (4)–(6) с $F = T(\tau)f$, то по теореме 3 при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство (7). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} &= \|T(\theta - \tau)v'\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} = \|v'\|_{L_2(t+\theta-\tau, t+\theta-\tau+1; V^{-2})} \leq \\ &\leq C_3 \left(1 + e^{-2\alpha(t+\theta-\tau)} \left(\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_1 \int_0^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha s} \|T(\tau)f(s)\|_{V^0}^2 ds \right) + \|T(\tau)f\|_{L_2(t+\theta-\tau, t+\theta-\tau+1; V^0)}^2 \right) \leq \\ &\leq C_3 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(e^{-2(\theta-\tau)} (r_D(\tau))^2 + C_1 \int_{-\infty}^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha(s-\theta+\tau)} \|f(s+\tau)\|_{V^0}^2 ds \right) + \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 \right) \leq \\ &\leq C_3 \left(1 + e^{-2\alpha t} \left(1 + C_1 \int_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s} \|f(s+\theta)\|_{V^0}^2 ds \right) + \|f\|_{L_2(t+\theta, t+\theta+1; V^0)}^2 \right). \end{aligned}$$

Поэтому имеет место включение (11). Следовательно, $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$ -относительно компактным и обратно поглощающим, а значит, по теореме 1 существует минимальный траекторный обратный аттрактор, а по теореме 2 – минимальный обратный аттрактор для $\mathbf{H}^+$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00103).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
2. Sell G.R. Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations // J. of Dynamics and Differ. Equat. 1996. V. 8. № 1. P. 1–33.
3. Zvyagin V., Vorotnikov D. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. Berlin, 2008.

4. Zvyagin V. Attractors theory for autonomous systems of hydrodynamics and its application to Bingham model of fluid motion // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 767–777.
5. Устюжанинова А.С., Турбин М.В. Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24. № 1. С. 126–138.
6. Звягин В.Г., Кондратьев С.К. Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 5 (419). С. 81–156.
7. Vorotnikov D. Asymptotic behaviour of the non-autonomous 3D Navier–Stokes problem with coercive force // J. Differ. Equat. 2011. V. 251. № 8. P. 2209–2225.
8. Turbin M., Ustiuzhaninova A. Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model // Evolution Equations and Control Theory. 2022. V. 11. № 6. P. 2055–2072.
9. Устюжанинова А.С. Pullback-аттракторы модифицированной модели Кельвина–Фойгта // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 5. С. 98–104.
10. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
11. Shelukhin V.V. Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids // J. of Math. Fluid Mech. 2022. V. 4. P. 109–127.
12. Серегин Г.А. О динамической системе, порождённой двумерными уравнениями движения среды Бингама // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 181. С. 128–142.
13. Звягин В.Г., Турбин М.В. О существовании аттракторов для аппроксимаций модели Бингама и их сходимости к аттракторам исходной модели // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63. № 4. С. 842–859.
14. Temam R. Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. Philadelphia, 1995.
15. Звягин В.Г., Звягин А.В., Турбин М.В. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 54–86.
16. Simon J. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. V. 146. P. 65–96.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.

После доработки 02.02.2023 г.

Принята к публикации 14.02.2023 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ
ГАММЕРШТЕЙНА–СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

© 2023 г. Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследована система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Стилтьеса, предъядра которых представляют собой непрерывные функции распределений. Доказана конструктивная теорема существования нетривиального неотрицательного и ограниченного решения системы. Изучена интегральная асимптотика построенного решения. Приведены примеры систем, для которых выполняются все условия доказанной теоремы.

DOI: 10.31857/S0374064123030093, EDN: QVJFJH

Введение. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений на положительной полуоси $x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$

$$f_i(x) = \int_0^\infty K_i(x, y) G_i(f_1(r(x, y)), \dots, f_n(r(x, y))) d\mu_i(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

относительно искомой измеримой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ (T – знак транспонирования). В системе (1) меры $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ – непрерывные на множестве $\mathbb{R}^+$ неотрицательные функции со свойствами

$$\mu_i(0) = 0, \quad \mu_i(+\infty) = 1, \quad \mu_i(y) \uparrow \text{ по } y \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Ядра $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$ – измеримые функции на множестве $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условиям: существуют непрерывные на $\mathbb{R}^+$ функции $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$ со свойствами

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, \quad \lambda_i(x) \neq 0, \quad \lambda_i(x) \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_i(x) \uparrow 1, \quad x \rightarrow +\infty, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$(1 - \lambda_i(x))x^m \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1, n}, \quad m = 0, 1, \quad (4)$$

такие, что

$$\lambda_i(x) \leq K_i(x, y) \leq 1, \quad K_i(x, y) \neq 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Функция $r(x, y)$, фигурирующая в (1), непрерывна по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}_+^2$, принимает неотрицательные значения и удовлетворяет следующим условиям:

I) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ функция $r(x, y) \uparrow$ по y на $\mathbb{R}^+$ и при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}^+$ данная функция $\uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$;

II) $r(x, 0) \geq x$, $x \in \mathbb{R}^+$, и существует число $\delta > 0$ такое, что $r(x, \delta) \geq x + \delta$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Нелинейности $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ определены на множестве $\mathbb{R}_+^n := \underbrace{\mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+}_n$, прини-

мают вещественные значения и удовлетворяют определённым ограничениям (см. п. 1 ниже).

Системы вида (1) имеют приложения во многих разделах математического естествознания, например, в теории марковских процессов, в теории переноса излучения в неоднородных средах и в кинетической теории газов (в рамках модифицированной модели Бхатнагара–Гросса–Крука) (см., например, [1–5]).

Изучение вопроса существования нетривиальных решений системы (1) играет существенную роль в исследованиях скалярных и векторных нелинейных псевдодифференциальных уравнений в динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн, а также в вопросах

существования и единственности решения нелинейных многомерных интегральных уравнений в математической теории географического распространения пандемии (см. [6–9]).

В случае когда $r(x, y) = y$ или $r(x, y) = x + y$, $\mu_i(y) = y$, $i = \overline{1, n}$, а ядра $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$ зависят от разности своих аргументов, системы вида (1) при различных ограничениях на $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ исследованы в работах [10–12].

Следует отметить, что соответствующий скалярный аналог системы (1) ($n = 1$) достаточно подробно исследован в статьях [13–16] для случая $r(x, y) = y$ или $r(x, y) = x + y$, $\mu(y) = y$, а для $K(x, y)$ минорантой в смысле М.А. Красносельского служит консервативное ядро Винера–Хопфа.

В настоящей работе при некоторых естественных ограничениях на $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ (см. п. 1) удаётся доказать конструктивную теорему существования неотрицательного и ограниченного решения. Исследуется также интегральная асимптотика построенного решения на бесконечности. Для иллюстрации полученных результатов приводятся конкретные примеры функций $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$.

1. Обозначения и формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{R}^{n \times n}$ – алгебра вещественных $n \times n$ матриц с единицей I . Обозначим через $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ конус матриц с неотрицательными компонентами. Данный конус вводит частичный порядок $\geq$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$. Будем писать, что $A \succ 0$, если $A \geq 0$, и $A > 0$, если все компоненты матрицы A положительны. Класс $\mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}$ примитивных матриц состоит из матриц A , для которых существует натуральное число p такое, что $A^p > 0$.

Пусть $r(A)$ – спектральный радиус матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (модуль наибольшего по модулю собственного значения A). Согласно теореме Перрона (см. [17, с. 260]) если $A \in \mathcal{K}_p$, то $r(A)$ является её наибольшим по модулю простым собственным значением, причём существует вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ с положительными координатами η_i , $i = \overline{1, n}$, такой, что

$$A\eta = r(A)\eta.$$

Для нелинейностей $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ предположим выполнение следующих условий:

а) $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ – непрерывные на $\mathbb{R}_+^n$ функции, которые принимают вещественные значения и монотонно возрастают по каждому аргументу u_j , $j = \overline{1, n}$, на множестве $\mathbb{R}^+$;

б) существует примитивная и симметричная матрица A со спектральным радиусом $r(A) = 1$ такая, что

$$G_i(u_1, \dots, u_n) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (u_1, \dots, u_n) \in [0, \eta_1] \times \dots \times [0, \eta_n],$$

где $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – элементы матрицы $A \in \mathcal{K}_p$, а $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$, $\eta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, – неподвижный вектор A (существование такого вектора следует из теоремы Перрона).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Если нелинейности $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют неравенствам

$$G_i(\eta_1, \dots, \eta_n) \leq \eta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

и выполняются условия (2)–(5), I), II), а), б), то система нелинейных интегральных уравнений (1) имеет неотрицательное нетривиальное и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение. Более того, $\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 1. Сформулированная теорема обобщает и дополняет соответствующий результат из работы [16].

Замечание 2. К сожалению, вопрос единственности построенного решения до сих пор остаётся открытым.

2. Доказательство теоремы.

Шаг 1. Сначала рассмотрим вспомогательную линейную систему интегральных уравнений на полуоси

$$F_i(x) = (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j(r(x, y)) d\mu_i(y), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

относительно искомой непрерывной вектор-функции $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$.

Рассмотрим следующие простые итерации для системы (7):

$$F_i^{(p+1)}(x) = (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y),$$

$$F_i^{(0)}(x) = (1 - \lambda_i(x))\eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Ввиду непрерывности функций $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$, $r(x, y)$ и $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ на соответствующих множествах, индукцией по p несложно доказать, что

$$F_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

С учётом условий (2), (3), I) и II) легко можно проверить также, что

$$F_i^{(p)}(x) \uparrow \text{ по } p, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Докажем теперь, что

$$F_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad p = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

При $p = 0$ утверждение (11) сразу следует из условий (3). Предположим, что $F_i^{(p)}(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i = \overline{1, n}$, при некотором натуральном p . Тогда для любых $(x_1, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x_2, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $x_1 > x_2$, в силу условия I) имеет место неравенство

$$F_i^{(p)}(r(x_1, y)) \leq F_i^{(p)}(r(x_2, y)), \quad i = \overline{1, n}.$$

С учётом (2) и (3) из (8) будем иметь соотношения

$$F_i^{(p+1)}(x_1) = (1 - \lambda_i(x_1))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x_1, y)) d\mu_i(y) \leq$$

$$\leq (1 - \lambda_i(x_2))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x_2, y)) d\mu_i(y) = F_i^{(p+1)}(x_2), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, свойство (11) доказано.

Теперь, используя (11), убедимся, что

$$F_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad p = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Действительно, при $p = 0$ данное включение сразу следует из условия (4). Предположим, что $F_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$, при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (2), I), II), (10) и (11), из (8) получаем неравенства

$$0 \leq F_i^{(p+1)}(x) \leq (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x, 0)) d\mu_i(y) \leq$$

$$\leq (1 - \lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}F_j^{(p)}(x) \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

а значит, $F_i^{(p+1)} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$.

Шаг 2. Докажем, что существует постоянная $C > 0$ такая, что имеет место оценка

$$\int_0^\infty F_i^{(p)}(x) dx \leq C, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть $a \geq 0$ – произвольное число. Умножим обе части (8) на η_i , $i = \overline{1, n}$. Далее проинтегрируем обе части полученного равенства по x на множестве $[a, +\infty)$, после чего просуммируем это соотношение по всем $i = \overline{1, n}$. Тогда с учётом (2), (4), I) и II) из (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_a^\infty F_i^{(p+1)}(x) dx &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_a^\infty \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\infty \int_a^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_a^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_\delta^\infty \int_a^\infty F_j^{(p)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, 0)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i (1 - \mu_i(\delta)) \int_a^\infty F_i^{(p+1)}(r(x, \delta)) dx \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^\infty F_i^{(p+1)}(x) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i (1 - \mu_i(\delta)) \int_{a+\delta}^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx + \sum_{j=1}^n \eta_j \int_{a+\delta}^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx$$

или

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i (1 - \mu_i(\delta)) \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx. \quad (12)$$

Так как $(1 - \mu_i(\delta)) > 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, то из (12) в силу теоремы Перрона имеем

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \int_a^{a+\delta} F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx. \quad (13)$$

С учётом (11) и (9) из (13) получим оценку

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \eta_j F_j^{(p+1)}(a + \delta) \leq \frac{1}{\delta \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_a^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx. \quad (14)$$

Используя теорему Фубини (см. [18, с. 317]), в силу (4) из (14) получаем

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \eta_j \int_0^\infty F_j^{(p+1)}(a + \delta) da \leq \frac{1}{\delta \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty x(1 - \lambda_i(x)) dx := \gamma, \quad (15)$$

откуда следует, что

$$\int_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \frac{1}{\delta \min_{1 \leq i \leq n} (\eta_i) \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty x(1 - \lambda_i(x)) dx := C_1, \quad (16)$$

где $j = \overline{1, n}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Проинтегрируем теперь обе части (8) по x в пределах от 0 до δ , затем умножим на η_i и просуммируем полученное равенство по всем $i = \overline{1, n}$. В результате, если учесть (10) и (15), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^\delta F_i^{(p+1)}(x) dx &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{i=1}^n \eta_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\delta \int_0^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, y)) d\mu_i(y) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_0^\infty F_j^{(p+1)}(r(x, y)) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(r(x, 0)) dx d\mu_i(y) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_\delta^\infty \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(r(x, \delta)) dx d\mu_i(y) \leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_0^\delta \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx d\mu_i(y) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \int_\delta^\infty \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x + \delta) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \eta_i \mu_i(\delta) \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \eta_i \int_\delta^\infty \int_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x) dx d\mu_i(y) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \max_{1 \leq i \leq n} (\mu_i(\delta)) \sum_{j=1}^n \eta_j \int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx + \gamma, \end{aligned}$$

отсюда, ввиду того, что $\max_{1 \leq i \leq n} (\mu_i(\delta)) < 1$, следует оценка

$$\int_0^\delta F_j^{(p+1)}(x) dx \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (\eta_i) (1 - \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx + \gamma := C_2. \quad (17)$$

Учитывая (16) и (17), а также определение нулевого приближения в итерациях (8), получаем

$$\int_0^\infty F_j^{(p)}(x) dx \leq \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left(\eta_i \int_0^\infty (1 - \lambda_i(x)) dx \right), C_1 + C_2 \right\} := C, \quad j = \overline{1, n}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (18)$$

Таким образом, в силу (9)–(11), (18) и теоремы Б. Леви (см. [18, с. 303]) заключаем, что последовательность монотонных непрерывных вектор-функций $F^{(p)}(x) := (F_1^{(p)}(x), \dots, F_n^{(p)}(x))^T$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, почти всюду на $\mathbb{R}^+$ имеет предел при $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F^{(p)}(x) =: F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T,$$

причём предельная вектор-функция удовлетворяет системе (7). Из (10) и (18) следует, что

$$\eta_i(1 - \lambda_i(x)) \leq F_i(x), \quad \int_0^\infty F_i(x) dx \leq C, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (19)$$

где число C определяется по формуле (18).

Шаг 3. Рассмотрим теперь вторую вспомогательную систему линейных интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \eta_i(1 - \lambda_i(x)) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \varphi_j(r(x, y)) d\mu_i(y), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20)$$

относительно неизвестной вектор-функций $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$.

Введя следующие последовательные приближения для системы (20):

$$\varphi_i^{(p+1)}(x) = \eta_i(1 - \lambda_i(x)) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \varphi_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y),$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \eta_i(1 - \lambda_i(x)), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

индукцией несложно убедиться в достоверности приведённых ниже утверждений:

$$\varphi_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (21)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \uparrow \text{ по } p, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (22)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \leq F_i(x), \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (23)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \leq \eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (24)$$

где $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$ – суммируемое решение вспомогательной системы (7), удовлетворяющее неравенствам (19).

Следовательно, в соответствии с (21)–(24) последовательность непрерывных вектор-функций $\varphi^{(p)}(x) = (\varphi_1^{(p)}(x), \dots, \varphi_n^{(p)}(x))^T$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, имеет поточечный предел $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_i^{(p)}(x) = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Согласно теореме Б. Леви предельная вектор-функция $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ удовлетворяет системе (20). Из (22)–(24) получаем также двусторонние оценки

$$\eta_i(1 - \lambda_i(x)) \leq \varphi_i(x) \leq \min\{\eta_i, F_i(x)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (25)$$

Из (19) и (25), в частности, следует, что $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = \overline{1, n}$.

Заметим теперь, что системе интегральных уравнений (20) удовлетворяет также неподвижный вектор матрицы A . Очевидно, что вектор-функция $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))^T$, где $\phi_i(x) = \eta_i - \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяет соответствующей однородной системе линейных интегральных уравнений

$$\phi_i(x) = \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \phi_j(r(x, y)) d\mu_i(y), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из (19) и (25) получаем

$$0 \leq \phi_i(x) \leq \eta_i, \quad \phi_i(x) \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \eta_i - \phi_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Шаг 4. Рассмотрим специальные итерации для исходной системы нелинейных интегральных уравнений

$$f_i^{(p+1)}(x) = \int_0^\infty K_i(x, y) G_i(f_1^{(p)}(r(x, y)), \dots, f_n^{(p)}(r(x, y))) d\mu_i(y),$$

$$f_i^{(0)}(x) = \eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (27)$$

С учётом непрерывности функций $r(x, y)$, $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и измеримости ядер $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$ методом математической индукции несложно проверить, что $\{f_i^{(p)}(x)\}_{i=1}^n$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – измеримые функции на $\mathbb{R}^+$. Используя условия *a)*, (6) и (2), нетрудно доказать, что

$$f_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (28)$$

Докажем, что

$$f_i^{(p)}(x) \geq \phi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (29)$$

Неравенства (29) при $p = 0$ сразу следуют ввиду неотрицательности функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ и определения нулевого приближения в (27). Предположим, что оценки (29) справедливы при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая условия *b)* и (5), из (27) получаем неравенства

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty K_i(x, y) f_j^{(p)}(r(x, y)) d\mu_i(y) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty K_i(x, y) \phi_j(r(x, y)) d\mu_i(y) \geq$$

$$\geq \lambda_i(x) \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty \phi_j(r(x, y)) d\mu_i(y) = \phi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Итак, на основании (28) и (29) заключаем, что последовательность измеримых вектор-функций $f^{(p)}(x) = (f_1^{(p)}(x), \dots, f_n^{(p)}(x))^T$ имеет поточечный предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T.$$

Принимая во внимание непрерывность функций r , $\{G_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mu_i\}_{i=1}^n$, а также измеримость ядер $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$, в силу теоремы Б. Леви предельная вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ удовлетворяет системе (1). Из (28), (29) и (26) вытекает, что

$$\phi_i(x) \leq f_i(x) \leq \eta_i, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема доказана.

3. Примеры. Приведём конкретные примеры функций $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$, $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и нелинейностей $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих всем условиям теоремы.

Примеры $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$:

$\lambda_i(x) = 1 - \varepsilon_i e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, где $\varepsilon_i \in (0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, – произвольные числовые параметры;
 $\lambda_i(x) = 1 - \varepsilon_i / (1 + x^3)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1, n}$.

Примеры $\{K_i(x, y)\}_{i=1}^n$:

$K_i(x, y) = \lambda_i(x) + (1 - \lambda_i(x))W_i(x, y)$, где $\{W_i(x, y)\}_{i=1}^n$ – произвольные неотрицательные и измеримые функции, удовлетворяющие неравенству $W_i(x, y) \leq 1$, $i = \overline{1, n}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$;

$K_i(x, y) = 0.5(1 + \lambda_i(x) + (1 - \lambda_i(x))W_i(x, y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $i = \overline{1, n}$.

Наглядными примерами функций $\{W_i(x, y)\}_{i=1}^n$ могут служить следующие функции:

$W_i(x, y) = \alpha_i e^{-\beta_i(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, где α_i , β_i – числовые параметры, $\beta_i > 0$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = \overline{1, n}$;

$W_i(x, y) = (\gamma_i / \sqrt{\pi}) e^{-(x-y)^2} + \delta_i e^{-(x+y)}$, $0 < \gamma_i \leq \sqrt{\pi}/2$, $0 < \delta_i \leq 1/2$, $i = \overline{1, n}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Примеры $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$:

$\mu_i(y) = 1 - e^{-\alpha_i y}$, $\alpha_i > 0$, $y \in \mathbb{R}^+$, где α_i – числовые параметры, $i = \overline{1, n}$;

$\mu_i(y) = 1 - n^{-1} \sum_{j=1}^n e^{-\alpha_i \varepsilon_j y}$, $y \in \mathbb{R}^+$, где $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – положительные числовые параметры, $i = \overline{1, n}$.

Примеры $\{G_i(u_1, \dots, u_n)\}_{i=1}^n$:

$G_i(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j(u_j)$, $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $i = \overline{1, n}$, где $\{Q_j(u)\}_{j=1}^n$ – непрерывные и монотонные на $\mathbb{R}^+$ функции со свойствами $Q_j(u) \geq u$, $u \in [0, \eta_j]$, $Q_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = \overline{1, n}$;

$G_i(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2} Q_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, $i = \overline{1, n}$, $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М., 1963.
2. Соболев В.В. Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 3. С. 558–561.
3. Енгибарян Н.Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
4. Арабаджян Л.Г. Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1618–1622.
5. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Журн. теор. и мат. физики. 2012. Т. 172. № 3. С. 497–504.
6. Владимиров В.С., Волович Я.И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
7. Хачатрян Х.А. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 172–193.
8. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. V. 6. № 2. P. 109–130.
9. Сергеев А.Г., Хачатрян Х.А. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии // Тр. Московского мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 1. С. 113–131.
10. Хачатрян Х.А. О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей оси // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21. № 2. С. 154–161.
11. Хачатрян Х.А. О некоторых системах нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 4. С. 552–566.
12. Хачатрян Х.А. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 2. С. 164–181.

13. *Арабаджян Л.Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 21–28.
14. *Banas J.* Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 46. № 1. P. 61–68.
15. *Хачатрян Х.А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // Докл. РАН. 2009. Т. 425. № 4. С. 462–465.
16. *Хачатрян Х.А.* Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 173–200.
17. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1973.
18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 05.01.2023 г.
После доработки 05.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УДК 519.62

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. В. Булатов, Л. С. Соловарова

Рассмотрена начальная задача для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В терминах матричных полиномов приведены достаточные условия существования единственного решения. Для таких задач предложены многошаговые разностные схемы. Проведены анализ их устойчивости и расчёты модельного примера.

DOI: 10.31857/S037406412303010X, EDN: QVLSII

Введение. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков – один из основных инструментов для моделирования важных прикладных задач. Если все уравнения одинакового порядка, то они образуют систему ОДУ. Если процесс можно описать взаимосвязанными ОДУ различных порядков, а также трансцендентными (конечномерными) уравнениями, то, объединив их, получим систему с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной. Такие системы принято называть *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Если порядок этой системы выше первого, то их называют *ДАУ высокого порядка*.

В настоящее время активно развиваются качественная теория и численные методы решения ДАУ первого порядка (как для начальной, так и для краевой задачи). Достаточно обширная и полная библиография по данному вопросу представлена в монографиях [1, 2], из более ранних можно привести [3, 4]. Для ДАУ высокого порядка обычно применяют следующий стандартный приём: вводят новую вектор-функцию размерности nk (n – размерность исходной задачи, k – порядок ДАУ) и записывают полученную задачу в виде ДАУ первого порядка. Такое преобразование имеет ряд недостатков, а именно увеличивает размерность в k раз и значительно ухудшает свойства полученной задачи – увеличивает индекс, который является показателем сложности (некорректности) первоначальной задачи.

Приведём одно из понятий индекса для ДАУ первого порядка с заданным начальным условием

$$\mathcal{A}(t)x'(t) + \mathcal{B}(t)x(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Будем говорить, что система (1) имеет индекс r , если r – минимальное целое неотрицательное число такое, что существует линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{P}_r = \sum_{j=0}^r \mathcal{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

суперпозиция которого с (1) даёт систему ОДУ, т.е.

$$\mathcal{P}_r \circ (\mathcal{A}(t)x'(t) + \mathcal{B}(t)x(t)) = x'(t) + \bar{\mathcal{B}}(t)x(t),$$

где $\mathcal{R}_j(t)$, $j = \overline{0, r}$, $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\bar{\mathcal{B}}(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, причём $\mathcal{R}_r(t) \neq 0$.

Методы построения оператора $\mathcal{P}_r$ с использованием проекторов и различных обобщённых обратных матриц изложены в [2, 3]. Для ДАУ порядка выше первого можно ввести аналогичное понятие индекса или новую переменную и записать рассматриваемую задачу в виде ДАУ первого порядка. Однако оба эти варианта обладают определёнными недостатками, а

именно для таких задач индекс не будет отражать сложность создания численных методов. В частности, для одного класса ДАУ второго порядка ряд различных схем будет неустойчив или принципиально неприменим, а для других классов ДАУ второго порядка те же самые алгоритмы сходятся к точному решению. Таким образом, возникает необходимость проводить исследование на предмет существования и единственности достаточно гладкого решения и создавать методы численного решения ДАУ, не используя редукцию исходной задачи к ДАУ первого порядка.

Отметим также, что известно очень мало статей, посвящённых численному решению ДАУ высокого порядка. Из них можно выделить [5], где описано применение неявного метода Эйлера для рассматриваемых задач, и [6], в которой данные задачи исследованы с привлечением техники проекторов.

В настоящей работе выделен класс линейных ДАУ второго порядка (начальная задача), для которого предложено семейство многошаговых методов. Эти результаты основаны на особом свойстве матричных полиномов [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad (3)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n -мерные вектор-функции соответственно, $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее предполагается, что

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (4)$$

Систему (2) с условием (4) принято называть *дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка* (ДАУ2). Предполагается, что начальные условия (3) согласованы, т.е. рассматриваемая задача имеет решение. Под *решением* мы понимаем любую дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает (2) в тождество и удовлетворяет условиям (3).

Большую роль при исследовании ДАУ первого порядка играет теория регулярных матричных пучков [4, 8, 9]. Для дальнейшего изложения нам потребуются определения и вспомогательные результаты.

Определение 1 [9]. Выражение вида $\lambda A + B$, где λ – скалярный параметр, A и B – матрицы размера $m \times n$, называют *матричным пучком*. Если $m = n$ и $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, где λ – скаляр, то пучок матриц $\lambda A + B$ называется *регулярным*. В противном случае ($m \neq n$ или $\det(\lambda A + B) = 0$ для любого λ) пучок называется *сингулярным*.

Определение 2 [7]. Матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, где λ, μ – скалярные параметры, имеет *простую структуру* на отрезке $[0, 1]$, если для любого $t \in [0, 1]$ выполняются условия:

- 1) $\text{rank } A(t) = k = \text{const}$;
- 2) $\text{rank}(A(t)|B(t)) = k + l = \text{const}$;
- 3) $\det(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = a_0(t)\lambda^k\mu^l + \dots, \quad a_0(t) \neq 0$.

Лемма 1 [4]. Если элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат классу $C^p_{[0,1]}$ и $\text{rank } A(t) = k = \text{const}$, то существует матрица $P(t)$, элементы которой принадлежат классу $C^p_{[0,1]}$ и $\det P(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, 1]$, такая, что матричный пучок $P(t)(\lambda A(t) + B(t))$ имеет блочный вид

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t)) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$ – $(k \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$ – $((n - k) \times n)$ -матрица, $\text{rank } A_1(t) = k = \text{const}$ для любого $t \in [0, 1]$.

Лемма 2 [7]. Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0, 1]$ и элементы матриц принадлежат классу $C_{[0,1]}^p$, то существуют матрицы $R(t)$, $Q(t)$ с элементами из $C_{[0,1]}^p$ такие, что

$$R(t)(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $(k \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $(l \times n)$ -матрицы, $C_3(t)$ – $((n - k - l) \times n)$ -матрица, 0 – нулевые матрицы соответствующих размеров, и имеет место равенство

$$R(t)(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t))Q(t) = \\ = \lambda \begin{pmatrix} E_k & 0 & A_{13}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} B_{11}(t) & 0 & B_{22}(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) & 0 \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix},$$

здесь $A_{13}(t)$, $B_{11}(t)$, $B_{22}(t)$, $C_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, – блочные матрицы подходящих размеров, а E_k , E_l и E_{n-k-l} – единичные матрицы размеров k , l и $n - k - l$ соответственно.

Из данных лемм вытекает

Следствие. Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0, 1]$ и матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ имеют блочный вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $(k \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $(l \times n)$ -матрицы, $C_3(t)$ – $((n - k - l) \times n)$ -матрица, то

$$\det \begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

для любого $t \in [0, 1]$.

Вернёмся к задаче (2), (3). Одним из подходов к исследованию на предмет единственности решения (с учётом того, что начальные условия (3) заданы корректно) и построению численных методов решения является редукция рассматриваемой задачи к системе первого порядка путём введения новой переменной $y(t) = (x'(t)^T, x(t)^T)^T$. С учётом данного обозначения задачу (2), (3) можно записать в виде ДАУ первого порядка

$$\mathcal{A}(t)y'(t) + \mathcal{B}(t)y(t) = \varphi(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

где матрицы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ имеют блочный вид

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & C(t) \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = (f^T(t), 0)^T, \quad (6)$$

а начальные условия – вид $y(0) = (x'_0(t))^T$, $x(t)_0^T = y_0$. Эту задачу исследуют или численно решают методами, разработанными для ДАУ первого порядка (см., например, [4]).

Другой подход – это построение дифференциального оператора степени r такого, что

$$\mathcal{P}_r \circ (A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t)) = x'' + \tilde{B}(t)x'(t) + \tilde{C}(t)x(t). \quad (7)$$

Такие подходы – запись задачи (2), (3) в виде ДАУ первого порядка с матрицами и правой частью, определёнными по формуле (6), и построение дифференциального оператора (7) –

имеют принципиальный недостаток: индекс ДАУ (5) и r в формуле (7) не всегда являются показателями сложности создания численных методов решения исходной задачи. Приведём достаточно простые иллюстративные примеры, в которых предполагается, что входные данные удовлетворяют тем условиям гладкости, которые необходимы для проведения выкладок.

Пример 1 [1]. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \alpha \\ 1 & \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $g(t) \in C_{[0,1]}^2$, $q(t) \in C_{[0,1]}^1$, α – скалярный параметр.

Из второго уравнения имеем $u' = g(t) - \alpha t v'$. Подставив это выражение в первое уравнение (8), получим $v = q(t) - g'(t)$.

Достаточно просто можно убедиться в том, что данная система имеет индекс равный двум, а оператор может быть выбран как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

здесь $r = 2$.

Хорошо известно [1, 2, 4, 10, 11], что ряд неявных схем, разработанных для ОДУ, в том числе и жёстких, для ДАУ (1) часто порождают неустойчивые процессы или принципиально неприменимые из-за сингулярности матричного пучка $\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B}$. То же самое можно сказать и про задачу (2), (3).

Проведём анализ устойчивости простейшей разностной схемы для этого примера. Для упрощения выкладок положим $q(t) = g(t) = 0$. Обозначим $t_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, $u_j \approx u(t_j)$, $v_j \approx v(t_j)$ и рассмотрим алгоритм

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 + \alpha \\ 1 & \alpha t_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

полагая, что u_0 , u_1 , v_0 , v_1 заранее заданы. Опуская несложные выкладки, получим, что данная схема будет устойчива только при $|\alpha/(1 + \alpha)| < 1$.

Пример 2. ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ 0 & c_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1], \quad (9)$$

при $c_{22}(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$ и $g(t), c_{22}(t) \in C_{[0,1]}^2$ также имеет индекс равный двум.

Оператор $\mathcal{P}_r$ можно взять в виде

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & c_{22}(t) \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right].$$

Однако в отличие от первого примера простейшая разностная схема

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t_{i+1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} c_{11}(t_{i+1}) & c_{12}(t_{i+1}) \\ 0 & c_{22}(t_{i+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}' = h^2 \begin{pmatrix} q(t_{i+1}) \\ g(t_{i+1}) \end{pmatrix},$$

где $i = \overline{1, N-1}$, сходится к точному решению с первым порядком при определённой гладкости элементов входных данных и $|u_j - u(t_j)| = O(h)$, $|v_j - v(t_j)| = O(h)$, $j = 0, 1$. Элементарные, но громоздкие выкладки показывают, что, записывая системы (8), (9) в виде ДАУ первого

порядка с матрицами $A(t)$, $B(t)$ и правой частью, определённой по формуле (6), получим задачу индекса два.

Приведём в терминах матричных полиномов достаточные условия существования рассматриваемых задач.

Утверждение 1 [7]. Пусть для задачи (2), (3) выполнены следующие условия:

- 1) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру;
- 2) элементы входных данных обладают достаточной гладкостью (из класса $C_{[0,1]}^p$);
- 3) начальные условия (3) согласованы с правой частью (2).

Тогда данная задача имеет единственное решение из класса $C_{[0,1]}^p$.

Данное утверждение носит только достаточный характер. Проиллюстрируем это. В примере 1 условия утверждения 1 не выполняются, так как $\text{rank } A(t) = 1$, $\text{rank}(A(t)|B(t)) = 2$. Однако нарушается третье условие определения 1:

$$\det(\lambda A(t) + \mu B(t)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \alpha t + \mu(1 + \alpha) \\ \mu & \mu \alpha t \end{pmatrix} = -\mu^2(1 + \alpha).$$

В примере 2 при $c_{22}(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, 1]$ все условия утверждения 1 выполнены: $\text{rank } A(t) = \text{rank}(A(t)|B(t)) = 1$, $\det(\lambda A(t) + C(t)) = \lambda c_{22}(t) + c_{11}c_{22}(t)$.

Приведём ещё один пример.

Пример 3. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

с условиями $u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0$. При $a_{11} \neq 0$, $b_{12} \neq 0$, $b_{21} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$ и $a_{11}c_{22} = b_{12}b_{21}$ эта задача имеет множество решений $x = (u, v) = (\varphi(t), -b_{221}/c_{22}\varphi'(t))^T$, где $\varphi(t)$ – функция из $C_{[0,1]}^3$, удовлетворяющая условиями $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$.

В данном примере матричный полином $\lambda A + \mu B + C$ не имеет простой структуры, так как $\text{rank } A(t) = 1$, $\text{rank}(A|B) = 2$,

$$\det(\lambda A + \mu B + C) = \det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \mu b_{12} \\ \mu b_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \lambda a_{11}c_{22} - \mu^2 b_{12}b_{21}.$$

Приведём условия согласования начальных условий и построения оператора $\mathcal{P}_2$. Для этого нам потребуется следующее

Определение 3 (см., например, [3]). Матрица $A^+(t)$ называется псевдообратной к матрице $A(t)$, если она удовлетворяет уравнениям:

- 1) $A(t)A^+(t)A(t) = A(t)$;
- 2) $A^+(t)A(t)A^+(t) = A^+(t)$;
- 3) $(A^+(t)A(t))^T = A^+(t)A(t)$;
- 4) $(A(t)A^+(t))^T = A(t)A^+(t)$.

Матрица $A^+(t)$ определена единственным образом для любой матрицы $A(t)$, её элементы непрерывны, если $\text{rank } A(t) = \text{const}$ при любом t и $A^+(t) = A^{-1}(t)$; если $\det A(t) \neq 0$ для всех t (см., например, [3, 4]), то

$$V(t)A(t) \equiv 0, \quad (10)$$

где $V(t) = E - A^+(t)A(t)$.

Продифференцируем (2) и умножим полученную систему на матрицу $V(t)$. В силу (10) получим систему второго порядка вида

$$V(t)((A'(t) + B(t))x''(t) + (B'(t) + C(t))x'(t) + C'(t)x(t)) = V(t)f'(t).$$

Итогом суммирования данной системы с (2) является система

$$A^1(t)x''(t) + B^1(t)x'(t) + C^1(t)x(t) = f^1(t), \quad t \in [0, 1], \quad (11)$$

где матрицы $A^1(t)$, $B^1(t)$, $C^1(t)$ и вектор-функция $f^1(t)$ определены по формулам

$$A^1(t) = A(t) + V(t)(A'(t) + B(t)), \quad (12)$$

$$B^1(t) = B(t) + V(t)(B'(t) + C(t)), \quad (13)$$

$$C^1(t) = C(t) + V(t)C'(t), \quad (14)$$

$$f^1(t) = f(t) + V(t)f'(t). \quad (15)$$

Аналогичным образом поступим с системой (11): продифференцируем её и умножим на матрицу $V^1(t) = E - A^{1+}(t)A^1(t)$. Суммируя полученную систему и систему (11), имеем

$$A^2(t)x''(t) + B^2(t)x'(t) + C^2(t)x(t) = f^2(t), \quad t \in [0, 1],$$

где

$$A^2(t) = A^1(t) + V^1(t)(A^{1'}(t) + B^1(t)), \quad B^2(t) = B^1(t) + V^1(t)(B^{1'}(t) + C^1(t)),$$

$$C^2(t) = C^1(t) + V^1(t)C^{1'}(t), \quad f^2(t) = f^1(t) + V^1(t)f^{1'}(t).$$

Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру, то, используя технику блочного представления матриц $A(t)$, $A^1(t)$, $B(t)$, $B^1(t)$, $C(t)$, $C^1(t)$ и $V(t)$, $V^1(t)$ (см., например, [12]), лемму 2 и следствие, можно показать, что $\det A^2(t) \neq 0$ при любом $t \in [0, 1]$.

Итак, оператор $\mathcal{P}_2$ для системы (3) можно выбрать в виде

$$\mathcal{P}_2 = (A^2(t))^{-1} \left(E - A^{1+}(t)A^{1+} \frac{d}{dt} \right) (E - A^+(t)A(t)).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r \circ (A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t)) &= \\ = x''(t) + (A^2(t))^{-1}B^2(t)x(t) + (A^2(t))^{-1}C^2(t)x(t) &= (A^2(t))^{-1}f^2(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что, используя технику проекторов [2] и операцию дифференцирования, можно указать другой вид оператора $\mathcal{P}_2$. Приведём условия согласования начальных условий (3) для ДАУ (2).

Утверждение 2. Если для задачи (2), (3) выполнены условия 1) и 2) утверждения 1 и условия согласования начальных данных:

$$1) \operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank} (A(0)|B(0)x'_0 + C(0)x_0 - f(0));$$

$$2) \operatorname{rank} A^1(0) = \operatorname{rank} (A^1(0)|B^1(0)x'_0 + C^1(0)x_0 - f^1(0)),$$

где $A^1(0)$, $B^1(0)$, $C^1(0)$, $f^1(0)$ определены по формулам (12)–(15), то задача (2), (3) имеет единственное решение.

Доказательство. Подставляя в (2) и в (11) значение $t = 0$, будем соответственно иметь системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A(0)x''(t)|_{t=0} + B(0)x'_0 + C(0)x_0 = f(0)$$

и

$$A^1(0)x''(t)|_{t=0} + B^1(0)x'_0 + C^1(0)x_0 = f^1(0).$$

Условия согласования начальных данных вытекают из условий 1) и 2) утверждения 1 и теоремы Кронекера–Капелли. В силу утверждения 2 система (2) эквивалентна (16), которая с условием (3) имеет единственное решение. Утверждение доказано.

Для иллюстрации данного утверждения вернёмся к примеру 2 (формула (9)), для упрощения положив $c_{22}(t) = 1$. В этом случае компоненты $v(t)$ должны удовлетворять условиям

$$v(0) = g(0), \quad (17)$$

$$v'(t)|_{t=0} = g'(t)|_{t=0}. \quad (18)$$

Из условия 1) утверждения 2 вытекает, что $v(0) = g(0)$ (т.е. справедлива формула (17)). Опуская элементарные выкладки, можно показать, что система (11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) + g'(t) \end{pmatrix}.$$

Из условия 2) утверждения 2 вытекает (так как $\text{rank } A^1 = 1$ для любого t), что

$$\text{rank}(A^1(0)|B^1(0)x'_0 + C^1(0)x_0 - f^1(0))$$

должен быть равным единице, т.е.

$$\text{rank} \left[\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' \Big|_{t=0} + \begin{pmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q \\ g + g' \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \right] = 1.$$

Это возможно только при

$$v'(t)|_{t=0} - v(0) - g(0) - g'(t)|_{t=0} = 0,$$

а так как $v(0) = g(0)$ (формула (17)), то и $v'(t) = g'(t)|_{t=0}$ (т.е. формула (18) справедлива).

Следующий пункт посвящён многошаговым методам решения задачи (2), (3).

2. Разностные схемы. Анализ примера 2 показывает, что известные разностные схемы могут быть использованы для численного решения некоторых классов ДАУ второго порядка. Зададим на отрезке интегрирования равномерную сетку $t_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, $h = 1/N$ и обозначим

$$A_j = A(t_j), \quad B_j = B(t_j), \quad C_j = C(t_j), \quad f_j = f(t_j), \quad x_j \approx x(t_j).$$

С учётом данных обозначений линейные многошаговые (m -шаговые) методы для задачи (2), (3) имеют вид

$$\bar{A}_{i+1} \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^m \rho_j x_{i+1-j} + \bar{B}_{i+1} \sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} + \bar{C}_{i+1} \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} = \bar{f}_{i+1}, \quad i = \overline{m-1, N-1}. \quad (19)$$

Здесь $\bar{A}_{i+1} = A(t_i^*)$, $\bar{B}_{i+1} = B(t_i^*)$, $\bar{C}_{i+1} = C(t_i^*)$, $f_{i+1}^* = f(t_i^*)$, $t_i^* \in [t_{i+1-m}, t_{i+1}]$ и

$$\frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^m \rho_j x_{i+1-j} \approx x''(t)|_{t=t_i^*}, \quad \frac{1}{h} \sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} \approx x'(t)|_{t=t_i^*}, \quad \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} \approx x(t)|_{t=t_i^*}.$$

Коэффициенты ρ_j , σ_j , γ_j и способы вычисления $\bar{A}_{i+1}$, $\bar{B}_{i+1}$, $\bar{C}_{i+1}$, $\bar{f}_{i+1}$ зависят от выбора точки t_i^* . Стандартно предполагается, что при реализации схем (19) заданы или заранее вычислены стартовые значения x_0 , x_1 , ..., x_{m-1} .

Схемы (19) можно разделить на классы:

- 1) неявные схемы ($\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$);
- 2) явные схемы ($\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 = \gamma_0 = 0$);
- 3) явно-неявные схемы ($\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 \neq 0$, $\gamma_0 = 0$ или $\rho_0 \neq 0$, $\sigma_0 = 0$, $\gamma_0 \neq 0$).

При реализации схем (19) для задачи (2), (3) на каждом шаге интегрирования требуется решать СЛАУ вида

$$(\rho_0 \bar{A}_{i+1} + h \sigma_0 \bar{B}_{i+1} + h^2 \gamma_0 \bar{C}_{i+1}) x_{i+1} = \sum_{j=1}^m (\rho_j \bar{A}_{i+1} + h \sigma_j \bar{B}_{i+1} + h^2 \gamma_j \bar{C}_{i+1}) x_{i+1-j} + h^2 \bar{f}_{i+1}. \quad (20)$$

В силу того, что $\det A(t) \equiv 0$, явные методы (20) для задачи (2), (3) принципиально неприменимы. Реализация явно-неявных схем приводит к необходимости решать СЛАУ с матрицей

перед $\rho_0 \bar{A}_{i+1} + h\sigma_0 \bar{B}_{i+1}$ или $\rho_0 \bar{A}_{i+1} + h\gamma_j \bar{C}_{i+1}$. Эти матрицы также могут быть тождественно вырожденными. Приведём пример $A(t) = \text{diag}\{a_{11}(t), 0, 0\}$, $B(t) = \text{diag}\{0, b_{22}(t), 0\}$, $C(t) = \text{diag}\{0, 0, c_{33}(t)\}$, где $a_{11}(t)$, $b_{22}(t)$, $c_{33}(t) \neq 0$ для любого t . Поэтому остановимся на неявных схемах.

Приведём хорошо известные факты (см., например, [13]) из теории разностных схем для линейных ОДУ второго и первого порядков вида

$$x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad t \in [0, 1], \quad (21)$$

$$x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (22)$$

Эти схемы для задач (21) и (22) имеют вид

$$\sum_{j=0}^m \rho_j x_{i+1-j} + h\bar{B}_{i+1} \sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} + h^2 \bar{C}_{i+1} \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} = h^2 \bar{f}_{i+1}, \quad (23)$$

$$\sum_{j=0}^m \sigma_j x_{i+1-j} + h\bar{C}_{i+1} \sum_{j=0}^m \gamma_j x_{i+1-j} = h\bar{f}_{i+1} \quad (24)$$

соответственно.

В предположении, что элементы входных данных задач (21) и (22) достаточно гладкие, схемы (23) и (24) аппроксимируют соответствующие задачи с порядком $O(h^q)$, начальные значения $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$, $j = \overline{0, m-1}$, и схемы устойчивы, тогда они сходятся к точному решению и справедливы оценки $\|x_i - x(t_i)\| = O(h^q)$, $i = \overline{m, N}$.

Для устойчивости разностных схем (23) и (24) для задач (21) и (22) соответственно, как правило, рассматривают характеристические полиномы

$$\sum_{j=0}^m \rho_j p^{m-j} = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^m \sigma_j p^{m-j} = 0, \quad (26)$$

где p – скаляр.

Следуя общепринятой терминологии [14], будем называть схемы ρ -устойчивыми, если характеристическое уравнение (25) имеет два кратных корня $p_1 = p_2 = 1$, а остальные корни $p_3, p_4, \dots, p_m$ лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней; σ -устойчивыми, если характеристическое уравнение (26) имеет корень $p_1 = 1$, а остальные корни $p_2, p_3, \dots, p_m$ лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней. В силу того, что рассматриваемая задача может включать в себя и алгебраические уравнения (см. пример 3), потребуем, чтобы корни характеристического полинома

$$\sum_{j=0}^m \gamma_j p^{m-j} = 0$$

лежали в единичном круге, на границе круга не было кратных корней и не было корня, равного единице. Это условие по аналогии будем называть γ -устойчивостью. Анализ устойчивости и скорости сходимости многшаговых методов для ДАУ первого порядка (1) проведён в работах [1, 2, 11, 14]. Если в исходной системе положим $A(t) \equiv 0$, то получим задачу (1), и приведённые выше определения устойчивости схем совпадают с классическими.

Относительно сходимости схем (19) справедливо

Утверждение 3. Пусть для задачи (2), (3) выполнены условия:

1) элементы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $C_{[0,1]}^q$;

2) начальные значения $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ удовлетворяют оценке $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$, $j = \overline{0, m-1}$;

3) схема (19) аппроксимирует задачу (2), (3) с порядком q ;

4) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру;

5) схема (19) ρ -, σ - и γ -устойчива;

6) матрица $Q(t) = Q$ в лемме 2 постоянная.

Тогда справедлива оценка $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$.

Доказательство. Умножим каждое из соотношений (19) на матрицу $\bar{R}_{i+1} = R(t_i^*)$ и произведём замену переменной $x_i = Qy_i$, $i = \overline{0, N}$, где матрицы $R(t)$, $Q(t)$ те же, что и в лемме 2.

В силу условия 6) утверждения 3 и леммы 2 имеем блочные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} E_k & 0 & A_{13}(t_i^*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \rho_j \begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} B_{11}(t_i^*) & 0 & B_{22}(t_i^*) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \sigma_j \begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} C_{11}(t_i^*) & C_{12}(t_i^*) & 0 \\ C_{21}(t_i^*) & C_{22}(t_i^*) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \gamma_j \begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^1(t_i^*) \\ \varphi^2(t_i^*) \\ \varphi^3(t_i^*) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{pmatrix} y_{i+1-j}^1 \\ y_{i+1-j}^2 \\ y_{i+1-j}^3 \end{pmatrix} = Q^{-1} x_{i+1-j}, \quad \begin{pmatrix} \varphi^1(t_i^*) \\ \varphi^2(t_i^*) \\ \varphi^3(t_i^*) \end{pmatrix} = R(t_i^*) f(t_i^*).$$

В силу γ -устойчивости разностных схем, условий 2) и 3) утверждения 3 получим

$$\|y_i^3 - y^3(t_i)\| = O(h^q). \quad (28)$$

Для первой и второй компонент блочной системы (27) будем иметь равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (\rho_j E_k + \sigma_j h B_{11}(t_i^*) + \gamma_j h^2 C_{11}(t_i^*)) y_{i+1-j}^1 + \sum_{j=0}^m \gamma_j C_{12}(t_i^*) y_{i+1-j}^2 = \\ = h^2 \varphi_{i+1}^1(t_i^*) - \sum_{j=0}^m (\rho_j A_{13}(t_i^*) + \sigma_j B_{22}(t_i^*)) y_{i+1-j}^3, \\ \sum_{j=0}^m (\sigma_j + h \gamma_j C_{22}(t_i^*)) y_{i+1-j}^2 + \sum_{j=0}^m h \gamma_j C_{21}(t_i^*) y_{i+1-j}^1 = \varphi_{i+1}^2(t_i^*). \end{aligned}$$

Из условий ρ - и σ -устойчивости схем, аппроксимации задачи и результатов о сходимости схем для ОДУ первого и второго порядков [13, 14] следует, что

$$\|y_i^2 - y^2(t_i)\| = O(h^q), \quad \|y_i^1 - y^1(t_i)\| = O(h^q). \quad (29)$$

Вспоминая, что $x(t) = Qy(t)$, и учитывая оценки (28), (29), будем иметь $\|x_i - x(t_i)\| = O(h^q)$, $i = \overline{m, N}$. Утверждение доказано.

Отметим, что условие 6) утверждения 3 для схем вида (19) пока не удалось обойти. Предварительный анализ показывает, что его можно смягчить.

Для иллюстрации приведём двухшаговый метод первого порядка

$$A_{i+1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + hB_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + h^2C_{i+1}x_{i+1} = h^2f_{i+1} \quad (30)$$

и трёхшаговый метод второго порядка

$$A_{i+1}(2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2}) + \frac{h}{6}B_{i+1}(11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2}) + h^2C_{i+1}x_{i+1} = h^2f_{i+1}. \quad (31)$$

В следующем пункте будут приведены некоторые расчёты для данных алгоритмов.

3. Численные расчёты. Проведём расчёты модельных примеров по схемам (30), (31). В качестве стартовых точек взяты точные значения $x(h)$ и $x(2h)$ соответственно.

Пример 4. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 2\alpha \exp(t) & 0 & 0 \\ 2\alpha & \exp(-t) & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' +$$

$$+ \begin{pmatrix} (\alpha^2 + \beta^2) \exp(t) & 0 & 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2) & 3\gamma \exp(-t) & 0 \\ (\alpha^2 + \beta^2) & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $x(0) = (0, 1, 0)$, $x'(t)|_{t=0} = (\beta, -\gamma, 1)^T$. Точное решение имеет вид

$$x(t) = (\exp(-\alpha t) \sin(\beta t), \exp(-\gamma t), \sin t)^T.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться что данный пример удовлетворяет условиям утверждения 1. Варьируя параметры α , β , γ , будем иметь жёсткую систему ОДУ первого порядка для второй компоненты, жёсткую и быстро осциллирующую систему ОДУ второго порядка для первой компоненты, и алгебраическую связь для третьей компоненты.

Результаты расчётов представлены в табл. 1, 2 при параметрах $\alpha = 20$, $\beta = 5$, $\gamma = 30$. Погрешности приведены для каждой компоненты в точке $t = 1$.

Таблица 1. Результаты применения метода (30) для примера 4

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	$7.4 \cdot 10^{-7}$	$6.1 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
0.025	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$

Таблица 2. Результаты применения метода (31) для примера 4

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
0.025	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$

При увеличении жёсткости или жёсткости и осцилляции, т.е. при увеличении параметров α , β и γ , предложенные алгоритмы также неплохо работают.

Отметим, что предложенные схемы можно применять и для численного решения более широкого класса задач.

Пример 5. Точное решение $x(t)$ задачи

$$\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 2\exp(t) & 1 & 0 \\ 4 & \exp(-t) & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 3 & \exp(t) \\ 0 & 3\exp(-t) & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(t) \sin t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $x(0) = (1, 1, 0)$, $x'(t)|_{t=0} = (-2, -3, 1)^T$ определяется по формуле

$$x(t) = (\exp(-2t), \exp(-3t), \sin t)^T.$$

С помощью элементарных преобразований получим систему, эквивалентную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 2 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) & 0 \\ 0 & 1 - \exp(-t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 3\exp(-t) & 1 \\ 0 & -3\exp(-t) & -1 \\ 0 & 3 - \exp(-t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя ДАУ при $t = 0$ не удовлетворяет условиям утверждения 1, так как нарушено условие 3) определения 2. Численные расчёты этого примера представлены в табл. 3 и 4 для

методов (30), (31). Здесь, также как и в предыдущем примере, погрешности для каждой компоненты приведены при $t = 1$.

Таблица 3. Результаты применения метода (30) для примера 5

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	0.027	0.01	$1.7 \cdot 10^{-14}$
0.025	0.014	0.0055	$2.8 \cdot 10^{-13}$

Таблица 4. Результаты применения метода (31) для примера 5

h	err ₁	err ₂	err ₃
0.05	0.0043	0.00013	$4.8 \cdot 10^{-14}$
0.025	0.0012	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-13}$

Заключение. В статье выделены классы ДАУ второго порядка (начальная задача), которые имеют единственное решение в классе достаточно гладких функций. Для численного решения таких задач предложено построение многошаговых методов. Приведены конкретные двухшаговый и трёхшаговый методы первого и второго порядков соответственно. Их работоспособность продемонстрирована на расчётах модельных примеров.

Работа выполнена в рамках базового проекта “Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (проект 121041300060-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia, 1996.
2. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: a Projector Based Analysis. Berlin; Heidelberg, 2013.
3. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1980.
4. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.
5. *Sand J.* On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEs // Appl. Numer. Math. 2002. № 42. P. 411–424.
6. *Mehrmann V., Shi C.* Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numer. Algorithms. 2006. № 42. P. 281–307.
7. *Булатов М.В., Минг-Гонг Ли.* Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1299–1306.
8. *Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, 2006.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1986.
10. *Данилов В.А., Чистяков В.Ф.* О препятствиях на пути построения эффективных численных методов решения алгебро-дифференциальных систем. Иркутск, 1990 (Препринт / ИрВЦ СО АН СССР; № 5).
11. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. Zürich, 2006.
12. *Булатов М.В.* О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 360–372.
13. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М., 1975.
14. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. М., 1999.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 19.08.2020 г.
После доработки 11.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УДК 519.6+517.958+535.4

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ДИФРАКЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТОНКОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ С ДИФРАКЦИОННЫМИ РЕШЁТКАМИ

© 2023 г. В. Ю. Мартынова, Ю. Г. Смирнов, А. В. Тихонравов

Предложен метод оптимизации дифракционной эффективности многослойных диэлектрических решёток в задаче спектрального сложения сигналов в широком диапазоне длин волн. С физической точки зрения ставится прямая задача дифракции электромагнитной волны на многослойных диэлектрических решётках, для решения которой применён модифицированный метод разделения переменных. Для оптимизации дифракционной эффективности использован градиентный метод с постоянным шагом, при этом градиент вычислен аналитически. Представлены численные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064123030111, EDN: QVNXBM

Введение. Оптические покрытия и дифракционные решётки являются важнейшими элементами современных лазерных и оптоэлектронных приборов. В последние годы показано, что их конструктивное объединение открывает широкие возможности в развитии новых технологических направлений. В качестве примера можно привести высокоэнергетические системы лазерной накачки установки термоядерного синтеза в Lawrence Livermore National Laboratory в США [1]. Другим важнейшим приложением покрытий с дифракционными решётками является спектральное сложение лазерного излучения, при котором многие некогерентные лазерные лучи с различной длиной волны складываются в один луч [2]. Спектральное сложение представляет собой эффективный метод для достижения чрезвычайно высокой непрерывной мощности лазерного излучения.

С помощью современных технологий можно получать диэлектрические дифракционные решётки очень высокого качества средствами интерференционной литографии со сканирующим пучком [3]. Эта технология позволяет создавать дифракционные решётки со сложной структурой решётки в её периоде. Однако используемые на практике покрытия с дифракционными решётками имеют только один штрих в периоде решётки. Такие элементы обладают высокой дифракционной эффективностью, но относительно небольшой спектральной полосой [4]. Так, коммерчески доступные элементы для длины волны ~ 1 мкм имеют спектральную ширину порядка 30–40 нм [5, 6].

Применяемые в настоящее время тонкослойные покрытия с дифракционными решётками проектируются с помощью расчётов заданных простейших конструкций на основе периодических диэлектрических зеркал с решётками в одном-двух верхних слоях покрытия, имеющими один штрих в периоде решётки. Расчёты дифракционной эффективности проводятся с использованием коммерческого программного обеспечения (см., например, [7, 8]), в котором реализован какой-то из возможных методов решения прямой задачи о распространении волн в регулярной решётке (например, разложение по плоским волнам в [7]). При проектировании требуемых элементов оптимизируются оценочные функционалы по небольшому числу параметров с использованием алгоритмов, не требующих вычисления производных этих функционалов (генетических алгоритмов, алгоритмов имитации отжига).

Существенного прогресса в совершенствовании технологических элементов, основанных на тонкослойных покрытиях с дифракционными решётками в верхних слоях покрытия, можно добиться за счёт увеличения числа допускающих оптимизацию параметров решётки и применения более эффективных алгоритмов оптимизации функционалов, оценивающих качество решения задачи проектирования. Однако работы по созданию эффективных численных методов расчёта тонкоплёночных покрытий со сложными по структуре решётками и развитию

методов их оптимального проектирования до сих пор не проводились. Для успешного проектирования таких элементов требуется разработка специализированных методов оптимизации, опирающихся как на эффективные алгоритмы решения прямой задачи расчёта дифракционной эффективности, так и на столь же эффективные алгоритмы вычисления производных оценочных функционалов по всем основным параметрам разрабатываемых элементов. Этим вопросам и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многослойную дифракционную решётку (МДР), схематично изображённую на рис. 1. Электромагнитная волна с ТЕ-поляризацией падает на бинарную (с прямоугольной формой профиля) дифракционную решётку, помещённую на многослойное отражающее покрытие. Параметры рассматриваемого элемента изменяются только в плоскости Oxy . В представленных на рис. 1 обозначениях $T > 0$ – период решётки, a – ширина штриха решётки, $h > 0$ – высота решётки, DE_s , $s = -1, 0, 1$, – значение дифракционной эффективности в s -м порядке дифракции.

Решается задача максимизации значения дифракционной эффективности в первом порядке дифракции при спектральном сложении сигналов в широком диапазоне длин волн. При этом угол направления для первого порядка дифракции θ считается известным. ТЕ-поляризованная волна падает на структуру МДР под углом φ , который связан с углом θ следующим образом:

$$\sin \varphi = \frac{T}{\lambda_0} - \sin \theta, \quad (1)$$

где λ_0 – длина падающей волны.

Электрическое поле можно представить, используя только продольную составляющую поля, которую обозначим через $u_0(x, y)$. Зависимость для него имеет вид

$$u_0(x, y) = \exp(-ik_0 n_0 (x \sin \varphi - (y - h) \cos \varphi)),$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число, n_0 – показатель преломления свободного пространства.

Введём показатель преломления $n(x, y)$, при $y \in (0, h)$ равный n_0 за пределами МДР и $\tilde{n}_1$ – в штрихах решётки (см. рис. 1). При $y < 0$ $n(x, y)$ равно n_j в слоях многослойной структуры (см. рис. 1), где $j = \overline{1, J}$, а $J \geq 0$ – количество слоёв.

Прямая задача дифракции состоит в том, чтобы найти продольную составляющую полного электрического поля $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_0^2 n^2(x, y))u(x, y) = 0,$$

условиям непрерывности на поверхностях решётки и на границах слоёв, условию излучения на бесконечности, условию Флоке

$$u(x, y) = \exp(ik_0 n_0 T \sin \varphi) u(x + T, y)$$

и условию конечности энергии в каждой ограниченной области пространства. Также требуется определить дифракционную эффективность основных порядков дифракции [9; 10, с. 9].

Используя метод плоских волн [9], представим ненулевую составляющую электрического поля в виде

$$u^{(0)}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l z_l(x) \exp(-ik_{0,yl}(y - h)), \quad y > h, \quad (2)$$

$$u^{(j)}(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) (p_l^{(j)} \exp(ik_{j,yl}(y - h_j)) + q_l^{(j)} \exp(-ik_{j,yl}(y - h_j))), \quad y \in (h_j, h_{j-1}), \quad (3)$$

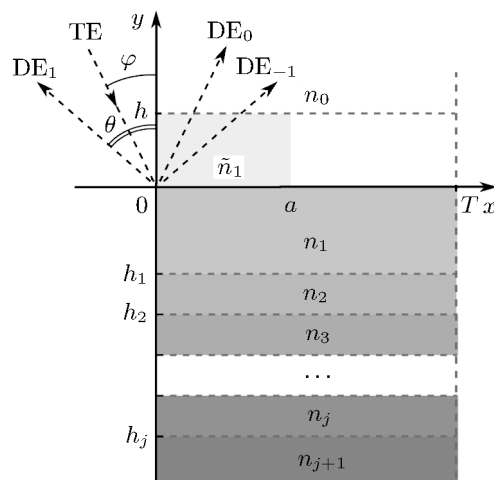


Рис. 1. Многослойное диэлектрическое покрытие с периодической дифракционной решёткой.

$$u^{(J+1)}(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t_l z_l(x) \exp(ik_{J+1,yl}y), \quad 4y < h_J, \quad (4)$$

где

$$z_l(x) := \exp(-ik_{xl}x), \quad j = \overline{1, J}, \quad h_0 = 0, \quad k_{j,yl} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n_j^2 - k_{xl}^2}, & k_0 n_j \geq |k_{xl}|, \\ -i\sqrt{k_{xl}^2 - k_0^2 n_j^2}, & k_0 n_j < |k_{xl}|, \end{cases} \quad j = \overline{0, J+1},$$

и значения k_{xl} определяются с использованием условия Флоке по формуле

$$k_{xl} = k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T},$$

l – целое. Из (4) следует, что $p_l^{(J+1)} \equiv t_l$, $q_l^{(J+1)} \equiv 0$. Здесь r_l – неизвестные амплитудные коэффициенты отражения l -х мод в области $y > h$, t_l – неизвестные амплитудные коэффициенты прохождения l -х мод в области $y < h_{J+1}$. В работе [11] показано, что все коэффициенты $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ можно представить с помощью t_l .

В прямоугольниках $\Pi = (0, a) \times (0, h)$, $\Pi_0 = (a, T) \times (0, h)$ значения волновых чисел различны: $\kappa = k_0 \tilde{n}_1$, $\kappa_0 = k_0 n_0$ (см. рис. 1).

2. Аналитическое решение задачи дифракции. Представим решение задачи в прямоугольниках Π , Π_0 в виде

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y), \quad (5)$$

учитывая, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике, а также условиям сопряжения на сторонах прямоугольников и условию Флоке.

Применяя метод разделения переменных, получаем, что функции $Y_l(y)$ имеют вид

$$Y_l(y) = b_l^{(1)} \exp(i\sqrt{\lambda_l}y) + b_l^{(2)} \exp(-i\sqrt{\lambda_l}(y - h)). \quad (6)$$

Функции $X_l(x)$ являются решениями следующих задач на собственные значения:

$$\begin{cases} X_l'' + (\kappa^2 - \lambda_l)X_l = 0, & x \in (0, a), \\ X_l'' + (\kappa_0^2 - \lambda_l)X_l = 0, & x \in (a, T), \end{cases} \quad (7)$$

$$X_l(0) = AX_l(T), \quad X_l'(0) = AX_l'(T); \quad [X_l]_{x=a} = [X_l']_{x=a} = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (8)$$

где λ_l – собственные числа задачи,

$$A = \exp(ik_0 n_0 T \sin \varphi) \quad (9)$$

– постоянная, входящая в условие Флоке ($|A| = 1$), и

$$[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

Решение (5)–(9) называется *точным решением* задачи дифракции, полученным модифицированным методом разделения переменных [11, 12].

Решение задачи (7), (8) определяется по формуле

$$\begin{cases} X_l(x) = c_{0,l} \sin(\gamma_1 x) + d_{0,l} \cos(\gamma_1 x), & x \in (0, a), \\ X_l(x) = c_{1,l} \sin(\gamma_0(x - a)) + d_{1,l} \cos(\gamma_0(x - a)), & x \in (a, T). \end{cases} \quad (10)$$

Пусть M – положительная чётная постоянная такая, что $M + 1$ – число найденных собственных значений λ_l . Введём обозначения

$$\gamma_0(\lambda_l) = \sqrt{\kappa_0^2 - \lambda_l}, \quad \gamma_1(\lambda_l) = \sqrt{\kappa^2 - \lambda_l}.$$

Используя модифицированный метод разделения переменных [11–13], задачу об отыскании собственных чисел λ_l , $l = \overline{-M/2, M/2}$, задачи (5)–(9) можно свести к задаче вычисления корней уравнения

$$F(\lambda_l) \equiv (\gamma_0(\lambda_l)\gamma_1(\lambda_l))^{-1}(\gamma_0(\lambda_l)\gamma_1(\lambda_l)(A^2 + 1 - 2A \cos(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \cos(\gamma_1(\lambda_l)a)) - A(2\lambda_l - \kappa^2 - \kappa_0^2) \sin(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \sin(\gamma_1(\lambda_l)a)) = 0. \quad (11)$$

Левая часть уравнения (11) является комплекснозначной функцией. В то же время его решения $\lambda = \lambda_l$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, являются вещественными величинами. Поэтому уравнение (11) можно представить в виде системы

$$\operatorname{Re}(F(\lambda_l)) = 0, \quad \operatorname{Im}(F(\lambda_l)) = 0. \quad (12)$$

Для определения решений системы (12) используется модифицированный метод пристрелки [11], основанный на поиске одновременной смены знака левых частей её уравнений.

Учитывая систему (10) и условия Флоке, можно определить $d_{0,l}$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, по формуле

$$d_{0,l}(\lambda_l) = c_{0,l}(\gamma_1(\lambda_l) \cos(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \cos(\gamma_1(\lambda_l)a) + \gamma_0(\lambda_l) \sin(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \sin(\gamma_1(\lambda_l)a)^{-1}(\gamma_1(\lambda_l) \cos(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \cos(\gamma_1(\lambda_l)a) - \gamma_0(\lambda_l) \sin(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \sin(\gamma_1(\lambda_l)a) - \gamma_1(\lambda_l)A^{-1}), \quad (13)$$

где $c_{0,l}$ – заданная постоянная. Далее, учитывая систему (10) и условия сопряжения при $x = a$, значения $c_{1,l}$, $d_{1,l}$ находим по формулам

$$c_{1,l}(\lambda_l) = \frac{\gamma_1(\lambda_l)}{\gamma_0(\lambda_l)}(c_{0,l} \cos(\gamma_1(\lambda_l)a) - d_{0,l} \sin(\gamma_1(\lambda_l)a)),$$

$$d_{1,l}(\lambda_l) = c_{0,l} \sin(\gamma_1(\lambda_l)a) + d_{0,l} \cos(\gamma_1(\lambda_l)a). \quad (14)$$

На следующем шаге необходимо определить $b_l^{(1)}$, $b_l^{(2)}$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, как решение системы, представленной в матричной форме

$$W(\lambda)b = f, \quad (15)$$

где $b = (b_{-M/2}^{(1)}, \dots, b_{M/2}^{(1)}, b_{-M/2}^{(2)}, \dots, b_{M/2}^{(2)})^T$, $\lambda = (\lambda_{-M/2}, \dots, \lambda_{M/2})^T$, а коэффициенты матрицы $W = (w_{i,j})_{(2M+2) \times (2M+2)}$ и вектор $f = (f_1, f_2, \dots, f_{2M+2})^T$ определяются в следующем виде:

$$w_{j,p} = i \exp(ih\sqrt{\lambda_m})X_{m,l}(k_{0,yl} + \sqrt{\lambda_m}),$$

$$w_{j,M+1+p} = iX_{m,l}(k_{0,yl} - \sqrt{\lambda_m}),$$

$$w_{M+1+j,p} = iX_{m,l}(k_{1,yl}(\tilde{p}_l - \tilde{q}_l) - (\tilde{p}_l + \tilde{q}_l)\sqrt{\lambda_m}),$$

$$w_{M+1+j,M+1+p} = i \exp(ih\sqrt{\lambda_m})X_{m,l}(k_{1,yl}(\tilde{p}_l - \tilde{q}_l) + (\tilde{p}_l + \tilde{q}_l)\sqrt{\lambda_m}),$$

где $l = -M/2 + j$, $m = -M/2 + p$, $j, p = \overline{0, M}$,

$$f_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M/2, M/2 + 2, \dots, 2M + 2, \quad f_{M/2+1} = iT(k_{0,yl} + \cos \varphi),$$

$$X_{m,l} = T((T^2\gamma_1^2(\lambda_m) - v_l^2)^{-1}(-c_{0,m}z_l(a)(iv_l \sin(\gamma_1(\lambda_m)a) + T\gamma_1(\lambda_m) \cos(\gamma_1(\lambda_m)a)) -$$

$$- d_{0,m}z_l(a)(iv_l \cos(\gamma_1(\lambda_m)a) - T\gamma_1(\lambda_l) \sin(\gamma_1(\lambda_m)a)) + c_{0,m}\gamma_1(\lambda_m)T + d_{0,m}iv_l) +$$

$$+ z_l(a)(T^2\gamma_0^2(\lambda_m) - v_l^2)^{-1}(-c_{1,m}z_l(T-a)(iv_l \sin(\gamma_0(\lambda_m)(T-a)) + T\gamma_0(\lambda_m) \cos(\gamma_0(\lambda_m)(T-a))) -$$

$$- d_{1,m}z_l(T-a)(iv_l \cos(\gamma_0(\lambda_m)(T-a)) - T\gamma_0(\lambda_m) \sin(\gamma_0(\lambda_m)(T-a))) + c_{1,m}\gamma_0(\lambda_m)T + d_{1,m}iv_l),$$

$$v_l = 2\pi l - T \sin \varphi. \text{ Постоянные } \tilde{p}_l, \tilde{q}_l \text{ определяются соотношениями, приведёнными в работе [11].}$$

Для решения системы $2M+2$ линейных уравнений (15) используется метод Гаусса–Жордана. Используя (2)–(4), можно вычислить амплитуды t_l и r_l :

$$t_l = T^{-1}(\tilde{p}_l - \tilde{q}_l)^{-1} \sum_{p=0}^M X_{p,l} Y_p(0), \quad l = \overline{-M/2, M/2},$$

$$r_l = T^{-1} \sum_{p=0}^M X_{p,l} Y_p(h), \quad l = -M/2, \dots, -1, 1, \dots, M/2,$$

$$r_0 = T^{-1} \sum_{p=0}^M X_{p,0} Y_p(h) - 1.$$

В результате получаем дифракционную эффективность в l -м порядке дифракции, определяемую формулой

$$\text{DE}_l = |r_l|^2 \text{Re} \left(\frac{k_{0,yl}}{k_0 n_0 \cos \varphi} \right) + |t_l|^2 \text{Re} \left(\frac{k_{J+1,yl}}{k_0 n_0 \cos \varphi} \right).$$

3. Оптимизация. Решается задача спектрального сложения сигналов в широком диапазоне длин волн. Пусть L – количество выбранных длин волн, для которых будут проводиться расчёты. Минимизировать будем среднеквадратичное отклонение дифракционной эффективности в первом порядке от значения 1:

$$\sigma = \sqrt{L^{-1} \sum_{j=1}^L (1 - \text{DE}_1^{(j)})^2}, \quad (16)$$

где $\text{DE}_1^{(j)}$ – значение дифракционной эффективности в первом порядке при j -й длине волны.

Поиск минимума среднеквадратичного отклонения σ по выбранному набору параметров $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_K)^T$ осуществляется итерационным методом:

$$\mathbf{p}^{(j+1)} = \mathbf{p}^{(j)} + \alpha \nabla \sigma(\mathbf{p}^{(j)}),$$

где параметр $\alpha > 0$ – фиксированная постоянная, поскольку подбор оптимального значения данного параметра на каждой итерации приводит к дополнительным вычислениям собственных значений $\lambda = \lambda_l$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, что многократно увеличивает время работы программы. При этом единое для всех итераций значение параметра α подбирается в процессе вычислений с учётом среднего значения $\nabla \sigma(\mathbf{p}^{(j)})$. В качестве параметров p_k , $k = \overline{1, K}$, могут выступать любые характеристики МДР (например, значения ширины штрихов в периоде решётки, их высота и толщины слоёв многослойного зеркала), K – количество выбранных параметров. В данной работе будет рассмотрена оптимизация по двум параметрам: $p_1 = a$, $p_2 = h$. Критерием выхода из оптимизационной задачи выступает условие

$$|\sigma(\mathbf{p}^{(j)}) - \sigma(\mathbf{p}^{(j+1)})| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная точность для нахождения локального минимума.

Для нахождения $\partial\sigma/\partial a$, где a соответствует ширине штриха решётки, необходимо сначала вычислить производные $d\lambda_l/da$ по формуле

$$\frac{d\lambda_l}{da} = -\frac{\partial F(\lambda_l(a), a)}{\partial a} \left(\frac{\partial F(\lambda_l(a), a)}{\partial \lambda_l} \right)^{-1}, \quad l = \overline{-M/2, M/2}.$$

Функция $F(\lambda_l(a), a)$ определена формулой (11), а $\partial F/\partial a$, $\partial F/\partial \lambda_l$ вычисляются аналитически и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= A\gamma_0^{-1}(\lambda_l)\gamma_1^{-1}(\lambda_l)(\kappa_0^2 - \kappa^2)(\cos(\gamma_1(\lambda_l)a) \sin(\gamma_0(\lambda_l)(T - a))\gamma_1(\lambda_l) + \\ &\quad + \sin(\gamma_1(\lambda_l)a) \cos(\gamma_0(\lambda_l)(T - a))\gamma_0(\lambda_l)), \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_l} &= A\gamma_0^{-3}(\lambda_l)\gamma_1^{-3}(\lambda_l) \left(\left(\frac{1}{2}(\kappa_0^2 - \kappa^2)^2 \sin(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) + \right. \right. \\ &\quad + \cos(\gamma_0(\lambda_l)(T - a))\gamma_1^2(\lambda_l) \left((T - a)\frac{1}{2}(2\lambda_l - \kappa^2 - \kappa_0^2)\gamma_0(\lambda_l) - a\gamma_0^3(\lambda_l) \right) \Big) \sin(\gamma_1(\lambda_l)a) + \\ &\quad + \left. \left(a\frac{1}{2}(2\lambda_l - \kappa^2 - \kappa_0^2)\gamma_1(\lambda_l) - (T - a)\gamma_1^3(\lambda_l) \right) \sin(\gamma_0(\lambda_l)(T - a)) \cos(\gamma_1(\lambda_l)a)\gamma_0^2(\lambda_l) \right). \end{aligned}$$

Кроме того, так как значения $d_{0,l}$, $d_{1,l}$, $c_{1,l}$ зависят от λ_l и a , необходимо определить $\partial d_{0,l}/\partial a$, $\partial d_{1,l}/\partial a$, $\partial c_{1,l}/\partial a$. Данные производные можно вычислить аналитически, учитывая формулы (13), (14).

Вычисление частных производных b по любым выбранным параметрам осуществляется по следующей схеме. Домножим (15) слева на W^{-1} и найдём производную по выбранному параметру:

$$\frac{\partial b(p)}{\partial p_k} = -W^{-1}(\lambda, p) \frac{\partial W'(\lambda, p)}{\partial p_k} W^{-1}(\lambda, p) f(p),$$

где $k = 1, 2$. Учитывая, что $W^{-1}(\lambda, p)f(p) = b(p)$, получаем

$$\frac{\partial b(p)}{\partial p_k} = -W^{-1}(\lambda, p) \frac{\partial W'(\lambda, p)}{\partial p_k} b(p).$$

Умножив слева последнее уравнение на матрицу $W(\lambda, p)$, находим матричное уравнение

$$W(\lambda, p) \frac{\partial b(p)}{\partial p_k} = -\frac{\partial W'(\lambda, p)}{\partial p_k} b(p) \quad (17)$$

для вычисления $\partial b(p)/\partial p_k$. При этом производные коэффициентов матрицы $W(\lambda, p)$ по любому выбранному параметру можно вычислить аналитически. Как и прежде, для решения системы $2M + 2$ линейных уравнений (17) используется метод Гаусса–Жордана.

4. Численные результаты. Предлагаемый алгоритм реализован в виде кода на языке программирования C++ с использованием параллельных вычислений. Собственные значения $\lambda = \lambda_l$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, определяются параллельно на нескольких потоках. Количество потоков зависит от характеристик процессора. Для 10 потоков и $M = 6$ время выполнения программы составляет 0.2 с.

Для расчётов была выбрана МДР, состоящая из пары тонкоплёночных материалов: легированный водородом кремний (Si:H) и диоксид кремния (SiO₂). Общая конфигурация рассматриваемой МДР представлена на рис. 2. Угол направления для первого порядка дифракции $\theta = 45^\circ$. Исходя из этого значения, диапазон углов падения ТЕ-волны φ для выбранного диапазона длин волн с учётом формулы (1) составляет от 10.47° до 38.77° .

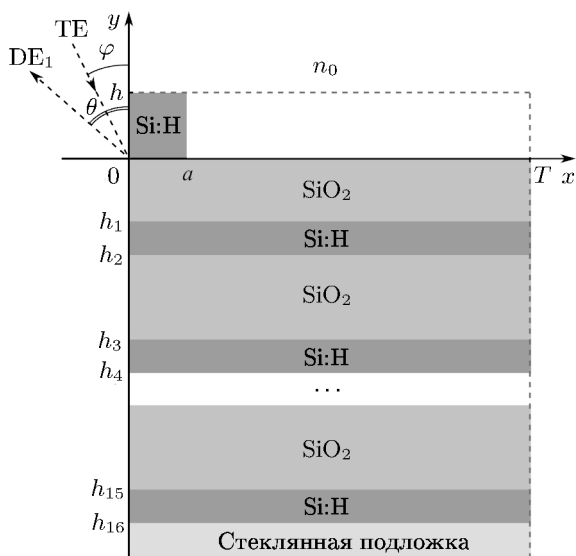


Рис. 2. Многослойная дифракционная решетка с одним штрихом в периоде.

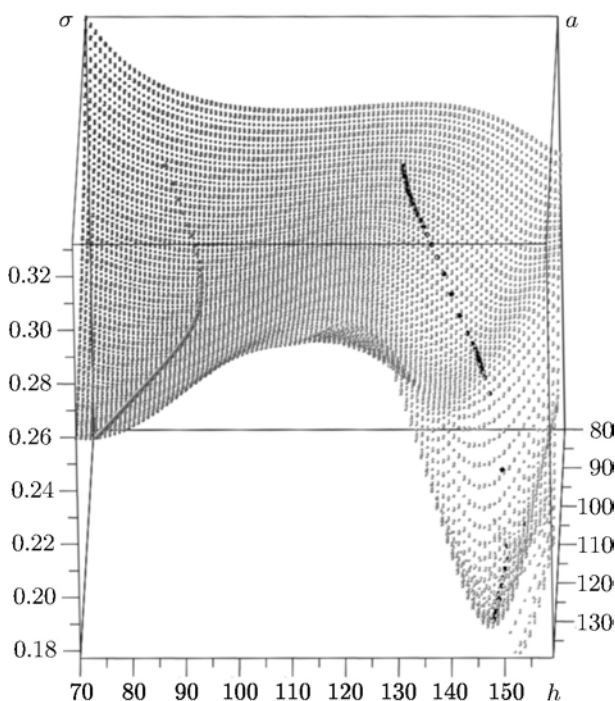


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного отклонения σ от параметров a , h .

среднеквадратичного отклонения σ . Для наборов параметров, соответствующих найденным минимумам, дифракционная эффективность в первом порядке дифракции показана на рис. 4.

Для расчёта “серого” пути использовался градиентный метод при $\alpha = 12$, начальными данными являлись значения $a = 90$ нм, $h = 85$ нм, $\sigma = 0.2908$. Для достижения результата с точностью $\varepsilon = 0.0001$ понадобилось 107 итераций, при этом оптимальным стал набор параметров $a = 139.14$ нм, $h = 73.98$ нм, $\sigma = 0.25989$, а время работы программы составило 337 с. Дифракционная эффективность в первом порядке дифракции в диапазоне длин волн от 800 нм до 1190 нм для полученного данным способом набора параметров представлена на рис. 4 точками серого цвета.

На основании экспериментальных результатов [14], полученных в Университете Тундзи, использовались следующие показатели преломления для выбранных материалов: $n = 1.48$ для SiO_2 , $n = 3.52$ для Si:H и $n = 1.458$ для стеклянной подложки. Показатель преломления n_0 за пределами решётки равен единице. Период решётки $T = 900$ нм, при этом параметр a , определяющий ширину штриха, варьируется для оптимизации среднеквадратичного отклонения σ в пределах 80–140 нм. Вторым параметром оптимизации выступает высота данного штриха h , которая изменяется от 70 до 160 нм. Толщины первых двух слоёв многослойного зеркала составляют 140 и 76 нм соответственно. Начиная с третьего слоя, все нечётные слои имеют толщину 189.2 нм, а чётные – 75.6 нм. Многослойное зеркало состоит из 16 слоёв, т.е. $J = 16$.

Цель проводимых расчётов – проверка возможности применения градиентных методов оптимизации к решению задач проектирования МДР. В связи с этим в первую очередь надо проверить эффективность аналитического подхода к вычислению градиента минимизируемого функционала (16). Наиболее трудоёмким в вычислительном плане является вычисление производных по параметрам решётки, поскольку оно требует нахождения собственных значений матрицы краевой задачи и производных собственных значений по этим параметрам. Нахождение по аналитическим формулам производных функционала по параметрам многослойного покрытия значительно менее затратно в вычислительном плане. Поэтому для проверки эффективности предложенных алгоритмов была рассмотрена задача оптимизации по двум параметрам: ширине a и высоте h штриха решётки.

На рис. 3, 4 представлены результаты решения задачи оптимизации. На рис. 3 показаны процессы сходимости предложенного метода к двум различным точкам минимума

Для расчёта “черного” пути использовался градиентный метод при $\alpha = 5$, начальными данными являлись $a = 90$ нм, $h = 130$ нм. Для достижения результата с точностью $\varepsilon = 0.00001$ понадобилось 52 итерации, а время работы программы составило 156 с. При этом итогом работы программы стали следующие оптимальные параметры: $a = 129.24$ нм, $h = 147.62$ нм, $\sigma = 0.17722$. Дифракционная эффективность в первом порядке дифракции в диапазоне длин волн от 800 до 1190 нм для полученного численно самого оптимального набора параметров представлена на рис. 4 точками черного цвета.

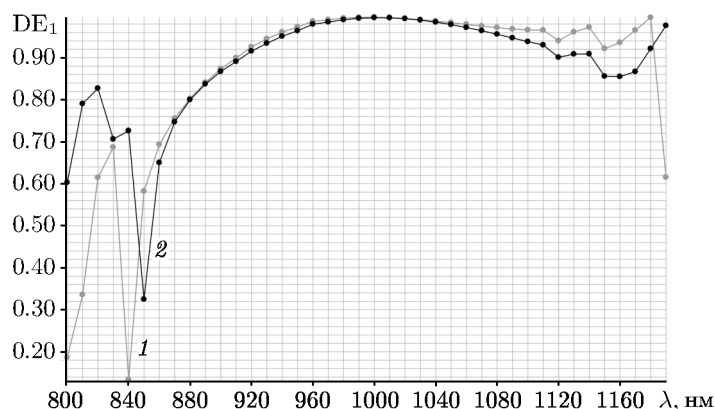


Рис. 4. Зависимость дифракционной эффективности в первом порядке дифракции от длины волны для наборов параметров, соответствующих двум локальным минимумам среднеквадратичного отклонения σ : 1 – $a = 139.14$ нм, $h = 73.98$ нм, $\sigma = 0.25989$; 2 – $a = 129.24$ нм, $h = 147.62$ нм, $\sigma = 0.17722$. Цвета графиков соответствуют цветам точек на рис. 3.

Заключение. В работах [11, 12] предложен новый численно эффективный метод решения прямой задачи расчёта дифракционной эффективности многослойных покрытий с дифракционными решётками. На основе этого метода в настоящей статье впервые разработана схема получения аналитических выражений для градиента функционала, оценивающего качество решения задачи оптимизации МДР элементов. Проведена проверка численной эффективности применения полученных аналитических выражений для построения градиентных методов оптимизации. Полученные результаты открывают возможность применения современных методов оптимизации первого порядка для решения различных задач проектирования МДР элементов, в частности, задач проектирования многослойных покрытий с дифракционными решётками для спектрального сложения лазерного излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая (проект 21-57-53001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nguyen H.T., Britten J.A., Carlson T.C., Nissen J.D., Summers L.J., Hoaglan C.R., Aasen M.D., Peterson J.E., Jovanovic I. Gratings for high-energy petawatt-class lasers // Proc. Of SPIE. 2005. V. 5991. P. 5991M.
2. Zheng Y., Yang Y., Wang J. et al. 10.8 kW spectral beam combination of eight all-fiber superfluorescent sources and their dispersion compensation // Optics Express. 2016. V. 24. № 11. P. 12063–12071.
3. Smith D.J., McCullough M., Xu B. et al. Large area pulse compression gratings fabricated onto fused silica substrates using scanning beam interference lithography // 3rd Intern. Conf. Ultrahigh Intens. Lasers: Dev. Sci. Emerg. Appl. 2008.
4. Rumpel M., Moeller M., Moormann C., Graf T., Ahmed M.A. Broadband pulse compression gratings with measured 99.7% diffraction efficiency // Opt. Lett. 2014. V. 39. P. 323–326.
5. <http://www.horiba.com/scientific/products/diffraction-gratings/for-scientific-applications/laser-pulse-compression/dielectric>.
6. <http://www.plymouthgrating.com/Products>.

7. www.gsolver.com.
8. www.lighttrans.com.
9. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. of the Optical Soc. of America. A. 1995. V. 12. № 5. P. 1068–1076.
10. Popov E. Gratings: Theory and Numeric Applications. Marseille, 2014.
11. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Wei Zeyong, Cheng Xinbin, Tikhonravov A.V. Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings // Lobachevskii J. of Math. 2022. V. 43. № 5. P. 1277–1284.
12. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Moskaleva M.A., Tikhonravov A.V. Modified method of separation of variables for solving diffraction problems on multilayer dielectric gratings // Eurasian J. of Math. and Comput. Appl. 2021. V. 9. № 4. P. 76–88.
13. Смирнов Ю.Г., Мартынова В.Ю., Москалева М.А., Цупак А.А. Анализ дифракционной эффективности дифракционных решеток модифицированным методом разделения переменных // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2021. № 4 (60). С. 57–70.
14. Tao He, Jinlong Zhang, Hongfei Jiao, Zhanshan Wang, Xinbin Cheng. Near-infrared broadband Si:H/SiO₂ multilayer gratings with high tolerance to fabrication errors // Nanotechnology. 2020. V. 31. № 315203. P. 1–5.

Пензенский государственный университет,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 23.09.2022 г.
После доработки 22.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.

УДК 517.977.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

© 2023 г. Р. В. Бризицкий, П. А. Максимов

Исследованы задачи мультипликативного управления для модели реакции–диффузии–конвекции с нелинейно зависящими от решения, а также зависящими от пространственных переменных коэффициентами. В случае степенной зависимости коэффициентов модели от решения для экстремальных задач выведены системы оптимальности. С их помощью получены оценки локальной устойчивости решений конкретных задач управления относительно малых возмущений как функционалов качества, так и одной из заданных функций краевой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030123, EDN: QVRFAN

1. Введение. Постановка и разрешимость краевой задачи. В последние годы возрастает интерес к исследованию краевых задач и задач управления для моделей тепломассопереноса (см. [1–15]). При этом приложения экстремальных задач не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В рамках оптимизационного подхода к задачам управления сводятся задачи восстановления неизвестных функций в уравнениях и граничных условиях рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении краевой задачи. В свою очередь, задачи восстановления неизвестных коэффициентов модели сводятся к задачам мультипликативного управления (см. [10, 11, 16–18]).

В данной статье исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции, рассматриваемого в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + k(\varphi, \mathbf{x})\varphi = f. \quad (1)$$

Предполагается, что граница Γ области Ω состоит из двух частей – Γ_D и Γ_N , и уравнение (1) рассматривается при смешанных краевых условиях

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi/\partial n + \alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (2)$$

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объёмная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi, \mathbf{x})$ – коэффициент реакции, $\alpha(\varphi, \mathbf{x})$ – коэффициент массообмена, функция χ имеет смысл плотности граничных источников. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях λ , k , f , α , χ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

В работе [15] доказана глобальная разрешимость задачи 1 и нелокальная единственность её решения в случае, когда нелинейности $k(\varphi, \cdot)\varphi$ и $\alpha(\varphi, \cdot)\varphi$ являются монотонными, а также установлен принцип максимума и минимума для концентрации φ .

Для задачи 1 исследованы задачи мультипликативного управления. В частности, установлено свойство релейности (или справедливость принципа минимакса) для решения одной из рассматриваемых задач управления. Данное свойство означает, что оптимальное управление в зависимости от $\mathbf{x} \in \Omega$ может принимать только два значения, как правило, это верхняя и нижняя границы множества управлений. Тем самым в зависимости от $\mathbf{x} \in \Omega$ происходит скачок управления из одного состояния в другое (принцип минимакса) или его переключение между двумя состояниями (релейность) (см. [6–8] и [15]).

В настоящей работе для двухпараметрической задачи мультипликативного управления, в случае когда коэффициенты $k(\varphi, \cdot)$ и $\alpha(\varphi, \cdot)$ имеют определённый вид, выводятся системы

оптимальности. На основе анализа данных систем получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции f .

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ . Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot, \cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ или в $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot, \cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot, \cdot)_\Omega$ или $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_N}$. Пусть $L_+^p(D) = \{k \in L^p(D) : k \geq 0 \text{ в } D\}$, $p \geq 3/2$, $H_+^s(D) = \{h \in H^s(D) : h \geq 0 \text{ в } D\}$, $s \geq 0$, $Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $H_{\lambda_0}^s(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geq \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}$, $s > 3/2$, $\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N ($\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$), при этом поверхностная мера $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$ и граница $\partial \Gamma_D$ участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых или является n -угольником;

(ii) $\lambda \in H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $\mathbf{u} \in Z$, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$;

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v, \cdot) \in L_+^p(\Omega)$ для некоторого $p \geq 3/2$, не зависящего от v , и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1, \cdot) - k(v_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L_1 \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in B_r,$$

здесь константа L_1 зависит от r , но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $\alpha(w, \cdot) \in L_+^q(\Gamma_N)$ для некоторого $q \geq 2$, не зависящего от w , и на любом шаре $S_a = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq a\}$ радиуса a справедливо неравенство

$$\|\alpha(w_1, \cdot) - \alpha(w_2, \cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq L_2 \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_N)} \quad \text{для любых } w_1, w_2 \in S_a,$$

здесь константа L_2 зависит от a , но не зависит от $w_1, w_2 \in S_a$.

Будем предполагать, что нелинейности $k(\varphi, \cdot)\varphi$ и $\alpha(\varphi, \cdot)\varphi$ являются монотонными в следующем смысле:

(v) $(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$;

(vi) $(\alpha(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - \alpha(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geq 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$.

Пусть также функции $k(\varphi, \cdot)$ и $\alpha(\varphi, \cdot)$ ограничены в том смысле, что существуют положительные константы A_1 , B_1 , зависящие от k , и A_2 , B_2 , зависящие от α , такие, что

(vii) $\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A_1 \|\varphi\|_{1,\Omega}^r + B_1$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $p \geq 3/2$, $r \geq 0$;

(viii) $\|\alpha(\varphi, \cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq A_2 \|\varphi\|_{1,\Omega}^l + B_2$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $q \geq 2$, $l \geq 0$.

Отметим, что условия (iii), (v) и (vii) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geq 3/2$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции как от концентрации φ , так и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Например, $k = \varphi^2$ (или $k = \varphi^2 |\varphi|$) в подобласти $Q \subset \Omega$ и $k = k_0(\mathbf{x}) \in L_+^{3/2}(\Omega \setminus \overline{Q})$ в $\Omega \setminus \overline{Q}$.

В свою очередь, условия (iv), (vi) и (viii) задают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^q(\Gamma_N)$, $q \geq 2$, который позволяет учитывать зависимость коэффициента α от φ и $\mathbf{x}$. Например, $\alpha = |\varphi|$ на $\Gamma_0 \subset \Gamma_N$ и $\alpha = \alpha_0(\mathbf{x}) \in L_+^2(\Gamma_N \setminus \overline{\Gamma_0})$ в $\Gamma_N \setminus \overline{\Gamma_0}$.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, и при некоторой константе C_s , зависящей от s и Ω , справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3)$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q \leq 4$ и компактно при $q < 4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_N)$ (и его

сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N \subset \Gamma$) с константой $\tilde{C}_q$, зависящей от q и Γ_N , справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq \tilde{C}_q \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Наконец, поскольку при $r > 1$ пространство $H^r(\Gamma_N)$ непрерывно и компактно вкладывается в $L^p(\Gamma_N)$, где $p \leq \infty$, из непрерывности оператора частичного следа $\gamma|_{\Gamma_N} : H^{r+1/2}(\Omega) \rightarrow H^r(\Gamma_N)$ вытекает оценка

$$\|\lambda\|_{L^p(\Gamma_N)} \leq \hat{C} \|\lambda\|_{s,\Omega} \quad \text{при любой } \lambda \in H^s(\Omega), \quad s = r + 1/2 > 3/2.$$

Справедлива следующая техническая лемма (см. [14]).

Лемма 1.1. *При выполнении условий (i), (ii), $\mathbf{u} \in Z$, $\lambda \in H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $k_1 \in L_+^p(\Omega)$, $p \geq 3/2$, $\alpha_1 \in L_+^q(\Gamma_N)$, $q \geq 2$, существуют положительные константы C_0 , δ_0 , γ_1 , γ_p , зависящие или от Ω , или от Ω и p , или от Ω , Γ_N и q , при которых справедливы соотношения*

$$|(\lambda \nabla \varphi, \nabla \eta)| \leq C_0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \quad |(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \eta)| \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \quad (4)$$

$$|(k_1 \varphi, \eta)| \leq \gamma_p \|k_1\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(\lambda \alpha_1 \varphi, \eta)| \leq \gamma_q \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\alpha_1\|_{L^q(\Gamma_N)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi, \eta \in H^1(\Omega), \quad (5)$$

$$|(\chi, h)| \leq \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|h\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \chi \in L^2(\Gamma_N), \quad h \in H^1(\Omega), \quad (6)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \varphi) = 0, \quad (\lambda \nabla \varphi, \nabla \varphi) \geq \lambda_* \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{T}, \quad \lambda_* \equiv \delta \lambda_0. \quad (7)$$

Умножим уравнение (1) на $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по области Ω , применяя формулу Грина. Учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} & (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot) \varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda \alpha(\varphi, \cdot) \varphi, h)_{\Gamma_N} = \\ & = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } h \in \mathcal{T}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Определение. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству (8), назовём *слабым решением* задачи 1.

Для доказательства разрешимости задачи 1 в [15] использовалась следующая

Лемма 1.2. *Пусть выполняются условия (i). Тогда для любой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ такая, что $\varphi_0 = \psi$ на Γ_D и при некоторой константе C_Γ , зависящей от Ω и Γ_D , справедлива оценка*

$$\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1 [15]. *При выполнении условий (i)–(viii) существует единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1, для которого справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi \equiv C_* M_l + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}, \quad (9)$$

где C_Γ – константа из леммы 1.2 и

$$\begin{aligned} M_l \equiv & \|f\|_\Omega + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + (C_0 C_\Gamma \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1 C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \\ & + C_\Gamma (\gamma_p (A_1 C_\Gamma^r \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^r + B_1) + \gamma_q \|\lambda\|_{s,\Omega} (A_2 C_\Gamma^l \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^l + B_2)) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}. \end{aligned}$$

2. Мультипликативная задача управления. Пусть функция $k(\varphi, \mathbf{x})$ удовлетворяет следующему условию:

(ix) $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, где $\beta(\mathbf{x}) \in H_+^1(\Omega)$, $k_0(\varphi) \in L_+^2(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет свойству (vii) при $p > 2$, и в любом шаре $B_r = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_{\Omega} \leq L_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех } \varphi_1, \varphi_2 \in B_r. \quad (10)$$

Здесь константа L_3 зависит от радиуса r и не зависит от конкретных $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$.

Несложно показать, что условия (ix) описывают частный случай функции $k(\varphi, \mathbf{x})$, удовлетворяющей (iv). Действительно (см. также [12]),

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \|\beta\|_{L^6(\Omega)} \|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_{\Omega} \leq C_6 \|\beta\|_{1,\Omega} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

Для постановки задачи управления разобьем множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесём функции $\mathbf{u}$, $k_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$, f , χ и ψ , и группу управлений, куда отнесём функции λ и β , предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2 , удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$ и $K_2 \subset H_+^1(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Положим $u = (\lambda, \beta)$, $K = K_1 \times K_2$. Введём пространство $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ и оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h \rangle = (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda \alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N},$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi$$

и запишем (8) в виде $F(\varphi, u) = 0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $u \in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \quad (11)$$

Здесь $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{ad} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0, J(\varphi, u) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (11) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ (либо $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$), K – ограниченное множество и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi^d|^2 d\mathbf{x}, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2. \quad (12)$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (i)–(viii), (xi) и (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество Z_{ad} не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (11).

Замечание. Функционалы в (12) удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Также в дальнейшем будем использовать оценки, вытекающие из её условий:

$$\|\lambda\|_{s,\Omega} \leq C_\lambda, \quad \|\beta\|_{1,\Omega} \leq C_\beta \quad \text{для любых } \lambda \in K_1 \text{ и } \beta \in K_2,$$

где C_λ и C_β – положительные константы.

Будем считать далее, что $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)k_0(\varphi) \equiv \beta(\cdot)\varphi^2$ и $\alpha(\alpha) = |\alpha|$. При таких коэффициентах реакции и массообмена для экстремальной задачи (11) ниже будет выведена система

оптимальности и на основе её анализа будут получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений задачи (11) относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции f .

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ по φ в каждой точке $(\hat{\varphi}, \hat{u}) = (\hat{\varphi}, \hat{\lambda}, \hat{\beta})$ есть линейный оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})(h) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat{y}_1 \in \mathcal{T}^*$ и $\hat{y}_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются по $\hat{\varphi}$ и τ соотношениями

$$\langle \hat{y}_1, \tau \rangle = (\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla h) + 3(\hat{\beta} \hat{\varphi}^2 \tau, h) + 2(\hat{\lambda} |\hat{\varphi}| \tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, h) \quad \text{для любого } \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_{\Gamma_D}.$$

Введём сопряжённое к Y пространство $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$. Через $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})^* : Y^* \rightarrow H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряжённый к $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})$ оператор. Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач [19], введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, на который будем ссылаться как на сопряжённое состояние, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, u) \rangle_{\Gamma_D},$$

где $\langle \zeta, \cdot \rangle_{\Gamma_D} = \langle \zeta, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

Из теоремы Лакса–Мильграма вытекает, что для любых $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla h) + 3(\hat{\beta} \hat{\varphi}^2 \tau, h) + 2(\hat{\lambda} |\hat{\varphi}| \tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, h) = (f, h) \quad \text{для всех } h \in \mathcal{T}, \quad \tau|_{\Gamma_D} = \psi.$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ – изоморфизм, а из [19] вытекает

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)\varphi^2$, где $\beta(\cdot) \in H^1_+(\Omega)$, и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$, функционал $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по φ в точке $\hat{\varphi}$ и локальный минимум в задаче (11) достигается в точке $(\hat{\varphi}, \hat{u}) \in H^1(\Omega) \times K$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* = -J'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})$ в $H^1(\Omega)^*$, эквивалентное тождеству

$$(\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\hat{\beta} \hat{\varphi}^2 \tau, \theta) + 2(\hat{\lambda} |\hat{\varphi}| \tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\hat{\varphi}), \tau \rangle \quad \text{для всех } \tau \in H^1(\Omega),$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\varphi}, \hat{u}, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\varphi}, u, \mathbf{y}^*)$ для любой $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\mu_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s, \Omega} + ((\lambda - \hat{\lambda}) \nabla \hat{\varphi}, \nabla \theta) + ((\lambda - \hat{\lambda}) |\hat{\varphi}| \hat{\varphi}, \theta)_{\Gamma_N} \geq 0, \quad (13)$$

$$\mu_2(\hat{\beta}, \beta - \hat{\beta})_{1, \Omega} + ((\beta - \hat{\beta}) \hat{\varphi}^3, \theta) \geq 0 \quad (14)$$

при любых $\lambda \in K_1$ и $\beta \in K_2$.

3. Основное свойство системы оптимальности. Обозначим через $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times K$ решение задачи (11), отвечающее заданной функции $f = f_1 \in L^2(\Omega)$, а через $(\varphi_2, u_2) \in H^1(\Omega) \times K$ – решение задачи

$$\tilde{J}(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{1, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u, \tilde{f}) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, \quad (15)$$

которая получается из (11) заменой функционала $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ другим функционалом $\tilde{I} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и заменой функции f функцией $f_2 = \tilde{f} \in L^2(\Omega)$. Считая множество K ограниченным, а функционалы $I(\varphi)$ и $\tilde{I}(\varphi)$ непрерывно дифференцируемыми на $H^1(\Omega)$, выведем одно важное для дальнейшего анализа неравенство для разности решений задач (11) и (15). Напомним, что в силу теоремы 1.1 справедливы следующие оценки для φ_i :

$$\|\varphi_i\|_{1, \Omega} \leq M_\varphi = C_* \sup_{(\lambda, \beta) \in K} \tilde{M}_\varphi, \quad i = 1, 2, \quad C_* \equiv \lambda_*^{-1}, \quad (16)$$

где $\tilde{M}_\varphi$ определена в (9). Очевидно, что $M_\varphi < \infty$ в случае, когда множество K ограничено.

Обозначим через $(\theta_i, \zeta_i) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i) , $i = 1, 2$. В силу теоремы 2.2 они удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta_1) + 3(\beta_1 \varphi_1^2 \tau, \theta_1) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_1) + 2(\lambda_1 |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + \\ + \langle \zeta_1, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\varphi(\varphi_1), \tau \rangle \quad \text{для любых } \tau \in H^1(\Omega), \quad (17)$$

$$(\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta_2) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta_2) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_2) + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta_2)_{\Gamma_N} + \\ + \langle \zeta_2, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\frac{\mu_0}{2} \langle \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \tau \rangle \quad \text{для любых } \tau \in H^1(\Omega). \quad (18)$$

Положим

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2, \quad f = f_1 - f_2. \quad (19)$$

При $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)\varphi^2$ и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$ слабая формулировка (8) задачи 1 принимает вид

$$(\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (\beta \varphi^3, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda |\varphi| \varphi, h)_{\Gamma_N} = \\ = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех } h \in \mathcal{T}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \quad (20)$$

Вычтем тождество (20), записанное для (φ_2, u_2, f_2) , из этого же тождества, записанного для (φ_1, u_1, f_1) . Учитывая, что

$$\beta_1 \varphi_1^3 - \beta_2 \varphi_2^3 = \beta \varphi_1^3 + \beta_2 (\varphi_1^3 - \varphi_2^3), \quad \lambda_1 \nabla \varphi_1 - \lambda_2 \nabla \varphi_2 = \lambda_1 \nabla \varphi + \lambda \nabla \varphi_2,$$

$$\lambda_1 |\varphi_1| \varphi_1 - \lambda_2 |\varphi_2| \varphi_2 = \lambda |\varphi_1| \varphi_1 + \lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2),$$

получаем равенство

$$(\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla h) + (\beta_2 (\varphi_1^3 - \varphi_2^3), h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), h)_{\Gamma_N} = \\ = (f, h) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla h) - (\beta \varphi_1^3, h) - (\lambda |\varphi_1| \varphi_1, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для любых } h \in \mathcal{T}. \quad (21)$$

Полагая $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ в (21), учитывая (7), (16) и монотонность функций $\lambda_2 \varphi |\varphi|$ и $\beta_2 \varphi^3$:

$$(\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geq 0, \quad (\beta_2 (\varphi_1^3 - \varphi_2^3), \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0,$$

выводим оценку

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq C_*(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega), \quad (22)$$

где $a = C_0 M_\varphi + \gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2$, $b = C_6^5 M_\varphi^3$.

Положим $\lambda = \lambda_2$ в неравенстве (13), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$, $\theta = \theta_1$, и $\lambda = \lambda_1$ в неравенстве (13), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$, $\theta = \theta_2$. Имеем

$$\mu_1(\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1)_{s,\Omega} + ((\lambda_2 - \lambda_1) \nabla \varphi_1, \nabla \theta_1) + ((\lambda_2 - \lambda_1) |\varphi_1| \varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} \geq 0,$$

$$\mu_1(\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)_{s,\Omega} + ((\lambda_1 - \lambda_2) \nabla \varphi_2, \nabla \theta_2) + ((\lambda_1 - \lambda_2) |\varphi_2| \varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} \geq 0.$$

Сложив последние неравенства, получим

$$\mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 \leq -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - (\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta) - (\lambda (\varphi_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1| \varphi), \theta_2)_{\Gamma_N} + (\lambda \varphi_1 |\varphi_1|, \theta)_{\Gamma_N}. \quad (23)$$

Положим $\beta = \beta_2$ в неравенстве (14), записанном при $\hat{\beta} = \beta_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$, $\theta = \theta_1$, и $\beta = \beta_1$ в неравенстве (14), записанном при $\hat{\beta} = \beta_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$, $\theta = \theta_2$:

$$\mu_2(\beta_1, \beta_2 - \beta_1)_{1,\Omega} - ((\beta_2 - \beta_1) \varphi_1^3, \theta_1) \geq 0, \quad \mu_2(\beta_2, \beta_1 - \beta_2)_{1,\Omega} - ((\beta_1 - \beta_2) \varphi_2^3, \theta_2) \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$\mu_1 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leq (\beta\varphi(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2), \theta_1) + (\beta\varphi_2^3, \theta). \quad (24)$$

Вычтем теперь тождество (18) из (17). Учитывая, что

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta_1) - (\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta_2) &= (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + (\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2), \\ (\lambda_1 |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - (\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta_2)_{\Gamma_N} &= (\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta)_{\Gamma_N}, \\ (\beta_1 \varphi_1^2 \tau, \theta_1) - (\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta_2) &= (\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1) + (\beta_2 \varphi (\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1) + (\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta), \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\beta_2 \varphi (\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta) + \\ &+ 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\ &= -(\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1) - (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \tau \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

для всех $\tau \in H^1(\Omega)$.

Полагая в (25) $\tau = \varphi$, с учётом того, что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ на Γ_D , получаем

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla \theta) + 3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \varphi, \theta) + \\ &+ 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \varphi, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \theta) = \\ &= -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \varphi, \theta_1) - (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Положим далее $h = \theta$ в (21). Будем иметь

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla \theta) + (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2) \varphi, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \theta) + (\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \theta)_{\Gamma_N} = \\ &= (f, \theta) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) - (\beta \varphi_1^3, \theta) - (\lambda |\varphi_1| \varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Вычтем это равенство из (26). Учитывая, что

$$\begin{aligned} &3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \varphi, \theta) - (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2) \varphi, \theta) = \\ &= 3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) - (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2) \varphi, \theta), \\ &2(\lambda_2 |\varphi_2| \varphi, \theta)_{\Gamma_N} - (\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \theta)_{\Gamma_N} = \\ &= (\lambda_2 (2|\varphi_2|(\varphi_1 - \varphi_2) - |\varphi_1| \varphi_1 + |\varphi_2| \varphi_2), \theta)_{\Gamma_N} = (\lambda_2 (\varphi_1 (|\varphi_2| - |\varphi_1|) + |\varphi_2| \varphi), \theta)_{\Gamma_N}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) - (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2) \varphi, \theta) + \\ &+ 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 (\varphi_1 (|\varphi_2| - |\varphi_1|) \varphi_1 + |\varphi_2| \varphi), \theta)_{\Gamma_N} = \\ &= -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \varphi, \theta_1) - (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle - \\ &- (f, \theta) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) + (\beta \varphi_1^3, \theta) + 2(\lambda |\varphi_1| \varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Равенство (27) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle = -3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) + (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2) \varphi, \theta) - \\ &- 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - (\lambda_2 (|\varphi_2| - |\varphi_1|) \varphi_1 + |\varphi_2| \varphi, \theta)_{\Gamma_N} - (\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - \\ &- 2(\lambda |\varphi_1| \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \varphi, \theta_1) - (f, \theta) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) + (\beta \varphi_1^3, \theta) + 2(\lambda |\varphi_1| \varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (28)$$

Складывая (28) с (23) и (24), получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 & (\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle + \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leq A_1 + A_2, \\
 & A_1 = -3(\beta_2(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi^2, \theta_1) + (\beta_2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2)\varphi, \theta) - \\
 & \quad - (\beta\varphi(-2\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2), \theta_1) + (\beta(\varphi_1^3 + \varphi_2^3), \theta) - (f, \theta), \\
 & A_2 = -2(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|)\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - (\lambda_2((|\varphi_2| - |\varphi_1|)\varphi_1 + |\varphi_2|\varphi), \theta)_{\Gamma_N} - \\
 & \quad - 2(\lambda\nabla\varphi, \nabla\theta_2) - 2(\lambda|\varphi_1|\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\theta) + 3(\lambda|\varphi_1|\varphi_1, \theta)_{\Gamma_N} - \\
 & \quad - (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\theta) - (\lambda(\varphi_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1|\varphi), \theta_2)_{\Gamma_N}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (i) и (j), $K \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega) \times H^1(\Omega)$ – ограниченное множество, пары $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times K$ и $(\varphi_2, u_2) \in H^1(\Omega) \times K$ являются решениями соответственно задач (11) при $f = f_1 \in L^2(\Omega)$ и (15) при $f = f_2 \in L^2(\Omega)$. Пусть далее $(\theta_i, \zeta_i) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ – множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i) , $i = 1, 2$, и функционалы I и $\tilde{I}$ непрерывно дифференцируемы относительно φ . Тогда для разностей φ , λ , β , θ и f , введённых в (19), справедлива оценка (22) и выполняется неравенство (29).

4. Оценки локальной устойчивости оптимальных решений. Основываясь на теореме 3.1, установим достаточные условия единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач. Начнём с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2$:

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} I_1(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u, f) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{30}$$

Обозначим через (φ_1, u_1) решение задачи (30), отвечающее заданным функциям $\varphi^d = \varphi_1^d \in L^2(Q)$ и $f = f_1 \in L^2(\Omega)$. Через (φ_2, u_2) обозначим решение задачи (30), отвечающее возмущённым функциям $\tilde{\varphi}^d = \varphi_2^d \in L^2(Q)$ и $\tilde{f} = f_2 \in L^2(\Omega)$. Полагая $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$, в дополнение к (19) имеем в силу (12) равенства

$$\langle I'_1(\varphi_i), \tau \rangle = 2(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q, \quad \langle I'_1(\varphi_1) - \tilde{I}'_1(\varphi_2), \tau \rangle = 2((\varphi, \tau)_Q - (\varphi^d, \tau)_Q), \quad i = 1, 2. \tag{31}$$

С учётом (31) равенства (17), (18) для множителей Лагранжа $\theta_i \in \mathcal{T}$, отвечающие решениям (φ_i, u_i) , принимают вид

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + 3(\beta_i \varphi_i^2 \tau, \theta_i) + 2(\lambda_i |\varphi_i| \tau, \theta_i) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \\
 & + \langle \zeta_i, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\mu_0(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q \quad \text{для любых } \tau \in H^1(\Omega), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{32}$$

В (25) теперь подставим производную Фреше от конкретного функционала качества и запишем это соотношение в виде уравнения относительно разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta) + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\
 & = -3(\beta_2 \varphi(\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1) - 3(\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1) - 2(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - \\
 & - (\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - \mu_0(\varphi - \varphi^d, \tau)_Q \quad \text{для всех } \tau \in H^1(\Omega).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Наконец, (29) примет следующий вид:

$$\mu_0(\|\varphi\|_Q^2 - (\varphi^d, \varphi)_Q) + \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leq A_1 + A_2 - (f, \theta). \tag{34}$$

Используя (16) и (22), оценим множители θ_i , $i = 1, 2$, разность $\theta = \theta_1 - \theta_2$, а также величины A_1 и A_2 в (34).

Начнём с оценки множителя Лагранжа θ_i , являющегося решением задачи (32). В силу (16) и неравенств $\|\varphi_i\|_Q \leq \|\varphi_i\|_{1,\Omega}$, $\|\tau\|_Q \leq \|\tau\|_{1,\Omega}$ имеем

$$|(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q| \leq M_\varphi^0 \|\tau\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \tau \in H^1(\Omega), \quad M_\varphi^0 \equiv M_\varphi + \max(\|\varphi_1^d\|_Q, \|\varphi_2^d\|_Q). \quad (35)$$

Полагая $\tau = \theta_i \in \mathcal{T}$ в (32) и используя (35) и лемму 2.1, выводим оценку

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 C_* M_\varphi^0, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

По аналогичной схеме выводится оценка для разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$, удовлетворяющей соотношению (33). При этом для её вывода достаточно оценить правую часть (33). Используя (3), (4), (16), (22), (36) и неравенство Гёльдера, имеем последовательно

$$\begin{aligned} |(\varphi, \tau)_Q| &\leq \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq C_*(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \|\tau\|_{1,\Omega}, \quad |(\varphi^d, \tau)_Q| \leq \|\varphi^d\|_Q \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 3|(\beta_2 \varphi(\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1)| &\leq 3\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi_1 + \varphi_2\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta_1\|_{L^6(\Omega)} \|\tau\|_{L^6(\Omega)} \leq \\ &\leq 6C_6^5 \|\beta_2\|_{1,\Omega} \|\varphi_i\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq 6\mu_0 C_\beta C_6^5 C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 3|(\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1)| &\leq 3\|\beta\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi_1\|_{L^6(\Omega)}^2 \|\theta_1\|_{L^6(\Omega)} \|\tau\|_{L^6(\Omega)} \leq \\ &\leq 3C_6^5 \|\beta\|_{1,\Omega} \|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2 \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq 3\mu_0 C_* C_6^5 M_\varphi^0 M_\varphi^2 \|\beta\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 2|(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\gamma_q C_\lambda \|\varphi\|_{L^4(\Gamma_N)} \|\tau\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0 \gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ |(\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2)| &\leq C_0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\theta_2\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 C_* C_0 M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 2|(\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0 \gamma_q C_* \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично выводу оценки (36) для решения задачи (32), заключаем, что для (единственного) решения θ задачи (33) справедлива оценка

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q). \quad (37)$$

Здесь константы α_1 , α_2 и α_3 определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_* a + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 a + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 a + C_0 C_* M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_* \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi, \\ \alpha_2 &= C_* b + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 b + 3C_6^5 C_* M_\varphi^0 M_\varphi^2 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 b, \\ \alpha_3 &= C_* + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 \mu_0 M_\varphi M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0. \end{aligned}$$

Используя неравенства (16), (22), (36) и (37), оценим теперь слагаемые, входящие в выражение для величин A_1 и A_2 в (29). Учитывая (3)–(5) и неравенство Юнга $2ab \leq \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2$ для $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, оценим каждое из пяти слагаемых, входящих в A_1 :

$$\begin{aligned} |3(\beta_2(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi^2, \theta_1)| &\leq 3\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)} (\|\varphi_1\|_{L^6(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}) \|\theta_1\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq 18\mu_0 C_6^5 C_\beta^3 C_* M_\varphi M_\varphi^0 (a^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + b^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \|f\|_\Omega^2), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} |(\beta_2(\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2)\varphi, \theta)| &\leq 4\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)} \max_{i=1,2} \|\varphi_i\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|_{L^6(\Omega)} \leq \\ &\leq 4\mu_0 C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq 4\mu_0 C_* C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 [(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) \|f\|_\Omega^2 + 1.5 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ |(\beta(\varphi_1^3 + \varphi_2^3), \theta)| &\leq 2\mu_0 C_6^5 M_\varphi^3 \|\beta\|_{1,\Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_6^5 M_\varphi^3 (\alpha_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 2(\alpha_2 + 1.5) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \alpha_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \|\varphi^d\|_Q^2), \quad (39) \\ |(\beta \varphi(\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1^2), \theta_1)| &\leq \mu_0 C_*^2 C_6^5 M_\varphi^2 M_\varphi^0 \|\beta\|_{1,\Omega} (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \leq \\ &\leq \mu_0 C_*^2 C_6^5 M_\varphi^2 M_\varphi^0 (0.5a^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_\Omega^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(f, \theta)| &\leq \mu_0 \|f\|_{\Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 (0.5\alpha_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + (1.5 + \alpha_3) \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2). \end{aligned}$$

Выражение в A_2 содержит восемь слагаемых. Сначала детально оценим первые четыре:

$$\begin{aligned} 2|(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|)\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 C_*^2 (3a^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 3b^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 3\|f\|_{\Omega}^2), \\ |(\lambda_2((|\varphi_2| - |\varphi_1|)\varphi_1 + |\varphi_2|\varphi), \theta)_{\Gamma_N}| &\leq 2\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* ((a\alpha_1 + \alpha_1^2 + 1.5a^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (b\alpha_2 + \alpha_2^2 + 1.5b^2) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_3^2 + 1.5) \|f\|_{\Omega}^2 + 1.5 \|\varphi^d\|_Q^2), \\ |2(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2)| &\leq 2C_0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\theta_2\|_{1,\Omega} \leq 2\mu_0 C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \|\lambda\|_{s,\Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0 C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 ((a+1) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\|f\|_{\Omega}^2), \\ 2|(\lambda|\varphi_1|\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 M_{\varphi} ((a+1) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\|f\|_{\Omega}^2). \end{aligned} \quad (40)$$

Рассуждая аналогично, оценим оставшиеся четыре слагаемых в A_2 :

$$\begin{aligned} |(\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta)| &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} \|\lambda\|_{s,\Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} [(\alpha_1 + 1.5) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\alpha_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ 3|(\lambda|\varphi_1|\varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}| &\leq 3\mu_0\gamma_q \tilde{C}_4 M_{\varphi}^2 ((\alpha_1 + 1.5) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\alpha_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2), \\ |(\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta)| &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} \|\lambda\|_{s,\Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} ((\alpha_1 + 1.5) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\alpha_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2), \\ |(\lambda(\varphi_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1|\varphi), \theta_2)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0\gamma_q \tilde{C}_4 C_*^2 M_{\varphi} M_{\varphi}^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q \tilde{C}_4 C_*^2 M_{\varphi} M_{\varphi}^0 ((a+1) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5\|f\|_{\Omega}^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Используя (38)–(41), выводим для величин A_1 и A_2 , определённых в (29), неравенство

$$|A_1| + |A_2| \leq \mu_0 (\omega_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \omega_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \quad (42)$$

Здесь положительные константы ω_i , $i = \overline{1,4}$, зависящие от величин M_{φ} и M_{φ}^0 , определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 18C_6^5 C_*^3 C_{\beta} M_{\varphi} M_{\varphi}^0 a^2 + 4C_* C_6^5 C_{\beta} M_{\varphi}^2 (a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) + C_6^5 M_{\varphi}^3 \alpha_1^2 + 0.5C_*^2 C_6^5 M_{\varphi}^2 M_{\varphi}^0 a^2 + \\ &\quad + 6\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 C_*^2 a^2 + 2\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* (a\alpha_1 + \alpha_1^2 + 1.5a^2) + 2C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 (a+1) + \\ &\quad + 4\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 M_{\varphi} (a+1) + 2C_0 M_{\varphi} (\alpha_1 + 1.5) + 3\gamma_q \tilde{C}_4 M_{\varphi}^2 (\alpha_1 + 1.5) + 0.5\alpha_1^2, \\ \omega_2^2 &= 18C_6^5 C_*^3 C_{\beta} M_{\varphi} M_{\varphi}^0 b^2 + 4C_* C_6^5 C_{\beta} M_{\varphi}^2 (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) + 2C_6^5 M_{\varphi}^3 (\alpha_2 + 1.5) + \\ &\quad + C_*^2 C_6^5 M_{\varphi}^2 M_{\varphi}^0 (b+1) + 6\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 C_*^2 b^2 + 2\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* (b\alpha_2 + \alpha_2^2 + 1.5b^2) + \\ &\quad + C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 b^2 + 3\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 M_{\varphi} b^2 + C_0 M_{\varphi} \alpha_2^2 + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_{\varphi}^2 \alpha_2^2 + 0.5\alpha_2^2, \\ \omega_3^2 &= 18C_6^5 C_*^3 C_{\beta} M_{\varphi} M_{\varphi}^0 + 4C_* C_6^5 C_{\beta} M_{\varphi}^2 (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) + C_6^5 M_{\varphi}^3 \alpha_3^2 + 0.5C_*^2 C_6^5 M_{\varphi}^2 M_{\varphi}^0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6\gamma_q C_* C_\lambda \tilde{C}_4 M_\varphi^0 C_*^2 b^2 + 2\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_* (\alpha_3 + \alpha_3^2 + 1.5) + C_0 C_*^2 M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi + \\
& + C_0 M_\varphi \alpha_3^2 + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2 \alpha_3^2 + (1.5 + \alpha_3), \\
& \omega_4^2 = 6C_* C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 + C_6^5 M_\varphi^3 + 3\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_* + C_0 M_\varphi + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2 + 0.5.
\end{aligned} \quad (43)$$

Пусть исходные данные задачи (30) таковы, что выполняются условия

$$\mu_0 \omega_1^2 < \mu_1(1 - \varepsilon_1), \quad \mu_0 \omega_2^2 < \mu_2(1 - \varepsilon_2), \quad (44)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ – произвольные числа. При выполнении (44) оценка (42) принимает вид

$$|A_1| + |A_2| \leq \mu_1(1 - \varepsilon_1) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2(1 - \varepsilon_2) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \quad (45)$$

Используя (45), из неравенства (34) получаем

$$\mu_0 \|\varphi\|_Q^2 \leq \mu_0(\varphi, \varphi^d)_Q - \varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \quad (46)$$

Отбрасывая неположительные слагаемые $-\varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2$ и $-\varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2$ в правой части, из (46) находим

$$\|\varphi\|_Q^2 \leq \|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q + \omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2. \quad (47)$$

Неравенство (47) представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|\varphi\|_Q$. Решив его, приходим к следующей оценке для $\|\varphi\|_Q$:

$$\|\varphi\|_Q \leq (\omega_4 + 1) \|\varphi^d\|_Q + \omega_3 \|f\|_\Omega.$$

Поскольку $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$, $f = f_1 - f_2$, то она эквивалентна оценке

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + \omega_3 \|f_1 - f_2\|_\Omega. \quad (48)$$

В случае когда $Q = \Omega$, неравенство (48) имеет в $L^2(\Omega)$ смысл оценки устойчивости компоненты $\hat{\varphi}$ решения $(\hat{\varphi}, \hat{u})$ задачи (30) относительно малых возмущений функций $\varphi^d \in L^2(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. При $f_1 = f_2$ (48) переходит в оценку

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q,$$

справедливую при выполнении условия (44). Если, кроме того, $\varphi_1^d = \varphi_2^d$, то из этой оценки следует, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в Q . Это даёт вместе с (46) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, что $\lambda = 0$ и $\beta = 0$, а из (22) при $\lambda = 0$, $\beta = 0$ и $f = 0$ тогда следует, что $\varphi = 0$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω . Последнее означает единственность решения задачи (15) при выполнении условия (44).

В общем случае, когда $f_1 \neq f_2$, используя соотношение

$$\|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q \leq \|\varphi\|_Q^2 + (1/4) \|\varphi^d\|_Q^2,$$

вытекающее из неравенства Юнга, из (46) получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 & \leq -\mu_0 \|\varphi\|_Q^2 + \mu_0(\varphi, \varphi^d)_Q + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2) \leq \\
& \leq (\mu_0/4) \|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2).
\end{aligned} \quad (49)$$

Из (49) вытекают оценки

$$\|\lambda\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1 \mu_1} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\varphi^d\|_Q),$$

$$\|\beta\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2 \mu_2} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\varphi^d\|_Q),$$

которые с учётом (19) запишем в виде

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1}(\omega_3\|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q), \quad (50)$$

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2}(\omega_3\|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q). \quad (51)$$

Из (50), (51) и (22) следует оценка для разности $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega} &\leq C_*(a\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1} + b\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2} + 1)\|f_1 - f_2\|_\Omega + \\ &+ C_*(\omega_4 + 0.5)(a\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1} + b\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2})\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q, \end{aligned} \quad (52)$$

где $a = C_0M_\varphi + \gamma_q\tilde{C}_4M_\varphi^2$, $b = C_6^5M_\varphi^3$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия (i) и (j), K – ограниченное множество, пара $(\varphi_i, u_i) \in H^1(\Omega) \times K$ является решением задачи (30), отвечающим заданным функциям $\varphi_i^d \in L^2(Q)$ и $f_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, где $Q \subset \Omega$ – произвольное открытое ограниченное множество. Предположим, что $\mu_0 > 0$ и выполняется условие (44). Тогда справедливы оценки (48), (50) и (52), где ω_i , $i = \overline{1, 4}$, определены в (43).

Следствие. Пусть выполняются условия (i), (j), K – ограниченное множество, $\varphi_1^d = \varphi_2^d$ в Q и $f_1 = f_2$ в Ω . Тогда если $\mu_0 > 0$ и справедливо условие (44), решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (30) единственно.

Отметим, что устойчивость решения экстремальной задачи (30) доказана при положительных параметрах μ_1 и μ_2 , удовлетворяющих условию (44). При фиксированных значениях μ_0 , μ_1 и μ_2 оно означает условие малости на исходные данные задачи (30). Таким образом, слабые $(\mu_1/2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2$ и $(\mu_2/2)\|\beta\|_{1,\Omega}^2$ в выражении (30) для минимизируемого функционала J вносят необходимый регуляризирующий эффект.

Заключение. Доказанная локальная устойчивость (единственность) оптимальных решений задачи (30) дополняет результаты статьи [15], в которой установлена релейность оптимального управления β . Управление λ ввиду большей гладкости не может обладать этим свойством. Не являясь локальным, свойство релейности устанавливается без использования регуляризации, но, как правило, не является и строгим (см. [19]). При этом в экстремальных задачах маскировки принцип минимакса более востребован, чем устойчивость оптимального управления (см. [20]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00271).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ito K., Kunish K. Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Probl. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. Nguyen P.A., Raymond J.-P. Control problems for convection–diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механ. УРО РАН. 2006. Т. 16. С. 76–101.
4. Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механ. и техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
5. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
6. Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю. Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
7. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.

8. *Chebotaev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // *J. Math. Anal. and Appl.* 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
9. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции–диффузии–реакции с сильной нелинейностью // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
10. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
11. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
12. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 3. С. 317–327.
13. *Baranovskii E.S.* Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids // *J. of Optimization Theory and Appl.* 2021. V. 189. P. 623–645.
14. *Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* Разрешимость нестационарных уравнений трёхмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2021. Т. 85. № 4. С. 147–204.
15. *Бризицкий Р.В., Быстрова В.С., Сарицкая Ж.Ю.* Анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 5. С. 635–648.
16. *Алексеев Г.В., Романов В.Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2011. Т. 14. № 2. С. 15–20.
17. *Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А.* Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // *Докл. АН СССР.* 2017. Т. 476. № 5. С. 512–517.
18. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // *Дифференц. уравнения.* 2013. Т. 49. № 8. С. 993–1004.
19. *Чеботарев А.Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
20. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 2019. V. 135. P. 1269–1277.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ,
СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ В ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

© 2023 г. П. В. Николенко

Исследованы экстремали принципа максимума Понтрягина задач, связанных с перемещением в поле скоростей. Управления являются непрерывными функциями. Показано, что в фазовом пространстве существует окрестность финальной точки, через каждую точку которой проходит единственная траектория экстремали, ведущая в финальную точку. Также показано, что если траектория экстремали содержит точку, через которую проходит другая экстремаль с таким же значением функционала, то эта точка отсекает от траектории неоптимальную часть. Доказано, что оставшаяся часть, ведущая в финальную точку, оптимальна.

DOI: 10.31857/S0374064123030135, EDN: QVTYWS

1. Постановка задачи. Рассмотрим перемещения в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$, подчиняющиеся закону $\dot{x} = v(x) + u$. Здесь $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – векторное поле класса C^2 , $v(0) = 0$; управление u – кусочно-непрерывная, непрерывная справа, с разрывами первого рода вектор-функция такая, что $\|u\| \leq 1$, где $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2$. Рассмотрим управления, которые переводят объект из положения x_0 в начало координат. Пусть поставлен вопрос о выборе управления, которое минимизирует величину $\int (1 + \alpha \|u\|^2) dt$. Таким образом, рассматриваются следующие задачи:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_{t_0}^0 (1 + \alpha \|u(t)\|^2) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= v(x) + u, \quad \|u\| \leq 1, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(0) = 0, \quad \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $t = 0$ – момент завершения процесса, момент начала процесса t_0 не фиксирован.

При $\alpha = 0$ получается задача быстродействия. Если $\alpha > 0$, то экономится не только время, но и “энергия”, затраченная на перемещение. Варьируя значение α , можем менять значимость указанных факторов. Для того чтобы выделить экстремали задачи (1), воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [1, с. 25]).

Пусть (x, u) – оптимальный процесс. Составим функцию Понтрягина

$$H = \psi_0(1 + \alpha \|u\|^2) + \psi(v(x) + u),$$

где константа ψ_0 принимает значения либо нуль, либо минус единица. Согласно принципу максимума для некоторого решения системы $\dot{\psi} = -\psi v'(x(t))$ (v' – матрица Якоби отображения v) функция H принимает максимальное значение по параметру u .

Рассмотрим случай $\psi_0 = 0$. Поскольку вектор (ψ_0, ψ) нетривиален и $\dot{\psi} = -\psi v'(x)$, то ψ не обращается в нуль. Следовательно, H принимает максимальное значение при $u = \psi / \|\psi\|$. Так как в финальный момент $H = 0$ и $v(0) = 0$, получаем $u(0) = 0$, что противоречит условию не обращения в нуль вектора ψ . Таким образом, случай $\psi_0 = 0$ экстремалей не выявляет.

Для случая $\psi_0 = -1$

$$H = -\alpha \|u\|^2 + \psi u + \psi v - 1 = -\alpha \|u\|^2 + \|\psi\| \|u\| \cos \beta + \psi v - 1,$$

где β – угол между векторами ψ и u . Очевидно, что максимальное по u значение величина H будет достигать при $\beta = 0$. При

$$H = -\alpha \left(\|u\| - \frac{\|\psi\|}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\|\psi\|^2}{4\alpha} + \psi v - 1$$

имеем

$$u = \begin{cases} \psi/(2\alpha), & \text{если } \|\psi\| < 2\alpha, \\ \psi/\|\psi\|, & \text{если } \|\psi\| \geq 2\alpha. \end{cases}$$

Запишем функцию u в виде $g(\|\psi\|)\psi$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1/2\alpha & \text{при } x < 2\alpha, \\ 1/x & \text{при } x \geq 2\alpha. \end{cases}$$

Используем условие $H = 0$ при $t = 0$. Поскольку $v(0) = 0$, имеем равенства

$$-\alpha g^2(\|\psi\|)\psi^2 + g(\|\psi\|)\psi^2 - 1 = 0,$$

$$\psi^2(-\alpha g^2(\|\psi\|) + g(\|\psi\|)) = 1.$$

Если $\|\psi(0)\| \leq 2\alpha$, то $\psi^2 = 4\alpha$, $\|\psi(0)\| = 2\sqrt{\alpha}$ при $\alpha \geq 1$ (при $\alpha < 1$ решений нет). Если $\|\psi(0)\| \geq 2\alpha$, то

$$\psi^2(0) \left(-\alpha \frac{1}{\|\psi(0)\|^2} + \frac{1}{\|\psi(0)\|} \right) = 1,$$

откуда получаем, что $\|\psi(0)\| = 1 + \alpha$ при $\alpha \leq 1$ (при $\alpha > 1$ решений нет).

Таким образом, экстремали задачи (1) определяются решением следующей задачи Коши с пятью компонентами фазового пространства и моментом завершения $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = 1 + \alpha g^2(\|\psi\|)\psi^2, \quad \dot{x} = v(x) + g(\|\psi\|)\psi, \quad \dot{\psi} = -\psi v'(x),$$

$$x_0(0) = 0, \quad x(0) = (0, 0), \quad \psi(0) = b(\cos s, \sin s), \quad (2)$$

где

$$b = \begin{cases} 2\sqrt{\alpha} & \text{при } \alpha \geq 1, \\ 1 + \alpha & \text{при } 0 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Решение задачи (2) определяет экстремаль задачи (1): $x = (x_1, x_2)$ – координаты траектории экстремали, $u = g(\|\psi\|)\psi$ – управление, $|x_0|$ – значение функционала.

Через заданную точку x_0 фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ могут проходить две (или больше) траектории экстремали. Это может свидетельствовать о том, что хотя бы одна из этих траекторий содержит неоптимальную часть. Как отделять заведомо неоптимальную часть траектории? Будет ли оптимален остаток? Могут ли подобные точки x_0 располагаться как угодно близко от начала координат? Отметим, что этими и другими вопросами, связанными с перемещением в поле скоростей, занимались разные авторы (см., например, работы [2–4]).

2. Теорема единственности.

Теорема 1. Пусть первые производные отображения v удовлетворяют условию Липшица в некоторой области, содержащей начало координат. Существует окрестность начала координат, через каждую точку которой проходит единственная траектория экстремали, ведущая в начало координат.

Доказательство. Для доказательства потребуются следующие утверждения. Пусть $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ в области U ограничена константой K и липшицева, т.е. справедливо неравенство $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$; $x = x(t)$ – решение уравнения $\dot{x} = F(x)$, $x(t) \in U$ для $t \in [0, \Delta t]$.

Согласно теореме о среднем и следствию из неё (см. [5, с. 148]) выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(\Delta t) - \dot{x}(0)\| &= \|F(x(\Delta t)) - F(x(0))\| \leq \\ &\leq L\|x(\Delta t) - x(0)\| \leq L \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|\dot{x}(\Theta \Delta t)\| |\Delta t| \leq LK|\Delta t|, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \|x(\Delta t) - x(0) - \dot{x}(0)\Delta t\| &\leq \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|\dot{x}(\Theta \Delta t) - \dot{x}(0)\| |\Delta t| = \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|F(x(\Theta \Delta t)) - F(x(0))\| |\Delta t| \leq \\ &\leq L \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|x(\Theta \Delta t) - x(0)\| |\Delta t| \leq L \max_{0 \leq \Theta \leq 1} \|\dot{x}(\tilde{\Theta} \Delta t)\| \Delta^2 t \leq LK\Delta^2 t. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha \neq 1$. Траектория экстремали определяется X -компонентой решения (X, Ψ) задачи Коши (компоненту x_0 не записываем)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x) + g(\|\psi\|)\psi, \quad \dot{\psi} = -\psi v'(x), \\ x(0) &= (0, 0), \quad \psi(0) = b(\cos s, \sin s), \end{aligned} \quad (5)$$

где s — действительное число.

При $\alpha \neq 1$ b — точка гладкости функции g , поэтому можно указать число $\delta > 0$ такое, что решение $(X(t, s), \Psi(t, s))$ является гладким при всех $t \in [-\delta, 0]$. Пусть $(X(t, s), \Psi(t, s))$ — решение задачи (5). При $t \in [-\delta, 0]$ рассмотрим отображения

$$\rho: \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \cos s \\ t \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad X: \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t, s) \\ x_2(t, s) \end{pmatrix},$$

где x_i — компоненты вектора X .

Поскольку $X(0, s) = (0, 0)^T$ при всех s , то отображение $\Phi(y_1, y_2) = X(t, s)$ корректно определено. Для того чтобы записать формулу, задающую отображение Φ , воспользуемся обозначением $(X, \Psi)(t, z)$ — решение задачи (5) с финальным условием $z \in \mathbb{R}^4$: $(X, \Psi)(0) = z$. Из определения имеем $t = -\|y\|$, $\cos s = -y_1/\|y\|$, $\sin s = -y_2/\|y\|$ при $t < 0$.

Тогда

$$\Phi(y_1, y_2) = \begin{cases} X\left(-\|y\|, \left(0, 0, \frac{-by_1}{\|y\|}, \frac{-by_2}{\|y\|}\right)\right) & \text{при } y \neq (0, 0)^T, \\ (0, 0)^T & \text{при } y = (0, 0)^T. \end{cases}$$

Отображение ρ при $t < 0$ является локальным диффеоморфизмом. Возьмём окрестность точки (t, s) , которая отображением ρ взаимно-однозначно переводится в окрестность точки (y_1, y_2) . В полученной окрестности отображение Φ можно записать в виде $\Phi = X(\rho^{-1})$. Проверим, что отображение Φ непрерывно дифференцируемо при $\|y\| < \delta$, причём $\Phi'(0, 0)$ — невырожденная матрица. Отсюда, в силу теоремы об обратной функции, следует утверждение теоремы при $\alpha \neq 1$. Рассмотрим $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Phi'(\lambda y)$, $\|y\| = \delta$. Убедимся в том, что указанный предел есть невырожденная матрица и стремление к ней равномерно по y ($\|y\| = \delta$):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Phi' = \lim_{t \rightarrow 0} X'(\rho')^{-1},$$

предел в правой части считается при фиксированном s . Запишем матрицы

$$\rho' = \begin{pmatrix} \cos s & -t \sin s \\ \sin s & t \cos s \end{pmatrix}, \quad (\rho')^{-1} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\frac{1}{t} \sin s & \frac{1}{t} \cos s \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы записать матрицу X' , проведём предварительно рассуждения в общем виде. Пусть $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ и $Y(t, s)$ — решение задачи Коши

$$\dot{Y} = F(Y), \quad Y(0) = \varphi(s),$$

$P: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проекция на первые две координаты.

Опишем как устроена матрица Якоби отображения $PY: (PY)' = PY'$. $(PY)'$ состоит из первых двух строк матрицы Y' , её первый столбец $(Y')^1 = Y_t$ есть $F(Y(t, s))$, если нас интересует этот вектор при малых Δt , то можем записать

$$Y_t(\Delta t, s) = Y_t(0, s) + O(\Delta t) = F(\varphi(s)) + O(\Delta t). \quad (6)$$

Второй столбец $(Y')^2 = Y_s$ есть Z -компонента решения системы в вариациях, соответствующих системе

$$\dot{Y} = F(Y), \quad \dot{Z} = F'(Y)Z, \quad Y(0) = \varphi(s), \quad Z(0) = \varphi'(s). \quad (7)$$

При малых Δt можем записать

$$Y(\Delta t, s) = \varphi(s) + F(\varphi(s))\Delta t + o(\Delta t), \quad Z(\Delta t, s) = \varphi'(s) + F'(\varphi(s))\varphi'(s)\Delta t + o(\Delta t). \quad (8)$$

Отметим, что если отображение $(Y, Z) \rightarrow (F(Y), F'(Y)Z)$ ограничено константой K и липшицево с константой L в окрестности образа отображения (φ, φ') и этот образ компактен, то согласно оценкам (3), (4) можно указать число δ такое, что при $|\Delta t| \leq \delta$ для величин $O(\Delta t)$, $o(\Delta t)$ из формул (6), (8) выполняются оценки

$$\|O(\Delta t)\| \leq LK|\Delta t|, \quad \|o(\Delta t)\| \leq LK\Delta^2 t. \quad (9)$$

В нашем случае вектор из $\mathbb{R}^4$ записывается в виде (x, ψ) ,

$$F(x, \psi) = \begin{pmatrix} v(x) + g(\|\psi\|)\psi \\ -\psi v'(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi(s) = (0, 0, b \cos s, b \sin s).$$

Согласно (6) первый столбец матрицы X' определяется по формуле

$$(X')^1(\Delta t, s) = X_t(\Delta t, s) = PF(\varphi(s)) + O(\Delta t) = bg(b) \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} + O(\Delta t).$$

Второй столбец $(X')^2$ матрицы X' состоит из первых двух компонент вектора Z из формул (8). Чтобы его записать, потребуются первые две строки матрицы F' :

$$F' = \begin{pmatrix} v'(x) & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_1^2}{\|\psi\|} + g(\|\psi\|) & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_1\psi_2}{\|\psi\|} \\ & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_1\psi_2}{\|\psi\|} & g'(\|\psi\|)\frac{\psi_2^2}{\|\psi\|} + g(\|\psi\|) \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} (X')^2(\Delta t, s) &= PZ(\Delta t, s) = \begin{pmatrix} v'(0) & bg'(b) \cos^2 s + g(b) & bg'(b) \cos s \sin s \\ & bg'(b) \cos s \sin s & bg'(b) \sin^2 s + g(b) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \sin s \\ b \cos s \end{pmatrix} \Delta t + o(\Delta t) = bg(b) \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (10)$$

Производная отображения Φ в точке $y = (\Delta t \cos s, \Delta t \sin s)$ равна $\Phi'(y) = X'(g')^{-1} = bg(b)(E + O(\Delta t))$, где E – единичная матрица. Следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \Phi'(\lambda y) = bg(b)E$.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. Тогда в формулах (5) $b = 2$,

$$g(x) = \begin{cases} 1/2, & x \leq 2, \\ 1/x, & x > 2. \end{cases}$$

Выберем последовательность гладких функций g_n , равномерно сходящуюся к g , такую, что $0 < g_n \leq 1/2$, $|g'_n| \leq 1/4$. Далее убедимся, что можно выбрать числа δ и C таким образом, что оценки (9) запишутся в виде

$$\|O(\Delta t)\| \leq C|\Delta t|, \quad \|o(\Delta t)\| \leq C\Delta^2 t \quad (11)$$

при $|\Delta t| \leq \delta$ для всех g_n . Чтобы исключить путаницу, функции Φ припишем индекс Φ_{g_n} , Φ_g . Функции Φ_{g_n} равномерно сходятся к Φ_g для $|t| \leq \delta$. В силу следствия из теоремы о среднем и вида Φ'_{g_n} выполняется неравенство

$$\|\Phi_{g_n}(b) - \Phi_{g_n}(a) - \Phi'_{g_n}(0)(b-a)\| \leq \sup_{c \in [a,b]} \|\Phi'_{g_n}(c) - \Phi'_{g_n}(0)\| \|b-a\|,$$

следовательно, можно указать $d > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что $\|\Phi_{g_n}(b) - \Phi_{g_n}(a)\| \geq d\|b-a\|$ для всех a и b с нормой меньше δ_1 . Тогда в силу равномерной сходимости в последнем неравенстве вместо g_n можно записать g . Следовательно, Φ_g инъективно в круге $\|y\| < \delta_1$. Кроме того, в силу обратимости отображений Φ_{g_n} образ шара $\|y\| < \delta_1$ содержит шар $\|y\| < d\delta_1$: $\Phi_{g_n}(B_0^{\delta_1}) \supset B_0^{d\delta_1}$. Но тогда и $\Phi_g(B_0^{\delta_1}) \supset B_0^{d\delta_1}$. Действительно, пусть $y \in B_0^{d\delta_1}$, $z_n = \Phi_{g_n}^{-1}y$, в силу компактности можем считать, что $z_n \rightarrow z$. Тогда $\Phi_g(z) = y$.

Обоснуем теперь оценки (11). Заметим, что в первом неравенстве (9) константы L и K определяются отображением F , т.е. величинами v , v' , g (но не g'). Это объясняет первое из неравенств (11). Чтобы обосновать второе неравенство (11), матрицу F' представим в виде суммы $F' = \tilde{F}' + G$, где

$$\tilde{F}' = \begin{pmatrix} v'(x) & g(\|\psi\|)E \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g'(\|\psi\|)}{\|\psi\|} \begin{pmatrix} \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 \\ \psi_1\psi_2 & \psi_2^2 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в системе (7) вместо F' записать $\tilde{F}'$, то в формулах (9) константы L , K будут определяться величинами v , v' , константой Липшица для v' , g (но не g'), т.е. можно L и K взять общими для всех n . Далее, если Y , Z – решение (7), то поскольку $G(\varphi(s))\varphi'(s) = 0$, можно указать константы A и a такие, что при $|t| \leq A$ выполняется неравенство $\|G(Y(t))Z(t)\| \leq a|t|$. Окончательно оценки (11) получаются после применения к сумме $\tilde{F}' + G$ следующего утверждения.

Лемма. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, x и y – соответственно решения задач Коши

$$\dot{z} = f(z), \quad z(0) = x^0$$

и

$$\dot{z} = f(z) + r(z), \quad z(0) = x^0$$

на промежутке $[-A, A]$. Функция f липшицева в достаточно большой окрестности образа x : $\|f(z_1) - f(z_2)\| \leq L\|z_1 - z_2\|$, для $r(y)$ выполняется неравенство $\|r(y(t))\| \leq a|t|$. Тогда на промежутке $[-A, A]$ выполняется неравенство $\|x(t) - y(t)\| \leq ct^2$, где $c = c(a, A, L)$.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 4 из книги [6, гл. 1]. Пусть $z = x - y$, тогда $\dot{z} = f(x) - f(y) - r(y)$. Умножив на z , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|^2 = (f(x) - f(y))z - r(y)z.$$

В силу предположений о свойствах f и r имеем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z(t)\|^2 \leq L\|z(t)\|^2 + a|t|\|z(t)\|,$$

после сокращения которого на $\|z(t)\|$ получим $d\|z(t)\|/dt \leq L\|z(t)\| + a|t|$. Умножив последнее неравенство на e^{-Lt} и проинтегрировав в промежутке $[0, t]$, будем иметь соотношения

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-L\tau}\|z(\tau)\|)d\tau \leq a \int_0^t \tau e^{-L\tau} d\tau, e^{-L\tau}\|z(t)\| \leq -\frac{a}{L}te^{-L\tau} - \frac{a}{L^2}e^{-L\tau} + \frac{a}{L^2}$$

или

$$\|z(t)\| \leq -\frac{a}{L}t - \frac{a}{L^2} + \frac{a}{L^2}\left(1 + Lt + \frac{e^\theta}{2}L^2t^2\right).$$

Таким образом, $\|z(t)\| \leq ct^2$, где $c \leq ae^{L^A}/2$. Аналогично оцениваем $\|z(t)\|$ для отрицательных t , проводя интегрирование по промежутку $[t, 0]$. Лемма доказана.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что условия гладкости функции v не могут быть ослаблены. Так, например, для поля $v(x_1, x_2) = (x_2^{3/2}, 0)$ из каждой точки вида $(p, 0)$ ($p < 0$) в начало координат ведет несколько траекторий (см. [7]).

3. Множество разреза. Если через заданную точку фазовой плоскости проходят две траектории с одинаковыми значениями функционала, то указанная точка отсекает от траектории неоптимальную часть. Дадим точную формулировку. Пусть процессы (x, u) , $(\tilde{x}, \tilde{u})$ являются экстремалими, определены на промежутках $[t_0, t_1]$, $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$ соответственно, причём $t_0 < \tilde{t}_0 < t_1$, $x(\tilde{t}_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0)$, $u(\tilde{t}_0) \neq \tilde{u}(\tilde{t}_0)$ и $\int_{t_0}^{t_1} (1 + \alpha\|u^2(t)\|) dt = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} (1 + \alpha\|\tilde{u}^2(t)\|) dt$. Тогда процесс (x, u) на промежутке $[t_0, t_1]$ не оптимален. Действительно, определим процесс $(\hat{x}, \hat{u})$ на промежутке $[t_0, \tilde{t}_1]$, положив

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x, \quad \hat{u} = u \quad \text{для} \quad t < \tilde{t}_0, \\ \hat{x} &= \tilde{x}, \quad \hat{u} = \tilde{u} \quad \text{для} \quad \tilde{t}_0 \leq t \leq \tilde{t}_1. \end{aligned}$$

Значение функционала J для обоих процессов одинаково. Но процесс $(\hat{x}, \hat{u})$ имеет разрывное управление, а оптимальный процесс, в силу системы (2), имеет непрерывное управление, поэтому $(\hat{x}, \hat{u})$ не оптимален. Следовательно, не оптимален и (x, u) . Таким образом, точка $x(\tilde{t}_0)$ отделяет от траектории экстремали неоптимальную часть. Такие точки называют *точками разреза*, поиск которых связан с решением следующего уравнения.

Запишем задачу (2), переобозначив $(\psi_1, \psi_2) = (x_3, x_4)$, в виде

$$\dot{X} = f(X), \quad X(0) = \varphi(s), \quad (12)$$

где $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\varphi(s) = (0, 0, 0, b \cos s, b \sin s)$.

Рассмотрим отображения

$$\Psi(t, s) = (x_0(t, s), s), \quad \Phi(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s)),$$

где $X(t, s) = (x_0, \dots, x_4)(t, s)$ – решение задачи (12); $g = \Phi\Psi^{-1}$ (отображение Ψ^{-1} определено, поскольку $\dot{x}_0 > 0$).

Если $g(\hat{x}_0, \tau) = g(\hat{x}_0, s)$, $\tau \neq s + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $g(\hat{x}_0, \tau)$ – точка разреза.

Тройку (x_0, τ, s) назовём *параметрами разреза*. Саму точку $g(x_0, \tau)$ назовём *правильной*, если два параметра из тройки (x_0, τ, s) являются функцией третьего, причём производные по третьему параметру отличны от нуля. Кроме того, матрица Φ' невырождена на полуинтервале вдоль траектории между точкой разреза и финальной точкой.

Предельную траекторию для точек разреза, для которой параметры имеют вид (x_0, τ, τ) , назовём *особой*.

Замечание 2. Отметим, что на траектории экстремали может находиться целый набор точек разреза. Из всей указанной совокупности следует выбрать точку, ближайшую к финальной, а остальные точки интереса не представляют, поскольку находятся на неоптимальной части траектории.

Совокупность точек разреза, обладающих указанным в замечании свойством, образуют множество разреза. Множество разреза рассматриваемых задач изучалось в работах [7–9]. В работе [9] предложена конструкция для численного вычисления множества разреза.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Задача быстрогодействия с полем $v(x_1, x_2) = (x_2^2, 0)$, $\alpha = 0$.

Для $s \in (-\pi/2, \pi/2)$ траектории экстремалей представляют собой “синусоиды”. Из всей траектории оптимальной может быть лишь последняя полуволна, поскольку начало полуволны – точка на левой полуоси Ox_1 , которая является точкой разреза, образуемой пересечением “синусоиды” с “синусоидой”, симметричной ей относительно оси Ox_1 .

Для $s \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ траектории экстремалей представляют собой кривые, не пересекающиеся между собой (кривые 12–16 на рисунке). Особой является точка

$$(-\pi/\sqrt{v''(0)}, 0) = (-\pi/\sqrt{2}, 0).$$

Параметры точек разреза могут быть записаны в виде $(\alpha(\tau), \tau, -\tau)$, где $\tau \in (0, \pi/2)$, $|\alpha(\tau)|$ – время перемещения по соответствующей полуволне. Производная $\alpha'(\tau) < 0$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(\tau) = -\pi/\sqrt{2}$, $\lim_{\tau \rightarrow \pi/2} \alpha(\tau) = -\infty$.

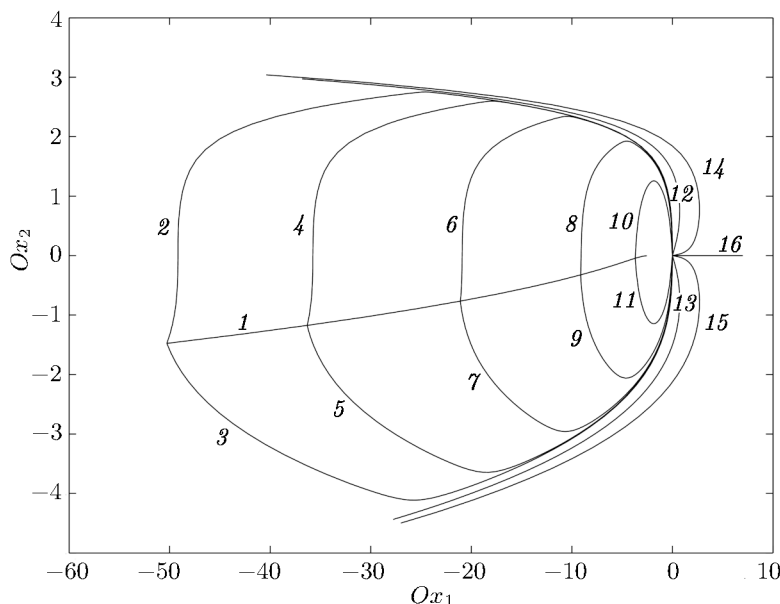


Рисунок. Траектории экстремалей для разных s .

Пусть Ω – часть полосы в пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \{(t, s) : t \leq 0, \text{ если } s \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]; \alpha(s) \leq t \leq 0, \text{ если } s \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

Отображение g переводит область Ω в $\mathbb{R}^2$, причём

$$g(0, s) = (0, 0), \quad g(t, -\pi) = g(t, \pi), \quad g(\alpha(\tau), -\tau) = g(\alpha(\tau), \tau)$$

для $0 < \tau < \pi/2$.

Во внутренней части множества Ω отображение g взаимно-однозначно. Введём в Ω отношение эквивалентности, считая $z_1 \sim z_2$, если $g(z_1) = g(z_2)$. Тогда, поскольку g открыто на Ω и согласовано с эквивалентностью, оно определяет гомеоморфизм $\tilde{g}$ фактор-пространства $\tilde{\Omega}$ в $\mathbb{R}^2$. Кроме того, отображение $(\cdot)_1$ – проекция на первую координату, также согласовано с эквивалентностью. Поэтому отображение $\omega = (\tilde{g}^{-1})_1$ непрерывно. Величина $\omega(x)$ есть время перемещения в начало координат по траектории экстремали.

Пример 2. Рассмотрим задачу быстрогодействия с полем

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_2^2, 0), & \text{если } x_2 < 0, \\ (x_2^2 + 0.1x_2^6, 0), & \text{если } x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \alpha = 0.$$

Вычисления производились для $t \in [-7, 0]$ (таблица).

Для значений $s \in [\pi/2, 3\pi/2]$ траектории экстремалей (кривые 12–16 на рисунке) не пересекают других траекторий. Для значений $s \in [-\pi/2, \pi/2]$ траектории экстремалей представляют собой деформированные “синусоиды”. Часть из точек пересечения “синусоид” между собой и составляют множество разреза, которое на рисунке представлено кривой 1. Время перемещения от точки разреза до начала координат по траекториям 2–3, ..., 10–11 одинаково. Множество разреза состоит из правильных точек. Особой является точка $(-\pi/\sqrt{2}, 0)$, параметры разреза могут быть записаны в виде $(\alpha(\tau), \beta(\tau), \tau)$. Согласно проведённым вычислениям определим область Ω как часть полосы в $\mathbb{R}^2$, положив

$$\Omega = \begin{cases} (t, s): -7 \leq t \leq 0, & \text{если } s \in [-\pi, -1.55] \cup [1.51, \pi], \\ (t, s): \alpha(s) \leq t \leq 0, & \text{если } s \in [0, -1.51], \\ (t, s): \alpha(\tau) \leq t \leq 0, & \text{если } s = \beta(\tau), \quad \tau \in [0, -1.51]. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, введём в Ω отношение эквивалентности, полагая, что $z_1 \sim z_2$, если $g(z_1) = g(z_2)$. Получаем гомеоморфизм $\tilde{g}$ фактор-пространства $\tilde{\Omega}$ на область G в $\mathbb{R}^2$. Отображение $(\cdot)_1$ – проекция на первую координату, также согласовано с эквивалентностью. Поэтому на G определена и непрерывна величина $\omega = (\tilde{g}^{-1}(x))_1$.

4. Оптимальность траекторий. Установим, что при выполнении некоторых условий траектории экстремалей, не содержащие точек разреза, оптимальны.

Пусть $t_0 < 0$ – некоторое число, $X(t, s)$ – решение системы (12). Для каждого $s \in [-\pi, \pi]$ определим $t(s)$ ($\geq t_0$) так, что $(x_1(t(s), s), x_2(t(s), s))$ – точка разреза либо особая точка, а если таковых нет, то полагаем $t(s) = t_0$.

Положим

$$\Omega = \{(t, s): t(s) \leq t \leq 0, \quad -\pi \leq s \leq \pi\}.$$

На множестве Ω рассмотрим отображения $(x_0(t, s), s) \xleftarrow{\Psi} (t, s) \xrightarrow{\Phi} (x_1(t, s), x_2(t, s))$. Будем предполагать выполненными следующие условия:

- на множестве $\tilde{\Omega} = \{(t, s): t(s) < t < 0, \quad -\pi \leq s \leq \pi\}$ матрица Φ' не вырождена;
- множество разреза состоит из правильных точек;
- функция $\omega = (\Psi\Phi^{-1})_1$, где $(\cdot)_1$ обозначает первую компоненту, $\omega(x_1, x_2) = x_0$, определённая на $\Phi(\tilde{\Omega})$, доопределяется на $\Phi(\Omega)$ по непрерывности;
- множество с $\|\psi\| = \|(x_3, x_4)\| = 2\alpha$ – кусочно-гладкая кривая.

Полагаем, что выполняется следующая априорная оценка: пусть $x_0 \notin \Phi(\Omega)$ и управление u переводит x_0 в 0, x – соответствующая траектория, тогда $J(x, u) \geq c$.

Теорема 2. Пусть $s \in [-\pi, \pi]$ и $-\omega(x_1(t(s), s), x_2(t(s), s)) < c$. Тогда оптимальна траектория $(x_1(t, s), x_2(t, s))$, где $t(s) \leq t \leq 0$.

Доказательство. Установим, что в области $\Phi(\Omega)$ выполняется (исключая множество разреза и множество, где $\|\psi\| = 2\alpha$) неравенство Беллмана $\omega' \cdot (f_1, f_2) \leq f_0$, а вдоль траектории $(x_1(t, s), x_2(t, s))$, где $t(s) < t < 0$, выполняется уравнение Беллмана $\omega' \cdot (f_1, f_2) = f_0$. Как показано в [10, с. 241], этого достаточно для оптимальности траектории.

Для доказательства нам потребуются уравнения в вариациях, соответствующие уравнениям (2). Запишем их.

Таблица. Значения параметров задачи быстрогодействия

№	Время t	Значение φ
1	Множество разреза	
2	$[-7, 0]$	-1.55
3	$[-7, 0]$	1.51
4	$[-6.4, 0]$	-1.54
5	$[-6.4, 0]$	1.49
6	$[-5.5, 0]$	-1.52
7	$[-5.5, 0]$	1.45
8	$[-4.3, 0]$	-1.44
9	$[-4.3, 0]$	1.34
10	$[-3.1, 0]$	-1.05
11	$[-3.1, 0]$	0.98
12	$[-3.5, 0]$	–
13	$[-5, 0]$	–
14	$[-5.5, 0]$	–
15	$[-7, 0]$	–
16	$[-7, 0]$	–

При $x_3^2 + x_4^2 \geq 4\alpha^2$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= 1 + \alpha, \quad \dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \quad \dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2) + \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \\ \dot{x}_3 &= -x_3\partial_1 v_1 - x_4\partial_1 v_2, \quad \dot{x}_4 = -x_3\partial_2 v_1 - x_4\partial_2 v_2, \\ \dot{y}_0 &= 0, \quad \dot{y}_1 = \partial_1 v_1 y_1 + \partial_2 v_1 y_2 + \frac{x_4^2 y_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} - \frac{x_3 x_4 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \\ \dot{y}_2 &= \partial_1 v_2 y_1 + \partial_2 v_2 y_2 - \frac{x_3 x_4 y_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} + \frac{x_3^2 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}, \quad \dot{y}_3 = \dots, \quad \dot{y}_4 = \dots\end{aligned}$$

При $x_3^2 + x_4^2 < 4\alpha^2$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= 1 + \frac{x_3^2 + x_4^2}{4\alpha}, \quad \dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2) + \frac{x_3}{2\alpha}, \quad \dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2) + \frac{x_4}{2\alpha}, \\ \dot{x}_3 &= -x_3\partial_1 v_1 - x_4\partial_1 v_2, \quad \dot{x}_4 = -x_3\partial_2 v_1 - x_4\partial_2 v_2, \\ \dot{y}_0 &= \frac{1}{2\alpha}(x_3 y_3 + x_4 y_4), \quad \dot{y}_1 = \partial_1 v_1 y_1 + \partial_2 v_1 y_2 + \frac{1}{2\alpha} y_3, \\ \dot{y}_2 &= \partial_1 v_2 y_1 + \partial_2 v_2 y_2 + \frac{1}{2\alpha} y_4, \quad \dot{y}_3 = \dots, \quad \dot{y}_4 = \dots\end{aligned}$$

Запишем выражение для ω' . Значения функций берутся в точках фазового пространства, соответствующих значениям t, s :

$$\omega' = (\Psi')_1 \cdot (\Phi')^{-1} = (f_0, y_0)(\Phi')^{-1},$$

здесь $(\cdot)_1$ – первая строка матрицы

$$(\Phi')^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_t x_1 & \partial_s x_1 \\ \partial_t x_2 & \partial_s x_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & y_1 \\ f_2 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} y_2 & -y_1 \\ -f_2 & f_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = f_1 y_2 - f_2 y_1$,

$$\omega' = \frac{1}{\Delta}(f_0 y_2 - y_0 f_2, -f_0 y_1 + y_0 f_1) = \frac{1}{\Delta} \left(\det \begin{pmatrix} f_0 & f_2 \\ y_0 & y_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_1 & f_0 \\ y_1 & y_0 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, согласно формулам Крамера ω' является решением системы уравнений

$$z_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} f_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

в частности, $\omega' \cdot f = f_0$ вдоль экстремалей. Далее увидим, что $\omega' = \psi$, где $\psi = \psi(t, s)$ – компоненты экстремали. Согласно принципу максимума Понтрягина функция $H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 - f_0$ вдоль экстремалей равна нулю. Таким образом, функция ψ является решением первого уравнения последней системы. Для проверки верности второго уравнения заметим, что при $t = 0$

$$\psi_1 y_1 + \psi_2 y_2 - y_0 = 0.$$

Вычислим $d(\psi y - y_0)/dt$. Если $\|\psi\| \geq 2\alpha$ ($(\psi_1, \psi_2) := (x_3, x_4)$), то

$$\psi y + \psi \dot{y} - \dot{y}_0 = -\psi v' y + \left[\psi v' y + x_3 \left(\frac{x_4^2 y_3 - x_3 x_4 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \right) + x_4 \left(\frac{-x_3 x_4 y_3 + x_3^2 y_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \right) \right] = 0.$$

Если $\|\psi\| \leq 2\alpha$, то

$$\dot{\psi}y + \psi\dot{y} - \dot{y}_0 = -\psi v'y + \left[\psi v'y + \frac{1}{2\alpha}x_3y_3 + \frac{1}{2\alpha}x_4y_4 \right] - \frac{1}{2\alpha}(x_3y_3 + x_4y_4) = 0.$$

Таким образом, вдоль экстремали $\psi y - y_0$ – константа, и она равна нулю.

В силу принципа максимума функция H вдоль траектории принимает максимальное значение по u , поэтому $\omega'(x)f(x, u) \leq f_0(x, u)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М., 2006.
2. Bin Li, Chao Xu, Kok Lay Teo, Jian Chu. Time optimal Zermelo's navigation problem with moving and fixed obstacles // Appl. Math. and Comput. 2013. V. 224. P. 866–875.
3. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Pereira F.L. An indirect numerical method for a time-optimal state-constrained control problem in a steady two-dimensional fluid flow // Proc. of the 2018 IEEE Oceanics Engineering Society Autonomous Underwater Vehicle Sympos. 2019. P. 1–6.
4. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Lobo Pereira F. Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields // Eur. J. of Control. 2020. V. 56. P. 98–106.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., 1979.
6. Зубов В.И. Теория колебаний. М., 1979.
7. Николенко П.В. О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 5. С. 738–745.
8. Николенко П.В. Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 372–381.
9. Николенко П.В. О множестве разреза в некоторых экстремальных задачах, связанных с перемещением в поле скоростей // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2017. № 4. С. 37–44.
10. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.

Ростовский государственный
экономический университет

Поступила в редакцию 26.09.2019 г.
После доработки 17.11.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

DOI: 10.31857/S0374064123030147, EDN: QVWIJB

Основные результаты работы “Доказательство гипотезы якобиана в двумерном случае и глобальные изохронные центры полиномиальных гамильтоновых дифференциальных систем” (Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 846–849), а именно теорема 1 и вытекающие из неё следствия, в действительности строго не доказаны: формулы (8) на странице 848 справедливы только при условии $\alpha(y) \equiv 0$, но даже при указанном условии формулы (9) требуют обоснования. В силу этого работа в настоящем виде должна быть признана некорректной.

Автор работы признателен профессору Л.Г. Макара-Лиманову, обратившему внимание на необоснованность формулы (8), а также профессору В.В. Бахтину, обнаружившему в статье некоторые другие неточности.

В.В. Амелькин