

Том 59, Номер 5

ISSN 0374-0641

Май 2023



# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 59, номер 5, 2023

---

---

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

|                                                                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Асимптотические свойства одного класса систем с линейным запаздыванием<br><i>Б. Г. Гребенщиков, А. Б. Ложников</i>                                       | 569 |
| Спектральные свойства одного сингулярного дифференциального оператора на отрезке с условиями сопряжения<br><i>И. С. Ломов</i>                            | 582 |
| Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка<br><i>А. Х. Сташ</i> | 588 |

---

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

|                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| О явлении Пински для В-эллиптических операторов<br><i>Ш. А. Алимов, Ш. Т. Пирматов</i>                                                                                              | 596 |
| Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами<br><i>Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров</i> | 608 |
| Метод распространяющихся волн<br><i>А. В. Боровских</i>                                                                                                                             | 619 |
| О фундаментальной матрице решений плоской анизотропной теории упругости<br><i>Чан Куанг Вьонг, А. П. Солдатов</i>                                                                   | 635 |
| К задаче Дарбу для гиперболических систем<br><i>А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова</i>                                                                                                   | 642 |
| О влиянии нерегулярности границы области на решение краевой задачи для уравнения Лапласа<br><i>Л. Е. Россовский, Р. В. Шамин</i>                                                    | 652 |
| О существовании решений нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия оболочек типа Тимошенко в изометрических координатах<br><i>С. Н. Тимергалиев</i> | 658 |

---

## УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| К вопросу существования решений вырожденных систем с дискретным временем<br><i>А. А. Щеглова</i> | 675 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

---

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

|                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Сингулярно возмущённые интегро-дифференциальные системы с ядрами, зависящими от решений дифференциальных уравнений<br><i>А. А. Бободжанов, Б. Т. Калимбетов, В. Ф. Сафонов</i> | 693 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

---

---



## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929+517.926

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. Б. Г. Гребенщиков, А. Б. Ложников

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений, содержащих линейное запаздывание. На основании этих условий исследованы некоторые системы линейных дифференциальных уравнений, при этом для одной из них проведена стабилизация на бесконечном промежутке времени.

DOI: 10.31857/S0374064123050011, EDN: CWEAQT

**Введение.** Будем изучать асимптотические свойства некоторых линейных систем дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, к которым приводятся заменой аргумента системы с линейным запаздыванием вида

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)x(\mu t), \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (1)$$

Здесь  $A(t)$ ,  $B(t)$  – непрерывно дифференцируемые  $m \times m$ -матрицы,  $x(t)$  –  $m$ -мерная вектор-функция времени (аргумента)  $t$ , запаздывание имеет вид  $(1 - \mu)t$ . Решение определено в начальный момент времени  $t_0$  вектор-функцией  $\phi(\eta)$ ,  $\eta \in [\mu t_0, t_0]$ .

Системы с линейным запаздыванием встречаются в задачах механики, физики [1, с. 96] и биологии. Например, при исследовании процесса колебаний токоприёмника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом (при учёте воздействия эластичной опоры) в работе [2] задача сводится к исследованию поведения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с линейным запаздыванием. Более сложная модель, приводящая к исследованию системы четвёртого порядка, предложена в работе [3]. Задача прохождения токоприёмником эластичной опоры имеет практическое применение в случае изучения устойчивости колебаний движущегося токоприёмника и определения износа контактного провода при различных скоростях движения локомотива, а также в условиях изменяющейся величины силы нажатия ползца токоприёмника на контактный провод. Учёт эффекта последствия важен для правильного качественного и количественного описания данных процессов.

Линейные системы дифференциальных уравнений данного типа, исследуемые в этих работах, как правило, имеют постоянные коэффициенты в правой части. При неустойчивости таких систем возникает проблема их стабилизации на бесконечном промежутке времени. Стабилизации подобных систем посвящены работы [4–6]. Следующим этапом является получение достаточных условий асимптотической устойчивости и построение на этом основании алгоритма стабилизации для некоторых систем с переменными коэффициентами.

Будем рассматривать линейное нормированное пространство  $\mathbb{R}^m$ , в котором норму вектора  $w = \{w_j\}^T$  (здесь  $w_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , – компоненты вектора  $w$ , а  $^T$  – знак транспонирования) определим, например, равенством  $\|w\| = \sum_{j=1}^m |w_j|$ . (Норму матрицы  $D = \{d_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ , определим в соответствии с нормой вектора [7, с. 12]:  $\|D\| = \max_j \sum_i |d_{ij}|$ .) Решение системы (1) с начальной функцией  $\phi(\eta)$  обозначим через  $x(t, \phi(\eta), t_0)$ .

Приведём несколько определений, которые будут необходимы в дальнейшем (см. [1, с. 369; 8, с. 114]).

**Определение 1.** Решение  $x(t)$  системы (1), определённое кусочно-непрерывной начальной вектор-функцией  $\phi(\eta)$ , называется *устойчивым*, если для любого  $\hat{C} > 0$  существуют

постоянные  $\tilde{C} = \tilde{C}(\hat{C}) > 0$  и  $t_0^* = t_0^*(\hat{C}) > 0$  такие, что из условия  $\sup_{\eta} \|\phi(\eta)\| < \tilde{C}$  следует неравенство  $\sup_t \|x(t, \phi(\eta), t_0)\| < \hat{C}$  для всех  $t_0 \geq t_0^*$ .

**Определение 2.** Если решение  $x(t, \phi(\eta))$ , наряду с устойчивостью, обладает свойством  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \phi(\eta)) = 0$ , то решение *асимптотически устойчиво*.

**1. Получение достаточных условий асимптотической устойчивости для некоторых систем вида (1).** Рассмотрим линейную систему (1). Сделаем в ней замену  $\tau = \ln(t/t_0)$  и получим систему с постоянным запаздыванием  $\sigma$  [1, с. 100]:

$$dz(\tau)/d\tau = t_0 \exp(\tau)[\bar{A}(\tau)z(\tau) + \bar{B}(\tau)z(\tau - \sigma)], \quad \sigma = -\ln(\mu), \quad \sigma > 0, \quad \tau \geq 0,$$

$$z(\eta) = \phi(t_0 \exp(\eta)), \quad \eta \in [\mu t_0, t_0], \quad \bar{A}(\tau) = A(t_0 \exp(\tau)), \quad \bar{B}(\tau) = B(t_0 \exp(\tau)). \quad (2)$$

Начальная вектор-функция  $\bar{\phi}(\xi)$ ,  $\xi \in [-\sigma, 0]$ , определяет решение системы (2) в момент времени  $\tau = 0$ .

Полагаем, что матрицы  $\bar{A}(\tau)$ ,  $\bar{B}(\tau)$  достаточное число раз дифференцируемые и периодические (периода  $\sigma$ ). При этом для корней  $\lambda_j(\tau)$  характеристического уравнения

$$\det(\bar{A}(\tau) - \lambda E) = 0$$

(здесь и далее  $E$  – единичная  $m \times m$ -матрица) справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}(\lambda) < -2d, \quad d = \text{const}, \quad d > 0, \quad (3)$$

и, наряду с этим, для корней  $\rho_k(\tau)$  характеристического уравнения

$$\det(\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) - \rho E) = 0$$

выполнены неравенства

$$|\rho_k(\tau)| < \gamma, \quad \gamma = \text{const}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (4)$$

Чтобы эффективно использовать аппарат теории разностных систем и методов малого параметра при производной, перейдём от системы (2) к счётной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на конечном промежутке времени  $\tau \in [0, \sigma]$ , полагая [1, с. 102]

$$z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Данная счётная система имеет вид

$$\varepsilon_n dz_{n+1}(\tau)/d\tau = \exp(\tau)[\bar{A}(\tau)z_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau)z_n(\tau)], \quad \varepsilon_n = \mu^n/t_0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (5)$$

при граничных условиях

$$z_{n+1}(0) = z_n(\sigma), \quad z_0 = \bar{\phi}(\tau - \sigma). \quad (6)$$

Введём теперь норму вектор-функции  $w(\tau)$  на отрезке  $[0, \sigma]$ , полагая

$$\|w\|_{\sigma} = \sup_{\tau \in [0, \sigma]} \|w(\tau)\|.$$

Далее зададим оператор сдвига  $T_{\tau, n}$  следующим образом:

$$T_{\tau, n}(\bar{y}) = Y_{n+1}^0(\tau, 0, \varepsilon_n)\bar{y}(\sigma) + \int_0^{\tau} \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n) \bar{B}(s)\bar{y}(s) ds, \quad (7)$$

где  $Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)$  – матрица Коши системы без запаздывающих членов

$$\varepsilon_n dy_{n+1}^0(\tau)/d\tau = \exp(\tau)\bar{A}(\tau)y_{n+1}^0(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \sigma.$$

Если определить норму оператора сдвига в соответствии с правилом [9, с. 504]

$$\|T_{\tau,n}\| = \sup \frac{\|T_{\tau,n}(\bar{y}(s))\|}{\|\bar{y}(s)\|},$$

то при такой нормировке пространство вектор-функций становится пространством Банаха [9, с. 510], обозначим его  $\mathbb{C}_m$ .

Известно [10] (ввиду неравенства (3)), что при достаточно малых  $\varepsilon_n$  имеет место оценка

$$\|Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)\| \leq C_0 \exp\left(-\frac{d}{\varepsilon_n}(\exp(\tau) - \exp(s))\right), \quad C_0 = \text{const}, \quad C_0 > 1. \quad (8)$$

Норма оператора  $T_{\tau,n}$  равномерно ограничена числом

$$M = C_0(1 + b/d), \quad b = \max_{\tau} \|\bar{B}(\tau)\|. \quad (9)$$

В банаховом пространстве определено произведение операторов, следовательно, решение системы (5) можно представить в операторном виде

$$z_{n+1}(\tau) = T_{\tau,n}z_n(s).$$

Поскольку оценка (9) является достаточно грубой и не позволяет судить об асимптотическом поведении решения системы (5), для того чтобы установить асимптотические свойства данной системы (используя малый параметр  $\varepsilon_n$ ), докажем сначала две леммы.

**Лемма 1** (оценки на рост производных решения системы (5)). *Производные  $z_n^{(j)}(\tau)$ ,  $j = \overline{1, 2k}$ , при выполнении неравенства (3) и достаточной “гладкости” матриц  $\bar{A}(\tau)$ ,  $\bar{B}(\tau)$  удовлетворяют следующим (весьма грубым) оценкам роста:*

$$\|z_n^{(j)}(\tau)\| \leq \bar{C}_j(t_0)^j \hat{q}^n \sup_{\tau} \|z_0(\tau)\|, \quad j = \overline{1, 2k}, \quad \bar{C}_j = \text{const}, \quad \bar{C}_j > 1, \quad \hat{q} = \text{const}, \quad \hat{q} > 1. \quad (10)$$

**Доказательство.** Оценку для  $\|z_{n+k}(\tau)\|$  (считая начальной вектор-функцией величину  $\|z_n(\tau)\|$ ) получаем из соотношения (9) (здесь  $q_0 = M$ ). Рассмотрим теперь поведение величины  $\|z'_n(\tau)\|$ . Продифференцировав обе части системы (5), получим равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_n d^2 z_{n+1}(\tau)/d\tau^2 &= \exp(\tau)[\bar{A}(\tau)z'_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau)z'_n(\tau)] + \\ &+ \exp(\tau)[\bar{A}(\tau)z_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau)z_n(\tau)] + \exp(\tau)[\bar{A}'(\tau)z_{n+1}(\tau) + \bar{B}'(\tau)z_n(\tau)] \end{aligned}$$

или, с учётом (5),

$$\begin{aligned} \varepsilon_n d^2 z_{n+1}(\tau)/d\tau^2 &= \exp(\tau)[(\bar{A}(\tau) + O(\varepsilon_n))z'_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau)z'_n(\tau) + \\ &+ (\bar{B}'(\tau) - \bar{A}'(\tau)\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau))z_n(\tau)], \end{aligned} \quad (11)$$

при этом ряд  $\sum_n \|O(\varepsilon_n)\|$  сходится. Запишем решение неоднородной системы (11) в интегральной форме [1, с. 328], считая неоднородностями члены, содержащие величины  $O(\varepsilon_n)z'_{n+1}(\tau)$ ,  $\bar{B}(\tau)z'_n(\tau)$ ,  $(\bar{B}'(\tau) - \bar{A}'(\tau)\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau))z_n(\tau)$ . Учитывая (7), имеем соотношение

$$\begin{aligned} z'_{n+1}(\tau) &= T_{n,\tau}z'_n(\tau) + \int_0^{\tau} \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_0^{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n) O(\varepsilon_n) z'_{n+1}(s) ds + \\ &+ \int_0^{\tau} \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_0^{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n) (\bar{B}'(s) - \bar{A}'(s)\bar{A}^{-1}(s)\bar{B}(s)) z_n(s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим интегралы в правой части (12). Очевидно, что первый интеграл допускает представление  $O(\varepsilon_n)\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma$ . Второй же интеграл в силу оценок (9) и (10) не превосходит величины  $\alpha\|z_n(\tau)\|_\sigma$ , где  $\alpha = C_0 d^{-1}\|\bar{B}'(\tau) - \bar{A}'(\tau)\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\|_\sigma$ . С учётом этих оценок из (12) получаем

$$\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma - O(\varepsilon_n)\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma \leq M\|z'_n(\tau)\|_\sigma + \alpha\|z_n(\tau)\|_\sigma. \quad (13)$$

Очевидно, что в данном выражении величины  $O(\varepsilon_n)\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma$  можно рассматривать как “возмущения” по отношению к соответствующей однородной системе первого приближения. Тогда (ввиду сходимости соответствующего ряда) фундаментальная матрица однородной системы  $Z'_{n+k,n}$  допускает оценку [11, с. 71]

$$\|Z'_{n+k,n}\| = \left\| \prod_{j=n}^{n+k} (M + O(\varepsilon_j)) \right\| \leq \bar{L}_1 M^k, \quad \hat{L}_1 = \text{const}, \quad \hat{L}_1 > 1. \quad (14)$$

Из (13), (14), используя формулу вариации постоянных [11, с. 23] (учитывая оценку роста для  $\|z_n(\tau)\|_\sigma$ ), имеем неравенство

$$\|z'_{n+k}(\tau)\|_\sigma \leq \bar{L}_1 M^k \|z'_n(\tau)\|_\sigma + \alpha \bar{L}_1 M^k \|z_n(\tau)\|_\sigma, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Чтобы оценить рост величин  $\|z'_n(\tau)\|_\sigma$ ,  $\|z_n(\tau)\|_\sigma$  (поскольку система (5) является системой с ограниченной правой частью), применим формулу Гронуола–Беллмана [1, с. 73] и получим оценку

$$\|z(\tau)\| \leq \bar{\beta} \sup_{\xi} \|\bar{\phi}(\xi)\| \exp(\bar{\beta}\tau), \quad \bar{\beta} = t_0 \exp(n\sigma(a+b)), \quad a = \max_{\tau} \|\bar{A}(\tau)\|. \quad (16)$$

Оценка (16) будет эффективной при не очень больших величинах  $t_0$  (т.е. при  $t_0 \leq \bar{T}$ ). Далее, как следует из работы [10], при больших  $t_0 > \bar{T}$  справедливо соотношение (9), следовательно, в этом случае при всех  $0 \leq \tau \leq n\sigma$  имеет место экспоненциальная оценка

$$\|z(\tau)\| \leq M \exp(\bar{\beta}_1 \tau) \sup_s \|\phi(s)\|, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{\ln(M)}{\sigma}. \quad (17)$$

И в том, и в другом случае получаем итоговую оценку (10) на рост решения  $\|z_k(\tau)\|$  при  $1 \leq k \leq n$ . Без ограничения общности считаем величину  $t_0 > 1$ . Далее рассмотрим поведение величины  $\|z'_k(\tau)\|$  при  $1 \leq k \leq n$ . Из уравнения (5) имеем

$$\|z'_k(\tau)\|_\sigma \leq \frac{t_0}{\mu^{k+1}} (a\|z_k(\tau)\|_\sigma + b\|z_{k-1}(\tau)\|_\sigma), \quad a = \max_{\tau} \|\bar{A}(\tau)\|.$$

Используя последнее неравенство, получаем из (17) итоговую оценку для величины  $\|z'_k(\tau)\|_\sigma$  ( $k > 1$ ). Оценки для величин  $\|z_n^{(j)}(\tau)\|_\sigma$  получаются аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 2** (представление решения через его производные). *Величины  $\|z_n^{(j)}(\tau)\|$  для достаточно малых  $\varepsilon_n$  удовлетворяют разностным системам*

$$\begin{aligned} z_{n+1}^{(j)}(\tau) = & (-\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) + O(\varepsilon_n))z_n^{(j)}(\tau) + Y_{n+1}^j(\tau, 0, \varepsilon_n)z_n^{(j)}(\sigma) + \Pi_{j,n}^j(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j)}(0) + \\ & + F_{j,n}^0(\tau)z_n(\tau) + \Pi_{j,n}^0(\tau, \varepsilon_n)z_n(0) + F_{j,n}^1(\tau)z'_n(\tau) + \Pi_{j,n}^1(\tau, \varepsilon_n)z'_n(0) + \dots \\ & \dots + F_{j,n}^{j-1}(\tau)z_n^{(j-1)}(\tau) + \Pi_{j,n}^{j-1}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j-1)}(0) + O(\varepsilon_n)z_n^{(j+1)}(\tau) + O(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+1}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j+1)}(0) + \\ & + \varepsilon_n O(\varepsilon_n)z_n^{(j+2)}(\tau) + \varepsilon_n O(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+2}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j+2)}(0) + \dots \\ & \dots + (\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)z_n^{(j+k-1)}(\tau) + (\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+k-1}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j+k-1)}(0) + \\ & + (t_0)^j O((\mu^k \hat{q})^n)\|z_0(\tau)\|_\sigma, \quad j = \overline{0, k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $F_l^j(\tau, n)$  – равномерно ограниченные  $m \times m$ -матрицы,  $\mu^k \hat{q} \leq p$ ,  $p = \text{const}$ ,  $0 < p < 1$ ,  $l = \overline{0, j-1}$ ; матрицы  $Y_{n+1}^j(\tau, 0, \varepsilon_n)$ ,  $\Pi_{j,n}^r(\tau, \varepsilon_n)$ ,  $r = \overline{0, j+k-1}$ , допускают оценку, аналогичную (8).

Отметим, что натуральное число  $k$  (которое мы выбираем из приведённого условия) означает существование и непрерывность производных до  $2k$ -го порядка включительно.

Докажем вначале асимптотическое представление для функций  $z_n(\tau)$ . Как следует из (7), решение исследуемой системы представимо в интегральной форме

$$z_{n+1}(\tau) = Y_{n+1}^0(\tau, 0, \varepsilon_n)z_n(0) + \int_0^\tau Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)\bar{B}(s)z_n(s)ds. \quad (19)$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части данного равенства, получаем

$$\begin{aligned} I_n = & -\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)z_n(\tau) + \bar{A}^{-1}(0)Y_{n+1}^0(\tau, 0, \varepsilon_n)\bar{B}(0)z_n(0) + \int_0^\tau (\bar{A}^{-1}(s))'Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)\bar{B}(s)z_n(s)ds + \\ & + \int_0^\tau \bar{A}^{-1}(s)Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)\bar{B}'(s)z_n(s)ds + \int_0^\tau \bar{A}^{-1}(s)Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)\bar{B}(s)z_n'(s)ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим последний интеграл  $I_n'$  в правой части равенства (20), содержащий величину  $z_n'(s)$ . Интегрируя его по частям аналогично интегралу  $I_n$ , получаем соотношение

$$\begin{aligned} I_n' = & O(\varepsilon_n)z_n'(\tau) + Y_{n+1}^0(\tau, 0, \varepsilon_n)O(\varepsilon_n)z_n'(0) + \\ & + \int_0^\tau O(\varepsilon_n)Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)z_n'(s)ds + \int_0^\tau O(\varepsilon_n)Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)z_n^{(2)}(s)ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим следующее: интегралы в правой части (21) имеют асимптотическое представление, соответственно,  $\varepsilon_n O(\varepsilon_n)\|z_n'(\tau)\|_\sigma$  и  $\varepsilon_n O(\varepsilon_n)\|z_n^{(2)}(\tau)\|_\sigma$ , при этом для оставшихся интегралов в правой части равенства (19) интегрированием по частям можно получить соотношения, подобные (20). Продолжив подобную процедуру, получим в итоге интеграл вида

$$I_n^k = (\varepsilon_n)^{k-1} \int_0^\tau O(\varepsilon_n)Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)z_n^{(k)}(s)ds.$$

Учитывая теперь оценку (10) для  $\|z_n^{(k)}(\tau)\|$ , ввиду того, что для достаточно большого  $k$  величина  $\mu^k \hat{q} \leq p < 1$ , для  $I_n^k$  имеем асимптотическое представление

$$I_n^k = O(p^n)\|z_n(\tau)\|_\sigma, \quad (22)$$

т.е. данный интеграл – “исчезающая” вектор-функция. При этом отметим, что в процессе исследования асимптотических свойств данного интеграла получаем в правой части (19) выражения вида

$$\begin{aligned} & O(\varepsilon_n)z_n'(\tau), \quad O(\varepsilon_n)\Pi_{1,n}^0(\tau, \varepsilon_n)z_n'(0), \quad \varepsilon_n O(\varepsilon_n)z_n^{(2)}(\tau), \quad \varepsilon_n O(\varepsilon_n)\Pi_{2,n}^0(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(2)}(0), \quad \dots \\ & \dots, \quad (\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)z_n^{(k-1)}(\tau), \quad (\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)\Pi_{k-1,n}^0(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(k-1)}(0). \end{aligned} \quad (23)$$

Асимптотическое представление для величины  $z_n(\tau)$  доказано.



Для того чтобы исследовать асимптотические свойства величины  $z'_n(\tau)$ , рассмотрим неоднородное дифференциально-разностное уравнение (11). Как следует из работ [9, 11], фундаментальная матрица  $Y_{n+1}^1(\tau, s, \varepsilon_n)$  соответствующей однородной системы для достаточно больших  $n$  допускает оценку

$$\|Y_{n+1}^1(\tau, s, \varepsilon_n)\| \leq C_0 \exp\left(\frac{\beta_n}{\varepsilon_n}(\exp(\tau) - \exp(s))\right), \quad \beta_n = -d + C_0 m \varepsilon_n, \quad \beta_n < 0. \quad (24)$$

Соответствующая вырожденной системе матрица  $(\bar{A}(\tau) + O(\varepsilon_n))^{-1} \bar{B}(\tau) = (\bar{A}^{-1}(\tau) + O(\varepsilon_n) + O(\varepsilon_n^2)) \bar{B}(\tau)$ . Следовательно, при достаточно больших  $n$  асимптотические свойства соответствующей вырожденной “возмущенной” системы аналогичны свойствам вырожденной (“невозмущенной”) системы. Ввиду оценки (24) решение соответствующей разностной системы представляет собой выражение, аналогичное доказанному выше для величины  $z_n(\tau)$  (получающаяся в результате исчезающая вектор-функция, аналогичная  $I_n^k$ , будет иметь оценку, подобную (22), содержащую множителем величину  $t_0$  ввиду соотношения (10)); при этом в правой части добавляются члены, найденные в результате интегрирования по частям величины

$$\int_0^\tau \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_1^{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n) (\bar{B}'(s) - \bar{A}'(s) \bar{A}^{-1}(s) \bar{B}(s)) z_n(s) ds.$$

Они имеют вид  $F_{1,n}^1(\tau, n) z_n(\tau)$ ,  $\Pi_{1,n}^1(\tau, \varepsilon_n) z_n(0)$ , остальные члены подобны выражениям вида (23). В итоге для величины  $z'_n(\tau)$  также можем записать разностное уравнение вида (18). Далее подобными методами получим соответствующее разностное уравнение для величины  $z_n^{(2)}(\tau)$  и т.д. Лемма доказана.

Теперь, применяя леммы 1 и 2, докажем теорему о достаточных условиях асимптотической устойчивости решения исходной системы (2).

**Теорема 1.** При выполнении условий (3), (4) система (2) экспоненциально устойчива, при этом для решения исходной системы (1) справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq M_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\beta} \sup \|\phi(\eta)\|, \quad M_0 = \text{const}, \quad M_0 > 1, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0.$$

Здесь константы  $M_0$ ,  $\beta$  одни и те же при всех  $t_0 \geq t_0^* > 0$ , величина  $t_0^*$  фиксированная.

**Доказательство.** Учитывая лемму 2, рассмотрим вначале асимптотическое поведение вырожденной системы

$$\bar{y}_{n+1}(\tau) = -\bar{A}^{-1}(\tau) \bar{B}(\tau) \bar{y}_n(\tau). \quad (25)$$

Покажем, что существуют такие постоянные  $\bar{L}_0 > 1$ ,  $0 < \bar{q} < 1$ , что для решения разностной системы (25) будет справедлива оценка [7, с. 40]

$$\sup_\tau \|\bar{y}_n(\tau)\| \leq \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_\tau \|y_0(\tau)\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду равномерной непрерывности (по  $\tau$ ) матриц  $\bar{A}^{-1}(\tau) \bar{B}(\tau)$  можно разбить интервал  $[0, \sigma]$  на конечное число  $l$  равных промежутков длины меньше  $\delta_1$  таких, что будет выполняться неравенство

$$\|\bar{A}^{-1}(\tau) \bar{B}(\tau) - \bar{A}^{-1}(\tau_j) \bar{B}(\tau_j)\| < \varepsilon, \quad |\tau - \tau_j| < \delta_1, \quad j = \overline{1, l}, \quad 0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \sigma. \quad (26)$$

Но тогда (вследствие (26)) при достаточно малом  $\varepsilon$  для каждого промежутка  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$  найдутся такие постоянные  $L_j > 1$ , что будет справедлива оценка соответствующей результирующей системы, получаемая из (25):

$$\|\bar{Y}_{n,1}^0(\tau)\| = \left\| \prod_{i=1}^n \bar{A}^{-1}(\tau + j\sigma) \bar{B}(\tau + j\sigma) \right\| < L_j \bar{\gamma}^n, \quad \bar{\gamma} = \text{const}, \quad 0 < \gamma < \bar{\gamma} < 1, \quad j = \overline{1, l}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что для любых  $\tau \in [0, \sigma]$  подобное неравенство справедливо при константах  $\bar{L}_0 = \max_j L_j$  и  $\bar{q} = \bar{\gamma}$ , т.е. вырожденная система (25) экспоненциально устойчива.

Пусть в (18)  $j = k-1$  и  $n$  достаточно велико. Рассмотрим вначале поведение системы (18) в точке  $\tau = \sigma$ . Очевидно, что при данном  $\tau$ , ввиду оценок (8), (14) и аналогичных им, члены в (22), содержащие  $(t_0)^i \Pi_{k,n}^{k+i-1}(\sigma, \varepsilon_n)$ , будут иметь вид  $(t_0)^j o(\varepsilon_n)$ . Тогда, записав  $z_{n+i}^{(k-1)}(\sigma)$  в равенстве (18) с помощью формулы вариации постоянных, получим выражение

$$\begin{aligned} z_{n+i}^{(k-1)}(\sigma) &= \bar{Y}_{n+i,n}^{k-1}(\sigma) y_n^{(k-1)}(\sigma) + \sum_{j=1}^i \bar{Y}_{n+i,n+j}^{k-1}(\sigma) [F_{k-2,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-2)}(\sigma) + \\ &+ F_{k-3,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-3)}(\sigma) + \dots + F_{0,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + \\ &+ O(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} z_{n+j-1}^{(k+1)}(\sigma) + \dots + O(\varepsilon_{n+j}) (\varepsilon_{n+j})^{k-2} z_{n+j-1}^{(2k-2)}(\sigma)] + (t_0)^{k-1} O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma, \end{aligned} \quad (28)$$

при этом ряд  $\sum_{j=0}^\infty \|O(\varepsilon_j)\|$  сходится. Ввиду сходимости ряда для величины  $\|\bar{Y}_{n+i,n}^{k-1}(\tau)\|$  справедлива оценка, аналогичная (14).

Если теперь записать подобное равенство уже для величины  $z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma)$ , учитывая (27), то получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma) &= \bar{Y}_{n+i,n}^{k-2}(\sigma) z_n^{(k-2)}(\sigma) + \sum_{j=1}^i \bar{Y}_{n+i,n+j}^{k-2}(\sigma) \left\{ F_{k-3,n+j-1}^{k-2}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-3)}(\sigma) + \right. \\ &+ F_{k-4,n+j-1}^{k-2}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-4)}(\sigma) + \dots + F_{0,n+j-1}^{k-2}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) \left[ \bar{Y}_{n+i,n}^{k-1}(\sigma) z_n^{(k-1)}(\sigma) + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^i \bar{Y}_{n+i,n+j}^{k-1}(\sigma) [F_{k-2,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-2)}(\sigma) + F_{k-3,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-3)}(\sigma) + \dots \\ &\dots + F_{0,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} z_{n+j-1}^{(k+1)}(\sigma) + \dots \\ &\dots + O(\varepsilon_{n+j}) (\varepsilon_{n+j})^{k-2} z_{n+j-1}^{(2k-2)}(\sigma) + (t_0)^{k-1} O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma] + \\ &+ O(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) (\varepsilon_{n+j})^2 z_{n+j-1}^{(k+1)}(\sigma) + \dots \\ &\left. \dots + O(\varepsilon_{n+j}) (\varepsilon_{n+j})^{k-2} z_{n+j-1}^{(2k-3)}(\sigma) + (t_0)^{(k-2)} O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

где есть члены, содержащие  $z_{n+j}^{(2k-2)}(\sigma)$ . Нетрудно видеть, что они имеют порядок  $(t_0)^{(k-1)} \times O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma$ . С другой стороны, члены, содержащие  $z_{n+j}^{(k-1)}(\sigma)$ , отсутствуют, так как вместо них входят выражения, содержащие величины  $z_n^{(r)}(\sigma)$ ,  $r = k-1, k-2$ . Далее, в соотношении (28) имеются члены, содержащие множители  $z_{n+j}^{(k-2)}(\sigma)$ . Коэффициенты при них имеют порядок  $O(\varepsilon_{n+j})$ . Члены же, содержащие величины  $z_n^{(r)}(\sigma)$ ,  $r = k-1, k-2, \dots$ , стремятся к нулю как экспоненты. Учитывая теперь асимптотическую устойчивость соответствующей однородной разностной системы и вид её неоднородности, обусловленной “возмущениями” (ввиду наличия величин  $z_{n+j}(\sigma)$ ,  $z'_{n+j}(\sigma)$ ,  $\dots$ ,  $z_{n+j}^{(k-3)}(\sigma)$ ), а также переменные  $z_{n+j}^{(k)}(\sigma)$ ,  $z_{n+j}^{(k+1)}(\sigma)$ ,  $\dots$ ,  $z_{n+j}^{(2k-3)}(\sigma)$ , получаем, что величина  $z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma)$  (общее решение неоднородной системы) состоит из экспоненциально устойчивого решения (имеющего оценку  $O(\bar{\gamma}^{n+i} (\|z^{(k-1)}(\sigma)\| + \|z^{(k-2)}(\sigma)\|))$ ), и решения, обусловленного “возмущениями”, и решения,

обусловленного “исчезающей” вектор-функцией  $(t_0)^{(k-1)}O(p^{n+j})\|z_0(\tau)\|_\sigma$ . Покажем, что решение, обусловленное “исчезающей” вектор-функцией, также экспоненциально устойчиво.

Без ограничения общности полагаем, что  $\bar{q} < p$ , т.е. справедливо равенство  $\bar{q} = \delta p$ ,  $\delta = \text{const}$ ,  $0 < \delta < 1$ . Тогда из соотношения (29), учитывая последнее равенство, получаем оценку

$$\left\| \sum_{j=1}^i \bar{Y}_{n+i, n+j}^{k-2}(\sigma)(t_0)^{(k-1)}O(p^{n+j}) \right\| \|z_0(\tau)\|_\sigma \leq \bar{L}(t_0)^{(k-1)}p^n \sum_{j=1}^i \delta^{i-1}p^{i-j}p^j \|z_0(\tau)\|_\sigma < \\ < \frac{\bar{L}p^{n+j}}{1-\delta} \|z_0(\tau)\|_\sigma, \quad \bar{L} = \text{const}, \quad \bar{L} > 1, \quad (30)$$

откуда и следует экспоненциальная оценка для составляющей, обусловленной “исчезающей” вектор-функцией.

Далее исследуя свойства вектор-функции  $z_{n+i}^{(k-3)}(\sigma)$  методами, аналогичными применённым при исследовании величины  $z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma)$ , получим, что её “возмущения” зависят лишь от величин  $z_{n+j}(\sigma)$ ,  $z'_{n+j}(\sigma)$ ,  $\dots$ ,  $z_{n+j}^{(k-2)}(\sigma)$ ;  $z_{n+j}^{(k)}(\sigma)$ ,  $z_{n+j}^{(k+1)}(\sigma)$ ,  $\dots$ ,  $z_{n+j}^{(2k-4)}(\sigma)$ .

Продолжив процесс изучения поведения величин  $z^{(r)}(\sigma)$ ,  $r = \overline{1, k-4}$ , получим в результате неоднородную разностную систему

$$z_{n+i}(\sigma) = [-\bar{A}^{-1}(\sigma)\bar{B}(\sigma) + O(\varepsilon_n)]z_n(\sigma) + O(p^n)\|z_0(\tau)\|_\sigma, \quad (31)$$

обладающую следующим свойством: соответствующая однородная “возмущённая” система экспоненциально устойчива, при этом неоднородность является “исчезающей” вектор-функцией, для которой справедлива оценка, подобная  $O(p^{n+j})\|y_0(\tau)\|_\sigma$ .

Решение системы (31) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  как экспонента (это доказывается точно так же, как и при получении оценки (30)).

Рассмотрим теперь поведение решения разностной системы (18) на всём интервале  $[0, \sigma]$ :  $j = 0$ . Ввиду условий (6) её решение экспоненциально устойчиво и при  $\tau = 0$ . Следовательно, члены, содержащие  $z_n(0)$ , являются “исчезающей” вектор-функцией. Но тогда исследование асимптотических свойств при любых  $\tau \in (0, \sigma)$  ничем не отличается от приведённого выше, и решение системы (5) экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

**2. Получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости системы, содержащей постоянное запаздывание.** Рассмотрим теперь систему вида

$$dx(\tau)/d\tau = A_1(\tau)x(\tau) + B_1(\tau)x(\tau - \sigma) + A_2(\tau)y(\tau) + B_2(\tau)y(\tau - \sigma),$$

$$dy(\tau)/d\tau = t_0 \exp(\tau)(A_3(\tau)x(\tau) + B_3(\tau)x(\tau - \sigma) + A_4(\tau)y(\tau) + B_4(\tau)y(\tau - \sigma)), \quad \tau \geq 0. \quad (32)$$

Полагаем, что  $m \times m$ -матрицы  $A_j(\tau)$ ,  $B_j(\tau)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , периодические (периода  $\sigma$ ) и достаточное число раз дифференцируемые.

Вновь перейдём к счётной дифференциально-разностной системе на конечном промежутке времени  $[0, \sigma]$ . Имеем соотношения

$$dx_{n+1}(\tau)/d\tau = A_1(\tau)x_{n+1}(\tau) + B_1(\tau)x_n(\tau) + A_2(\tau)y_{n+1}(\tau) + B_2(\tau)y_n(\tau), \\ \varepsilon_n dy_{n+1}(\tau)/d\tau = \exp(\tau)(A_3(\tau)x_{n+1}(\tau) + B_3(\tau)x_n(\tau) + A_4(\tau)y_{n+1}(\tau) + B_4(\tau)y_n(\tau)), \\ \varepsilon_n = \mu^n/t_0, \quad \tau \in [0, \sigma], \quad (33)$$

при краевых условиях

$$x_{n+1}(0) = x_n(\sigma), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\sigma).$$

Начальная вектор-функция есть выражение  $\{x_0(\tau), y_0(\tau)\}^T$ .

В работе [12] показано, что системой первого приближения для (33) является дифференциально-разностная система

$$\begin{aligned} dx_{n+1}^0(\tau)/d\tau &= 0.5[(A_1^0 + B_1^0)x_{n+1}^0(\tau) + A_2^0 y_{n+1}^0(\tau) + B_2^0 y_n^0(\tau)], \\ \varepsilon_n dy_{n+1}^0(\tau)/d\tau &= \exp(\tau)[(A_3(\tau) + B_3(\tau))x_{n+1}^0(\tau) + A_4(\tau)y_{n+1}^0(\tau) + B_4(\tau)y_n^0(\tau)], \\ A_j^0 &= \frac{2}{\sigma} \int_0^{2\sigma} A_j(\xi) d\xi, \quad B_j^0 = \frac{2}{\sigma} \int_0^{2\sigma} B_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \quad \varepsilon_n = \frac{\mu^n}{t_0}, \quad \tau \in [0, \sigma]. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение системы (34) при достаточно больших  $n$ . Сделаем в ней замену  $\tau = \theta_n \varepsilon_n$  [13, с. 204] и получим систему

$$\begin{aligned} dx_{n+1}^0(\theta_n)/d\theta_n &= 0.5\varepsilon_n[(A_1^0 + B_1^0)x_{n+1}^0(\theta_n) + A_2^0 y_{n+1}^0(\theta_n) + B_2^0 y_n^0(\theta_n)], \\ dy_{n+1}^0(\theta_n)/d\theta_n &= \exp(\theta_n \varepsilon_n)[A_3^{\varepsilon_n}(\theta_n) + B_3^{\varepsilon_n}(\theta_n)x_{n+1}^0(\theta_n) + A_4^{\varepsilon_n}(\theta_n)y_{n+1}^0(\theta_n) + B_4^{\varepsilon_n}(\theta_n)y_n^0(\theta_n)], \\ A_j^{\varepsilon_n}(\theta_n) &= A_j(\theta_n \varepsilon_n), \quad B_j^{\varepsilon_n}(\theta_n) = B_j(\theta_n \varepsilon_n), \quad j = 3, 4. \end{aligned} \quad (35)$$

Из того, что в первой подсистеме (35) правая часть имеет множитель  $\varepsilon_n$ , следует (из первой подсистемы в (34)), что величина  $x_{n+1}(\tau)$  удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\begin{aligned} x_{n+1}(\tau) &= -2(A_1^0 + B_1^0)^{-1}(A_2^0 y_{n+1}^0(\tau) + B_2^0 y_n^0(\tau)) + \\ &+ O(\|x_{n+1}(\tau)\|_\sigma + \|y_{n+1}(\tau)\|_\sigma + \|y_n(\tau)\|_\sigma). \end{aligned} \quad (36)$$

Рассматривая теперь систему первого приближения, полагаем, что собственные значения  $\lambda_i^0$  матрицы  $A_1^0 + B_1^0$  удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}(\lambda_i^0) < -2\beta_1, \quad \beta_1 = \text{const}, \quad \beta_1 > 0. \quad (37)$$

Наряду с этим считаем, что для собственных чисел  $\bar{\lambda}(\tau)$  матрицы  $A_4(\tau)$  справедливо неравенство, аналогичное (3), т.е.

$$\operatorname{Re}(\bar{\lambda}(\tau)) < -2\beta_2, \quad \beta_2 = \text{const}, \quad \beta_2 > 0. \quad (38)$$

В силу соотношения (36) имеем приближённое равенство

$$x_{n+1}(\tau) \approx -2(A_1^0 + B_1^0)^{-1}(A_2^0 y_{n+1}^0(\tau) + B_2^0 y_n^0(\tau)).$$

Подставив данное выражение во вторую подсистему в (35), получим систему  $m$ -го порядка

$$\begin{aligned} \varepsilon_n dy_{n+1}^0(\tau)/d\tau &= \exp(\tau)\{[A_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A_1^0 + B_1^0)^{-1}A_2^0]y_{n+1}^0(\tau) + \\ &+ [B_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A_1^0 + B_1^0)^{-1}B_2^0]y_n^0(\tau)\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Полагаем, что собственные числа  $\nu$  матрицы

$$H_1 = A_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A_1^0 + B_1^0)^{-1}A_2^0$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}(\nu) < -2d_1, \quad (40)$$

и, наряду с этим, собственные числа  $\rho_h$  матрицы

$$H_2 = (H_1)^{-1}[B_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A_1^0 + B_1^0)^{-1}B_2^0]$$

удовлетворяют условию

$$|\rho_h| < \gamma_h, \quad \gamma_h = \text{const}, \quad 0 < \gamma_h < 1. \quad (41)$$

**Теорема 2.** Пусть справедливы неравенства (37), (38), (40), (41). Тогда дифференциально-разностная система (33) (а следовательно, и исходная система (32)) экспоненциально устойчива.

**Доказательство.** Очевидно (в силу теоремы 1), что система (39) экспоненциально устойчива, т.е. справедлива оценка

$$\|y^0(\tau)\| \leq \hat{K} \exp(-\bar{\delta}(\tau - T)) \sup_{0 \leq \eta \leq T} \|y(\eta)\|, \quad \hat{K} = \text{const}, \quad \bar{\delta} = \text{const}, \quad \bar{\delta} > 0.$$

Рассмотрим теперь поведение первой подсистемы в (34) на бесконечном промежутке времени при достаточно больших  $\tau$ . Она имеет вид

$$dx^0(\tau)/dt = 0.5[(A_1^0 + B_1^0)x_\tau^0 + A_2^0 y^0(\tau) + B_2^0 y^0(\tau - \sigma)], \quad \tau \geq \bar{\tau},$$

$\bar{\tau}$  – достаточно большое положительное число. Записывая решение данной системы в интегральной форме

$$\begin{aligned} x^0(\tau) = & \exp\left(\frac{(A_1^0 + B_1^0)(\tau - \bar{\tau})}{2}\right) x^0(\bar{\tau}) + \\ & + \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp\left(\frac{(A_1^0 + B_1^0)(\tau - s)}{2}\right) [A_2^0 y^0(s) + B_2^0 y^0(s - \sigma)] ds, \end{aligned} \quad (42)$$

учитывая, что ввиду неравенства (37) справедлива оценка

$$\|\exp(0.5(A_1^0 + B_1^0)(\tau - s))\| \leq \bar{M}_1 \exp(-\beta_1(\tau - s)), \quad \bar{M}_1 = \text{const}, \quad \bar{M}_1 > 1,$$

получаем, что первый член в правой части в (42) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь поведение интегрального члена. Без ограничения общности считаем, что  $\bar{\delta} < \beta_1$ . Тогда имеем оценку

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp(0.5(A_1^0 + B_1^0)(\tau - s)) [A_2^0 y^0(s) + B_2^0 y^0(s - \sigma)] ds \right\| \leq \\ & \leq \frac{\bar{M}_1 \hat{K} (\|A_2^0\| + \exp(\bar{\delta}\sigma) \|B_2^0\|)}{\beta_1 - \bar{\delta}} \exp(-\beta_1(\tau - \bar{\tau})) \sup_{0 \leq \eta \leq T} \|y^0(\eta)\|, \end{aligned}$$

откуда следует экспоненциальная устойчивость величины  $x^0(\tau)$ , а значит, система первого приближения экспоненциально устойчива.

Рассмотрим теперь исходную (“возмущённую”) систему при достаточно большом  $n$ . Если в первой из подсистем ввести “медленную” переменную  $\theta_n$ , то при достаточно малом  $\varepsilon_n$ , как следует из [13, с. 67], матрица Коши  $K_{\varepsilon_n}(\theta_n, s)$  однородной системы имеет вид

$$K_{\varepsilon_n}(\theta_n, s) \approx \exp\{0.5\varepsilon_n(A_1^0 + B_1^0)(\theta_n - s)\}.$$

Данное соотношение тем точнее, чем меньше  $\varepsilon_n$ . Более того, если рассматривать неоднородную усреднённую систему

$$d\bar{x}_n^0(\theta_n)/d\theta_n = \varepsilon_n[0.5\varepsilon_n(A_1^0 + B_1^0)\bar{x}_n^0(\theta_n) + A_2^0 \bar{y}_{n+1}^0(\theta_n) + B_2^0 \bar{y}_n^0(\theta_n)],$$

то она является первым приближением для исходной первой подсистемы.

Если теперь рассмотреть вторую из подсистем в (33), то ввиду соотношения (36) и оценки, аналогичной (26), имеем, что вторая из подсистем в (34) является первым приближением для исходной подсистемы. Как следует из [9, с. 258] (учитывая экспоненциальную устойчивость системы (34)), “возмущённая” система (33) экспоненциально устойчива. Теорема доказана.

**3. Примеры.** Мы исследовали асимптотические свойства некоторых систем, решение которых экспоненциально устойчиво. Приведём конкретные примеры, которые иллюстрируют достаточную точность методов исследования устойчивости, предложенных нами. Вначале рассмотрим пример экспоненциально устойчивой системы второго порядка:

$$\begin{aligned} dx_1(\tau)/d\tau &= \exp(\tau)\{-(1+2\cos(2\pi\tau))x_1(\tau) - 2(1-\sin(2\pi\tau))x_2(\tau) + \\ &+ 0.5(1+2\cos(2\pi\tau))x_1(\tau-1) + 0.5(1-\sin(2\pi\tau))x_2(\tau-1)\}, \\ dx_2(\tau)/d\tau &= \exp(\tau)\{2(1+\sin(2\pi\tau))x_1(\tau) - (1-2\cos(2\pi\tau))x_2(\tau) - \\ &- (1+\sin(2\pi\tau))x_1(\tau-1) + 0.25(1-2\cos(2\pi\tau))x_2(\tau-1)\}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь матрица  $A(\tau)$  периодическая (период равен единице), имеет собственные значения  $\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = -1$ , следовательно, система без запаздывающих членов асимптотически устойчива; матрица  $B(\tau)$  также периодическая (период равен единице), при этом матрица  $-A^{-1}(\tau)B(\tau)$  имеет вид

$$-A(\tau)^{-1}B(\tau) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix},$$

её собственные значения  $\rho_1 = 0.5$ ,  $\rho_2 = 0.25$ . Система (43) экспоненциально устойчива, что иллюстрируется графиком решения на рис. 1 при начальной вектор-функции  $\phi(\xi) = (1, 1)^T$ , заданной на отрезке  $[0, 1]$ .

Рассмотрим теперь управляемую систему

$$dx(\tau)/d\tau = \exp(\tau)[A(\tau)x(\tau) + \bar{B}(\tau)x(\tau-1) + C(\tau)u(\tau)], \quad (44)$$

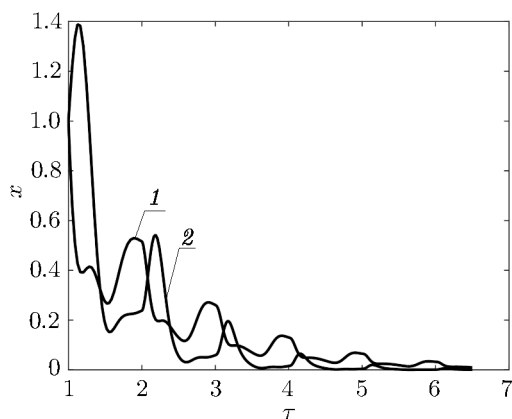
где управляющее воздействие  $u(\tau)$  – скалярная величина, матрица  $\bar{B}(\tau)$  и вектор  $C(\tau)$  определены следующим образом:

$$\bar{B}(\tau) = \begin{pmatrix} -4(1-\sin(2\pi\tau)) & -4(1+2\cos(2\pi\tau)) \\ -2(1-2\cos(2\pi\tau)) & 8(1+\sin(2\pi\tau)) \end{pmatrix}, \quad C(\tau) = \begin{pmatrix} 1+2\cos(2\pi\tau) \\ -2(1+2\sin(2\pi\tau)) \end{pmatrix}.$$

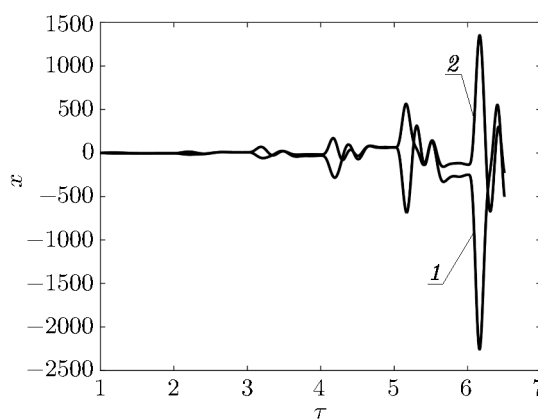
Следовательно,

$$-A(\tau)^{-1}\bar{B}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}. \quad (45)$$

Собственными значениями этой “вырожденной” матрицы являются величины, большие по модулю единицы, следовательно, “вырожденная” система неустойчива, но неустойчива и исходная система (44) (при  $u(\tau) \equiv 0$ ), что видно из графика на рис. 2. (Отметим, что достаточные условия неустойчивости могут быть получены с помощью знакопеременных функционалов Ляпунова–Красовского [4].)



**Рис. 1.** Решение системы (43): 1 –  $x_1(\tau)$ , 2 –  $x_2(\tau)$ .



**Рис. 2.** Решение системы (44) при  $u(\tau) \equiv 0$ : 1 –  $x_1(\tau)$ , 2 –  $x_2(\tau)$ .

Возникает проблема стабилизации. Осуществить её традиционными методами весьма не просто ввиду того, что правая часть системы содержит экспоненциальный множитель. Поэтому поступаем следующим образом: будем стабилизировать вырожденную (разностную) систему второго порядка

$$\bar{z}(\tau) = -A^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\bar{z}(\tau-1) + \bar{C}v(\tau), \quad \bar{C} = (1, 0)^T. \quad (46)$$

Ввиду того, что матрица  $-A^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) = A_1$  имеет обратную, стабилизацию разностной системы (45) можно осуществить следующим образом [14, с. 107]:

$$u(\tau) = (1 + \bar{C}^T R \bar{C})^{-1} \bar{C} A_1 \bar{z}(\tau-1). \quad (47)$$

Здесь  $R$  – положительная  $2 \times 2$ -матрица, при этом матрица  $R^{-1}$  является решением линейного матричного уравнения

$$R^{-1} + \bar{C}\bar{C}^T = (1/0.64)A_1 R^{-1}(A_1)^T, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0064 & 0 \\ 0 & 0.048 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

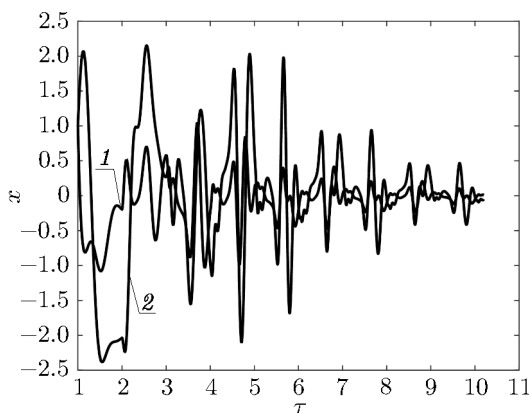
Из (47) и (48) получаем стабилизированную матрицу

$$A_s = A_1 + (1 + \bar{C}^T R \bar{C})^{-1} \bar{C} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{1,2} = \pm 0.707.$$

Если теперь в исходной управляемой системе (44) положить управление  $u(\tau) = \bar{R}x(\tau-1)$ , то полученная (стабилизированная) система будет иметь вид

$$\begin{aligned} dx(\tau)/d\tau &= \exp(\tau)[A(\tau)x(\tau) + (\bar{B}(\tau) + C(\tau)R(\tau))x(\tau-1)], \\ \bar{B}(\tau) + C(\tau)R(\tau) &= \begin{pmatrix} -4 + 4\sin(2\pi\tau) & -0.25 - 0.5\cos(2\pi\tau) \\ -2 + 4\cos(2\pi\tau) & 0.5 + 0.5\sin(2\pi\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (49)$$

откуда, учитывая соотношения (44) и (46), получаем, что решение стабилизированной системы (49) экспоненциально устойчиво, что иллюстрирует график, приведённый на рис. 3.



**Рис. 3.** Решение стабилизированной системы (49): 1 –  $x_1(\tau)$ , 2 –  $x_2(\tau)$ .

Последний пример показывает, что условие экспоненциальной устойчивости “вырожденной” системы существенно.

**Заключение.** Достаточные условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теореме 1, в случае постоянных матриц  $A$  и  $B$  аналогичны условиям, полученным ранее (см. [15]) с помощью преобразования Лапласа [1, с. 11]. В статье [16] показано, что в случае существования у матрицы  $-A^{-1}B$  собственных чисел  $\bar{\rho}$ ,  $|\bar{\rho}| > 1$ , решение соответствующей

системы неустойчиво. Преобразование Лапласа неприменимо для исследования асимптотической устойчивости систем вида (2), следовательно, метод, предложенный авторами, является более общим и позволяет решать задачи стабилизации традиционными методами некоторых нестационарных систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
2. Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R., Tayler A.B. On functional differential equation // Inst. Math. Appl. 1972. V. 8. P. 271–307.
3. Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 322. P. 447–468.
4. Гребенников Б.Г., Ложников А.Б. Устойчивость и стабилизация одного класса линейных нестационарных систем с постоянным запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 3–15.
5. Sesekin A.N., Shlyakov A.S. On the stability of discontinuous solutions of bilinear systems with impulse action, constant and linear delays // Proc. of the 45th Intern. Conf. on Application of Mathematics in Engineering and Economics. 2019. P. 2172(1):030009.
6. Жабко А.П., Тихомиров О.Г., Чиждова О.Н. О стабилизации одного класса систем с пропорциональным запаздыванием // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. А. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 165–172.
7. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
8. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1971.
9. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.
10. Гребенников Б.Г. Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1984. С. 18–29.
11. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971.
12. Гребенников Б.Г. Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 34–42.
13. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, 1971.
14. Фурасов В.Д. Устойчивость и стабилизация дискретных систем. М., 1982.
15. Гребенников Б.Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1983. С. 25–34.
16. Гребенников Б.Г., Новиков С.И. О неустойчивости некоторой системы с линейным запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. № 2. С. 3–13.

Южно-Уральский государственный университет,  
г. Челябинск,  
Институт математики и механики  
имени Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,  
Уральский федеральный университет,  
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.  
После доработки 01.03.2023 г.  
Принята к публикации 16.03.2023 г.



## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.927.25

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ОТРЕЗКЕ  
С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

© 2023 г. И. С. Ломов

Исследована первая краевая задача для дифференциального оператора второго порядка с сингулярным коэффициентом на отрезке с условиями сопряжения в его внутренней точке. Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений как прямого, так и сопряжённого операторов. Установлены полнота и безусловная базисность систем собственных функций этих операторов в пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке. Применён метод Ильина и условия Ильина для установления справедливости неравенства Бесселя.

DOI: 10.31857/S0374064123050023, EDN: CWLBJG

*К 95-летию выдающегося математика  
Владимира Александровича Ильина*

**1. Постановка задачи.** Изучим спектральные свойства следующей модельной задачи:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y[1/2] = 0, \quad y'[1/2] = y'(0) \quad (2)$$

на множестве функций  $y(x)$ , абсолютно непрерывных вместе с первой производной на каждом компакте из интервалов  $(0, 1/2)$  и  $(1/2, 1)$  и принадлежащих классу  $\mathcal{L}^2(G)$  – функций, интегрируемых с квадратом на множестве  $G = (0, 1)$ . Здесь  $y[1/2] = y(1/2 + 0) - y(1/2 - 0)$  – скачок функции  $y(x)$  в точке  $x = 1/2$ ,  $q(x)$  – комплекснозначная функция из весового класса

$$\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G) = \left\{ f(x) : \int_0^1 x^{1-\varepsilon} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

для некоторого числа  $\varepsilon \in (0, 1]$ .

Через  $L$  обозначим оператор, действующий в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ , порождённый дифференциальной операцией  $ly = -y'' + q(x)y$ ,  $x \in G$ , краевыми условиями и условиями сопряжения (2). Исследуем спектральные свойства оператора  $L$ .

В работе [1] доказана весьма общая теорема о безусловной базисности в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  системы корневых функций нагруженного сингулярного дифференциального оператора второго порядка. Оператор определён на множестве функций, которые сами или их производные могут иметь разрывы первого рода на отрезке  $\overline{G} = [0, 1]$ , возможно, в счётном числе точек. Такие операторы возникают, например, как сопряжённые к операторам с интегральными условиями [2, с. 13]. В случае оператора Шрёдингера, как в данной работе, потенциал  $q(x)$  принадлежал классу функций  $\mathcal{L}^{1,q}(G)$ , т.е.  $q(x)q(x) \in \mathcal{L}^1(G)$ , где через  $q(x)$  обозначено расстояние от точки  $x$  до границы интервала  $G$ ; очевидно, справедливо вложение  $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G) \subset \mathcal{L}^{1,q}(G)$  для любого значения  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Корневые функции понимаются в обобщённом по Ильину смысле [3, с. 347]. Теорема о безусловной базисности, доказанная в работе [1], носит условный характер: результат доказан при выполнении “условий Ильина”, которые будут сформулированы ниже.

В статье [4] рассмотрена задача (1), (2) с потенциалом  $q(x) = x^{-3/2}$ . Показано, что выполняются условия Ильина и для этой задачи справедлива теорема о безусловной базисности системы корневых функций. Цель настоящей работы – распространить этот результат на задачу (1), (2) с произвольным потенциалом из класса  $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ .

Приведём несколько работ, в которых также исследованы спектральные свойства операторов с сингулярными коэффициентами. Краевая задача для уравнения (1) с потенциалом  $q(x)$  из класса  $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$ , где  $\varepsilon \in (1/2, 1]$ , исследована в работе [5], а именно рассмотрены гладкие на интервале  $G$  решения, получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений соответствующего оператора, решена обратная задача по нахождению потенциала. Некоторые идеи из этой статьи будут использованы для получения оценок решения задачи (1), (2). Л.В. Крицковым [6] исследована краевая задача для уравнения (1) с потенциалом из класса  $\mathcal{L}^{1,q}(G)$ , рассмотрены гладкие на интервале  $G$  решения, при выполнении условий Ильина доказана теорема о безусловной базисности в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  системы корневых функций оператора, изучена задача с более общими потенциалами, например с дельта-функцией. В цикле работ А.А. Шкаликова, А.М. Савчука и И.В. Садовничей исследованы спектральные свойства оператора Шрёдингера с потенциалом, являющимся производной от функции из класса  $\mathcal{L}^2(G)$  (см., например, [7, 8]). Оператор рассмотрен на множестве гладких функций.

**2. Основная теорема.** Рассмотрим систему собственных функций  $\{u_n(x)\}$  и соответствующих им собственных значений  $\{\lambda_n\}$  задачи (1), (2). Обозначим  $\mu^2 = \lambda$ ,  $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ ,  $\nu = |\operatorname{Im} \mu|$ ,  $\mu_n^2 = \lambda_n$ ,  $\operatorname{Re} \mu_n \geq 0$ ,  $\nu_n = |\operatorname{Im} \mu_n|$ ;  $\{v_n(x)\}$  – система собственных функций сопряжённого оператора  $L^*$ , биортогонально сопряжённая к системе  $\{u_n(x)\}$ .

Сформулируем основной результат.

**Теорема.** Пусть потенциал  $q(x) \in \mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$  для некоторого числа  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Тогда корневые функции операторов  $L$  и  $L^*$  образуют безусловный базис в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ , а нормированные системы  $\{\hat{u}_n(x)\}$ ,  $\{\hat{v}_n(x)\}$  образуют базис Рисса в этом пространстве.

Доказательство теоремы основано на применении известной теоремы Бари о базисах [9]: если почти нормированные биортогональные системы полны в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  и для каждой из них выполняется неравенство Бесселя, то каждая из этих систем образует базис Рисса в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  (т.е. безусловный почти нормированный базис).

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение следующих условий (условий Ильина):

- 1) системы  $\{u_n(x)\}$  и  $\{v_n(x)\}$  полны и минимальны в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ ;
- 2) найдутся постоянные  $c_1, c_2 > 0$  такие, что справедливо

$$|\operatorname{Im} \mu_n| \leq c_1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{0 \leq |\mu_n| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2 \quad \text{для любого } \lambda > 0; \quad (3)$$

- 3) найдётся постоянная  $c_3$  такая, что справедливо

$$\|u_n\|_2 \|v_n\|_2 \leq c_3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где  $\|\cdot\|_2$  обозначает норму в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ .

Для проверки условий 2) и 3) достаточно использовать асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задачи (1), (2) и сопряжённой задачи.

### 3. Доказательство теоремы.

**3.1.** Выведем асимптотические формулы для собственных функций операторов  $L$  и  $L^*$ . Запишем задачу, сопряжённую к задаче (1), (2):

$$-v''(x) + \bar{q}(x)v(x) = \bar{\lambda}v(x), \quad x \in G, \quad (5)$$

$$v(0) + v(1/2) = 0, \quad v(1) = 0, \quad v[1/2] = v'[1/2] = 0, \quad (6)$$

рассматриваемую на множестве функций, абсолютно непрерывных вместе с первой производной на любом компакте из интервала  $G$ .

Оператор  $L^*$  действует в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ , порождается дифференциальной операцией  $l^*v = -v'' + \bar{q}(x)v$ ,  $x \in G$ , и условиями (6).

Обозначим  $\tilde{q}(x) = x^{1-\varepsilon}q(x)$  для  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $\bar{\mu}^2 = \bar{\lambda}$ ,  $\operatorname{Re} \bar{\mu} \geq 0$ .

Для решений задач (1), (2) и (5), (6) автором были установлены асимптотические формулы.

**Лемма 1.** Пусть коэффициент  $q(x)$  уравнения (1) принадлежит пространству  $\mathcal{L}_{1-\varepsilon}^1(G)$  для некоторого числа  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Тогда для решения задачи (1), (2) справедливы следующие соотношения:

$$y(x, \mu) = \frac{\sin \mu x}{\mu} + e^\nu O\left(\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right), \quad |y(x, \mu)| \leq \frac{x^{1-\varepsilon}}{|\mu|^\varepsilon} e^{\nu + \|\tilde{q}\|_1}, \quad x \in [0, 1/2], \quad (7)$$

$$y(x, \mu) = \frac{\sin \mu x}{\mu} + \frac{\sin \mu(x-1/2)}{\mu} + y_0(x, \mu) + e^{3\nu} O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \quad (8)$$

$$|y(x, \mu)| \leq \frac{2 + c_q}{|\mu|} e^{2(\nu + \|\tilde{q}\|_1)}, \quad x \in (1/2, 1], \quad c_q = \|\tilde{q}\|_1 e^{\|\tilde{q}\|_1},$$

где  $\|\cdot\|_1$  – норма в пространстве  $\mathcal{L}^1(G)$ ,

$$y_0(x, \mu) = \int_0^{1/2} \frac{\sin \mu(x-t)}{\mu} q(t) y(t) dt, \quad |y_0(x, \mu)| \leq \frac{c_q e^\nu}{|\mu|^{1+\varepsilon}}, \quad x \in [0, 1].$$

Для решения задачи (5), (6) имеет место равенство

$$v(x, \mu) = \frac{\sin \bar{\mu}(1-x)}{\bar{\mu}} + e^\nu O\left(\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \in [0, 1]. \quad (9)$$

Здесь  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $|\mu| \geq 1$ , оценки  $O(\cdot)$  в правой части равенств равномерны по  $x$ .

Подставив в задачи (1), (2) и (5), (6) вместо  $\lambda$  собственные значения  $\lambda_n$  оператора  $L$ , получим, что для собственных функций  $u_n(x)$  имеют место формулы (7), (8), где следует заменить  $\mu$  на  $\mu_n$ ,  $\nu$  на  $\nu_n$ .

Для получения асимптотической формулы для собственных функций  $v_n(x)$  оператора  $L^*$  заменим в формуле (9)  $\mu$  на  $\mu_n$  и умножим обе части на постоянную  $c_n$ , которая выбирается так, чтобы выполнялось равенство  $(u_n, v_n) = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Если имеет место первое из условий (3):  $\nu_n \leq c_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то из полученных соотношений для функций  $u_n(x)$ ,  $v_n(x)$  следует выполнение неравенства (4). При этом системы  $\{\mu_n u_n(x)\}$  и  $\{\mu_n^{-1} v_n(x)\}$  будут почти нормированными.

**3.2.** Получим асимптотические формулы для спектральных чисел  $\mu_n$ . Решением уравнения  $y(1, \mu) = 0$  являются собственные значения оператора  $L$ . В процессе вывода формулы (8) была найдена оценка

$$\left| y(x, \mu) - \frac{\sin \mu x}{\mu} - \frac{\sin \mu(x-1/2)}{\mu} \right| < \frac{c_q}{|\mu|^{1+\varepsilon}} [e^{\nu x} + e^{\nu(x-1/2)}]$$

при  $x \in (1/2, 1]$ . Положив в этой оценке  $x = 1$ , имеем

$$\left| y(1, \mu) - \frac{\sin \mu}{\mu} - \frac{\sin(\mu/2)}{\mu} \right| < \frac{c_q}{|\mu|^{1+\varepsilon}} [e^\nu + e^{\nu/2}]. \quad (10)$$

Оценим экспоненты в правой части (10) через те же синусы, что находятся в левой части этого неравенства. Для этого применим к нашему случаю доказательство следующей леммы.

**Лемма 2** [10, с. 27]. Пусть числа  $z \in \mathbb{C}$  и  $|z - \pi n| \geq \pi/4$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , тогда справедливо неравенство  $\exp |\operatorname{Im} z| < 4 |\sin z|$ .

Получим соотношение

$$\begin{aligned} e^\nu + e^{\nu/2} &\leq 2e^\nu = 2e^{3\nu/4} e^{\nu/4} < 60 |\sin(3\mu/4)| |\cos(\mu/4)| = \\ &= 60 |\sin(3\mu/4) \cos(\mu/4)| = 30 |\sin \mu + \sin(\mu/2)|, \end{aligned} \quad (11)$$

справедливое для всех значений  $\mu$ , удовлетворяющих неравенству  $|\mu - 6\pi n| > 3\pi/6$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Для достаточно больших чисел  $|\mu|$  из неравенств (10), (11) имеем

$$\left| y(1, \mu) - \frac{\sin \mu}{\mu} - \frac{\sin(\mu/2)}{\mu} \right| < \frac{c}{|\mu|^\varepsilon} \left| \frac{\sin \mu}{\mu} + \frac{\sin(\mu/2)}{\mu} \right| < \left| \frac{\sin \mu}{\mu} + \frac{\sin(\mu/2)}{\mu} \right|.$$

Рассмотрим на комплексной  $\mu$ -плоскости контуры  $C_n: |\mu - 6\pi n| = 3\pi$  (для достаточно больших чисел  $n$ ), и функции

$$f(\mu) = \frac{\sin \mu}{\mu} + \frac{\sin(\mu/2)}{\mu}, \quad g(\mu) = y(1, \mu) - \frac{\sin \mu}{\mu} - \frac{\sin(\mu/2)}{\mu}.$$

Эти функции аналитичны внутри областей, ограниченных контурами  $C_n$ , на самих контурах  $C_n$  они непрерывны и удовлетворяют условию  $|f(\mu)| > |g(\mu)|$ . Тогда по теореме Руше функции  $f(\mu)$  и  $f(\mu) + g(\mu) = y(1, \mu)$  имеют внутри областей, ограниченных контурами  $C_n$ , одинаковое число нулей.

Функция  $f(\mu)$  имеет простые нули  $2\pi(2n-1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2\pi/3 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , и  $-2\pi/3 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , где учтено условие  $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ . Получаем асимптотические формулы для спектрального параметра:

$$\mu_{1n} = 2\pi(2n-1) + O(1), \quad \mu_{2n} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n + O(1), \quad \mu_{3n} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n + O(1), \quad n \geq N > 1.$$

Из этих формул, в частности, следует, что найдётся постоянная  $c_1 > 0$  такая, что  $|\operatorname{Im} \mu_n| = |\nu_n| \leq c_1$  для всех значений  $n \in \mathbb{N}$ .

Используя равенство (8), оценку леммы 1 для функции  $y_0(x, \mu)$  и равенство  $y(1, \mu) = 0$ , получим соотношение

$$\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\sin(\mu_n/2)}{\mu_n} = O\left(\frac{1}{\mu_n^\varepsilon}\right) = O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right),$$

которое позволит уточнить асимптотические формулы для чисел  $\mu_{in}$  для всех достаточно больших значений  $n$ :

$$\mu_{1n} = 2\pi(2n-1) + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right), \quad \mu_{2n} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right), \quad \mu_{3n} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right).$$

Из полученных соотношений следует справедливость неравенств (3).

**3.3.** Докажем полноту систем  $\{u_n(x)\}$ ,  $\{v_n(x)\}$  в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ . Для обеих систем схема доказательства одинаковая (см. [11]). Изложим её для оператора  $L^*$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) \in \mathcal{L}^2(G)$  такую, что  $(f, v_n) = 0$  для всех чисел  $n$ . Требуется доказать, что  $f(x) = 0$  в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$ .

Пусть числа  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \neq \mu_n$ . Ищем решение задачи

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \mu^2 y(x) + f(x), \quad y(0) + y(1/2) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (12)$$

Методом вариации произвольных постоянных получаем решение в следующем виде:

$$y(x) = \sum_{j=1}^2 c_j y_j(x) + \int_0^x f(\xi) \frac{y_1(x)y_2(\xi) - y_1(\xi)y_2(x)}{y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_1(\xi)y_2'(\xi)} d\xi, \quad x \in \overline{G},$$

где  $\{y_j(x)\}$  – фундаментальная система решений уравнения. Для функций  $y_j(x)$  выводим асимптотические формулы

$$y_1(x, \mu) = \frac{\sin \mu x}{\mu} + e^{\nu x} O\left(\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right), \quad y_2(x, \mu) = \cos \mu x + \operatorname{ch}(\nu x) o(1), \quad x \in \overline{G}.$$

Подставляя эти формулы в систему уравнений, после преобразований приходим к неравенству  $|\mu y(x)| \leq c$  при  $\operatorname{Im} \mu < 0$  на лучах, не содержащих собственных значений. Применяем теорему Фрагмена–Линделёфа и получаем из уравнения (12), что функция  $f(x) = 0$  на  $\overline{G}$ . Это доказывает полноту в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  системы собственных функций оператора  $L^*$ .

Минимальность этой системы в пространстве  $\mathcal{L}^2(G)$  следует из существования биортogonalно сопряжённой системы функций.

**3.4.** Осталось доказать справедливость неравенства Бесселя для каждой из рассматриваемых систем функций. Рассмотрим схему доказательства с помощью метода В.А. Ильина, подробно изложенного в монографии [2, с. 72–85] для более общего оператора, но при условии  $q(x) \in \mathcal{L}^1(G)$ , в наших обозначениях.

Требуется доказать, что для любой функции  $f(x) \in \mathcal{L}^2(G)$  найдутся положительные постоянные  $c_1, c_2$  такие, что будут справедливы неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \hat{v}_n)|^2 \leq c_1 \|f\|_2^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \leq c_2 \|f\|_2^2, \quad (13)$$

где  $\hat{v}_n = v_n(x) \|v_n\|_2^{-1}$  – нормированные функции.

Интегральное представление для собственных функций имеет вид

$$u_n(x) = u_n(0) \cos \mu_n x + \frac{1}{\mu_n} u'_n(0) \sin \mu_n x - \frac{1}{\mu_n} \int_0^x q(\tau) u_n(\tau) \sin \mu_n(x - \tau) d\tau. \quad (14)$$

Умножим скалярно это равенство на функцию  $g(x) = \overline{f}(x)$  и докажем справедливость второго неравенства (13) для каждого слагаемого из представления (14). Для первых двух слагаемых это сделано в [2, с. 74–81]. Докажем справедливость неравенства для третьего слагаемого в формуле (14):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n|^2} \left| \int_0^1 g(x) \int_0^x q(\tau) u_n(\tau) \sin \mu_n(x - \tau) d\tau dx \right|^2 \leq c \|f\|_2^2. \quad (15)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского  $|(u_n, f)| \leq \|u_n\|_2 \|f\|_2$  и условия (3), получаем

$$\sum_{|\mu_n| \leq 1} |(u_n, f)|^2 \leq c \|f\|_2^2 \sum_{|\mu_n| \leq 1} 1 \leq c c_2 \|f\|_2^2$$

и убеждаемся в том, что (15) достаточно установить для чисел  $\mu_n$ ,  $|\mu_n| > 1$ . Применив оценку (7) из леммы 1

$$|u_n(x)| \leq \frac{x^{1-\varepsilon}}{|\mu_n|^\varepsilon} e^{\nu_n + \|\tilde{q}\|_1}, \quad x \in [0, 1/2], \quad |\mu_n| > 1,$$

неравенство Коши–Буняковского и первое условие (3), получим

$$|\mu_n|^{-2} \left| \int_0^1 g(x) \int_0^x q(\tau) u_n(\tau) \sin \mu_n(x - \tau) d\tau dx \right|^2 \leq c |\mu_n|^{-2} \|\tilde{q}\|_1^2 \|g\|_2^2 \leq c |\mu_n|^{-2} \|f\|_2^2.$$

Используя второе условие (3) для последовательности  $\{\mu_n\}$ , установим сходимость ряда с общим членом  $|\mu_n|^{-2}$ :

$$\sum_{|\mu_n|>1} |\mu_n|^{-2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n \leq |\mu_n| \leq n+1} |\mu_n|^{-2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n \leq |\mu_n| \leq n+1} 1 \leq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Этим завершено доказательство второго неравенства (13). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белянцев О.В.* Неравенство Бесселя и свойство базисности корневых функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1011–1020.
2. *Ломов И.С.* Спектральный метод В.А. Ильина. Несамосопряжённые операторы. I. Оператор второго порядка. Базисность и равномерная сходимость спектральных разложений. М., 2019.
3. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М., 1991.
4. *Белянцев О.В., Ломов И.С.* О свойстве базисности корневых функций одного сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1187–1189.
5. *Жорницкая Л.А., Серов В.С.* Об одной теореме единственности для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с потенциалом, имеющим неинтегрируемую особенность // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2125–2134.
6. *Крицков Л.В.* Некоторые спектральные свойства сингулярных обыкновенных операторов второго порядка: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1990.
7. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
8. *Садовническая И.В.* Равносходимость в пространствах Соболева и Гёльдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Докл. РАН. 2011. Т. 437. № 2. С. 162–163.
9. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. Моск. гос. ун-та. 1951. Вып. 148. С. 69–107.
10. *Pöschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. Boston; Orlando; San Diego; New York; Austin; London; Sydney; Tokyo; Toronto, 1987.
11. *Ломов И.С.* Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 358–365.

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.  
После доработки 01.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

# ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРАМИ ВЕРХНИХ СИЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЗНАКОВ, НУЛЕЙ И КОРНЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2023 г. А. Х. Сташ

Построен пример линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней которого совпадают с заданным суслинским множеством неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой, содержащим нуль.

DOI: 10.31857/S0374064123050035, EDN: CWOGNI

**Введение.** Для заданного натурального числа  $n$  рассмотрим множество  $\tilde{\mathcal{E}}^n$  линейных однородных уравнений  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых наборами  $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывных функций, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения  $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$  обозначим через  $\mathcal{S}_*(a)$ . Далее звёздочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей в силу теоремы существования и единственности, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) показатели равны между собой и их спектры (т.е. множества значений на ненулевых решениях уравнения) состоят из одного значения [1].

В статье [2] доказано существование уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат конечные подмножества, состоящие из сколь угодно большого наперёд заданного числа метрически и топологически существенных значений. Кроме того, построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат одно и то же счётное множество метрически и топологически существенных значений. В [3] приводится линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой.

В работах [4–8] доказано, что спектры верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней линейного дифференциального уравнения порядка выше двух являются суслинскими множествами неотрицательной полуоси расширенной числовой прямой. Также в предположении, что спектры содержат точку нуль, в [4–7] получено обращение этого утверждения. В настоящей работе эти свойства обобщены и на верхние сильные показатели колеблемости знаков, нулей и корней решений дифференциальных уравнений третьего порядка.

**1. Формулировка основного результата.** Сначала дадим основные определения.

**Определение 1** [9, 10]. Скажем, что в точке  $t > 0$  происходит *строгая смена знака* функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$ , если в любой окрестности этой точки функция  $y$  принимает как положительные, так и отрицательные значения.

**Определение 2** [9–12]. Для момента  $t > 0$  и функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$  введём следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$  – число точек её *строгой смены знака* на промежутке  $(0, t]$ ;

$\nu^0(y, t)$  – число её *нулей* на промежутке  $(0, t]$ ;

$\nu^+(y, t)$  – число её *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) на промежутке  $(0, t]$ .

Далее для вектора  $m \in \mathbb{R}_*^n$  и вектор-функции  $\psi y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$  введём обозначение  $\nu^\gamma(y, m, t) \equiv \nu^\gamma(\langle \psi y, m \rangle, t)$ , где  $\gamma \in \{-, 0, +\}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение.

**Определение 3** [8–10]. *Верхние (нижние) частоты Сергеева знаков, нулей и корней* функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$  зададим при  $\gamma \in \{-, 0, +\}$  соответственно равенствами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \quad \left( \check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \right).$$

**Определение 4** [11, 12]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей и корней* функции  $y \in \mathcal{S}_*^n$  зададим при  $\gamma \in \{-, 0, +\}$  соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\gamma(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) & \left( \check{\nu}_\bullet^\gamma(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\gamma(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) & \left( \check{\nu}_\circ^\gamma(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, m, t) \right). \end{aligned}$$

К определению 2 добавим ещё обозначения

$$\nu^\gamma(y, s, t) \equiv \nu^\gamma(y, t) - \nu^\gamma(y, s), \quad \nu^\gamma(y, m, s, t) \equiv \nu^\gamma(y, m, t) - \nu^\gamma(y, m, s).$$

**Определение 5.** Множество всех значений показателя  $\varkappa: \mathcal{S}_*(a) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$  на нетривиальных решениях уравнения  $a \in \mathcal{E}^n$  назовём *спектром* этого показателя уравнения  $a \in \mathcal{E}^n$ .

**Определение 6** [13, с. 489]. Множество  $A \subset \mathbb{R}$  называется *суслинским множеством* прямой  $\mathbb{R}$ , если оно является непрерывным образом множества иррациональных чисел, рассматриваемого в естественной топологии. Множество  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  – *суслинское множество* расширенной числовой прямой, если оно представимо в виде объединения суслинского множества прямой  $\mathbb{R}$  и некоторого (в том числе и пустого) подмножества множества  $\{-\infty, +\infty\}$ .

Теперь перейдём к формулировке основного результата.

**Теорема.** Для любого содержащего нуль суслинского множества  $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv \mathbb{R}_+ \sqcup \{+\infty\}$  существует дифференциальное уравнение  $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ , удовлетворяющее при любом  $\gamma \in \{-, 0, +\}$  равенствам

$$\hat{\nu}_\bullet^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^\gamma(\mathcal{S}_*(a)) = \mathcal{A}.$$

**2. Вспомогательные определения и факты.** В этом пункте приведём сведения, необходимые для доказательства основного результата.

**Лемма 1.** Если набор функций  $\{y_1, y_2, y_3\}$  является фундаментальной системой решений некоторого уравнения  $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ , то при любом  $\alpha > 0$  набор функций

$$z_i(t) = y_i(t) \exp(\exp(\alpha t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

также является фундаментальной системой решений некоторого уравнения  $b \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $W_{y_1, y_2, y_3}(t)$  и  $W_{z_1, z_2, z_3}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , определители Вронского систем функций  $y_1, y_2, y_3 \in \mathcal{S}_*(a)$  и  $z_1, z_2, z_3$  соответственно.



Имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= \exp(\exp(\alpha t))(\alpha e^{\alpha t} y_i(t) + \dot{y}_i(t)), \quad i = \overline{1, 3}, \\ \ddot{z}_i(t) &= \exp(\exp(\alpha t))(\alpha^2 e^{\alpha t} (e^{\alpha t} + 1) y_i(t) + 2\alpha e^{\alpha t} \dot{y}_i(t) + \ddot{y}_i(t)), \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_{z_1, z_2, z_3}(t) &\equiv \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \exp(\exp(\alpha t))y_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_3(t) \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \exp(\exp(\alpha t))y_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_3(t) \\ \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_3(t) \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \exp(\exp(\alpha t))y_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))y_3(t) \\ \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))\dot{y}_3(t) \\ \exp(\exp(\alpha t))\ddot{y}_1(t) & \exp(\exp(\alpha t))\ddot{y}_2(t) & \exp(\exp(\alpha t))\ddot{y}_3(t) \end{vmatrix} = \\ &= \exp(3 \exp(\alpha t)) W_{y_1, y_2, y_3}(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что набор функций (1) является [14, с. 86] фундаментальной системой решений следующего уравнения  $b \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ :

$$\frac{1}{W_{z_1, z_2, z_3}(t)} \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) & y \\ \dot{z}_1(t) & \dot{z}_2(t) & \dot{z}_3(t) & \dot{y} \\ \ddot{z}_1(t) & \ddot{z}_2(t) & \ddot{z}_3(t) & \ddot{y} \\ \dddot{z}_1(t) & \dddot{z}_2(t) & \dddot{z}_3(t) & \dddot{y} \end{vmatrix} = 0.$$

Лемма доказана.

**Определение 7** [6]. Назовём функцию  $y \in C^3([\alpha, \beta])$  *правильно колеблющейся порядка*  $p \in \mathbb{N}$  *на отрезке*  $[\alpha, \beta]$ , если существует последовательность  $\alpha = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{4p+2} = \beta$  вещественных чисел такая, что:

1) на отрезках  $[\tau_{2i-1}, \tau_{2i}]$ ,  $i = \overline{1, 2p+1}$ , функция  $y$  имеет постоянную производную  $r_i$ , при этом справедливы неравенства  $r_1 > 0$  и  $r_i r_{i+1} < 0$ ;

2) на интервалах  $(\tau_{2i}, \tau_{2i+1})$ ,  $i = \overline{1, 2p}$ , её вторая производная  $\ddot{y}$  отлична от нуля.

Класс функций, введённых в определении 7, обозначим через  $R_p[\alpha, \beta]$ . Из определения 7 вытекает, что для функции  $y \in R_p[\alpha, \beta]$  справедливы неравенства  $\ddot{y} < 0$  при  $t \in (\tau_{4i-2}, \tau_{4i-1})$  и  $\ddot{y} > 0$  при  $t \in (\tau_{4i}, \tau_{4i+1})$ ,  $i = \overline{1, p}$ .

Нетрудно убедиться в том, что для функции  $y \in R_p[\alpha, \beta]$  при каждом  $c \in \mathbb{R}$  верно неравенство

$$\nu^\gamma(y(t) - c; \alpha, \beta) \leq 2p + 1, \quad \gamma \in \{-, 0, +\}.$$

**Определение 8** [6]. Назовём функцию  $y \in C^3(\mathbb{R}_+)$  *правильно колеблющейся на положительной полуоси*  $\mathbb{R}_+$ , если существует такая строго возрастающая последовательность  $\{\delta_i\}$  неотрицательных чисел с первым членом  $\delta_1 = 0$ , что для каждого  $i \in \mathbb{N}$  сужение  $y|_{[\delta_i, \delta_{i+1}]}$  является правильно колеблющейся на отрезке  $[\delta_i, \delta_{i+1}]$  функцией некоторого порядка  $p_i \in \mathbb{N}$ , т.е.  $y|_{[\delta_i, \delta_{i+1}]} \in R_{p_i}[\delta_i, \delta_{i+1}]$ .

Класс функций, введённых в определении 8, обозначим через  $R(\mathbb{R}_+)$ .

В работах [6, 15] установлено следующее утверждение.

**Лемма 2.** Для любых натурального числа  $p \in \mathbb{N}$  и действительных чисел  $\alpha < \beta$  и  $b < d$  существует функция  $f(\cdot) \equiv f(\cdot; \alpha, \beta; b, d; p) : [\alpha, \beta] \rightarrow [b, d]$ , правильно колеблющаяся порядка  $p$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , обладающая свойствами:

1) для любых  $\tau \in (\alpha, \beta]$ , символа  $\gamma \in \{0, -, +\}$  и чисел  $c_1 \in [b, d]$ ,  $c_2 \in (b, d)$ ,  $c_3 \in \{b, d\}$  и  $c_4 \notin [b, d]$  справедливы соотношения

$$\nu^\gamma(f(\cdot) - c_1; \alpha, \tau) \leq (2p + 1)(\tau - \alpha)/(\beta - \alpha) + 1, \quad \nu^\gamma(f(\cdot) - c_2; \alpha, \beta) = 2p + 1,$$

$$\nu^-(f(\cdot) - c_3; \alpha, \beta) = 0, \quad \nu^0(f(\cdot) - c_3; \alpha, \beta) = p + 1, \quad \nu^+(f(\cdot) - c_3; \alpha, \beta) = 2p + 1, \\ \nu^\gamma(f(\cdot) - c_4; \alpha, \beta) = 0;$$

2) уравнение  $f(t) = b$  имеет ровно  $p + 1$  решение  $\mu_1 < \dots < \mu_{p+1}$ , уравнение  $f(t) = d$  имеет ровно  $p + 1$  решение  $\nu_1 < \dots < \nu_{p+1}$ , причём  $\alpha = \mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \nu_{p+1} = \beta$ ;  
3) для некоторой константы  $M > 0$  выполнены неравенства

$$|\dot{f}(t)| \leq M(2p + 1)(d - b)(\beta - \alpha)^{-1}, \quad |\ddot{f}(t)| \leq M(2p + 1)^2(d - b)^2(\beta - \alpha)^{-2}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Следующая лемма уточняет результат статьи [6, следствие 4] и использует рассуждения [6, лемма 14].

**Лемма 3.** Для произвольного суслинского множества  $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ , содержащего нуль, существует ограниченная функция  $y_{\mathcal{A}}(\cdot) \in R(\mathbb{R}_+)$ , обладающая свойством: для любых функций  $a_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 2$ , удовлетворяющих для некоторых положительных постоянных  $C$  и  $\alpha$  условию  $|a_0(t)| + |a_1(t)| + |a_2(t)| \leq Ce^{-\alpha t}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , при каждом  $c \in \mathbb{R}$  справедливы соотношения

$$\{\hat{\nu}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{A}, \quad (2)$$

$$\hat{\nu}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) \geq \hat{\nu}^-(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) = \hat{\nu}^+(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c). \quad (3)$$

**Доказательство.** Через  $\mathcal{K}$  обозначим канторово множество [16, с. 138]:

$$\mathcal{K} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^j} \Delta_i^j,$$

где отрезки  $\Delta_i^j$ ,  $i = \overline{1, 2^j}$ , определяются индукцией по  $j \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ :  $\Delta_1^0 = [0, 1]$ , а при  $j \in \mathbb{N}$  для каждого  $i = \overline{1, 2^j}$  отрезки  $\Delta_{2i-1}^j$  и  $\Delta_{2i}^j$  по определению – левая и правая трети отрезка  $\Delta_i^{j-1}$  соответственно. Для любых  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = \overline{1, 2^j}$  обозначим  $\Delta_i^j = [\alpha_i^j, \beta_i^j]$ , т.е.

$$[\alpha_{2i-1}^{j+1}, \beta_{2i-1}^{j+1}] = [\alpha_i^j, \alpha_i^j + 3^{-(j+1)}], \quad [\alpha_{2i}^{j+1}, \beta_{2i}^{j+1}] = [\beta_i^j - 3^{-(j+1)}, \beta_i^j].$$

Множество точек второго рода [16, с. 141] канторова множества  $\mathcal{K}$  обозначим через  $\mathcal{K}_2$ :

$$\mathcal{K}_2 = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^j} (\alpha_i^j, \beta_i^j).$$

Далее для каждого  $j \in \mathbb{N}_0$  определим  $2^j$  отрезков  $\tilde{\Delta}_i^j = [\tilde{\alpha}_i^j, \tilde{\beta}_i^j]$ , где  $\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j + 6^{-(j+2)}$  и  $\tilde{\beta}_i^j = \beta_i^j - 6^{-(j+2)}$ ,  $i = \overline{1, 2^j}$ .

Занумеруем отрезки  $\tilde{\Delta}_i^j$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = \overline{1, 2^j}$ , натуральными числами и обозначим их в указанной нумерации  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ , полагая  $\Delta(2^j + i - 1) = \tilde{\Delta}_i^j$ . Пусть  $\Delta(k) = [b_k, d_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , тогда  $b_k = \tilde{\alpha}_i^j$ ,  $d_k = \tilde{\beta}_i^j$ , где  $j = \lfloor \log_2 k \rfloor$  и  $i = k + 1 - 2^j$  (здесь и далее  $[\cdot]$  – целая часть числа).

Выберем строго возрастающую последовательность  $(t_k)$  с первым членом  $t_1 = 0$ , удовлетворяющую при  $k \rightarrow +\infty$  условию  $(t_{k+1} - t_k)/t_{k+1} \rightarrow 1$ .

Согласно [16, с. 146–147] существует гомеоморфизм  $\varphi : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathbb{I}$  между пространством  $\mathcal{K}_2$  и пространством  $\mathbb{I}$  иррациональных чисел. Для суслинского множества  $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}$  существует [13, с. 489] непрерывное отображение  $\psi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что  $\psi(\mathbb{I}) = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$ . Положим  $g = \psi \circ \varphi$ . Тогда  $g(\mathcal{K}_2) = \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$ .

Функцию  $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$  определим сначала на отрезках  $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$  и  $[t_{4k-1}, t_{4k}]$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . На каждом отрезке  $\Delta(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , выберем число  $\xi_k \in \Delta(k)$  второго рода и зададим последовательность  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  натуральных чисел равенством

$$p_k = [(2\pi)^{-1}(t_{4k-2} - t_{4k-3})g(\xi_k)] + 1.$$

Последовательность  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  натуральных чисел зададим равенством  $n_k = [(t_{4k} - t_{4k-1})k] + 1$ , если  $+\infty \in \mathcal{A}$ , иначе  $n_k = 1$ . Положим

$$y_{\mathcal{A}}(t) = \begin{cases} f(t; t_{4k-3}, t_{4k-2}; b_k, d_k; p_k) & \text{при } t \in [t_{4k-3}, t_{4k-2}], \\ f(t; t_{4k-1}, t_{4k}; 2, 3; n_k) & \text{при } t \in [t_{4k-1}, t_{4k}], \end{cases}$$

где  $k \in \mathbb{N}$ . На полуось  $\mathbb{R}_+$  функцию  $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$  продолжим согласно [6, следствие 2] так, чтобы  $y_{\mathcal{A}}(\cdot) \in R(\mathbb{R}_+)$  и

$$y_{\mathcal{A}}|_{[t_{4k-2}, t_{4k-1}]}(\cdot) \in R_2[t_{4k-2}, t_{4k-1}], \quad y_{\mathcal{A}}|_{[t_{4k}, t_{4k+1}]}(\cdot) \in R_2[t_{4k}, t_{4k+1}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Построенная функция  $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$  является ограниченной на полуоси, как это вытекает из указанного следствия и определения функции  $f(\cdot; \alpha, \beta; b, d; p)$ .

В доказательстве леммы 14 и следствия 4 [6] установлено, что при каждом  $\gamma \in \{-, 0, +\}$  справедливо равенство

$$\hat{\nu}^{\gamma}(y_{\mathcal{A}}(\cdot) - c) = \begin{cases} g(c), & \text{если } c \in \mathcal{K}_2, \\ +\infty, & \text{если } c \in (2, 3) \text{ и } +\infty \in \mathcal{A}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, установлены все равенства в (2) и (3). Установим теперь оставшееся неравенство.

Пусть  $c \in \mathcal{K}_2$ . Тогда в его троичном представлении  $c = 0, c_1 c_2 \dots$  (где цифры  $c_i \in \{0, 2\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ) существует бесконечно много таких  $m \in \mathbb{N}$ , что  $c_m = 0$  и  $c_{m+1} = 2$ . Обозначим множество таких  $m$  через  $\mathcal{N}(c)$ . Пусть

$$\underline{c}^{(m)} = 0, c_1 c_2 \dots c_{m-1} \quad \text{и} \quad \bar{c}^{(m)} = 0, c_1 c_2 \dots c_{m-1} (2), \quad m \in \mathcal{N}(c).$$

Поскольку троичная запись числа  $\underline{c}^{(m)}$  содержит после запятой не более чем  $m-1$  цифр 0 и 2, то  $\underline{c}^{(m)}$  – левый конец некоторого отрезка  $(m-1)$ -го ранга  $\Delta_{j(m)}^{m-1}$ ,  $j(m) \in \{1, \dots, 2^{m-1}\}$ , а так как  $\bar{c}^{(m)} - \underline{c}^{(m)} = 3^{-(m-1)}$ , то  $[\underline{c}^{(m)}, \bar{c}^{(m)}] = \Delta_{j(m)}^{m-1}$ .

Докажем неравенство

$$\underline{c}^{(m)} + 2 \cdot 6^{-(m+1)} < c < \bar{c}^{(m)} - 2 \cdot 6^{-(m+1)}, \quad m \in \mathcal{N}(c). \quad (4)$$

Действительно, вычитая из всех частей этого неравенства число  $\underline{c}^{(m)}$  и затем умножая их на  $3^{m+1}$ , получаем очевидное неравенство

$$2^{-m} < 2 + 0, c_{m+2} \dots < 9 - 2^{-m}.$$

Положим  $N^0(c) = \{2^{m-1} + j(m) - 1 : m \in \mathcal{N}(c)\}$ . Другими словами, множество  $N^0(c)$  состоит из номеров отрезков  $\tilde{\Delta}_{j(m)}^{m-1}$ ,  $m \in \mathcal{N}(c)$ . Как отмечено выше, множество  $N^0(c)$  бесконечно.

Из построения функции  $y_{\mathcal{A}}(\cdot)$  и леммы 2 вытекает справедливость неравенств

$$|\dot{y}_{\mathcal{A}}(t)| \leq M(|g(\xi_k)| + 1), \quad |\ddot{y}_{\mathcal{A}}(t)| \leq M(g^2(\xi_k) + 1), \quad t \in [t_{4k-3}, t_{4k-2}],$$

для некоторой постоянной  $M > 0$ .

Заметим, что  $\lim_{N^0(c) \ni k \rightarrow \infty} \xi_k = c$ , поскольку  $|\Delta(k)| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\lim_{N^0(c) \ni k \rightarrow \infty} g(\xi_k) = g(c)$ , поскольку  $g$  непрерывна. Значит, множество  $\{|g(\xi_k)| : k \in N^0(c)\}$ , а с ним и сужения функций  $\dot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot)$  и  $\ddot{y}_{\mathcal{A}}(\cdot)$  на объединение отрезков  $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$ ,  $k \in N^0(c)$ , ограничены некоторой константой  $M > 1$ .

Выберем  $k_0 \in \mathbb{N}$  такое, что  $36C\tilde{M}k^3e^{-\alpha(4k-3)} < 1$  при всех  $k \geq k_0$ . Тогда для любого  $k \in N^0(c) \cap [k_0, +\infty)$  на отрезке  $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$  функция  $y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c$  имеет не менее  $2p_k + 1$  точек строгой смены знака. Действительно, в силу (4) справедлива цепочка

$$\min\{d_k - c, c - b_k\} > 6^{-(m+1)} > 1/(36k^3),$$

где  $m = [\log_2 k] + 1$ , поэтому по построению функции  $y_A(\cdot)$  на отрезке  $[t_{4k-3}, t_{4k-2}]$  найдутся точки

$$t_{4k-3} = \mu_1^k < \nu_1^k < \dots < \mu_{p_k+1}^k < \nu_{p_k+1}^k = t_{4k-2},$$

в которых функция  $y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c$  принимает поочерёдно отрицательные и положительные значения.

Таким образом, в силу определения числа  $p_k$  справедливо неравенство

$$\nu^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c; t_{4k-3}, t_{4k-2}) \geq \pi^{-1}g(\xi_k)(t_{4k-2} - t_{4k-3}),$$

откуда по лемме 13 [6] получаем, что

$$\hat{\nu}^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c) \geq \overline{\lim}_{N^0(c) \ni k \rightarrow \infty} g(\xi_k) = g(c).$$

С другой стороны, в лемме 14 [6] установлено, что  $\hat{\nu}^-[y_A(\cdot) - c] = g(c)$ .

Пусть теперь  $c \in (2, 3)$  и  $+\infty \in \mathcal{A}$ . Тогда по построению для некоторой постоянной  $\tilde{M} > 0$  на каждом из отрезков  $[t_{4k-1}, t_{4k}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , выполнены оценки  $|\dot{y}_A(t)| \leq \tilde{M}k$ ,  $|\ddot{y}_A(t)| \leq \tilde{M}k$ , а значит, сужение функции  $a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot)$  на объединение указанных отрезков является бесконечно малым при  $t \rightarrow +\infty$ . Следовательно, для всех достаточно больших  $k$  на отрезке  $[t_{4k-1}, t_{4k}]$  найдутся точки

$$t_{4k-1} = \mu_1^k < \nu_1^k < \dots < \mu_{n_k+1}^k < \nu_{n_k+1}^k = t_{4k},$$

в которых функция  $y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c$  принимает поочерёдно отрицательные и положительные значения. Таким образом, в силу определения числа  $n_k$  справедливо неравенство

$$\nu^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c; t_{4k-1}, t_{4k}) \geq 2k(t_{4k} - t_{4k-1}),$$

откуда по лемме 13 [6] получаем, что

$$\hat{\nu}^-(y_A(\cdot) + a_0(\cdot) + a_1(\cdot)\dot{y}_A(\cdot) + a_2(\cdot)\ddot{y}_A(\cdot) - c) = +\infty.$$

Лемма доказана.

**3. Доказательство основного результата.** Пусть  $y_A(\cdot)$  – функция, построенная в лемме 3 по заданному суслинскому множеству  $\mathcal{A}$ . Согласно лемме 12 [6] существует функция  $u(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$  и набор функций  $\{1, y_A(\cdot), u(\cdot)\}$  является фундаментальной системой решений некоторого уравнения  $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ .

Выберем произвольно и зафиксируем  $\alpha > 0$ . По лемме 1 набор функций  $\exp(\exp(\alpha t))$ ,  $\exp(\exp(\alpha t))y_A(t)$ ,  $\exp(\exp(\alpha t))u(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , является фундаментальной системой решений некоторого уравнения  $\bar{a} \in \tilde{\mathcal{E}}^3$ .

Положим  $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ . Каждому ненулевому решению

$$y_c(t) = c_1 + c_2 y_A(t) + c_3 u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

уравнения  $a \in \tilde{\mathcal{E}}^3$  поставим в соответствие решение

$$z_c(t) = \exp(\exp(\alpha t))y_c(t) \in \mathcal{S}_*(\bar{a}).$$

Очевидно, что для любого ненулевого набора нули и точки строгой смены знака двух функций  $y_c$  и  $z_c$  совпадают между собой. Более того, если в некоторой точке функция  $y_c$  имеет кратный нуль, то это же верно и для функции  $z_c$  и наоборот. Следовательно, справедливы равенства

$$\hat{\nu}^\gamma(y_c) = \hat{\nu}^\gamma(z_c), \quad \gamma \in \{-, 0, +\}. \quad (5)$$

Покажем, что верхний сильный показатель колеблемости знаков  $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c)$  всякого ненулевого решения  $z_c \in \mathcal{S}_*(\bar{a})$  совпадает с верхней частотой Сергеева знаков  $\hat{\nu}^-(y_c)$  соответствующего решения  $y_c \in \mathcal{S}_*(a)$ . Из очевидного неравенства  $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leq \hat{\nu}^-(z_c)$  и (5) вытекает неравенство  $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leq \hat{\nu}^-(y_c)$ . Установим обратное неравенство.

Пусть  $c_3 \neq 0$ . Тогда для любого решения  $y_c$  найдётся момент времени  $t(c)$ , начиная с которого функция  $y_c$  будет отлична от нуля. Поэтому выполняется цепочка равенств

$$0 = \hat{\nu}_\bullet^-(z_c) = \hat{\nu}^-(z_c) = \hat{\nu}^-(y_c) = 0. \quad (6)$$

При  $c_3 = 0$  для скалярного произведения  $\langle \psi z_c(t), m \rangle$  имеем представление

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{\exp(\exp(\alpha t))} = m_1(c_1 + c_2 y_A(t)) + m_2(\alpha e^{\alpha t}(c_1 + c_2 y_A(t)) + c_2 \dot{y}_A(t)) + \\ + m_3((\alpha^2 e^{2\alpha t} + \alpha^2 e^{\alpha t})(c_1 + c_2 y_A(t)) + 2\alpha e^{\alpha t} c_2 \dot{y}_A(t) + c_2 \ddot{y}_A(t)).$$

1. Если  $m_3 \neq 0$ , то указанное скалярное произведение принимает вид

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{m_3(\alpha e^{2\alpha t} + \alpha^2 e^{\alpha t}) \exp(\exp(\alpha t))} = c_1 + c_2 y_A(t) + a_0(t) + a_1(t) \dot{y}_A(t) + a_2(t) \ddot{y}_A(t),$$

где  $a_i(t)$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , экспоненциально стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

2. Если  $m_2 \neq 0$ ,  $m_3 = 0$ , то скалярное произведение представимо в виде

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{m_2 \alpha e^{\alpha t} \exp(\exp(\alpha t))} = c_1 + c_2 y_A(t) + a_0(t) + a_1(t) \dot{y}_A(t),$$

где  $a_i(t)$ ,  $i = \overline{0, 1}$ , экспоненциально стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

3. Если  $m_2 = m_3 = 0$ , то скалярное произведение примет вид

$$\frac{\langle \psi z_c(t), m \rangle}{m_1 \exp(\exp(\alpha t))} = c_1 + c_2 y_A(t).$$

Во всех случаях 1–3 выше если  $c_2 = 0$ , то, начиная с некоторого момента  $t(c)$ , функция  $y_c$  будет отлична от нуля, поэтому справедливы равенства (6). Если  $c_2 \neq 0$ , то в силу леммы 3 имеем  $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \geq \hat{\nu}^-(y_c)$ . Таким образом, равенство  $\hat{\nu}_\bullet^-(z_c) = \hat{\nu}^-(y_c)$  установлено для всех  $c \in \mathbb{R}_*^3$ . Из этого равенства, леммы 3 и определений 3 и 4 для любого  $c \in \mathbb{R}_*^3$  получаем соотношения

$$\hat{\nu}^-(y_c) = \hat{\nu}_\bullet^-(z_c) \leq \hat{\nu}_\bullet^\gamma(z_c) \leq \hat{\nu}^\gamma(z_c) = \hat{\nu}^\gamma(y_c) = \hat{\nu}^-(y_c), \quad \gamma \in \{-, 0, +\}.$$

Следовательно, спектры верхних сильных показателей колеблемости и верхних частот Сергеева знаков, нулей и корней уравнения  $\bar{a}$  совпадают со спектром верхней частоты Сергеева знаков уравнения  $a$ . Последний, в силу леммы 3, есть в точности множество  $\mathcal{A}$ . Теорема доказана.

**Заключение.** Полученный результат усиливает и обобщает теорему 9 работы [6] на большее число разновидностей характеристик колеблемости.

Автор выражает благодарность И.Н. Сергееву за обсуждение результатов и доценту В.В. Быкову за ценные советы и замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
2. *Сташ А.Х.* О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–22.
3. *Сташ А.Х.* О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с непрерывными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 3 (12). С. 9–17.
4. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31.
5. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1302–1320.
6. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609.
7. *Войделевич А.С.* О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32.
8. *Быков В.В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425.
9. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
10. *Сергеев И.Н.* Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.
11. *Сергеев И.Н.* Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577.
12. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
13. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М., 1966.
14. *Филлипов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.
15. *Войделевич А.С.* Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 3. С. 17–23.
16. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

Адыгейский государственный университет,  
г. Майкоп

Поступила в редакцию 24.12.2022 г.  
После доработки 05.04.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.984

О ЯВЛЕНИИ ПИНСКИ  
ДЛЯ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. Ш. А. Алимов, Ш. Т. Пирматов

Получены необходимые условия суммируемости спектральных разложений по собственным функциям эллиптического оператора с оператором Бесселя по одной из переменных в произвольной  $N$ -мерной области, примыкающей к гиперповерхности сингулярности. Доказано, что если спектральное разложение произвольной функции в некоторой точке данной гиперповерхности суммируется средними Рисса, то её среднее значение по полушару с центром в указанной точке обладает обобщённой гладкостью.

DOI: 10.31857/S0374064123050047, EDN: CXHCCZ

*К 95-летию Владимира Александровича Ильина*

**Введение.** В работе [1] В.А. Ильин обратил внимание на поведение спектральных разложений кусочно-гладких функций, имеющих разрывы вдоль гладких поверхностей. Он доказал, что разложения по собственным функциям оператора Лапласа в произвольной двумерной области кусочно-гладких функций, имеющих разрывы первого рода вдоль гладких кривых, сходятся к разлагаемой функции в каждой точке. Этот результат является обобщением классического результата Дирихле о том, что одномерный тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой функции сходится в каждой точке.

Когда размерность  $N$  рассматриваемой области больше двух, спектральные разложения кусочно-гладких функций могут расходиться даже в тех точках, в окрестности которых разлагаемая функция является гладкой, т.е. отсутствует локализация спектральных разложений. В этом случае, как в последующем было показано многими авторами, множество расходимости определяется геометрией поверхности разрыва разлагаемой функции (см. [2–8]).

Отметим, что впервые на это явление, с точки зрения так называемой квазиабсолютной сходимости, обратил внимание В.П. Маслов [9], доказавший, что даже при  $N = 2$  спектральное разложение функции со слабыми разрывами на гладкой кривой  $L$  расходится квазиабсолютно в точках эволюты кривой  $L$ . Если, например, в случае  $N \geq 3$  функция имеет слабый разрыв вдоль некоторой сферы, то спектральное разложение данной функции хуже всего ведёт себя в центре этой сферы. В частности, если функция равна единице внутри шара и нулю вне, то в центре шара её спектральное разложение расходится (см. [10, п. 1.3]).

Рассмотрев в статье [11] спектральное разложение характеристической функции шара, М. Пински сравнил отсутствие локализации с явлением Гиббса, поэтому указанное свойство получило название “явления Пински” (“Pinsky phenomenon”, см. [12, 13]).

В работе [14] был изучен вопрос, в некотором смысле обратный к явлению Пински. В частности, из её результатов следует, что если функция имеет носитель в замкнутом шаре, то для сходимости спектрального разложения функции в центре шара необходимо, чтобы интеграл от неё по поверхности шара равнялся нулю.

В настоящей статье мы распространяем результаты работы [14], полученные для оператора Лапласа, на случай В-эллиптических операторов. В определении данных операторов следуем монографии И.А. Киприянова [15].

Рассмотрим евклидово полупространство  $\mathbb{R}_N^+$ , точки которого обозначим  $(x', x_N)$ , где  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ , причём  $x_N > 0$ . Пусть ограниченная область  $\Omega^+$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  расположена в полупространстве  $\mathbb{R}_N^+$  и прилегает к гиперплоскости  $x_N = 0$ . Часть границы  $\Gamma$ , расположенную в  $\mathbb{R}_N^+$ , обозначим  $\Gamma^+$ , а часть границы  $\Gamma$ , лежащую на гиперплоскости  $x_N = 0$ , обозначим через  $\Gamma^0$ .

В области  $\Omega^+$  рассмотрим дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \frac{1}{x_N^k} \frac{\partial}{\partial x_N} \left( x_N^k \frac{\partial}{\partial x_N} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (1)$$

где  $k$  – фиксированное положительное число. Данный бесселевский параметр  $k$  играет важную роль в формулировке полученных результатов.

Областью определения оператора  $\Delta_B$  будем считать множество функций  $u \in C_0^\infty(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} = 0, \quad x \in \Gamma^0.$$

Введём гильбертово пространство  $L_{2,k}(\Omega^+)$  со скалярным произведением

$$(u, v)_k = \int_{\Omega^+} u(x) v(x) x_N^k dx$$

и ассоциированной с ним нормой  $\|u\|_k = \sqrt{(u, u)_k}$ .

Оператор  $\Delta_B$  в гильбертовом пространстве  $L_{2,k}(\Omega^+)$  является симметрическим:

$$(\Delta_B u, v)_k = -(\nabla u, \nabla v)_k = (u, \Delta_B v)_k,$$

и отрицательным:

$$(\Delta_B u, u)_k = -\|\nabla u\|_k^2.$$

Обозначим через  $A$  произвольное положительное самосопряжённое расширение в  $L_{2,k}(\Omega^+)$  оператора  $-\Delta_B$  такое, что обратный оператор  $A^{-1}$  является компактным в  $L_{2,k}(\Omega^+)$  (см. [15, § 5.4]). В этом случае собственные значения  $\lambda_n$  оператора  $A$  положительны и стремятся к  $+\infty$ , а собственные функции  $u_n(x)$  удовлетворяют уравнению  $\Delta_B u_n(x) + \lambda_n u_n(x) = 0$  и образуют полную ортонормированную систему в  $L_{2,k}(\Omega^+)$ .

Спектральное разложение произвольной функции  $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$  имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x), \quad f_n = (f, u_n)_k, \quad (2)$$

а их средние Рисса порядка  $s$  определяются равенством

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f(x). \quad (3)$$

Нашей целью является изучение спектральных разложений (2) и их средних Рисса (3) в случае, когда точка  $x$  находится внутри границы  $\Gamma^0$ . Тогда вместо шара с центром в точке  $x$  приходится рассматривать полушар

$$B^+(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| \leq r, \quad y_N > 0\},$$

расположенный в полупространстве  $x_N \geq 0$ . Ниже будем предполагать, что точка  $x$  и радиус  $r$  данного полушара выбраны так, что указанный полушар не выходит за пределы области  $\Omega^+$ .

Среднее значение порядка  $\alpha > 0$  функции  $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$  по полушару радиуса  $r$  с центром в точке  $x \in \Gamma^0$  определим равенством

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{1}{\omega_N(k, \alpha) r^{N+k}} \int_{\substack{|y| < r \\ y_N > 0}} \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} f(x+y) y_N^k dy, \quad (4)$$



где

$$\omega_N(k, \alpha) = \int_{\substack{|y| < 1 \\ y_N > 0}} (1 - |y|^2)^{\alpha-1} y_N^k dy.$$

Заметим, что для любого  $\alpha > 0$  и любой ограниченной (и, в частности, кусочно-гладкой) функции  $f$  средние (4) непрерывно зависят от радиуса  $r$  на интервале  $0 < r < \text{dis}(x, \Gamma^+)$ .

Введём также среднее значение функции по полусфере радиуса  $r$  с центром в точке  $x \in \Gamma^0$

$$S_r f(x) = \frac{1}{\omega_N(k) r^{N+k-1}} \int_{\substack{|y|=r \\ y_N > 0}} f(x+y) y_N^k d\sigma(y), \quad (5)$$

где

$$\omega_N(k) = \int_{\substack{|y|=1 \\ y_N > 0}} y_N^k d\sigma(y).$$

Так как

$$\int_{\substack{|y| \leq r \\ y_N > 0}} \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} f(x+y) y_N^k dy = \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} d\rho \int_{\substack{|y|=\rho \\ y_N > 0}} f(x+y) y_N^k d\sigma(y),$$

то, принимая во внимание определения (4) и (5), можем записать

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{\beta}{r^{N+k}} \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} \rho^{N+k-1} S_\rho f(x) d\rho, \quad (6)$$

где  $\beta = \omega_N(k)/\omega_N(k, \alpha)$ .

Из определения (5) следует равенство

$$\int_0^R S_r f(x) r^{N+k-1} dr = \frac{1}{\omega_n} \int_{\substack{|y| \leq R \\ y_N > 0}} f(x+y) y_N^k dy,$$

справедливое для любого  $R$  из интервала  $0 < R < \text{dis}(x, \Gamma^+)$ .

По теореме Фубини для любой функции  $f \in L_{1,k}(\Omega^+)$  (т.е. интегрируемой по  $\Omega^+$  с весом  $x_N^k$ ) среднее по полусфере определено для почти всех  $r > 0$  таких, что указанная полусфера радиуса  $r$  целиком лежит в области  $\Omega^+$ .

Всюду ниже  $S_r^\alpha f(x)$  при  $\alpha = 0$  означает среднее по полусфере (5):

$$S_r^0 f(x) = S_r f(x).$$

Как обычно, две функции называются *эквивалентными* на некотором множестве, если почти всюду на этом множестве они принимают одинаковые значения.

Основной результат настоящей статьи заключается в следующем.

**Теорема.** Пусть действительные числа  $s \geq 0$  и  $\alpha \geq 0$  и целое число  $m \geq 0$  удовлетворяют условию

$$s + m - \alpha < (N + k - 3)/2. \quad (7)$$

Если спектральное разложение функции  $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$  суммируется в точке  $x \in \Gamma^0$  средними Рисса порядка  $s$ , то функция  $\varphi_\alpha(r) = S_r^\alpha f(x)$  эквивалентна функции,  $m$  раз непрерывно дифференцируемой на интервале  $0 < r < \text{dis}(x, \Gamma^+)$ .

Таким образом, необходимым условием суммируемости ряда Фурье функции из  $L_{2,k}(\Omega^+)$  в некоторой граничной точке  $x \in \Gamma^0$  является определённая уравнированность этой функции не только в окрестности данной точки, но и в удалении от неё.

**Следствие.** Пусть  $N+k > 3$ . Если в некоторой точке  $x \in \Gamma^0$  средние Рисса (3) порядка  $s < (N+k-3)/2$  сходятся, то среднее значение (5) по полусфере радиуса  $r$  с центром в этой точке непрерывно зависит от  $r$ .

Например (см. ниже п. 5), если функция  $f$  имеет носитель в полушаре  $B^+(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y-x| \leq R, y_N > 0\}$ , то необходимым условием сходимости её ряда Фурье в точке  $x$  является выполнение условия

$$\int_{\substack{|y-x|=R \\ y_N > 0}} f(y) y_N^k d\sigma(y) = 0.$$

Заметим, что характеристическая функция полушара  $B^+(x, R)$  данному условию не удовлетворяет, и поэтому её ряд Фурье расходится в точке  $x$ .

Доказательство теоремы существенно опирается на результаты И.А. Киприянова [15, гл. 5], где подробно изучены собственные функции оператора (1).

Изложение построено следующим образом: в п. 1 устанавливается основная формула (9), связывающая средние Рисса (3) со средними по полусфере (4) для функций с быстро убывающими коэффициентами Фурье, в п. 2 полученная формула распространяется на произвольные функции из  $L_{2,k}(\Omega^+)$ , а в п. 3 на её основе доказывается справедливость утверждения сформулированной теоремы; в п. 4 рассматриваются примеры, связанные с явлением Пински.

**1. Связь между средними по полусфере и средними Рисса.** Напомним, что рассматриваем произвольное положительное самосопряжённое расширение в  $L_{2,k}(\Omega^+)$  оператора  $-\Delta_B$  такое, что обратный оператор  $A^{-1}$  является компактным в  $L_{2,k}(\Omega^+)$ . Положим

$$D(A^\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(A^m),$$

где  $D(A^m)$  – область определения оператора  $A^m$ .

**Лемма 1.** Пусть числа  $\alpha \geq 0$  и  $s \geq 0$  удовлетворяют условию

$$s < \alpha + \frac{N+k-3}{2}. \quad (8)$$

Тогда для любой функции  $f \in D(A^\infty)$ , произвольной точки  $x \in \Gamma^0$  и любого  $r$  из интервала  $0 < r < \text{dis}\{x, \Gamma^+\}$  выполняется равенство

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{C(N, k, \alpha, s)}{r^{(N+k)/2 + \alpha - s - 2}} \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s - \alpha - (N+k)/2} J_{(N+k)/2 + \alpha + s}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda, \quad (9)$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ , а  $C(N, k, \alpha, s)$  – некоторая положительная постоянная.

**Доказательство.** 1. Из оценки спектральной функции оператора  $A$  (см. [15], § 5.4) следует, что ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x)$$

любой функции  $f \in D(A^\infty)$  сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте  $K \subset \subset \Omega^+ \cup \Gamma^0$ .

Зафиксировав  $x \in \Gamma^0$  и проинтегрировав ряд Фурье

$$f(x+y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x+y)$$

по полушару  $\{|y| < r, y_N > 0\}$ , предварительно умножив его, согласно формуле (4), на соответствующий множитель, получим равенство

$$S_r^\alpha f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n S_r^\alpha u_n(x). \quad (10)$$

В силу соотношения (6) можем записать

$$S_r^\alpha u_n(x) = \frac{\beta}{r^{N+k}} \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} \rho^{N+k-1} S_\rho u_n(x) d\rho. \quad (11)$$

Далее воспользуемся следующей формулой среднего значения (см. [15, формула (5.3.7)]):

$$S_\rho u_n(x) = u_n(x) \Gamma\left(\frac{N+k}{2}\right) J_{(N+k-2)/2}(\rho\sqrt{\lambda}) \left(\frac{\rho\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{-(N+k-2)/2},$$

подставив которую в интеграл (11), получим равенство

$$S_r^\alpha u_n(x) = u_n(x) \frac{\beta \Gamma((N+k)/2)}{r^{N+k}} \int_0^r \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} J_{(N+k-2)/2}(\rho\sqrt{\lambda}) \left(\frac{\rho\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{-(N+k-2)/2} \rho^{N+k-1} d\rho. \quad (12)$$

Последний интеграл простыми преобразованиями сводится к интегралу Сонина (см. [16, формула 12.11.(1)]), который позволяет записать формулу (12) в виде

$$S_r^\alpha u_n(x) = u_n(x) B(N, k, \alpha) \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{(N+k)/2+\alpha-1}}, \quad (13)$$

где  $B(N, k, \alpha) = 2^{(N+k)/2+\alpha-1} \Gamma((N+k)/2 + \alpha)$ .

В таком случае из равенств (10) и (13) для средних взвешенных функции  $f \in D(A^\infty)$  по полушару радиуса  $r$  получаем следующее представление:

$$S_r^\alpha f(x) = B(N, k, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{(N+k)/2+\alpha-1}} f_n u_n(x). \quad (14)$$

Отметим, что данное представление справедливо для всех  $\alpha \geq 0$ .

2. Рассмотрим теперь интеграл в правой части равенства (9):

$$I(r) = \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{\alpha+s+(N+k)/2}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda. \quad (15)$$

Согласно известным оценкам для функций Бесселя (см. [16, гл. 7])

$$J_\nu(z) = O(z^\nu), \quad J_\nu(z) = O(z^{-1/2}),$$

справедливым при  $\nu \geq -1/2$  и  $z > 0$ , интеграл

$$\int_0^\infty |J_{\alpha+s+(N+k)/2}(t)| t^{1+s-\alpha-(N+k)/2} dt$$

сходится для всех  $\alpha \geq 0$  и  $s \geq 0$ , удовлетворяющих условию  $1 + s - \alpha - (N+k)/2 < -1/2$ , которое, очевидно, совпадает с условием (8). Отсюда непосредственно следует, что интеграл

(15) для любой функции  $f \in D(A^\infty)$  сходится абсолютно и равномерно на любом компакте  $K \subset \Omega^+ \cup \Gamma^0$ .

Введём обозначение

$$a_+^s = \begin{cases} a^s, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a \leq 0, \end{cases}$$

и преобразуем интеграл (15) с учётом определения (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) \left[ \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) \right] d\lambda = \\ &= \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) \left[ \sum_{\lambda_n < \lambda} (\lambda - \lambda_n)^s f_n u_n(x) \right] d\lambda = \\ &= \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) \left[ \sum_{n=1}^\infty (\lambda - \lambda_n)_+^s f_n u_n(x) \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим равенство

$$I(r) = \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \int_0^\infty (\lambda - \lambda_n)_+^s (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) d\lambda.$$

Заметим, что интегрирование под знаком суммы фактически ведётся по полупрямой  $\lambda > \lambda_n$ , поэтому

$$I(r) = \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \int_{\lambda_n}^\infty (\lambda - \lambda_n)^s (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) d\lambda. \quad (16)$$

Заменив  $z = \lambda/\lambda_n$ , получим

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda_n}^\infty (\lambda - \lambda_n)^s (\sqrt{\lambda})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) d\lambda = \\ &= \lambda_n^{s+1} (\sqrt{\lambda_n})^{-s-\alpha-(N+k)/2} \int_1^\infty (z-1)^s (\sqrt{z})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda_n z}) dz. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся формулой (см. [17, формула (6.592.10)])

$$\int_1^\infty (z-1)^s (\sqrt{z})^{-s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda_n z}) dz = 2^{s+1} \Gamma(s+1) \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{s+1}}.$$

В результате из равенства (16) получим

$$I(r) = 2^{s+1} \Gamma(s+1) r^{(N+k)/2+\alpha-s-2} \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \frac{J_{(N+k)/2+\alpha-1}(r\sqrt{\lambda_n})}{(r\sqrt{\lambda_n})^{(N+k)/2+\alpha-1}}.$$

Сравнение этого соотношения и (14) даёт равенство

$$S_r^\alpha f(x) = \frac{B(N, k, \alpha)}{2^{s+1} \Gamma(s+1)} r^{s+2-\alpha-(N+k)/2} I(r).$$

С учётом определения (15) интеграла  $I(r)$  отсюда следует требуемое соотношение (9) с постоянной  $C = 2^{-s-1}B(N, k, \alpha)/\Gamma(s+1)$ . Лемма доказана.

**2. Распространение основной формулы на функции из  $L_{2,k}$ .** Далее покажем, как можно освободиться от условия  $f \in D(A^\infty)$ , значительно сужающего класс рассматриваемых функций. Прежде всего заметим, что для произвольной функции  $f \in L_{1,k}(\Omega^+)$  основное равенство (9) может не выполняться ни в одной точке ввиду неограниченности спектральных разложений (см. [18, гл. II, § 5]). Более того, даже если функция  $f$  имеет гладкость порядка  $l < -s + (N-1)/2$ , средние Рисса (3) могут в некоторых точках оказаться неограниченными (см. [19]). Тем не менее если предположить, что спектральное разложение функции  $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$  суммируется в некоторой точке  $x \in \Gamma^0$  средними Рисса порядка  $s$ , то равенство (9) оказывается верным.

**Лемма 2.** Пусть выполняется условие (8). Если средние Рисса  $E_\lambda^s f(x)$  функции  $f \in L_2(\Omega^+)$  в некоторой точке  $x \in \Gamma^0$  ограничены по  $\lambda > 0$ , то для почти всех  $r$  из интервала  $0 < r < \text{dis}\{x, \Gamma^+\}$  выполняется равенство (9).

**Доказательство.** Пусть  $f$  – произвольная функция из пространства  $L_{2,k}(\Omega^+)$ . Для любого  $h > 0$  введём в рассмотрение функцию

$$F(y, h) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-\lambda_n h} u_n(y), \quad y \in \Gamma^0 \cup \Omega^+, \quad (17)$$

представляющую собой средние Абеля спектрального разложения  $f$ . Средние Рисса спектрального разложения этой функции имеют вид

$$E_\lambda^s F(y, h) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n e^{-\lambda_n h} u_n(y). \quad (18)$$

Очевидно, что функция  $F(y, h)$  при каждом  $h > 0$  принадлежит  $D(A^\infty)$ . Следовательно, согласно лемме 1 выполняется равенство

$$S_r^\alpha F(x, h) = \frac{C(N, k, \alpha, s)}{r^{(N+k)/2+\alpha-s-2}} \int_0^\infty (\sqrt{\lambda})^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s F(x, h) d\lambda. \quad (19)$$

Докажем, что при  $h \rightarrow 0$  это равенство переходит в равенство (9).

1) Для доказательства того, что правая часть (19) при  $h \rightarrow 0$  стремится к правой части (9), воспользуемся следующим утверждением.

**Утверждение 1.** Для любого  $s \geq 0$  существует функция  $\psi_s(t, h, \lambda)$ , при всех  $\lambda > 0$  равномерно по  $h$  из интервала  $0 < h < 1$  удовлетворяющая оценке

$$\int_0^\lambda t^s |\psi_s(t, h, \lambda)| dt \leq C \lambda^s, \quad (20)$$

такая, что выполняется равенство

$$E_\lambda^s F(x, h) = E_\lambda^s f(x) e^{-\lambda h} + \frac{1}{\lambda^s} \int_0^\lambda t^s \psi_s(t, h, \lambda) E_\lambda^s f(x) dt. \quad (21)$$

Справедливость данного утверждения следует из результатов работы [20].

Предположим, что выполнено условие  $|E_\lambda^s f(x)| \leq M(x)$ ,  $\lambda > 0$ . В этом случае из соотношения (21) и оценки (20) следует, что средние Рисса порядка  $s$  функции (17) равномерно по  $h$  из интервала  $0 < h < 1$  ограничены по  $\lambda > 0$ :

$$|E_\lambda^s F(x, h)| \leq M(x) + M(x) \frac{1}{\lambda^s} \int_0^\lambda t^s |\psi_s(t, h, \lambda)| dt \leq (1 + C) M(x).$$

Тогда из условия (7) и асимптотики функции Бесселя следует, что интеграл в правой части (19) сходится абсолютно и равномерно по  $h > 0$ .

Далее непосредственно из равенства (18) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_{\lambda}^s u(x, h) = E_{\lambda}^s f(x).$$

Стало быть, выполнены все условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [21, Добавление I, п. 3]), согласно которой интеграл в правой части равенства (19) равномерно по  $r$  на каждом отрезке положительной полупрямой сходится при  $h \rightarrow 0$  к интегралу в правой части (9).

2) Докажем теперь, что левая часть равенства (19) стремится к левой части равенства (9) при  $h \rightarrow 0$ . В этом случае, по крайней мере при малых  $\alpha$ , мы не можем, в отличие от рассмотренного выше случая, утверждать, что сходимость будет при всех значениях  $r$ . Объясняется это тем, что при  $\alpha \leq 1/2$  средние (4) и (5) для функций из  $L_{2,k}(\Omega^+)$  определены лишь для почти всех значений радиуса  $r$ , т.е. для бесконечного числа значений радиуса они могут не существовать.

Обозначим величину в правой части (9) символом  $\phi_{\alpha}(r)$ . Согласно проведённым выше рассуждениям, для любой функции  $f \in L_{2,k}(\Omega^+)$  при выполнении условий леммы 2 функция  $\phi_{\alpha}(r)$  является непрерывной на полупрямой  $r > 0$ . Кроме того, было установлено, что равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_r^{\alpha} F(x, h) = \phi_{\alpha}(r) \quad (22)$$

выполняется равномерно по  $r \in I$ , где  $I$  – произвольный отрезок, лежащий внутри интервала  $0 < r < \text{dis}(x, \Gamma^+)$ .

Требуется доказать, что для почти всех  $r$  из интервала  $0 < r < \text{dis}(x, \Gamma^+)$  справедливо равенство

$$S_r^{\alpha} f(x) = \phi_{\alpha}(r). \quad (23)$$

Для доказательства заметим, что из равенства Парсеваля и определения (17) следует сходимость  $F(x, h) \rightarrow f(x)$  при  $h \rightarrow 0$  в метрике  $L_{2,k}(\Omega^+)$ :

$$\|F(\cdot, h) - f(\cdot)\|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 (1 - e^{-\lambda_n h})^2 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Следовательно, для любой функции  $g \in L_{2,k}(\Omega^+)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega^+} F(y, h) g(y) y_N^k dy = \int_{\Omega^+} f(y) g(y) y_N^k dy. \quad (24)$$

Докажем сначала справедливость соотношения (23) при  $\alpha = 0$ . Зафиксируем произвольные  $\varepsilon$  и  $R$  такие, что

$$0 < \varepsilon < R < \text{dis}(x, \Gamma^*). \quad (25)$$

Из определения (5) следует равенство

$$\int_{\varepsilon}^R S_r F(x, h) r^{N+k-1} dr = \frac{1}{\omega_n} \int_{\substack{\varepsilon \leq |y| \leq R \\ y_N > 0}} F(x+y, h) y_N^k dy.$$

Принимая во внимание соотношение (22), устремим в этом равенстве  $h$  к нулю. В результате получим

$$\int_{\varepsilon}^R \phi_0(r) r^{N+k-1} dr = \frac{1}{\omega_n} \int_{\substack{\varepsilon \leq |y| \leq R \\ y_N > 0}} f(x+y) y_N^k dy = \int_{\varepsilon}^R S_r f(x) r^{N+k-1} dr.$$

Тогда для всех  $\varepsilon$  и  $R$ , удовлетворяющих условию (25), выполняется равенство

$$\int_{\varepsilon}^R [\phi_0(r) - S_r f(x)] r^{N+k-1} dr = 0.$$

Отсюда очевидным образом вытекает справедливость при  $\alpha = 0$  соотношения (23) для почти всех  $r$  из интервала  $0 < r < \text{dis}(x, \Gamma^+)$ .

Пусть теперь  $\alpha > 0$ . Рассмотрим интеграл

$$G(r, h) = \int_{\substack{|y| \leq r \\ y_N > 0}} (r^2 - |y|^2)^\alpha F(x + y, h) y_N^k dy. \quad (26)$$

Из соотношения (24) и определения (4) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} G(r, h) = \int_{\substack{|y| \leq r \\ y_N > 0}} (r^2 - |y|^2)^\alpha f(x + y) y_N^k dy. \quad (27)$$

С другой стороны, дифференцирование интеграла (26) по  $r$  и простые преобразования приводят к равенству

$$G'(r, h) = 2\alpha r^{2\alpha-1} \int_{\substack{|y| \leq r \\ y_N > 0}} \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} F(x + y, h) y_N^k dy,$$

откуда с учётом определения (4) получаем

$$G'(r, h) = 2\alpha \omega_N(k, \alpha) r^{N+k+2\alpha-1} S_r^\alpha F(x, h).$$

Следовательно, для любых  $\varepsilon$  и  $R$ , удовлетворяющих условию (25), можно записать

$$G(R, h) - G(\varepsilon, h) = 2\alpha \omega_N(k, \alpha) \int_{\varepsilon}^R r^{N+k+2\alpha-1} S_r^\alpha F(x, h) dr.$$

Устремляя в этом равенстве вначале  $h \rightarrow 0$ , а затем  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в силу (22) и (27) будем иметь

$$\int_{\substack{|y| \leq R \\ y_N > 0}} (R^2 - |y|^2)^\alpha f(x + y) y_N^k dy = 2\alpha \omega_N(k, \alpha) \int_0^R r^{N+k+2\alpha-1} \phi_\alpha(r) dr.$$

Преобразовав интеграл в левой части с учётом определения (4), окончательно получим

$$\int_0^R r^{N+k+2\alpha-1} S_r^\alpha f(x) dr = \int_0^R r^{N+k+2\alpha-1} \phi_\alpha(r) dr.$$

Ввиду произвольности  $R$  отсюда следует требуемое соотношение (23). Лемма 2 доказана.

**Замечание.** При  $\alpha > 1/2$  обе части равенства (24) являются непрерывными функциями радиуса  $r$  и это равенство выполняется в каждой точке интервала  $0 < r < \text{dis}\{x, \Gamma^0\}$ .

**3. Доказательство теоремы.** Основным в дальнейших рассуждениях является равенство (9), которое запишем в следующем виде:

$$S_r^\alpha f(x) = r^2 \int_0^\infty \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda, \quad (28)$$

где

$$\Phi(z) = C(N, k, \alpha, s) z^{s-\alpha-(N+k)/2} J_{(N+k)/2+\alpha+s}(z). \quad (29)$$

Напомним, что равенство (28) справедливо для почти всех значений  $r$  из интервала  $0 < r < \text{dis}\{x, \Gamma^0\}$ , хотя правая часть определена для всех  $r > 0$ .

Далее

$$S_r^\alpha f(x) = r^2 \int_0^1 \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda + r^2 \int_1^\infty \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda. \quad (30)$$

Первый интеграл в правой части (31), очевидно, является гладкой функцией  $r$  на полупрямой  $r > 0$ . Таким образом, для доказательства теоремы достаточно при выполнении условия (8) убедиться в непрерывности при  $r > 0$  производной порядка  $m$  функции

$$\psi_\alpha(r) = \int_1^\infty \Phi(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda. \quad (31)$$

Продифференцировав формально равенство (31)  $m$  раз, получим

$$\psi_\alpha^{(m)}(r) = \int_1^\infty (\sqrt{\lambda})^m \Phi^{(m)}(r\sqrt{\lambda}) E_\lambda^s f(x) d\lambda. \quad (32)$$

Из асимптотического поведения функций Бесселя (см. [16, п. 7.21]) следует, что производные функции (29) при  $z \rightarrow +\infty$  имеют асимптотику

$$\Phi^{(m)}(z) = A z^{s-\alpha-(N+k+1)/2} \left[ \cos^{(m)}(z + \beta) + \frac{O(1)}{z} \right].$$

Следовательно,  $|\Phi^{(m)}(z)| \leq C z^{s-\alpha-(N+k+1)/2}$ ,  $z \geq 1$ . Подставив эту оценку в интеграл (32), получим

$$|\psi_\alpha^{(m)}(r)| \leq C \int_1^\infty (\sqrt{\lambda})^{m+s-\alpha-(N+k+1)/2} |E_\lambda^s f(x)| d\lambda.$$

Таким образом, для абсолютной и равномерной по  $r$  на любом отрезке положительной полупрямой сходимости интеграла (32) достаточно выполнения неравенства

$$m + s - \alpha - (N + k + 1)/2 < -2,$$

совпадающего с условием (7). Теорема доказана.

**4. Примеры.** Рассмотрим примеры применения теоремы, связанные с явлением Пински.

**Пример 1.** Фиксируем произвольную точку  $x \in \Gamma^0$  и положительное число  $R < \text{dis}(x, \Gamma^+)$ . Для произвольной функции  $F \in C^\infty(R^N)$  определим следующую функцию:

$$f(y) = \begin{cases} F(y), & \text{если } |y - x| \leq R, \\ 0, & \text{если } |y - x| > R. \end{cases}$$



Этим же символом  $f$  обозначим её ограничение на область  $\Omega^+$ . Для такой функции  $f$  среднее значение (5) по полусфере радиуса  $r$  имеет вид

$$S_r f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_N(k)r^{N+k-1}} \int_{\substack{|y|=r \\ y_N > 0}} F(x+y)y_N^k d\sigma(y), & \text{если } 0 < r \leq R, \\ 0, & \text{если } r > R. \end{cases}$$

Следовательно,  $S_r f(x)$  как функция радиуса может иметь разрыв только в точке  $r = R$ .

Непрерывность средних  $S_r f(x)$  означает, что должно выполняться условие

$$\int_{\substack{|y|=R \\ y_N > 0}} F(x+y)y_N^k d\sigma(y) = 0. \quad (33)$$

Из теоремы следует, что данное условие является необходимым для сходимости спектрального разложения (2) функции  $f$  в точке  $x \in \Gamma^0$ . Более того, в случае больших значений размерности  $N$  и показателя  $k$  должны обращаться в нуль и производные по  $R$  интеграла (33) до определённого порядка.

Заметим, что если функция  $F$  принимает только положительные значения, например,  $F(y) \equiv 1$ , то условие (33) не может быть выполнено. Следовательно, спектральное разложение характеристической функции полушара в его центре должно расходиться (ср. с [11] и [12]).

**Пример 2.** Для любой области  $D \subset \mathbb{R}^N$  символом  $\Sigma(D)$  обозначим класс функций с носителем в  $\overline{D}$ , каждая из которых является следом некоторой функции из  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Иначе говоря,  $f \in \Sigma(D)$ , если существует функция  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  такая, что

$$f(y) = \begin{cases} F(y), & \text{если } y \in \overline{D}, \\ 0, & \text{если } y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}. \end{cases} \quad (34)$$

Фиксируем произвольную точку  $x^* \in \Gamma^0$  и рассмотрим произвольную подобласть  $D$  области  $\Omega^+$ , целиком расположенную в полушаре

$$B(x) = \{y \in \Omega^+ : |y - x| < \text{dis}(x, \Gamma^+)\}.$$

Обозначим символом  $\Gamma^*$  ту часть границы  $\partial D$  области  $D$ , которая лежит в  $\Omega^+$ . Ниже будем предполагать, что поверхность  $\Gamma^*$  является звёздной относительно точки  $x^*$ , т.е. внутренняя часть отрезка, соединяющего точку  $x^*$  с произвольной точкой множества  $\Gamma^*$ , лежит внутри  $D$ .

Будем говорить, что для поверхности  $\Gamma^*$  в точке  $x^*$  имеет место явление Пински, если существует функция  $f \in \Sigma(D)$ , спектральное разложение которой расходится в точке  $x^*$ .

Точку  $y^* \in \Gamma^*$  назовём *сферической относительно  $x^*$* , если окружающая точку  $y^*$  некоторая открытая (в топологии  $\Gamma^*$ ) часть поверхности  $\Gamma^*$  лежит на сфере с центром в точке  $x^*$ .

**Утверждение 2.** Если на  $\Gamma^*$  лежит хотя бы одна точка, сферическая относительно  $x^*$ , то для поверхности  $\Gamma^*$  в точке  $x^*$  имеет место явление Пински.

Действительно, предположим, что точка  $y^* \in \Gamma^*$  является сферической относительно  $x^*$ . Рассмотрим произвольный выпуклый конус, образованный лучами, исходящими из точки  $x^*$  и проходящими через точки  $\Gamma^*$ , которые окружают  $y^*$  и лежат на сфере с центром в точке  $x^*$ . Обозначим через  $F(y)$  функцию, всюду в этом конусе, кроме окрестности точки  $x^*$ , равную единице, и продолжим её на всё пространство  $\mathbb{R}^N$  так, чтобы она принадлежала  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ , была неотрицательной и носитель её лежал в чуть большем аналогичном конусе. Тогда функция  $f(y)$ , определённая равенством (34), очевидно, принадлежит классу  $\Sigma(D)$ , а её спектральное разложение, согласно примеру 1, в точке  $x^*$  расходится.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А. Теорема о разложимости кусочно-гладкой функции в ряд по собственным функциям произвольной двумерной области // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 442–445.
2. Colzani L., Crespi A., Travaglini G., Vignati M. Equiconvergence theorems for Fourier–Bessel expansions with applications to the harmonic analysis of radial functions in Euclidean and noneuclidean spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 338. P. 43–55.
3. Brandolini L., Colzani L. Localization and convergence of eigenfunction expansions // J. of Fourier Anal. and Appl. 1999. V. 5. № 5. P. 431–447.
4. Taylor M. Pointwise Fourier inversion on tori and other compact manifolds // J. of Fourier Anal. and Appl. 1999. V. 5. № 5. P. 449–463.
5. Alimov S.A. On the eigenfunction expansion of a piecewise smooth function // J. of Fourier Anal. and Appl. 2003. V. 9. № 1. P. 67–76.
6. Alimov S.A. Sets of uniform convergence of Fourier expansions of piecewise smooth functions // J. of Fourier Anal. and Appl. 2004. V. 10. № 6. P. 635–644.
7. Ashurov R.R. On multiple Fourier series of piecewise smooth functions // Dokl. Mathematics. 2007. V. 75. № 3. P. 333–335.
8. Алимов Ш.А. О спектральных разложениях кусочно-гладких функций, зависящих от геодезического расстояния // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 820–832.
9. Маслов В.П. Свойства абсолютной сходимости многомерных рядов Фурье с точки зрения геометрии слабых разрывов разлагаемых функций // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 2. С. 275–278.
10. Alimov Sh.A., Ashurov R.R., Pulatov A.K. Multiple Fourier series and Fourier integrals // Commutative Harmonic Analysis. IV. Encyclopedia Math. Sci. V. 42. Berlin; Heidelberg, 1991. P. 1–95.
11. Pinsky M.A. Pointwise Fourier inversion in several variables // Notices Amer. Math. Soc. 1995. V. 42. № 3. P. 330–334.
12. Kahane J.-P. Le phénomène de Pinsky et la géométrie des surfaces // C.R. Acad. Sci. Paris, 1995. Sér. I. V. 321. № 8. P. 1027–1029.
13. Taylor M. Eigenfunction expansions and the Pinsky phenomenon on compact manifolds // J. of Fourier Anal. and Appl. 2001. V. 7. № 5. P. 507–522.
14. Алимов Ш.А. О гладкости средних значений функций с суммируемым спектральным разложением // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 498–508.
15. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.
16. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М., 1949.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
18. Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31. № 6. С. 27–82.
19. Алимов Ш.А., Ильин В.А. О спектральных разложениях, отвечающих произвольному неотрицательному самосопряжённому расширению оператора Лапласа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 1. С. 9–12.
20. Алимов Ш.А. О суммировании спектральных разложений методами Рисса и Абеля // Узб. мат. журн. 2011. № 4. С. 20–35.
21. Садовничий В.А. Теория операторов. М., 1979.

Национальный университет Узбекистана  
имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент,  
Ташкентский государственный технический  
университет имени И. Каримова, Узбекистан

Поступила в редакцию 10.03.2023 г.  
После доработки 10.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

# ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для неоднородных параболических систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами при ненулевых начальных условиях в ограниченных областях на плоскости с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, “клювы”. Доказаны теоремы об однозначной классической разрешимости этих задач в пространстве функций, непрерывных вместе со своими пространственными производными первого порядка в замыкании указанных областей.

DOI: 10.31857/S0374064123050059, EDN: CXQJPT

*К 95-летию Владимира Александровича Ильина*

**Введение.** Теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем общего вида с гёльдеровскими коэффициентами в пространствах  $H^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$ ,  $k \geq 2$ ,  $0 < \alpha < 1$ , в областях с гладкими боковыми границами построена в работе [1] (см. также [2, с. 706]). Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических по Петровскому (см. [3]) систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в ограниченных областях на плоскости с негладкими, вообще говоря, боковыми границами из класса Дини–Гёльдера  $H^{1/2+\omega}$ . Здесь  $\omega$  обозначает некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже).

Для случая одного параболического уравнения в статьях [4, 5] установлена однозначная разрешимость таких задач в пространстве  $H^{1, \hat{\omega}}(\bar{\Omega})$ , где  $\hat{\omega}$  – некоторый модуль непрерывности, при более сильных, по сравнению с предложенными в настоящей работе, требованиях на характер непрерывности коэффициентов этого уравнения и боковые границы области. При этом единственность решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума, а единственность решения второй начально-краевой задачи получена в [5] с помощью теоремы о знаке кривой производной. Отметим, что для систем принцип максимума, вообще говоря, не имеет места (см. [6]).

В случае параболических систем начально-краевые задачи в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами рассматривались в работах [7–9]. В [7] и [8] доказаны теоремы о существовании и единственности решения из пространства  $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$  первой начально-краевой задачи для однородной параболической системы с гёльдеровскими коэффициентами при нулевом начальном условии в ограниченной области с негладкими боковыми границами из класса Жевре  $H^{(1+\alpha)/2}$ . Кроме того, при тех же условиях на коэффициенты системы и боковые границы области в [8] доказана единственность решения из пространства  $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$  второй начально-краевой задачи. В статье [9] приводится теорема об однозначной разрешимости в пространстве  $C^0(\bar{\Omega})$  первой начально-краевой задачи для параболической системы с гёльдеровскими коэффициентами, зависящими лишь от пространственной переменной, в области с боковыми границами из класса  $H^{(1+\alpha)/2}$ .

Естественно возникает вопрос об исследовании начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в ограниченных областях с негладкими

боковыми границами из класса  $H^{1/2+\omega}$ . При таких условиях в [10] доказана теорема о существовании классического решения из пространства  $C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$  смешанной начально-краевой задачи для однородной параболической системы с нулевыми начальными условиями. Вопрос о единственности решения поставленной задачи в этой работе не рассматривался.

Основным результатом настоящего исследования являются теоремы об однозначной разрешимости в пространстве  $C^{1,0}(\overline{\Omega})$  первой и второй начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами при ненулевых начальных условиях в ограниченных плоских областях с границами из класса  $H^{1/2+\omega}$ . Аналогичные результаты в случае полуграниченных областей получены авторами в [11–13] (см. также библиографию в них).

Работа состоит из четырёх пунктов: в п. 1 приводятся необходимые определения и формулируются полученные результаты; п. 2 носит вспомогательный характер, в нём описываются необходимые нам свойства потенциала Пуассона и объёмного потенциала; в пп. 3 и 4 доказываются основные теоремы об однозначной разрешимости поставленных задач.

Основной результат работы анонсирован в статье [11].

**1. Необходимые сведения и формулировка основного результата.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $C^1(\mathbb{R})$  пространство вектор-функций  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , непрерывных и ограниченных вместе со своей первой производной  $h'$ , с нормой  $\|h; \mathbb{R}\|^1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)|$ . Пусть  $T > 0$  – фиксированное число. Через  $C[0, \tau]$ ,  $0 < \tau \leq T$ , обозначим пространство непрерывных вектор-функций  $\psi : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$  с нормой  $\|\psi; [0, \tau]\|^0 = \max_{t \in [0, \tau]} |\psi(t)|$ . Положим

$$C_0[0, \tau] = \{\psi \in C[0, \tau] : \psi(0) = 0\}.$$

Здесь и далее для числового вектора  $a$  (числовой матрицы  $A$ ) под  $|a|$  (соответственно  $|A|$ ) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Следуя [14, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой  $\omega(0) = 0$ . Говорят, что модуль непрерывности  $\omega$  удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0. \quad (1)$$

Через  $\mathcal{D}$  обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1).

Пусть  $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)\}$  и  $\Omega \subset D$  – некоторая область. Через  $C^0(\overline{\Omega})$  обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$  с нормой  $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x, t)|$ . Положим  $C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega})\}$ ,  $\|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u; \Omega\|^0$ ,  $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x, 0) = 0, l = 0, 1\}$ .

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области  $\Omega$  понимаем их предельные значения “изнутри”  $\Omega$ .

Пусть  $\omega$  – некоторый модуль непрерывности. Введём пространства

$$H^{1/2+\omega}[0, T] = \left\{ \psi \in C[0, T] : \|\psi; [0, T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{\substack{t, t+\Delta t \in (0, T) \\ \Delta t \neq 0}} \frac{|\Delta_t \psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2})} < \infty \right\},$$

$$H_0^{1/2+\omega}[0, T] = \{\psi \in H^{1/2+\omega}[0, T] : \psi(0) = 0\},$$

$$H^\omega(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) : \|u; \Omega\|^\omega = \|u; \Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega \\ (\Delta x)^2 + |\Delta t| \neq 0}} \frac{|\Delta_{x,t} u(x, t)|}{\omega(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})} < \infty \right\},$$

где  $\Delta_t \psi(t) = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$ ,  $\Delta_{x,t} u(x, t) = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)$ .

Пусть

$$\partial^{1/2} \psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2} \psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка  $1/2$ . Следуя [7], введём пространство

$$C_0^{1/2}[0, T] = \{\psi \in C_0[0, T] : \partial^{1/2} \psi \in C_0[0, T], \quad \|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\partial^{1/2} \psi; [0, T]\|^0 < \infty\}.$$

**Замечание 1.** Если  $\psi \in H_0^{1/2+\omega}[0, T]$ ,  $\omega \in \mathcal{D}$ , то  $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$  (см. [15]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [7]).

В полосе  $D$  выделим область  $\Omega = \{(x, t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$  с боковыми границами  $\Sigma_s = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g_s(t)\}$ , где функции  $g_s$ ,  $s = 1, 2$ , удовлетворяют условиям

$$g_s \in H^{1/2+\omega_1}[0, T], \quad \omega_1 \in \mathcal{D}, \quad (2)$$

и для некоторой постоянной  $d > 0$

$$g_2(t) - g_1(t) \geq d, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Рассмотрим в  $D$  равномерно параболический оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l(x, t) \partial_x^l u, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \quad m \in \mathbb{N},$$

где  $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$ ,  $l = 0, 1, 2$ , –  $m \times m$ -матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в  $\bar{D}$  и удовлетворяющие условиям:

(а) собственные числа  $\mu_r$ ,  $r = \overline{1, m}$ , матрицы  $A_2$  подчиняются неравенствам  $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$  для некоторого  $\delta > 0$  и всех  $(x, t) \in \bar{D}$ ;

(б)  $a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D})$ , где  $\omega_0$  – модуль непрерывности такой, что

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

Известно (см. [16]), что при выполнении условий (а) и (б) у системы  $Lu = 0$  существует фундаментальная матрица решений  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ ,  $(x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times \bar{D}$ ,  $t > \tau$ .

Рассмотрим задачу о нахождении вектор-функции  $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ , являющейся классическим решением системы

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (4)$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x, 0) = h(x), \quad g_1(0) \leq x \leq g_2(0), \quad (5)$$

и одной из двух пар граничных условий:

$$\partial_x u(g_s(t), t) = \theta_s(t), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2, \quad (6)$$

или

$$u(g_s(t), t) = \psi_s(t), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2. \quad (7)$$

Основным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и (3). Тогда для любых функций  $f \in C^0(\overline{D})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R})$  и  $\theta_s \in C[0, T]$ ,  $s = 1, 2$ , с условиями

$$\sup_{\substack{(x+\Delta x, t), (x, t) \in D \\ \Delta x \neq 0}} \frac{|\Delta_x f(x, t)|}{\omega(|\Delta x|)} < \infty,$$

где  $\omega \in \mathcal{D}$  – некоторый модуль непрерывности, и

$$\theta_s(0) = h'(g_s(0)), \quad s = 1, 2, \quad (8)$$

существует единственное решение  $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$  задачи (4)–(6). Это решение имеет вид суммы векторных параболических потенциалов

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) h(\xi) d\xi + \sum_{s=1}^2 \int_0^t \Gamma(x, t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau \equiv \\ &\equiv Vf(x, t) + Ph(x, t) + \sum_{s=1}^2 (U\varphi)_s(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$  – единственное в  $C[0, T] \times C[0, T]$  решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры II рода

$$\begin{aligned} &(-1)^k (2A_2)^{-1}(g_k(t), t) + \sum_{s=1}^2 \int_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t), t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau = \\ &= \theta_k(t) - \partial_x Vf(g_k(t), t) - \partial_x Ph(g_k(t), t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2; \end{aligned}$$

и справедлива оценка

$$\|u; \Omega\|^{1,0} \leq C\{\|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^2 \|\theta_s; [0, T]\|^0\}. \quad (10)$$

Здесь и далее через  $C$  обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел  $T$ ,  $m$ ,  $d$ , коэффициентов оператора  $L$  и модуля непрерывности  $\omega_1$ , конкретный вид которых для нас не важен.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и (3). Тогда для любой  $f$ , удовлетворяющей условиям теоремы 1, и любых  $h \in C^1(\mathbb{R})$  и  $\psi_s$ ,  $s = 1, 2$ , с условиями

$$\psi_s - h(g_s(0)) \in C^{1/2}_0[0, T], \quad s = 1, 2, \quad (11)$$

существует единственное решение  $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$  задачи (4), (5), (7). Это решение имеет вид (9), где  $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$  – единственное в  $C[0, T] \times C[0, T]$  решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I рода

$$\sum_{s=1}^2 \int_0^t \Gamma(g_k(t), t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau = \psi_k(t) - Vf(g_k(t), t) - Ph(g_k(t), t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2; \quad (12)$$

и справедлива оценка

$$\|u; \Omega\|^{1,0} \leq C\left\{\|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^2 \|\psi_s - h(g_s(0)); [0, T]\|^{1/2}\right\}. \quad (13)$$

**Замечание 2.** Если  $h \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\psi_s \in H^{1/2+\omega}[0, T]$ ,  $\omega \in \mathcal{D}$ ,  $s = 1, 2$ , и  $\psi_s(0) = h(g_s(0))$ , то условия теоремы 2 для вектор-функций  $h$  и  $\psi_s$  выполнены, причём

$$\|\psi_s - h(g_s(0)); [0, T]\|^{1/2} \leq C\|\psi_s; [0, T]\|^{1/2+\omega} + |h(g_s(0))|.$$

**Замечание 3** (см. [12, 17]). Если  $g_s \in H^{1/2+\omega_1}[0, T]$ ,  $s = 1, 2$ , причём модуль непрерывности  $\omega_1$  не удовлетворяет условию (1), то решения задачи (4), (5), (7) из пространства  $C^{1,0}(\overline{\Omega})$  может не существовать.

**Замечание 4** (см. [18]). Если условия (11) не выполнены, то решения задачи (4), (5), (7) из пространства  $C^{1,0}(\overline{\Omega})$  может не существовать.

**2. Свойства потенциала Пуассона и объёмного потенциала.** Приведём необходимые для дальнейшего изложения известные (см. [12, 19]) свойства объёмного потенциала  $Vf$  и потенциала Пуассона  $Ph$  (см. (9)).

Для любой функции  $f$ , удовлетворяющей условиям теоремы 1, и любой функции  $h \in C^1(\mathbb{R})$  сумма потенциалов

$$u(x, t) = Vf(x, t) + Ph(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D},$$

является единственным в  $C^{1,0}(\overline{D})$  классическим решением задачи Коши

$$Lu = f \text{ в } D, \quad u(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и имеет место оценка

$$\|u; D\|^{1,0} \leq C\{\|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1\}. \quad (14)$$

Кроме того, для любой  $f \in C^0(\overline{D})$  потенциал  $Vf$  удовлетворяет неравенствам

$$|\partial_x^l Vf(x, t)| \leq C\|f; D\|^0 t^{1-l/2}, \quad l = 0, 1,$$

$$|\Delta_t Vf(x, t)| \leq C\|f; D\|^0 |\Delta t| (1 + |\ln |\Delta t||), \quad |\Delta_t \partial_x Vf(x, t)| \leq C\|f; D\|^0 |\Delta t|^{1/2},$$

$$|\Delta_x \partial_x Vf(x, t)| \leq C\|f; D\|^0 |\Delta x| (1 + |\ln |\Delta x||), \quad (x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) \in \overline{D}. \quad (15)$$

Отсюда, в частности, следует, что для вектор-функций  $f_s(t) = Vf(g_s(t), t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $s = 1, 2$ , справедливы включения  $f_s \in C^{1/2}_0[0, T]$  и оценки  $\|f_s; [0, T]\|^{1/2} \leq C\|f; D\|^0$ .

Наконец, отметим, что, как показано в [12], для произвольной  $h \in C^1(\mathbb{R})$  вектор-функции  $Ph(g_s(t), t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $s = 1, 2$ , могут быть представлены в виде

$$Ph(g_s(t), t) = h(g_s(0)) + \hat{h}_s(t), \quad t \in [0, T],$$

где  $\hat{h}_s \in C^{1/2}_0[0, T]$ , и имеют место оценки  $\|\hat{h}_s; [0, T]\|^{1/2} \leq C\|h; \mathbb{R}\|^1$ .

**3. Доказательство теоремы 1.** Сначала докажем существование решения задачи (4)–(6). С помощью замены

$$u(x, t) = v(x, t) + Vf(x, t) + Ph(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad (16)$$

задача (4)–(6) сводится к отысканию решения следующей второй начально-краевой задачи:

$$Lv = 0 \text{ в } \Omega, \quad (17)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad g_1(0) \leq x \leq g_2(0), \quad (18)$$

$$\partial_x v(g_s(t), t) = \hat{\theta}_s(t), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2, \quad (19)$$

где

$$\hat{\theta}_s(t) = \theta_s(t) - \partial_x Vf(g_s(t), t) - \partial_x Ph(g_s(t), t), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2.$$

В силу условий (8), оценок (14), (15) и равенств (см. [12])

$$\partial_x Ph(g_s(0), 0) = h'(g_s(0)), \quad s = 1, 2,$$

справедливы включения  $\hat{\theta}_s \in C_0[0, T]$  и оценки

$$\|\hat{\theta}_s; [0, T]\|^0 \leq C\{\|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \|\theta_s; [0, T]\|^0\}, \quad s = 1, 2. \quad (20)$$

Разрешимость вспомогательной задачи (17)–(19) в пространстве  $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$  доказываем, используя метод из работы [20], где рассматривался случай полуограниченной области  $\Omega$ , а именно, решение задачи (17)–(19) ищем в виде суммы потенциалов простого слоя

$$v(x, t) = \sum_{s=1}^2 \int_0^t \Gamma(x, t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (21)$$

где вектор-плотности  $\varphi_s \in C_0[0, T]$ ,  $s = 1, 2$ , подлежат определению. Для отыскания неизвестных плотностей  $\varphi_s$ ,  $s = 1, 2$ , подставляем (21) в граничные условия (19), откуда получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерры II рода

$$(-1)^k (2A_2)^{-1} (g_k(t), t) + \sum_{s=1}^2 \int_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t), t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau = \hat{\theta}_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2. \quad (22)$$

Методом из [20] доказывается, что эта система имеет единственное в  $C[0, T] \times C[0, T]$  решение  $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$ , и в силу (20) справедливы оценки

$$\|\varphi_s; [0, T]\|^0 \leq C \left\{ \|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^2 \|\theta_s; [0, T]\|^0 \right\}, \quad s = 1, 2. \quad (23)$$

Подставив найденное решение  $(\varphi_1, \varphi_2)$  системы (22) в (21), получим решение задачи (17)–(19). Как следует из результатов статьи [16], это решение принадлежит пространству  $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$  и в силу (23) удовлетворяет оценке

$$\|v; \Omega\|^{1,0} \leq C \left\{ \|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^2 \|\theta_s; [0, T]\|^0 \right\}.$$

Возвращаясь к вектор-функции  $u$  по формуле (16), отсюда, в силу свойств объёмного потенциала и потенциала Пуассона (см. п. 2), получаем решение задачи (4)–(6) из пространства  $C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$ , для которого справедливы представление (9) и оценка (10).

Теперь докажем единственность решения задачи (4)–(6). Пусть  $u \in C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$  – решение этой задачи при

$$f(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta_s(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2.$$

Для произвольного  $\tau \in (0, T]$  обозначим

$$D_\tau = \{(x, t) \in D : t \in (0, \tau)\}, \quad \Omega_\tau = \{(x, t) \in \Omega : t \in (0, \tau)\}.$$

Достаточно показать, что  $u \equiv 0$  в  $\Omega_{t_0}$ , где  $t_0 \in (0, T]$  – некоторое достаточно малое число, которое будет выбрано ниже.



Пользуясь условием (2), фиксируем достаточно малое число  $\tau_0 \in (0, T]$  такое, что справедливы неравенства

$$|g_s(t) - g_s(0)| \leq \tau_0^{1/2} \omega_1(\tau_0^{1/2}) \leq d/9, \quad t \in [0, \tau_0], \quad s = 1, 2,$$

где  $d > 0$  – постоянная из условия (3), из которых следует оценка

$$|g_2(t_2) - g_1(t_1)| \geq 8d/9, \quad t_i \in [0, \tau_0], \quad i = 1, 2.$$

Затем фиксируем произвольное  $\tau \in (0, \tau_0]$  и определяем продолжение  $u_\tau$  вектор-функции  $u$  на всю полосу  $\overline{D}_\tau$  по формулам

$$u_\tau(x, t) = u(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_\tau, \quad u_\tau(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau \setminus \overline{\Omega}_\tau.$$

Рассмотрим функции  $\zeta_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ , удовлетворяющие условиям

$$0 \leq \zeta_i(x) \leq 1, \quad \left| \frac{d^l \zeta_i}{dx^l}(x) \right| \leq C d^{-l}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3, \quad (24)$$

и, кроме того,

$$\zeta_i(x) = 1, \quad x \in [g_i(0) - d/9, g_i(0) + d/9], \quad \zeta_i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (g_i(0) - d/3, g_i(0) + d/3),$$

$$\zeta_i(x) > 0, \quad x \in (g_i(0) - d/3, g_i(0) + d/3),$$

если  $i = 1, 2$ , и

$$\zeta_3(x) = 1, \quad x \in [g_1(0) + d/3, g_2(0) - d/3], \quad \zeta_3(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (g_1(0) + d/9, g_2(0) - d/9),$$

$$\zeta_3(x) > 0, \quad x \in (g_1(0) + d/9, g_2(0) - d/9).$$

Построим “разложение единицы”:

$$\hat{\zeta}_i(x) = \zeta_i(x) \left( \sum_{j=1}^3 \zeta_j(x) \right)^{-1}, \quad x \in (g_1(0) - d/3, g_2(0) + d/3), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\hat{\zeta}_1(x) = 1, \quad x \leq g_1(0) - d/3, \quad \hat{\zeta}_1(x) = 0, \quad x \geq g_2(0) + d/3,$$

$$\hat{\zeta}_2(x) = 1, \quad x \geq g_2(0) + d/3, \quad \hat{\zeta}_2(x) = 0, \quad x \leq g_1(0) - d/3,$$

$$\hat{\zeta}_3(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (g_1(0) - d/3, g_2(0) + d/3).$$

Следуя методу из [2, с. 342], положим

$$u_{\tau,i}(x, t) = u_\tau(x, t) \hat{\zeta}_i(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что  $\overline{\Omega}_\tau \subset (g_1(0) - d/9, g_2(0) + d/9) \times (0, \tau)$ , справедливы равенство

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^3 u_{i,\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_\tau, \quad (25)$$

и включения

$$u_{\tau,i} \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega}_\tau^{(i)}), \quad i = 1, 2, \quad u_{\tau,3} \in C_0^{1,0}(\overline{D}_\tau), \quad \tau \in (0, \tau_0],$$

где  $\Omega_\tau^{(1)} = \{(x, t) \in D_\tau : x > g_1(t)\}$ ,  $\Omega_\tau^{(2)} = \{(x, t) \in D_\tau : x < g_2(t)\}$ .

Сначала рассмотрим функцию  $u_{\tau,3}$ , являющуюся решением задачи Коши

$$Lu = f_{\tau,3} \text{ в } D_\tau, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$f_{\tau,3}(x, t) = -A_2(x, t) \left[ 2\partial_x u(x, t) \frac{d\hat{\zeta}_3}{dx}(x) + u(x, t) \frac{d^2\hat{\zeta}_3}{dx^2}(x) \right] - A_1(x, t) u(x, t) \frac{d\hat{\zeta}_3}{dx}(x), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_\tau,$$

$$f_{\tau,3}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau \setminus \overline{\Omega}_\tau.$$

Отметим также, что

$$f_{\tau,3}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [g_1(0) + d/9, g_2(0) - d/9], \quad t \in [0, \tau]. \quad (26)$$

Обозначим

$$\Pi_\tau = [g_1(0) + d/9, g_2(0) - d/9] \times [0, \tau].$$

Так как  $\Pi_\tau \subset \Omega_\tau$ , то  $\max_{(x,t) \in \Pi_\tau} |\partial_x^2 u(x, t)| < \infty$ . Из равенства (26) в силу (24) следует, что

$$f_{\tau,3} \in C^0(\overline{D}_\tau), \quad \|f_{\tau,3}; D_\tau\|^0 \leq C \|u; \Omega_\tau\|^{1,0}. \quad (27)$$

Заметим, что  $f_{\tau,3}$  удовлетворяет условию Дини, а именно

$$|\Delta_x f_{\tau,3}(x, t)| \leq C \{ \max_{(x,t) \in \Pi_\tau} |\partial_x^2 u(x, t)| + \|u; \Omega\|^{1,0} \} |\Delta x| + \|u; \Omega\|^{1,0} \omega_0(|\Delta x|), \quad (x, t), (x + \Delta x, t) \in \overline{D}_\tau.$$

Поэтому в силу единственности решения задачи Коши (см. [19]) функция  $u_{\tau,3}$  может быть представлена в виде объёмного потенциала

$$u_{\tau,3}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f_{\tau,3}(\xi, \tau) d\xi, \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau.$$

Отсюда, используя (15) и (27), получаем оценку

$$\|u_{\tau,3}; D_\tau\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega_\tau\|^{1,0} \tau^{1/2}, \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau,$$

в силу которой для достаточно малого числа  $\tau_3 \in (0, \tau_0]$  справедливо неравенство

$$\|u_{\tau,3}; D_\tau\|^{1,0} \leq \frac{1}{6} \|u; \Omega_\tau\|^{1,0}, \quad \text{если } \tau \in (0, \tau_3]. \quad (28)$$

Далее для произвольно фиксированного  $\tau \in (0, \tau_3]$  рассмотрим вектор-функцию  $u_{\tau,1}$ . Она является решением второй начально-краевой задачи в полуограниченной области  $\Omega_\tau^{(1)}$  из пространства  $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}_\tau^{(1)})$ :

$$Lu = f_{\tau,1} \text{ в } \Omega_\tau^{(1)}, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq g_1(0), \quad (29)$$

$$\partial_x u(g_1(t), t) = 0, \quad t \in [0, \tau]. \quad (30)$$

В силу единственности решения задачи (29), (30) (см. [13]), результатов [20] о построении решения второй начально-краевой задачи в полуограниченной области в виде потенциала простого

слоя и сведений об объёмном потенциале из п. 2 делаем вывод, что  $u_{\tau,1}$  может быть представлена в виде суммы потенциалов

$$u_{\tau,1}(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f_{\tau,1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^t \Gamma(x, t; g_1(\tau), \tau) \varphi_{\tau,1}(\tau) d\tau \equiv \\ \equiv V f_{\tau,1}(x, t) + U \varphi_{\tau,1}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{\tau}^{(1)}. \quad (31)$$

Здесь вектор-плотность  $\varphi_{\tau,1} \in C[0, \tau]$  является единственным в  $C[0, \tau]$  решением граничного интегрального уравнения Вольтерры II рода (см. [20])

$$-(2A_2(g_1(t), t))^{-1} \varphi_{\tau,1}(t) + \int_0^t \partial_x \Gamma(g_1(t), t; g_1(\tau), \tau) \varphi_{\tau,1}(\tau) d\tau = \theta_{\tau,1}(t),$$

где

$$\theta_{\tau,1}(t) = -\partial_x V f_{\tau,1}(g_1(t), t), \quad t \in [0, \tau]. \quad (32)$$

Оценим потенциалы из представления (31). Используя (15) и равенство (32), получаем

$$\|V f_{\tau,1}; D_{\tau}\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0} \tau^{1/2}, \quad \|\theta_{\tau,1}; [0, \tau]\|^0 \leq C \|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0} \tau^{1/2} \quad (33)$$

и, следовательно,

$$\|U \varphi_{\tau,1}; \Omega_{\tau}^{(1)}\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0} \tau^{1/2}. \quad (34)$$

Фиксируя достаточно малое  $\tau_1 \in (0, \tau_3]$ , из представления (31) и оценок (33), (34) заключаем, что

$$\|u_{\tau,1}; \Omega_{\tau}^{(1)}\|^{1,0} \leq \frac{1}{6} \|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0}, \quad \text{если } \tau \in (0, \tau_1]. \quad (35)$$

Аналогично доказывается, что при достаточно малом  $\tau_2 \in (0, \tau_1]$  имеет место неравенство

$$\|u_{\tau,2}; \Omega_{\tau}^{(2)}\|^{1,0} \leq \frac{1}{6} \|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0}, \quad \text{если } \tau \in (0, \tau_2]. \quad (36)$$

Положив  $t_0 = \tau_2$ , из равенства (25) и оценок (28), (35), (36) получим окончательное неравенство

$$\|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0} \leq \frac{1}{2} \|u; \Omega_{\tau}\|^{1,0}, \quad \tau \in (0, t_0],$$

из которого следует, что  $u \equiv 0$  в  $\overline{\Omega}_{t_0}$ . Теорема 1 доказана.

**4. Доказательство теоремы 2.** Сначала докажем существование решения задачи (4), (5), (7). С помощью замены (16) задача (4), (5), (7) сводится к первой начально-краевой задаче для однородной системы с нулевым начальным условием. Разрешимость последней и представление её решения в виде

$$v(x, t) = \sum_{s=1}^2 \int_0^t \Gamma(x, t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{\Omega},$$

проводится методами из работ [7] и [21]. Здесь  $(\varphi_1, \varphi_2) \in C[0, T] \times C[0, T]$  является единственным в пространстве  $C[0, T] \times C[0, T]$  решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I рода (12). Затем, возвращаясь к вектор-функции  $u$  по формуле (16), учитывая свойства объёмного потенциала и потенциала Пуассона из п. 2, получаем решение задачи (4), (5), (7) из пространства  $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ , для которого справедливы представление (9) и оценка (13).

Докажем единственность решения задачи (4), (5), (7). Пусть  $u \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega})$  – решение этой задачи при

$$f(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \psi_s(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2.$$

Тогда  $u$  является решением второй начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \text{ в } \Omega, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad \partial_x v(g_s(t), t) = \hat{\theta}_s(t), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2,$$

где  $\hat{\theta}_s(t) = \partial_x u(g_s(t), t)$ ,  $\hat{\theta}_s \in C_0[0, T]$ . Из теоремы 1 следует, что вектор-функция  $u$  может быть представлена в виде суммы потенциалов простого слоя (21), где  $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0[0, T] \times C_0[0, T]$  – единственное в  $C[0, T] \times C[0, T]$  решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры II рода

$$(-1)^k (2A_2)^{-1}(g_k(t), t) + \sum_{s=1}^2 \int_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t), t; g_s(\tau), \tau) \varphi_s(\tau) d\tau = \hat{\theta}_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2.$$

Подставив вектор-функцию (21) в нулевые граничные условия (7), получим, что  $(\varphi_1, \varphi_2)$  также является решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I рода (12) с нулевыми правыми частями. В силу единственности в  $C[0, T] \times C[0, T]$  решения системы (12) имеем, что

$$\varphi_s(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad s = 1, 2.$$

Подставляя найденное решение  $(\varphi_1, \varphi_2)$  в представление (21), приходим к выводу, что  $u \equiv 0$  в  $\overline{\Omega}$ . Теорема 2 доказана.

**Замечание 5.** Аналогично устанавливается теорема единственности решения смешанной задачи (см. [11]), когда на одной из боковых границ области задаётся граничное условие I рода, а на другой – II рода. Существование решения смешанной задачи для однородной системы с нулевым начальным условием доказано в статье [10], с использованием сведений п. 2 настоящей работы получаем разрешимость этой задачи и в случае неоднородной системы с ненулевым начальным условием.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. Петровский И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
4. Камынин Л.И. О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
5. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
6. Мазья В.Г., Кресин Г.И. О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
7. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
8. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
9. Коненков А.Н. Классические решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503. С. 67–69.

10. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Mixed problems for plane parabolic systems and boundary integral equations // J. of Math. Sci. 2022. V. 260. № 4. P. 418–433.
11. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503. С. 26–29.
12. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
13. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.
14. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
15. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
16. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294-B92.
17. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
18. *Сахаров С.И.* Контактная задача для параболических систем второго порядка в полосе с негладкой кривой раздела сред // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 496–506.
19. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
20. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
21. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.  
После доработки 16.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

## МЕТОД РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН

© 2023 г. А. В. Боровских

Представлен обзор развития метода распространяющихся волн для одномерных сред. Приведены основные результаты и изменения в постановках задачи представления решений линейных систем уравнений с частными производными через “распространяющиеся волны” (а точнее – через систему уравнений переноса волн). Показано, что по мере усложнения исследования систем задача представления решения методом распространяющихся волн оказывается применимой не только для гиперболических систем, но и для систем, содержащих (даже неявно) и параболические, и эллиптические составляющие, и приближается тем самым к общей задаче декомпозиции произвольной системы линейных уравнений в систему уравнений первого порядка с главной частью канонического типа и с подчинённой ей линейной частью.

DOI: 10.31857/S0374064123050060, EDN: CXQKDF

К 95-летию Владимира Александровича Ильина

**Введение.** Данная работа носит обзорный характер. В ней на основе результатов, полученных автором и его учениками, показана эволюция *метода распространяющихся волн* и сформулировано сложившееся к настоящему времени представление об этом методе.

Тематика эта, по крайней мере на первых этапах её развития, оказалась близкой к исследованиям Владимира Александровича Ильина, автор был постоянным участником и регулярно делал доклады на его научном семинаре. Связь с семинаром была не формальной: первые результаты в этой области – формула распространяющихся волн и её приложения – были получены в 2002–2004 гг. [1–3], что совпало по времени с интересом В.А. Ильина, его коллег и учеников [4–9] к задачам граничной управляемости для волнового уравнения и его обобщений (см., например, [10]). Полученное автором решение задачи управляемости для неоднородной струны с помощью формулы распространяющихся волн оказалось очень близким к этому направлению [11–13].

Со временем, однако, стало очевидно, что формула распространяющихся волн, хотя и выражает суть процесса, является слишком громоздкой и гораздо эффективнее пользоваться вместо неё системой *уравнений переноса волн*, позволяющей решать самые разнообразные задачи (классические граничные, характеристические, полухарактеристические и др.). Уже в этой форме метод стал распространяться на другие задачи, а именно на волновые уравнения с памятью [14–16].

Самым существенным и неочевидным в методе распространяющихся волн было то, что решения системы переноса волн не являлись решениями исходного уравнения. Они давали решение только *в сумме*. Именно это отличало его от достаточно известного *метода функционально-инвариантных решений* [17–22], когда функция типа волны искалась среди решений исходного уравнения.

**1. Формула распространяющихся волн для неоднородной струны.** Уравнение неоднородной струны, хотя и записывается в общем виде как

$$a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

обычно приводится к форме

$$k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s \quad (2)$$

с помощью замены  $s = \int_0^x \sqrt{a(\sigma)/b(\sigma)} d\sigma$  пространственной переменной (при этом  $k^2(s) = a(x)b(x)|_{x=x(s)}$ ). Преимущество этой формы в том, что характеристиками оказываются прямые  $s \pm t = \text{const}$ . При указанной замене пространственная ось параметризуется так, что расстояние между точками оказывается равным времени распространения возмущения.

Нам же будет удобнее использовать эквивалентное (2) уравнение

$$z_{tt} = z_{ss} - [\phi'(s) + \phi^2(s)]z, \quad (3)$$

получаемое из (2) заменой  $z(t, s) = \sqrt{k(s)}u(t, s)$  (при этом  $\phi(s) = k'(s)/2k(s)$ ), которое также можно считать канонической формой уравнения (1).

Все результаты в этом пункте формулируются в предположениях, при которых решения уравнений являются классическими. Это, во первых, предположение о дважды непрерывной дифференцируемости и положительности  $k(s)$  (или, соответственно, о непрерывной дифференцируемости  $\phi(s)$ ), которое далее повторяться не будет. Во-вторых – предположение о соответствующей гладкости начальных или граничных данных. На самом деле эти предположения необходимы только лишь для упрощения и могут быть естественным образом ослаблены, но для этого нужен переход на язык обобщённых решений того или иного класса.

Формула распространяющихся волн для уравнения (2) имеет вид [2, 3]

$$\begin{aligned} u(t, s) = & \sqrt{\frac{k(s-t)}{k(s)}}V(s-t) + \sqrt{\frac{k(s+t)}{k(s)}}W(s+t) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right) dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)J\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}W(y)\tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right) dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \sqrt{\frac{k(y)}{k(s)}}V(y)\tilde{J}\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

а для уравнения (3) формула решения получается удалением радикалов, содержащих  $k(s)$  (см. также [2, 3]):

$$\begin{aligned} z(t, s) = & f(s-t) + g(s+t) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} f(y)J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right) dy - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} g(y)J\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} g(y)\tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right) dy - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} f(y)\tilde{J}\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $V(\cdot)$  и  $W(\cdot)$  ( $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  соответственно) – две произвольные (достаточно гладкие) функции, играющие ту же роль, что и  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  в классической формуле  $u(x, t) = f(x-t) + g(x+t)$  для волнового уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  в однородной среде. Они связаны с начальными условиями Коши  $u(0, s) = u_0(s)$ ,  $u'_t(0, s) = u_1(s)$  соотношениями

$$V(s) + W(s) = u_0(s), \quad -[k(s)V(s)]' + [k(s)W(s)]' = k(s)u_1(s)$$

в случае уравнения (2) и равенствами

$$f(s) + g(s) = z_0(s), \quad -f(s)' + g(s)' = z_1(s) \quad (6)$$

в случае уравнения (3). Волны определяются с точностью до добавления к одной функции и одновременного вычитания из другой аддитивного слагаемого  $C/k(s)$  в случае уравнения (2) и константы в случае уравнения (3), не влияющих на значения решений (4) и (5) соответственно.

Ядра  $J(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $\tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma)$  определяются из системы интегральных уравнений Вольтерры (интегрирование происходит только по первому и второму аргументам, так что  $\gamma$  здесь присутствует как параметр)

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = - \int_{\alpha}^{\gamma} \phi(\sigma - \beta) \tilde{J}(\sigma, \beta, \gamma) d\sigma, \quad \tilde{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \phi(\alpha) + \int_{\beta}^0 \phi(\alpha - \tau) J(\alpha, \tau, \gamma) d\tau. \quad (7)$$

Вычисление коэффициентов переноса  $J$  и  $\tilde{J}$  из (7) методом последовательных приближений даёт их представление в виде рядов (сходящихся равномерно на каждом компакте)

$$J = J_2 + J_4 + \dots + J_{2n} + \dots, \quad \tilde{J} = J_1 + J_3 + \dots + J_{2n+1} + \dots,$$

в которых слагаемое  $J_m$  оказывается коэффициентом переноса той части исходной волны, которая испытала точно  $m$  отражений (см. [5]). Поэтому  $J$  есть коэффициент переноса волн, испытавших чётное число отражений, а  $\tilde{J}$  – коэффициент переноса волн, испытавших нечётное число отражений.

Сама формула (7), по существу, есть формула итерирования отражений: коэффициент  $\phi(s)$  есть инфинитезимальный аналог коэффициента отражения от границы раздела двух сред (в случае кусочно-постоянной  $k(\cdot)$  в (2) коэффициент отражения от  $i$ -й точки разрыва равен  $(k_{i+1} - k_i)/(k_{i+1} + k_i)$ ). Дальнейшее изложение мы будем вести в терминах уравнения (3), имея в виду, что в термины уравнения (2) он переносится переобозначениями.

Прежде всего, нетрудно заметить, что все слагаемые в (5) разбиваются на две группы: у одних в аргументах функций стоит  $s - t$ , а у других –  $s + t$ . Если обозначим их соответственно через  $z^-(t, s)$  и  $z^+(t, s)$ , то получим представление решения уравнения (3) в виде

$$z(t, s) = z^-(t, s) + z^+(t, s), \quad (8)$$

где функции

$$\begin{aligned} z^-(t, s) &= f(s - t) + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} f(y) J\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} g(y) \tilde{J}\left(\frac{s-t+y}{2}, \frac{s-t-y}{2}, s\right) dy, \\ z^+(t, s) &= g(s + t) - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} g(y) J\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} f(y) \tilde{J}\left(\frac{s+t+y}{2}, \frac{s+t-y}{2}, s\right) dy \end{aligned}$$

оказываются решением уравнений переноса волн

$$z_t^- + z_s^- = \phi(s) z^+, \quad z_t^+ - z_s^+ = -\phi(s) z^-. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что для любого решения (9) сумма (8) является решением уравнения (3).



Собственно говоря, метод распространяющихся волн и состоит в переходе от уравнения (3) (или какого-то более общего уравнения) к системе (9) (или аналогичной ей).

**2. Формула прохождения волны через узел сети.** Для того чтобы сделать понятной общую постановку проблемы, нам понадобится некоторое историческое отступление.

Поводом для стартовой постановки задачи оказалась формула прохождения волны через узел сети, полученная F. Ali Mehmeti в [23]. Автор тогда работал в Воронеже в научной школе Ю.В. Покорного, которая занималась исследованием уравнений на геометрических графах (пространственных сетях) [24]. В основном тогда разбирались со спектральными свойствами типа теорем Штурма (см., например, [25]) и только-только начинали интересоваться эволюционными задачами на сетях.

Результат F. Ali Mehmeti был следующий: если к узлу сети примыкает  $n$  одинаковых ребер, на которых задано одно и то же уравнение  $u_{tt} = u_{xx}$  (и поэтому на каждом ребре можно пользоваться классической формулой распространяющихся волн), и по одному из них бежит волна (возмущение типа  $u(t, x) = f(x + t)$  с ограниченным носителем), то после прохождения этой волны через узел она отразится с коэффициентом  $-1 + 2/n$  и пройдет на все остальные ребра с коэффициентом  $2/n$ .

Естественно возник вопрос: а если струны разные? Оказалось, что результат будет почти тот же самый: волна отразится с коэффициентом  $-1 + \theta$ , а на остальные ребра пройдет с одинаковым (что удивительно!) коэффициентом  $\theta$ , который выражается через скорости распространения волн по каждому ребру и коэффициенты условий согласования в узле. Более точно, если на  $i$ -м ребре задано уравнение  $u_{tt}^i = a_i^2 u_{xx}^i$ , а условия согласования в узле (можно считать, что ему отвечает  $x = 0$ ) имеют вид  $u^i(t, 0) = u^j(t, 0)$  (условие непрерывности) и  $\sum_{i=0}^n \kappa_i(a_i u_x^i)(t, 0+) = 0$  (условие “гладкости”; “0+” означает, что производные считаются в направлении от узла), то если ребро, по которому идет исходная волна, считается нулевым, имеет место формула

$$\theta = 2\kappa_0 \left( \sum_{i=0}^n \kappa_i \right)^{-1}. \quad (10)$$

Доказательство этой формулы элементарное. Достаточно для каждого отдельно взятого ребра рассмотреть решения, отвечающие условию закреплённого конца ( $u(t, 0) = 0$ ):

$$u_-^i(t, x) = f(t + x/a_i) - f(t - x/a_i),$$

и решения, отвечающие условию свободного конца ( $u_x(t, 0) = 0$ ):

$$u_+^i(t, x) = f(t + x/a_i) + f(t - x/a_i),$$

скомбинировать из них  $n + 1$  решений уже на всём пучке: одно “чётное”

$$u_0(t, x) = \{u_0^i(t, x)\}_{i=0}^n, \quad u_0^i(t, x) = \begin{cases} f(t + x/a_0) + f(t - x/a_0), & i = 0, \\ f(t + x/a_i) + f(t - x/a_i), & i \neq 0, \end{cases}$$

и  $n$  “нечётных” ( $j = \overline{1, n}$ ):

$$u_j(t, x) = \{u_j^i(t, x)\}_{i=0}^n, \quad u_j^i(t, x) = \begin{cases} \kappa_j[f(t + x/a_0) - f(t - x/a_0)], & i = 0, \\ \kappa_0[f(t + x/a_j) - f(t - x/a_j)], & i = j, \\ 0, & i \neq 0, j, \end{cases}$$

удовлетворяющих всем условиям согласования в узле, а затем уже из этих функций построить такую комбинацию, чтобы на нулевом ребре функция  $f(t + x/a_i)$  оказалась с коэффициентом, равным единице, а на остальных – нулю.

Для этой комбинации до прохождения волны через узел решение  $u(t, x) = \{u^i(t, x)\}_{i=0}^n$  будет равно

$$u^0(t, x) = f(t + x/a_0), \quad u^i(t, x) = 0, \quad i \neq 0,$$

а после прохождения волны

$$u^0(t, x) = (-1 + \theta)f(t - x/a_0), \quad u^i(t, x) = \theta f(t - x/a_i), \quad i \neq 0, \quad (11)$$

где  $\theta$  определяется формулой (10).

С помощью формул (10), (11) впоследствии в работе [26] был получен аналог формулы распространяющихся волн для уравнения на графе (правда, для случая однородных рёбер), введено естественное понятие *эйконала* и описан процесс многократного расщепления траекторий исходного волнового импульса с течением времени (позднее в статьях [27, 28] М.И. Белишев очень удачно назвал эту совокупность путей “гидрой”).

**3. Метод распространяющихся волн.** Формулы (10), (11) послужили поводом для простых, в общем-то, вопросов. Во-первых, что будет, если в узле стыкуется только два ребра, т.е. мы имеем дело с одномерным уравнением с кусочно-постоянными коэффициентами? Во-вторых, можно ли построить аналог формулы распространяющихся волн для кусочно-однородной среды? И, в-третьих, можно ли от кусочно-однородной среды перейти каким-то предельным переходом к неоднородной общего типа?

И если ответ на первый вопрос оказался хорошо известным – это формулы Баранова–Кюнеца [29], ответ на второй присутствовал только в рамках приближённых вычислений (где использовались только несколько первых отражений), то на третий, как оказалось, никто и не пытался отвечать, хотя представление решения уравнения  $u_{tt} = u_{xx} + V(x)u$  в виде

$$u(t, x) = f(x - t) + g(x + t) + \text{интеграл}$$

систематически использовалось, например, в теории обратных задач (см., например, [30–32]), а также для обоснования метода Фурье в случае коэффициентов, не имеющих избыточной гладкости [33].

Получить аналог формулы распространяющихся волн для кусочно-однородной среды, отталкиваясь от формулы Баранова–Кюнеца, автору удалось в работе [1] в виде суммы довольно громоздких выражений (в которой  $k$ -е слагаемое отвечало за  $k$  отражений исходной волны). И, что было большой удачей, удалось совершить предельный переход при измельчении разбиения, получив формулы (4), (7). Именно в смысле этого предельного перехода выше упоминалось, что  $J_n(\alpha, \beta, \gamma)$  отвечает за  $n$ -кратные отражения исходных волн. Таким образом, оказалось, что термины распространяющихся волн применимы не только для однородной среды, но и для любой неоднородной, по крайней мере одномерной.

Первый успех породил естественное желание использовать формулу распространяющихся волн для решения различных задач. Результаты этой работы были опубликованы в статье [3]. Там были рассмотрены классическая смешанная задача, характеристическая задача Гурса и полухарактеристическая задача (*задача Фридландера* [34]). Для примера возьмём формулу решения граничной задачи (с нулевыми, для упрощения, начальными данными и граничным значением решения при  $x = l$ , и ненулевым условием  $u(t, 0) = \nu(t)$ ).

**Теорема** [3]. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\nu(t)$  задана при  $t \geq 0$  и  $\nu(0) = \nu'(0) = 0$ . Тогда классическое решение задачи для уравнения (3) на отрезке  $[0, l]$  с условиями  $z(0, s) = z_t(0, s) \equiv 0$ ,  $z(t, 0) = \nu(t)$ ,  $z(t, l) \equiv 0$  определяется формулой

$$z(t, s) = \sum_{m=0}^{\infty} [z_0^-(t, s + 2lm) + z_0^+(t, s + 2lm)] - \sum_{m=1}^{\infty} [z_1^-(t, s - 2lm) + z_1^+(t, s - 2lm)],$$

где

$$z_0^-(t, s) = \nu(t - s) + \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) \right] d\tau,$$

$$z_0^+(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{t-s} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) \right] d\tau,$$

$$z_1^-(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{t+s} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s-t+\tau}{2}, \frac{s-t+\tau}{2}, s\right) \right] d\tau,$$

$$z_1^+(t, s) = \nu(t+s) + \frac{1}{2} \int_0^{t+s} \nu(\tau) \left[ J\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) - \tilde{J}\left(\frac{s+t-\tau}{2}, \frac{s+t-\tau}{2}, s\right) \right] d\tau,$$

а  $\nu(t)$  считается продолженной на полюсь  $t \leq 0$  тождественным нулём.

Все эти формулы доказывались по одной и той же схеме: выделялись  $z^-$  и  $z^+$ , проверялось, что они удовлетворяют системе (9) и заданным в задаче данным. На этом пути была передоказана формула среднего значения Е.И. Моисеева, В.В. Тихомирова и Е.А. Козлова [35], установлена связь формулы распространяющихся волн с функцией Римана [36] (при этом оказалось, что функция Римана через волны выражается, а наоборот – нет, так что волны оказываются более “фундаментальным” конструктом) и получен ряд других формул.

Итогом стало понимание, что в методе распространяющихся волн работают в основном не интегралы (4), (5) и их ядра, а именно система (9), и что этот метод можно распространить и на другие классы уравнений.

**4. Формулировка проблемы.** Получение формулы распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды стало поводом для постановки достаточно принципиального вопроса.

Для решения простейшего уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  есть три формы представления:

- 1) формула распространяющихся волн  $u = f(x-t) + g(x+t)$ ;
- 2) формула Д’Аламбера

$$u = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds,$$

где  $u_0$  и  $u_1$  – начальные данные;

- 3) разложение в ряд Фурье

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \pi n x (A_n \cos \pi n t + B_n \sin \pi n t)$$

(в случае отрезка  $[0,1]$  и условий Дирихле).

И если для третьей формы представления обобщения выведены на предельно абстрактный уровень – метод Фурье разработан для произвольных операторов и в совершенно разнообразных пространствах, для второй формы обобщения также выведены на предельно абстрактный уровень – это фактически теория полугрупп (для уравнений второго порядка см. [37]), то для первой формы представления – формулы распространяющихся волн – обобщений не было не только для многомерного, но и для одномерного случая.

Неестественность такого положения вещей можно подчеркнуть тем фактом, что на самом деле даже для уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  третья форма представления применима только для областей  $(t, x)$  прямоугольной формы, а вторая – только для случая, когда  $x$  лежит на оси (с модификациями для случая отрезка), а для любых других типов краевых или начально-краевых задач (например, с подвижной границей) мы обращаемся именно к формуле  $u = f(x-t) + g(x+t)$ . Поэтому с точки зрения приложений именно формула распространяющихся волн является наиболее востребованной в различных задачах.

Таким образом, отсутствие систематически разработанного метода распространяющихся волн не только для многомерного, но и для одномерного случая – довольно большая лакуна в теории дифференциальных уравнений. Как исправить эту ситуацию?

Формулы (4)–(9) подсказывают нам естественную постановку задачи, по крайней мере в одномерном (по пространственной переменной) случае. Пусть  $Lu = 0$  – система линейных

уравнений с частными производными от двух переменных  $(t, x)$ ;  $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ . Пусть эта система гиперболическая (ниже мы покажем, что это, на самом деле, не принципиально), имеющая, для упрощения, различные характеристики  $dx/dt = q^i(t, x)$ . Метод распространяющихся волн для системы  $Lu = 0$  состоит в использовании представления общего решения этой системы через общее решение системы

$$z_t^i + q^i z_x^i = C_j^i(t, x) z^j, \quad z_t + Q z_x = C z \quad (12)$$

в виде

$$u^i = A_j^i(t, x) z^j, \quad u = Az, \quad (13)$$

где  $A$  и  $C$  – некоторые матрицы, определяемые из условия, что решение (12), подставленное в (13), должно давать общее решение исходной системы  $Lu = 0$ .

Фактически речь идет о разложении сложной системы уравнений с частными производными в систему уравнений переноса волн.

В многомерном случае можно заметить, что и уравнения (9), и уравнения (12), и закон прохождения волны через узел (11) аналогичны хорошо известному уравнению переноса излучения (см., например, [38, 39])

$$V_t(t, x, \theta) + \theta V_x(t, x, \theta) = \frac{1}{s_n} \int_{S_{\theta'}} \sigma(t, x, \theta, \theta') V(t, x, \theta') dS_{\theta'} \quad (14)$$

в многомерной среде. Действительно, во всех этих уравнениях приходящая волна рассеивается по всем возможным направлениям с некоторыми коэффициентами, разница только в том, что на отрезке таких направлений два, на графе, для которого получены формулы (10), (11), – конечное число, а в пространстве – континуум (“занумерованный” в (14) единичной сферой).

В случае уравнений более высокого порядка (или систем) к этому добавляется большее количество характеристических направлений, так что естественная постановка вопроса о методе распространяющихся волн в многомерном случае состоит в том, как уравнение излучения (или его разумную модификацию) связать с классическим волновым уравнением в  $\mathbb{R}^n$ ?

Это, так сказать, общая постановка задачи. Ниже мы увидим, что по мере получения тех или иных результатов её приходится модифицировать и уточнять.

**5. Волновые уравнения с памятью, зависящей от неизвестной функции.** Чрезвычайно интересным классом уравнений, давших обширную феноменологию для развития метода распространяющихся волн, оказались волновые уравнения с памятью. Под ними обычно понимаются уравнения двух типов:

$$u_{tt} = u_{xx} + \int_0^\infty \left[ \sum_{i=0}^\infty \mu^i e^{-\lambda^i(t-\tau)} u(\tau, x) \right] d\tau \quad (15)$$

и

$$u_{tt} = u_{xx} + \int_0^\infty \left[ \sum_{i=0}^\infty \kappa_i e^{-\lambda^i(t-\tau)} u_{xx}(\tau, x) \right] d\tau. \quad (16)$$

Такие уравнения с интегральным членом типа свёртки с комбинацией экспонент, как раз и называемого “памятью”, возникают в теории усреднения композитных (пористых) сред. Безусловно, при математическом рассмотрении речь идет не только об именно таких уравнениях, но и о различных их обобщениях.

С точки зрения метода распространяющихся волн оба уравнения очень удобны, поскольку эквивалентны системе уравнений с частными производными безо всяких интегралов. Действительно, если обозначить

$$v^i(t, x) = \int_0^t e^{-\lambda^i(t-\tau)} u(\tau, x) d\tau$$

в случае уравнения (15) и

$$v^i(t, x) = \int_0^t e^{-\lambda^i(t-\tau)} u_{xx}(\tau, x) d\tau$$

в случае уравнения (16), то получим соответственно системы

$$u_{tt} - u_{xx} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i v^i, \quad v_t^i = -\lambda^i v + u$$

и

$$u_{tt} - u_{xx} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i v^i, \quad v_t^i = -\lambda^i v + u_{xx}.$$

Приведём результаты, полученные для такого рода уравнений (как и ранее, мы практически не будем оговаривать условия гладкости, достаточной для того, чтобы все операции дифференцирования были корректны). Начнём с уравнения, предложенного нам Х.Х. Имомназаровым [40] и являющегося как раз моделью фильтрации в пористой среде. В оригинальной формулировке оно имело вид

$$\rho_s(z) u_{tt} = (\mu(z) u_z)_z - \chi(z) \rho_l^2(z) u_t + \chi^2(z) \rho_l^3(z) u - \chi^3(z) \rho_l^4(z) \int_0^t e^{-\chi(z) \rho_l(z)(t-\tau)} u(\tau, z) d\tau$$

( $\rho_s$  и  $\rho_l$  – плотности твёрдой и жидкой фаз,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\chi$  – коэффициент трения), а после введения обозначения

$$v(t, s) = \chi(z) \rho_l(z) \int_0^t e^{-\chi(z) \rho_l(z)(t-\tau)} u(\tau, z) d\tau$$

свелось к системе (поскольку из этой системы фактически и было получено), которая после замены пространственной переменной принимает вид

$$k(s) u_{tt} + \rho(s) v_{tt} = (k(s) u_s)_s, \quad v_t + \lambda(s) v = \lambda(s) u. \quad (17)$$

**Теорема [14].** *Общее решение системы (17) имеет вид*

$$u(t, s) = \frac{f^-(t, s) + f^+(t, s)}{\sqrt{k(s)}}, \quad v(t, s) = \frac{f^0(t, s)}{\sqrt{k(s)}},$$

где функции  $f^\alpha(t, s)$  являются общим решением системы

$$f_t^- + f_s^- = -\psi(s) f^- + [\phi(s) - \psi(s)] f^+ + \psi(s) f^0,$$

$$f_t^- - f_s^- = -[\phi(s) + \psi(s)] f^- - \psi(s) f^+ + \psi(s) f^0, \quad f_t^0 = \lambda(s) f^- + \lambda(s) f^+ - \lambda(s) f^0, \quad (18)$$

здесь  $\phi(s) = k'(s)/(2k(s))$ ,  $\psi(s) = \lambda(s)\rho(s)/(2k(s))$ .

Как видим, усложнение системы (17) по сравнению с уравнением (2) не повлияло на сам факт представимости решения через волны и лишь изменило правую часть уравнения (причём, обратим внимание, аддитивно:  $\phi(s)$  как равнялась  $k'(s)/(2k(s))$ , такой и осталась, а появление в (17) дополнительного уравнения и дополнительных слагаемых в старом уравнении просто добавило точно так же в (18) новое уравнение и новые слагаемые в старых уравнениях).

**6. Волновые уравнения с памятью, зависящей от второй производной.** Вторым типом уравнений, изменивших взгляд на метод распространяющихся волн, оказалось уравнение с памятью, выраженной через вторую производную [41]. В простейшем случае оно имеет вид

$$u_{tt} = u_{ss} + \mu \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau, \quad (19)$$

где  $\mu \neq 0$  и  $\lambda$  – некоторые константы, и обозначением интеграла через  $v$  сводится к системе

$$u_{tt} = u_{ss} + \mu v, \quad u_{ss} = v_t + \lambda v. \quad (20)$$

Как оказалось [15], в этом случае представление (12), (13) приходится модифицировать: выражения искомых функций через волны в виде комбинации соответствующих функций не существует и необходимо привлекать ещё и производные. В итоге решение системы (20) представляется методом распространяющихся волн в виде

$$u(t, s) = f^-(t, s) + f^+(t, s), \quad v(t, s) = -\lambda f^-(t, s) - \lambda f^+(t, s) + \lambda f^0(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s) - \frac{\mu}{2} f^0(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s) - \frac{\mu}{2} f^0(t, s), \\ f_t^0(t, s) &= (\lambda + \mu) f^-(t, s) + (\lambda + \mu) f^+(t, s) - (\lambda + \mu) f^0(t, s). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом явно выделяется “особый” случай  $\lambda + \mu = 0$ , так как при доказательстве того, что (21), (22) даёт все решения системы (20), вырождение проявляется в начальных условиях. Нетрудно видеть, что соответствие между начальными условиями для  $u$ ,  $v$  и начальными условиями для  $f^\alpha$ , имеющее вид

$$\begin{aligned} u_0(s) &= f^-(0, s) + f^+(0, s), \quad u_1(s) = -f_s^-(0, s) + f_s^+(0, s) + \mu f^-(0, s) + \mu f^+(0, s) - \mu f^0(0, s), \\ v_0(s) &= -f_s^-(0, s) + f_s^+(0, s) - \lambda f^-(0, s) - \lambda f^+(0, s) + \lambda f^0(0, s), \end{aligned}$$

при  $\lambda + \mu = 0$  становится конфликтным: из него следует, что  $v_0(s) = u_1(s)$ , хотя с точки зрения системы (20) они должны полагаться независимыми.

Однако тот факт, что  $\lambda + \mu = 0$ , позволяет комбинацией уравнений (20) получить уравнение  $u_{tt} = v_t$ , которое интегрируется один раз, после чего удаётся понять в чем проблема. Оказывается, что в этом особом случае в формуле (21) нужно использовать не только первые, но и вторые производные, что даёт в результате представление

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s) - \mu f^0(t, s), \quad v(t, s) = f_{ss}^0(t, s), \\ f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s), \quad f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) = \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s), \\ f_t^0(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \end{aligned}$$

для которого соответствие между начальными условиями восстанавливается. Действительно, в этом случае они принимают вид

$$u_0(s) = f^-(0, s) + f^+(0, s) - \mu f^0(0, s), \quad u_1(s) = -f_s^-(0, s) + f_s^+(0, s), \quad v_0(s) = f_{ss}^0(0, s).$$

Из последнего условия простым интегрированием получаем  $f^0(0, s)$ , а из первых двух условий стандартным образом находятся  $f^-(0, s)$  и  $f^+(0, s)$ .

Следует отметить, что возможен и другой вариант представления решения

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s) - \mu f^0(t, s), \\ v(t, s) &= -\lambda f^-(t, s) - \lambda f^+(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s) + f_{ss}^0(t, s), \\ f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s), \quad f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) = \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s), \\ f_t^0(t, s) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

который примечателен в двух аспектах: во-первых, становится понятным, что в формуле (13) в общем случае стоит не линейная комбинация волн, а некоторое линейное дифференциальное выражение от этих волн; а во-вторых, формула (23) показывает, что рассматриваемый нами процесс фактически распадается на два независимых (один – для  $f^\pm$ , другой – для  $f^0$ ), что ни из системы (20), ни тем более из исходного уравнения (19) усмотреть было невозможно.

Аналогичный результат получается и в более общем случае. Первое естественное обобщение – случай суммы нескольких экспонент под интегралом:

$$u_{tt} = u_{ss} + \sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^t \exp\{-\lambda^i(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau.$$

Здесь введением переменных  $v^i$  вместо интегралов с соответствующими экспонентами получаем систему

$$u_{tt} - u_{ss} = \sum_{i=1}^n \mu_i v^i, \quad u_{ss} = v_t^i + \lambda^i v^i, \quad i = \overline{1, n},$$

решения которой представляются через систему переноса волн. При обозначениях

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda^i}$$

(если одно из  $\lambda^i = 0$ , то формулы несколько модифицируются) и  $\sigma \neq -1$  это представление выражается формулами

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s), \\ v^i(t, s) &= -\lambda^i f^-(t, s) - \lambda^i f^+(t, s) + \lambda^i f^i(t, s) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s), \\ f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mu_j f^j(t, s), \\ f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mu_j f^j(t, s), \\ f_t^i(t, s) &= (\lambda^i + \mu) f^-(t, s) + (\lambda^i + \mu) f^+(t, s) - \lambda^i f^i(t, s) - \sum_{j=1}^n \mu_j f^j(t, s), \end{aligned}$$

а при  $\sigma = -1$  – формулами

$$\begin{aligned} u(t, s) &= f^-(t, s) + f^+(t, s) - \sum_{i=1}^n \mu_i f^i(t, s), \quad v^i(t, s) = f_{ss}^i(t, s), \quad i = \overline{1, n}, \\ f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) &= \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mu_j (\lambda^j + \mu) f^j(t, s), \end{aligned} \quad (24)$$

$$f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) = \frac{\mu}{2} f^-(t, s) + \frac{\mu}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \mu_j (\lambda^j + \mu) f^j(t, s),$$

$$f_t^i(t, s) = f^-(t, s) + f^+(t, s) - \lambda^i f^i(t, s) - \sum_{j=1}^n \mu_j f^j(t, s). \quad (25)$$

Эти формулы позволяют найти результат и для предельно общего (для этого класса уравнений) случая – когда интегрирование идет по произвольной мере:

$$u_{tt} = u_{ss} + \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau d\mu(\lambda).$$

Обозначив

$$v(t, s, \lambda) = \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau,$$

получим систему

$$u_{tt} - u_{ss} = \int_0^\infty v d\mu(\lambda), \quad u_{ss} = v_t + \lambda v,$$

для которой точно так же приходим к представлениям через волны при  $\sigma \neq -1$ :

$$u(t, s) = f^-(t, s) + f^+(t, s),$$

$$v(t, s, \lambda) = -\lambda f^-(t, s) - \lambda f^+(t, s) + \lambda g(t, s, \lambda) - f_s^-(t, s) + f_s^+(t, s),$$

$$f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t, s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda),$$

$$f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t, s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda),$$

$$g_t(t, s, \lambda) = (\lambda + \bar{\mu}) f^-(t, s) + (\lambda + \bar{\mu}) f^+(t, s) - \lambda g(t, s, \lambda) - \int_0^{+\infty} g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda)$$

(здесь  $\bar{\mu} = \int_0^{+\infty} d\mu(\lambda)$ ,  $\sigma = \int_0^{+\infty} \lambda^{-1} d\mu(\lambda)$ ) и при  $\sigma = -1$ :

$$u(t, s) = f^-(t, s) + f^+(t, s) - \int_0^{+\infty} g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda), \quad v(t, s, \lambda) = g_{ss}(t, s, \lambda), \quad (26)$$

$$f_t^-(t, s) + f_s^-(t, s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t, s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\lambda + \bar{\mu}) g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda),$$

$$f_t^+(t, s) - f_s^+(t, s) = \frac{\bar{\mu}}{2} f^-(t, s) + \frac{\bar{\mu}}{2} f^+(t, s) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\lambda + \bar{\mu}) g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda),$$



$$g_t(t, s, \lambda) = f^-(t, s) + f^+(t, s) - \lambda g(t, s, \lambda) - \int_0^{+\infty} g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda). \quad (27)$$

Отметим, что формулы (26), (27), так же как и формулы (24), (25), пригодны не только для  $\sigma = -1$ , но и для любого значения  $\sigma$ , так что особенность этого случая связана только с порядком того дифференциального оператора, через который выражаются функции  $u$  и  $v$ , а не с особым поведением волн.

**7. Волновые уравнения с памятью и вязкостью.** Наконец, приведём ещё один тип волновых уравнений с памятью, который отличается от предыдущих наличием члена с производной  $u_{txx}$ , интерпретируемого как вязкость (см., например, [41]):

$$u_{tt} = ku_{ss} + \alpha u_{tss} + \mu \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau,$$

где  $\alpha \neq 0$ ,  $k \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  и  $\lambda$  – некоторые константы. Здесь, как и в предыдущих случаях, обозначение интеграла через  $v$  приводит к системе

$$u_{tt} = ku_{ss} + \alpha u_{tss} + \mu v, \quad v_t + \lambda v = u_{xx} \quad (28)$$

или, если подставить  $u_{ss}$  из второго уравнения в первое, к системе

$$u_{tt} - \alpha v_{tt} = (k + \alpha\lambda)v_t + (\mu + k\lambda)v, \quad u_{ss} = v_t + \lambda v. \quad (29)$$

Представление (29) удобно тем, что по нему легко определить двукратные семейства характеристик  $t = \text{const}$  и  $s = \text{const}$ .

Соответственно решение (28) записывается в виде (здесь приводятся в несколько модифицированной форме результаты из статьи [16])

$$u(t, s) = \alpha f(t, s), \quad v(t, s) = f(t, s) - g(t, s), \quad (30)$$

где четыре “волны” (наличие характеристик  $t = \text{const}$  обуславливает запись этого слова в кавычках) – функции  $f$ ,  $g$ ,  $r$  и не фигурирующая в (30) функция  $h$  – определяются соотношениями

$$f_t(t, s) - h_s(t, s) = \frac{k}{\alpha} f(t, s) - \frac{k}{\alpha} g(t, s) + \frac{1}{\alpha} r(t, s), \quad f_s(t, s) = \frac{1}{\alpha} h(t, s),$$

$$g_t(t, s) = \left(\frac{k}{\alpha} + \lambda\right) f(t, s) - \left(\frac{k}{\alpha} + \lambda\right) g(t, s) + \frac{1}{\alpha} r(t, s),$$

$$r_t(t, s) = (\mu + k\lambda) f(t, s) - (\mu + k\lambda) g(t, s),$$

или, если исключить функцию  $h(t, s)$ , равенствами

$$f_t(t, s) - \alpha f_{ss}(t, s) = \frac{k}{\alpha} f(t, s) - \frac{k}{\alpha} g(t, s) + \frac{1}{\alpha} r(t, s),$$

$$g_t(t, s) = \left(\frac{k}{\alpha} + \lambda\right) f(t, s) - \left(\frac{k}{\alpha} + \lambda\right) g(t, s) + \frac{1}{\alpha} r(t, s),$$

$$r_t(t, s) = (\mu + k\lambda) f(t, s) + (\mu + k\lambda) g(t, s).$$

Это представление, фактически, выводит метод распространяющихся волн за рамки чисто гиперболической теории. Тем же приёмом, что и в методе распространяющихся волн, мы разделили параболическую (так что “волны” оказались совсем не волнами) и гиперболическую составляющие нашей системы.

Результат, как и в п. 6, переносится на случай уравнения с интегралом от комбинации экспонент

$$u_{tt} - \alpha u_{tss} = k u_{ss} + \sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^t \exp\{-\lambda^i(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau, \quad n \geq 1.$$

Обозначение интеграла от каждой экспоненты через  $v^i$  даёт систему

$$u_{tt} = k u_{ss} + \alpha u_{tss} + \sum_{i=1}^n \mu_i v^i, \quad v_t^i + \lambda^i v^i = u_{ss}, \quad i = \overline{1, n},$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, s) &= \alpha f(t, s), \quad v^i(t, s) = f(t, s) - g^i(t, s) + r(t, s), \quad i = \overline{1, n}, \\ f_t(t, s) - \alpha f_{ss}(t, s) &= \frac{k}{\alpha} \left[ f(t, s) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g^j(t, s) \right], \\ g_t^i(t, s) &= \frac{k}{\alpha} \left[ f(t, s) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g^j(t, s) \right] + \lambda^i [f(t, s) - g^i(t, s) + r(t, s)] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda^i}{n} + \frac{\mu_i}{k} \right) [f(t, s) - g^i(t, s) + r(t, s)], \\ r_t(t, s) &= - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda^i}{n} + \frac{\mu_i}{k} \right) [f(t, s) - g^i(t, s) + r(t, s)]. \end{aligned}$$

В случае уравнения с интегралом по произвольной мере

$$u_{tt} = k u_{ss} + \alpha u_{tss} + \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau d\mu(\lambda)$$

введение функции

$$v(t, x, \lambda) = \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} u_{ss}(\tau, s) d\tau$$

приводит к системе

$$u_{tt} - \alpha u_{tss} = k u_{ss} + \int_0^\infty v(t, s, \lambda) d\mu(\lambda), \quad u_{ss} = v_t + \lambda v,$$

решение которой представляется в виде

$$\begin{aligned} u(t, s) &= \alpha f(t, s), \quad v(t, s, \lambda) = f(t, s) - g(t, s, \lambda) + r(t, s) \\ f_t(t, s) - \alpha f_{ss}(t, s) &= \frac{k}{\alpha} \left[ f(t, s) - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda) \right], \\ g_t(t, s, \lambda) &= \frac{k}{\alpha} \left[ f(t, s) - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(t, s, \lambda) d\mu(\lambda) \right] + \lambda [f(t, s) - g(t, s, \lambda) + r(t, s)] - \end{aligned}$$

$$-\int_0^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\bar{\mu}} + \frac{1}{k} \right) [f(t, s) - g(t, s, \lambda) + r(t, s)] d\mu(\lambda),$$

$$r_t(t, s) = -\int_0^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\bar{\mu}} + \frac{1}{k} \right) [f(t, s) - g(t, s, \lambda) + r(t, s)] d\mu(\lambda).$$

**Заключение.** Подчеркнём, что метод распространяющихся волн явно выходит за рамки рассмотрения гиперболических систем. Возможность выделения параболической составляющей, которая была продемонстрирована в примере, конечно, может быть вполне дополнена и возможностью выделения эллиптической составляющей. Действительно, если характеристики вдруг окажутся мнимыми, мы можем рассмотреть уравнения вида

$$f_t(t, s) - g_s(t, s) = \dots, \quad g_t(t, s) + f_s(t, s) = \dots$$

и другие уравнения переноса, где многоточиями обозначены линейные алгебраические выражения от различных “волн”, и найти представления решения исходной системы через функции  $f$ ,  $g$  и остальные “волны”, которые будут фигурировать в системе переноса.

Таким образом, в результате развития метода распространяющихся волн он трансформируется в метод декомпозиции линейной системы уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными и представления её решений через решения линейной системы первого порядка, левые части которой представляют собой элементарные формы, связанные с простейшими эллиптическими, гиперболическими и параболическими уравнениями, а правые являются линейными алгебраическими выражениями от всех неизвестных функций.

При этом решения исходной системы через решения такой “канонической” системы могут выражаться не только алгебраически, но и линейными дифференциальными (по пространственной переменной) операторами не только первого, но и более высокого порядка. Так что окончательно задача (12), (13) приобретает следующий общий вид: для произвольной линейной системы  $Lu = 0$  относительно вектор-функции  $u(t, x)$  от двух независимых переменных  $t$  и  $x$  представить её решение в виде  $u = M_x z$ , где  $M_x$  – некоторый обыкновенный дифференциальный оператор с дифференцированием по переменной  $x$ , а  $z(t, x)$  – решение системы канонических уравнений  $Pz_t + Qz_x = Cz$ , где левая часть определяется характеристиками системы, матрица  $P$  – диагональная (с возможными нулями), а  $C$  – некоторая матрица.

Нельзя не отметить, что представленные результаты, конечно, не являются общими. Их скорее можно рассматривать как некоторый набор феноменов, демонстрирующий и возможности метода, и смысл его применения в различных задачах. Все представления, которые обсуждались, получены, в конечном счёте, подбором (поскольку они определяются неоднозначно и даже для уравнений с постоянными коэффициентами возникают несколько “степеней свободы”, позволяющих представить решение исходной системы через волны несколькими способами, как эквивалентными между собой, так и не сводящимися друг к другу). Построение же общей теории обсуждаемого метода ещё предстоит.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2023-939).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровских А.В. Распространение волн в одномерной неоднородной среде // Деп. в ВИНТИ 13.12.00. № 3134-В00.
2. Боровских А.В. Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 758–767.
3. Боровских А.В. Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2004. Т. 24. С. 3–43.
4. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.

5. Ильин В.А. Граничное управление сферически симметричными колебаниями трёхмерного шара // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 144–155.
6. Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 3. С. 393–403.
7. Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 529–537.
8. Ильин В.А., Мусеев Е.И. Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 6. С. 730–734.
9. Ильин В.А., Мусеев Е.И. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 2. С. 154–158.
10. Kotorik V. Exact Controlability and Stabilization. Chichester; New York; Paris, 1994.
11. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной. I // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 1. С. 64–89.
12. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной. II // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 5. Р. 656–666.
13. Боровских А.В. Распространение волн в неоднородной среде: дис. . . д-ра физ.-мат. наук. М., 2006.
14. Боровских А.В., Царицанский А.Н. Формула распространяющихся волн для среды с памятью // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 901–902.
15. Царицанский А.Н. Задача о распространении волн в неоднородной среде с памятью // Мат. заметки. 2015. Вып. 98. № 3. С. 436–447.
16. Царицанский А.Н. Дискретный и непрерывный случаи в задаче о распространении волн в среде с памятью // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 3. С. 489–503.
17. Соболев С.Л. Функционально-инвариантные решения уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259–264.
18. Friedlander F.G. Simple progressive solutions of the wave equation // Math. Proc. of the Cambridge Philos. Soc. 1947. V. 43. № 3. Р. 360–373.
19. Еругин Н.П., Смирнов М.М. Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 853–865.
20. Никольский Э.В. Обобщенные функционально-инвариантные решения и эквивалентные системы уравнений математической физики. Новосибирск, 1997.
21. Киселев А.П. Относительно неискажающиеся волны. Новые примеры // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 2001. Т. 275. С. 100–103.
22. Киселев А.П., Перель М.В. Относительно неискажающиеся волны для  $m$ -мерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1128–1129.
23. Ali-Mehmeti F. Nonlinear waves in networks // Math. Research. V. 80. Berlin, 1994.
24. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.
25. Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. № 3. С. 115–150.
26. Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В. Волновое уравнение на пространственной сети // Докл. РАН. 2003. Т. 388. № 1. С. 16–18.
27. Belishev M.I., Wada N. A  $C^*$ -algebra associated with dynamics on a graph of strings // J. Math. Soc. Japan. 2015. V. 67. № 3. Р. 1239–1274.
28. Белишев М.И., Каплун А.В. Канонические формы алгебры эйконолов метрического графа и его геометрия // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2022. Т. 519. С. 35–66.
29. Баранов В., Кюнец Ж. Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями // Проблемы сейсмической разведки. М., 1962. С. 179–188.
30. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 115. С. 28–38.
31. Белишев М.И. О нарушении условия разрешимости обратной задачи для неоднородной струны // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. Вып. 4. С. 57–58.
32. Авдонин С.А., Белишев М.И., Иванов С.А. Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения  $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$  // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 307–331.
33. Черныгин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М., 1991.
34. Friedlander F.G. On the integrals of a partial differential equation // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1947. V. 43. № 3. Р. 348–359.

35. *Моисеев Е.И., Тихомиров В.В., Козлов Е.А.* Формула среднего значения для регулярного решения гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 10. С. 1802–1803.
36. *Боровских А.В.* Выражение функции Римана для волнового уравнения в неоднородной среде через коэффициенты переноса // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 6. С. 851.
37. *Fattorini H.O.* Second-Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam, 1985.
38. *Аниконов Ю.Е., Пестов Л.Н.* Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск, 1990.
39. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев, 1991.
40. *Имомназаров Х.Х.* Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4. № 2. С. 154–165.
41. *Гавриков А.А., Шамаев А.С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 114–146.

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова,  
Научно-образовательный математический центр  
Северо-Осетинского государственного университета  
имени К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.  
После доработки 14.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.9

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ РЕШЕНИЙ  
ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2023 г. Чан Куанг Вьонг, А. П. Солдатов

Приведено явное выражение (в полярных координатах) фундаментальной матрицы решений системы Ламе плоской анизотропной теории упругости. Показано, что оператор свёртки этой матрицы в конечной области с ляпуновской границей ограничен в пространствах Гёльдера  $C^\mu \rightarrow C^{2,\mu}$ . Аналогичный результат установлен и для бесконечной области в соответствующих весовых пространствах Гёльдера (со степенным поведением на бесконечности).

DOI: 10.31857/S0374064123050072, EDN: CXSOSU

К 95-летию Владимира Александровича Ильина

Рассмотрим в области  $D$  на плоскости неоднородную систему Ламе

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = f \quad (1)$$

для вектор-функций  $u = (u_1, u_2)$  с постоянными матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

отвечающую общему анизотропному случаю упругой среды [1, 2]. Последнее означает, что элементы  $\alpha_j$  этих матриц, называемые *модулями упругости*, удовлетворяют условию положительной определённости  $3 \times 3$ -матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

которое обеспечивает сильную эллиптичность системы Ламе (1).

Рассмотрим матричный трёхчлен  $p(z) = a_{11} + a_{33}z + a_{22}z^2$  этой системы, где здесь и ниже для краткости положено  $a_{33} = a_{12} + a_{21}$ , представляющий собой симметричную матрицу

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix},$$

$$p_1(z) = \alpha_1 + 2\alpha_6z + \alpha_3z^2, \quad p_2(z) = \alpha_3 + 2\alpha_5z + \alpha_2z^2, \quad p_3(z) = \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5z^2. \quad (2)$$

В силу эллиптичности корни характеристического многочлена четвёртой степени  $\chi = p_1p_2 - p_3^2$  не лежат на вещественной оси. Обозначив через  $\nu_1, \nu_2$  эти корни в верхней полуплоскости (возможно кратные), можем записать

$$\chi(z) = (\det a_{22})(z - \nu_1)(z - \bar{\nu}_1)(z - \nu_2)(z - \bar{\nu}_2),$$

где  $\bar{\nu}_1$  и  $\bar{\nu}_2$  – комплексно-сопряжённые числа к  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно.

Рассмотрим матричную квадратичную форму

$$\sigma(z) = a_{22}x^2 - a_{33}xy + a_{11}y^2, \quad z = x + iy, \quad (3)$$

положительно определённую при  $z \neq 0$ .

Введём матрицы

$$e_1 = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma^{-1}(\xi) d_1 \xi, \quad e_2 = \frac{1}{2\pi} \int_S [\xi_1 \xi_2 (a_{11} - a_{22}) - \xi_1^2 a_{33}] \sigma^{-1}(\xi) d_1 \xi, \quad (4)$$

где  $S$  означает единичную окружность,  $\xi = \xi_1 + i\xi_2$  и  $d_1 \xi$  есть элемент длины дуги.

**Теорема 1.** Матрица-функция

$$h_0(\theta) = \sigma^{-1}(e^{i\theta}) [\cos \theta \sin \theta (a_{11} - a_{22}) e_1 + \sin^2 \theta a_{33} e_1 + \tilde{e}_2], \quad (5)$$

где  $\tilde{e}_2 = a_{22}e_2a_{22}^{-1}$ , допускает  $\pi$ -периодическую первообразную  $h(\theta)$  и формула

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} [(\ln |z|) e_1 + h(\arg z)] \quad (6)$$

определяет фундаментальную матрицу решений системы Ламе. Другими словами, для любой функции  $f$  с компактным носителем, удовлетворяющей условию Гёльдера, интеграл

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} \omega(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta \quad (7)$$

доставляет решение неоднородной системы Ламе с правой частью  $f$ .

Отметим, что фундаментальная матрица решений системы Ламе по существу была построена в работе [3], однако в ней допущена неточность.

**Доказательство.** Как и в работе [3], введём блочную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_{22}^{-1}a_{11} & -a_{22}^{-1}a_{33} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

собственные значения которой совпадают с корнями характеристического многочлена  $\chi$  и, в частности, не лежат на вещественной оси.

Удобно с каждым комплексным числом  $z = x + iy$  связать матрицу  $z_A = x1 + yA$ , которая при  $z \neq 0$  обратима (здесь  $1$  – единичная матрица). Прямая проверка показывает, что обратная к ней матрица определяется равенством

$$z_A^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим интеграл

$$(U)(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} (\zeta - z)_A^{-1} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

с векторной плотностью  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ . Как установлено в [4, лемма 3.5.2], функция (10) непрерывно дифференцируема и её производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_1 \varphi(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D (\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \varphi(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D A(\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2 \zeta$$

с матричными коэффициентами

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_S \xi_k \xi_A^{-1} d_1 \xi, \quad k = 1, 2,$$

и двумерными сингулярными интегралами.

Таким образом, функция  $U$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = -E\varphi \quad (11)$$

с матрицей

$$E = -\alpha_2 + \alpha_1 A = \frac{1}{2\pi} \int_S (i\xi)_A \xi_A^{-1} d_1 \xi,$$

которую можно записать в форме

$$\frac{1}{2\pi} \int_S (i\xi)_A \xi_A^{-1} d_1 \xi = \frac{1}{2\pi} \int_S \xi_A^{-1} (d\xi_1 + A d\xi_2).$$

Аналогично [5] убеждаемся, что правую часть этого равенства можно рассматривать как значение  $\chi(A)$  от матрицы  $A$  функции

$$\chi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{d\xi + u d\eta}{\xi + u\eta}, \quad \text{Im } u \neq 0.$$

Поскольку  $\chi(u) = \pm i$  в полуплоскости  $\pm \text{Im } u > 0$ , то  $[\chi(A)]^2 = \chi^2(A) = -1$ . Таким образом, матрица  $E$  обратима и

$$E^2 = -1. \quad (12)$$

Согласно (9) имеем равенство

$$z_A^{-1}(iz)_A = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y & x \\ -xa_{11} & -ya_{22} - xa_{33} \end{pmatrix}.$$

Поэтому в блочном  $2 \times 2$ -виде матрица  $E$  определяется равенством

$$E = \begin{pmatrix} e'_2 & e_1 a_{22} \\ -e_1 a_{11} & e_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где в дополнение к (4) положено

$$e'_2 = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma^{-1}(\xi) [\xi_1 \xi_2 (a_{11} - a_{22}) + \xi_2^2 a_{33}] d_1 \xi.$$

Выберем теперь плотность  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  интеграла (10) в форме

$$\varphi = E\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = (0, a_{22}^{-1}\psi). \quad (14)$$

Тогда в силу (11), (12), (14) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{\varphi}.$$



С учётом (8) в покомпонентной записи вектора  $U = (u_1, u_2)$  это уравнение примет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f. \quad (15)$$

В силу (13), (14) вектор  $\varphi = (e_1 f, e_2 a_{22}^{-1} f)$ . Следовательно, вектор  $U$  имеет своими компонентами

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \{[(\zeta - z)_A^{-1}]_{k1} e_1 + [(\zeta - z)_A^{-1}]_{k2} a_{22}^{-1} \tilde{e}_2\} f(\zeta) d_2 \zeta, \quad k = 1, 2,$$

где, напомним,  $\tilde{e}_2 = a_{22} e_2 a_{22}^{-1}$ . Расписывая элементы матрицы (9), в соответствии с (4) отсюда приходим к выражениям

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \omega_k(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

с ядрами  $\omega_1(z) = \sigma^{-1}(z)[x a_{22} e_1 - y(a_{33} e_1 + \tilde{e}_2)]$ ,  $\omega_2(z) = \sigma^{-1}(z)(x \tilde{e}_2 + y a_{11} e_1)$ .

Первое равенство (15) показывает, что форма  $u_1 dx + u_2 dy$  замкнута на всей плоскости и, следовательно, существует функция  $u \in C^2$ , для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2. \quad (17)$$

Второе равенство (15) означает, в частности, что  $u$  является решением (1).

Очевидно,

$$\int_{\Gamma} du = \int_{\Gamma} u_1 dx + u_2 dy = 0$$

для любого простого контура  $\Gamma$ , ориентированного против часовой стрелки. Подставляя сюда выражения (16) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{\mathbb{C}} f(\zeta) d_2 \zeta \int_{\Gamma} [\omega_1(\zeta - z) dx + \omega_2(\zeta - z) dy] = 0.$$

Поскольку функция  $f$  произвольна, отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma} [\omega_1(\zeta - z) dx + \omega_2(\zeta - z) dy] = 0, \quad \zeta \notin \Gamma.$$

Следовательно, форма  $\omega_1(z) dx + \omega_2(z) dy$  точна в области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  и существует её первообразная  $\omega_0$ , для которой справедливы равенства

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial x} = \omega_1, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial y} = \omega_2.$$

Так как функция  $u$  определена с точностью до постоянного слагаемого, в соответствии с (17) можем считать, что

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \omega_0(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta. \quad (18)$$

Очевидно, интеграл от формы  $d\omega_0 = \omega_1 dx + \omega_2 dy$  по единичной окружности  $S$  равен нулю, что можно записать в виде

$$\int_S [-\xi_2 \omega_1(\xi) + \xi_1 \omega_2(\xi)] d_1 \xi = 0. \quad (19)$$

Из (3), (4) и выражения ядер  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2$ , видно, что на единичной окружности  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$  они связаны соотношениями

$$\xi_1 \omega_1(\xi) + \xi_2 \omega_2(\xi) = e_1, \quad -\xi_2 \omega_1(\xi) + \xi_1 \omega_2(\xi) = h_0(\theta) \quad (20)$$

с  $\pi$ -периодической функцией  $h_0(\theta)$  из (5). В частности, равенство (19) означает, что

$$2 \int_0^\pi h_0(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} h_0(\theta) d\theta = 0,$$

поэтому первообразная  $h$  функции  $h_0$  также является  $\pi$ -периодической.

В полярных координатах  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  имеем равенства

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial r} = \omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \theta} = r(-\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta).$$

С учётом (20) и свойства однородности  $\omega_j(re^{i\theta}) = r^{-1}\omega_j(e^{i\theta})$  функций  $\omega_j$  получим

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial r} = \frac{e_1}{r}, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \theta} = h_0(\theta),$$

поэтому можно положить  $\omega_0(re^{i\theta}) = e_1 \ln r + h(\theta)$ . Совместно с (18) отсюда приходим к выражению (7) для фундаментальной матрицы решений системы Ламе.

Заметим, что в обозначениях (4), (13) равенство (19) можем записать в виде

$$e'_2 e_1 + e_1 \tilde{e}_2 = 0.$$

Последнее равенство можно вывести и непосредственно, пользуясь свойством (12) матрицы  $E$ . В самом деле, согласно (13) имеем

$$0 = (E^2)_{12} = e'_2 e_1 a_{22} + e_1 a_{22} e_2 = (e'_2 e_1 + e_1 \tilde{e}_2) a_{22}.$$

Для изотропной среды, когда  $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$  и  $\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_4$ , первообразная  $h(\theta)$  функции  $h_0$  вычисляется явно, поскольку в этом случае

$$\sigma^{-1}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3} \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_3 \sin^2 \theta & (\alpha_1 - \alpha_3) \cos \theta \sin \theta \\ (\alpha_1 - \alpha_3) \cos \theta \sin \theta & \alpha_3 \cos^2 \theta + \alpha_1 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad e_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2\alpha_1 \alpha_3}.$$

В предположении различных корней  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  характеристического многочлена  $\chi$  фундаментальная матрица решений  $\omega$  была построена в монографии В.Д. Купрадзе [1] путём сведения системы Ламе к одному уравнению четвёртого порядка и применения к последнему метода Е.Е. Леви [6]. В обозначениях (2) эта матрица даётся формулой

$$\omega(x, y) = 2a \operatorname{Im} \sum_{k=1,2} \left[ d_k \begin{pmatrix} p_2(\nu_k) & -p_3(\nu_k) \\ -p_3(\nu_k) & p_1(\nu_k) \end{pmatrix} \ln(x + \nu_k y) \right], \quad (21)$$

где  $a = \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_5^2$  и  $d_k$  есть алгебраическое дополнение элемента  $\nu_k^3$  матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \nu_1 & \nu_1^2 & \nu_1^3 \\ 1 & \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_1^2 & \bar{\nu}_1^3 \\ 1 & \nu_2 & \nu_2^2 & \nu_2^3 \\ 1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_2^2 & \bar{\nu}_2^3 \end{pmatrix}.$$

Как показано в [1], имеют место равенства

$$\operatorname{Re}(d_1 \nu_1^i + d_2 \nu_2^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

так что формула (21) даёт однозначную функцию.

Очевидно, интеграл (7) можно рассматривать и для произвольных непрерывных функций  $f(\zeta)$  на плоскости с поведением  $O(|\zeta|^{\delta-3})$ ,  $0 < \delta < 1$ , на бесконечности. Из выражения (6) видно, что для фиксированной точки  $z_0$  разность

$$\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z_0) = O(|\zeta|^{-1})$$

на бесконечности. Поэтому замена  $\omega(\zeta - z)$  на  $\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z_0)$  под знаком интеграла (7) позволяет рассматривать его для функций  $f(\zeta)$  с более общим поведением

$$f(\zeta) = O(|\zeta|^{\delta-2}), \quad 0 < \delta < 1, \quad (22)$$

на бесконечности.

Рассмотрим этот интеграл

$$(Tf)(z) = \int_D [\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z_0)] f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

в области  $D$  на плоскости, ограниченной гладким контуром  $\Gamma$ . Эта область может быть как конечной (т.е. лежать внутри некоторого круга), так и бесконечной (т.е. содержать внешность круга). В первом случае функция  $f$  берётся из класса Гёльдера  $C^\mu(\overline{D})$ , во втором случае она подчиняется указанному весовому поведению (22) на бесконечности и принадлежит классу  $C^\mu$  в каждой ограниченной подобласти.

Учитывая весовую функцию  $\rho_\lambda(z) = (1 + |z|)^\lambda$  произвольного порядка  $\lambda \in \mathbb{R}$ , через  $C_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty)$  обозначим пространство всех функций  $u \in C(\overline{D})$ , для которых конечна норма

$$\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |(\rho_{-\lambda} \varphi)(z)| + \sup_{\substack{z_1 \neq z_2 \\ z_j \in D}} \frac{|(\rho_{\mu-\lambda} \varphi)(z_1) - (\rho_{\mu-\lambda} \varphi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}. \quad (23)$$

Это пространство банахово и является частным случаем более общих весовых пространств, подробно изученных в [4]. Опишем кратко его основные свойства. Из определения (23) видно, что при  $\lambda = 0$  пространство  $C_0^\mu(\overline{D}, \infty)$  состоит из всех ограниченных функций, для которых  $\rho_\mu \varphi$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\mu$  в каждой компоненте составной области  $D$ . Легко видеть, что оно является банаховой алгеброй по умножению и  $C_\lambda^\mu = \rho_\lambda C_0^\mu$ , в частности, операция умножения, как билинейное отображение, ограничена  $C_{\lambda_1}^\mu \times C_{\lambda_2}^\mu \rightarrow C_{\lambda_1 + \lambda_2}^\mu$ . При этом семейство банаховых пространств  $(C_\lambda^\mu)$  монотонно убывает по параметру  $\mu$  (в смысле вложения банаховых пространств) и возрастает по  $\lambda$  (в случае бесконечной области).

Банахово пространство  $C_\lambda^{n,\mu}(\overline{D}, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , определяется индуктивно по  $n$  и состоит из всех функций  $\varphi \in C^n(D)$ , для которых

$$\varphi \in C_\lambda^{n-1,\mu}(\overline{D}, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C_{\lambda-1}^{n-1,\mu}(\overline{D}, \infty).$$

Индукцией показывается, что операция умножения, как билинейное отображение, ограничена  $C_{\lambda_1}^{n,\mu} \times C_{\lambda_2}^{n,\mu} \rightarrow C_{\lambda_1 + \lambda_2}^{n,\mu}$ . В частности, пространство  $C_0^{n,\mu}$  является банаховой алгеброй по умножению.

**Теорема 2.** Пусть контур  $\Gamma \in C^{1,\nu}$ ,  $0 < \mu < \nu$  и  $0 < \delta < 1$ .

Тогда оператор  $T$  ограничен  $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\overline{D})$ , если область  $D$  конечна, и  $C_{\delta-2}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty)$ , если область  $D$  бесконечна.

В обоих случаях функция  $u = Tf$  удовлетворяет уравнению (1).

**Доказательство.** Согласно теореме 1 можем записать равенства

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x} = T_1 f, \quad \frac{\partial(Tf)}{\partial y} = T_2 f \quad (24)$$

с операторами

$$(T_j f)(z) = \int_D \omega_j(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad j = 1, 2, \quad z \in D.$$

Предположим сначала, что область  $D$  конечна. Тогда к операторам  $T_j$  можно применить теорему 3.5.2 из [4], согласно которой они ограничены  $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$ . Поэтому с учётом (24) оператор  $T$  ограничен  $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\overline{D})$ .

Пусть далее область  $D$  бесконечна. В этом случае на основании теоремы 3.11.2 из [4] операторы  $T_j$  ограничены  $C_{\delta-2}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty)$ . На основании (24) и теоремы 2.10.1 из [4] отсюда заключаем, что оператор  $T$  ограничен  $C_{\delta-2}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty)$ . Нужно только учесть, что  $(Tf)(z_0) = 0$ , так что условием (24) функция  $Tf$  определяется однозначно. В рассматриваемом случае теорема 2.10.1 применима, поскольку здесь  $F = \{\infty\}$  и условие конуса в граничной точке  $\tau = \infty$  очевидным образом выполнено.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., 1963.
2. *Солдатов А.П.* К теории анизотропной плоской упругости // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2016. Т. 60. С. 114–166.
3. *Митин С.П., Солдатов А.П.* О решении задачи Дирихле для неоднородной системы Ламе с младшими коэффициентами // *Проблемы мат. анализа.* 2021. Т. 110. С. 51–58.
4. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2017. Т. 63. С. 1–189.
5. *Отелбаев М., Солдатов А.П.* Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметрике эллиптических систем первого порядка // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2021. Т. 61. № 1. С. 90–99.
6. *Леви Е.Е.* О линейных уравнениях с частными производными эллиптического типа // *Успехи мат. наук.* 1940. Т. 8. С. 249–292.

Университет Далата, Вьетнам,  
Федеральный исследовательский центр  
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,  
Московский центр фундаментальной  
и прикладной математики,  
Национальный исследовательский университет  
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 03.03.2023 г.  
После доработки 03.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

К ЗАДАЧЕ ДАРБУ  
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова

Для гиперболической системы с некротными характеристиками в  $n$ -мерном пространстве независимых переменных доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Определена матрица Римана–Адамара и построено решение задачи Дарбу в терминах указанной матрицы. В качестве примера применения полученных результатов подробно построено решение задачи Дарбу для системы в случае четырёх независимых переменных.

DOI: 10.31857/S0374064123050084, EDN: CXXBYD

**Введение.** В теории гиперболических уравнений и систем существенную роль играют задачи Дарбу. В частности, задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась в работах [1, гл. 3, § 1; 2, с. 7–15, 90–122; 3; 4], для уравнений Бианки – в статьях [5, 6], при этом решения задач строились в терминах функции Римана–Адамара.

Гиперболические системы вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_j + f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

исследовались многими авторами (см., например, статьи [7–10] и библиографии к ним). Отметим, что в [9, 10] решения задач Дарбу для системы (1) с двумя и тремя независимыми переменными построены в терминах матриц Римана–Адамара.

В настоящей работе для системы (1) с  $n$  независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся развитием метода Римана, который естественно назвать *методом Римана–Адамара*.

**1. Основной результат.** Линейное преобразование искомых функций приводит систему (1) к случаю, когда  $a_{ii} \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Далее считаем эти условия выполненными.

Пусть  $D$  – область, ограниченная плоскостями  $X_i: x_i = 0$ ,  $X_{i0}: x_i = x_{i0} > 0$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $T: x_n = x_1$ . Считаем, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям гладкости  $a_{ij} \in C(\overline{D})$ ,  $f_i \in C(\overline{D})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Определим класс функций  $C^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$  следующим образом: функция  $f \in C^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$ , если существуют непрерывные производные  $\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} f / (\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n})$ ,  $r_i = \overline{0, k_i}$ .

Решение  $u_1 \in C^{(1,0,\dots,0)}(D)$ ,  $u_2 \in C^{(0,1,0,\dots,0)}(D)$ ,  $\dots$ ,  $u_n \in C^{(0,\dots,0,1)}(D)$  назовём *регулярным* в области  $D$ .

**Задача Дарбу.** В области  $D$  найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i|_{\overline{X_i}} = \varphi_i, \quad u_n|_{\overline{T}} = \psi, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

где  $\varphi_i \in C(\overline{X_i})$ ,  $\psi \in C(\overline{T})$  – заданные функции, причём  $\varphi_i$  зависят от всех независимых переменных, кроме  $x_i$ , а функция  $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ .

Сведём систему (1) с учётом условий (2) к системе интегральных уравнений Вольтерры

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i + \int_0^{x_i} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j + f_i \right) dx_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$u_n(x_1, \dots, x_n) = \psi + \int_{x_1}^{x_n} \left( \sum_{j=1}^n a_{nj} u_j + f_n \right) dx_n, \quad (3)$$

решение которой существует и единственно в классе непрерывных функций. Задача Дарбу (1), (2) и система (3) эквивалентны. Действительно, система (3) – следствие (1) и (2). Обратно, дифференцируя уравнения системы (3) по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , получаем систему (1) с условиями (2).

Таким образом, справедлива

**Теорема.** Если выполняются условия  $a_{ij} \in C(\overline{D})$ ,  $f_i \in C(\overline{D})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , то решение задачи Дарбу (1), (2) существует и единственно.

Перейдём к построению решения задачи Дарбу в терминах матрицы Римана–Адамара.

Запишем систему (1) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{colon}(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \text{colon}(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Введём матрицу Римана [11]

$$\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n),$$

где  $\mathbf{R}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являются решениями систем

$$r_{i1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{i1} - \int_{\xi_1}^{x_1} (a_{21} r_{i2} + a_{31} r_{i3} + \dots + a_{n1} r_{in})(\alpha_1, x_2, \dots, x_n) d\alpha_1,$$

$$r_{i2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{i2} - \int_{\xi_2}^{x_2} (a_{12} r_{i1} + a_{32} r_{i3} + \dots + a_{n2} r_{in})(x_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_n) d\alpha_2,$$

$$r_{i3}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{i3} - \int_{\xi_3}^{x_3} (a_{13} r_{i1} + a_{23} r_{i2} + \dots + a_{n3} r_{in})(x_1, x_2, \alpha_3, x_4, \dots, x_n) d\alpha_3, \quad \dots$$

$$\dots, \quad r_{in}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{in} - \int_{\xi_n}^{x_n} (a_{14} r_{i1} + a_{24} r_{i2} + \dots + a_{n-1n} r_{in-1})(x_1, x_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n, \quad (5)$$

а  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Решения систем (5) при каждом  $i$  существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первым  $n$  аргументам  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  матрица  $\mathbf{R}$  удовлетворяет сопряжённой к (4) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv - \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i \mathbf{V})_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}.$$

Из систем (5), в частности, следует, что выполняются тождества

$$r_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|_{x_j=\xi_j} \equiv \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (6)$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{R}\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{R}\mathbf{A}_i \mathbf{U})_{x_i}, \quad (7)$$

которое может быть проверено непосредственно.

Возьмём внутри области  $D$  произвольную точку  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и проведём через неё плоскости, параллельные осям координат. Получим область  $D_P$ , ограниченную плоскостями  $X_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $x_i = \xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а также плоскостью  $T: x_n = x_1$ . Плоскость  $x_n = \xi_1$ , разбивает область  $D_P$  на две части:  $D^1$  (отвечает условию  $x_n > \xi_1$  и определяется неравенствами  $0 < x_1 < \xi_1$ ,  $0 < x_2 < \xi_2$ ,  $\dots$ ,  $0 < x_{n-1} < \xi_{n-1}$ ,  $\xi_1 < x_n < \xi_n$ ) и  $D^2$  (соответствует условию  $x_n < \xi_1$  и может быть задана двумя системами неравенств:

- 1)  $0 < x_1 < \xi_1$ ,  $0 < x_2 < \xi_2$ ,  $\dots$ ,  $0 < x_{n-1} < \xi_{n-1}$ ,  $x_1 < x_n < \xi_1$ ;
- 2)  $0 < x_1 < x_n$ ,  $0 < x_2 < \xi_2$ ,  $0 < x_3 < \xi_3$ ,  $\dots$ ,  $0 < x_n < \xi_1$ ).

Обозначим пересечение замыкания области  $D^1$  с плоскостями  $X_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , через  $X_i^1$ , с плоскостью  $x_n = \xi_1$  – через  $E^1$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Аналогично обозначим пересечение замыкания области  $D^2$  с плоскостями  $X_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , через  $X_i^2$ , с плоскостью  $x_n = \xi_1$  – через  $E^2$ , с плоскостью  $T$  – через  $S$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^2$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ .

Определим матрицу Римана–Адамара  $\mathbf{H}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (h_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , задачи Дарбу:

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{cases} \mathbf{R}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^1, \\ \mathbf{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^2. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{Q} = \text{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n)$ , где вектор-функции  $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in})$  являются решениями задачи Дарбу в области  $D^2$  для сопряжённой системы

$$\begin{aligned} q_{i1x_1} &= -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3} - \dots - a_{n1}q_{in}, & q_{i2x_2} &= -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3} - \dots - a_{n2}q_{in}, & \dots \\ \dots, & & q_{inx_n} &= -a_{1n}q_{i1} - a_{2n}q_{i2} - \dots - a_{n-1n}q_{in-1} \end{aligned}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{x_n=x_1} = 0, \quad q_{i2}|_{x_2=\xi_2} = 0, \quad \dots, \quad q_{in-1}|_{x_{n-1}=\xi_{n-1}} = 0, \quad q_{in}|_{x_n=\xi_1} = r_{in}|_{x_n=\xi_1}. \quad (8)$$

Последнее условие в (8) можно записать в виде  $[h_{in}]|_{x_n=\xi_1} = 0$ , где  $[h_{in}]|_{x_n=\xi_1}$  – скачок функции  $h_{in}$  на плоскости  $x_n = \xi_1$ .

Строка с номером  $i$  в тождестве (7) имеет вид

$$\sum_{j=1}^n (r_{ij}u_j)_{x_j} = \sum_{j=1}^n r_{ij}f_j. \quad (9)$$

Проинтегрируем равенство (9) по области  $D^1$ :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{D_1^1} r_{i1} u_1(\xi_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 - \iint_{X_1^1} r_{i1} u_1(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 + \\
 & \quad + \iint_{D_2^1} r_{i2} u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_2^1} r_{i2} u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
 & \quad \dots + \iint_{D_{n-1}^1} r_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \xi_{n-1}, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_{n-1}^1} r_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, 0, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \\
 & \quad + \iint_{D_n^1} r_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_n) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{E^1} r_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_1) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \\
 & \quad = \iint_{D^1} \sum_{j=1}^n (r_{ij} f_j)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 d\alpha_1. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Здесь у  $r_{ij}$  указаны только первые  $n$  аргументов, остальные везде  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

В (10) интегралы по многообразиям  $D_j^1$ , согласно (6), обращаются в тождественный нуль, если  $i \neq j$ ; кроме того, в интеграле по  $D_i^1$   $r_{ii} \equiv 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Теперь проинтегрируем (9) по области  $D^2$ :

$$\begin{aligned}
 & \iint_S q_{i1} u_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1} - \iint_{X_1^2} q_{i1} u_1(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_2 + \\
 & \quad + \iint_{D_2^2} q_{i2} u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_2^2} q_{i2} u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
 & \quad \dots + \iint_{D_{n-1}^2} q_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \xi_{n-1}, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_{n-1}^2} q_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, 0, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \iint_{E^2} q_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_1) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
& - \iint_S q_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \\
& = \iint_{D^2} \sum_{j=1}^n (r_{ij} f_j)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 d\alpha_1.
\end{aligned} \tag{11}$$

В (11) тоже у  $q_{ij}$  указаны только первые  $n$  аргументов, остальные  $n$  аргументов везде  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , и, согласно (8), интегралы по многообразиям  $D_j^1$ ,  $j = \overline{2, n-1}$ , обращаются в тождественный нуль.

Складывая равенства (10) и (11) при  $i = \overline{1, n}$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \int_0^{\xi_{i+1}} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} \int_{\xi_1}^{\xi_n} u_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \xi_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots \\
& \dots d\alpha_{i+1} d\alpha_{i-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{i1} u_1 d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{i2} u_2 d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
& \dots + \iint_{X_{i-1}^1 + X_{i-1}^2} h_{ii-1} u_{i-1} d\alpha_n \dots d\alpha_i d\alpha_{i-2} \dots d\alpha_1 + \\
& + \iint_{X_{i+1}^1 + X_{i+1}^2} h_{ii+1} u_{i+1} d\alpha_n \dots d\alpha_{i+2} d\alpha_i \dots d\alpha_1 + \\
& + \iint_{X_{n-1}^1 + X_{n-1}^2} h_{in-1} u_{n-1} d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{in} u_n d\alpha_{n-1} d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \\
& + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{j=1}^n h_{ij} f_j d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1, \quad i = \overline{1, n-1},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_n) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \\
& = \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{n1} u_1 d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{n2} u_2 d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
& \dots + \iint_{X_{n-1}^1 + X_{n-1}^2} h_{nn-1} u_{n-1} d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{nn} u_n d\alpha_{n-1} d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \\
& + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{j=1}^n h_{nj} f_j d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Правые части формул (12), (13) считаем известными функциями, поскольку они выражаются через элементы матрицы Римана–Адамара и данные задачи Дарбу.

Продифференцировав (12) и (13), получим

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{\partial^{n-1} F_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{i-1} \partial \xi_{i+1} \dots \partial \xi_{n-1} \partial \xi_n}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$u_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{\partial^{n-1} F_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-1}}, \quad (14)$$

где  $F_k$  – соответствующие правые части формул (12), (13). Соотношения (14) представляют собой решение задачи Дарбу (1), (2) в терминах матрицы Римана–Адамара  $\mathbf{H}$ .

**2. Пример.** В качестве примера реализации описанного выше метода построения решения задачи Дарбу рассмотрим гиперболическую систему четвёртого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^4 a_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_j + f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (15)$$

Как и выше, считаем, что выполняются условия  $a_{ii} \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

**Задача Дарбу для системы четвёртого порядка.** В области  $D$  найти регулярное решение системы (15), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i|_{\overline{X}_i} = \varphi_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad u_4|_{\overline{T}} = \psi, \quad (16)$$

$$\varphi_i \in C(\overline{X}_i), \quad \psi \in C(\overline{T}),$$

где функции  $\varphi_i$  зависят от всех независимых переменных, кроме  $x_i$ , а  $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ .

Считаем, что все условия гладкости, указанные для задачи (1), (2), выполняются. Из сформулированной выше теоремы вытекает, что решение задачи Дарбу для системы четвёртого порядка существует и единственно.

Запишем (15) в векторно-матричной форме:

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^4 \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{colon}(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \text{colon}(f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Матрица Римана в данном случае имеет вид

$$\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4),$$

где  $\mathbf{R}_i(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4})$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , являются решениями систем

$$r_{i1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta_{i1} - \int_{\xi_1}^{x_1} (a_{21}r_{i2} + a_{31}r_{i3} + a_{41}r_{i4})(\alpha_1, x_2, x_3, x_4) d\alpha_1,$$

$$r_{i2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta_{i2} - \int_{\xi_2}^{x_2} (a_{12}r_{i1} + a_{32}r_{i3} + a_{42}r_{i4})(x_1, \alpha_2, x_3, x_4) d\alpha_2,$$

$$\begin{aligned}
r_{i3}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \delta_{i3} - \int_{\xi_3}^{x_3} (a_{13}r_{i1} + a_{23}r_{i2} + a_{43}r_{i4})(x_1, x_2, \alpha_3, x_4) d\alpha_3, \\
r_{i4}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \delta_{i4} - \int_{\xi_4}^{x_4} (a_{14}r_{i1} + a_{24}r_{i2} + a_{34}r_{i3})(x_1, x_2, x_3, \alpha_4) d\alpha_4,
\end{aligned} \quad (18)$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Решения систем (18) при каждом  $i$  существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первым четырём аргументам  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  матрица  $\mathbf{R}$  удовлетворяет сопряжённой к (17) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv - \sum_{i=1}^4 (\mathbf{A}_i \mathbf{V})_{x_i} - \mathbf{B} \mathbf{U}.$$

Из систем (18) следует выполнение тождеств

$$r_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)|_{x_j=\xi_j} \equiv \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (19)$$

Условие (7) принимает вид

$$\mathbf{R} \mathbf{L}(\mathbf{U}) = (\mathbf{R} \mathbf{A}_1 \mathbf{U})_{x_1} + (\mathbf{R} \mathbf{A}_2 \mathbf{U})_{x_2} + (\mathbf{R} \mathbf{A}_3 \mathbf{U})_{x_3} + (\mathbf{R} \mathbf{A}_4 \mathbf{U})_{x_4}. \quad (20)$$

Перейдём к построению решения задачи Дарбу для системы четвёртого порядка. Возьмём внутри области  $D$  произвольную точку  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . Проведём через неё плоскости, параллельные осям координат. Получаем область  $D_P$ , ограниченную плоскостями  $X_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $x_i = \xi_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , а также плоскостью  $T$ . Плоскость  $x_4 = \xi_1$  разбивает область  $D_P$  на две части:  $D^1$  (отвечает условию  $x_4 > \xi_1$  и определяется неравенствами  $0 < x_1 < \xi_1$ ,  $0 < x_2 < \xi_2$ ,  $0 < x_3 < \xi_3$ ,  $\xi_1 < x_4 < \xi_4$ ) и  $D^2$  (соответствует условию  $x_4 < \xi_1$  и может быть задана двумя системами неравенств:

- 1)  $0 < x_1 < \xi_1$ ,  $0 < x_2 < \xi_2$ ,  $0 < x_3 < \xi_3$ ,  $x_1 < x_4 < \xi_1$ ;
- 2)  $0 < x_1 < x_4$ ,  $0 < x_2 < \xi_2$ ,  $0 < x_3 < \xi_3$ ,  $0 < x_4 < \xi_1$ .

Обозначим пересечение замыкания области  $D^1$  с плоскостями  $X_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , через  $X_i^1$ , с плоскостью  $x_4 = \xi_1$  – через  $E^1$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Аналогично обозначим пересечение замыкания области  $D^2$  с плоскостями  $X_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , через  $X_i^2$ , с плоскостью  $x_4 = \xi_1$  – через  $E^2$ , с плоскостью  $T$  – через  $S$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^2$ ,  $i = 2, 3$ .

Матрица Римана–Адамара задачи Дарбу имеет вид

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (h_{ij}), \quad i, j = \overline{1, 4},$$

при этом

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \begin{cases} \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D^1, \\ \mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D^2. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь  $\mathbf{Q} = \text{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4)$ , где вектор-функции  $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4})$  являются решениями задачи Дарбу в  $D^2$  для сопряжённой системы

$$\begin{aligned}
q_{i1x_1} &= -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3} - a_{41}q_{i4}, & q_{i2x_2} &= -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3} - a_{42}q_{i4}, \\
q_{i3x_3} &= -a_{13}q_{i1} - a_{23}q_{i2} - a_{43}q_{i4}, & q_{i4x_4} &= -a_{14}q_{i1} - a_{24}q_{i2} - a_{34}q_{i3}
\end{aligned}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{x_4=x_1} = 0, \quad q_{i2}|_{x_2=\xi_2} = 0, \quad q_{i3}|_{x_3=\xi_3} = 0, \quad q_{i4}|_{x_4=\xi_1} = r_{i4}|_{x_4=\xi_1}. \quad (22)$$

Последнее условие в (22) можно записать в виде  $[h_{i4}]|_{x_4=\xi_1} = 0$ , где  $[h_{i4}]|_{x_4=\xi_1}$  – скачок функции  $h_{i4}$  на плоскости  $x_4 = \xi_1$ .

Строка с номером  $i$  в (20) имеет вид

$$(r_{i1}u_1)_{x_1} + (r_{i2}u_2)_{x_2} + (r_{i3}u_3)_{x_3} + (r_{i4}u_4)_{x_4} = r_{i1}f_1 + r_{i2}f_2 + r_{i3}f_3 + r_{i4}f_4. \quad (23)$$

Проинтегрируем тождество (23) по области  $D^1$ :

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1^1} r_{i1}u_1(\xi_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 - \iint_{X_1^1} r_{i1}u_1(0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \\ & + \iint_{D_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 - \iint_{X_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{D_3^1} r_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_{X_3^1} r_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{D_4^1} r_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_4) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_{E^1} r_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_1) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 = \\ & = \iint_{D^1} (r_{i1}f_1 + r_{i2}f_2 + r_{i3}f_3 + r_{i4}f_4)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь у  $r_{ij}$  указаны только первые четыре аргумента, остальные четыре аргумента везде  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . В (24), согласно (19), первые слагаемые в каждой строке обращаются в тождественный нуль, если  $i \neq j$ ; если же  $i = j$ , то  $r_{ij} \equiv 1$ .

Теперь проинтегрируем (23) по области  $D^2$ :

$$\begin{aligned} & \iint_S q_{i1}u_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \iint_{X_1^2} q_{i1}u_1(0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \\ & + \iint_{D_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 - \iint_{X_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{D_3^2} q_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_{X_3^2} q_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{E^2} q_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_1) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_S q_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 = \\ & = \iint_{D^2} (q_{i1}f_1 + q_{i2}f_2 + q_{i3}f_3 + q_{i4}f_4)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь снова у  $q_{ij}$  указаны только первые четыре аргумента, остальные четыре аргумента везде  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . В (25), согласно (22), первые слагаемые в первых трёх строках обращаются в тождественный нуль.

Складывая (24) и (25) при  $i = \overline{1, 4}$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_3} \int_{\xi_1}^{\xi_4} u_1(\xi_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{11} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{12} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{13} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{14} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{1i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_3} \int_{\xi_1}^{\xi_4} u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{21} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{22} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{23} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{24} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{2i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_4} u_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{31} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{32} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{33} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{34} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{3i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_3} u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_4) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{41} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{42} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{43} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{44} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{4i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Правые части равенств (26)–(29), которые обозначим через  $F_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , известны, поскольку выражаются через элементы матрицы Римана–Адамара и данные задачи Дарбу.

Продифференцировав (26)–(29), получим

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \frac{\partial^3 F_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_2 \partial \xi_3 \partial \xi_4}, \quad u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{\partial^3 F_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3 \partial \xi_4}, \\ u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \frac{\partial^3 F_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_4}, \quad u_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{\partial^3 F_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3}. \end{aligned} \quad (30)$$

Это решение задачи Дарбу (15), (16) в терминах матрицы Римана–Адамара (21).

Работа выполнена за счёт средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
4. Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С. Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
5. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
6. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 349–363.
7. Бицадзе А.В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.
8. Чекмарев Т.В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.
9. Mironova L.B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.
10. Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Метод Римана–Адамара для одной системы в трёхмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1063–1070.
11. Миронова Л.Б. О методе Римана в  $\mathbb{R}^n$  для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.

Самарский государственный  
технический университет,  
Елабужский институт (филиал)  
Казанского (Приволжского)  
федерального университета

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.  
После доработки 02.02.2023 г.  
Принята к публикации 16.03.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.954

О ВЛИЯНИИ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ  
НА РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2023 г. Л. Е. Россовский, Р. В. Шамин

Рассмотрена неоднородная краевая задача со смешанными краевыми условиями для уравнения Лапласа в области, представляющей такое возмущение  $\Pi_\gamma$  прямоугольника  $\Pi$ , при котором одна из его сторон заменена некоторой кривой  $\gamma$  минимальной гладкости. Получена оценка разности решений возмущённой и невозмущённой задач в норме пространства Соболева  $H^1$  на общей области их определения.

DOI: 10.31857/S0374064123050096, EDN: CYGMPB

**Введение.** В гидродинамике идеальной жидкости со свободной поверхностью возникает необходимость решения задачи Дирихле–Неймана для уравнения Лапласа, которая состоит в нахождении гармонической функции  $u(x, y)$  в плоской области, ограниченной горизонтальным отрезком  $\{y = h, 0 \leq x \leq 2\pi\}$ , двумя вертикальными отрезками  $\{x = 0, -h \leq y \leq h\}$  и  $\{x = 2\pi, -h \leq y \leq h\}$  и кривой  $\gamma$ , соединяющей точки  $x = 0, y = -h$  и  $x = 2\pi, y = -h$ , и моделирующей неровности дна. При этом  $u(x, y)$  является  $2\pi$ -периодической функцией по переменной  $x$ , удовлетворяет условию Дирихле с заданной граничной функцией на  $\{(x, h) : x \in (0, 2\pi)\}$  и однородному условию Неймана на  $\gamma$ . Такие задачи часто возникают при моделировании волн цунами и “волн-убийц” [1, 2]. Как правило, их решение не имеет теоретических и вычислительных трудностей, но важным остаётся вопрос о влиянии нерегулярности дна на динамику поверхностных волн. В реальных ситуациях морское дно представляет собой весьма нерегулярную поверхность, что в нашей модели отражено отсутствием предположений о гладкости кривой  $\gamma$ . Естественным образом возникает задача анализа зависимости решения (функции  $u(x, y)$ ) от  $\gamma$ .

Рассматриваются обобщённые решения из пространства Соболева  $H^1$  задач в прямоугольнике и в возмущённой области. Эти решения существуют и единственны, для них приводится вариационное свойство, позволяющее оценить разность этих решений по норме пространства  $H^1$  на общей области их определения корнем квадратным из максимальной высоты “неровностей дна”. Стоит отметить, что подход, основанный на вариационных свойствах собственных функций и собственных значений (minimax principle), играет фундаментальную роль в вопросах спектральной устойчивости при возмущении области краевых задач для эллиптических дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [3–7]).

Зафиксировав  $h > 0$ , рассмотрим следующую периодическую по  $x$  краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике  $\Pi_{-h} = (0, 2\pi) \times (-h, h)$ :

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi_{-h}, \quad (1)$$

$$u|_{y=h} = \varphi(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2\pi}, \quad y \in (-h, h), \quad (3)$$

$$u_y|_{y=-h} = 0, \quad x \in (0, 2\pi). \quad (4)$$

Её формальное решение  $u = u_{-h}$ , найденное методом разделения переменных, имеет вид

$$u_{-h}(x, y) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(k(y+h))}{\operatorname{ch}(2kh)} (\varphi_{k,1} \cos(kx) + \varphi_{k,2} \sin(kx)), \quad (5)$$

где числа  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{k,1}$ ,  $\varphi_{k,2}$  – коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$  по тригонометрической системе

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx, \quad \varphi_{k,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos kx dx, \quad \varphi_{k,2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Все функции и используемые функциональные пространства вещественные. Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (5) в пространстве Соболева  $H^1(\Pi_{-h})$  является сходимость числового ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\varphi_{k,1}^2 + \varphi_{k,2}^2) < \infty. \quad (6)$$

Последнее условие эквивалентно принадлежности граничной функции  $\varphi(x)$  следовому пространству  $H^{1/2}(S^1)$  на окружности  $S^1$ . Этот факт элементарно проверяется и хорошо известен. Будем предполагать, что условие (6) выполнено, тогда функция  $u_{-h}(x, y)$ , заданная формулой (5), принадлежит пространству  $H^1(\Pi_{-h})$ , удовлетворяет в смысле следов условию (2) и первому из условий (3), а также оценке

$$\|u_{-h}\|_{H^1(\Pi_{-h})} \leq c \|\varphi\|_{H^{1/2}(S^1)}$$

с положительной постоянной  $c$ , зависящей лишь от  $h$ .

**1. Обобщённые решения возмущённой и невозмущённой задач.** Для того чтобы сформулировать понятие обобщённого решения краевой задачи (1)–(4), введём в  $H^1(\Pi_{-h})$  замкнутое подпространство

$$\tilde{H}^1(\Pi_{-h}) = \{v \in H^1(\Pi_{-h}) : v|_{y=h} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=2\pi}\}$$

со скалярным произведением

$$(v_1, v_2)_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})} = \iint_{\Pi_{-h}} \nabla v_1 \nabla v_2 dx dy,$$

эквивалентным стандартному скалярному произведению в  $H^1(\Pi_{-h})$ .

Формально умножив уравнение (1) на произвольную функцию  $v$  из пространства  $\tilde{H}^1(\Pi_{-h})$ , проинтегрировав по области  $\Pi_{-h}$  и воспользовавшись формулой Остроградского, получим

$$\iint_{\Pi_{-h}} \nabla u \nabla v dx dy = 0, \quad (7)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi_{-h}} \frac{\partial u}{\partial n} v dS &= \int_0^{2\pi} u_y(x, h) v(x, h) dx - \int_0^{2\pi} u_y(x, -h) v(x, -h) dx + \int_{-h}^h u_x(2\pi, y) v(2\pi, y) dy - \\ &\quad - \int_{-h}^h u_x(0, y) v(0, y) dy = 0. \end{aligned}$$

Действительно, первый интеграл в средней части обращается в нуль за счёт условия  $v|_{y=h} = 0$ , второй – в силу (4), а для третьего и четвёртого интегралов, используя второе из условий (3), будем иметь

$$\int_{-h}^h u_x(2\pi, y) v(2\pi, y) dy - \int_{-h}^h u_x(0, y) v(0, y) dy = \int_{-h}^h u_x(2\pi, y) (v(2\pi, y) - v(0, y)) dy = 0,$$

так как  $v|_{x=0} = v|_{x=2\pi}$ .



Назовём функцию  $u \in H^1(\Pi_{-h})$  *обобщённым решением* задачи (1)–(4), если она удовлетворяет условию (2) и первому из условий (3) в смысле следов функций из  $H^1(\Pi_{-h})$ , и для всякой функции  $v \in \tilde{H}^1(\Pi_{-h})$  выполняется интегральное тождество (7). Легко проверить, что функция  $u_{-h}$ , заданная рядом (5), является обобщённым решением задачи (1)–(4).

Для последующих рассуждений удобно сделать все краевые условия однородными. Определим срезающую функцию  $\eta(y) \in C^\infty(-\infty, h]$ :

$$\eta(y) = \begin{cases} 1, & h/2 < y < h, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

и положим  $\Phi(x, y) = \eta(y)u_{-h}(x, y)$ . Имеем  $\Phi \in H^1(\Pi_{-h})$ ,  $\Phi|_{y=h} = \varphi$  и  $\Phi|_{x=0} = \Phi|_{x=2\pi}$ , причём  $\Phi = 0$  при  $y < 0$ . Понятно, что функция  $u$  является обобщённым решением задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда функция  $w = u - \Phi$  принадлежит пространству  $\tilde{H}^1(\Pi_{-h})$  и удовлетворяет интегральному тождеству

$$(w, v)_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})} = - \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla v \, dx \, dy, \quad v \in \tilde{H}^1(\Pi_{-h}), \quad (8)$$

где  $\Pi_0 = (0, 2\pi) \times (0, h)$ . Поскольку правая часть равенства (8) является по  $v$  непрерывным линейным функционалом на пространстве  $\tilde{H}^1(\Pi_{-h})$ , существование и единственность обобщённого решения  $w = w_{-h}$  краевой задачи с однородными краевыми условиями очевидным образом следуют из теоремы Рисса. При этом на функции  $w_{-h} \in \tilde{H}^1(\Pi_{-h})$  функционал

$$\frac{1}{\|v\|_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla v \, dx \, dy \right|$$

достигает своего максимума на пространстве  $\tilde{H}^1(\Pi_{-h})$ . Действительно,

$$\|w_{-h}\|_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})}^2 = - \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-h} \, dx \, dy$$

в силу (8). Поэтому справедливы равенства

$$\frac{1}{\|w_{-h}\|_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-h} \, dx \, dy \right| = \|w_{-h}\|_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})} = \sup_{v \in \tilde{H}^1(\Pi_{-h})} \frac{1}{\|v\|_{\tilde{H}^1(\Pi_{-h})}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla v \, dx \, dy \right|.$$

В то же время, конечно,  $w_{-h} = (1 - \eta)u_{-h}$ , где  $u_{-h}$  – функция, определяемая по формуле (5).

Наряду с исходным прямоугольником  $\Pi_{-h}$ , будем рассматривать также “возмущённый прямоугольник”  $\Pi_\gamma$ , удовлетворяющий следующим требованиям: граница  $\Pi_\gamma$  состоит из горизонтального отрезка  $\{y = h, 0 \leq x \leq 2\pi\}$ , двух вертикальных отрезков  $\{x = 0, -h \leq y \leq h\}$  и  $\{x = 2\pi, -h \leq y \leq h\}$  и некоторой кривой  $\gamma$ , соединяющей точки  $x = 0, y = -h$  и  $x = 2\pi, y = -h$ . При этом  $\Pi_\gamma$  является областью (т.е. связным множеством) и, кроме того,  $\gamma$  целиком содержится в прямоугольнике  $[0, 2\pi] \times [-h, -\kappa h]$  для некоторого числа  $\kappa \in (0, 1)$ , так что  $\Pi_{-\kappa h} \subset \Pi_\gamma \subset \Pi_{-h}$ , где  $\Pi_{-\kappa h} = (0, 2\pi) \times (-\kappa h, h)$ .

Гильбертовы пространства  $\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)$ ,  $\tilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$  вводятся аналогично  $\tilde{H}^1(\Pi_{-h})$ , например,

$$\tilde{H}^1(\Pi_\gamma) = \{v \in H^1(\Pi_\gamma) : v|_{y=h} = 0, \quad v|_{x=0} = v|_{x=2\pi}\}.$$

Для того чтобы интеграл

$$(v_1, v_2)_{\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)} = \iint_{\Pi_\gamma} \nabla v_1 \nabla v_2 \, dx \, dy$$

задавал в  $\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)$  эквивалентное скалярное произведение, потребуем выполнения для функций из  $H^1(\Pi_\gamma)$ , имеющих нулевой след при  $y = h$ , неравенства Фридрихса, что связано (в отличие от пространства  $\dot{H}^1(\Pi_\gamma)$ ) с существованием непрерывного оператора продолжения из  $H^1(\Pi_\gamma)$  в  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Построение такого оператора возможно, если граница  $\partial\Pi$  удовлетворяет условиям *минимальной гладкости*. Точная формулировка приведена в книге [8, с. 224], но обычно просто пишут  $\partial\Pi_\gamma \in \text{Lip } 1$ .

Имеют место естественные непрерывные вложения  $\tilde{H}^1(\Pi_{-h}) \subset \tilde{H}^1(\Pi_\gamma) \subset \tilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$  (с нормами, не превосходящими единицы).

При неизменной граничной функции  $\varphi$  нас будет интересовать решение задачи, аналогичной (1)–(4) в области  $\Pi_\gamma$ :

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi_\gamma, \quad (9)$$

$$u|_{y=h} = \varphi(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (10)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2\pi}, \quad y \in (-h, h), \quad (11)$$

$$(\partial u / \partial n)|_\gamma = 0. \quad (12)$$

Под обобщённым решением краевой задачи (9)–(12) мы понимаем функцию  $u \in H^1(\Pi_\gamma)$ , удовлетворяющую в смысле следа условию (10) и первому из условий (11), и обращающую в нуль интеграл  $\iint_{\Pi_\gamma} \nabla u \nabla v \, dx \, dy$  при любой функции  $v \in \tilde{H}^1(\Pi_\gamma)$ . Тогда легко видеть, что обобщённое решение  $u = u_\gamma$  задачи (9)–(12) существует и единственно и может быть представлено в виде  $u_\gamma = w_\gamma + \Phi$ , где функция  $\Phi$  та же, что и раньше, а функция  $w_\gamma \in \tilde{H}^1(\Pi_\gamma)$  однозначно определяется из интегрального тождества

$$(w, v)_{\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)} = - \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla v \, dx \, dy, \quad v \in \tilde{H}^1(\Pi_\gamma). \quad (13)$$

При этом функционал

$$\frac{1}{\|v\|_{\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla v \, dx \, dy \right|$$

принимает на функции  $w_\gamma$  наибольшее значение, равное  $\|w_\gamma\|_{\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)}$ . Отметим, что интегралы в (8) и (13) берутся по одному и тому же прямоугольнику  $\Pi_0$ , независимо от того, в какой области определяется решение.

**2. Сравнение решений.** Основная цель работы – сравнить  $u_\gamma$  и  $u_{-h}$  на общей области определения  $\Pi_\gamma$ . Положим  $l = (1 - \kappa)h$  (можно сказать, что  $l$  – это максимальная высота “неровностей дна”).

**Теорема.** *Справедлива оценка*

$$\|u_\gamma - u_{-h}\|_{H^1(\Pi_\gamma)} \leq c \|\varphi\|_{H^{1/2}(S^1)} \left( \frac{l}{h-l} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

где постоянная  $c > 0$  зависит только от  $h$ .

**Доказательство.** Учтём, что разность  $u_\gamma - u_{-h}$  совпадает с  $w_\gamma - w_{-h}$ , поэтому достаточно оценить функцию  $w_\gamma - w_{-h}$  по норме пространства  $\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)$ . Для краткости будем обозначать  $(\cdot, \cdot)_\gamma = (\cdot, \cdot)_{\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)}$ ,  $\|\cdot\|_\gamma = \|\cdot\|_{\tilde{H}^1(\Pi_\gamma)}$  (и аналогично с заменой  $\gamma$  на  $-h$  или на  $-\kappa h$ ). Опираясь на определение функций  $w_{-h}$  и  $w_\gamma$ , т.е. на интегральные тождества (8) и (13), будем иметь

$$\begin{aligned} \|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma^2 &= \|w_\gamma\|_\gamma^2 + \|w_{-h}\|_\gamma^2 - 2(w_\gamma, w_{-h})_\gamma \leq \|w_\gamma\|_\gamma^2 + \|w_{-h}\|_{-h}^2 - 2(w_\gamma, w_{-h})_\gamma = \\ &= \|w_\gamma\|_\gamma^2 - \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-h} \, dx \, dy + 2 \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-h} \, dx \, dy = \end{aligned}$$

$$= \|w_\gamma\|_\gamma^2 + \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-h} dx dy = \|w_\gamma\|_\gamma^2 - \|w_{-h}\|_{-h}^2. \quad (15)$$

Здесь мы воспользовались тем, что сужение  $w_{-h}$  на  $\Pi_\gamma$  можно подставлять в качестве пробной функции  $v$  в интегральное тождество (13), обеспечивая равенство

$$(w_\gamma, w_{-h})_\gamma = - \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-h} dx dy.$$

Заметим, что из соотношения (15) вытекает, в частности, монотонность нормы решения по области:  $\|w_{-h}\|_{-h} \leq \|w_\gamma\|_\gamma$ . По той же причине  $\|w_\gamma\|_\gamma \leq \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}$ , где  $w_{-\kappa h} \in \tilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$  – решение соответствующей задачи в  $\Pi_{-\kappa h}$ , так что

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma^2 \leq \|w_\gamma\|_\gamma^2 - \|w_{-h}\|_{-h}^2 \leq \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}^2 - \|w_{-h}\|_{-h}^2. \quad (16)$$

По функции  $w_{-\kappa h} \in \tilde{H}^1(\Pi_{-\kappa h})$  определим функцию  $g(x, y)$  в  $\Pi_{-h}$  формулой

$$g(x, y) = \begin{cases} w_{-\kappa h}(x, y), & 0 < y < h, \\ w_{-\kappa h}(x, \kappa y), & -h < y < 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что  $g \in \tilde{H}^1(\Pi_{-h})$ , при этом имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \|g\|_{-h}^2 &= \|w_{-\kappa h}\|_0^2 + \iint_{\Pi_{-h} \setminus \Pi_0} ((w_{-\kappa h})_x^2(x, \kappa y) + \kappa^2 (w_{-\kappa h})_y^2(x, \kappa y)) dx dy = \\ &= \|w_{-\kappa h}\|_0^2 + \iint_{\Pi_{-\kappa h} \setminus \Pi_0} (\kappa^{-1} (w_{-\kappa h})_x^2 + \kappa (w_{-\kappa h})_y^2) dx dy \leq \\ &\leq \|w_{-\kappa h}\|_0^2 + \kappa^{-1} \iint_{\Pi_{-\kappa h} \setminus \Pi_0} |\nabla w_{-\kappa h}|^2 dx dy \leq \kappa^{-1} \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}^2, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{1}{\|g\|_{-h}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla g dx dy \right| \geq \kappa^{1/2} \frac{1}{\|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla w_{-\kappa h} dx dy \right| = \kappa^{1/2} \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}.$$

Отсюда следует, что

$$\|w_{-h}\|_{-h} = \sup_{v \in \tilde{H}^1(\Pi_{-h})} \frac{1}{\|v\|_{-h}} \left| \iint_{\Pi_0} \nabla \Phi \nabla v dx dy \right| \geq \kappa^{1/2} \|w_{-\kappa h}\|_{-\kappa h}.$$

Используя это неравенство в (16), будем иметь

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma^2 \leq (\kappa^{-1} - 1) \|w_{-h}\|_{-h}^2.$$

Если вспомнить что  $w_{-h} = (1 - \eta)u_{-h}$  и перейти к обозначению  $l$ , то полученную оценку можно записать в виде

$$\|w_\gamma - w_{-h}\|_\gamma \leq \left( \frac{l}{h - l} \right)^{1/2} \|(1 - \eta)u_{-h}\|_{-h}$$

или, окончательно,

$$\|u_\gamma - u_h\|_{H^1(\Pi_\gamma)} \leq c(h) \|\varphi\|_{H^{1/2}(S^1)} \left( \frac{l}{h-l} \right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSSF-2023-0016).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М., 1946.
2. *Шамин Р.В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2008. Т. 28. С. 3–144.
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1953.
4. *Babuška I., Vrborný R.* Continuous dependence of the eigenvalues on the domain // *Czechoslovak Math. J.* 1965. V. 15. P. 169–178.
5. *Arrieta J.M., Hale J.K., Qing Han.* Eigenvalue problems for nonsmoothly perturbed domains // *J. Differ. Equat.* 1991. V. 91. P. 24–52.
6. *Burenkov V.I., Davies E.B.* Spectral stability of the Neumann laplacian // *J. Differ. Equat.* 2002. V. 186. P. 485–508.
7. *Россовский Л.Е.* О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Мат. заметки.* 2011. Т. 90. № 6. С. 885–901.
8. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973.

Российский университет дружбы народов,  
г. Москва,  
МИРЭА – Российский технологический  
университет, г. Москва

Поступила в редакцию 02.03.2023 г.  
После доработки 02.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

# О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

© 2023 г. С. Н. Тимергалиев

Доказывается существование решений краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных изотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесённых к изометрическим координатам. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064123050102, EDN: CYVKAG

**1. Постановка задачи.** В плоской односвязной ограниченной области  $\Omega$  рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}(DT^{j\lambda})_{\alpha\lambda} + DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu} + DR^j &= 0, \quad j = 1, 2, \\ (DT^{\lambda\mu} w_{3\alpha\mu})_{\alpha\lambda} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha\lambda} + DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} + DR^3 &= 0, \\ (DM^{j\lambda})_{\alpha\lambda} - DT^{j3} + DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu} + DL^j &= 0, \quad j = 1, 2,\end{aligned}\tag{1}$$

при выполнении на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  условий

$$\begin{aligned}D(T^{j1} d\alpha^2/ds - T^{j2} d\alpha^1/ds) &= P^j(s), \quad j = 1, 2, \\ D(T^{13} d\alpha^2/ds - T^{23} d\alpha^1/ds + T^{1\lambda} w_{3\alpha\lambda} d\alpha^2/ds - T^{2\lambda} w_{3\alpha\lambda} d\alpha^1/ds) &= P^3(s), \\ D(M^{j1} d\alpha^2/ds - M^{j2} d\alpha^1/ds) &= N^j(s), \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}T^{ij} &\equiv T^{ij}(\gamma) = D_{\lambda-1}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D_{\lambda}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}, \\ \gamma &= (\gamma^0, \gamma^1), \quad \gamma^k = (\gamma_{11}^k, \gamma_{12}^k, \gamma_{13}^k, \gamma_{22}^k, \gamma_{23}^k, \gamma_{33}^k), \quad k = 0, 1; \\ D_m^{ijkn} &= D_m^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2) = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) (\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0, 2}, \quad i, j, k, n = 1, 2, 3; \\ B^{1111} &= B^{2222} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B^{1122} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad B^{1212} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad B^{1313} = B^{2323} = \frac{E\kappa^2}{2(1 + \nu)}; \\ \gamma_{jj}^0 &= w_{j\alpha j} - G_{jj}^{\lambda} w_{\lambda} - B_{jj} w_3 + w_{3\alpha j}^2/2, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_{12}^0 &= w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda} w_{\lambda} - 2B_{12} w_3 + w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \quad \gamma_{jj}^1 = \psi_{j\alpha j} - G_{jj}^{\lambda} \psi_{\lambda}, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_{12}^1 &= \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda} \psi_{\lambda}, \quad \gamma_{j3}^0 = w_{3\alpha j} + \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \gamma_{33}^0 = \gamma_{k3}^1 \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3;\end{aligned}\tag{3}$$

остальные  $B^{ijkn}$  равны нулю,  $\alpha^j = \alpha^j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , – уравнения кривой  $\Gamma$ ,  $s$  – длина дуги  $\Gamma$ ; нижний индекс  $\alpha^\lambda$  в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по  $\alpha^\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2$ .

Если выражения  $T^{ij}$ ,  $M^{ij}$  из (3) подставить в систему (1), то относительно функций  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  получим систему пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и нелинейных относительно  $w_3$ . Совместно с граничными условиями (2) система (1) описывает состояние равновесия упругой полой изотропной неоднородной оболочкой с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к криволинейной системе координат. При этом  $T^{ij}$  – усилия,  $M^{ij}$  – моменты;  $\gamma_{ij}^k$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, 1$ , – компоненты деформаций срединной поверхности  $S_0$  оболочки гомеоморфной области  $\Omega$ ;  $w_j$ ,  $j = 1, 2$ , и  $w_3$  – соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек  $S_0$ ;  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2$ , – углы поворота нормальных сечений  $S_0$ ;  $B_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – составляющие тензора кривизны поверхности  $S_0$ ,  $G_{ij}^\lambda$  – символы Кристоффеля, которые в изометрической системе координат даются формулами [2, с. 18]

$$G_{jj}^1 = (-1)^{j-1} \Lambda_{\alpha^1} / (2\Lambda), \quad G_{jj}^2 = (-1)^j \Lambda_{\alpha^2} / (2\Lambda), \quad G_{12}^j = G_{21}^j = \Lambda_{\alpha^{3-j}} / (2\Lambda), \quad j = 1, 2; \quad (4)$$

$R^j$ ,  $P^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $L^k$ ,  $N^k$ ,  $k = 1, 2$ , – компоненты внешних сил, действующих на оболочку;  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $\kappa^2$  – коэффициент сдвига,  $D = D(\alpha^1, \alpha^2) = \sqrt{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$  – якобиан ( $A_{ij}$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $S_0$ ; в изометрических координатах  $A_{11} = A_{22} = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $A_{12} = 0$  и  $D = \Lambda$ ),  $h_0 = \text{const}$  – толщина оболочки;  $\alpha^1$ ,  $\alpha^2$  – декартовы координаты точек области  $\Omega$ .

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам – от 1 до 2.

**Задача (1), (2).** Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

В настоящее время достаточно полно изучена разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих состояние равновесия оболочек в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява [2–5]. В то же время актуальной задачей является исследование подобных краевых задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява [2, с. 349]. Имеется ряд работ [6–13], в которых в рамках сдвиговой модели Тимошенко исследована разрешимость и доказаны теоремы существования обобщённых решений в соболевских пространствах нелинейных задач для пологих оболочек, отнесённых к евклидовой системе координат. В основе исследований в [6–13] лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям.

В данной статье метод работ [6–13] развивается на случай пологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко, отнесённых к изометрической системе координат. Переход к изометрическим координатам, с одной стороны, расширяет класс рассматриваемых оболочек, а с другой – существенно усложняет систему дифференциальных уравнений.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(а) имеют место включения

$$B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in (W_p^{(1)}(\Omega) \cap C_\beta(\overline{\Omega})) \times L_1[-h_0/2, h_0/2], \quad i, j, k, n = 1, 2, 3,$$

$$B_{\lambda\mu}(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad \lambda, \mu, k = 1, 2;$$

(б) якобиан  $D = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) > 0$  в  $\overline{\Omega}$  и имеет место включение  $\Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(4)}(\Omega)$ ;

(с) компоненты внешних сил  $R^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и  $L^k$ ,  $k = 1, 2$ , принадлежат пространству  $L_p(\Omega)$ , а компоненты  $P^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $N^k$ ,  $k = 1, 2$ , – пространству  $C_\beta(\Gamma)$ ; внешние силы самоуравновешены;

(д)  $\Omega$  – произвольная односвязная область с границей  $\Gamma \in C_\beta^1$ .

Здесь и далее  $2 < p < 4/(2 - \beta)$ ,  $0 < \beta < 1$ .

**Определение.** Назовём вектор обобщённых перемещений  $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$  обобщённым решением задачи (1), (2), если  $a$  принадлежит пространству  $W_p^{(2)}(\Omega)$ , почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Обозначим  $W_p^{(j)}(\Omega)$  – пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств  $W_p^{(2)}(\Omega)$  с  $p > 2$  обобщённое решение  $a$  принадлежит пространству  $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ . Здесь и везде далее  $\alpha = (p-2)/p$ . Заметим, что при  $2 < p < 4/(2-\beta)$  справедливо неравенство  $\alpha < \beta/2$ .

Соотношения для компонент деформаций в (3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = e_{sij}^k + e_{cij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, \quad (5)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} e_{sjj}^0 &= w_{j\alpha^j}, \quad e_{sj3}^0 = \gamma_{j3}^0, \quad e_{sjj}^1 = \psi_{j\alpha^j}, \quad j = 1, 2, \quad e_{s12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad e_{s12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \\ e_{cjj}^0 &= -G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3, \quad e_{cjj}^1 = -G_{jj}^\lambda \psi_\lambda, \quad j = 1, 2, \quad e_{c12}^0 = -2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3, \\ e_{c12}^1 &= -2G_{12}^\lambda \psi_\lambda, \quad \chi_{jj}^0 = w_{3\alpha^j}^2/2, \quad j = 1, 2, \quad \chi_{12}^0 = w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \\ \chi_{ij}^1 &= \chi_{j3}^0 = e_{s33}^0 = e_{sj3}^1 = e_{cij}^k \equiv 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (6)$$

**2. Построение интегральных представлений для обобщённых перемещений.** Введём в рассмотрение две комплексные функции:

$$\begin{aligned} \omega_j &= \omega_j(z) = D\{D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + \\ &+ i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2})]\}, \quad j = 1, 2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (1) усилия  $T^{jk}$ , моменты  $M^{jk}$  и компоненты деформаций  $\gamma_{jk}^n$  заменим их выражениями из (3), (5). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу  $i$ , а к четвёртому уравнению – пятое, умноженное также на  $i$ , систему (1) при помощи функций  $\omega_j(z)$  из (7) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\begin{aligned} \omega_j \bar{z} + h^j(a) &= f_c^j(a) + f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j = 1, 2, \\ DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) &= f_c^3(a) + f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_j \bar{z} &= (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1, 2, \\ h^j(a) &= (-1)^{\mu-1}[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^3-\mu} \nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + i(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^\mu} \nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}] - (j-1)DD_0^{1313}(\gamma_{13}^0 + i\gamma_{23}^0)/2, \\ \nu_{1j} &= w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1, 2; \quad h^3(a) = (DD_0^{1313})_{\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + (DD_0^{1313})_{\alpha^\lambda} \psi_\lambda; \\ f_c^j(a) &= (f_{c3j-2} + if_{c3j-1})/2, \quad f_\chi^j(a) = (f_{\chi 3j-2} + if_{\chi 3j-1})/2, \quad j = 1, 2, \\ f_c^3(a) &= f_{c3}(a), \quad f_\chi^3(a) = f_{\chi 3}(a), \quad f_{cj}(a) = -(DT^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(e), \\ f_{c3+j}(a) &= -(DM^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi j}(a) = -(DT^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\chi), \\ f_{\chi 3+j}(a) &= -(DM^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\chi), \quad j = 1, 2, \\ f_{c3}(a) &= -DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi 3}(a) = -(DT^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} - DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\chi), \\ F^1 &= D(R^1 + iR^2)/2, \quad F^2 = D(L^1 + iL^2)/2, \quad F^3 = DR^3; \\ e &= e_s + e_c, \quad e_s = (e_s^0, e_s^1), \quad e_c = (e_c^0, e_c^1), \quad e_s^k = (e_{s11}^k, e_{s12}^k, e_{s13}^k, e_{s22}^k, e_{s23}^k, e_{s33}^k), \\ e_c^k &= (e_{c11}^k, e_{c12}^k, e_{c13}^k, e_{c22}^k, e_{c23}^k, e_{c33}^k), \quad k = 0, 1, \quad \chi = (\chi_{11}^0, \chi_{12}^0, \chi_{22}^0); \end{aligned} \quad (9)$$

$e_{sij}^k, e_{cij}^k, \chi_{ij}^k$  определены в (6).

Отметим, что через  $e$  и  $\chi$  обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации  $\gamma$ , поэтому справедливо представление  $\gamma = e + \chi$ .

Аналогично граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(-i)^j t' \omega_k(t)] + 2(-1)^j DD_{k+\delta-2}^{1212} \nu_{\delta 3-j\alpha} d\alpha^\lambda/ds &= \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \\ &+ \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\ DD_0^{1313} [(w_{3\alpha^2} + \psi_2) d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1) d\alpha^2/ds] &= \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{cj}(a)(t) &= D[T^{j2}(e_c) d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c) d\alpha^2/ds], \quad \varphi_{c3+j}(a)(t) = D[M^{j2}(e_c) d\alpha^1/ds - \\ &- M^{j1}(e_c) d\alpha^2/ds], \quad \varphi_{\chi j}(a)(t) = D[T^{j2}(\chi) d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi) d\alpha^2/ds], \\ \varphi_{\chi 3+j}(a)(t) &= D[M^{j2}(\chi) d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi) d\alpha^2/ds], \quad j = 1, 2, \quad \varphi_{c3}(a)(t) \equiv 0, \\ \varphi_{\chi 3}(a)(t) &= D[(T^{11}(\gamma)w_{3\alpha^1} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^2}) d\alpha^2/ds - (T^{22}(\gamma)w_{3\alpha^2} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^1}) d\alpha^1/ds], \\ F^{3+j} &= -P^j, \quad j = 1, 2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

усилия  $T^{jk}$ , моменты  $M^{jk}$  определены в (3).

В основе исследования системы уравнений (8) при граничных условиях (10) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar{z}} = \rho^j, \quad j = 1, 2, \quad DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \quad (12)$$

где  $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$ ,  $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$ ,  $\rho^3 = \rho_3$  – произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству  $L_p(\Omega)$ .

Первые два уравнения в (12) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана. Их общие решения даются формулами [14, с. 29]

$$\begin{aligned} \omega_j(z) &= \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j(\Phi_j; \rho^j)(z), \\ T\rho^j(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Phi_j(z)$  – произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству  $C_\alpha(\overline{\Omega})$ .

Известно [14, с. 39–41, 46], что  $T$  – вполне непрерывный оператор в пространствах  $L_p(\Omega)$  и  $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$ , отображающий их в пространства  $C_\alpha(\overline{\Omega})$  и  $C_\alpha^{k+1}(\overline{\Omega})$  соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial T f}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial T f}{\partial z} \equiv S f = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad (14)$$

где  $S$  – линейный ограниченный оператор в пространствах  $L_p(\Omega)$ ,  $p > 1$ , и  $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$ .

Представления (13) в свою очередь при помощи функций  $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$ ,  $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$  запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega_{j\bar{z}}^0 = i(d_{2j-1}[\omega_1] + d_{2j}[\omega_2]) \equiv iT_j\omega, \quad j = 1, 2, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2), \quad (15)$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + iTT_j\omega(z) \equiv \omega_j^0(\Psi_j; \omega)(z), \quad j = 1, 2. \quad (16)$$



В (15), (16) приняты обозначения

$$\begin{aligned} d_{2j+\lambda-2}[\omega_\lambda] &= d_{2j+\lambda-2}^1 \omega_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d_{2j+\lambda-2}^2 \overline{\omega_\lambda}, \quad j, \lambda = 1, 2, \\ d_{3k-2}^j &= \frac{1}{4D} \left( \frac{D_1^{1111}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D_1^{1212}}{\delta_1} \right), \quad d_2^j = d_3^j = \frac{1}{4D} \left( \frac{D_1^{1212}}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D_1^{1111}}{\delta_0} \right), \quad k, j = 1, 2, \\ \delta_0 &= D_0^{1111} D_2^{1111} - (D_1^{1111})^2, \quad \delta_1 = D_0^{1212} D_2^{1212} - (D_1^{1212})^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$\Psi_j(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$  – произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (12) запишем в виде

$$w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3/(DD_0^{1313}), \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = \operatorname{Re} \Psi_3(z) - \tilde{T} \tilde{\rho}_3 \equiv w_3(\Psi_3; \rho_3)(z), \quad \tilde{T} \tilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \tilde{\rho}_3(\zeta) \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\xi d\eta, \quad (18)$$

где  $\Psi_3(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$  – произвольная голоморфная функция.

Соотношения (16), (18) являются искомыми интегральными представлениями для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (13)–(18) и (8.20) из [14, с. 58] получаем

$$\begin{aligned} \nu_{jk\alpha^k} &= \operatorname{Im} [\omega_{j\bar{z}}^0 - (-1)^k \omega_{jz}^0], \quad \nu_{jk\alpha^n} = \operatorname{Re} [\omega_{jz}^0 + (-1)^k \omega_{j\bar{z}}^0], \quad k \neq n, \quad j, k, n = 1, 2, \\ \omega_{jz}^0 &= \Psi_j'(z) + iST_j\omega(z), \quad \omega_{j\bar{z}}^0 = iT_j\omega, \quad w_{3\alpha^j} = 2\operatorname{Re} (i^{j-1}w_{3z}), \quad j = 1, 2, \\ w_{3z} &= \Psi_3'(z)/2 + T\tilde{\rho}_3(z)/4, \quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -\operatorname{Re} \{i^n[\omega_{kz\bar{z}}^0 + (-1)^j(\omega_{kz\bar{z}}^0 + \omega_{k\bar{z}z}^0)]\}, \\ \nu_{kn\alpha^1\alpha^2} &= \operatorname{Re} \{i^{n-1}(\omega_{kzz}^0 - \omega_{k\bar{z}\bar{z}}^0)\}, \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2[w_{3z\bar{z}} + (-1)^{j-1}\operatorname{Re} w_{3z\bar{z}}], \quad k, n, j = 1, 2, \\ w_{3\alpha^1\alpha^2} &= -2\operatorname{Im} w_{3z\bar{z}}, \quad \omega_{kz\bar{z}}^0 = T_{k1}\omega + S_{k1}(\Phi_0'; \rho_0), \quad \omega_{k\bar{z}z}^0 = T_{k2}\omega + S_{k2}(\Phi_0'; \rho_0), \\ \omega_{kzz}^0 &= \Psi_k''(z) + S\omega_{k\zeta\bar{\zeta}}^0(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{T_k\omega(\tau)}{(\tau-z)^2} d\bar{\tau}, \quad k = 1, 2, \quad \Phi_0' = (\Phi_1', \Phi_2'), \quad \rho_0 = (\rho^1, \rho^2), \\ w_{3z\bar{z}} &= \Psi_3''(z)/2 + S\tilde{\rho}_3/4, \quad w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad T_{jk}\omega = i[d_{2j+\mu-2,k}^1\omega_\mu + (-1)^{j+\mu}d_{2j+\mu-2,k}^2\overline{\omega_\mu}], \\ S_{jk}(\Phi_0'; \rho_0) &= i[d_{2j+\mu-2,k}^1\omega_{\mu,k} + (-1)^{j+\mu}d_{2j+\mu-2,k}^2\overline{\omega_{\mu,3-k}}], \quad \omega_{j,1} \equiv \omega_{jz} = \Phi_j'(z) + S\rho^j(z), \\ \omega_{j,2} \equiv \omega_{j\bar{z}} &= \rho^j, \quad d_{m,1}^j \equiv d_{mz}^j, \quad d_{m,2}^j \equiv d_{m\bar{z}}^j, \quad j, k = 1, 2, \quad m = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (19)$$

**3. Решение задачи (1), (2).** Интегральные представления (16), (18) для обобщённых перемещений  $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$  содержат произвольные голоморфные функции  $\Phi_j(z)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\Psi_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и произвольные функции  $\rho^j(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (8) и граничным условиям (10), при этом правые части уравнений (8) и граничных условий (10) временно считаем известными. С этой целью соотношения (16), (18), (19) подставим в левые части системы (8) и граничных условий (10). В результате система уравнений (8) запишется в виде

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\Phi)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) - F^j(z), \quad j = 1, 2, 3, \quad z \in \Omega, \quad (20)$$

где через  $h_1^j(\rho)(z)$  и  $h_2^j(\Phi)(z)$  обозначены те части выражения оператора  $h^j(a)$  в (9), которые содержат функции  $\rho = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$  и  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  соответственно.

Граничные условия (10) с учётом представлений

$$\begin{aligned}
 S(T_j \Phi_0)^+(t) &= -(\bar{t}')^2 [d_{2j-1}^1(t) \Phi_1(t) + d_{2j}^1(t) \Phi_2(t)] + K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2), \\
 K_{0j}(\Phi_0)(t) &= -\frac{d_{2j+\mu-2}^1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\tau - t} \Phi_{\mu}(\tau) d\tau - (-1)^{j+\mu} \frac{d_{2j+\mu-2}^2(t)}{2\pi i} \times \\
 &\times \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\bar{\tau} - \bar{t}} \overline{\Phi_{\mu}(\tau)} d\bar{\tau} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{2j+\mu-2}^1(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^1(t)}{(\zeta - t)^2} \Phi_{\mu}(\zeta) d\xi d\eta - \\
 &- \frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{2j+\mu-2}^2(\zeta) - d_{2j+\mu-2}^2(t)}{(\zeta - t)^2} \overline{\Phi_{\mu}(\zeta)} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \\
 \psi(\tau, t) &= (\bar{\tau} - \bar{t})/(\tau - t), \quad \psi(t, t) = (\bar{t}')^2,
 \end{aligned} \tag{21}$$

получаемых при помощи соотношений (13)–(15), формул (4.7), (4.9) из [14, с. 28] и формул Сохоцкого [15, с. 66], преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 &(-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re} [i^j t' \Phi_{\lambda}(t)] - 2DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} [i^{j-1} t' \Psi'_{\lambda}(t)] - 2DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} [i^j t' K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)] + \\
 &+ H_{3(k-1)+j} \rho(t) = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\
 &DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} [it' \Psi'_3(t)] + K_{03}(\Phi)(t) + H_3 \rho(t) = \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s),
 \end{aligned} \tag{22}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 H_{3(k-1)+j} \rho(t) &= \operatorname{Re} [(-i)^j t' T \rho^k(t)] - 2DD_{k+\lambda-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} \{i^j t' (I + S)(T_{\lambda} T \rho_0)^+(t)\}, \quad k, j = 1, 2, \\
 H_3 \rho(t) &= DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} [it' (T \tilde{\rho}_3(t)/2 + TT_2 T \rho_0(t))], \\
 K_{03}(\Phi)(t) &= DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} \{t' [\Psi_2(t) + iT T_2 \Phi_0(t)]\}, \\
 d_{kj}(t) &= (-1)^{j-1} [2(-1)^{\lambda} DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) d_{2\lambda+j-2}^2(t) + 3 - k - j], \quad k, j = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$I$  – тождественный оператор, операторы  $T$ ,  $S$ ,  $T_{\lambda}$  и функции  $d_j^k(t)$  определены в (13), (14), (15) и (17) соответственно;  $\Phi_{\lambda}(t) \equiv \Phi_{\lambda}^+(t)$ ,  $t \in \Gamma$ ; символ  $\Phi_{\lambda}^+(t)$  здесь и далее означает предел функции  $\Phi_{\lambda}(z)$  при  $z \rightarrow t \in \Gamma$  изнутри области  $\Omega$ .

Таким образом, для определения функций  $\rho^j \in L_p(\Omega)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\Phi_k(z) \in C_{\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\Psi_j(z) \in C_{\alpha}^1(\overline{\Omega})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , получили систему уравнений (20), (22). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями

$$\Phi_k(z) = \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k = 1, 2,$$

$$\Psi_j'(z) = i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \Psi_j'(\mu_{2j-1})(z), \quad j = 1, 2, 3, \quad \Theta(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau - z)}, \tag{24}$$

где  $\mu_j(t) \in C_{\alpha}(\Gamma)$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , – произвольные действительные функции,  $\tau' = d\tau/d\sigma$ ,  $d\sigma$  – элемент длины дуги кривой  $\Gamma$ .

Для функций  $\Psi_j(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , имеем представления

$$\begin{aligned}
 \Psi_j(z) &= i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j}, \quad j = 1, 2, 3, \\
 \Theta^0(f)(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau'} \ln \left( 1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где  $c_j$ ,  $j = \overline{1, 6}$ , – произвольные действительные постоянные, под  $\ln(1 - z/\tau)$  понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при  $z = 0$ .

Используя формулы Сохоцкого [15, с. 66], находим  $\Phi_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\Psi_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $t \in \Gamma$ . Подставляя их выражения, а также представления (25) в систему (20), (22), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций  $\rho \in L_p(\Omega)$  и  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$ :

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\mu)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) + g_c^j(z) - F^j(z), \quad z \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{n=1}^5 \left[ a_{jn}(t) \mu_n(t) + b_{jn}(t) \int_{\Gamma} \frac{\mu_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + K_j \mu(t) + H_j \rho(t) = \\ = \varphi_{cj}(a)(t) + \varphi_{\chi j}(a)(t) + g_c^{3+j}(t) - F^{3+j}(t), \quad j = \overline{1, 5}, \quad t \in \Gamma, \quad (26)$$

в которой приняты обозначения

$$K_{3(n-1)+j} \mu(t) = (-1)^j d_{n\lambda}(t) \{ \operatorname{Re} [i^j t' \Theta(\mu_{2\lambda})(t)] - i \operatorname{Re} (i^{j-1}) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda})(t) \} + \\ + 2DD_{\lambda+n-2}^{1212}(t) \{ \operatorname{Re} [i^{j+1} t' \Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)] - i \operatorname{Re} (i^j) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda-1})(t) - \operatorname{Re} [i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)] \}, \quad n, j = 1, 2, \\ K_3 \mu(t) = K_{03}(\mu)(t) - DD_0^{1313}(t) \operatorname{Re} [t' \Theta(\mu_5)(t)]; \\ g_c^2(z) = DD_0^{1313}(c_4 + ic_3)/2, \quad g_c^3(z) = -c_4(DD_0^{1313})_{\alpha^1} - c_3(DD_0^{1313})_{\alpha^2}, \\ g_c^6(t) = DD_0^{1313}(t)(c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds), \quad g_c^1(z) = g_c^{3+j}(t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 4, 5; \\ a_{3(k-1)+j, 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re} (i^j)/2, \quad b_{3(k-1)+j, 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re} (i^{j-1})/(2\pi), \\ a_{3(k-1)+j, 2\lambda-1}(t) = -DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} (i^{j-1}), \quad b_{3(k-1)+j, 2\lambda-1}(t) = DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re} (i^j)/\pi, \\ k, j, \lambda = 1, 2, \quad a_{35}(t) = -DD_0^{1313}(t)/2, \quad (27)$$

остальные  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$  равны нулю; здесь  $h_2^j(\mu)(z) \equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$ ,  $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$ ,  $j = 1, 2$ ;  $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$ ,  $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5))$ ,  $\mu_0 = (\mu_2, \mu_4)$ .

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:

- 1)  $h_1^j(\rho)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – линейные вполне непрерывные операторы в пространстве  $L_p(\Omega)$ ;
- 2)  $h_2^j(\mu)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – линейные вполне непрерывные операторы из  $C_\nu(\Gamma)$  для любого  $\nu \in (0, 1)$  в  $L_p(\Omega)$ ;
- 3)  $K_j \mu$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , – линейные вполне непрерывные операторы из  $C_\nu(\Gamma)$  для любого  $\nu \in (0, 1)$  в  $C_\gamma(\Gamma)$  при всех  $\gamma < \beta/2$ ;
- 4)  $H_j \rho$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , – линейные вполне непрерывные операторы из  $L_p(\Omega)$  в  $C_{\alpha'}(\Gamma)$  при всех  $\alpha' < \alpha$  и ограниченные операторы из  $L_p(\Omega)$  в  $C_\alpha(\Gamma)$ ;
- 5) имеют место включения  $f_c^j(a)(z)$ ,  $f_\chi^j(a)(z)$ ,  $F^j(z)$ ,  $g_c^j(z) \in L_p(\Omega)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\varphi_{cj}(a)(t)$ ,  $\varphi_{\chi j}(a)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ ,  $F^{3+j}(t)$ ,  $g_c^6(t)$ ,  $a_{jk}(t)$ ,  $b_{jk}(t) \in C_\beta(\Gamma)$ ,  $j, k = \overline{1, 5}$ .

**Доказательство.** Известно [14, с. 26–27], что интеграл типа Коши  $\theta(f)$  в (24) представляет собой ограниченный оператор из  $C_\alpha(\Gamma)$  в  $C_\alpha(\overline{\Omega})$ , а его производная  $\theta'(f)$  – ограниченный оператор из  $C_\alpha(\Gamma)$  в  $L_q(\Omega)$ ,  $1 < q < 2/(1 - \alpha)$ . Кроме того, нетрудно показать, что  $\theta(f)$  – вполне непрерывный оператор из  $C_\alpha(\Gamma)$  в  $L_p(\Omega)$  при всех  $p > 1$  и в  $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$  для любого  $\alpha' < \alpha$ . Учитывая это, а также свойства операторов  $T$ ,  $S$ , определённых в (13), (14), используя представления для производных первого порядка обобщённых перемещений в (19) и выражения для операторов  $h^j(a)$  в (9), получаем, что первые утверждения 1), 2) леммы справедливы.

Так как  $\psi(\tau, t) \in C_\beta(\Gamma) \times C_\beta(\Gamma)$  [15, с. 28–32],  $d_{k\lambda}(t) \in C_\beta(\Gamma)$ ,  $d_k^j(z)$ ,  $D_0^{1313}(z)$ ,  $D(z) \in C_\beta(\overline{\Omega})$ , то, принимая во внимание следствие 4.3 из [16, с. 124], легко убеждаемся в том,

что первые два слагаемых в правой части представления для оператора  $K_{0j}(\mu_0)$  в (21) суть вполне непрерывные операторы из  $C_\nu(\Gamma)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  в  $C_\gamma(\Gamma)$  для любого  $\gamma < \beta$ . Также нетрудно показать, что третье и четвертое слагаемые этого представления в (21) суть вполне непрерывные операторы из  $C_\nu(\Gamma)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  в  $C_\gamma(\Gamma)$ ,  $\gamma < \beta$ . Тогда получаем, что  $K_{0j}(\mu_0)$ ,  $j = 1, 2$ , – линейные вполне непрерывные операторы из  $C_\nu(\Gamma)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  в  $C_\gamma(\Gamma)$ ,  $\gamma < \beta$ . Аналогично из представления оператора  $K_{03}(\mu)$  в (23) следует, что  $K_{03}(\mu)$  – линейный вполне непрерывный оператор из  $C_\nu(\Gamma)$  в  $C_\beta(\Gamma)$  для всех  $\nu \in (0, 1)$ .

Далее два первых слагаемых в правой части формулы для оператора  $K_{3(n-1)+j}\mu$  в (27) преобразуем к виду

$$\frac{(-i)^j}{2} d_{n\lambda}(t) \left\{ \frac{(-1)^j - 1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \frac{\tau' - t'}{\tau - t} d\tau + \frac{(-1)^j}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \operatorname{Im} \left( \frac{t'}{\tau - t} \right) d\tau \right\}.$$

Следовательно, с учётом включений  $\tau', d_{n\lambda} \in C_\beta(\Gamma)$  и равенства

$$\operatorname{Im} [\tau' / (\tau - t)] = k_*(\tau, t) / |\tau - t|^{1-\beta/2},$$

где  $k_*(\tau, t) \in C_{\beta/2}(\Gamma) \times C_{\beta/2}(\Gamma)$  [15, с. 31–32, 55–56], а также следствий 4.4, 4.5 из [16, с. 125] получаем, что эти слагаемые в выражении для оператора  $K_{3(n-1)+j}\mu$  в (27) определяют линейный вполне непрерывный оператор из  $C_\nu(\Gamma)$  в  $C_\gamma(\Gamma)$  для любых  $\nu \in (0, 1)$  и  $\gamma < \beta/2$ . Аналогично показываем, что третье и четвертое слагаемые в выражении для оператора  $K_{3(n-1)+j}\mu$  в (27) обладают таким же свойством. Тогда из представлений операторов  $K_j\mu$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , в (27) вытекает справедливость утверждения 3) леммы. Справедливость утверждения 4) следует из представлений операторов  $H_j\rho$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , в (23) с учётом свойств операторов  $T$ ,  $S$ , интеграла типа Коши и соотношений

$$S(T_\lambda T \rho_0)^+(t) = T \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} T_\lambda T \rho_0 \right) (t) - \frac{1}{2} (\bar{t}')^2 T_\lambda T \rho_0(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T_\lambda T \rho_0(\tau)}{\tau - t} d\bar{\tau}, \quad \lambda = 1, 2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из [14, с. 58] и формул Сохоцкого. Справедливость утверждения 5) леммы непосредственно вытекает из формул (9), (11), (27). Лемма доказана.

Исследуем разрешимость системы уравнений (26) в пространстве  $L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ ,  $\alpha' < \alpha$ . Заметим, что любое решение  $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$  системы (26) в силу леммы 1 принадлежит пространству  $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$ . Используя выражения для  $a_{jk}(t)$ ,  $b_{jk}(t)$  из (27), вычисляем определитель

$$\det [A(t) - \pi i B(t)] = D^3 D_0^{1313} \delta_1 / (32 \delta_0) (a_1^2 - a_0 a_2), \quad a_n = D_n^{1111} + D_n^{1122}, \quad n = 0, 1, 2,$$

где  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  определены в (17), а  $A = (a_{jk})$ ,  $B = (b_{jk})$  – квадратные матрицы пятого порядка. Итак,  $\det [A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$  на границе  $\Gamma$  и для индекса системы (26) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg \frac{\det (A - \pi i B)}{\det (A + \pi i B)} \right]_{\Gamma} = 0$$

(здесь символ  $[\arg \varphi]_{\Gamma}$  означает приращение аргумента функции  $\varphi$  при обходе кривой  $\Gamma$  один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (26) применима альтернатива Фредгольма. Пусть  $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$  – решение системы (26) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (24), (25) с постоянными  $c_j = 0$ ,  $j = \overline{1, 6}$ , соответствуют голоморфные функции  $\Phi_k(z)$ ,  $\Psi_j(z)$ , которые в свою очередь по формулам (16), (18) определяют функции  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2$ . Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (8) ( $f_c^j + f_\chi^j - F^j \equiv 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) и однородным линейным граничным условиям (10) ( $\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0$ ,  $j = \overline{1, 5}$ ). Умножим действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (8) соответственно на  $w_1$

и  $w_2$ , второго уравнения – соответственно на  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , а третье уравнение – на  $w_3$ . После этого проинтегрируем по области  $\Omega$  и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (10) получаем, что  $w_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2$ , удовлетворяют системе  $\nu_{j1}\alpha^1 = 0$ ,  $\nu_{j2}\alpha^2 = 0$ ,  $\nu_{j1}\alpha^2 + \nu_{j2}\alpha^1 = 0$ ,  $w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , решение которой имеет вид

$$w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad w_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad w_3 = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1 = c_4, \quad \psi_2 = c_5, \quad (28)$$

где  $c_j$  – произвольные действительные постоянные.

Так как  $\Psi_j(0) = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $w_3(0) = 0$ , то из (28) будем иметь  $w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1$ ,  $w_2 = c_0\alpha^1 + c_2$ ,  $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$ . Тогда  $\omega_j(z) = 2ic_0DD_{j-1}^{1212}$ ,  $j = 1, 2$ , и из уравнений (12) следуют равенства

$$\rho^j(z) = 2ic_0(DD_{j-1}^{1212})\bar{z}, \quad j = 1, 2, \quad \rho^3(z) \equiv 0, \quad z \in \Omega. \quad (29)$$

Используя формулы (13), (16), (18) и представление для  $\omega_{jz}^0$  в (19), находим функции  $\Phi_k(z)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\Psi'_j(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , подставив которые в (24), получим

$$\mu_1(t)/t' - c_0(\bar{t}')^2 = F_1^-(t), \quad \mu_{2j}(t)/t' - 2ic_0DD_{j-1}^{1212}(t) = F_{2j}^-(t), \quad j = 1, 2,$$

$$\mu_{2j-1}(t)/t' = F_{2j-1}^-(t), \quad j = 2, 3,$$

где  $F_j^-(t)$  – граничные значения функции  $F_j^-(z)$ , голоморфной во внешности  $\Omega$  и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции  $F_j^-(z)$  во внешности области  $\Omega$  приходим к задаче Римана-Гильберта с краевым условием  $\operatorname{Re}[it'F_j^-(t)] = f_j^-(t)$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , где

$$f_1^-(t) = c_0\operatorname{Re}(it'), \quad f_{2j}^-(t) = 2c_0DD_{j-1}^{1212}(t)\operatorname{Re}t', \quad j = 1, 2, \quad f_{2j-1}^-(t) = 0, \quad j = 2, 3.$$

Используя решение этой задачи [17, с. 253], для функций  $\mu_j(t)$  получаем представления

$$\mu_j(t) = c_0\mu_j^0(t) + \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 1, 2, 4, \quad \mu_j(t) = \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 3, 5, \quad (30)$$

где  $\mu_j^k(t)$  – известные действительные функции, принадлежащие пространству  $C_\alpha(\Gamma)$ ;  $c_0$ ,  $\beta_{0j}$  – произвольные действительные постоянные.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (26) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (20) умножим соответственно на действительные функции  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$ ,  $1/p + 1/q = 1$ , и проинтегрируем по области  $\Omega$ , а левые части уравнений в (22) умножим на действительные функции  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha(\Gamma)$  и проинтегрируем по кривой  $\Gamma$ . После этого их сложим и приравняем к нулю. Заменяя голоморфные функции  $\Phi_j(z)$ ,  $\Psi_k(z)$ ,  $\Psi'_k(z)$  их выражениями из (24), (25) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^j(z)} - T_{3+j}v(z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Re}T_3v(z) = 0, \quad z \in \Omega,$$

$$\operatorname{Re}\{i[T_{3+j}v(t) - 2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Re}[Tg(v)(t) + \Theta^-(\tau'DD_0^{1313}\nu_3)(t)] = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})\bar{z}v^\lambda](t) - 2\Theta^-(\tau'DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^\lambda)(t) + (j-1)[iT^0g(v)(t) - \\ - T_\Gamma^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} = 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in \Gamma; \end{aligned}$$

$$v^j = v_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + i\nu_{3j-1}, \quad j = 1, 2, \quad v^3 = v_3, \quad \nu^3 = \nu_3. \quad (31)$$

В уравнениях (31) приняты обозначения

$$\begin{aligned} T_3 v(z) &= -2Tg(v)(z) + 2DD_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z), \quad T_{3+j}v(z) = \\ &= 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + Td_{2+j}[T_3 v](z), \quad S_j v(z) = S[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})\bar{\zeta}v^\lambda](z) - (DD_{j+\lambda-2}^{1212})_z v^\lambda(z) - \\ &- 2\Theta'(\tau' DD_{j+\lambda-2}^{1212}\nu^\lambda)(z), \quad j = 1, 2, \quad g(v)(z) = (DD_0^{1313})_{\bar{z}}(z)v_3(z) - DD_0^{1313}(z)v^2(z)/4, \\ T^0 f(z) &= -\frac{1}{\pi i} \iint_{\Omega} f(\zeta) \ln\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\xi d\eta, \quad T_\Gamma^0 f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\tau) \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\sigma, \\ \Theta'(f)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau - z)^2}, \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5), \end{aligned} \quad (32)$$

$\Theta^-(f)(t)$  – граничные значения функции  $\Theta(f)(z)$  при  $z \rightarrow t \in \Gamma$  извне области  $\Omega$ ; операторы  $Tf$ ,  $Sf$ ,  $d_j[f]$ ,  $\Theta(f)$  определены в (13), (14), (17), (24) соответственно.

Система (31), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (31) под  $v \in L_q(\Omega)$ ,  $1/p + 1/q = 1$ ,  $\nu \in C_\alpha(\Gamma)$  будем подразумевать некоторое её решение.

Заметим, что операторы  $T$ ,  $T^0$ ,  $T_\Gamma^0$ , введённые в (13), (32), определяют функции  $Tf(z)$ ,  $T^0 f(z)$ ,  $T_\Gamma^0 f(z)$ , которые голоморфны во внешности области  $\Omega$  и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция  $\theta(f)(z)$ . Поэтому последние пять равенств на кривой  $\Gamma$  в (31) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне  $\Omega$  и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, эти пять равенств на кривой  $\Gamma$  преобразуются к виду

$$\begin{aligned} T_{3+j}v(z) - 2\Theta(\tau'\bar{\nu}^j)(z) &= 0, \quad j = 1, 2, \quad Tg(v)(z) + \Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z) = 0, \\ T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})\bar{\zeta}v^\lambda](z) - 2\Theta(\tau' DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^\lambda)(z) &+ (j-1)[iT^0 g(v)(z) - T_\Gamma^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0, \\ j = 1, 2, \quad z \in \Omega_1 \equiv \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (33)$$

$\mathbb{C}$  – комплексная плоскость.

Из первых трёх равенств в (31) следует, что функции  $v_j$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , принадлежат пространству  $W_{q_1}^{(1)}(\Omega) \cap C_\alpha(\bar{\Omega})$ ,  $1 < q_1 < 2/(1 - \alpha)$ . В них перейдём к пределу при  $z \rightarrow t \in \Gamma$  изнутри области  $\Omega$ , а в первых трёх равенствах в (33) – извне области  $\Omega$ , затем последние прибавим к первым трём соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида  $Tf(z)$  при  $f \in L_p(\Omega)$  на  $\mathbb{C}$  и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1, 2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma. \quad (34)$$

Продифференцировав первые два равенства в (31) по  $\bar{z}$ , с учётом (14) получим равенства

$$\bar{\nu}^j_{\bar{z}} = 2d_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + d_{2+j}[T_3 v](z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно  $X_1 = 2S_1 v$ ,  $X_2 = 2S_2 v + T_3 v$  и решая её, будем иметь

$$X_j = D[(D_{j+\lambda-2}^{1111} - D_{j+\lambda-2}^{1212})\bar{\nu}^\lambda_z + (D_{j+\lambda-2}^{1111} + D_{j+\lambda-2}^{1212})v^\lambda_z], \quad j = 1, 2, \quad z \in \Omega. \quad (35)$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_j^{1212}, \quad j = 0, 1, 2, \quad D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega). \quad (36)$$

Используя соотношения для функций  $T_3v(z)$ ,  $S_jv(z)$ ,  $j = 1, 2$ , в (32), находим  $X_{j\bar{z}}$ ,  $j = 1, 2$ , которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству  $L_{q_1}(\Omega)$ ,  $1 < q_1 < 2/(1 - \alpha)$ . Теперь эти выражения  $X_{j\bar{z}}$ ,  $j = 1, 2$ , подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по  $\bar{z}$  равенств (35). Третье равенство в (31) дифференцируем по  $z$  и  $\bar{z}$ . При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция  $\tilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$  является решением системы линейных уравнений (8) при нулевой правой части.

Далее от решения  $(v, \nu)$  союзной системы уравнений (31) потребуем, чтобы  $\nu(t) \in C_\alpha^1(\Gamma)$ . Тогда, как нетрудно видеть,  $v(z) \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ . Теперь в равенствах (35) переходим к пределу при  $z \rightarrow t \in \Gamma$  изнутри области  $\Omega$ , при этом левую часть  $X_j^+(t)$  заменим выражением, полученным с использованием представлений  $(S_jv)(z)$ ,  $T_3v(z)$  в (32). Затем из них вычтем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по  $z$  последних двух соотношений в (33) с последующим переходом в них к пределу при  $z \rightarrow t \in \Gamma$  извне  $\Omega$ . Далее третьи равенства в (31) и (33) продифференцируем по  $z$ , в получившихся равенствах перейдем к пределу при  $z \rightarrow t \in \Gamma$  соответственно изнутри и извне области  $\Omega$  и затем вычтем их друг из друга. При помощи полученных таким образом равенств на кривой  $\Gamma$ , используя соотношения (34) и формулы

$$(Sf)^+(t) - (Sf)^-(t) = -f(t) \cdot (\bar{t}')^2, \quad \theta'^+(\tau'f)(t) - \theta'^-(\tau'f)(t) = f_t + f_{\bar{t}} \cdot (\bar{t}')^2, \quad t \in \Gamma,$$

в которых операторы  $Sf$ ,  $\Theta'(f)$  определены в (14), (32), после несложных преобразований приходим к тому, что функции  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $2v_3$ ,  $v_4$ ,  $v_5$  удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (10). Таким образом, вектор  $\tilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$  является решением однородной системы линейных уравнений в (8), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям в (10). Следовательно, в соответствии с (28) для компонент вектора  $\tilde{v}$  получим следующие представления:

$$v_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad v_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad v_3 = (-c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6)/2, \quad v_4 = c_4, \quad v_5 = c_5,$$

где  $c_j$  – произвольные действительные постоянные.

Функции  $\nu_j(t)$  и  $v_k$  связаны друг с другом формулами (34). Следовательно, решение  $(v, \nu)^T$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$  союзной системы (31) можно представить как  $(v, \nu)^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5 + c_6\gamma_6$ , где  $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{k10})$ ,  $k = \overline{1, 6}$ , – линейно независимые решения системы (31). Тогда для разрешимости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{ \operatorname{Re} [(f_c^1 + f_\chi^1 + g_c^1 - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z) + (f_c^2 + f_\chi^2 + g_c^2 - F^2)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)] + \\ & + (f_c^3 + f_\chi^3 + g_c^3 - F^3)(z)\gamma_{k3}(z) \} d\alpha^1 d\alpha^2 + \sum_{j=1}^5 \int_{\Gamma} (\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} + g_c^{3+j} - F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \end{aligned}$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} DR^j d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^j ds + \iint_{\Omega} DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\ & \iint_{\Omega} D(R^1\alpha^2 - R^2\alpha^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (P^1\alpha^2 - P^2\alpha^1) ds + \iint_{\Omega} D(\alpha^2 G_{\lambda\mu}^1 - \alpha^1 G_{\lambda\mu}^2) T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \\ & \iint_{\Omega} D(\alpha^j R^3 - L^j) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\alpha^j P^3 - N^j) ds + \iint_{\Omega} D\alpha^j B_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{\Omega} DT^{\lambda j}(\gamma) w_{3\alpha^1} d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint_{\Omega} DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\
& \iint_{\Omega} DR^3 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^3 ds + \iint_{\Omega} DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,
\end{aligned} \quad (37)$$

где  $R^j$ ,  $P^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $L^k$ ,  $N^k$ ,  $k = 1, 2$ , – компоненты внешних сил,  $\gamma$  – произвольно фиксированный вектор деформации,  $w_3$  – произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (37) общее решение системы (26) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\rho, \mu) &= (\rho_c, \mu_c)(a) + (\rho_\chi, \mu_\chi)(a) + (\rho_*, \mu_*) + (\rho_F, \mu_F), \quad (\rho_c, \mu_c)(a) = \Re f_c(a), \\
(\rho_\chi, \mu_\chi)(a) &= \Re f_\chi(a), \quad (\rho_*, \mu_*) = \Re g_c + (\tilde{\rho}, \tilde{\mu}), \quad (\rho_F, \mu_F) = -\Re F,
\end{aligned} \quad (38)$$

где  $f_c(a) = (f_c^1, f_c^2, f_c^3, \varphi_{c1}, \dots, \varphi_{c5})$ ,  $f_\chi(a) = (f_\chi^1, f_\chi^2, f_\chi^3, \varphi_{\chi1}, \dots, \varphi_{\chi5})$ ,  $g_c = (g_c^1, \dots, g_c^8)$ ,  $F = (F^1, \dots, F^8)$ ;  $\Re = (\Re_1, \dots, \Re_8)$ ;  $\Re_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и  $\Re_k$ ,  $k = \overline{4, 8}$ , – линейные ограниченные операторы из  $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$  в  $L_p(\Omega)$  и в  $C_\alpha(\Gamma)$  соответственно; функции  $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3)$ ,  $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_5)$  определены формулами (29), (30), а  $f_c^j$ ,  $f_\chi^j$ ,  $\varphi_{ck}$ ,  $\varphi_{\chi k}$ ,  $g_c^n$ ,  $F^n$  – формулами в (9), (11), (27).

Если выражение для вектор-функции  $\mu(t)$  из (38) подставить в соотношения (24), (25), то для голоморфной вектор-функции  $\Phi(z) = (\Phi_0, \Psi)$ ,  $\Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2)$ ,  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  получим представление

$$\Phi(z) = \Phi_c(a)(z) + \Phi_\chi(a)(z) + \Phi_*(z) + \Phi_F(z), \quad z \in \Omega, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_c(a)(z) &= \Phi(\mu_c(a))(z), \quad \Phi_\chi(a)(z) = \Phi(\mu_\chi(a))(z), \quad \Phi_F(z) = \Phi(\mu_F)(z), \\
\Phi_*(z) &= \Phi(\Re g_c)(z) + \tilde{\Phi}(z), \quad \tilde{\Phi}(z) = (c_0 \beta_0(z), c_0 \beta_1(z), c_0 \gamma_0(z) + c_1 + i c_2, 0, 0), \\
\beta_j(z) &= 2i \Theta(t' D D_j^{1212})(z), \quad j = 0, 1, \quad \gamma_0(z) = \Theta(t' \bar{t})(z),
\end{aligned}$$

функция  $\Theta(f)(z)$  определена в (24),  $c_j$  – произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения  $\rho(z)$  из (38) и голоморфных функций из (39) подставим в (16), (18). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции  $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ , которую представим в виде

$$\begin{aligned}
\omega_j^0(z) &= \omega_{jc}^0(a) + \omega_{j\chi}^0(a) + \omega_{j*}^0(z) + \omega_{jF}^0(z), \quad j = 1, 2, \\
w_3(z) &= w_{3c}(a) + w_{3\chi}(a) + w_{3*}(z) + w_{3F}(z), \quad z \in \Omega,
\end{aligned} \quad (40)$$

где  $\omega_{jc}^0(a) = \omega_j^0(\Psi_{jc}(a); \omega_{jc}(a))$ ,  $\omega_c(a) = (\omega_{1c}, \omega_{2c})$ ,  $\omega_{jc}(a) = \omega_j(\Phi_{jc}(a); \rho_c^j(a))$ ,  $j = 1, 2$ ,  $w_{3c}(a) = w_3(\Psi_{3c}(a); \rho_c^3(a))$ ; остальные слагаемые в системе (40) определяются аналогично; операторы  $\omega_j(\Phi_j; \rho^j)$ ,  $\omega_j^0(\Psi_j; \omega_j)$  и  $w_3(\Psi_3; \rho^3)$  определены в (13), (16), (18) соответственно.

Отметим, что функции  $\omega_{j*}^0(z)$ ,  $w_{3*}(z)$  и  $\omega_{jF}^0(z)$ ,  $w_{3F}(z)$  зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций  $\omega_{1*}^0(z) = w_{2*} + i w_{1*}$ ,  $\omega_{2*}^0(z) = \psi_{2*} + i \psi_{1*}$ ,  $w_{3*}(z)$  имеют место представления (28).

Исследуем разрешимость системы (40) в пространстве  $W_p^{(2)}(\Omega)$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда

- 1)  $\omega_{jc}^0(a)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $w_{3c}(a)$  – линейные вполне непрерывные операторы в  $W_p^{(2)}(\Omega)$ ;
- 2)  $\omega_{j\chi}^0(a)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $w_{3\chi}(a)$  – нелинейные ограниченные операторы в  $W_p^{(2)}(\Omega)$ , причём для любых  $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ , справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& \|\omega_{j\chi}^0(a^1) - \omega_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad \|w_{3\chi}(a^1) - w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \\
& + \|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},
\end{aligned} \quad (41)$$



где  $c$  – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

3)  $\omega_{j*}^0(z), \omega_{jF}^0(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Доказательство.** Из представлений для  $f_c^j(a)$ ,  $f_\chi^j(a)$  в (9),  $\varphi_{cj}(a)$ ,  $\varphi_{\chi j}(a)$  в (11) следует, что  $f_c^j(a)$  и  $\varphi_{cj}(a)$  – линейные вполне непрерывные, а  $f_\chi^j(a)$  и  $\varphi_{\chi j}(a)$  – нелинейные ограниченные операторы из  $W_p^{(2)}(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$  и в  $C_\alpha(\Gamma)$  соответственно; для  $f_\chi^3(a)$ ,  $\varphi_{\chi 3}(a)$  справедливы оценки вида (41), а для  $f_\chi^j(a)$ ,  $\varphi_{\chi j}(a)$ ,  $j = 1, 2$ , – оценки вида

$$\|f_\chi^j(a^1) - f_\chi^j(a^2)\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi_{\chi j}(a^1) - \varphi_{\chi j}(a^2)\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leq c(\|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1, 2. \quad (42)$$

Тогда из (38) с учётом ограниченности операторов  $\mathfrak{R}_j$  получим, что  $\rho_c^j(a)$  и  $\mu_{kc}(a)$  – линейные вполне непрерывные, а  $\rho_\chi^j(a)$  и  $\mu_{k\chi}(a)$  – нелинейные ограниченные операторы из  $W_p^{(2)}(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$  и в  $C_\alpha(\Gamma)$  соответственно, и для  $\rho_\chi^j(a)$ ,  $\mu_{k\chi}(a)$  справедливы оценки (41). Следовательно, с учётом свойств интеграла типа Коши из (39) будем иметь, что  $\Phi_{kc}(a)$ ,  $\Psi'_{jc}(a)$  – линейные вполне непрерывные,  $\Phi_{k\chi}(a)$ ,  $\Psi'_{j\chi}(a)$  – нелинейные ограниченные операторы из  $W_p^{(2)}(\Omega)$  в  $C_\alpha(\overline{\Omega})$ , причём для нелинейных операторов  $\Phi_{k\chi}(a)$ ,  $\Psi'_{j\chi}(a)$  справедливы оценки (41).

Исследуем свойства операторов

$$\Phi'_{kc}(a) = \Theta'(\mu_{2kc}(a)), \quad k = 1, 2, \quad \Psi''_{jc}(a) = i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta'(\mu_{2j-1c}(a)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (43)$$

где оператор  $\Theta'(f)$  определён в (32).

Заметим, что функции  $\rho_c^j(a)(z)$ ,  $\mu_{kc}(a)(t)$ , определённые в (38), являются решениями системы (26) с правой частью  $f_c^j(a)(z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\varphi_{ck}(a)(t)$ ,  $k = \overline{1, 5}$ . Поэтому  $\mu_c = (\mu_{1c}, \dots, \mu_{5c})$  можно представить в виде

$$\mu_c(a)(t) = A^{-1}(t) \left[ \varphi_c(a)(t) - B(t) \int_\Gamma \frac{\mu_c(a)(\tau)}{\tau - t} d\tau - K\mu_c(a)(t) - H\rho_c(a)(t) \right], \quad (44)$$

где  $A^{-1}(t) \in C_\beta(\Gamma)$  – матрица, обратная к матрице  $A(t)$ ,  $\varphi_c = (\varphi_{c1}, \dots, \varphi_{c5})$ ,  $K = (K_1, \dots, K_5)$ ,  $H = (H_1, \dots, H_5)$ ,  $\rho_c = (\rho_c^1, \rho_c^2, \rho_c^3)$ .

Если выражение (44) для  $\mu_c(a)(t)$  подставить в (43), после этого переставить порядок интегрирования в повторных интегралах и использовать указанные выше свойства интеграла типа Коши, операторов  $T$ ,  $S$ , соотношений (4.7), (4.9) из [14, с. 28–29] и лемму 1, то после несложных, но достаточно громоздких преобразований получим, что операторы  $\Phi'_{kc}(a)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\Psi''_{jc}(a)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , суть линейные вполне непрерывные операторы из  $W_p^{(2)}(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$ . При помощи аналогичных рассуждений также будем иметь, что  $\Phi'_{k\chi}(a)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\Psi''_{j\chi}(a)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – нелинейные ограниченные операторы из  $W_p^{(2)}(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$  и для них справедливы оценки (41). Теперь, если использовать соотношения (15), (16), (19) и оценки (42), утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана.

Систему (40) запишем в виде

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \tilde{a}_F, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} L &= (L_1, \dots, L_5), \quad G = (G_1, \dots, G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}), \\ \tilde{a}_F &= (\tilde{w}_{1F}, \tilde{w}_{2F}, \tilde{w}_{3F}, \tilde{\psi}_{1F}, \tilde{\psi}_{2F}), \quad \omega_{1*}^0 = w_{2*} + iw_{1*}, \quad \omega_{2*}^0 = \psi_{2*} + i\psi_{1*}, \quad L_3(a) = w_{3c}(a), \\ G_3(a) &= w_{3\chi}(a), \quad L_{3(n-1)+j}(a) = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{nc}^0(a)], \quad G_{3(n-1)+j}(a) = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{n\chi}^0(a)], \quad n, j = 1, 2, \\ \tilde{w}_{jF} &= -\operatorname{Re}[i^j \omega_{1F}^0], \quad \tilde{\psi}_{jF} = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{2F}^0], \quad j = 1, 2, \quad \tilde{w}_{3F} = w_{3F}. \end{aligned}$$

Отметим, что  $L(a)$  – линейный вполне непрерывный,  $G(a)$  – нелинейный ограниченный операторы в  $W_p^{(2)}(\Omega)$ , причём для  $G(a)$  имеет место оценка (41);  $\tilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$  – известная функция, зависящая от внешних сил; компоненты вектора  $a_*$  даются формулами (28).

Уравнение  $a - L(a) = 0$  имеет лишь нулевое решение в пространстве  $W_p^{(2)}(\Omega)$ . Действительно, если  $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$  – ненулевое его решение, то, как нетрудно заметить,  $a$  является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (26), приходим к тому, что вектор  $a$  удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3 &= 0, \quad j = 1, 2, \\ w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3 &= 0, \quad \psi_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \psi_\lambda = 0, \quad j = 1, 2, \\ \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \psi_\lambda &= 0, \quad w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (46)$$

Выведем условия, при выполнении которых система (46) имеет только нулевое решение. Для этого введём в рассмотрение вспомогательную систему вида

$$\begin{aligned} (\omega_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\omega_2/\Lambda)_{\alpha^2} &= c_1 f_1(\alpha^1, \alpha^2), \quad (\omega_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\omega_2/\Lambda)_{\alpha^1} = c_1 f_2(\alpha^1, \alpha^2), \\ \omega_{1\alpha^1} + \omega_{2\alpha^2} &= c_1 f_3(\alpha^1, \alpha^2) \end{aligned} \quad (47)$$

относительно функций  $\omega_1(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $\omega_2(\alpha^1, \alpha^2) \in C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ , где  $f_j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – произвольно фиксированные функции,  $c_1$  – произвольная действительная постоянная.

Решаем систему (47). При помощи комплексной функции  $\omega = \omega_1/\Lambda + i\omega_2/\Lambda$  первые два уравнения в (47) представим в виде неоднородного уравнения Коши–Римана  $\omega_{\bar{z}} = c_1(f_1 + if_2)/2$ , общее решение которого даётся формулой  $\omega = \varphi(z) + c_1 T(f_1 + if_2)(z)/2$ , откуда для  $\omega_j$  получаем представления

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \operatorname{Re} \varphi(z) + c_1 g_1(\alpha^1, \alpha^2), \quad \omega_2 = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \operatorname{Im} \varphi(z) + c_1 g_2(\alpha^1, \alpha^2), \\ g_1 &= \Lambda \operatorname{Re} T(f_1 + if_2)/2, \quad g_2 = \Lambda \operatorname{Im} T(f_1 + if_2)/2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\varphi(z)$  – произвольная голоморфная в области  $\Omega$  функция, принадлежащая пространству  $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ , оператор  $T$  определён в (13). Из условия (b) и указанных выше свойств оператора  $T$  следует, что функции  $g_j$ ,  $j = 1, 2$ , принадлежат пространству  $W_p^{(3)}(\Omega)$ .

Выражения решений  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  из (48) подставим в третье уравнение системы (47). Тогда относительно голоморфной функции  $\varphi(z)$  получим уравнение вида

$$\operatorname{Re} [\varphi'(z) + (\ln \Lambda)_z \varphi(z)] = c_1 g_3(\alpha^1, \alpha^2), \quad g_3(\alpha^1, \alpha^2) = (f_3 - g_{1\alpha^1} - g_{2\alpha^2})/(2\Lambda), \quad (49)$$

где функция  $g_3$  принадлежит пространству  $W_p^{(2)}(\Omega)$ .

Предположим, что в области  $\Omega$  выполняется условие

$$\Lambda_0(\alpha^1, \alpha^2) = (\ln \Lambda)_{z\bar{z}} \neq 0, \quad (50)$$

т.е. функция  $\ln \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)$  в области  $\Omega$  не является гармонической.

Заметим, что условие (50) в силу уравнения Гаусса [18, с. 193] означает, что гауссова кривизна срединной поверхности оболочки не равна нулю.

Найдём решение уравнения (49). Заметим, что функция  $\operatorname{Re} \varphi'(z)$ , как действительная часть голоморфной функции  $\varphi'(z)$ , в области  $\Omega$  является гармонической, т.е.  $[\operatorname{Re} \varphi'(z)]_{z\bar{z}} = 0$ . Следовательно, в области  $\Omega$  при любой постоянной  $c_1$  должно выполняться условие  $[c_1 g_3 - \operatorname{Re} ((\ln \Lambda)_z \varphi)]_{z\bar{z}} = 0$ , которое можно записать в виде  $\operatorname{Re} (\Lambda_0 \varphi)_z - c_1 g_{3z\bar{z}} = 0$ ,  $c_1 = \operatorname{const}$ ,  $z \in \Omega$ , откуда с учётом условий (50) и  $g_{3z\bar{z}} \neq 0$ ,  $z \in \Omega$ , получим  $\operatorname{Re} (\Lambda_0 \varphi)_z = 0$ ,  $c_1 = 0$ . Итак,

голоморфная функция  $\varphi(z)$  удовлетворяет системе уравнений  $\operatorname{Re}(\Lambda\varphi)_z = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\Lambda_0\varphi)_z = 0$ , которая эквивалентна системе

$$2\Lambda u_{\alpha^1} + \Lambda_{\alpha^1}u + \Lambda_{\alpha^2}v = 0, \quad 2\Lambda_0 u_{\alpha^1} + \Lambda_{0\alpha^1}u + \Lambda_{0\alpha^2}v = 0, \\ u_{\alpha^1} = v_{\alpha^2}, \quad u_{\alpha^2} = -v_{\alpha^1}, \quad \Lambda_0/\Lambda \neq \text{const}, \quad (51)$$

где  $\varphi(z) = u(\alpha^1, \alpha^2) + iv(\alpha^1, \alpha^2)$ , функция  $\Lambda_0(\alpha^1, \alpha^2)$  определена в (50).

Исключив из первых двух уравнений в (51) производную  $u_{\alpha^1}$ , получим

$$v = \Lambda_1 u, \quad \Lambda_1 \equiv \Lambda_1(\alpha^1, \alpha^2) = -(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2} \in W_p^{(1)}(\Omega). \quad (52)$$

Теперь, если выражение функции  $v$  из (52) подставить в первое уравнение (51), относительно функции  $u$  получим уравнение

$$u_{\alpha^1} + \Lambda_2 u = 0, \quad \Lambda_2 \equiv \Lambda_2(\alpha^1, \alpha^2) = [(\ln \Lambda)_{\alpha^1} + (\ln \Lambda)_{\alpha^2} \Lambda_1]/2 \in W_p^{(1)}(\Omega),$$

общее решение которого дается формулой

$$u = c(\alpha^2)\Lambda_3, \quad \Lambda_3 \equiv \Lambda_3(\alpha^1, \alpha^2) = \exp \left[ - \int_{\alpha_0^1}^{\alpha^1} \Lambda_2(\beta^1, \alpha^2) d\beta^1 \right] \in W_p^{(1)}(\Omega), \quad (53)$$

где  $c(\alpha^2)$  – произвольная действительная функция переменной  $\alpha^2$ , принадлежащая пространству  $C_\alpha^1$ ,  $(\alpha_0^1, \alpha_0^2) \in \overline{\Omega}$  – произвольно фиксированная точка.

Тогда для функции  $v$  с учётом (52) будем иметь представление

$$v = \Lambda_1 \Lambda_3 c(\alpha^2). \quad (54)$$

Теперь функции  $u(\alpha^1, \alpha^2)$ ,  $v(\alpha^1, \alpha^2)$  из (53), (54) подставим в третье и четвертое уравнения системы (51). В результате относительно функции  $c(\alpha^2)$  почти всюду в области  $\Omega$  получим уравнения

$$\Lambda_3 c'(\alpha^2) + [\Lambda_{3\alpha^2} + (\Lambda_1 \Lambda_3)_{\alpha^1}]c(\alpha^2) = 0, \quad \Lambda_1 \Lambda_3 c'(\alpha^2) - [\Lambda_{3\alpha^1} - (\Lambda_1 \Lambda_3)_{\alpha^2}]c(\alpha^2) = 0,$$

из которых видно, что  $c(\alpha^2) \equiv 0$ , следовательно, из формул (53), (54) будем иметь  $\varphi(z) \equiv 0$  в  $\overline{\Omega}$ . Тогда из соотношений (48) получим  $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$  в  $\overline{\Omega}$ .

Перейдём к нахождению функций  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . С этой целью четвертое и пятое равенства системы (46) сложим и вычтем друг из друга. Принимая во внимание соотношения (4) для символов Кристоффеля, будем иметь систему

$$(\psi_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^2} = 0, \quad (\psi_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^1} = 0, \quad \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2} = 0,$$

которая получается из системы (47) при  $f_j \equiv 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\omega_1 = \psi_1$ ,  $\omega_2 = \psi_2$ . Поэтому в силу доказанного выше  $\psi_1(z) = \psi_2(z) \equiv 0$  в  $\overline{\Omega}$  и из последних двух равенств в (46) следует, что  $w_3 = c_1 = \text{const}$  в  $\overline{\Omega}$ . Подставляя это значение функции  $w_3$  в первые три равенства системы (46), при помощи аналогичных рассуждений снова приходим к системе вида (47), в которой  $\omega_1 = w_1$ ,  $\omega_2 = w_2$ ,  $f_1 = (B_{11} - B_{22})/\Lambda$ ,  $f_2 = 2B_{12}/\Lambda$ ,  $f_3 = B_{11} + B_{22}$ . В силу условия (а) имеем  $f_j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , при этом условие  $g_{3z\bar{z}} \neq 0$  примет вид

$$[(B_{11} + B_{22})/\Lambda - \operatorname{Re}(\ln \Lambda)_z \operatorname{Re} T f + \operatorname{Im}(\ln \Lambda)_z \operatorname{Im} T f - \operatorname{Re} S f]_{z\bar{z}} \neq 0, \\ f = (B_{11} - B_{22} + 2iB_{12})/\Lambda, \quad (55)$$

где операторы  $T$ ,  $S$  определены в (13), (14). Следовательно,  $w_j \equiv 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , в  $\overline{\Omega}$ . Итак, уравнение  $a - L(a) = 0$  имеет только нулевое решение в  $W_p^{(2)}(\Omega)$ . Таким образом, существует

обратный оператор  $(I - L)^{-1}$ , ограниченный в  $W_p^{(2)}(\Omega)$ , с помощью которого уравнение (45) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_F, \quad (56)$$

где  $G_*(a) = (I - L)^{-1}G(a)$ ,  $a_F = (I - L)^{-1}\tilde{a}_F$ .

Отметим, что вектор  $a_c = (I - L)^{-1}a_*$  является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому в силу доказанного выше  $a_c \equiv 0$ , что и учтено нами при переходе к уравнению (56).

Также отметим, что вектор  $a_F$  в (56) зависит только от внешних сил и  $a_F = 0$ , если внешние силы отсутствуют.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:

1)  $G_*(a)$  – нелинейный ограниченный оператор в  $W_p^{(2)}(\Omega)$ , причём для любых векторов  $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ ,  $j = 1, 2$ , справедлива оценка

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq c_* (\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$

где  $c_*$  – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2)  $a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$ .

Справедливость этой леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов  $(I - L)^{-1}$  и  $G$ .

Исследуем разрешимость уравнения (56) в пространстве  $W_p^{(2)}(\Omega)$ . Используя лемму 3, для любых  $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ , принадлежащих шару  $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ , получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq q_* \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1 + r).$$

Предположим, что радиус  $r$  шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \quad (57)$$

Тогда к уравнению (56) можно применить принцип сжатых отображений [19, с. 146], согласно которому уравнение (56) в шаре  $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$  имеет единственное решение вида  $a = \mathbb{R}(a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ , где  $\mathbb{R}$  – резольвента оператора  $G_*$ .

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Вернёмся к условиям разрешимости (37), в которых под  $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$  будем подразумевать решение задачи (1), (2). Используя равенства (1) и (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (37) выполняются.

Таким образом, доказана следующая

**Теорема.** Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (36), (50), (55) и неравенства (57). Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение  $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ,  $2 < p < 4/(2 - \beta)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975.
2. Ворovich И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
3. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978.
4. Карчевский М.М. Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Уч. зап. Казанского. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 155. № 3. С. 105–110.

5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек. Казань, 2011.
6. *Тимергалиев С.Н.* О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2014. № 3. С. 40–56.
7. *Тимергалиев С.Н.* К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 373–386.
8. *Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С.* Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 651–664.
9. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2017. № 4. С. 59–75.
10. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. № 1. С. 98–113.
11. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 239–255.
12. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2021. № 4. С. 90–107.
13. *Тимергалиев С.Н.* О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 507–525.
14. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
15. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
16. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.
17. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963.
18. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М., 1978.
19. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Казанский государственный  
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 17.12.2022 г.  
После доработки 13.02.2023 г.  
Принята к публикации 16.03.2023 г.

## УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ  
ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© 2023 г. А. А. Щеглова

Рассмотрена нестационарная линейная дискретная дескрипторная система с прямоугольными матричными коэффициентами, определённая на конечном горизонте. Получен ответ на вопрос, какое наибольшее число искомых векторов можно найти из заданного конечного числа уравнений? Аналогично изучена разрешимость нестационарных линейных систем с непрерывным или дискретным временем, а также (в локальном смысле) нелинейных дискретных систем. Показано, что в тех случаях, когда рассматриваемая линейная (или нелинейная) система сохраняет внутреннюю структуру, возможно нахождение её решений на бесконечном горизонте. Предлагаемый подход обладает достаточной общностью и автоматически решает проблему согласования начальных данных.

DOI: 10.31857/S0374064123050114, EDN: CZRUCX

**Введение.** Исследование вырожденных систем с дискретным временем, также называемых дискретными дескрипторными системами, является динамично развивающимся направлением в современной математике, что обусловлено многочисленными приложениями в различных отраслях науки и техники: биологии, экономике, робототехнике, астрофизике, моделировании летательных аппаратов, электрических сетях, механике и др. [1–7].

Большинство известных результатов получено для стационарных систем

$$Ax^{[k+1]} + Bx^{[k]} = f^{[k]}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (0.1)$$

где  $A$  и  $B$  – заданные  $n \times n$ -матрицы,  $\det A = 0$ , с регулярным матричным пучком  $cA + B$ , т.е.  $\det(cA + B) \not\equiv 0$  (см., в частности, [8–11]). Известно [12, с. 313], что в этом случае существуют обратимые  $n \times n$ -матрицы  $P$  и  $S$  такие, что в результате замены переменных  $x^{[k]} = S \operatorname{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]})$ ,  $x_1^{[k]} \in \mathbb{R}^{n-d}$ ,  $x_2^{[k]} \in \mathbb{R}^d$ , и умножения всех уравнений (0.1) слева на матрицу  $P$  получим систему

$$Nx_2^{[k]} + x_2^{[k-1]} = f_1^{[k]}, \quad x_1^{[k]} + Jx_1^{[k-1]} = f_2^{[k]}, \quad (0.2)$$

где  $\operatorname{col}(f_1^{[k]}, f_2^{[k]}) = Pf^{[k]}$ ;  $N$  – верхнетреугольная матрица с  $\varkappa \leq d$  квадратными нулевыми блоками на диагонали, так что  $N^\varkappa = O$ ;  $J$  – некоторая  $(n-d) \times (n-d)$ -матрица. При этом число  $\varkappa$  называется *индексом пучка*  $cA + B$ .

Применительно к системам вида (0.1) различные аспекты теории (управляемость, наблюдаемость, устойчивость, стабилизация, задачи фильтрации, построение регуляторов и др.) исследовались в работах [8–10].

В литературе рассматриваются и более сложные постановки задач для дискретных дескрипторных систем, в частности, стационарные системы как с постоянным запаздыванием [13], так и с нелинейным [14, 15]. Изучаются также системы с переключениями [16, 17] и с прямоугольными матрицами коэффициентов [18]. При этом, для того чтобы сделать рассматриваемую систему доступной для анализа, на структуру системы накладываются довольно жёсткие ограничения. Например, в нестационарных случаях требуется, чтобы пучок матричных коэффициентов сохранял подобную (0.2) структуру или же вообще имел постоянную простую структуру (последнее применительно к системе (0.2) соответствует случаю  $\varkappa = 0$ ).

Данная работа посвящена проблеме нахождения решений вырожденных дискретных систем в наиболее общих предположениях. В п. 1 рассматривается нестационарная система

$$A_k^{[k]}x^{[k]} + A_{k-1}^{[k]}x^{[k-1]} + \dots + A_1^{[k]}x^{[1]} + B^{[k]}x^{[0]} = f^{[k]}, \quad k = \overline{1, \rho}, \quad (0.3)$$

в которой искомые векторы могут иметь различную размерность,  $A_i^{[k]}$  и  $B^{[k]}$  – заданные  $m_k \times n_i$ - и  $m_k \times n_0$ -матрицы соответственно;  $x^{[i]} \in \mathbb{R}^{n_i}$  ( $i = \overline{0, \rho}$ ) – искомые, а  $f^{[k]} \in \mathbb{R}^{m_k}$  – заданные векторы. При этом матрицы коэффициентов  $A_i^{[k]}$  и  $B^{[k]}$  могут не иметь полного ранга:

$$\text{rank } A_i^{[k]} \leq \min\{m_k, n_i\}, \quad \text{rank } B^{[k]} \leq \min\{m_k, n_0\}.$$

Системам с непрерывным и дискретным временем посвящён п. 2, а именно системам вида (0.1) и (0.3), в которых матричные коэффициенты и правые части зависят от времени. В п. 3 изучаются нелинейные дискретные дескрипторные системы.

**1. Нестационарные системы с прямоугольными матрицами коэффициентов.** Сначала на примере системы (0.1) с регулярным матричным пучком поясним основные понятия, связанные с внутренней структурой вырожденных систем с дискретным временем.

Структурная форма (0.2) позволяет получить представление для решения уравнений (0.1):  $x^{[k]} = S \text{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]})$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$x_2^{[0]} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} N^{j-1} f_1^{[j]}, \quad (1.1)$$

$$x_2^{[k]} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} N^{j-1} f_1^{[k+j]}, \quad (1.2)$$

$$x_1^{[k]} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} J^{k-j} f_2^{[j]} + (-1)^k J^k x_1^{[0]}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Определим для системы (0.1) начальные условия

$$x^{[0]} = a, \quad (1.4)$$

$a$  – заданный вектор из пространства  $\mathbb{R}^n$ . Соотношение (1.1) называется *условием согласования начальных данных (1.4) с правой частью системы (0.1)* (кратко *условием согласования*). Любые начальные условия вида (1.4) называются *согласованными*, если они удовлетворяют соотношению (1.1). Из (1.1)–(1.3) следует, что для выделения единственного решения достаточно задать начальные данные в виде

$$x_1^{[0]} = a_1,$$

где  $a_1 \in \mathbb{R}^{n-d}$  – заданный вектор. При этом число  $n - d$  будем называть *размерностью пространства решений* системы (0.1).

Обратимся к уравнениям (0.3). В данном пункте предпринята попытка ответить на следующие вопросы.

1. При каких условиях из системы (0.3) можно найти векторы  $x^{[1]}, \dots, x^{[r]}$  ( $r \leq \rho$ ) как линейные функции переменных  $f^{[1]}, \dots, f^{[\rho]}$  и  $x^{[0]}$ ?
2. Как определить максимально возможное число  $r$ ?
3. Как при этом будут выглядеть условия согласования начальных данных (1.4)?
4. Какова размерность пространства решений системы (0.3)?

Обозначим

$$m_* = \sum_{k=1}^{\rho} m_k, \quad n_* = \sum_{i=0}^{\rho} n_i.$$

Введём в рассмотрение  $m_* \times n_0$ -матрицу

$$B_\rho = \text{col}(B^{[1]}, \dots, B^{[\rho]}), \quad (1.5)$$

а также  $m_* \times n_k$ -матрицы

$$\Gamma^{[1]} = \text{col} (A_1^{[1]}, \dots, A_1^{[\rho]}), \quad (1.6)$$

$$\Gamma^{[k]} = \text{col} (O, \dots, O, A_k^{[k]}, \dots, A_k^{[\rho]}), \quad k = \overline{2, \rho}. \quad (1.7)$$

Используя обозначения (1.5)–(1.7), уравнения (0.3) можно записать в виде алгебраической системы

$$\mathcal{D}_\rho \text{col} (x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[\rho]}) = f_\rho, \quad (1.8)$$

где  $m_* \times n_*$ -матрица

$$\mathcal{D}_\rho = (\mathcal{B}_\rho, \Gamma^{[1]}, \dots, \Gamma^{[\rho]}), \quad (1.9)$$

$$f_\rho = \text{col} (f^{[0]}, f^{[1]}, \dots, f^{[\rho]}). \quad (1.10)$$

Пусть  $1 \leq r \leq \rho$ . Обозначим  $\hat{n} = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ ,

$$\Gamma_r = (\Gamma^{[1]}, \Gamma^{[2]}, \dots, \Gamma^{[r]}), \quad (1.11)$$

$$\Lambda_r = (\Gamma^{[r+1]}, \Gamma^{[r+2]}, \dots, \Gamma^{[\rho]}). \quad (1.12)$$

**Теорема 1.** *Предположим, что в матрице  $\mathcal{D}_\rho$  имеется обратимая подматрица  $\mathcal{M}_\rho$  порядка  $m_*$ , которая включает в себя все столбцы матрицы  $\Gamma_r$  и  $\lambda = \text{rank } \Lambda_r$  столбцов матрицы  $\Lambda_r$ . Тогда*

$$\text{col} (x_2^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = (E_{d+\hat{n}}, O) \mathcal{M}_\rho^{-1} f_\rho - \tilde{B}_1 x_1^{[0]}, \quad (1.13)$$

где  $E_{d+\hat{n}}$  – единичная  $d + \hat{n}$ -матрица;  $Q \text{col} (x_1^{[0]}, x_2^{[0]}) = x^{[0]}$ ,  $x_2^{[0]} \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{n_0-d}$ ,  $Q$  – матрица перестановок строк;  $\tilde{B}_1$  – некоторая матрица соответствующей размерности.

**Доказательство.** Рассмотрим (1.5). Обозначим через  $Q$   $n_0 \times n_0$ -матрицу перестановок столбцов такую, что

$$\mathcal{B}_\rho Q = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

где блоки  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$  имеют размеры  $m_* \times (n_0 - d)$  и  $m_* \times d$  соответственно, причём столбцы  $\mathcal{B}_2$  входят, а столбцы  $\mathcal{B}_1$  не входят в матрицу  $\mathcal{M}_\rho$ .

С помощью построенной таким образом матрицы  $Q$  разобьём вектор  $x^{[0]} \in \mathbb{R}^{n_0}$  на подвекторы:

$$x^{[0]} = Q \text{col} (x_1^{[0]}, x_2^{[0]}), \quad (1.14)$$

где  $x_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{n_0-d}$ ,  $x_2^{[0]} \in \mathbb{R}^d$ .

В (1.8) осуществим замену переменных (1.14), а также положим

$$\text{col} (x^{[r+1]}, \dots, x^{[\rho]}) = Q_\Lambda \text{col} (x_1, x_2),$$

где  $x_1 \in \mathbb{R}^\lambda$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_{r+1}+\dots+n_\rho-\lambda}$ ,  $Q_\Lambda$  – матрица перестановок такая, что

$$\Lambda_r Q_\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2),$$

блок  $\Lambda_1$  состоит из  $\lambda$  столбцов, которые входят в матрицу  $\mathcal{M}_\rho$ , а столбцы  $\Lambda_2$  не входят в эту матрицу. Умножив полученную в результате таких преобразований систему слева на  $\mathcal{M}_\rho^{-1}$ , получим

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & E_{\hat{n}+d} & O & \Psi_1 \\ \tilde{B}_2 & O & E_\lambda & \Psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[0]} \\ \text{col} (x_2^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_\rho^{-1} f_\rho, \quad (1.15)$$

где  $\text{col} (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2) = \mathcal{M}_\rho^{-1} \mathcal{B}_1$ ,  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – некоторые матрицы соответствующих размерностей.



Поскольку

$$\lambda = \text{rank } \Lambda_r = \text{rank } \mathcal{M}_\rho^{-1} \Lambda_r Q_\Lambda = \text{rank } \begin{pmatrix} O & \Psi_1 \\ E_\lambda & \Psi_2 \end{pmatrix},$$

в (1.15)  $\Psi_1 = O$ . С учётом последнего обстоятельства легко видеть, что представление (1.13) непосредственно вытекает из (1.15). Теорема доказана.

Заметим, что наличие в  $\mathcal{D}_\rho$  подматрицы  $\mathcal{M}_\rho$ , фигурирующей в формулировке теоремы 1, подразумевает, что:

- 1)  $m_* \leq n_*$ ;
- 2) матрица  $\mathcal{D}_\rho$  имеет полный ранг по строкам:  $\text{rank } \mathcal{D}_\rho = m_*$ ;
- 3) матрица  $\Gamma_r$  (см. (1.11)) имеет полный ранг по столбцам, равный  $\hat{n}$ ;
- 4)  $\text{rank } (B^{[k]}, A_1^{[k]}, A_2^{[k]}, \dots, A_k^{[k]}) = m_k$  для любого  $k = \overline{1, \rho}$ .

**Замечание 1.** Из (1.13) вытекает соотношение

$$x_2^{[0]} = (E_d, O) \mathcal{M}_\rho^{-1} (f_\rho - \tilde{B}_1 x_1^{[0]}),$$

которое представляет собой условие согласования начальных данных (1.4) с правой частью системы (0.3). Для выделения единственного решения достаточно задать начальные условия в виде  $x_1^{[0]} = a_1$ ,  $a_1 \in \mathbb{R}^{n_0-d}$ , следовательно, размерность пространства решений равна  $n_0 - d$ .

**Пример 1.** Теорема 1 может быть использована для пошагового нахождения искомых векторов, начиная с  $x^{[1]}$ . Для иллюстрации этой возможности рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[1]} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[0]} = f^{[1]}, \quad (1.16)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[2]} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[1]} = f^{[2]}, \quad (1.17)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x^{[3]} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[2]} = f^{[3]}, \quad (1.18)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[4]} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[3]} = f^{[4]}. \quad (1.19)$$

На первом шаге будем искать  $x^{[1]}$ . Поскольку в (1.16) матрица  $A_1^{[1]}$  при  $x^{[1]}$  необратима, уравнения (1.16) недостаточно для определения всех компонент этого вектора. Рассмотрим уравнения (1.16), (1.17) и соответствующую матрицу

$$\mathcal{D}_2^{[1]} = \begin{pmatrix} B^{[1]} & A_1^{[1]} & O \\ O & A_1^{[2]} & A_2^{[2]} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & & & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right).$$

Здесь и далее верхний индекс у матриц обозначает номер итерации.

Матрица  $\Gamma_2^{[1]}$  состоит из трёх столбцов матрицы  $\mathcal{D}_2^{[1]}$ , начиная с третьего. Она имеет полный ранг по столбцам. Матрица  $\Lambda_2^{[1]}$  располагается в  $\mathcal{D}_2^{[1]}$  справа от двойной черты и её ранг равен 2. Обратимая подматрица пятого порядка здесь имеется, но не включает в себя все столбцы матрицы  $\Gamma_2^{[1]}$ . Она состоит из столбцов, в которых расположены единицы, выделенные рамками.

Поэтому добавляем ещё одно уравнение (1.18). В этом случае

$$\mathcal{D}_3^{[1]} = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & \boxed{1} & 0 & & & \\ 0 & \boxed{1} & & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \boxed{1} & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \\ & & & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & & 0 & \boxed{1} & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right),$$

$\text{rank } \Lambda_3^{[1]} = 3$  и существует матрица  $\mathcal{M}_3^{[1]}$  (она состоит из столбцов матрицы  $\mathcal{D}_3^{[1]}$ , в которых присутствуют выделенные рамками единицы). В результате умножения системы (1.16)–(1.18) слева на  $(\mathcal{M}_3^{[1]})^{-1}$  получим

$$x_2^{[0]} = (0, 1, -1)f^{[1]}, \quad (1.20)$$

$$x^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f^{[1]} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f^{[2]} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f^{[3]} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1^{[0]}, \quad (1.21)$$

$$x^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f^{[2]} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f^{[3]}, \quad (1.22)$$

$$x_3^{[3]} = (0, 1)f^{[3]} - x_1^{[3]} - x_2^{[3]}, \quad (1.23)$$

где  $\text{col}(x_1^{[0]}, x_2^{[0]}) = x^{[0]}$ ,  $\text{col}(x_1^{[3]}, x_2^{[3]}, x_3^{[3]}) = x^{[3]}$ .

На втором шаге рассмотрим уравнения (1.23) и (1.19). Запишем соответствующую матрицу

$$\mathcal{D}_2^{[2]} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & \boxed{1} & & \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right).$$

Очевидно, что  $\Gamma_2^{[2]}$  (расположена в  $\mathcal{D}_2^{[2]}$  слева от двойной черты) имеет полный ранг по столбцам и  $\text{rank } \Lambda_2^{[2]} = 1$ . Подматрица  $\mathcal{M}_2^{[2]}$  в  $\mathcal{D}_2^{[2]}$  имеется, её столбцы отмечены выделенными рамками единицами.

Умножив уравнения (1.23) и (1.19) слева на  $(\mathcal{M}_2^{[2]})^{-1}$ , получим

$$x^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f^{[3]} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} f^{[4]}, \quad (1.24)$$

$$x_2^{[4]} = (0, 0, 1)f^{[4]},$$

где  $\text{col}(x_1^{[4]}, x_2^{[4]}) = x^{[4]}$ .

Таким образом, из уравнений (1.16)–(1.19) можно найти векторы  $x^{[1]}$ ,  $x^{[2]}$  и  $x^{[3]}$  (см. (1.21), (1.22) и (1.24)), а также условие согласования (1.20). Размерность пространства решений рассматриваемой системы равна единице.



Под *решением* системы (2.1) будем понимать функции  $x^{[j]}(t) \in C(T)$ ,  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , обращающие уравнения (2.1) в тождества на отрезке  $T$ .

**Теорема 2.** Пусть при некотором  $1 \leq r \leq \rho$

$$\text{rank } \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \quad \text{для любого } t \in T,$$

и в матрице  $\mathcal{D}_\rho(t)$  имеется обратимая для всех  $t \in T$  подматрица  $\mathcal{M}_\rho(t)$  размерности  $m_* \times m_*$ , которая включает в себя все столбцы матрицы  $\Gamma_r(t)$  и  $\lambda$  столбцов матрицы  $\Lambda_r(t)$ .

Тогда

$$\text{col}(x_2^{[0]}(t), x_1^{[1]}(t), \dots, x^{[r]}(t)) = (E_{d+\hat{n}}, O) \mathcal{M}_\rho^{-1}(t) f_\rho(t) - \tilde{B}_1(t) x_1^{[0]}(t),$$

где  $Q \text{col}(x_1^{[0]}(t), x_2^{[0]}(t)) = x^{[0]}(t)$ ,  $x_2^{[0]}(t) \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_1^{[0]}(t) \in \mathbb{R}^{n_0-d}$ ,  $Q$  – матрица перестановок строк;  $\tilde{B}_1(t) \in C(T)$  – некоторая  $(d + \hat{n}) \times (n_0 - d)$ -матрица,  $\hat{n} = n_1 + \dots + n_r$ .

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Заметим, что предположения теоремы 2 допускают переменный ранг матриц  $A_i^{[k]}(t)$  и  $B^{[k]}(t)$ .

Рассмотрим частный случай системы (2.1)

$$A(t)x^{[k]}(t) + B(t)x^{[k-1]}(t) = f^{[k]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in T, \quad (2.2)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  – заданные  $n \times n$ -матрицы,  $f^{[k]}(t)$  – заданные, а  $x^{[k]}(t)$  – искомые  $n$ -мерные векторы. Предполагается, что  $A(t), B(t), f^{[k]}(t) \in C(T)$  и  $\det A(t) \equiv 0$ .

Найдём условия, при которых можно получить явный вид общего решения системы (2.2).

Введём в рассмотрение  $n(r+1) \times n$ -матрицы

$$\bar{B}_r(t) = \text{col}(B(t), O, \dots, O), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{G}_r(t) = \text{col}(A(t), B(t), O, \dots, O), \quad (2.4)$$

$n(r+1) \times nr$ -матрицу

$$\bar{\Lambda}_r(t) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A(t) & O & \dots & O & O \\ B(t) & A(t) & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & B(t) & A(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

и  $n(r+1) \times n(r+2)$ -матрицу

$$\bar{\mathcal{D}}_r(t) = (\bar{B}_r(t) \mid \mathcal{G}_r(t) \parallel \bar{\Lambda}_r(t)).$$

Обозначим через  $\mathbf{d}$  оператор “сдвига”

$$\mathbf{d}[f^{[k]}] = f^{[k+1]}, \quad k \in \mathbb{N},$$

так, что

$$\mathbf{d}^j[f^{[k]}] = f^{[k+j]}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

**Лемма 1.** Пусть при некотором  $0 \leq r \leq n$

$$\text{rank } \bar{\Lambda}_r(t) = \lambda = \text{const} \quad \text{для любого } t \in T, \quad (2.6)$$

и в матрице  $\bar{\mathcal{D}}_r(t)$  имеется обратимая при всех  $t \in T$  подматрица  $\bar{\mathcal{M}}_r(t)$  порядка  $n(r+1)$ , включающая в себя  $\lambda$  столбцов матрицы  $\bar{\Lambda}_r(t)$  и все  $n$  столбцов матрицы  $\mathcal{G}_r(t)$ .

Тогда существует линейный оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\mathbf{d} + \dots + R_r(t)\mathbf{d}^r \quad (2.7)$$

такой, что

$$\mathcal{R}[A(t)x^{[k]}(t) + B(t)x^{[k-1]}(t)] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k]}(t) \\ x_2^{[k]}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & E_d \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]}(t) \\ x_2^{[k-1]}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где  $\bar{Q} \operatorname{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t)) = x^{[k]}(t)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{Q}$  – матрица перестановок,  $J_1(t), J_2(t) \in C(T)$  – некоторые матрицы соответствующих размеров.

При этом  $n \times n$ -матрицы  $R_j(t) \in C(T)$  находятся по формуле

$$(R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t)) = (E_n, O, \dots, O) \bar{\mathcal{M}}_r(t)^{-1}. \quad (2.9)$$

**Доказательство.** Пусть  $\bar{Q}$  и  $\bar{Q}_r$  – матрицы перестановок соответствующих размерностей такие, что

$$B(t)\bar{Q} = (B_1(t), B_2(t)), \quad \bar{\Lambda}_r(t)\bar{Q}_r = (\bar{\Lambda}_{r,1}(t), \bar{\Lambda}_{r,2}(t)), \quad (2.10)$$

где блоки  $\bar{B}_{r,2}(t) = \operatorname{col}(B_2(t), O^{nr})$  и  $\bar{\Lambda}_{r,1}(t)$  входят, а блоки  $\bar{B}_{r,1}(t) = \operatorname{col}(B_1(t), O^{nr})$  и  $\bar{\Lambda}_{r,2}(t)$  не входят в матрицу  $\bar{\mathcal{M}}_r(t)$ . При этом  $B_2(t)$  и  $B_1(t)$  состоят  $d$  и  $n-d$  столбцов соответственно, через  $O^{nr}$  обозначена нулевая матрица соответствующей размерности, состоящая из  $nr$  строк.

Так же, как при доказательстве теоремы 1, можно показать, что в сделанных предположениях умножение слева на матрицу  $\bar{\mathcal{M}}_r^{-1}(t)$  и замена переменных

$$x^{[k]}(t) = \bar{Q} \operatorname{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t)), \quad x^{[k-1]}(t) = \bar{Q} \operatorname{col}(x_1^{[k-1]}(t), x_2^{[k-1]}(t)), \quad (2.11)$$

$$\operatorname{col}(x^{[k+1]}(t), \dots, x^{[k+r]}(t)) = \bar{Q}_r \operatorname{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t))$$

$(x_2^{[k-1]}(t), x_2^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^d, x_1^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^\lambda)$  преобразует систему

$$\bar{\mathcal{D}}_r(t) \operatorname{col}(x^{[k-1]}(t), x^{[k]}(t), \dots, x^{[k+r]}(t)) = f_r^{[k]}(t), \quad (2.12)$$

$f_r^{[k]}(t) = \operatorname{col}(f^{[k]}(t), \dots, f^{[k+r]}(t))$ , к виду

$$\begin{pmatrix} J_1(t) & E_d & O & O & O & O \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O \\ J_3(t) & O & O & E_d & O & O \\ J_4(t) & O & O & O & E_\lambda & \Psi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]}(t) \\ x_2^{[k-1]}(t) \\ x_1^{[k]}(t) \\ x_2^{[k]}(t) \\ x_1^{[k]}(t) \\ x_2^{[k]}(t) \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{M}}_r^{-1}(t) f_r^{[k]}(t), \quad (2.13)$$

где  $J_i(t) \in C(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,  $\Psi(t) \in C(t)$  – некоторые матрицы соответствующих размерностей.

С учётом подстановки (2.11) действие оператора (2.7) на систему (2.2) равносильно умножению уравнения (2.12) слева на матрицу  $(R_0(t), R_1(t), \dots, R_r(t))$ . Будем вычислять коэффициенты оператора  $\mathcal{R}$  по формуле (2.9). Тогда с учётом замены (2.11) из (2.13) вытекает тождество (2.8). Лемма доказана.

Введём в рассмотрение матрицы

$$\bar{B}_{r+1,2}(t) = \operatorname{col}(\bar{B}_{r,2}(t), O^n) = \operatorname{col}(B_2(t), O^{n(r+1)}),$$

$$\bar{B}_{r+1,1}(t) = \operatorname{col}(\bar{B}_{r,1}(t), O^n) = \operatorname{col}(B_1(t), O^{n(r+1)}), \quad \mathcal{G}_{r+1}(t) = \operatorname{col}(\mathcal{G}_r(t), O^n)$$

(см. (2.3), (2.4), (2.10)), а также  $n(r+2) \times n(r+1)$ -матрицу  $\bar{\Lambda}_{r+1}(t)$ , которая строится по правилу (2.5). Обозначим

$$\Omega_{r+1}(t) = (\bar{B}_{r+1,2}(t), \mathcal{G}_{r+1}(t), \bar{\Lambda}_{r+1}(t)).$$

Заметим, что матрица  $\Omega_{r+1}(t)$  получена из  $\bar{D}_{r+1}(t) = (\bar{B}_{r+1}(t), \mathcal{G}_{r+1}(t), \bar{A}_{r+1}(t))$  вычёркиванием столбцов, входящих в подматрицу  $\bar{B}_{r+1,1}(t)$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнены все предположения леммы 1 и

$$\text{rank } \bar{A}_{r+1}(t) = \lambda + n \quad \text{для любого } t \in T. \quad (2.14)$$

Тогда  $\text{rank } \Omega_{r+1}(t) = n(r+2)$  при всех  $t \in T$ .

**Доказательство.** В предположениях леммы 1 в  $\bar{D}_r(t)$  имеется обратимая при всех  $t \in T$  подматрица  $\bar{M}_r(t)$  порядка  $n(r+1)$ , которая включает в себя столбцы  $\bar{B}_{r,2}(t)$ .

Умножим  $\Omega_{r+1}(t)$  справа на  $\text{diag}\{E_{n+d}, \bar{Q}_r, E_n\}$  (матрица  $\bar{Q}_r$  определена в (2.10)), а затем слева на  $\text{diag}\{\mathcal{M}_r^{-1}(t), E_n\}$ . С учётом условия (2.6) получим

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O & O \\ O & E_\lambda & \Psi(t) & O \\ O & \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & A(t) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где  $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Psi(t) \in C(T)$  – некоторые матрицы соответствующих размеров.

Последующее умножение (2.15) слева на

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O \\ O & E_\lambda & O \\ O & -\Phi_1(t) & E_n \end{pmatrix}$$

даёт матрицу

$$\begin{pmatrix} E_{n+d} & O & O & O \\ O & E_\lambda & \Psi(t) & O \\ O & O & \tilde{\Phi}_2(t) & A(t) \end{pmatrix},$$

ранг которой по построению совпадает с рангом матрицы  $\Omega_{r+1}(t)$ . В силу условия (2.14)

$$\text{rank}(\tilde{\Phi}_2(t), A(t)) = n \quad \text{при всех } t \in T.$$

Таким образом,  $\text{rank } \Omega_{r+1}(t) = 2n + d + \lambda = n(r+2)$  при любых значениях  $t \in T$ . Лемма доказана.

Отметим, что в предположениях леммы 2 нельзя утверждать, что в матрице  $\bar{D}_{r+1}(t)$  найдётся обратимая для всех  $t \in T$  подматрица порядка  $n(r+2)$ , включающая в себя все столбцы матрицы  $(\bar{B}_{r+1,2}(t), \mathcal{G}_{r+1}(t))$  и  $n + \lambda$  столбцов матрицы  $\bar{A}_{r+1}(t)$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены все предположения леммы 2. Тогда оператор  $\mathcal{R}$  имеет левый обратный оператор

$$\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)\mathbf{d}, \quad (2.16)$$

где  $L_0(t), L_1(t) \in C(T)$  –  $n \times n$ -матрицы.

**Доказательство.** Коэффициенты операторов (2.7) и (2.16) должны удовлетворять тождеству

$$(L_0(t), L_1(t))\bar{\mathcal{R}}_r(t) = (E_n, O, \dots, O), \quad (2.17)$$

где

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) & O \\ O & R_0(t) & \dots & R_{r-1}(t) & R_r(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема справедлива, если алгебраическая система (2.17) имеет решение  $L_0(t), L_1(t) \in C(T)$ . Покажем это.

Построим матрицу  $\tilde{D}_{r+1}(t) = \bar{D}_{r+1}(t) \text{diag}\{\bar{Q}, \dots, \bar{Q}\}$  ( $\bar{Q}$  – матрица перестановок из (2.10)). В силу свойства (2.8) оператора  $\mathcal{R}$

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t)\tilde{D}_{r+1}(t) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|ccc} J_1(t) & E_d & O & O & O & O & O & \dots & O \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O & O & \dots & O \\ \hline O & O & J_1(t) & E_d & O & O & O & \dots & O \\ O & O & J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & \dots & O \end{array} \right), \quad (2.18)$$

где  $\text{col}(J_1(t), J_2(t)) = R_0(t)B_1(t)$  (см. (2.10)).

Запишем  $\tilde{D}_{r+1}(t)$  в виде

$$\tilde{D}_{r+1}(t) = (\bar{B}_{r+1,1}(t), \Delta_{r+1}(t), W_{r+1}(t)),$$

где  $\Delta_{r+1}(t)$  –  $n(r+2) \times 2n$ -подматрица,  $W_{r+1}(t)$  – некоторая матрица соответствующей размерности.

Из (2.18) следует, что  $\text{rank } \Delta_{r+1}(t) = 2n$  для любого  $t \in T$ . Противное противоречило бы обратимости при всех  $t \in T$  матрицы

$$\mathcal{E}(t) = \left( \begin{array}{c|cc|c} E_d & O & O & O \\ O & E_{n-d} & O & O \\ \hline O & J_1(t) & E_d & O \\ O & J_2(t) & O & E_{n-d} \end{array} \right). \quad (2.19)$$

С другой стороны, согласно лемме 2

$$\text{rank } \Omega_{r+1}(t) = \text{rank}(\Delta_{r+1}(t), W_{r+1}(t)) = n(r+2) \quad \text{при всех } t \in T.$$

В этом случае [19, с. 37] существует обратимая на отрезке  $T$  матрица  $V(t)$  соответствующей размерности такая, что

$$W_{r+1}(t)V(t) = (W_{r+1,1}(t), W_{r+1,2}(t)),$$

где блок  $W_{r+1,1}(t)$  состоит из  $nr$  столбцов. При этом  $n(r+2) \times n(r+2)$ -матрица

$$\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t) = (\Delta_{r+1}(t), W_{r+1,1}(t))$$

будет обратима при всех  $t \in T$ .

Умножив обе части тождества (2.18) справа на матрицу  $\text{diag}\{E_{n-d}, E_{2n}, V(t)\}$ , получим

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t)(\bar{B}_{r+1,1}(t), \bar{\mathcal{M}}_{r+1}, W_{r+1,2}(t)) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} J_1(t) & E_d & O & O & O & O & O & \dots & O \\ J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & O & O & \dots & O \\ \hline O & O & J_1(t) & E_d & O & O & O & \dots & O \\ O & O & J_2(t) & O & E_{n-d} & O & O & \dots & O \end{array} \right).$$

Последующее умножение справа на матрицу  $\text{diag}\{O_{n-d}, E_{n(r+1)}, O_d\}$  приводит к тождеству

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t)\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t) = (\mathcal{E}(t), O_{nr}),$$

через  $O_{n-d}$  обозначен нулевой блок, состоящий из  $n-d$  столбцов. Отсюда

$$\bar{\mathcal{R}}_r(t) = (\mathcal{E}(t), O_{nr})\bar{\mathcal{M}}_{r+1}^{-1}(t). \quad (2.20)$$

Подставив (2.20) в (2.17), а затем умножив обе части полученного уравнения справа на  $\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t)$ , получим

$$(L_1(t), L_2(t))(\mathcal{E}(t), O_{nr}) = (E_n, O_{n(r+1)})\bar{\mathcal{M}}_{r+1}(t). \quad (2.21)$$

Нетрудно убедиться в том, что по построению правая часть уравнения (2.21) представляет собой матрицу  $(B_2(t), A(t)\bar{Q}, O_{n(r+1)-d})$ . Учитывая вид (2.19) матрицы  $\mathcal{E}(t)$ , легко видеть, что необходимое и достаточное условие поточечной разрешимости уравнения (2.21)

$$\text{rank} \left( \frac{\mathcal{E}(t)}{(B_2(t), A(t)\bar{Q}, O_{n-d})} \middle| \frac{O}{O} \right) = 2n, \quad t \in T,$$

выполняется.

Из (2.21) можно найти коэффициенты оператора (2.16) по формуле

$$(L_0(t), L_1(t)) = (B_2(t), A(t)\bar{Q}, O_{n-d})\mathcal{E}^{-1}(t),$$

откуда следует, что  $L_0(t), L_1(t) \in C(T)$ . Теорема доказана.

Отметим, что из (2.17), в частности, вытекают соотношения

$$L_0(t)R_0(t) = E_n, \quad L_0(t)R_1(t) + L_1(t)R_0(t) = O,$$

откуда имеем

$$L_0(t) = R_0(t)^{-1}, \quad L_1(t) = -R_0(t)^{-1}R_1(t)R_0(t)^{-1}.$$

**Замечание 2.** Частным случаем системы (2.2) является стационарная система (0.1). Не останавливаясь на анализе таких уравнений, заметим, что все предположения теоремы 3 для (0.1) выполняются, если пучок матриц  $sA + B$  регулярен. При этом  $r = \varkappa + 1$ , где  $\varkappa$  – индекс пучка.

Существование операторов  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{L}$  гарантирует, что любое решение системы (2.2) будет решением системы

$$x_2^{[k-1]}(t) + J_1(t)x_1^{[k-1]}(t) = \varphi_1^{[k]}(t), \quad (2.22)$$

$$x_1^{[k]}(t) + J_2(t)x_1^{[k-1]}(t) = \varphi_2^{[k]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

где

$$\text{col}(J_1(t), J_2(t)) = R_0(t)B_1(t), \quad \text{col}(\varphi_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t)) = \sum_{j=0}^r R_j(t)f^{[k+j]}(t),$$

$x_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^{n-d}$ ;  $x_2^{[k]}(t), \varphi_1^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^d$ . Строго говоря, решения систем (2.2) и (2.22), (2.23) связаны (см. (2.11)) матрицей перестановок строк  $\bar{Q}$  из (2.10).

При  $k = 1$  из (2.22) получаем условие согласования начальных данных

$$x_2^{[0]}(t) + J_1(t)x_1^{[0]}(t) = \varphi_1^{[1]}(t).$$

Для выделения единственного решения достаточно задать  $x_1^{[0]}(t) = a(t)$ , где  $a(t) \in C(T)$  – некоторая  $n - d$ -мерная вектор-функция.

Нетрудно получить вид общего решения системы (2.2):

$$x^{[k]}(t) = \bar{Q} \text{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t)), \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$x_1^{[k]}(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} J_2^{k-j}(t) \varphi_2^{[j]}(t) + (-1)^k J_2^k(t) x_1^{[0]}(t),$$

$$x_2^{[k]}(t) = \varphi_1^{[k+1]}(t) - J_1(t) \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} J_2^{k-j}(t) \varphi_2^{[j]}(t) \right) + (-1)^{k-1} J_1(t) J_2^k(t) x_1^{[0]}(t).$$

**Пример 2.** Рассмотрим систему вида (2.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & |t-1| \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[k]}(t) + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & s(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{[k-1]}(t) = f^{[k]}(t), \quad t \in [0, 2], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.24)$$

$$s(t) = 2 + \sin t.$$



Проанализируем структуру матрицы

$$\bar{\mathcal{D}}_2(t) = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} t & 0 & 0 & \boxed{1} & t & 0 & & & \\ 0 & \boxed{s(t)} & 0 & 0 & 0 & |t-1| & & & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & t & 0 & 0 & \boxed{1} & t & 0 \\ & & & 0 & \boxed{s(t)} & 0 & 0 & 0 & |t-1| \\ & & & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & t & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \boxed{s(t)} & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right) \begin{array}{ccc|ccc} & & & \boxed{1} & t & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & |t-1| & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & & & & \boxed{1} & t & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & |t-1| \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Очевидно, что  $\bar{\Lambda}_1(t)$  имеет на отрезке  $[0, 2]$  переменный ранг, поскольку

$$\text{rank } \bar{\Lambda}_1(t) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & |t-1| \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь,  $\text{rank } \bar{\Lambda}_2(t) = 4$  (матрица  $\bar{\Lambda}_2(t)$  расположена в  $\bar{\mathcal{D}}_2(t)$  правее двойной вертикальной линии).

Кроме того, в  $\bar{\mathcal{D}}_2(t)$  имеется подматрица  $\bar{\mathcal{M}}_2(t)$ , она состоит из столбцов, в которых находятся элементы, выделенные рамками. Нетрудно записать матрицу  $\bar{\Lambda}_3(t)$  и убедиться в том, что её ранг равен 7. Таким образом, выполнены все предположения теоремы 3 при  $r = 2$ .

Оператор  $\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\mathbf{d} + R_2(t)\mathbf{d}^2$ , где

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{|t-1|}{s(t)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{s(t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t|t-1|}{s(t)} \end{pmatrix},$$

преобразует систему (2.24) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[k]}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{[k-1]}(t) = \varphi^{[k]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

где  $\varphi^{[k]}(t) = R_0(t)f^{[k]}(t) + R_1(t)f^{[k+1]}(t) + R_2(t)f^{[k+2]}(t)$ .

Общее решение системы (2.25) представимо в виде  $x^{[k]}(t) = \text{col}(x_1^{[k]}(t), x_2^{[k]}(t))$ , где

$$x_1^{[k]}(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} t^{k-j} \varphi_2^{[j]}(t) + (-1)^k t^k x_1^{[0]}(t), \quad (2.26)$$

$$x_2^{[k]}(t) = \varphi_1^{[k+1]}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.27)$$

$\text{col}(\varphi_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t)) = \varphi^{[k]}(t)$ ;  $x_1^{[k]}(t), \varphi_2^{[k]}(t) \in \mathbb{R}$ ;  $x_2^{[k]}(t), \varphi_1^{[k]}(t) \in \mathbb{R}^2$ . По теореме 3 функции (2.26), (2.27) обращают в тождества и уравнения (2.24).

При  $k = 1$  из (2.27) получаем условие согласования начальных данных  $x_2^{[0]}(t) = \varphi_1^{[1]}(t)$ , поэтому для выделения единственного решения необходимо задать начальные условия в виде  $x_1^{[0]}(t) = a(t)$ ,  $a(t) \in C(T)$ . Размерность пространства решений в данном случае равна единице.

**3. Нелинейные системы с дискретным временем.** Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$g(x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где  $x^{[k]} \in \mathbb{R}^n$  – искомые векторы,  $n$ -мерная вектор-функция  $g(\alpha, \beta)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ ) определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные  $\partial g / \partial \alpha$  и  $\partial g / \partial \beta$  в некоторой окрестности  $\mathcal{V}(0)$  точки  $(0, 0)$ :  $g(\alpha, \beta) \in C^1(\mathcal{V}(0))$ . При этом

$$g(0, 0) = 0,$$

$$\det \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \equiv 0 \quad \text{для любых точек } (\alpha, \beta) \in \mathcal{V}(0).$$

Обозначим

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha_0, \beta_0) = F(\alpha_0, \beta_0), \quad \frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha_0, \beta_0) = H(\alpha_0, \beta_0).$$

Пусть  $1 \leq r \leq n$ . Определим  $nr \times n$ -матрицы

$$\mathcal{B}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}) = \text{col}(F(x^{[0]}, x^{[1]}), O, \dots, O),$$

$$\mathcal{G}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}, x^{[2]}) = \text{col}(H(x^{[0]}, x^{[1]}), F(x^{[1]}, x^{[2]}), O, \dots, O),$$

$nr \times n(r-1)$ -матрицу

$$\Lambda_r^{[0]}(x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ H(x^{[1]}, x^{[2]}) & O & \dots & O & O \\ F(x^{[2]}, x^{[3]}) & H(x^{[2]}, x^{[3]}) & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & F(x^{[r-1]}, x^{[r]}) & H(x^{[r-1]}, x^{[r]}) \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\mathcal{D}_r^{[0]}(\bar{x}_r) = (\mathcal{B}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}) \mid \mathcal{G}_r^{[0]}(x^{[0]}, x^{[1]}, x^{[2]}) \parallel \Lambda_r^{[0]}(x^{[1]}, \dots, x^{[r]}))$$

размерности  $nr \times n(r+1)$ , здесь и далее  $\bar{x}_r = (x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]})$ .

Предположим, что пучок  $cH(0, 0) + F(0, 0)$  регулярен. Тогда найдутся обратимые  $n \times n$ -матрицы  $P$  и  $S$  такие, что

$$P(cH(0, 0) + F(0, 0))S = c \begin{pmatrix} O & N \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & E_d \\ J & O \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

( $J$  и  $N$  такие же, как в (0.2)). С помощью матрицы  $S$  разобьём  $x^{[k]}$  на подвекторы

$$S(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}) = x^{[k]}, \quad x_1^{[k]} \in \mathbb{R}^{n-d}, \quad x_2^{[k]} \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.3)$$

**Теорема 4.** Пусть  $g(\alpha, \beta) \in C^1(\mathcal{V}(0))$ , матричный пучок  $cH(0, 0) + F(0, 0)$  регулярен и при  $r = \kappa + 1$  ( $\kappa$  – индекс пучка)

$$\text{rank } \Lambda_r^{[0]}(x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = n(r-1) - d \quad (3.4)$$

при всех  $x^{[j]}$ ,  $j = \overline{1, r}$ , из некоторой окрестности нуля.

Если  $x_1^{[0]} \in \mathcal{V}_0(0)$ ,  $\mathcal{V}_0(0)$  – достаточно малая окрестность точки  $0 \in \mathbb{R}^{n-d}$ , то существует нетривиальное решение системы (3.1), которое может быть найдено по рекуррентным формулам

$$x^{[k]} = \phi(x_1^{[k-1]}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

при этом

$$x_2^{[0]} = \phi_0(x_1^{[0]}), \quad (3.6)$$

функции  $\phi(x_1^{[k-1]})$  и  $\phi_0(x_1^{[0]})$  определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по своим аргументам в некоторой окрестности нуля и обладают свойством:  $\phi(0) = 0$  и  $\phi_0(0) = 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим систему

$$\mathcal{F}_r^{[0]}(\bar{x}_r) = \text{col}(g(x^{[0]}, x^{[1]}), g(x^{[1]}, x^{[2]}), \dots, g(x^{[r-1]}, x^{[r]})) = 0. \quad (3.7)$$

Тогда  $\mathcal{D}_r^{[0]}(\bar{x}_r) = \left( \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[0]} \parallel \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[1]} \parallel \dots \parallel \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[r]} \right)$  и

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_r^{[0]} &= \text{diag}\{P, \dots, P\} \mathcal{D}_r^{[0]}(0) \text{diag}\{S, \dots, S\} = \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc|ccc|cc|cc} O & E_d & O & N & O & O & \dots & O & O & O & O \\ J & O & E_{n-d} & O & O & O & \dots & O & O & O & O \\ \hline O & O & O & E_d & O & N & \dots & O & O & O & O \\ O & O & J & O & E_{n-d} & O & \dots & O & O & O & O \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline O & O & O & O & O & O & \dots & O & E_d & O & N \\ O & O & O & O & O & O & \dots & J & O & E_{n-d} & O \end{array} \right). \quad (3.8) \end{aligned}$$

Из представления (3.8) следует: 1)  $\text{rank } \Lambda_r^{[0]}(0) = n(r-1) - d$ ; 2) в матрице  $\tilde{\mathcal{D}}_r^{[0]}$  имеется обратимая подматрица порядка  $nr$ , состоящая из столбцов, в которых расположены единичные блоки. В силу последнего обстоятельства в матрице  $\mathcal{D}_r^{[0]}(0)$  также найдётся обратимая подматрица  $\mathcal{M}_r^{[0]}(0)$  порядка  $nr$  такая, что

$$\mathcal{M}_r^{[0]}(0) = (\partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x_2^{[0]}(0), \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[1]}(0), \dots, \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x^{[r-1]}(0), \partial \mathcal{F}_r^{[0]} / \partial x_1^{[r]}(0)).$$

Здесь и далее  $x_1^{[k]}$  и  $x_2^{[k]}$  определяются по правилу (3.3).

На основании этого факта можно заключить, что в некоторой окрестности нуля существует неявная функция [20, с. 68]

$$x_2^{[0]} = \phi_0(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}), \quad (3.9)$$

$$x^{[1]} = \phi(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}), \quad (3.10)$$

$$\text{col}(x^{[2]}, \dots, x^{[r-1]}, x_1^{[r]}) = \phi_1(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}), \quad (3.11)$$

удовлетворяющая уравнениям (3.7).

Заметим, что матрица  $\mathcal{M}_r^{[0]}$  остаётся обратимой и в некоторой окрестности  $\bar{\mathcal{V}}_r(0)$  точки  $\bar{x}_r = 0$ , при этом

$$(\mathcal{M}_r^{[0]}(\bar{x}_r))^{-1} \mathcal{D}_r^{[0]}(\bar{x}_r) \text{diag}\{S, \dots, S\} = \left( \begin{array}{cc|c} J_1(\bar{x}_r) & E_d & O \\ J_2(\bar{x}_r) & O & E_n \\ J_3(\bar{x}_r) & O & O \end{array} \parallel \begin{array}{cc} O & \Psi_1(\bar{x}_r) \\ O & \Psi_2(\bar{x}_r) \\ E_{n(r-1)-d} & \Psi_3(\bar{x}_r) \end{array} \right),$$

где  $J_j(\bar{x}_r)$ ,  $\Psi_j(\bar{x}_r)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – некоторые матрицы соответствующих размеров. В соответствии с предположением (3.4)  $\Psi_1(\bar{x}_r) \equiv O$ ,  $\Psi_2(\bar{x}_r) \equiv O$  в области  $\bar{\mathcal{V}}_r(0)$ .

По теореме о производной неявной функции [20, с. 73] в некоторой окрестности нуля

$$\begin{pmatrix} \partial\phi_0/\partial x_1^{[0]} & \partial\phi_0/\partial x_2^{[r]} \\ \partial\phi/\partial x_1^{[0]} & \partial\phi/\partial x_2^{[r]} \\ \partial\phi_1/\partial x_1^{[0]} & \partial\phi_1/\partial x_2^{[r]} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_1(\bar{x}_r) & O \\ J_2(\bar{x}_r) & O \\ J_3(\bar{x}_r) & \Psi_3(\bar{x}_r) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что функции (3.9) и (3.10) не зависят от переменной  $x_2^{[r]}$ :

$$x_2^{[0]} = \phi_0(x_1^{[0]}), \quad (3.12)$$

$$x^{[1]} = \phi(x_1^{[0]}). \quad (3.13)$$

Добавим к системе (3.7) ещё одно уравнение

$$g(x^{[r]}, x^{[r+1]}) = 0. \quad (3.14)$$

Систему (3.7), (3.14) можно записать в виде  $\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}(\bar{x}_{r+1}) = 0$ .

Построим неявную функцию, удовлетворяющую системе (3.7), (3.14). Для этого подставим выражения (3.12), (3.13) и (3.11) в уравнение (3.14). В результате получим

$$\hat{g}(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}, x^{[r+1]}) = 0. \quad (3.15)$$

Записав матрицу  $\tilde{\mathcal{D}}_{r+1}^{[0]}$  (см. (3.8)) и проанализировав её структуру, нетрудно увидеть, что в  $\mathcal{D}_{r+1}^{[0]}(0)$  существует обратимая  $n(r+1) \times n(r+1)$ -подматрица

$$\mathcal{M}_{r+1}^{[0]}(0) = (\partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x_2^{[0]}(0), \partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x^{[1]}(0), \dots, \partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x^{[r]}(0), \partial\mathcal{F}_{r+1}^{[0]}/\partial x_1^{[r+1]}(0)).$$

Отсюда, с учётом свойства обратимых блочных матриц [12, с. 55–57], следует, что  $n \times n$ -матрица  $(\partial\hat{g}/\partial x_2^{[r]}, \partial\hat{g}/\partial x_1^{[r+1]})$  при  $(x_1^{[0]}, x_2^{[r]}, x^{[r+1]}) = 0$  будет обратима. В этом случае в некоторой окрестности точки  $(x_1^{[0]}, x_2^{[r+1]}) = 0$  будет определена неявная функция

$$\text{col}(x_2^{[r]}, x_1^{[r+1]}) = \phi_2(x_1^{[0]}, x_2^{[r+1]}), \quad (3.16)$$

удовлетворяющая уравнению (3.15).

Таким образом, неявная функция (3.12), (3.13), (3.11), (3.16) обращает систему (3.7), (3.14) в тождество в некоторой окрестности нуля.

Построим другую неявную функцию, удовлетворяющую уравнениям (3.7), (3.14). Для этого рассмотрим систему

$$\mathcal{F}_r^{[1]}(\tilde{x}_r) = \text{col}(g(x^{[1]}, x^{[2]}), g(x^{[2]}, x^{[3]}), \dots, g(x^{[r]}, x^{[r+1]})) = 0, \quad (3.17)$$

где  $\tilde{x}_r = (x^{[1]}, \dots, x^{[r+1]})$ .

Легко видеть, что в силу (3.4)

$$\text{rank } \Lambda_r^{[1]}(x^{[2]}, \dots, x^{[r+1]}) = n(r-1) - d$$

в некоторой окрестности точки  $(x^{[2]}, \dots, x^{[r+1]}) = 0$ , где

$$\Lambda_r^{[1]}(x^{[2]}, \dots, x^{[r+1]}) = (\partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[3]}, \dots, \partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[r+1]}).$$

Аналогично тому, как это было сделано в отношении матрицы  $\mathcal{D}_r^{[0]}(0)$ , опираясь на структурную форму (3.2), можно показать, что в матрице

$$\mathcal{D}_r^{[1]}(\tilde{x}_r) = (\partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[1]}, \partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[2]}, \dots, \partial\mathcal{F}_r^{[1]}/\partial x^{[r+1]})$$

при  $\tilde{x}_r = 0$  имеется обратимая  $nr \times nr$ -подматрица

$$\mathcal{M}_r^{[1]}(0) = (\partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x_2^{[1]}, \partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x^{[2]}, \dots, \partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x^{[r]}, \partial \mathcal{F}_r^{[1]} / \partial x_1^{[r+1]}).$$

Поэтому можно заключить, что в некоторой окрестности нуля определена неявная функция вида

$$x_2^{[1]} = \phi_0(x_1^{[1]}), \quad (3.18)$$

$$x^{[2]} = \phi(x_1^{[1]}), \quad (3.19)$$

$$\text{col}(x^{[3]}, \dots, x^{[r]}, x_1^{[r+1]}) = \phi_1(x_1^{[1]}, x_2^{[r+1]}), \quad (3.20)$$

удовлетворяющая системе (3.17).

Добавим к системе (3.17) уравнение

$$g(x^{[0]}, x^{[1]}) = 0. \quad (3.21)$$

В результате подстановки (3.18) в (3.21) получим

$$\tilde{g}(x^{[0]}, x_1^{[1]}) = 0. \quad (3.22)$$

Из существования в  $\mathcal{D}_{r+1}^{[0]}(0)$  обратимой подматрицы  $\mathcal{M}_{r+1}^{[0]}(0)$  порядка  $n(r+1)$  и свойств обратимых блочных матриц следует, что при  $(x^{[0]}, x_1^{[1]}) = 0$  матрица  $(\partial \tilde{g} / \partial x_2^{[0]}, \partial \tilde{g} / \partial x_1^{[1]})$  будет обратима.

Поэтому найдётся неявная функция

$$x_2^{[0]} = \tilde{\phi}_0(x_1^{[0]}), \quad (3.23)$$

$$x_1^{[1]} = \tilde{\phi}(x_1^{[0]}), \quad (3.24)$$

определённая в некоторой окрестности точки  $x_1^{[0]} = 0$  и обращающая (3.22) в тождество. Таким образом, построена ещё одна неявная функция (3.23), (3.24), (3.18)–(3.20), удовлетворяющая системе (3.17), (3.21) или, что то же, (3.7), (3.14).

Подставим выражения (3.16) и (3.24) в правые части равенств (3.11) и (3.18)–(3.20) соответственно. Тем самым для системы (3.7), (3.14) получим две неявные функции, которые, согласно теореме о неявной функции, должны совпадать на пересечении областей определения. Следовательно, можно утверждать, что существует окрестность нулевой точки  $\mathcal{V}_0(0)$ , в которой функции (3.12), (3.13) и (3.19) обращают при подстановке в тождество первые  $2n$  уравнений системы (3.7), а именно

$$g(x^{[0]}, x^{[1]}) = 0, \quad g(x^{[1]}, x^{[2]}) = 0.$$

Продолжая процесс, можно найти все векторы (3.5).

По построению в области  $\mathcal{V}_0(0)$  функции  $\phi(x_1^{[k-1]})$  и  $\phi_0(x_1^{[0]})$  из (3.5), (3.6) обладают всеми перечисленными в формулировке теоремы свойствами.

Если вектор  $x_1^{[0]} \neq 0$  достаточно близок к нулю, то система (3.5), (3.6) будет иметь нетривиальное решение, которое располагается в достаточно малой окрестности нулевого решения. Это нетривиальное решение будет обращать в тождество все уравнения системы (3.1). Теорема доказана.

Рассмотрим систему уравнений более общего вида

$$g_k(x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[k]}) = 0, \quad k = \overline{1, \rho}, \quad (3.25)$$

где  $x^{[i]} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = \overline{0, k}$ , – искомые векторы,  $m_k$ -мерная вектор-функция  $g_k$  определена в некоторой окрестности  $\mathcal{V}_k(\alpha_k)$  точки  $\alpha_k = (\alpha^{[0]}, \alpha^{[1]}, \dots, \alpha^{[k]})$ ,  $\alpha^{[i]} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = \overline{0, k}$ . При этом

$$g_k(\alpha_k) = 0.$$

Будем предполагать, что в указанных областях  $\mathcal{V}_k(\alpha_k)$  функции  $g_k$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов и

$$\det \frac{\partial g_k}{\partial x^{[k]}} \equiv 0.$$

Запишем (3.25) в виде

$$\mathcal{F}_\rho(\bar{x}_\rho) = 0, \quad (3.26)$$

где  $\bar{x}_\rho = (x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[\rho]})$ ,  $\mathcal{F}_\rho(\bar{x}_\rho) = \text{col}(g_1(x^{[0]}, x^{[1]}), g_2(x^{[0]}, x^{[1]}, x^{[2]}), \dots, g_\rho(x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[\rho]}))$ .

Введём обозначения

$$\mathcal{D}_\rho(\bar{x}_\rho) = (\partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[0]}, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[1]}, \dots, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[\rho]}), \quad \Gamma_r(\bar{x}_\rho) = (\partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[1]}, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[2]}, \dots, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[r]}),$$

$$\Lambda_r(\bar{x}_\rho) = (\partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[r+1]}, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[r+2]}, \dots, \partial \mathcal{F}_\rho / \partial x^{[\rho]}), \quad m_* = \sum_{k=1}^{\rho} m_k, \quad n_* = \sum_{i=0}^{\rho} n_i.$$

Предполагается, что  $m_* \leq n_*$ . Отметим, что матрица  $\mathcal{D}_\rho(\bar{x}_\rho)$  имеет размеры  $m_* \times n_*$ .

**Теорема 5.** Пусть  $g_k(x^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[k]}) \in C^1(\mathcal{V}_k(\alpha_k))$  ( $k = \overline{1, \rho}$ ) и, кроме того, при некотором  $1 \leq r \leq \rho$ :

1)  $\text{rank } \Lambda_r(\bar{x}_\rho) = \lambda = \text{const}$  для любого  $\bar{x}_\rho \in \mathcal{V}(\alpha_\rho)$ ;

2) в матрице  $\mathcal{D}_\rho(\alpha_\rho)$  имеется обратимая  $m_* \times m_*$ -подматрица, которая включает в себя все столбцы матрицы  $\Gamma_r(\alpha_\rho)$  и  $\lambda$  столбцов матрицы  $\Lambda_r(\alpha_\rho)$ .

Тогда существует окрестность  $\mathcal{V}_\alpha(\alpha_\rho)$ , в пределах которой определена неявная функция (непрерывная и имеющая непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов), удовлетворяющая в этой окрестности системе (3.26). Часть компонент этой неявной функции имеет вид

$$\text{col}(x_2^{[0]}, x^{[1]}, \dots, x^{[r]}) = \varphi(x_1^{[0]}),$$

где  $x^{[0]} = Q \text{col}(x_1^{[0]}, x_2^{[0]})$ ,  $x_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{n-d}$ ,  $x_2^{[0]} \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = m_* - \lambda - \sum_{i=1}^r n_i$ ,  $Q$  – некоторая матрица перестановок строк.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство существования неявной функции (3.12), (3.13), (3.11) для системы (3.7).

Следует отметить, что теорема 5 позволяет находить локальное решение системы (3.25) по шагам аналогично тому, как это было продемонстрировано в примере 1.

**Заключение.** В статье исследованы классы вырожденных систем уравнений с дискретным временем, которые либо вообще не рассматриваются в литературе, либо изучаются при сильных ограничениях на внутреннюю структуру. В линейном случае это, в частности, объясняется тем, что на данный момент не существует хорошей структурной теории пучков трёх и более матриц (в отличие от (0.1)).

Для систем вида (0.3) и (2.1) получены условия, при которых можно найти часть искомых векторов из заданного конечного числа уравнений (теоремы 1 и 2). Показано, что нестационарные системы такого вида целесообразнее рассматривать на конечном горизонте. Предложенный подход может быть использован для пошагового нахождения решения (пример 1).

Для линейной системы с непрерывным и дискретным временем (2.2) доказано существование линейного оператора (2.7), действие которого преобразует (2.2) к виду (2.22), (2.23). Получены условия, при которых этот оператор обладает левым обратным оператором. Последнее обстоятельство позволяет получить явное представление (2.26), (2.27) для общего решения рассматриваемой системы.

Исследована локальная разрешимость нелинейных систем вида (3.1) и (3.25). Решение можно получить в виде неявной функции (либо части компонент неявной функции), удовлетворяющей уравнениям (3.1) или (3.25) в некоторой окрестности нуля (теоремы 4 и 5). Предложенный подход не только позволяет доказать теоремы о существовании решений, но и автоматически решает проблему согласования начальных данных.

Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы для исследования различных качественных свойств вырожденных систем с дискретным временем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Luenberger A., Arbel D.G. Singular dynamic Leontief systems // *Econometrica*. 1977. V. 45. P. 991–995.
2. Hemami H., Wyman B.F. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1979. V. 24. P. 526–535.
3. Stevens B.L., Lewis F.L. Aircraft Modelling, Dynamics and Control. New York, 1991.
4. Zhai D., Zhang Q.L., Li J.H. Fault detection for singular multiple time-delay systems with application to electrical circuit // *J. Franklin Inst.* 2014. V. 351. P. 5411–5436.
5. Zhao F., Zhang Q., Zhang Y.  $H_\infty$  filtering for a class of singular biological systems // *IET Control Theory Appl.* 2015. № 9. P. 2047–2055.
6. Zerrougui M., Darouach M., Boutat-Baddas L., Ali H.S.  $H_\infty$  filtering for singular bilinear systems with application to a single-link flexible-joint robot // *Int. J. Control Autom. Syst.* 2014. № 12. P. 590–598.
7. Balaji S. A new Bernoulli wavelet operational matrix of derivative method for the solution of nonlinear singular Lane–Emden type equations arising in astrophysics // *J. Comput. Nonlin. Dynam.* 2016. V. 11. № 5. P. 051013–11.
8. Dai L. Singular Control System. New York, 1989.
9. Kaczorek T. Linear Control Systems. New York, 1992.
10. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М., 2015.
11. Cao M., Liao F. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time descriptor system with state delay // *Int. J. of Systems Sci. Principles and Applications of Systems and Integration*. 2015. V. 46. № 5. P. 932–943.
12. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М., 1988.
13. Debeljkovic D., Stojanovic S., Nestrovic T. The stability of linear continuous singular and discrete descriptor time delay systems over the finite time interval: an overview – part II discrete case // *Sci. Tech. Rev.* 2012. V. 62. № 2. P. 62–75.
14. Hadjmohammadi R., Mobayen S. An efficient observer design method for singular discrete-time systems with delays and nonlinearity: LMI approach // *Scientia Iranica. D*. 2017. V. 26. № 3. P. 1690–1699.
15. Lin Y. Observer design for rectangular discrete-time singular systems with time-varying delay // *Int. J. Phys. Sci.* 2012. V. 7. № 3. P. 423–431.
16. Men B., Zhang Q., Wang G., Zhou J. Stabilization of discrete-time switched linear singular systems via a stochastic approach // *Appl. Math. Inf. Sci.* 2013. V. 7. № 2L. P. 631–637.
17. Kaczorek T. Positive descriptor time-varying discrete-time linear systems and their asymptotic stability // *TransNav*. 2015. V. 9. № 1. P. 83–89.
18. Nikoukhah R., Willsky A.S., Levy B.C. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems // *IEEE Trans. Aut. Control*. 1991. V. 37. № 9. P. 1–36.
19. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск, 2003.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М., 1972.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН  
имени В.М. Матросова, г. Иркутск

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.  
После доработки 10.01.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.7+517.928

## СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. А. А. Бободжанов, Б. Т. Калимбетов, В. Ф. Сафонов

Рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) с быстро осциллирующей неоднородностью и с интегральным оператором типа Вольтерры, ядра которых могут содержать как классическую быстро убывающую экспоненту (простейший случай), так и фундаментальные решения дифференциальных систем (общий случай). Трудность построения регуляризованной (по С.А. Ломову) асимптотики в общем случае обусловлена сложной асимптотической структурой фундаментальной матрицы решений (матрицы Коши) однородной дифференциальной системы. В данной работе сначала строится регуляризованная асимптотика матрицы Коши, которая затем применяется для построения регуляризованной асимптотики решения ИДУ.

DOI: 10.31857/S0374064123050126, EDN: DAMJGP

**Введение.** Рассмотрим задачу для сингулярно возмущённой системы

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t K(t,s)Z(t,s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)ds + h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0,\varepsilon) = y^0 \quad (1)$$

с быстро изменяющимся ядром  $K(t,s)Z(t,s,\varepsilon)$  и матрицей  $Z(t,s,\varepsilon)$ , удовлетворяющей однородной дифференциальной системе

$$\varepsilon \frac{dZ(t,s,\varepsilon)}{dt} = B(t)Z(t,s,\varepsilon), \quad Z(s,s,\varepsilon) = I, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad (2)$$

где  $A(t)$  и  $B(t)$  –  $n \times n$ -матрицы,  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $Z(t,s,\varepsilon)$  – матричная  $n \times n$ -функция,  $I$  – единичная  $n \times n$ -матрица,  $\beta(t)$  – заданная скалярная функция ( $\beta'(t) > 0$  – частота быстро осциллирующей неоднородности);  $\varepsilon$  – малый параметр. Предполагается, что спектры

$$\sigma(A(t)) = \{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}, \quad \sigma(B(t)) = \{\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)\}$$

матриц  $A(t)$  и  $B(t)$  стабильны на отрезке  $[0, 1]$  (см. [1, с. 39–40]). Точное решение  $Z(t,s,\varepsilon)$  системы (2) часто называют *матрицей Коши* однородного уравнения  $\varepsilon \dot{z} = B(t)z$ . Нас интересует проблема построения регуляризованной асимптотики [1, 2] решения задачи (1). Простейший случай таких задач, когда  $Z(t,s,\varepsilon)$  является экспонентой  $\exp(\varepsilon^{-1} \int_s^t \mu(\theta) d\theta)$ , рассматривался ранее в ряде работ [3–6]. Идея решения поставленной проблемы проста: нужно сначала получить регуляризованную асимптотику матрицы Коши  $Z(t,s,\varepsilon)$ , записать её в (1), а затем применить к полученной системе технику из [3, 4]. Однако реализация этой идеи далеко не тривиальна и требует привлечения тонкого математического аппарата, описание которого приводится в следующем пункте.

**1. Регуляризованная асимптотика матрицы Коши.** Рассмотрим систему (2) и построим её регуляризованное асимптотическое решение. Заметим, что решение этой задачи связано с разработкой теории нормальной и однозначной разрешимости матричных систем уравнений, аналогичных системам, рассмотренным С.А. Ломовым в статье [7], в которой исследовались



системы уравнений с частными производными с точечными начальными данными в так называемом пространстве безрезонансных решений, причём элементы этого пространства не зависят от переменной  $s$ . В нашем случае зависимость от  $s$  существенна, поэтому в настоящей работе разрабатывается иная схема построения матрицы Коши. Вместо матричных систем уравнений в частных производных нами рассматриваются векторные системы уравнений для каждого столбца матрицы Коши, но в пространствах, зависящих от переменной  $s$ . Заметим, что регуляризованная асимптотика матрицы Коши была построена в работе [8]. Приведём выкладки из этой работы, относящиеся к матрице Коши, для полного понимания содержания разрабатываемого ниже алгоритма.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- 1) матрица  $B(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^{n \times n})$ ;
- 2) спектр  $\sigma(B(t))$  стабилен, т.е.  $\mu_i(t) \neq \mu_j(t)$ ,  $i \neq j$ ,  $\mu_i(t) \neq 0$  для любого  $t \in [0, 1]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;
- 3)  $\operatorname{Re} \mu_i(t) \leq 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим сингулярно возмущённую задачу

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = B(t)z(t, s, \varepsilon), \quad z(s, s, \varepsilon) = e_r, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad (3)$$

для  $r$ -го столбца матрицы  $Z(t, s, \varepsilon)$  (здесь  $e_r = \{0, \dots, 0, \frac{1}{(r)}, 0, \dots, 0\}$ ). Регуляризацию задачи (3) проведём с помощью функций

$$\sigma_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t, s)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Для расширения  $\tilde{z}(t, s, \tau, \varepsilon)$  получим задачу

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \left( \sum_{j=1}^n \mu_j(t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma_j} - B(t) \tilde{z} \right) = 0, \quad \tilde{z}(t, s, \sigma, \varepsilon) \Big|_{\substack{t=s \\ \sigma=0}} = e_r,$$

где  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  – вектор регуляризующих переменных. Поскольку задача (4) регулярна по  $\varepsilon$  (при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ), то её решение определим в виде ряда

$$\tilde{z}(t, s, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t, s, \sigma).$$

Для коэффициентов  $z_k(t, s, \sigma)$  этого ряда получаем следующие итерационные задачи:

$$\sum_{j=1}^n \mu_j(t) \frac{\partial z_0}{\partial \sigma_j} - B(t) z_0 = 0, \quad z_0(s, s, 0) = e_r, \quad (5_0)$$

$$L z_k = -\frac{\partial z_{k-1}}{\partial t}, \quad z_{k-1}(s, s, 0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (5_k)$$

Каждую из задач  $(5_k)$  можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n \mu_j(t) \frac{\partial w}{\partial \sigma_j} - B(t) w = H(t, s, \sigma), \quad w(s, s, 0) = w^0, \quad (6)$$

где  $H(t, s, \sigma)$  – известная  $n \times 1$ -вектор-функция,  $w^0$  – известный постоянный вектор той же размерности. Решение задачи (6) будем искать в пространстве  $U$ , элементы  $w$  которого представляются в виде суммы

$$w(t, s, \sigma) = w_0(t, s) + \sum_{j=1}^n w_j(t, s) e^{\sigma_j}, \quad w_j(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq 1, \mathbb{C}^n), \quad j = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Пусть  $H(t, s, \sigma) = H_0(t, s) + \sum_{j=1}^n H_j(t, s)e^{\sigma_j} \in U$ . Подставив (7) в (6) и приравняв отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим следующие системы векторных уравнений:

$$-B(t)w_0 = H_0(t, s), \quad (\mu_j(t)I - B(t))w_j = H_j(t, s), \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Первая из систем (8) имеет единственное решение  $w_0(t, s) = -B^{-1}(t)H_0(t, s)$ . Решения следующих систем (8) будем определять в виде  $w_j = Q(t)v(t, s)$  ( $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ ), где  $Q(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$  – матрица из собственных векторов матрицы  $B(t)$ :  $B(t)\theta_j(t) = \mu_j(t)\theta_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Для  $v(t, s)$  получаем систему

$$[\mu_j(t)I - \text{diag}(\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))]v = Q^{-1}(t)H_j(t, s), \quad j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

или (более подробно)

$$(\mu_j(t) - \mu_1(t))v_1 = (H_j(t, s), \eta_1(t)), \quad \dots, \quad (\mu_j(t) - \mu_{j-1}(t))v_{j-1} = (H_j(t, s), \eta_{j-1}(t)),$$

$$0 = (H_j(t, s), \eta_j(t)),$$

$$(\mu_j(t) - \mu_{j+1}(t))v_{j+1} = (H_j(t, s), \eta_{j+1}(t)), \quad \dots, \quad (\mu_j(t) - \mu_n(t))v_n = (H_j(t, s), \eta_n(t)),$$

где  $\eta_k(t)$  –  $k$ -й столбец матрицы  $G(t) = (Q^{-1}(t))^*$ , т.е.  $\eta_k(t) - (\bar{\lambda}_k)$  – собственный вектор матрицы  $B^*(t)$ . Отсюда видно, что для разрешимости  $j$ -й системы (9) в пространстве  $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$  необходимо и достаточно, чтобы для любых  $(t, s) \in \{0 \leq s \leq t \leq 1\}$  выполнялось тождество

$$(H_j(t, s), \eta_j(t)) \equiv 0. \quad (10)$$

При этом указанная система имеет решение

$$w_j(t, s) = \xi_j(t, s)\theta_j(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(H_j(t, s), \eta_k(t))}{\mu_j(t) - \mu_k(t)}\theta_k(t). \quad (11)$$

Теперь можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1)–3) и правая часть  $H = H_0(t, s) + \sum_{j=1}^n H_j(t, s)e^{\sigma_j}$  системы (6) принадлежит пространству  $U$ . Тогда для разрешимости системы (6) в  $U$  необходимо и достаточно, чтобы тождества (10) выполнялись при всех  $j = \overline{1, n}$ . При этом решение системы (6) записывается в виде (7), где  $w_0(t, s) = -B^{-1}(t)H_0(t, s)$ ,  $w_j(t, s)$  – вектор-функции (11), скалярные функции  $\xi_j(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq 1)$  произвольные. Система (6) при дополнительных условиях

$$w(s, s, 0) = w^0, \quad \left\langle -\frac{\partial w}{\partial t}, \eta_j(t)e^{\sigma_j} \right\rangle = 0 \quad \text{при всех } (t, s) \in \{0 \leq s \leq t \leq 1\} \quad (12)$$

однозначно разрешима в пространстве  $U$  (здесь через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено скалярное произведение в  $U$  (см. [9, с. 105]).

**Доказательство.** Первая часть этой теоремы доказана выше при построении решения (7). Перейдём к доказательству второй части. Подставив (7) в условие  $w(s, s, 0) = w^0$ , будем иметь

$$\sum_{j=1}^n \left[ \xi_j(s, s)\theta_j(s) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(H_j(s, s), \eta_k(s))}{\mu_j(s) - \mu_k(s)}\theta_k(s) \right] = w^0 + B^{-1}(s)H_0(s, s).$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на  $\eta_i(s)$  и учитывая биортонормированность систем  $\{\theta_j(s)\}$ ,  $\{\eta_i(s)\}$ , получаем

$$\xi_i(s, s) = (w^0 + B^{-1}(s)H_0(s, s), \eta_i(s)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(H_j(s, s), \eta_i(s))}{\mu_j(s) - \mu_i(s)}. \quad (13)$$

Подставив теперь (7) во второе условие (12) и обозначив

$$(H_j(t, s), \eta_k(t))(\mu_j(t) - \mu_k(t))^{-1} = h_{jk}(t, s),$$

будем иметь<sup>\*)</sup>

$$(\xi_j(t, s)\theta_j(t))^{\bullet} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n ((h_{jk}(t, s)\theta_k(t))^{\bullet}, \eta_j(t)) = 0$$

или

$$\frac{d\xi_j(t, s)}{dt} = -(\dot{\theta}(t), \eta_j(t))\xi_j(t, s) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n h_{jk}(t, s)(\dot{\theta}(t), \eta_j(t)), \quad j = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Учитывая начальные условия (13), найдём однозначно функции  $\xi_j(t, s)$ , а значит, построим единственное решение (7) системы (6) в пространстве  $U$ . Теорема доказана.

Перейдём теперь к нахождению решений итерационных задач (5<sub>k</sub>). Поскольку система (5<sub>0</sub>) однородная, то её решение имеет вид

$$z_0(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^n \xi_j^{(0)}(t, s)\theta_j(t)e^{\sigma_j},$$

где функции  $\xi_j^{(0)}(t, s)$  удовлетворяют задаче (см. (14), (13))

$$\frac{d\xi_j^{(0)}(t, s)}{dt} = -(\dot{\theta}(t), \eta_j(t))\xi_j^{(0)}(t, s), \quad \xi_j^{(0)}(s, s) = (e_r, \eta_j(s)).$$

Так как решение этой задачи определяется формулой  $\xi_j^{(0)}(t, s) = e^{-\int_s^t (\dot{\theta}_j(x), \eta_j(x)) dx} (e_r, \eta_j(s))$ , то решение задачи (5<sub>0</sub>) можно записать в виде

$$z_0 = z_{0(r)}(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^n e^{-\int_s^t (\dot{\theta}_j(x), \eta_j(x)) dx} (e_r, \eta_j(s))\theta_j(t)e^{\sigma_j},$$

где индекс  $(r)$  означает, что решение  $z_{0(r)}(t, s, \sigma)$  соответствует значению  $r$ -го столбца матрицы  $Z_0(t, s, \sigma)$ .

Обозначим

$$\gamma_j(t, s) = -\int_s^t (\dot{\theta}(x), \eta_j(x)) dx, \quad j = \overline{1, n}, \quad Z_0(t, s, \sigma) = (w_{0(1)}(t, s, \sigma), \dots, w_{0(n)}(t, s, \sigma)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z_0(t, s, \sigma) &= \left( \sum_{j=1}^n \theta_j(t)(e_1, \eta_j(s))e^{\gamma_j(t, s)+\sigma_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \theta_j(t)(e_n, \eta_j(s))e^{\gamma_j(t, s)+\sigma_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n (\theta_j(t)(e_1, \eta_j(s))e^{\gamma_j(t, s)}, \dots, \theta_j(t)(e_n, \eta_j(s))e^{\gamma_j(t, s)})e^{\sigma_j}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть получены решения неоднородных систем (5<sub>k</sub>) при  $k \geq 1$ , а значит, будут построены матрицы

$$Z_k(t, s, \sigma) = (z_{k(1)}(t, s, \sigma), \dots, z_{k(n)}(t, s, \sigma)), \quad k \geq 1.$$

<sup>\*)</sup> Здесь и далее жирная точка  $\bullet$  означает дифференцирование по  $t$ .

В результате будем иметь формальный ряд  $\tilde{Z}(t, s, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Z_k(t, s, \sigma)$ . Нетрудно показать (см., например, [9, с. 118–121]), что асимптотическим решением  $N$ -го порядка задачи (2) является частичная сумма

$$Z_{\varepsilon, N}(t, s) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k Z_k(t, s, \psi(t, s)/\varepsilon), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n),$$

этого ряда, взятого на сужении  $\sigma = \psi(t, s)/\varepsilon$ , т.е. что имеет место оценка

$$\|Z(t, s, \varepsilon) - Z_{\varepsilon, N}(t, s)\|_{C[0,1]} \leq K_N \varepsilon^{N+1}, \quad (15)$$

где постоянная  $K_N > 0$  не зависит от  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  ( $\varepsilon_0 > 0$  достаточно мало),  $Z(t, s, \varepsilon)$  – точное решение задачи (2).

При  $\operatorname{Re} \mu_j(t) < 0$  (при всех  $t \in [0, 1]$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) верна экспоненциальная оценка нормы матрицы Коши  $Z(t, s, \varepsilon)$  (см., например, [10, с. 69]), из которой вытекает оценка (15). Однако в случае  $\operatorname{Re} \mu_j(t) = 0$  для доказательства неравенства (15) требуется иной подход, который подробно описан в [9, с. 118–121].

**2. Регуляризованная асимптотика интегро-дифференциальной системы (1).** Рассмотрим теперь задачу (1). Сначала заметим, что в правой части системы (5<sub>1</sub>) отсутствует свободный член типа  $H_0(t, s)$ , поэтому в решении задачи (5<sub>1</sub>) также будет отсутствовать член, не содержащий экспоненты  $e^{\sigma_i}$ , а значит, матрица  $Z_1(t, s, \sigma)$  будет иметь вид  $Z_1(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^n F_{1j}(t, s) e^{\sigma_j}$ , где  $F_{1j}(t, s)$  –  $n \times n$ -матрицы. По той же причине все матрицы  $Z_k(t, s, \sigma)$ ,  $k \geq 2$ , будут иметь такую же структуру. Таким образом,

$$Z_k(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^n F_{kj}(t, s) e^{\sigma_j}, \quad k \geq 1,$$

поэтому ряд для расширения матрицы Коши примет вид

$$\tilde{Z}(t, s, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Z_k(t, s, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=1}^n F_{kj}(t, s) e^{\sigma_j},$$

а задача (1) – вид

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=1}^n \int_0^t K(t, s) F_{kj}(t, s) e^{\psi_j(t, s)/\varepsilon} y(s, \varepsilon) ds + h(t) e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0, \varepsilon) = y^0.$$

Обозначая  $K(t, s) F_{kj}(t, s) \equiv W_{kj}(t, s)$ , запишем последнюю задачу в форме

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t \sum_{j=1}^n e^{\psi_j(t, s)/\varepsilon} W_{kj}(t, s) y(s, \varepsilon) ds + h(t) e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0, \varepsilon) = y^0. \quad (16)$$

Получена задача интегро-дифференциальной системы с  $n$  спектральными значениями  $\mu_r(t)$ ,  $r = \overline{1, n}$ , ядра интегрального оператора. Эта система более общая, чем система, рассмотренная в [3], так как в ней ядро является асимптотическим рядом по  $\varepsilon$  (тогда как в [3] в ядре вместо бесконечной суммы  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_{kj}(t, s)(t, s)$  стоит одна матричная функция  $k_j(t, s)$ ). Задачу (16) следует рассматривать при условиях 1)–3), так как при них была получена асимптотика матрицы Коши  $Z(t, s, \varepsilon)$ . Кроме того, следует наложить дополнительные ограничения на исходные данные задачи (16):

4) матрица  $A(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^{n \times n})$ , вектор-функция  $h(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n)$ , скалярная функция  $\beta(t) \in C^\infty[0, 1]$ ;

5) спектр  $\sigma(A(t))$  матрицы  $A(t)$  стабилен, т.е.  $\lambda_i(t) \neq 0$ ,  $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , для любого  $t \in [0, 1]$ ;

6)  $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\beta'(t) > 0$  при всех  $t \in [0, 1]$ ;

7)  $\lambda_j(t), \mu_i(t) \neq \beta'(t)$ ,  $\lambda_j(t) \neq \mu_i(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Для единообразия обозначений положим  $\mu_j(t) \equiv \lambda_{n+j}(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $i\beta'(t) = \lambda_{2n+1}(t)$  и введём регуляризующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(x) dx \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, 2n+1}.$$

Заметим, что  $\psi_j(t) \equiv \psi_j(t, s)|_{s=0}$ ,  $j = \overline{n+1, 2n}$ . Для расширения  $\tilde{y} = \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$  решения системы (16) получим следующую задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial \tau_j} = A(t) \tilde{y} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(\theta) d\theta} W_{kj}(t, s) \tilde{y}(s, \psi(s)/\varepsilon, \varepsilon) ds + h(t) e^{\tau_{2n+1}} \sigma_{n+1},$$

$$\tilde{y}(0, 0, \varepsilon) = y^0, \quad \sigma_{n+1} \equiv e^{i\beta(0)/\varepsilon}. \quad (17)$$

Однако здесь не проведена регуляризация интегральных операторов

$$J_k \tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(\theta) d\theta} W_{kj}(t, s) \tilde{y}(s, \psi(s)/\varepsilon, \varepsilon) ds, \quad k \geq 0.$$

Для их регуляризации введём пространство  $M_\varepsilon$ , асимптотически инвариантное относительно оператора  $J_k \tilde{y}(s, \tau, \varepsilon)$  (см. [1; гл. 2, § 6]).

**Определение 1.** Будем говорить, что вектор-функция  $w(t, \tau) = \{w_1, \dots, w_n\}$  принадлежит пространству  $Y$ , если она представима в виде суммы

$$w(t, \tau) = w_0(t, \sigma_{n+1}) + \sum_{j=1}^{2n+1} w_j(t, \sigma_{n+1}) e^{\tau_j}, \quad w_j(t, \sigma_{n+1}) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n), \quad j = \overline{0, 2n+1}. \quad (18)$$

Так как ограниченная по  $\varepsilon$  постоянная  $\sigma_{n+1} = e^{i\beta(0)/\varepsilon}$  не влияет на разработку записанного ниже алгоритма, то далее в элементах (18) пространства  $Y$  мы её опускаем.

Подставив функцию (18) в каждый интегральный оператор, входящий в  $J_k \tilde{y}(s, \tau, \varepsilon)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} J_{kj} w(t, \tau) &= \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} W_{kj}(t, s) \left( w_0(s) + \sum_{i=1}^{2n+1} w_i(s) e^{\varepsilon^{-1} \int_0^s \lambda_i(x) dx} \right) ds = \\ &= \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} W_{kj}(t, s) w_0(s) ds + \sum_{i=1}^{2n+1} \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} W_{kj}(t, s) w_i(s) e^{\varepsilon^{-1} \int_0^s \lambda_i(x) dx} ds = \\ &= \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} W_{kj}(t, s) w_0(s) ds + e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} \int_0^t W_{k, n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds + \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+j}}^{2n+1} \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} W_{kj}(t, s) w_i(s) e^{\varepsilon^{-1} \int_0^s \lambda_i(x) dx} ds. \end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} W_{kj}(t, s) w_0(s) ds = -\varepsilon \int_0^t \frac{W_{kj}(t, s) w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)} d e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} = \\
 & = \varepsilon \left[ \frac{W_{kj}(t, 0) w_0(0)}{\lambda_{n+j}(0)} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} - \frac{W_{kj}(t, t) w_0(t)}{\lambda_{n+j}(t)} \right] + \varepsilon \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W_{kj}(t, s) w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)} \right) ds = \\
 & = \varepsilon \left[ \frac{W_{kj}(t, 0) w_0(0)}{\lambda_{n+j}(0)} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} - \frac{W_{kj}(t, t) w_0(t)}{\lambda_{n+j}(t)} \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W_{kj}(t, s) w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)} \right) \right) \Big|_{s=0} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} - \left( \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W_{kj}(t, s) w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)} \right) \right) \Big|_{s=t} \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{W_{kj}(t, s) w_0(s)}{\lambda_{n+j}(s)} \right) \right) ds = \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (I_{n+j}^m(W_{kj}(t, s) w_0(s)))|_{s=0} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} - (I_{n+j}^m(W_{kj}(t, s) w_0(s)))|_{s=t} \right],
 \end{aligned}$$

где введены операторы

$$I_{n+j}^0 = \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)}, \quad I_{n+j}^1 = \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s} (I_{n+j}^0), \quad I_{n+j}^m = \frac{1}{\lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s} (I_{n+j}^{m-1}), \quad m \geq 1. \quad (19)$$

Поступая аналогичным образом, при  $i \neq n+j$  будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t \lambda_{n+j}(x) dx} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^s \lambda_i(x) dx} W_{kj}(t, s) w_i(s) ds = \\
 & = e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} \int_0^t e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t (\lambda_i(x) - \lambda_{n+j}(x)) dx} W_{kj}(t, s) w_i(s) ds = \\
 & = \varepsilon e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} \int_0^t \frac{W_{kj}(t, s)}{\lambda_i(x) - \lambda_{n+j}(x)} w_i(s) d e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t (\lambda_i(x) - \lambda_{n+j}(x)) dx} = \\
 & = \varepsilon e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} \left[ \frac{W_{kj}(t, s) w_i(s)}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t (\lambda_i(x) - \lambda_{n+j}(x)) dx} \Big|_{s=0}^{s=t} - \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W_{kj}(t, s) w_i(s)}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} \right) e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t (\lambda_i(x) - \lambda_{n+j}(x)) dx} ds \right] = \\
 & = \varepsilon \left[ \frac{W_{kj}(t, t) w_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_{n+j}(t)} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(x) dx} - \frac{W_{kj}(t, 0) w_i(0)}{\lambda_i(0) - \lambda_{n+j}(0)} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} \right] - \\
 & - \varepsilon e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{W_{kj}(t, s) w_i(s)}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} \right) e^{\varepsilon^{-1} \int_s^t (\lambda_i(x) - \lambda_{n+j}(x)) dx} ds =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} (-1)^m [(I_{n+j,i}^m (W_{kj}(t, s) w_i(s)))_{s=t} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_i(x) dx} - \\ - (I_{n+j,i}^m (W_{kj}(t, s) w_i(s)))_{s=0} e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_{n+j}(x) dx}],$$

где введены операторы

$$I_{n+j,i}^0 = \frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)}, \quad I_{n+j,i}^1 = \frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s} (I_{n+j,i}^0), \\ I_{n+j,i}^\nu = \frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} \frac{\partial}{\partial s} (I_{n+j,i}^{\nu-1}), \quad \nu \geq 1. \quad (20)$$

Таким образом, для произвольной вектор-функции (18) будем иметь

$$J_k w(t, \tau) = \sum_{j=1}^n e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \sum_{j=1}^n \left\{ e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds + \right. \\ \left. + [(I_{n+j}^m (W_{kj}(t, s) w_0(s)))_{s=0} e^{\tau_{n+j}} - (I_{n+j}^m (W_{kj}(t, s) w_0(s)))_{s=t}] + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+j}}^{2n+1} (-1)^m [(I_{n+j,i}^m (W_{kj}(t, s) w_i(s)))_{s=t} e^{\tau_i} - (I_{n+j,i}^m (W_{kj}(t, s) w_i(s)))_{s=0} e^{\tau_{n+j}}] \right\},$$

где  $\tau_j = \psi_j(t)/\varepsilon$ ,  $j = \overline{1, 2n+1}$ .

Обозначим через  $R_{m,k} : Y \rightarrow Y$  операторы, действующие на каждую функцию (18) по правилу

$$R_{0,k} w(t, \tau) = \sum_{j=1}^n e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds, \\ R_{m+1,k} w(t, \tau) = \sum_{j=1}^n \left\{ e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{k,n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds + \right. \\ \left. + [(I_{n+j}^m (W_{kj}(t, s) w_0(s)))_{s=0} e^{\tau_{n+j}} - (I_{n+j}^m (W_{kj}(t, s) w_0(s)))_{s=t}] + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+j}}^{2n+1} (-1)^m [(I_{n+j,i}^m (W_{kj}(t, s) w_i(s)))_{s=t} e^{\tau_i} - (I_{n+j,i}^m (W_{kj}(t, s) w_i(s)))_{s=0} e^{\tau_{n+j}}] \right\},$$

операторы  $I_{n+j}^m$ ,  $I_{n+j,i}^m$  имеют вид (19) и (20). Тогда оператор  $J_k w(t, \tau)$  можно записать кратко в форме

$$J_k w(t, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m R_{m,k} w(t, \tau).$$

Пусть теперь некоторая вектор-функция  $\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon)$ , непрерывная по  $(t, \tau) \in [0, 1] \times \Pi$ , где  $\Pi = \{\operatorname{Re} \tau_j \leq 0, j = \overline{1, 2n+1}\}$ , представляется в виде ряда

$$\tilde{y}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l y_l(t, \tau), \quad y_l(t, \tau) = w_0^{(l)}(t) + \sum_{j=1}^{2n+1} w_j^{(l)}(t) e^{\tau_j} \in Y, \quad (21)$$

сходящегося асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow +0$  (равномерно по  $(t, \tau) \in [0, 1] \times \Pi$ ). Подставив её в интегральный оператор системы (17), получим равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{k+l} \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\psi_j(t,s)/\varepsilon} W_{kj}(t, s) y_l(s, \psi(s)/\varepsilon) ds = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{k+l} J_k y_l(t, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} R_{0,k} y_l(t, \tau) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l(t, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l(t, \tau), \end{aligned}$$

где  $\tau = \psi(t)/\varepsilon$ .

**Определение 2.** Оператор  $\tilde{J}y = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l(t, \tau)$  будем называть *формальным расширением оператора*  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_0^t \sum_{j=1}^n e^{\psi_j(t,s)/\varepsilon} W_{kj}(t, s) y(s, \varepsilon) ds$ .

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к (16):

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{y}_0}{\partial \tau_j} = A(t) \tilde{y} + \tilde{J} \tilde{y} + h(t) e^{\tau_{2n+1}} \sigma_{n+1}, \quad \tilde{y}(0, 0, \varepsilon) = y^0. \quad (22)$$

Подставляя ряд (21) в (22) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , будем иметь следующие итерационные задачи:

$$\begin{aligned} Fy_0 & \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - A(t) y_0 - R_{0,0} y_0 = h(t) e^{\tau_{2n+1}} \sigma_{n+1}, \quad y_0(0, 0) = y^0, \\ Fy_1 & = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1}) y_0, \quad y_1(0, 0) = 0, \\ & \dots, \\ Fy_r & = -\frac{\partial y_{r-1}}{\partial t} + \sum_{k+l+m=r} R_{m,k} y_l(t, \tau), \quad y_r(0, 0) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Каждую пару итерационных задач (23) при  $r$  и  $r+1$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} Fy & \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} - A(t) y = f(t, \tau, \sigma_{n+1}), \quad y(0, 0) = y_*, \\ Fv & = -\frac{\partial y}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1}) y + g(t, \tau, \sigma_{n+1}), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $f(t, \tau, \sigma_{n+1})$ ,  $g(t, \tau, \sigma_{n+1})$  – известные вектор-функции класса  $Y$ . Здесь, так же как и в п. 1, нетрудно доказать следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1)–7) и вектор-функция  $f(t, \tau, \sigma_{n+1}) \in Y$ . Тогда для разрешимости системы (24) в пространстве  $Y$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $t \in [0, 1]$  выполнялись условия

$$\langle f(t, \tau, \sigma_{n+1}) | \chi_j(t) e^{\tau_j} \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (25)$$

При выполнении условий (25) и дополнительных требованиях

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} + R_{1,0} y + g(t, \tau, \sigma_{n+1}) | \chi_j(t) e^{\tau_j} \right\rangle \equiv 0 \quad \text{при всех } t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}, \quad (26)$$

задача (24) однозначно разрешима в пространстве  $Y$ .



Здесь через  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  обозначено скалярное (при каждом  $t \in [0, 1]$ ) произведение в  $Y$  (см. [9, с. 105]),  $\chi_i(t) - (\bar{\lambda}_j)$  – собственный вектор матрицы  $A^*(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Обращаем внимание на то, что в (25) и (26) в умножении участвуют только вектор-функции  $\chi_1(t)e^{\tau_1}, \dots, \chi_n(t)e^{\tau_n}$ , так как функции типа  $q_j(t)e^{\tau_j}$ ,  $j = \overline{n+1, 2n+1}$ , не входят в ядро оператора

$$Fy \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} - A(t)y.$$

И, наконец, обозначая через  $y_{\varepsilon N}(t) = \sum_{r=1}^N \varepsilon^r y_r(t, \psi(t)/\varepsilon)$  сужение  $N$ -й частичной суммы ряда (21) при  $\tau = \psi(t)/\varepsilon = (\psi_1(t)/\varepsilon, \dots, \psi_{2n+1}(t)/\varepsilon)$ , докажем (так же как и в [9, с. 303–308]) оценку

$$\|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0, T]} \leq M_N \varepsilon^{N+1}, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где постоянная  $M_N > 0$  не зависит от  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  ( $\varepsilon_0 > 0$  достаточно мало).

**3. Построение главного члена асимптотики.** Разработанный нами алгоритм позволяет получать асимптотику решения исходной задачи любого порядка (по  $\varepsilon$ ). Однако вычисление высших приближений связано с громоздкими выкладками. На практике обычно ограничиваются главным членом асимптотики, структура которого повторяет структуру точного решения задачи (1). В этом случае иногда достаточно ограничиться системой

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t \sum_{j=1}^n e^{\frac{\psi_j(t,s)}{\varepsilon}} (W_{0j}(t,s) + \varepsilon W_{1j}(t,s)) y(s, \varepsilon) ds + h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}, \quad y(0, \varepsilon) = y^0$$

и рассмотреть только две первые итерационные задачи:

$$Fy_0 \equiv \sum_{j=1}^{2n+1} \lambda_j(t) \frac{\partial y_0}{\partial \tau_j} - A(t)y_0 - R_{0,0}y_0 = h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1}, \quad y_0(0, 0) = y^0, \quad (27)$$

и

$$Fy_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y_0, \quad y_1(0, 0) = 0,$$

где  $R_{0,0}y_0$ ,  $R_{1,0}y_0$ ,  $R_{0,1}y_0$  будут такими:

$$\begin{aligned} R_{0,0}w(t, \tau) &= \sum_{j=1}^n e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{0,n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds, \\ R_{1,0}y_0(t, \tau) &= \sum_{j=1}^n \left\{ [(I_{n+j}^0(W_{0j}(t, s)w_0(s)))|_{s=0} e^{\tau_{n+j}} - (I_{n+j}^0(W_{0j}(t, s)w_0(s)))|_{s=t}] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+j}}^{2n+1} [(I_{n+j,i}^0(W_{0j}(t, s)w_i(s)))|_{s=t} e^{\tau_i} - (I_{n+j,i}^0(W_{0j}(t, s)w_i(s)))|_{s=0} e^{\tau_{n+j}}] \right\}, \\ R_{0,1}w(t, \tau) &= \sum_{j=1}^n e^{\tau_{n+j}} \int_0^t W_{1,n+j}(t, s) w_{n+j}(s) ds. \end{aligned}$$

Определив решение системы (27) в виде суммы

$$y_0(t, \tau) = y_0^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^{2n+1} y_j^{(0)}(t)e^{\tau_j}, \quad (28)$$

получим уравнения

$$[\lambda_{n+i}(t)I - A(t)]y_{n+i}^{(0)}(t) - \int_0^t W_{0,n+i}(s)y_{n+i}^{(0)}(s)ds = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$[\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]y_{2n+1}^{(0)}(t) = h(t)\sigma, \quad -A(t)y_0^{(0)}(t) = 0,$$

$$[\lambda_j(t)I - A(t)]y_j^{(0)}(t) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

решив которые, найдём

$$y_0^{(0)}(t) = 0, \quad y_{n+i}^{(0)}(t) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_j^{(0)}(t) = \alpha_j(t)\varphi_j(t), \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_{2n+1}^{(0)}(t) = [\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)\sigma_{n+1},$$

где  $\alpha_i(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$  – пока произвольные функции. Решение (28) системы (27) запишется в виде

$$y_0(t, \tau) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + [\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)e^{\tau_{2n+1}}\sigma_{n+1}. \quad (29)$$

Подставив (29) в начальное условие  $y_0(0, 0) = y^0$ , найдём

$$\alpha_j(0) = (y^0 - [\lambda_{2n+1}(0)I - A(0)]^{-1}h(0)\sigma_{n+1}, \chi_j(t)), \quad j = \overline{1, n}. \quad (30)$$

Для вычисления скалярного произведения в условиях

$$\left\langle -\frac{\partial y_0}{\partial t} + (R_{1,0} + R_{0,1})y_0 \middle| \chi_i(t)e^{\tau_i} \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (31)$$

нужно выделить в выражении  $(R_{1,0} + R_{0,1})y_0$  члены, зависящие только от  $e^{\tau_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (I_{n+j,i}^0(W_{0j}(t, s)w_i(s)))|_{s=t}e^{\tau_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (I_{n+j,i}^0(W_{0j}(t, s)w_i(s)))|_{s=t}e^{\tau_i}.$$

Теперь условия (31) запишутся как

$$\left( -(\alpha_i(t)\varphi_i(t))^\bullet + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} (W_{0j}(t, s)) \right) \middle|_{s=t} \varphi_i(t)\alpha_i(t), \chi_i(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Присоединяя к этой системе уравнений начальные условия (30), найдём однозначно функции

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0)e^{\int_0^t q_i(x)dx}, \quad i = \overline{1, n},$$

где обозначено

$$q_i(t) \equiv \left( -\dot{\varphi}_i(t) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\lambda_i(s) - \lambda_{n+j}(s)} (W_{0j}(t, s)) \right) \middle|_{s=t} \varphi_i(t), \chi_i(t) \right).$$

При этом главный член асимптотики решения задачи (1) имеет вид

$$y_{0\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\varphi_j(t)e^{\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} + [\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}. \quad (32)$$

Из (32) видно, что интегральный оператор на структуру главного члена асимптотики решения задачи (1) влияет через операторы  $W_{0j}(t, t)$  (т.е. в конечном счёте через диагональное ядро  $K(t, t)$ ) и быстро осциллирующую функцию  $h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}$ . Если  $K(t, t) \equiv 0$ , то система (2) не оказывает никакого влияния на структуру главного члена асимптотики решения задачи (1), т.е. в первом приближении интегро-дифференциальная система (1) ведет себя так же, как и дифференциальная система  $\varepsilon \dot{y} = A(t)y + h(t)e^{i\beta(t)/\varepsilon}$ ,  $y(0, \varepsilon) = y^0$  (влияние интегрального члена проявится при построении высших приближений). Из (32) также видно, что даже в случае когда спектры матриц  $A(t)$  и  $B(t)$  лежат строго слева от мнимой оси ( $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$ ,  $j = \overline{1, 2n}$ ,  $t \in [0, 1]$ ), точное решение  $y(t, \varepsilon)$  задачи (1) не стремится (в непрерывной метрике) ни к какому пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Выйдя при  $t = 0$  из начальной точки  $y^0$ , оно неограниченно колеблется при  $\varepsilon \rightarrow +0$  около функции  $[\lambda_{2n+1}(t)I - A(t)]^{-1}h(t)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00496).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
3. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Интегральные уравнения Вольтерры с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 8. С. 53–78.
4. Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т. Метод регуляризации для систем с нестабильным спектральным значением ядра интегрального оператора // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 4. С. 696–706.
5. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущённые нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Мат. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 654–664.
6. Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д. Регуляризация сингулярно возмущённых интегральных уравнений с быстро изменяющимся ядром и их асимптотика // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 9. С. 1199–1211.
7. Ломов С.А. Однозначная разрешимость некоторых матричных уравнений с частными производными // Мат. заметки. 1977. Т. 21. № 4. С. 525–530.
8. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Асимптотические решения интегро-дифференциальной системы с быстро изменяющимися ядрами специального вида // Вестн. Моск. энергетического ин-та. 2011. № 6. С. 47–56.
9. Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. Курс высшей математики. Сингулярно возмущённые задачи и метод регуляризации. М., 2012.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М., 1973.

Национальный исследовательский университет  
“Московский энергетический институт”,  
Южно-Казахстанский университет  
имени М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан

Поступила в редакцию 22.01.2023 г.  
После доработки 31.03.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.