

Том 59, Номер 6

ISSN 0374-0641
Июнь 2023



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 6, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами в случае кратных корней характеристического уравнения <i>О. Г. Антоновская</i>	707
Колебательные решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле без выхода в зоны насыщения <i>В. В. Евстафьева</i>	712
Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению <i>И. Н. Сергеев</i>	726

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Эллиптические задачи и интегральные уравнения в пространствах различной гладкости по переменным <i>А. В. Васильев, В. Б. Васильев</i>	735
Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных <i>А. М. Денисов</i>	746
Принцип минимума функционала Тихонова в задаче устойчивого продолжения поля потенциала с поверхности <i>Е. Б. Лансеев, Н. Ю. Черникова</i>	752
Двумерные задачи фильтрации жидкости с граничными источниками в анизотропном неоднородном слое <i>В. Ф. Пивень</i>	763

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

О квазиакустической схеме А.П. Фаворского <i>М. В. Абакумов, В. А. Исаков</i>	780
Задача о неидеальном тепловом контакте <i>М. П. Галанин, А. С. Родин</i>	791
Явно-неявные схемы расчёта динамики упруговязкопластических сред с малым временем релаксации <i>В. И. Голубев, И. С. Никитин, Н. Г. Бураго, Ю. А. Голубева</i>	803
Алгоритм подвижного окна для параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров <i>А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников</i>	814
Об аппроксимации поверхностных производных функций с применением интегральных операторов <i>А. В. Сетуха</i>	828

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Неаналитические первые интегралы аналитических систем дифференциальных уравнений
в окрестности устойчивых положений равновесия

В. В. Козлов

843

ХРОНИКА

О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений
в Московском университете

847

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51+517.926

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Для непрерывных и дискретных линейных автономных систем обсуждается возможность выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающих выполнение условия знакоотрицательности её первой производной (первой разности) с заданным запасом в случае кратных корней характеристического уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123060018, EDN: FFHCNR

Введение. В задачах исследования устойчивости прямым методом Ляпунова как непрерывных, так и дискретных систем, широкое применение находят функции Ляпунова квадратичного вида, построенные для соответствующих линейных систем [1, с. 120–132; 2, с. 33–45]. При решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы, возникает необходимость использования ограничений на величину первой производной (первой разности) функции Ляпунова в силу соответствующей линейной системы [3, 4].

В работе [4] для случая различных корней характеристического уравнения решается задача такого выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с помощью простых соотношений, что выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ обеспечивается с заданным (не обязательно максимальным) запасом. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. В настоящей работе обсуждается возможность решения аналогичной задачи в случае кратных корней характеристического уравнения. Рассматривается случай, когда матрица канонической системы представляет собой жорданову клетку (жорданов блок), т.е. все корни характеристического уравнения действительны и равны между собой.

1. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению, для линейных систем дифференциальных уравнений. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ для производной квадратичной формы $V(x)$ в силу линейной автономной системы обеспечивается с заданным запасом δ (т.е. $\dot{V}(x) < \delta V(x)$, $x \neq 0$), естественно выбирать с использованием следующего утверждения, доказанного в работах [3, 5], а именно: пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

такая, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. И пусть положительно определённая квадратичная форма задана соотношением

$$V(x) = x^T K x \quad (K^T = K). \quad (2)$$

Элементы постоянных $n \times n$ -матриц $A = (a_{ij})_{ij=1}^n$ и $K = (K_{ij})_{ij=1}^n$ вещественные. Рассмотрим первую производную квадратичной формы (2) в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(x) = x^T (A^T K + K A) x. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) и на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0 = \text{const} > 0$ функции $V(x)$ максимальное

значение её первой производной (3) в силу системы (1) равно δV_0 . Тогда для собственных значений λ_i , $i = \overline{1, n}$, матрицы коэффициентов системы (1) справедливо неравенство $2 \max_{i=\overline{1, n}} \operatorname{Re} \lambda_i \leq \delta < 0$, а δ является наибольшим корнем уравнения

$$\det (A^T K + K A - \mu K) = 0. \quad (4)$$

Для случая, когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в работе [4] предложена методика выбора коэффициентов квадратичной формы (2), основанная на переходе с помощью линейного преобразования неизвестных к каноническому виду соответствующей дифференциальной системы, имеющему диагональный вид.

В случае, когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни, проблема состоит в том, что матрицу системы не всегда можно привести к диагональному виду [6, с. 168–172; 7, с. 117–122]. Следует отметить, что всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n,$$

приводящее систему к каноническому виду [8, с. 121]. Но даже в случае системы второго порядка канонический вид линеаризованной системы может быть как

$$\dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, \quad (5)$$

так и

$$\dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2 \quad (6)$$

(λ – кратный корень характеристического уравнения). В первом случае, какую бы положительно определённую квадратичную форму

$$V(\xi_1, \xi_2) = K_{11}\xi_1^2 + 2K_{12}\xi_1\xi_2 + K_{22}\xi_2^2 \quad (7)$$

мы ни взяли, первая производная в силу (5) будет равна $\dot{V}_{(5)}(x)(\xi_1, \xi_2) = 2\lambda V(\xi_1, \xi_2)$, т.е. $\max_{x \neq 0} \dot{V}_{(5)}(x)/V(x) = 2\lambda$. Во втором случае уравнение (4) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} (2\lambda - \mu)K_{11} & (2\lambda - \mu)K_{12} + K_{11} \\ (2\lambda - \mu)K_{12} + K_{11} & (2\lambda - \mu)K_{22} + 2K_{12} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Следует отметить, что в этом случае значение $\mu_{\max} = 2\lambda$ недостижимо, так как приводит к соотношению $K_{11} = 0$, невозможному для положительно определённой формы (7). Согласно (8) максимальный корень этого уравнения будет равен

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \frac{K_{11}}{\sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2}}. \quad (9)$$

И поскольку значение $K_{12} = 0$ даёт минимум (9) при фиксированных значениях остальных коэффициентов (7), квадратичную функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(\xi_1, \xi_2) = K_{11}\xi_1^2 + K_{22}\xi_2^2. \quad (10)$$

В этом случае (9) примет вид

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}}},$$

а значение $k = K_{11}/K_{22}$, если $\mu_{\max} = \delta$ ($2\lambda < \delta < 0$), будет равно $k = (2\lambda - \delta)^2$. (Тот факт, что $\max \dot{V}/V \geq 2\lambda$, следует из теоремы 1.)

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. Для любого $\delta \in (2\lambda, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (10), коэффициенты которой удовлетворяют условию $2\lambda + \sqrt{k} = \delta$, где $k = K_{11}/K_{22}$, является функцией Ляпунова системы (6), причём $\max \dot{V}_{(6)}/V = \delta$. При $\delta \leq 2\lambda$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

В случае, когда матрица канонической системы содержит жорданову клетку порядка $n > 2$, квадратичную функцию Ляпунова, подобно (10), будем подбирать в виде

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n K_{ii}\xi_i^2. \tag{11}$$

Тогда соответствующий ей блок в уравнении (4) можно записать как

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) = 0, \tag{12}$$

где при $n \geq 4$

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) = (2\lambda - \mu)K_{11}D_{n-1}(\mu, K_{22}, K_{33}, \dots, K_{nn}) - K_{11}^2D_{n-2}(\mu, K_{33}, \dots, K_{nn}),$$

причём

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}) = (2\lambda - \mu)^2K_{11}K_{22} - K_{11}^2, \\ D_3(\delta, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = (2\lambda - \mu)K_{11}D_2(\delta, K_{22}, K_{33}) - (2\lambda - \mu)K_{11}^2K_{33}.$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. Для любого $\delta \in (2\lambda, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где μ_{\max} – наибольший корень уравнения (12), существует и является функцией Ляпунова системы

$$\dot{\xi} = J_n\xi, \tag{13}$$

где J_n – жорданова клетка порядка n , причём $\max \dot{V}/V_{(13)} = \delta$. При $\delta \leq 2\lambda$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Примем в случае $n = 3$, что

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}} + \frac{K_{22}}{K_{33}}}.$$

Если считать, что все отношения $K_{i-1,i-1}/K_{ii} = k$, $i = \overline{2, n}$, равны между собой, то для любого $\mu \in (2\lambda, 0)$ [5], разделив обе части (12) на $K_{11}K_{22} \cdots K_{nn}$, получим

$$d_n(\mu, k) = (2\lambda - \mu)d_{n-1}(\mu, k) - kd_{n-2}(\mu, k) = 0, \tag{14}$$

где $d_n = D_n/(K_{11}K_{22} \cdots K_{nn})$. При этом

$$d_2(\mu, k) = (2\lambda - \mu)^2 - k, \quad d_3(\mu, k) = (2\lambda - \mu)((2\lambda - \mu)^2 - 2k).$$

Из теоремы 3 следует

Следствие 1. Для любого $\delta \in (2\lambda, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где μ_{\max} – наибольший корень уравнения (14), и $k = K_{i-1,i-1}/K_{ii}$, $i = \overline{2, n}$, существует и является функцией Ляпунова системы (13), причём $\max \dot{V}_{(13)}/V = \delta$. При $\delta \leq 2\lambda$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Таким образом, при $n = 3$ получим, что $\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{2k}$, при $n = 4$ $\mu_{\max} = 2\lambda + (\sqrt{5} + 1)\sqrt{k}/2$, при $n = 5$ $\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{3k}$, при $n = 7$ $\mu_{\max} = 2\lambda + (\sqrt{2} + 2)\sqrt{k}$ и

т.д. А в предположении, что задано $\delta \in (2\lambda, 0)$, из равенства $\mu_{\max} = \delta$ можно получить соответствующее ему значение k , а именно: при $n = 3$ $k = (2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 4$ $k = (3 - \sqrt{5})(2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 5$ $k = (2\lambda - \delta)^2/3$, при $n = 7$ $k = (2\lambda - \delta)^2/(6 + 4\sqrt{2})$ и т.д.

Замечание 1. Если некоторому корню характеристического уравнения соответствует жорданов блок, содержащий несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор соответствующих коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет обладать заданными свойствами.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получаем квадратичную функцию Ляпунова, которая будет удовлетворять условию $\max \dot{V}_{(1)}/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (2\lambda, 0)$ [5].

2. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению, для линейных точечных отображений. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\Delta V(x) < 0$ для первой разности квадратичной формы $V(x)$ в силу функций последования линейного точечного отображения обеспечивается с заданным запасом δ (т.е. $\Delta V(x) < \delta V(x)$, $x \neq 0$), естественно выбирать с использованием теоремы, подобной теореме 1, доказанной в работе [3]. Для случая когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в [4] предложена методика выбора коэффициентов (2), основанная на переходе к каноническому виду точечного отображения. В случае когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни будем рассуждать аналогично случаю дифференциальной системы, а именно: пусть дано линейное точечное отображение вида

$$\bar{x} = Ax, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

такое, что корни z_1, z_2, \dots, z_n характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, лежат внутри круга единичного радиуса, действительны и равны между собой, т.е. $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$. Рассмотрим первую разность квадратичной формы (2) в силу (15)

$$\Delta_{(15)} V(x) = x^T (A^T K A - K) x.$$

Утверждения, аналогичные теоремам 2, 3 и следствию 1, в канонических переменных будут иметь следующий вид.

Теорема 4. Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (10), коэффициенты которой удовлетворяют условию $k = (1 - z^2 - \delta)^2/(1 + \delta)$, где $k = K_{11}/K_{22}$, является функцией Ляпунова для отображения

$$\bar{\xi}_1 = z\xi_1 + \xi_2, \quad \bar{\xi}_2 = z\xi_2, \quad (16)$$

причём $\max \Delta_{(16)} V/V = \delta$. При $\delta \leq z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Теорема 5. Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где μ_{\max} – наибольший корень уравнения

$$((z^2 - 1 - \mu)K_{11})\tilde{D}_{n-1}(\mu, K_{11}, K_{22}, \dots, K_{nn}) - z^2 K_{11}^2 \tilde{D}_{n-2}(\mu, K_{22}, \dots, K_{nn}) = 0,$$

в котором

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = ((z^2 - 1 - \mu)K_{22} + K_{11})((z^2 - 1 - \mu)K_{33} + K_{22}) - z^2 K_{22}^2,$$

$D_3(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = ((z^2 - 1 - \mu)K_{22} + K_{11})\tilde{D}_2(\mu, K_{22}, K_{33}, K_{44}) - z^2 K_{22}^2 ((z^2 - 1 - \mu)K_{44} + K_{33})$, существует и является функцией Ляпунова для отображения

$$\bar{\xi} = J_n \xi, \quad (17)$$

где J_n – жорданова клетка порядка n , причём $\max \Delta_{(17)} V/V = \delta$. При $\delta \leq z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Следствие 2. Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где μ_{\max} – наибольший корень уравнения

$$(z^2 - 1 - \mu)\tilde{d}_{n-1}(\mu, k) - z^2 k \tilde{d}_{n-2}(\mu, k) = 0, \tag{18}$$

в котором

$$\tilde{d}_n(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)\tilde{d}_{n-1}(\mu, k) - z^2 k \tilde{d}_{n-2}(\mu, k),$$

$$\tilde{d}_2(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)^2 - z^2 k,$$

$$\tilde{d}_3(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)\tilde{d}_2(\mu, k) - z^2 k(z^2 - 1 - \mu + k),$$

а $k = K_{i-1, i-1}/K_{ii}$ при всех $i = \overline{2, n}$, существует и является функцией Ляпунова для отображения (17), причём $\max \Delta_{(17)} V/V = \delta$. При $\delta \leq z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Так при $n = 2$ максимальный корень уравнения (18) есть $\mu_{\max} = z^2 - 1 + (k + \sqrt{k^2 + 4z^2 k})/2$. При $n = 3$ для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ найдём значения $k = (1 - z^2 + \delta)(\sqrt{1 + \delta} \pm |z|)/\sqrt{1 + \delta}$. А, скажем, при $n = 5$ для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ найдём $k = (1 - z^2 + \delta)/(1 + \sqrt{3}|z|)$ и т.д.

Замечание 2. Если некоторому корню характеристического уравнения соответствует жорданов блок, содержащий несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор соответствующих коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет обладать заданными свойствами.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получаем квадратичную функцию Ляпунова для точечного отображения (15) такую, что $\max \Delta_{(15)} V/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (z^2 - 1, 0)$.

Заключение. Приведённые в статье результаты дополняют результаты, полученные для случая различных корней характеристического уравнения [4], о построении квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих ограничениям на первую производную (первую разность) в силу системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., 1970.
2. Косякин А.А., Шамриков Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983.
3. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
4. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
5. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295–302.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М., 1999.
8. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 21.11.2022 г.
После доработки 18.05.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.93

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЁХПОЗИЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСНЫМ РЕЛЕ БЕЗ ВЫХОДА В ЗОНЫ НАСЫЩЕНИЯ

© 2023 г. В. В. Евстафьева

Исследовано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с существенной нелинейностью и внешним возмущением в виде непрерывной периодической функции. Нелинейность задана релейной симметричной характеристикой с гистерезисом, мёртвой зоной и зонами насыщения. Рассмотрен обход характеристики без выхода в зоны насыщения за некоторое конечное заданное время и время, соизмеримое с периодом функции возмущения. Получены условия существования колебательного решения с замкнутой фазовой траекторией и четырьмя точками переключения за время одного обхода характеристики. Доказаны теоремы существования периодических решений, в том числе решений с симметричной траекторией. Приведён численный пример.

DOI: 10.31857/S037406412306002X, EDN: FFLCJG

1. Введение. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения и системы с релейными, в том числе симметричными, характеристиками исследуются в задачах теории автоматического управления достаточно давно [1]. Существование периодических и колебательных решений (режимов), а также изучение их свойств и фазовых траекторий являются актуальными вопросами современной теории (см., например, [2–18]).

Из последних статей автора, в том числе в соавторстве, по изучению возмущённых релейных систем с гистерезисом отметим [12–14] (с двухпозиционным реле), [10, 16, 18] (с трёхпозиционным реле). В этих работах применён общий подход к исследованию, который заключается в решении задачи Коши с помощью *метода припасовывания* и методов решения систем трансцендентных уравнений. В данной статье развивается это направление и продолжается начатое в [10] изучение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с релейной нелинейностью гистерезисного типа и гармоническим возмущением.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{y}(t) = \lambda \dot{y}(t) + \alpha N(y(t)) + \beta \cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Здесь t – время ($t \geq 0$), λ , α , β , ω и φ – ненулевые вещественные постоянные, причём $\alpha < 0$, $N(y(t))$ – существенная нелинейность, которая задаётся релейной характеристикой

$$N(y) = \begin{cases} -C, & \text{если } y \leq -B \text{ или } -B < y \leq -A \text{ и } N_- = -C, \\ 0, & \text{если } -A < y < A \text{ или } -B < y < B \text{ и } N_- = 0, \\ C, & \text{если } y \geq B \text{ или } A \leq y < B \text{ и } N_- = C, \end{cases} \quad (2)$$

где A , B , C – положительные параметры и $A < B$, N_- – предыстория $N(y)$. Характеристика (2) включает зоны насыщения на множествах $(-\infty, -B]$ и $[B, +\infty)$, зону нечувствительности (мёртвую зону) на интервале $(-A, A)$ и зоны неоднозначности (гистерезис) на полуотрезках $(-B, -A]$ и $[A, B)$.

В статьях [10, 16] и [18] исследуется уравнение вида (1) с характеристикой (2). В зависимости от знака параметра λ ($\lambda < 0$ в [10] и $\lambda > 0$ в [16]) установлено существование периодического режима (решения) с выходом в зоны насыщения характеристики $N(y)$, фазовая

траектория которого проходит через две симметричные точки $(y_{\max}, 0)$ и $(-y_{\max}, 0)$ за фиксированный период, где y_{\max} – максимальное значение решения $y(t)$ и такое, что $y_{\max} > B$. В [18] дано определение колебательного решения с произвольным начальным моментом времени $t_0 \geq 0$, установлена теорема существования колебательного решения с возможным выходом в зоны насыщения $N(y)$ и замкнутой фазовой траекторией, а также получены достаточные условия существования и несуществования периодических решений с $t_0 = 0$.

В настоящей работе рассматриваются колебательные, в том числе периодические, решения уравнения (1) с полным (в обе стороны) обходом характеристики $N(y)$ без выхода в её зоны насыщения за некоторое конечное и заданное время. Исследуются фазовые траектории решений.

Запишем общее решение уравнения (1) и его производную, для любого $t \geq 0$ имеем

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + qt + q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q - \omega q_1 \sin(\omega t + \varphi) + \omega q_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$q = \begin{cases} q^-, & \text{если } N(y) = -C, \\ 0, & \text{если } N(y) = 0, \\ q^+, & \text{если } N(y) = C, \end{cases}$$

$q^- = \alpha C / \lambda$, $q^+ = -q^-$, $q_1 = -\beta / (\lambda^2 + \omega^2)$, $q_2 = q_1 \lambda / \omega$ и c_1 , c_2 – произвольные постоянные, значения которых могут меняться в точках разрыва нелинейности $N(y(t))$.

Рассмотрим колебательное решение в классе непрерывных функций $y(t)$ для любого $t \geq 0$ с полным обходом характеристики $N(y)$ без выхода в зоны насыщения за время T_r и замкнутой фазовой траекторией, которая проходит через четыре фиксированные точки, лежащие на прямых $y = \pm A$ и $y = \pm B$. Таким образом, фазовая траектория, отвечающая одному полному обходу характеристики, состоит из четырёх кусков, которые соответствуют различным участкам $N(y)$ на плоскости $(y, N(y))$ и склеиваются согласно методу припасовывания, тем самым обеспечивая непрерывность $y(t)$ и замкнутость траектории на фазовой плоскости (y, \dot{y}) .

При полном обходе характеристики без выхода в зоны насыщения решение $y(t)$ удовлетворяет условию $|y(t)| \leq B$ для любого $t \geq 0$, а его траектория проходит через фиксированные точки $(B, 0)$ и $(-B, 0)$ на плоскости (y, \dot{y}) . Действительно, в окрестности максимального значения $y_{\max} = B$ функции $y(t)$ производная $\dot{y}(t)$ меняет знак с “плюса” на “минус” в направлении возрастания t , а в окрестности минимального значения $y_{\min} = -B$ – наоборот.

Обозначим порядковый номер обхода характеристики через p , а прямые разрыва $y = B$, $y = A$, $y = -B$ и $y = -A$ через L_1 , L_2 , L_3 и L_4 соответственно.

Определение 1. Решение $y(t)$ уравнения (1) назовём T_r -колебательным с полным обходом характеристики $N(y)$ без выхода в зоны насыщения, если существуют положительные числа τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 такие, что $\sum_{i=1}^4 \tau_i = T_r$, и точки $Y^1 \in L_1$, $Y^2 \in L_2$, $Y^3 \in L_3$, $Y^4 \in L_4$ на фазовой плоскости, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $(y((p-1)T_r), \dot{y}((p-1)T_r)) = Y^1$, $\dot{y}((p-1)T_r) = 0$, $(y(\tau_1 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + (p-1)T_r)) = Y^2$, $\dot{y}(\tau_1 + (p-1)T_r) < 0$, $(y(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)) = Y^3$, $\dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r) = 0$, $(y(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r)) = Y^4$, $\dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r) > 0$, где $p \in \mathbb{N}$;

2) для всех $p \in \mathbb{N}$ и для любого $t \in [(p-1)T_r, \tau_1 + (p-1)T_r]$ выполняются равенство $q = q^+$ и неравенство $\dot{y}(t) \leq 0$ (причём равенство нулю только для $t = (p-1)T_r$); для любого $t \in (\tau_1 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$ выполняются равенство $q = 0$ и неравенство $\dot{y}(t) < 0$; для любого $t \in [\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r]$ выполняются равенство $q = q^-$ и неравенство $\dot{y}(t) \geq 0$ (причём равенство нулю только для $t = \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r$); для любого $t \in (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r, pT_r)$ выполняются равенство $q = 0$ и неравенство $\dot{y}(t) > 0$.

Далее для краткости будем называть решение $y(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее определению 1, T_r -колебательным, точку Y^i и прямую L_i , $i = \overline{1, 4}$, точкой переключения и

прямой переключения соответственно, число τ_i – временем перехода из точки $Y^i \in L_i$ на прямую L_{i+1} , причём при $i = 4$ – на прямую L_1 , а времена перехода и точки переключения – параметрами решения.

В отличие от определения T_r -колебательного решения из работы [18], здесь в определение 1 добавлены условия на производную решения, которые обеспечивают обход характеристики без выхода в зоны насыщения, и задан начальный момент времени $t_0 = 0$.

Определение 2. T_r -периодическим решением назовём такое T_r -колебательное решение $y(t)$ уравнения (1), что $y(t) = y(t + T_r)$ и $\dot{y}(t) = \dot{y}(t + T_r)$ для $t \geq 0$.

Ставим задачу исследования T_r -колебательного и T_r -периодического решений уравнения (1), установления необходимых и достаточных условий их существования для некоторой заданной величины T_r .

2. Необходимое и достаточное условия существования T_r -колебательного решения. Введём обозначения

$$d_1(t) = q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi), \quad d_2(t) = q_2 \cos(\omega t + \varphi) - q_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

для любого $t \geq 0$. Имеет место

Теорема 1. Пусть существует T_r -колебательное решение уравнения (1). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) значения $d_j((p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1 + (p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p ;
- 2) выполняются системы равенств

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) = 0,$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_2}(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + \tau_2) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2) = 0,$$

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A - B + q^- \tau_3 + d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - d_1(\tau_1 + \tau_2)) + q^- + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ = \lambda(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + \tau_2) - d_1(\tau_1)),$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_3}(1 - e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A - B + q^- \tau_3 + d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - d_1(\tau_1 + \tau_2)) + q^- =$$

$$= \lambda(1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)),$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_4}(1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \omega d_2(T_r) = 0 \quad (4)$$

и система неравенств

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(\tau_1) < 0,$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_3}(1 - e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A - B + q^- \tau_3 + d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - d_1(\tau_1 + \tau_2)) + q^- + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) > 0. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет T_r -колебательное решение. Это означает, что параметры решения удовлетворяют условиям определения 1. Сначала запишем решение и его производную в общем виде на интервалах, указанных в условии 2), при этом постоянные c_1 и c_2 , зависящие от порядка обхода характеристики p , обозначим через c_1^p и c_2^p соответственно. Затем обратимся к условию 1) для нахождения неопределённых постоянных c_1^p и c_2^p на каждом куске траектории.

Для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p + \tau_1]$, где $t_0^p = (p-1)T_r$, имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + q^+ t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + q^+ + \omega d_2(t) \leq 0. \quad (6)$$

Условия $Y^1 \in L_1$ и $Y^2 \in L_2$ из определения 1 равносильны равенствам $(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (B, \dot{y}^1) = (B, 0)$ и $(y(t_0^p + \tau_1), \dot{y}(t_0^p + \tau_1)) = (A, \dot{y}^2)$ соответственно, причём $\dot{y}^2 < 0$. Исходя

из условий на первые координаты точек переключения, приходим к системе уравнений относительно c_1^p и c_2^p , а именно,

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + q^+ t_0^p + d_1(t_0^p) = B,$$

$$y(t_0^p + \tau_1) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_1)} + c_2^p + q^+(t_0^p + \tau_1) + d_1(t_0^p + \tau_1) = A. \quad (7)$$

Поскольку $y(t_0^p) = B$ и $y(t_0^p + \tau_1) = A$ для всех p , то значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p + \tau_1)$ не зависят от p , что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и выполняются равенства $c_1^p e^{\lambda t_0^p} = c_1^1$ и $c_2^p + q^+ t_0^p = c_2^1$, откуда

$$c_1^p = c_1^1 e^{-\lambda t_0^p}, \quad c_2^p = c_2^1 - q^+ t_0^p, \quad (8)$$

где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda \tau_1})^{-1} (B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)), \quad c_2^1 = B - c_1^1 - d_1(0). \quad (9)$$

Постоянные c_1^1 , c_2^1 найдены из системы уравнений (7) при $p = 1$. Теперь рассмотрим условия на вторые координаты точек переключения Y^1 и Y^2 . Имеем

$$y^1 = \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + q^+ + \omega d_2(t_0^p) = 0, \quad y^2 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_1)} + q^+ + \omega d_2(t_0^p + \tau_1) < 0. \quad (10)$$

Подставим в (10) вместо c_1^p выражение из (8) и получим

$$y^1 = \lambda c_1^1 + q^+ + \omega d_2(t_0^p) = 0, \quad y^2 = \lambda c_1^1 e^{\lambda \tau_1} + q^+ + \omega d_2(t_0^p + \tau_1) < 0. \quad (11)$$

Поскольку $\dot{y}^1 = \dot{y}(t_0^p)$ и $\dot{y}^2 = \dot{y}(t_0^p + \tau_1)$ для всех p , то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p + \tau_1)$ не зависят от p , что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе (11) для всех p , а значит, для $p = 1$ и, как следствие, $t_0^1 = 0$, т.е. имеют место первое равенство в (3) и первое неравенство в (5).

Итак, первый кусок траектории решения между прямыми L_1 и L_2 задаётся функциями в (6) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (8).

Для всех $p \in \mathbb{N}$ и для любого $t \in (t_0^p, t_0^p + \tau_2)$, где $t_0^p = \tau_1 + (p-1)T_r$, имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + \omega d_2(t) < 0. \quad (12)$$

Условия $Y^2 \in L_2$ и $Y^3 \in L_3$ равносильны равенствам

$$(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (A, \dot{y}^2), \quad (y(t_0^p + \tau_2), \dot{y}(t_0^p + \tau_2)) = (-B, \dot{y}^3) = (-B, 0).$$

Согласно методу припасовывания Y^2 является точкой склейки первого и второго кусков траектории. Условия на первые координаты точек переключения Y^2 и Y^3 приводят к системе уравнений

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + d_1(t_0^p) = A, \quad y(t_0^p + \tau_2) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_2)} + c_2^p + d_1(t_0^p + \tau_2) = -B. \quad (13)$$

Поскольку $y(t_0^p) = A$ и $y(t_0^p + \tau_2) = -B$ для всех p , то значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p + \tau_2)$ не зависят от p , что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и выполняются равенства

$$c_1^p = c_1^1 e^{-\lambda t_0^p}, \quad c_2^p = c_2^1, \quad (14)$$

где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda \tau_2})^{-1} (A + B + d_1(\tau_1 + \tau_2) - d_1(\tau_1)), \quad c_2^1 = A - c_1^1 - d_1(\tau_1). \quad (15)$$

Постоянные c_1^1 , c_2^1 найдены из системы уравнений (13) при $p = 1$, а значит $t_0^1 = \tau_1$.

Условия на вторые координаты точек переключения Y^2 и Y^3 равносильны равенствам

$$\dot{y}^2 = \lambda c_1^1 e^{\lambda t_0^p} + \omega d_2(t_0^p) = \lambda c_1^1 + \omega d_2(t_0^p),$$

$$\dot{y}^3 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_2)} + \omega d_2(t_0^p + \tau_2) = \lambda c_1^1 e^{\lambda \tau_2} + \omega d_2(t_0^p + \tau_2) = 0. \quad (16)$$

Поскольку $\dot{y}^2 = \dot{y}(t_0^p)$ и $\dot{y}^3 = \dot{y}(t_0^p + \tau_2)$ для всех p , то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p + \tau_2)$ не зависят от p , что также отражено в утверждении 1) теоремы 1, и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе равенств (16) для всех p , а следовательно, для $p = 1$ и $t_0^1 = \tau_1$, т.е. имеют место второе равенство в (3) и первое равенство в (4).

Итак, второй кусок траектории решения между L_2 и L_3 задаётся функциями в (12) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (14).

Для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p + \tau_3]$, где $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r$, имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + q^- t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + q^- + \omega d_2(t) \geq 0. \quad (17)$$

Условия $Y^3 \in L_3$ и $Y^4 \in L_4$ равносильны равенствам $(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (-B, \dot{y}^3)$ и $(y(t_0 + \tau_3), \dot{y}(t_0 + \tau_3)) = (-A, \dot{y}^4)$, где $\dot{y}^3 = 0$, $\dot{y}^4 > 0$. Точка переключения Y^3 является точкой склейки второго и третьего кусков траектории. Из условий на первые координаты точек Y^3 и Y^4 получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} y(t_0^p) &= c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + q^- t_0^p + d_1(t_0^p) = -B, \\ y(t_0^p + \tau_3) &= c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_3)} + c_2^p + q^- (t_0^p + \tau_3) + d_1(t_0^p + \tau_3) = -A. \end{aligned} \quad (18)$$

Равенства $y(t_0^p) = -B$ и $y(t_0^p + \tau_3) = -A$ имеют место для всех p , поэтому значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p + \tau_3)$ не зависят от p , что внесено в утверждение 1) теоремы 1, и выполняются равенства

$$c_1^p = c_1^1 e^{-\lambda t_0^p}, \quad c_2^p = c_2^1 - q^- t_0^p, \quad (19)$$

где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda \tau_3})^{-1} (A - B + q^- \tau_3 + d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - d_1(\tau_1 + \tau_2)), \quad c_2^1 = -B - c_1^1 - d_1(\tau_1 + \tau_2). \quad (20)$$

Постоянные c_1^1 , c_2^1 найдены из системы уравнений (18) при $p = 1$. Из условий на вторые координаты точек переключения Y^3 и Y^4 имеем соотношения

$$\begin{aligned} \dot{y}^3 &= \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + q^- + \omega d_2(t_0^p) = \lambda c_1^1 + q^- + \omega d_2(t_0^p) = 0, \\ \dot{y}^4 &= \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_3)} + q^- + \omega d_2(t_0^p + \tau_3) = \lambda c_1^1 e^{\lambda \tau_3} + q^- + \omega d_2(t_0^p + \tau_3) > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку $\dot{y}^3 = \dot{y}(t_0^p)$ и $\dot{y}^4 = \dot{y}(t_0^p + \tau_3)$ для всех p , то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p + \tau_3)$ не зависят от p (отражено в утверждении 1) теоремы 1) и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе (21) для всех p , а значит, для $p = 1$ и $t_0^1 = \tau_1 + \tau_2$, т.е. имеют место третье равенство в (3) и второе неравенство в (5). Итак, третий кусок траектории решения между прямыми L_3 и L_4 задаётся функциями в (17) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (19).

Наконец, для всех $p \in \mathbb{N}$ и для любого $t \in (t_0^p, t_0^p + \tau_4)$, где $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r$, имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + \omega d_2(t) > 0. \quad (22)$$

Условия $Y^4 \in L_4$ и $Y^1 \in L_1$ равносильны равенствам

$$(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (-A, \dot{y}^4) \quad \text{и} \quad (y(t_0^p + \tau_4), \dot{y}(t_0^p + \tau_4)) = (B, \dot{y}^1) = (B, 0)$$

соответственно. Точки Y^4 и Y^1 являются точками склейки третьего, четвёртого и четвёртого, первого кусков траектории соответственно. Условия на первые координаты точек переключения Y^4 и Y^1 приводят к системе уравнений

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + d_1(t_0^p) = -A, \quad y(t_0^p + \tau_4) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_4)} + c_2^p + d_1(t_0^p + \tau_4) = B. \quad (23)$$

Имеют место равенства $y(t_0^p) = -A$ и $y(t_0^p + \tau_4) = B$ для всех p , поэтому значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p + \tau_4)$ не зависят от p , что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и выполняются равенства (14) для $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p - 1)T_r$, где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)), \quad c_2^1 = -A - c_1^1 - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3). \quad (24)$$

Постоянные c_1^1, c_2^1 найдены из системы уравнений (23) при $p = 1$.

Условия на вторые координаты точек переключения Y^4 и Y^1 равносильны равенствам

$$\dot{y}^4 = \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + \omega d_2(t_0^p) = \lambda c_1^1 + \omega d_2(t_0^p),$$

$$\dot{y}^1 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_4)} + \omega d_2(t_0^p + \tau_4) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_4} + \omega d_2(t_0^p + \tau_4) = 0. \quad (25)$$

Поскольку $\dot{y}^4 = \dot{y}(t_0^p)$ и $\dot{y}^1 = \dot{y}(t_0^p + \tau_4)$ для всех p , то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p + \tau_4)$ не зависят от p , что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе (25) для всех p , а значит, и для $p = 1$ и $t_0^1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, т.е. имеют место второе и третье равенства в (4).

Итак, четвёртый кусок траектории решения между прямыми L_4 и L_1 задаётся функциями в (22) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (14), в которых $t_0 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p - 1)T_r$ и постоянные c_1^1, c_2^1 вычисляются по формулам (24). Теорема доказана.

Достаточное условие существования T_r -колебательного решения уравнения (1) даёт

Теорема 2. Пусть при некотором заданном $T_r > 0$ выполняются следующие условия:

1) τ_1 – наименьшее (или единственное) решение уравнения

$$\lambda(1 - e^{\lambda z_1})^{-1}(B - A + q^+ z_1 + d_1(z_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) = 0, \quad (26)$$

где z_1 – независимая переменная из интервала $(0, T_r)$;

2) τ_2 – наименьшее (или единственное) решение уравнения

$$\lambda e^{\lambda z_2}(1 - e^{\lambda z_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + z_2) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(\tau_1 + z_2) = 0 \quad (27)$$

при фиксированном значении τ_1 , где z_2 – независимая переменная из интервала $(0, T_r - \tau_1)$;

3) τ_3 – наименьшее (или единственное) решение уравнения

$$\lambda(1 - e^{\lambda z_3})^{-1}(A - B + q^- z_3 + d_1(\tau_1 + \tau_2 + z_3) - d_1(\tau_1 + \tau_2)) + q^- + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2) = 0 \quad (28)$$

при фиксированных значениях τ_1 и τ_2 , где z_3 – независимая переменная из интервала $(0, T_r - \tau_1 - \tau_2)$;

4) величины τ_1, τ_2, τ_3 , определённые в условиях 1)–3) соответственно, и величина τ_4 , вычисляемая по формуле $\tau_4 = T_r - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$, удовлетворяют утверждению 1) теоремы 1, системе равенств (4) и неравенств (5).

Тогда существует T_r -колебательное решение уравнения (1) с временами перехода $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ и точками переключения

$$Y^1 = (B, 0), \quad Y^2 = (A, \dot{y}^2), \quad Y^3 = (-B, 0), \quad Y^4 = (-A, \dot{y}^4), \quad (29)$$

где

$$\dot{y}^2 = \lambda(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + \tau_2) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(\tau_1),$$

$$\dot{y}^4 = \lambda(1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3).$$

Доказательство. Пусть задана величина $T_r > 0$ и выполнено условие 1) теоремы 2. Тогда имеет место первое равенство системы (3). Из уравнения (26) с учётом начальных условий $(y(0), \dot{y}(0)) = Y^1 = (B, 0)$ следует равенство $(y(z_1), \dot{y}(z_1)) = (A, \dot{y}^2)$, что является условием определения 1 при $p = 1, z_1 = \tau_1$ и равносильно утверждению, что изображающая точка решения $y(t)$ принадлежит прямой L_1 в момент времени $t = 0$ и прямой L_2 в момент времени

$t = z_1 > 0$. Уравнение (26) является трансцендентным и может иметь несколько решений, которые соответствуют моментам времени достижения или пересечения прямой L_2 . По условию величина τ_1 является наименьшим (или единственным) решением уравнения (26). Тогда изображающая точка движется по куску траектории, который задаётся функциями в (6) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1 , определяемыми равенствами (9), из точки $Y^1 \in L_1$ к прямой L_2 на промежутке $[0, \tau_1)$ и впервые принадлежит прямой L_2 в момент времени $t = \tau_1 \in (0, T_r)$ в точке Y^2 . Следовательно, значение τ_1 является временем перехода изображающей точки T_r -колебательного решения по первому куску траектории при первом обходе релейной характеристики. Пусть найденная величина τ_1 удовлетворяет утверждению 1) теоремы 1, а именно, значения $d_j((p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p . Тогда при всех последующих обходах релейной характеристики τ_1 остаётся временем перехода из точки $Y^1 \in L_1$ в точку переключения $Y^2 \in L_2$ по первому куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (6) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (8).

Пусть выполнено условие 2) теоремы 2. Тогда имеет место второе равенство системы (3). Из уравнения (27) с учётом начальных условий $(y(\tau_1), \dot{y}(\tau_1)) = Y^2 = (A, \dot{y}^2)$ следует равенство

$$(y(\tau_1 + z_2), \dot{y}(\tau_1 + z_2)) = (-B, 0),$$

что является условием определения 1 при $p = 1$, $z_2 = \tau_2$ и равносильно утверждению, что в момент времени $t = \tau_1$ изображающая точка находится в точке $Y^2 \in L_2$, а в момент времени $t = \tau_1 + z_2 > \tau_1$ принадлежит прямой L_3 . Уравнение (27) также является трансцендентным и может иметь несколько решений, которые соответствуют моментам времени достижения или пересечения прямой L_3 . Поскольку величина τ_2 является наименьшим (или единственным) решением уравнения (27), то изображающая точка движется по куску траектории, который задаётся функциями в (12) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1 , определяемыми равенствами (15), из точки переключения $Y^2 \in L_2$ к прямой L_3 на промежутке $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ и впервые принадлежит прямой L_3 в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 \in (\tau_1, T_r)$ в точке Y^3 . Отсюда следует, что величина τ_2 является временем перехода изображающей точки решения по второму куску траектории при первом обходе релейной характеристики. При выполнении утверждения 1) теоремы 1 о том, что значения $d_j(\tau_1 + (p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p , при всех последующих обходах релейной характеристики найденная величина τ_2 остаётся временем перехода из точки $Y^2 \in L_2$ в точку переключения $Y^3 \in L_3$ по второму куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (12) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (14).

Пусть выполнено условие 3) теоремы 2. Тогда имеет место третье равенство системы (3). Из уравнения (28) с учётом начальных условий $(y(\tau_1 + \tau_2), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2)) = Y^3 = (-B, 0)$ следует равенство

$$(y(\tau_1 + \tau_2 + z_3), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + z_3)) = (-A, \dot{y}^4),$$

что является условием определения 1 при $p = 1$, $z_3 = \tau_3$ и означает, что в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2$ изображающая точка находится в точке $Y^3 \in L_3$, а в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 + z_3 > \tau_1 + \tau_2$ принадлежит прямой L_4 . Уравнение (28) может иметь несколько решений, которые соответствуют моментам времени достижения или пересечения прямой L_4 . По условию величина τ_3 является наименьшим (или единственным) решением уравнения (28). Тогда изображающая точка движется по куску траектории, который задаётся функциями в (17) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1 , определяемыми равенствами (20), из точки переключения $Y^3 \in L_3$ к прямой L_4 на промежутке $[\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$ и впервые принадлежит прямой L_4 в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \in (\tau_1 + \tau_2, T_r)$ в точке Y^4 . Следовательно, значение τ_3 является временем перехода изображающей точки решения по третьему куску траектории при первом обходе релейной характеристики. Если имеет место утверждение 1) теоремы 1 о том, что значения $d_j(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p , то при всех последующих обходах релейной характеристики ($p > 1$) найденная величина τ_3 остаётся временем перехода из точки $Y^3 \in L_3$ в точку переключения $Y^4 \in L_4$ по третьему куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (17) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (19).

Пусть выполнено условие 4) теоремы 2, т.е. найденные величины τ_1 , τ_2 , τ_3 и однозначно определяемая из равенства $\sum_{i=1}^4 \tau_i = T_r$ величина τ_4 удовлетворяют системе равенств (4) и неравенств (5), а также утверждению 1) теоремы 1 в той части, что значения $d_j((p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p .

Выполнение третьего равенства в (4) означает, что значение τ_4 является решением уравнения

$$\lambda e^{\lambda z_4} (1 - e^{\lambda z_4})^{-1} (-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \omega d_2(T_r) = 0 \quad (30)$$

относительно независимой переменной $z_4 \in (0, T_r - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3]$. Из уравнения (30) с учётом начальных условий

$$(y(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) = Y^4 = (-A, \dot{y}^4)$$

следует равенство

$$(y(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + z_4), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + z_4)) = (B, 0).$$

Это условие определения 1 при $p = 1$ и $z_4 = \tau_4$, которое означает, что в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ изображающая точка находится в точке $Y^4 \in L_4$, а в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + z_4 > \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ принадлежит прямой L_1 . Нетрудно заметить, что уравнение (30) имеет единственное решение, а значит изображающая точка решения движется по куску траектории, который задаётся функциями в (22) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1 , определяемыми равенствами (24), из точки переключения $Y^4 \in L_4$ к прямой L_1 на интервале $[\tau_1 + \tau_2 + \tau_3, T_r)$ и впервые достигает прямую L_1 в момент времени $t = T_r$ в точке Y^1 . Следовательно, значение τ_4 является временем перехода изображающей точки по четвёртому куску траектории при первом обходе релейной характеристики. Если выполняется утверждение 1) теоремы 1 в указанной части, то при всех последующих обходах релейной характеристики найденная величина τ_4 остаётся временем перехода из точки $Y^4 \in L_4$ в точку переключения $Y^1 \in L_1$ по четвёртому куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (22) с постоянными c_1^p и c_2^p , определяемыми равенствами (14) с $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r$.

Совместно с утверждением 1) теоремы 1 выполнение первого и второго равенств в (4) равносильно выполнению условий склейки первого, второго кусков траекторий в точке Y^2 и третьего, четвёртого кусков траекторий в точке Y^4 соответственно, а выполнение неравенств в (5) равносильно выполнению условий

$$\dot{y}^2 = \dot{y}(\tau_1 + (p-1)T_r) < 0 \quad \text{и} \quad \dot{y}^4 = \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r) > 0$$

определения 1 при всех p . Отсюда следует, что траектория решения является замкнутой кривой.

Таким образом, существует T_r -колебательное решение уравнения (1) с найденными параметрами. Наименьшие (или единственные) решения τ_1 , τ_2 , τ_3 уравнений (26), (27), (28) соответственно и величина τ_4 такая, что $\tau_4 = T_r - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$, являются временами перехода его изображающей точки на соответствующие прямые переключения из точек переключения Y^1 , Y^2 , Y^3 и Y^4 , которые находятся по формулам (29). Выражения для \dot{y}^2 и \dot{y}^4 получены из равенств (16) и (25) с соответствующей постоянной c_1^1 , что отражено в утверждении теоремы 2. Теорема доказана.

3. Теорема существования T_r -периодического решения. Существование периодического решения устанавливает

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и значение T_r кратно $2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Тогда существует T_r -периодическое решение уравнения (1).

Доказательство. Пусть имеют место условия теоремы 2. Покажем, что T_r -колебательное решение уравнения (1) является T_r -периодическим, если значение T_r кратно $2\pi/\omega$, $\omega > 0$, т.е. $T_r = 2\pi k/\omega$, $k \in \mathbb{N}$.

Воспользуемся методом замены переменной и от функций $y(t)$ и $\dot{y}(t)$, зависящих от текущего времени t , перейдём к функциям, которые зависят от времени перехода τ по i -му куску фазовой траектории ($i = \overline{1, 4}$) при p -м обходе характеристики $N(y)$.

Рассмотрим первый кусок фазовой траектории решения для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p + \tau_1]$, где $t_0^p = (p-1)T_r$. Положим $\tau = t - t_0^p$. Тогда $\tau \in [0, \tau_1]$ и функции в (6) принимают вид

$$y(\tau + t_0^p) = c_1^p e^{\lambda(\tau + t_0^p)} + c_2^p + q^+(\tau + t_0^p) + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^p e^{\lambda(\tau + t_0^p)} + q^+ + \omega d_2(\tau + t_0^p)$$

или (после подстановки выражений вместо постоянных c_1^p и c_2^p согласно равенствам (8) и преобразования)

$$y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau + t_0^p), \quad (31)$$

где постоянные c_1^1, c_2^1 определяются по формулам (9). Обозначим правые части равенств (31) через $y_1^p(\tau)$ и $\dot{y}_1^p(\tau)$ соответственно, т.е.

$$y_1^p(\tau) = y(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_1^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p).$$

Далее, следуя аналогичным рассуждениям, на трёх последующих кусках фазовой траектории решения с помощью соответствующей замены $\tau = t - t_0^p$ преобразуем $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ к функциям $y_i^p(\tau)$ и $\dot{y}_i^p(\tau)$, $i = \overline{2, 4}$.

Итак, на втором куске траектории для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in (t_0^p, t_0^p + \tau_2)$, где $t_0^p = \tau_1 + (p-1)T_r$, функции в (12) с новой переменной $\tau \in (0, \tau_2)$ принимают вид

$$y_2^p(\tau) = y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_2^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + t_0^p),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (15). В моменты склейки траектории, которые соответствуют точкам Y^2 и Y^3 , имеют место равенства

$$y_2^p(0) = y(t_0^p) = A, \quad \dot{y}_2^p(0) = \dot{y}(t_0^p) = \dot{y}^2,$$

$$y_2^p(\tau_2) = y(\tau_2 + t_0^p) = -B, \quad \dot{y}_2^p(\tau_2) = \dot{y}(\tau_2 + t_0^p) = \dot{y}^3 = 0.$$

На третьем куске траектории для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p + \tau_3]$, где $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r$, функции в (17) с переменной $\tau \in [0, \tau_3]$ принимают вид

$$y_3^p(\tau) = y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^-\tau + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_3^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^- + \omega d_2(\tau + t_0^p),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (20).

И, наконец, на четвёртом куске траектории для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in (t_0^p, pT_r)$, где $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r$, функции в (22) с переменной $\tau \in (0, \tau_4)$ принимают вид

$$y_4^p(\tau) = y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_4^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + t_0^p),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (24). В моменты склейки, соответствующие точкам переключения Y^4 и Y^1 , имеют место равенства

$$y_4^p(0) = y(t_0^p) = -A, \quad \dot{y}_4^p(0) = \dot{y}(t_0^p) = \dot{y}^4,$$

$$y_4^p(\tau_4) = y(\tau_4 + t_0^p) = B, \quad \dot{y}_4^p(\tau_4) = \dot{y}(\tau_4 + t_0^p) = \dot{y}^1 = 0.$$

Пусть $T_r = 2\pi k/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Функция $d_j(t)$, $j = 1, 2$, является $2\pi/\omega$ -периодической, т.е. удовлетворяет равенству $d_j(t) = d_j(t + 2\pi/\omega)$ для любого $t \geq 0$. Тогда на соответствующих кусках траектории интервалах для всех p справедливо равенство $d_j(\tau + t_0^p) = d_j(\tau + t_0^p)$. Следовательно, функции $y_i^p(\tau)$ и $\dot{y}_i^p(\tau)$, $i = \overline{1, 4}$, не зависят от p , и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $y_i^1(\tau) = y(\tau + t_0^p)$, $\dot{y}_i^1(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p)$. Это означает, что каждый кусок траектории при первом обходе совпадает с соответствующим куском траектории при всех последующих обходах, повторяющихся через время T_r , т.е. фазовая траектория решения состоит из четырёх

кусков на протяжении неограниченного количества обходов. Таким образом, для всех $t \geq 0$ имеют место равенства $y(t) = y(t + T_r)$, $\dot{y}(t) = \dot{y}(t + T_r)$, поэтому согласно определению 2 решение является T_r -периодическим. Теорема доказана.

4. Периодическое решение с симметричной траекторией. Рассмотрим T_r -периодическое решение уравнения (1) с фазовой траекторией, симметричной относительно начала координат плоскости (y, \dot{y}) .

Определение 3. T_r -периодическим решением с симметричной траекторией назовём такое T_r -периодическое решение уравнения (1), куски траектории которого на соответствующих временных интервалах удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} y_1^1(\tau) &= -y_3^1(\tau), & \dot{y}_1^1(\tau) &= -\dot{y}_3^1(\tau), \\ y_2^1(\tau) &= -y_4^1(\tau), & \dot{y}_2^1(\tau) &= -\dot{y}_4^1(\tau). \end{aligned}$$

Обозначим через T полупериод решения. Тогда $T = T_r/2$. Достаточное условие существования $2T$ -периодического решения с симметричной траекторией даёт

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и $\tau_1 = \tau_3$, $\tau_2 = \tau_4$, $T = (2k - 1)\pi/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует $2T$ -периодическое решение с симметричной траекторией.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 3 существует T_r -периодическое решение уравнения (1). Пусть $\tau_1 = \tau_3$ и $\tau_2 = \tau_4$. Тогда $T = \tau_1 + \tau_2$ и $T_r = 2T$.

Рассмотрим первый и третий куски фазовой траектории периодического решения. На первом куске для любого $\tau \in [0, \tau_1]$ имеем

$$y_1^1(\tau) = y(\tau) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+ \tau + d_1(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = \dot{y}(\tau) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau),$$

где постоянные c_1^1 , c_2^1 определяются равенствами (9), т.е.

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)), \quad c_2^1 = B - c_1^1 - d_1(0).$$

Учитывая, что $q^- = -q^+$, $\tau_1 = \tau_3$ и $T = \tau_1 + \tau_2$, на третьем куске траектории для любого $\tau \in [0, \tau_1]$ имеем

$$\begin{aligned} y_3^1(\tau) &= y(\tau + T) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 - q^+ \tau + d_1(\tau + T), \\ \dot{y}_3^1(\tau) &= \dot{y}(\tau + T) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} - q^+ + \omega d_2(\tau + T), \end{aligned}$$

где c_1^1 , c_2^1 определяются равенствами (20), которые при выполнении условий теоремы 3 принимают вид

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(-B + A - q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1 + T) - d_1(T)), \quad c_2^1 = -B - c_1^1 - d_1(T).$$

Пусть $T = (2k - 1)\pi/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $d_j(\tau + T) = -d_j(\tau)$, $j = 1, 2$. Отсюда следует справедливость равенств

$$y_1^1(\tau) = -y_3^1(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = -\dot{y}_3^1(\tau)$$

для любых $\tau \in [0, \tau_1]$.

Аналогично рассмотрим второй и четвёртый куски траектории решения. На втором куске для любого $\tau \in (0, \tau_2)$ имеем

$$y_2^1(\tau) = y(\tau + \tau_1) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + \tau_1), \quad \dot{y}_2^1(\tau) = \dot{y}(\tau + \tau_1) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1),$$

где c_1^1 , c_2^1 вычисляются по формуле (15), т.е.

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(T) - d_1(\tau_1)), \quad c_2^1 = A - c_1^1 - d_1(\tau_1).$$

На четвёртом куске в силу равенства $\tau_2 = \tau_4$ для любого $\tau \in (0, \tau_2)$ имеем

$$y_4^1(\tau) = y(\tau + \tau_1 + T) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + \tau_1 + T),$$

$$\dot{y}_4^1(\tau) = \dot{y}(\tau + \tau_1 + T) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1 + T),$$

где c_1^1, c_2^1 определяются равенствами (24), которые принимают вид

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(-A - B + d_1(2T) - d_1(\tau_1 + T)), \quad c_2^1 = -A - c_1^1 - d_1(\tau_1 + T).$$

Очевидно, что $d_j(\tau + \tau_1 + T) = -d_j(\tau + \tau_1)$, $d_j(\tau_1 + T) = -d_j(\tau_1)$ и $d_j(2T) = -d_j(T)$, $j = 1, 2$. Поэтому имеют место соотношения $y_2^1(\tau) = -y_4^1(\tau)$, $\dot{y}_2^1(\tau) = -\dot{y}_4^1(\tau)$ для любых $\tau \in (0, \tau_2)$. Заметим, что в моменты склейки кусков траектории справедливы равенства

$$y_2^1(0) = y(\tau_1) = A, \quad \dot{y}_2^1(0) = \dot{y}(\tau_1) = \dot{y}^2, \quad y_2^1(\tau_2) = y(T) = -B, \quad \dot{y}_2^1(\tau_2) = \dot{y}(T) = 0,$$

$$y_4^1(0) = y(\tau_1 + T) = -A, \quad \dot{y}_4^1(0) = \dot{y}(\tau_1 + T) = -\dot{y}^2, \quad y_4^1(\tau_4) = y(2T) = B, \quad \dot{y}_4^1(\tau_4) = \dot{y}(2T) = 0.$$

Условия определения 3 выполнены.

Таким образом, существует T_r -периодическое решение с симметричной траекторией, где $T_r = 2T$. Теорема доказана.

В силу симметричности траектории относительно начала координат фазовой плоскости, достаточно рассмотреть первый и второй куски траектории, которые соответствуют решению с обходом характеристики в одну сторону и двумя точками переключения $Y^1 = (B, \dot{y}^1)$, $Y^2 = (A, \dot{y}^2)$ за полупериод T , где $\dot{y}^1 = 0$, $\dot{y}^2 < 0$.

Для $2T$ -периодического решения с симметричной траекторией системы (3) и (4) с учётом равенства $d_1(0) = -d_1(T)$ после замены $\tau_2 = T - \tau_1$ принимают вид

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) = 0,$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ = \lambda(1 - e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)),$$

$$\lambda e^{\lambda(T-\tau_1)}(1 - e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(A + B + d_1(T) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(T) = 0, \quad (32)$$

а система (5) принимает вид неравенства

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(\tau_1) < 0. \quad (33)$$

Равенства (32) рассмотрим как систему уравнений, приняв τ_1 и T за переменные. Условия разрешимости системы уравнений (32) относительно τ_1 при фиксированном T и выполнении неравенства (33) устанавливает

Лемма. Величина τ_1 , определяемая для некоторого $k \in \mathbb{N}$ равенством

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{\omega d_2(0)}{q^+} (e^{-\lambda T} + 1) \right), \quad (34)$$

где $T = \pi(2k-1)/\omega$, $\omega > 0$, является решением системы уравнений (32) из интервала $(0, T)$ и удовлетворяет неравенству (33), если выполняются следующие условия:

1) имеют место неравенства

$$(e^{-\lambda T} - 1)q^+ < (e^{-\lambda T} + 1)\omega d_2(0) < 0;$$

2) справедливы равенства

$$A = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{\lambda\tau_1})(q^+ + \omega d_2(0)) + B + q^+ \tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0), \quad (35)$$

$$B = \frac{1}{2\lambda}(e^{\lambda\tau_1}(q^+ + \omega d_2(0)(e^{-\lambda T} + 1)) - q^+) - \frac{\omega d_2(0)}{\lambda} - \frac{q^+ \tau_1}{2} + d_1(0), \quad (36)$$

причём $0 < A < B$, и неравенство

$$e^{\lambda\tau_1}(q^+ + \omega d_2(0)) > q^+ + \omega d_2(\tau_1).$$

Доказательство. Преобразуем систему уравнений (32) с учётом равенства $d_j(T) = -d_j(0)$, $j = 1, 2$. Для этого обе части первого уравнения умножим на $e^{\lambda\tau_1}$, а третьего уравнения – разделим на $e^{\lambda(T-\tau_1)}$, и после переноса слагаемых в правые части получим равенства

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) &= -e^{\lambda\tau_1}(q^+ + \omega d_2(0)), \\ \lambda(1 - e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(A + B - d_1(0) - d_1(\tau_1)) &= \omega d_2(0)e^{\lambda(\tau_1-T)}. \end{aligned}$$

Во втором уравнении системы (32) сделаем замены в соответствии с этими равенствами и получим первое уравнение преобразованной системы, записанной ниже. Далее обе части первого уравнения системы (32) умножим на выражение $e^{\lambda(T-\tau_1)}(1 - e^{\lambda\tau_1})$, а третьего уравнения – на выражение $1 - e^{\lambda(T-\tau_1)}$, после их сложения и группирования получим второе уравнение преобразованной системы. Наконец, в качестве третьего уравнения преобразованной системы рассмотрим первое уравнение системы (32), обе части которого умножены на выражение $1 - e^{\lambda\tau_1}$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{aligned} -e^{\lambda\tau_1}(q^+ + \omega d_2(0)) + q^+ &= e^{\lambda(\tau_1-T)}\omega d_2(0), \\ e^{\lambda(T-\tau_1)}(\lambda(2B + q^+\tau_1 - 2d_1(0)) + q^+ + 2\omega d_2(0)) - e^{\lambda T}q^+ - \omega d_2(0)(e^{\lambda T} + 1) &= 0, \\ \lambda(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + (1 - e^{\lambda\tau_1})(q^+ + \omega d_2(0)) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

равносильной системе уравнений (32).

Введём обозначение

$$P = 1 + (1 + e^{-\lambda T})\omega d_2(0)/q^+.$$

Пусть выполняются неравенства в условии 1) леммы. Тогда для $\lambda > 0$ (в этом случае $q^+ > 0$) имеют место неравенства

$$e^{-\lambda T} < 1 + (1 + e^{-\lambda T})\omega d_2(0)/q^+ < 1; \quad (38)$$

для $\lambda < 0$ (в этом случае $q^+ < 0$) – неравенства

$$1 < 1 + (1 + e^{-\lambda T})\omega d_2(0)/q^+ < e^{-\lambda T}, \quad (39)$$

или (с учётом введённого выше обозначения) $e^{-\lambda T} < P < 1$ для $\lambda > 0$ и $1 < P < e^{-\lambda T}$ для $\lambda < 0$, т.е. $P > 0$. Прологарифмируем (38), (39). После умножения на выражение $-1/\lambda$ приходим к неравенствам $0 < -\lambda^{-1} \ln P < T$.

Пусть выполняется (34), т.е. $\tau_1 = -\lambda^{-1} \ln P$. Тогда $\tau_1 \in (0, T)$. Равенство (34) получено из первого уравнения системы (37), поэтому величина τ_1 является решением этого уравнения.

Пусть при найденной величине τ_1 имеют место равенства (35), (36), которые получены из третьего и второго уравнений системы (37) соответственно. Следовательно, величина τ_1 удовлетворяет системе уравнений (37), а значит, является решением равносильной системы уравнений (32).

Пусть имеет место неравенство в условии 2) леммы при известной величине τ_1 . Выполнение этого неравенства равносильно выполнению неравенства (33) совместно с первым равенством системы (32), а поскольку величина τ_1 является решением системы уравнений (32), то она удовлетворяет и неравенству (33).

Таким образом, если выполняются условия 1) и 2) леммы, то величина τ_1 , определяемая равенством (34) при фиксированном T , является решением системы уравнений (32) и удовлетворяет неравенству (33). Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) = 0.1963495\dot{y}(t) - 0.1N(y(t)) - 0.1 \cos(t + 0.6584073), \quad (40)$$

где $\lambda = 0.1963495$, $\alpha = \beta = -0.1$, $\omega = 1$ и $\varphi = 0.6584073$. Пусть $C = 0.602$. Тогда $q^+ = 0.3065961$, $q_1 = 0.0962878$ и $q_2 = 0.0527249$. Здесь и далее расчёты проведены с точностью до 10^{-7} .

Обратимся к условиям леммы. Пусть $k = 1$, тогда $T = \pi$. Справедливы неравенства условия 1), а именно, $-0.1411441 < -0.0343235 < 0$ (здесь $d_2(0) = -0.0172108$). Согласно равенству (34) имеем $\tau_1 = 0.4603672$. Далее рассчитаем параметры A и B по формулам (35) и (36), где $d_1(0) = 0.1084207$ и $d_1(\tau_1) = 0.0894866$. Тогда $B = 0.1255011$ и $A = 0.1082834$, при этом $0 < A < B$. Проверим выполнение неравенства в условии 2). Поскольку $d_2(\tau_1) = -0.0635877$, то имеем верное неравенство $0.3167624 > 0.2430083$. Условия 1) и 2) леммы выполнены. Следовательно, найденное значение τ_1 является решением системы уравнений (32), которое удовлетворяет неравенству (33). Это означает, что выполняется необходимое условие существования 2π -периодического решения с симметричной траекторией.

Обратимся к условиям теоремы 2. Уравнение (26) имеет одно решение $z_1 = \tau_1$ на интервале $(0, T)$, поскольку второе значение $z_1 = 6.39220008 > 2T$. Уравнение (27) имеет одно решение $z_2 = \tau_2 = T - \tau_1 = 2.6812254$ на интервале $(0, T)$, второе значение $z_2 = 4.9526250 > T$. Отсюда следует, что величины τ_1 и τ_2 являются единственными решениями соответствующих уравнений. Дополнительно имеют место условия теорем 3 и 4. Значит, выполняется достаточное условие существования 2π -периодического решения с симметричной траекторией.

На рисунке представлен график симметричной траектории 2π -периодического решения уравнения (40) с временами перехода

$$\tau_1 = \tau_3 = 0.4603672, \quad \tau_2 = \tau_4 = 2.6812254$$

и точками переключения

$$Y^1 = (0.1255011, 0),$$

$$Y^2 = (0.1082834, -0.0737541),$$

$$Y^3 = -Y^1 = (-0.1255011, 0),$$

$$Y^4 = -Y^2 = (-0.1082834, 0.0737541),$$

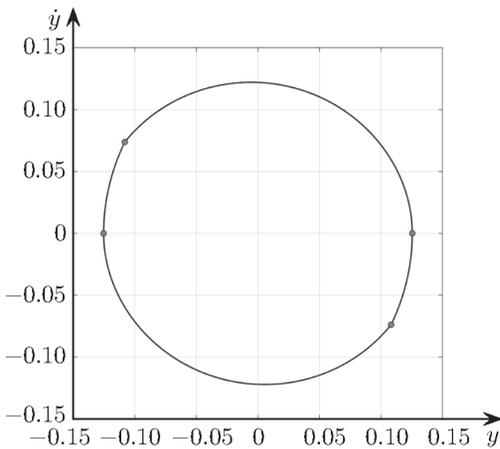


Рисунок. Траектория 2π -периодического решения $y(t)$ уравнения (40).

которые отмечены на рисунке и расположены на фазовой плоскости (y, \dot{y}) по ходу часовой стрелки. Куски траектории между точками переключения для всех $p \in \mathbb{N}$ задаются следующими функциями:

1) первый кусок для $t \in (2(p-1)\pi, 2(p-1)\pi + \tau_1)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-2(p-1)\pi)} + c_2^1 + q^+(t - 2(p-1)\pi) + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-2(p-1)\pi)} + q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = -1.4738273$, $c_2^1 = 1.4909076$;

2) второй кусок для $t \in (\tau_1 + 2(p-1)\pi, \pi + 2(p-1)\pi)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2(p-1)\pi)} + c_2^1 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2(p-1)\pi)} + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = -0.0517765$, $c_2^1 = 0.0705734$;

3) третий кусок для $t \in (\pi + 2(p-1)\pi, \tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-2p\pi+\pi)} + c_2^1 - q^+(t - 2p\pi + \pi) + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-2p\pi+\pi)} - q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = 1.4738272$, $c_2^1 = -1.4909076$;

4) четвёртый кусок для $t \in (\tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi, 2p\pi)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2p\pi+\pi)} + c_2^1 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2p\pi+\pi)} + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = 0.0517765$, $c_2^1 = -0.0705734$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М., 1974.
2. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелин. колебания. 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
3. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
4. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
5. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
6. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
7. *Leonov G.A., Shumafov M.M., Teshev V.A., Aleksandrov K.D.* Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differ. Equat. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.
8. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
9. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
10. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Control. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
11. *da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Control Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
12. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
13. *Евстафьева В.В.* Существование T/k -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
14. *Евстафьева В.В.* Існування двоточково-коливних розв’язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
15. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
16. *Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потанов Д.К.* Периодические режимы в системе автоматического управления с трёхпозиционным гистерезисным реле // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 596–607.
17. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
18. *Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потанов Д.К.* Об одном типе колебательных решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле и возмущением // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 2. С. 150–163.

Санкт-Петербургский государственный
университет

Поступила в редакцию 23.01.2023 г.
После доработки 23.01.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ, ВРАЩАЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

© 2023 г. И. Н. Сергеев

Изучены показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости, аналогичные показателям Ляпунова и адаптированные к нелинейным системам дифференциальных уравнений. Перечислены самые разные – как гарантированные, так и различные реализуемые – соотношения между линейными, сферическими, радиальными и шаровыми разновидностями этих показателей, а также рассмотрены их взаимосвязи с аналогичными показателями системы первого приближения.

DOI: 10.31857/S0374064123060031, EDN: FFMENE

Введение. Картина качественных свойств решений дифференциальных уравнений, важнейшим из которых является устойчивость [1], заметно обогащается знанием их колебательных свойств. Для количественного изучения последних были введены сначала *характеристические частоты* [2], а затем и показатели *колеблемости, вращаемости и блуждаемости* [3, 4]. Эти характеристики исследовались многими авторами (см., например, [5–14]).

Однако все перечисленные выше показатели (называемые ниже *линейными*) оказались применимы лишь к решениям, определённым гарантированно на всей положительной полуоси времени, тогда как для решений нелинейных систем такой гарантии дать нельзя. В настоящей работе развиваются начатые в статье [15] попытки распространить определения этих показателей на системы, решения которых не обязательно продолжаемы на всю полуось, а именно рассматриваются *сферические* [16], *радиальные* [17] и *шаровые* [18] функционалы и показатели.

Ниже для указанных показателей нелинейной системы рассматриваются самые разнообразные (как фиксированные, так и вариативные) их взаимосвязи не только друг с другом, но и с аналогичными показателями соответствующей системы линейного приближения [19, 20]. Перспектива представленной работы видится в возможности дальнейшего детального исследования колебательных свойств исходной системы по её первому приближению [21].

1. Базовые понятия. Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом (векторном) фазовом пространстве \mathbb{R}^n рассмотрим дифференциальную, вообще говоря, *нелинейную* систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши. С системой (1) свяжем линейную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

причём на нелинейную добавку

$$f(t, x) - f'_x(t, 0)x = o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

стандартное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ мы здесь не накладываем.

Через $x_f(\cdot, x_0)$ будем обозначать *непродолжаемое* решение системы (1) с начальным условием $x_f(0, x_0) = x_0$, а через G_* и G_δ – множества всех значений $x_0 \in G$, удовлетворяющих условию $x_0 \neq 0$ или соответственно $0 < |x_0| < \delta$.

Определение 1. Три основных функционала $K(t, u)$, которые определены на множестве пар, образуемых моментами времени $t > 0$ и непрерывно-дифференцируемыми функциями $u : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, отвечают показателям

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho, \quad \text{где } K = N, \Theta, P \text{ соответственно,} \tag{3}$$

и описывают следующие конкретные свойства решений:

а) *колеблемость* в случае $\varkappa = \nu$, т.е. когда $K(t, u) = N(t, u)$ – нормированное (умноженное на π) число нулей на промежутке $(0, t]$ функции $P_1 u$, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую в \mathbb{R}^n , причём в *критической* ситуации, когда хотя бы один из нулей $\tau \in [0, t]$ кратен (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1 u)'$), считаем выражение $N(t, u)$ неопределённым;

б) *вращаемость (ориентированная)* в случае $\varkappa = \theta$, т.е. когда $K(t, u) = \Theta(t, u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$ есть модуль *ориентированного угла* $\varphi(t, P_2 u)$ (непрерывного по t , с начальным условием $\varphi(0, P_2 u) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость в \mathbb{R}^n , причём в *критической* ситуации, когда $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0, t]$, считаем выражение $\Theta(t, u)$ неопределённым;

в) *блуждаемость* в случае $\varkappa = \rho$, т.е. когда

$$K(t, u) = P(t, u) \equiv \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|} \right| d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* и *частотную вращаемость* [4], за *поворачиваемость данного ранга* [22], а также за *плоскую вращаемость* [23].

Замечание 1. В работах [15, 17–21] функционалы из определения 1 в критической ситуации считались принимающими вполне определённое, хотя и бесконечное значение $+\infty$. Такой подход приводил к тому, что верхние радиальные или шаровые показатели колеблемости или вращаемости могли равняться $+\infty$, что лишило бы их содержательного смысла – именно этим и обусловлено нынешнее изменение их значений в критических ситуациях.

Определение 2. Для каждого функционала (3) по системе (1), моменту $t \in \mathbb{R}_+$, невырожденному оператору $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$, а при необходимости и начальному значению $x_0 \in G_*$, определим *функционалы*:

а) *линейный и сферический*

$$K_l(f, x_0, t, L) \equiv K(t, Lx_f(\cdot, x_0)), \quad K_s(f, x_0, t, L) \equiv K(t, Lx_{f_s}(\cdot, x_0)),$$

где $f_s(t, x) \equiv P_x^\perp f(t, x)$, а P_x^\perp – ортогональный проектор на гиперплоскость, ортогональную вектору $x \in \mathbb{R}^n$ (причём *сферической* называем и систему, получаемую из (1) заменой её правой части f на f_s);

б) *нижние радиальный и шаровой*

$$\check{K}_r(f, x_0, t, L) \equiv \lim_{\mu \rightarrow +0} K(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)), \quad \check{K}_b(f, t, L) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow 0} K(t, Lx_f(\cdot, x_0)), \tag{4}$$

а *верхние радиальный* $\hat{K}_r(f, x_0, t, L)$ и *шаровой* $\hat{K}_b(f, t, L)$ функционалы зададим теми же формулами (4), но с заменой в них нижних пределов при $\mu \rightarrow +0$ и $x_0 \rightarrow 0$ верхними соответственно.

Функционалы из определений 1 и 2 применимы только к решениям, которые определены на всём рассматриваемом промежутке, а для линейных показателей в следующем определении – сразу на всей полуоси, что может оказаться принципиально неосуществимым (причём возможно даже при всех $x_0 \in G_*$). Именно эту проблему и призваны устранить сферические показатели при достаточно близких к нулю начальных значениях $x_0 \in G_\delta$, а также радиальные и шаровые показатели при любых $x_0 \in G_*$.

Определение 3. Для каждого функционала (3) по системе (1), а при необходимости и начальному значению $x_0 \in G_*$, зададим соответствующие *показатели колеблемости, вращаемости* или *блуждаемости*:

1) *нижние слабые линейный и сферический* – формулами

$$\check{\varkappa}_l^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K_l(f, x_0, t, L), \quad \check{\varkappa}_s^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} K_s(f, x_0, t, L); \quad (5)$$

2) *нижние слабые радиальный и шаровой* – формулами

$$\check{\varkappa}_r^\circ(f, x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{K}_r(f, x_0, t, L), \quad \check{\varkappa}_b^\circ(f) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} t^{-1} \check{K}_b(f, t, L); \quad (6)$$

3) *верхние слабые линейный $\hat{\varkappa}_l^\circ(f, x_0)$, сферический $\hat{\varkappa}_s^\circ(f, x_0)$, радиальный $\hat{\varkappa}_r^\circ(f, x_0)$ и шаровой $\hat{\varkappa}_b^\circ(f)$* – теми же формулами (5) и (6), но с заменой в них всех нижних пределов при $t \rightarrow +\infty$ и нижних функционалов \check{K}_r, \check{K}_b верхними соответственно;

4) *нижние или верхние сильные линейный $\check{\varkappa}_l^\bullet(f, x_0)$, сферический $\check{\varkappa}_s^\bullet(f, x_0)$, радиальный $\check{\varkappa}_r^\bullet(f, x_0)$ и шаровой $\check{\varkappa}_b^\bullet(f)$* (где тильде соответствует “галочка” ($\check{}$) или “крышечка” ($\hat{}$)) – теми же формулами (5) и (6) для нижних показателей или аналогичными для верхних, но с переставленными в них местами нижними или верхними пределами при $t \rightarrow +\infty$ и точными нижними гранями по $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$;

5) *точные*, образуемые при совпадении какого-либо нижнего показателя с аналогичным верхним, – в этом случае разрешим опускать в их обозначении и “галочку”, и “крышечку”;

6) *абсолютные*, образуемые при совпадении какого-либо слабого показателя с аналогичным сильным, – в этом случае разрешим опускать в их обозначении верхние индексы (все кружки).

Замечание 2. Значения функционалов колеблемости или вращаемости из определения 2 оказываются неопределёнными в критических ситуациях из определения 1. Такие ситуации могут наступать даже и отдельно для какого-либо радиального функционала, не будучи критическими для шарового (см. замечание 5 ниже). Однако некритические значения операторов $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ типичны по мере [24, 25], а, значит, критические заведомо устранимы взятием точной нижней грани по этим операторам в формулах из определения 3.

Обозначения. Наряду с уже принятыми обозначениями из равенств (3) и с уже использованным в п. 4) определения 3 выше единым обозначением “галочки” и “крышечки” в виде тильды, в дальнейшем для краткости также будем предполагать, что каждый из следующих параметров принимает любое (одно и то же на протяжении текущего отдельного соотношения) из перечисленных для него значений

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho, \quad K = N, \Theta, P, \quad k = l, s, r, \quad \sim = \check{}, \hat{}, \quad * = \circ, \bullet, \quad x_0 \in G_*,$$

а запись $\varkappa(f, M) = a$ означает ниже, что множество $\varkappa(f, M) \equiv \{\varkappa(f, x_0) \mid x_0 \in M\}$ состоит в точности из одного числа a .

2. Формулировки теорем. В линейном случае все одноимённые линейные, сферические и радиальные показатели оказываются просто неразличимыми, о чем и говорит

Теорема 1. *При каждом $n > 1$ для любой линейной системы (2) верны равенства*

$$\check{\varkappa}_s^*(f, x_0) = \check{\varkappa}_r^*(f, x_0) = \check{\varkappa}_l^*(f, x_0).$$

Нижние показатели не превосходят аналогичных верхних, слабые – соответствующих сильных, нижние шаровые – нижних радиальных, а применительно к показателям блуждаемости ещё и верхние радиальные не превосходят верхних шаровых, как показывает

Теорема 2. *При каждом $n > 1$ для любой системы (1) верны неравенства*

$$\check{\varkappa}_k^*(f, x_0) \leq \hat{\varkappa}_k^*(f, x_0), \quad \check{\varkappa}_b^*(f) \leq \hat{\varkappa}_b^*(f), \quad \check{\varkappa}_k^\circ(f, x_0) \leq \check{\varkappa}_k^\bullet(f, x_0), \quad \check{\varkappa}_b^\circ(f) \leq \check{\varkappa}_b^\bullet(f), \quad (7)$$

$$\check{\varkappa}_b^*(f) \leq \check{\varkappa}_r^*(f, x_0), \quad \hat{\rho}_r^*(f, x_0) \leq \hat{\rho}_b^*(f). \quad (8)$$

Пары нижних и верхних радиальных или шаровых показателей блуждаемости системы совпадают с парами их аналогов системы первого приближения, тогда как пары показателей колеблемости или вращаемости системы лишь оценивают пары соответствующих аналогов системы первого приближения снаружи, что и подтверждает

Теорема 3. При каждом $n > 1$ для любой системы (1) с системой первого приближения (2) верны соотношения

$$\tilde{\rho}_r^*(f, x_0) = \tilde{\rho}_r^*(f_l, x_0), \quad \tilde{\rho}_b^*(f) = \tilde{\rho}_b^*(f_l), \quad (9)$$

$$\check{\kappa}_r^*(f, x_0) \leq \check{\kappa}_r^*(f_l, x_0), \quad \check{\kappa}_b^*(f) \leq \check{\kappa}_b^*(f_l), \quad \kappa = \nu, \theta. \quad (10)$$

Результаты теорем 2 и 3, относящиеся исключительно к показателям блуждаемости, в двумерном случае можно перенести также и на показатели вращаемости, о чём свидетельствует

Теорема 4. При $n = 2$ для любой системы (1) с системой первого приближения (2) верны соотношения

$$\hat{\theta}_r^*(f, x_0) \leq \hat{\theta}_b^*(f), \quad \tilde{\theta}_r^*(f, x_0) = \tilde{\theta}_r^*(f_l, x_0), \quad \tilde{\theta}_b^*(f) = \tilde{\theta}_b^*(f_l). \quad (11)$$

Из теоремы 1 вытекает, что сферические и радиальные показатели заведомо не более упорядочены между собой, чем их линейные варианты (см. работы [3, 4]), поскольку любое равенство или неравенство, справедливое для линейных показателей линейной системы, реализуется по меньшей мере на ней же для одноимённых сферических и радиальных показателей. Более того, для нелинейных систем соотношения между линейными, сферическими и радиальными (вместе с шаровыми) показателями оказываются просто непредсказуемыми, что и разъясняет

Теорема 5. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ для любых $0 \leq \alpha, \beta < +\infty$ и $0 \leq \gamma \leq +\infty$ существует система (1) с системой первого приближения (2), удовлетворяющая равенствам

$$\varkappa_b(f) = \varkappa_b(f_l) = \varkappa_k(f_l, G_*) = \varkappa_r(f, G_*) = \alpha, \quad \varkappa_s(f, G_*) = \beta, \quad \varkappa_l(f, G_*) = \gamma. \quad (12)$$

Каждый из показателей колеблемости, а также сразу все линейные и сферические показатели блуждаемости (в отличие от радиальных и шаровых в равенствах (9)) у двумерной периодической системы могут не совпадать с соответствующими показателями системы первого приближения, что и демонстрирует

Теорема 6. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существуют три периодических и устойчивых по Ляпунову системы, первая из которых, линейная вида (2) и служащая системой первого приближения для двух других, удовлетворяет соотношениям

$$0 = \theta_b(f_l) = \theta_k(f_l, G_*) < \kappa_k(f_l, G_*) = \kappa_b(f_l) = 1, \quad \kappa = \rho, \nu, \quad (13)$$

а вторая и третья системы вида (1) – соответственно соотношениям

$$0 = \theta_b(f) = \theta_k(f, G_*) = \rho_s(f, G_*) = \rho_l(f, G_*) = \nu_k(f, G_*) = \check{\nu}_b(f) < \hat{\nu}_b(f) = 1, \quad (14)$$

$$0 = \theta_b(f) = \theta_k(f, G_*) < 1 = \rho_s(f, G_*) = \rho_l(f, G_*) = \nu_k(f, G_*) = \check{\nu}_b(f) < \hat{\nu}_b(f) = 2. \quad (15)$$

В трёхмерном и даже автономном случае возможно также несовпадение верхних шаровых и даже некоторых точных радиальных показателей вращаемости и колеблемости с соответствующими показателями системы первого приближения, что и обосновывает

Теорема 7. При $n = 3$ и $G = \mathbb{R}^3$ существует автономная система (1) с устойчивой по Ляпунову системой первого приближения (2), удовлетворяющая для некоторого двумерного подпространства $S \subset \mathbb{R}^3$ соотношениям

$$0 = \kappa_k(f, G_*) = \kappa_b(f) = \kappa_b(f_l) = \check{\rho}_b(f_l) = \varkappa_k(f_l, G \setminus S) < \varkappa_k(f_l, S_*) = \hat{\rho}_b(f_l) = 1, \quad \kappa = \nu, \theta.$$

Замечание 3. В примере трёхмерной линейной системы (2) из теоремы 7 верхние (причём даже точные) шаровые показатели колеблемости и вращаемости строго меньше некоторых её

одноимённых радиальных показателей. Значит, предположение о том, что правые неравенства (8) теоремы 2 переносятся (по аналогии с левыми) с блуждаемости на колеблемость и вращаемость, оказывается, вообще говоря, неверным. Это связано с нынешним изменением определений (см. замечания 1 и 5), на которые теперь уже не в полной мере распространяется утверждение теоремы 3 из работы [15].

3. Доказательства сформулированных теорем. Для обоснования некоторых утверждений теорем настоящей работы использованы идеи из статей [2–4, 15, 22–25].

Доказательство теоремы 1. В случае линейной системы (2) решения $x_f(\tau, x_0)$ при переходе от линейных показателей к сферическим умножаются на функции $|x_0|/|x_f(\tau, x_0)|$ (см. доказательство теоремы 1 [15]), а к радиальным – на малые константы $\mu > 0$. При таких преобразованиях значения функционалов и показателей (3) не меняются.

Доказательство теорем 2–4. Для любой системы (1) все неравенства (7) верны, поскольку в их правых частях, по сравнению с левыми, по определению либо вместо нижних пределов берутся такие же верхние, либо операция взятия точной нижней грани по $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ перенесена на более поздний этап.

При вычислении шаровых функционалов блуждаемости, а также вращаемости в случае $n = 2$ (т.е. когда для них также исключены критические ситуации), конкретные пределы от выражения $K(t, Lx_f(\cdot, x_0))$ при $x_0 \rightarrow 0$ берутся по всему фазовому пространству (представляющему собой полную окрестность нуля), а при вычислении аналогичных радиальных функционалов – лишь по его подмножеству (а именно по лучу). Отсюда вытекают все неравенства (8) и (11) для соответствующих показателей. Верность же первого неравенства (8) для всех остальных показателей вытекает из того факта, что никакое значение $\check{K}_r(f, x_0, t, L)$ в некритической для него ситуации не может оказаться меньшим, чем $\check{K}_b(f, t, L)$.

Пусть теперь система (2) служит первым приближением системы (1). Для произвольных $t > 0$ и $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ при любых $\alpha, \beta > 0$ можно подобрать столь малое $\delta > 0$, что сразу при всех $\tau \in [0, t]$ и $x_0 \in G_\delta$ для решений $x(\tau) = Lx_f(\tau, x_0)$ и $y(\tau) = Lx_f(\tau, x_0)$ линейной системы $\dot{x} = B(\tau)x$ (с оператором Коши $X(\tau, s)$) и соответствующей нелинейной системы с добавкой $h(\tau, x) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$) верны (с учётом ограниченности величин τ , $\|B(\tau)\|$, $\|X(\tau, s)\|$, $|x(\tau)|/|x(s)|$ при $\tau, s \in [0, t]$) оценки

$$|y(\tau) - x(\tau)| = \left| \int_0^\tau X(\tau, s)h(s, y(s)) ds \right| \leq \alpha|x(\tau)|, \quad \angle(y(\tau), x(\tau)) \leq \alpha, \quad (16)$$

из которых можно получить (уменьшив при необходимости число $\alpha > 0$) ещё и оценки

$$|\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)| = |B(\tau)(y(\tau) - x(\tau)) + h(\tau, y(\tau))| \leq \beta|x(\tau)|. \quad (17)$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ выбором достаточно малых значений α, β обеспечиваются неравенства

$$|P(t, y(t)) - P(t, x(t))| \leq t \sup_{\tau \in [0, t]} \left| \frac{|P_{y(\tau)}^\perp \dot{y}(\tau)|}{|y(\tau)|} - \frac{|P_{x(\tau)}^\perp \dot{x}(\tau)|}{|x(\tau)|} \right| \leq t\varepsilon,$$

а из них с учётом произвольности ε получаются равенства

$$\tilde{P}_r(f, x_0, t, L) = \tilde{P}_r(f, x_0, t, L), \quad \tilde{P}_b(f, t, L) = \tilde{P}_b(f, t, L),$$

из которых затем вытекают и равенства (9).

Более того, оценки (16) в случае $n = 2$ обеспечивают ещё и равенства

$$\tilde{\Theta}_r(f, x_0, t, L) = \tilde{\Theta}_r(f, x_0, t, L), \quad \tilde{\Theta}_b(f, t, L) = \tilde{\Theta}_b(f, t, L),$$

а с ними и равенства (11). В случае же $n > 2$ для каждых $x_0 \in G_*$, $t > 0$ и $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n$ в некритической для функционала вращаемости ситуации проекция исходной фазовой кривой $P_2 Lx_f(\tau, x_0)$ ($\tau \in [0, t]$) на заданную плоскость отделена от нуля. Поэтому к векторам

$P_2Lx_f(\tau, \mu x_0)$ оказываются сколь угодно близкими (по углу, по сравнению с μ) векторы $P_2Lx_f(\tau, \mu x_0)$ сразу при каждом $\tau \in [0, t]$ и всех достаточно малых $\mu > 0$, а значит, возмущённые проекции тоже отделены от нуля и удовлетворяют равенствам

$$\Theta(t, Lx_f(\cdot, x_0)) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \Theta(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \Theta(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)) = \Theta_r(f, x_0, t, L).$$

Отсюда вытекают и все неравенства (10) для показателей вращаемости.

Наконец, те же неравенства (10), но для показателей колеблемости, подтверждаются аналогичной близостью возмущённых проекций $P_1Lx_f(\tau, \mu x_0)$ на заданную прямую к проекциям $P_1Lx_f(\tau, \mu x_0)$. Действительно, в некритической ситуации исходная проекция $P_1Lx_f(\tau, x_0)$ на одних участках отрезка $[0, t]$ отделена от нуля, а на каждом из остальных имеет строго по одному нулю при отвлечённой от нуля производной по τ . Благодаря оценкам (16) и (17), эти свойства сохраняются (за исключением, возможно, наличия на крайнем правом участке нуля, совпадающего с его концом t) и для возмущённых проекций при всех достаточно малых $\mu > 0$, поэтому верны равенства

$$N(t, Lx_f(\cdot, x_0)) = \lim_{\mu \rightarrow +0} N(t, Lx_f(\cdot, \mu x_0)) = \tilde{N}_r(f, x_0, t, L) + \gamma, \quad \gamma \in \{0, 1\},$$

подтверждающие сделанный выше вывод о показателях колеблемости. Теоремы 2–4 доказаны.

Замечание 4. Приведённые выше рассуждения, подтверждающие неравенства (10) для нижних показателей вращаемости и колеблемости, казалось бы, обосновывают также и аналогичные (обратного знака) неравенства для верхних показателей. Однако по меньшей мере для радиальных показателей (для шаровых – вопрос пока открыт) это предположение оказывается неверным: уже в теоремах 6 и 7 некоторые верхние радиальные показатели колеблемости и вращаемости нелинейной системы меньше соответствующих показателей системы её первого приближения. Причина этого явления аналогична той, что описана в замечании 5 ниже.

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим систему (1), которая в фиксированном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ записывается в виде

$$\dot{x} = Ex + \zeta(t, x)Ix \equiv f(t, x), \quad E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где для заданного возрастающего по $m \in \mathbb{Z}$ семейства функций $\eta_m(t) \equiv (t + 2)^m$ ($t \in \mathbb{R}_+$) коэффициент $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+ \times G)$ удовлетворяет условиям

$$\zeta(t, x) \equiv \begin{cases} \alpha, & |x| \leq \eta_{-2}(t) \rightarrow +0; \\ \beta, & |x| \in [\eta_{-1}(t), \eta_1(t)] \rightarrow [0, +\infty); \quad t \rightarrow +\infty, \\ \xi_\gamma(|x|), & |x| \geq \eta_2(t) \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

$$\xi_\gamma(r) \equiv \begin{cases} 0, & \gamma = 0; \\ r\gamma/(r + \gamma) \in (0, \gamma), & \gamma \in (0, +\infty); \quad r > 0 \\ r, & \gamma = +\infty, \end{cases}$$

(с произвольным его доопределением в областях $\eta_{-2}(t) < |x| < \eta_{-1}(t)$ и $\eta_1(t) < |x| < \eta_2(t)$). Первое слагаемое в правой части системы (18) обеспечивает экспоненциальный рост нормы решения, а второе отвечает за скорость его вращения, зависящую от того, где оно проходит.

Соответствующая система первого приближения совпадает с системой (18) при $\zeta(t, x) = \alpha$, поскольку именно это равенство выполнено для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ при всех достаточно малых $|x|$. В области, где для системы (18) выполнено то же равенство, целиком лежат прямоугольники вида $\Pi_{t\varepsilon} \equiv [0, t] \times \{|x| \leq \varepsilon\}$ при каждом $t > 0$ и зависящем от него достаточно малом $\varepsilon > 0$. Поэтому для любого фиксированного $t > 0$ и некоторого $\delta > 0$ сразу при всех $x_0 \in G_\delta$ графики решений $x_f(\tau, x_0)$ окажутся при $\tau \in [0, t]$ лежащими в прямоугольнике $\Pi_{t\varepsilon}$, а значит, будет выполнена вся первая цепочка равенств (12).

Далее, правая часть соответствующей сферической системы имеет вид $f_s \equiv \zeta(t, x)Ix$, поэтому график любого решения $x_{f_s}(t, x_0)$ (где $x_0 \in G_*$ и $|x_{f_s}(t, x_0)| = |x_0|$ при $t \in \mathbb{R}_+$) при всех достаточно больших t лежит в области, где $\zeta(t, x) = \beta$, а значит, для всех показателей такого решения имеем $\varkappa_s(f, x_0) = \beta$.

Наконец, для любого $x_0 \in G_*$ график решения $x_f(t, x_0)$ с некоторого момента окажется в области, где $\zeta(t, x) = \xi_\gamma(|x|) \in [0, \gamma]$, а в силу свойства $\xi_\gamma(r) \rightarrow \gamma$ при $r \rightarrow +\infty$ он для каждого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших t будет лежать в области, где $\gamma - \varepsilon < \zeta(t, x) \leq \gamma$. Отсюда получаем оценки $\gamma - \varepsilon \leq \varkappa_l(f, x_0) \leq \gamma$, из которых, с учётом произвольности ε , вытекает и последнее равенство (12). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим линейную периодическую систему (2), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ с помощью матрицы I (18) в виде

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f_l(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \cos t.$$

Она задаёт вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in G_*$ за время t равен

$$\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) = \frac{\pi}{2} \sin t \in [-\pi/2, \pi/2], \quad x_f(t_m, x_0) = (-1)^{m-1} x_f(t_1, x_0), \quad t_m \equiv \pi m - \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Последнее свойство, инвариантное относительно линейных преобразований $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ решения x_f , обеспечивает выполнение всех равенств (13).

Рассмотрим первую нелинейную периодическую систему вида (1) с правой частью

$$f(t, x) = \psi_-(|x|) \cdot f_l(t, x) = f_s(t, x), \quad \psi_\pm(r) \equiv 1 \pm \frac{r}{r+1} \in (0, 2), \quad (19)$$

для которой имеем

$$\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) = \psi_-(|x_0|) \frac{\pi}{2} \sin t \in \left[-\psi_-(|x_0|) \frac{\pi}{2}, \psi_-(|x_0|) \frac{\pi}{2} \right] \subset (-\pi/2, \pi/2), \quad |x_0| \neq 0.$$

С одной стороны, в силу последнего строгого включения для любого $x_0 \in G_*$ можно указать такой поворот $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$, что сразу все векторы $Lx_f(t, \mu x_0)$ ($t \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in (0, 1]$) лежат на фазовой плоскости \mathbb{R}^2 строго в одной полуплоскости относительно заданной прямой $p \subset \mathbb{R}^2$ (вдоль которой действует проектор P_1 при подсчёте числа нулей в п. а) определения 1). Более того, если оператор L задавать как композицию указанного поворота и неограниченного удлинения вектора $e \perp p$, то можно делать сколь угодно малыми ещё и все значения $t^{-1}P(t, Lx_f(t, x_0))$ ($t \in \mathbb{R}_+$). Отсюда вытекают все равенства нулю из цепочки (14). С другой стороны, для любых $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ и $\delta > 0$ при каждом $x_0 \in G_\delta$ значения функции $Lx_f(t, x_0)$ на каждом временном промежутке $M_m \equiv (2\pi(m-1), 2\pi m]$ ($m \in \mathbb{N}$) пересекаются с упомянутой прямой p не более двух раз, а при некоторых x_0 – даже ровно по два раза, откуда $\hat{\nu}_b(f) = 1$.

Для второй нелинейной системы вида (1) с правой частью $f(t, x) = \psi_+(|x|)f_l(t, x)$ (см. последнее равенство (19)) аналогично, но наоборот, получаем включения

$$\{\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset \left(-\psi_+(|x_0|) \frac{\pi}{2}, \psi_+(|x_0|) \frac{\pi}{2} \right) \supset [-\pi/2, \pi/2], \quad |x_0| \neq 0.$$

Поэтому для любых $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ и $\delta > 0$ при каждом $x_0 \in G_\delta$ значения функции $Lx_f(t, x_0)$ на каждом из рассмотренных выше промежутков M_m пересекаются с упомянутой прямой p уже не менее двух и не более четырёх раз, причём при одних x_0 – ровно по два раза, а при некоторых других x_0 – ровно по четыре раза. Отсюда вытекают все соотношения для показателей колеблемости из цепочки (15). Для установления остальных её равенств заметим, что для любого $x_0 \in G_*$ можно задавать оператор $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$ как композицию поворота, при

котором множество всех векторов $Lx_f(t, x_0)$ содержит только один вектор $e \perp p$, и неограниченного сжатия этого вектора e . В результате сразу все значения величины $t^{-1}P(t, Lx_f(t, x_0))$ ($t \in \mathbb{R}_+$) можно делать сколь угодно близкими к единице.

Все показатели вращаемости всех трёх рассмотренных систем равны нулю в силу ограниченности числом 2π ориентированного угла, задаваемого их решениями, и это свойство инвариантно относительно невырожденных преобразований плоскости. Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим линейную автономную систему (2) с правой частью $f_l(x, y)$, записываемую в фиксированном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^3 \equiv G$ с помощью матрицы I (18) в виде

$$\dot{x} = Ix, \quad \dot{y} = \psi(|x|), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1, \quad (20)$$

где $\psi(r) \equiv 0$ ($r \geq 0$). Она задаёт вращение каждой плоскости, параллельной $S \equiv \{y = 0\}$, вокруг неподвижной оси $q \equiv \{x = 0\}$ с единичной угловой скоростью. Поэтому для всех её показателей при начальных значениях $x_0 \in S_*$ имеем $\varkappa_k(f_l, x_0) = 1$. Кроме того, все её верхние шаровые показатели блуждаемости равны единице, а нижние – нулю, так как в любой окрестности нуля есть как циклические решения в плоскости S , так и неподвижные точки на прямой q . При этом для каждого $x_0 \in G \setminus S$ имеем $\varkappa_k(f_l, x_0) = 0$, поскольку фазовая кривая $x_{f_l}(\cdot, x_0)$:

а) под действием проектора P_1 на прямую q (что можно считать без ограничения общности) попадает ровно в одну ненулевую точку этой прямой, а значит, $\nu_k(f_l, x_0) = 0$; более того, отсюда и для шарового показателя колеблемости получаем равенство $\nu_b(f_l) = 0$, поскольку для него в этой ситуации все остальные значения $x_0 \in S_*$ являются критическими;

б) под действием проектора P_2 на некоторую плоскость $Q \supset q$ (также без ограничения общности) оказывается строго в одной её полуплоскости относительно прямой $Q \cap S$, а значит, угол поворота $\varphi(t, P_2 x_{f_l}(\cdot, x_0))$ ограничен по модулю числом π , поэтому $\theta_k(f_l, x_0) = 0$ и даже $\theta_b(f_l) = 0$, поскольку для шарового показателя вращаемости значения $x_0 \in S_*$ здесь также являются критическими;

в) под действием оператора L со сколь угодно сильным удлинением вдоль прямой q будет давать сколь угодно малые значения $t^{-1}P(t, Lx_{f_l}(t, \mu x_0))$ сразу при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mu \in (0, 1]$, откуда имеем $\rho_k(f_l, x_0) = 0$.

Теперь рассмотрим нелинейную автономную систему вида (1) с правой частью $f(x, y)$ того же вида (20), но уже с функцией $\psi(r) \equiv r^2$. Она, в отличие от предыдущей линейной системы, задаёт винтовое движение, а именно вращение вокруг неподвижной оси q с единичной угловой скоростью, совмещённое с одновременным движением вдоль этой оси с постоянной скоростью, сходящейся к нулю при приближении к оси q . У этой системы уже абсолютно все показатели колеблемости и вращаемости равны нулю, поскольку любая её фазовая кривая с начальным значением $x_0 \in G_*$ не более одного раза пересекает плоскость S , относительно которой она тогда либо все время находится в одном полупространстве, либо в какой-то один момент переходит в другое, а значит, $N(t, P_1 x_f(\cdot, x_0)) \leq 1$ и $\Theta(t, P_2 x_f(\cdot, x_0)) \leq 2\pi$. Теорема 7 доказана.

Замечание 5. Ситуация, описанная в пп. а) и б) доказательства теоремы 7, исключительна в том смысле, что именно на ней реализуется минимум верхних (даже точных) шаровых функционалов колеблемости и вращаемости, равный нулю. Однако при каждом $x_0 \in S_*$ эта же ситуация для аналогичных радиальных функционалов оказывается, напротив, полностью критической, а все некритические ситуации порождают для соответствующих радиальных показателей точное значение единица, превышающее нулевое значение для шаровых показателей. В результате возникает парадоксальное явление, когда верхний шаровой показатель меньше радиального.

Автор благодарен В.В. Быкову за ценные замечания и внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

2. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
3. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 171–183.
4. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
5. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31.
6. *Бурлаков Д.С., Цой С.В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.
7. *Быков В.В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425.
8. *Горицкий А.Ю., Фисенко Т.Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 479–486.
9. *Кожушкин В.И.* Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1406–1407.
10. *Лысак М.Д.* Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2015. Т. 46. Вып. 2. С. 106–111.
11. *Миценко В.В.* О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 851–852.
12. *Смоленцев М.В.* Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1571–1572.
13. *Сташ А.Х., Аллахвердян А.А., Артисевич А.Е., Лобода Н.А.* О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера // Динамические системы. 2020. Т. 10. Вып. 38. № 2. С. 216–224.
14. *Шильяничиков Е.М.* Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Мат. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 149–164.
15. *Сергеев И.Н.* Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46.
16. *Сергеев И.Н.* Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840.
17. *Сергеев И.Н.* Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562.
18. *Сергеев И.Н.* Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861.
19. *Сергеев И.Н.* Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.
20. *Сергеев И.Н.* О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 6. С. 856–858.
21. *Сергеев И.Н.* Определение полных блуждаемости и неблуждаемости дифференциальной системы и их исследование по первому приближению // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1577–1578.
22. *Сергеев И.Н.* Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361.
23. *Сергеев И.Н.* Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348.
24. *Сергеев И.Н.* Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138.
25. *Сергеев И.Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 732–751.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.
После доработки 25.01.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗЛИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ

© 2023 г. А. В. Васильев, В. Б. Васильев

Рассмотрены модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение и простейшие краевые задачи в квадранте в пространстве Соболева–Слободецкого различного порядка гладкости по переменным. В случае специального представления символа описано общее решение уравнения и рассмотрена простейшая краевая задача с условиями Дирихле и Неймана на сторонах угла. Указанная краевая задача сведена к системе интегральных уравнений, которая при дополнительных предположениях о структуре символа может быть сведена и к системе разностных уравнений первого порядка.

DOI: 10.31857/S0374064123060043, EDN: FFPYOH

Введение. Теория краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений берет начало с середины 60-х гг. прошлого столетия, а именно с работ М.И. Вишика и Г.И. Эскина, результаты которых обобщены в монографии [1]. Полученные результаты привлекли внимание и получили дальнейшее развитие в работах ряда исследователей (см., например, [2, 3]). Второй автор данной статьи также проявил интерес к этой теме, предложив свой подход к построению теории краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в областях, имеющих на границе конические точки и ребра различных размерностей (см. [4, 5] и продолжение в работах [6–10]).

Все исследования проводились в обычных пространствах Соболева–Слободецкого, однако возможны пространства различного порядка гладкости по переменным [11–13]. Здесь мы рассматриваем простейший случай пространств Соболева–Слободецкого различного порядка гладкости по переменным и описываем сведение краевой задачи к системе интегральных уравнений.

1. Эллиптические уравнения. В этом пункте приведём некоторые определения и результаты, на которые будем опираться далее.

1.1. Пространства Соболева–Слободецкого различной гладкости. Следуя [14] (см. также [11]), введём удобные обозначения. Многомерное евклидово пространство \mathbb{R}^M представим в виде ортогональной суммы подпространств, в которых только некоторые из координат x_1, x_2, \dots, x_M отличны от нуля. Более точно, если $K \subset \{1, \dots, M\}$ – непустое множество, то полагаем

$$\mathbb{R}^K = \{x \in \mathbb{R}^M : x = (x_1, \dots, x_M), \quad x_j = 0 \text{ для любого } j \notin K\} \subset \mathbb{R}^M.$$

Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n \subset \{1, 2, \dots, M\}$ – некоторые подмножества, так что

$$\bigcup_{j=1}^n K_j = \{1, 2, \dots, M\}, \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Тогда имеем представление

$$\mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{K_1} \oplus \mathbb{R}^{K_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{K_n},$$

обозначая через x_{K_j} элемент пространства \mathbb{R}^{K_j} .

Для функций, определённых в пространстве \mathbb{R}^M , используем стандартное преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^M} u(x) e^{ix \cdot \xi} dx, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M).$$

Теперь определим пространство Соболева–Слободецкого $H^S(\mathbb{R}^M)$, для упрощения обозначив $S = (s_1, \dots, s_n)$ как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^M} f(x) \overline{g(x)} dx$$

и нормой

$$\|f\|_S = \left(\int_{\mathbb{R}^M} (1 + |\xi_{K_1}|)^{2s_1} (1 + |\xi_{K_2}|)^{2s_2} \dots (1 + |\xi_{K_n}|)^{2s_n} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Такие H^S -пространства обладают стандартным набором свойств пространств Соболева–Слободецкого [11]. В частности, пространство $H^s(\mathbb{R}^M)$ получается при следующей подборке подмножеств K_j и параметров s_j :

$$K_1 = K_2 = \dots = K_{n-1} = \emptyset, \quad K_n = \{1, 2, \dots, M\}, \quad S = (0, 0, \dots, 0, s).$$

1.2. Модельное уравнение и разрешимость. В соответствии с локальным принципом сконцентрируем внимание на исследовании модельного псевдодифференциального уравнения с оператором, символ которого не зависит от пространственной переменной. Подробные доказательства приводимых здесь результатов содержатся в работе [15].

Псевдодифференциальный оператор A определяется формулой

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^M} \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} e^{i(x-y) \cdot \xi} \tilde{A}(\xi) u(y) dy d\xi,$$

в которой заданная измеримая функция $\tilde{A}(\xi)$ называется *символом оператора* A .

Предположим, что символ $\tilde{A}(\xi)$ удовлетворяет условию

$$c_1 \prod_{j=1}^n (1 + |\xi_{K_j}|)^{\alpha_j} \leq |A(\xi)| \leq c_2 \prod_{j=1}^n (1 + |\xi_{K_j}|)^{\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

с положительными постоянными c_1 и c_2 .

Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Лемма 1. Пусть A – псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{A}(\xi)$, удовлетворяющим условию (1). Тогда $A : H^S(\mathbb{R}^M) \rightarrow H^{S-\alpha}(\mathbb{R}^M)$ является линейным непрерывным оператором.

Простым следствием этой леммы является следующий факт. Если A – псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{A}(\xi)$, удовлетворяющим условию (1), то уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^M, \quad (2)$$

с произвольной правой частью $v \in H^{S-\alpha}(\mathbb{R}^M)$ имеет единственное решение $u \in H^S(\mathbb{R}^M)$ и справедлива априорная оценка

$$\|u\|_S \leq \text{const} \|v\|_{S-\alpha}.$$

Отметим, что если рассматривать уравнение (2) не во всем пространстве \mathbb{R}^M , а в другой канонической области (тоже конусе), то такое простое следствие не имеет места. Здесь нас, как

и прежде [6–10, 16–23], будет интересовать случай выпуклого конуса, не содержащего целой прямой.

Пусть $C_{K_j} \subset \mathbb{R}^{K_j}$ – выпуклый конус, не содержащий целой прямой. Положим

$$C = C_{K_1} \times C_{K_2} \times \dots \times C_{K_n}.$$

Очевидно, что C – выпуклый конус в пространстве \mathbb{R}^M .

Теперь исследуем вопрос разрешимости в пространстве $H^S(C)$ уравнения

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C. \tag{3}$$

Приведём ниже определения и результаты, касающиеся разрешимости уравнения (3).

Определение 1. Пространство $H^S(C)$ состоит из (обобщённых) функций из $H^S(\mathbb{R}^M)$, носители которых содержатся в \bar{C} .

Обозначим через $\tilde{H}^S(C)$ фурье-образ пространства $H^S(C)$.

Определение 2. Радиальной трубчатой областью над конусом C называется область в многомерном комплексном пространстве \mathbb{C}^M следующего вида:

$$T(C) \equiv \{z \in \mathbb{C}^M : z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^M, \quad y \in C\}.$$

Сопряжённым конусом C^* называется такой конус, для всех точек x которого выполняется условие

$$x \cdot y > 0 \quad \text{при всех } y \in C,$$

$x \cdot y$ обозначает скалярное произведение x и y .

Определение 3. Волновой факторизацией эллиптического символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно конуса C называется его представление в виде

$$\tilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где множители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^M$, исключая, возможно, точки $\xi \in \partial C^*$;
- 2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области

$T(C^*)$, $T(-C^*)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leq c_1 \prod_{j=1}^n (1 + |\xi_{K_j}| + |\tau_{K_j}|)^{\pm \varkappa_j},$$

$$|A_{=}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leq c_2 \prod_{j=1}^n (1 + |\xi_{K_j}| + |\tau_{K_j}|)^{\pm(\alpha_j - \varkappa_j)} \quad \text{для любого } \tau \in C^*, \quad \varkappa_j \in \mathbb{R}.$$

Вектор $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$ называется индексом волновой факторизации.

Замечание 1. Следует отметить, что определение 3 должно быть модифицировано, если какой-то конус C_{K_j} содержит целую прямую, точнее, имеет вид $\mathbb{R}^{m_j} \times C_{k_j - m_j}$, где $C_{k_j - m_j}$, $0 \leq m_j \leq k_j$, – выпуклый конус в $(k_j - m_j)$ -мерном пространстве, не содержащем целой прямой. Напомним, что по определению при $m_j = 0$ полагаем $\mathbb{R}^0 \times C_{k_j} \equiv C_{K_j}$, при $m_j = k_j$ соответственно $\mathbb{R}^{k_j} \times C_0 \equiv \mathbb{R}^{K_j}$. Обозначив $\sum_{j=1}^n m_j = Q$, можно определить Q -волновую факторизацию, где точки Q -мерного пространства $\mathbb{R}^Q = \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n}$ будут играть роль параметров (см. [4]). Тогда определение 3 соответствует 0-волновой факторизации.

Теорема 1. Если символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C с индексом \varkappa таким, что $|\varkappa_j - s_j| < 1/2$, $j = \overline{1, n}$, то уравнение (3) в пространстве $H^S(C)$ имеет только нулевое решение.

Предполагаем, что для каждого конуса C_{K_j} , $j = \overline{1, n}$, уравнение его поверхности записывается как $x_{k_j} = \varphi_j(x'_{K_j})$, где $\varphi_j : \mathbb{R}^{k_j-1} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция на множестве $\mathbb{R}^{k_j-1} \setminus \{0\}$, $\varphi_j(0) = 0$, $x_{K_j} = (x'_{K_j}, x_{k_j})$.

Используя замену переменных

$$t'_{K_j} = x'_{K_j}, \quad t_{k_j} = x_{k_j} - \varphi_j(x'_{K_j}),$$

определим оператор $T_{\varphi_j} : \mathbb{R}^{K_j} \rightarrow \mathbb{R}^{K_j}$ как оператор приведённой выше замены переменных, при этом конус C_{K_j} преобразуется в верхнее полупространство $\mathbb{R}_+^{K_j} = \{x \in \mathbb{R}^{K_j} : x_{K_j} = (x'_{K_j}, x_{k_j}), x_{k_j} > 0\}$.

Замечание 2. Разумеется, эта замена переменных нужна только в многомерном случае ($m \geq 2$), в одномерном случае имеется только один конус – луч, граница которого представляет собой точку.

В рассуждениях ниже будем пользоваться обозначением F_m для преобразования Фурье в m -мерном пространстве, следовательно, F_{K_j} обозначает преобразование Фурье в пространстве \mathbb{R}^{K_j} .

Согласно результатам статьи [8] имеют место соотношения $F_{K_j} T_{\varphi_j} = V_{\varphi_j} F_{K_j}$.

Далее введём оператор $T_\varphi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ по формуле $T_\varphi = \prod_{j=1}^n T_{\varphi_j}$ и получим оператор $V_\varphi = \prod_{j=1}^n V_{\varphi_j}$, для которого справедливо тождество $F_M T_\varphi = V_\varphi F_M$. Введём также векторы $N = (n_1, \dots, n_n)$, $L = (l_1, \dots, l_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $n_j, l_j \in \mathbb{N}$, $|\delta_j| < 1/2$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 2. Если символ $\hat{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C с индексом \varkappa таким, что $\varkappa - S = N + \varepsilon$, то общее решение уравнения (3) в образах Фурье имеет следующий вид:

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) V_\varphi^{-1} \left(\sum_{l_1=1}^{n_1} \sum_{l_2=1}^{n_2} \dots \sum_{l_n=1}^{n_n} \tilde{c}_L(\xi'_K) \xi_{k_1}^{l_1-1} \xi_{k_2}^{l_2-1} \dots \xi_{k_n}^{l_n-1} \right), \tag{4}$$

где $c_L(x'_K) \in H^{S_L}(\mathbb{R}^{M-n})$ – произвольные функции,

$$S_L = (s_1 - \varkappa_1 + l_1 - 1/2, \dots, s_n - \varkappa_n + l_n - 1/2), \quad l_j = \overline{1, n_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u\|_S \leq \text{const} \sum_{l_1=1}^{n_1} \sum_{l_2=1}^{n_2} \dots \sum_{l_n=1}^{n_n} \|c_L\|_{S_L}.$$

2. Краевые задачи. В этом пункте рассмотрим некоторые простые постановки краевых задач, связанных с теоремой 2, которая устанавливает множественность возможных решений уравнения (3). Чтобы выделить единственное решение, нужны дополнительные условия. Начнём со случая двумерного конуса. Присутствие в формуле (4) оператора V_φ сильно затрудняет постановку и исследование краевых задач, однако двумерный случай – редкое исключение, где можно обойтись без такого оператора. Это было продемонстрировано в монографии [4], а сравнение двух вариантов представлено в [7].

2.1. Плоский угол и общее решение. Для случая плоского угла возможна только одна ситуация с различной гладкостью по переменным, а именно по одной переменной имеется гладкость порядка s_1 , по другой – s_2 . Наш конус C имеет вид прямого произведения двух лучей, можно считать его первым квадрантом. Предполагается, что символ $\hat{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C с индексом $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$ таким, что $\varkappa_j - s_j = n_j + \varepsilon_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon_j| < 1/2$, $j = 1, 2$. Покажем как в этом случае выглядит формула общего решения (4).

Положим

$$u_-(x) = -(Au)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

В силу равенства (3) $u_-(x) = 0, \quad x \in C$. Запишем уравнение (3) в виде

$$(Au)(x) + u_-(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

применим к нему преобразование Фурье:

$$\tilde{A}(\xi)\tilde{u}(\xi) + \tilde{u}_-(\xi) = 0,$$

и после волновой факторизации символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно C получим равенство

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi) = -A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi).$$

По лемме 1

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi), A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi) \in \tilde{H}^{S-\varkappa}(\mathbb{R}^2),$$

но более точные включения следующие (см. детали в [4]):

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi) \in \tilde{H}^{S-\varkappa}(C), \quad A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi) \in \tilde{H}^{S-\varkappa}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}). \tag{5}$$

Из включений (5) сразу следует, что обратным преобразованием Фурье этих (обобщённых) функций в силу их равенства может быть только функция, сосредоточенная на границе квадранта. Учитывая структуру таких функций [24], можем записать

$$F^{-1}(A_{\neq}(\xi)\tilde{u}(\xi)) = \sum_{k=1}^{r_1} c_k(x_1)\delta^{k-1}(x_2) + \sum_{k=1}^{r_2} d_k(x_2)\delta^{k-1}(x_1)$$

или

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) \left(\sum_{k=1}^{r_1} \tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1} + \sum_{k=1}^{r_2} \tilde{d}_k(\xi_2)\xi_1^{k-1} \right).$$

Осталось уточнить количество слагаемых в суммах и показатель s_k пространства $H^{s_k}(\mathbb{R})$, в которое входят функции c_k, d_k .

Выделим одно слагаемое, например $A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1}$, и оценим его:

$$\begin{aligned} \|A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1}\|_S^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |A_{\neq}^{-1}(\xi)|^2 |\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 |\xi_2|^{2(k-1)} (1 + |\xi_1|)^{2s_1} (1 + |\xi_2|)^{2s_2} d\xi \leq \\ &\leq \text{const} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 (1 + |\xi_1|)^{2(s_1-\varkappa_1)} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi_2|)^{2(s_2-\varkappa_2+k-1)} d\xi_2. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi_2|)^{2(s_2-\varkappa_2+k-1)} d\xi_2$$

будет сходящимся при условии $2(s_2 - \varkappa_2 + k - 1) < -1$ или $-n_2 - \varepsilon_2 + k < 1/2$. Последнее неравенство справедливо при $k = \overline{1, n_2}$. Таким образом, если $\tilde{c}_k \in \tilde{H}^{-n_1-\varepsilon_1}(\mathbb{R})$, то получаем представление

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) \left(\sum_{k=1}^{n_2} \tilde{c}_k(\xi_1)\xi_2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{d}_k(\xi_2)\xi_1^{k-1} \right)$$

и оценку для решения

$$\|u\|_S \leq \text{const} \left(\sum_{k=1}^{n_2} [c_k]_{-n_1-\delta_1} + \sum_{k=1}^{n_1} [d_k]_{-n_2-\delta_2} \right),$$

здесь и далее $[\cdot]_s$ обозначает обычную H^s -норму на прямой.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть C – первый квадрант на плоскости и символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию с индексом $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$ таким, что $\varkappa_j - s_j = n_j + \varepsilon_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon_j| < 1/2$, $j = 1, 2$. Тогда общее решение уравнения (3) в пространстве $H^S(C)$, $S = (s_1, s_2)$, имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) \left(\sum_{k=1}^{n_2} \tilde{c}_k(\xi_1) \xi_2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{d}_k(\xi_2) \xi_1^{k-1} \right).$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u\|_S \leq \text{const} \left(\sum_{k=1}^{n_2} [c_k]_{-n_1-\delta_1} + \sum_{k=1}^{n_1} [d_k]_{-n_2-\delta_2} \right).$$

2.2. Граничные условия Дирихле и Неймана и интегральные уравнения.

Рассмотрим один частный случай, когда можно ограничиться классическими условиями Дирихле и Неймана для определения произвольных функций, входящих в структуру общего решения.

Пусть $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Согласно теореме 3 общее решение уравнения имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) (c_1(\xi_1) + c_2(\xi_1)\xi_2 + d_1(\xi_2))$$

и содержит три произвольные функции c_1 , c_2 , d_1 , которые предстоит однозначно определить для получения единственного решения. На сторонах угла зададим граничные условия следующего вида:

$$u|_{x_2=0} = f(x_1), \quad \left(-i \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = g(x_1), \quad u|_{x_1=0} = h(x_2). \tag{6}$$

В образах Фурье условия (6) имеют вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 = \tilde{f}(\xi_1), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}(\xi_1), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \tilde{h}(\xi_2).$$

Подставив их в формулу общего решения, получим следующую систему линейных интегральных уравнений относительно трёх неизвестных функций c_1 , c_2 и d_1 :

$$\begin{aligned} a_1(\xi_1)c_1(\xi_1) + b_1(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 &= \tilde{f}(\xi_1), \\ b_1(\xi_1)c_1(\xi_1) + p_1(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 &= \tilde{g}(\xi_1), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) c_1(\xi_1) d\xi_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) c_2(\xi_1) d\xi_1 + p_2(\xi_2) d_1(\xi_2) &= \tilde{h}(\xi_2), \end{aligned} \tag{7}$$

где введены обозначения

$$a_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2, \quad b_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2 A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2,$$

$$p_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_2^2 A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2, \quad p_2(\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Пусть $s_1 > 1/2$, $s_2 > 3/2$ и символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C с индексом \varkappa таким, что $\varkappa_1 - s_1 = 1 + \varepsilon_1$, $|\delta_1| < 1/2$, $\varkappa_2 - s_2 = 2 + \varepsilon_2$, $|\delta_2| < 1/2$. Тогда краевая задача (3), (6) однозначно разрешима в пространстве $H^S(C)$, если система интегральных уравнений (7) имеет единственное решение c_1 , c_2 и d_1 .

2.3. Интегральные и разностные уравнения. Система интегральных уравнений (7), полученная в предыдущем пункте, не проста, и трудно предложить какой-либо приемлемый метод для её решения. Однако если ввести некоторые дополнительные предположения относительно символа $\tilde{A}(\xi)$, то эту систему можно редуцировать к системе разностных уравнений первого порядка. Опишем эту возможность.

Предположим, что множитель $A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)$ является положительно однородной функцией разного порядка по переменным ξ_1, ξ_2 , именно, по первой переменной порядка \varkappa_1 , а по второй – \varkappa_2 , при всех $t > 0$, $A_{\neq}(t\xi_1, t\xi_2) = t^{\varkappa_1 + \varkappa_2} A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)$.

В этом случае нетрудно убедиться в справедливости следующего свойства однородности.

Лемма 2. Функции a_1, b_1, p_1, p_2 обладают следующим свойством однородности для всех $t > 0$:

$$a_1(t\xi_1) = t^{1-\varkappa_1-\varkappa_2} a_1(\xi_1), \quad b_1(t\xi_1) = t^{2-\varkappa_1-\varkappa_2} b_1(\xi_1),$$

$$p_1(t\xi_1) = t^{3-\varkappa_1-\varkappa_2} p_1(\xi_1), \quad p_2(t\xi_2) = t^{1-\varkappa_1-\varkappa_2} p_2(\xi_2).$$

Систему (7) можно записать в следующем виде:

$$c_1(\xi_1) + r(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{F}(\xi_1),$$

$$c_1(\xi_1) + q(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{G}(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi_1, \xi_2)c_1(\xi_1) d\xi_1 + \xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi_1, \xi_2)c_2(\xi_1) d\xi_1 + d_1(\xi_2) = \tilde{H}(\xi_2), \tag{8}$$

где введены обозначения

$$b_1(\xi_1)a_1^{-1}(\xi_1) = r(\xi_1), \quad p_1(\xi_1)b_1^{-1}(\xi_1) = q(\xi_1), \quad a_1^{-1}(\xi_1)A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) \equiv K(\xi_1, \xi_2),$$

$$\xi_2 b_1^{-1}(\xi_1)A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) = L(\xi_1, \xi_2), \quad p_2^{-1}(\xi_2)A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1, \xi_2), \quad \tilde{f}(\xi_1)a_1^{-1}(\xi_1) = \tilde{F}(\xi_1),$$

$$\tilde{g}(\xi_1)b_1^{-1}(\xi_1) = \tilde{G}(\xi_1), \quad \tilde{h}(\xi_2)p_2^{-1}(\xi_2) = \tilde{H}(\xi_2).$$

Лемма 3. Функции r, q положительно однородны первой степени, ядра K, L, M положительно однородны степени -1 .

Доказательство. Для функций r , q утверждение очевидно, и, следовательно, они имеют вид

$$r(t) = \begin{cases} r_1 t, & t > 0, \\ r_2 t, & t < 0, \end{cases} \quad q(t) = \begin{cases} q_1 t, & t > 0, \\ q_2 t, & t < 0, \end{cases}$$

где $r_1, r_2, q_1, q_2 \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим, например, ядро $M(\xi_1, \xi_2)$. Проверяем

$$M(t\xi_1, t\xi_2) = p_2^{-1}(t\xi_2)A_{\neq}^{-1}(t\xi_1, t\xi_2) = t^{\kappa_1 + \kappa_2 - 1} p_2(\xi_2) t^{-\kappa_1 - \kappa_2} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2),$$

что и утверждалось. Лемма доказана.

Далее запишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} c_1(\xi_1) + r(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_0^{+\infty} K(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 + \int_{-\infty}^0 K(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 &= \tilde{F}(\xi_1), \\ c_1(\xi_1) + q(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_0^{+\infty} L(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 + \int_{-\infty}^0 L(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 &= \tilde{G}(\xi_1), \\ \int_0^{+\infty} M(\xi_1, \xi_2)c_1(\xi_1) d\xi_1 + \int_{-\infty}^0 M(\xi_1, \xi_2)c_1(\xi_1) d\xi_1 + \xi_2 \int_0^{+\infty} M(\xi_1, \xi_2)c_2(\xi_1) d\xi_1 + \\ + \xi_2 \int_{-\infty}^0 M(\xi_1, \xi_2)c_2(\xi_1) d\xi_1 + d_1(\xi_2) &= \tilde{H}(\xi_2). \end{aligned}$$

Заменяя в интегралах по отрицательной полуоси переменную интегрирования на переменную с противоположным знаком, получим новую систему с интегралами по положительной полуоси:

$$\begin{aligned} c_1(\xi_1) + r(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_0^{+\infty} K(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 + \int_0^{+\infty} K(\xi_1, -\xi_2) d_1(-\xi_2) d\xi_2 &= \tilde{F}(\xi_1), \\ c_1(\xi_1) + q(\xi_1)c_2(\xi_1) + \int_0^{+\infty} L(\xi_1, \xi_2) d_1(\xi_2) d\xi_2 + \int_0^{+\infty} L(\xi_1, -\xi_2) d_1(-\xi_2) d\xi_2 &= \tilde{G}(\xi_1), \\ \int_0^{+\infty} M(\xi_1, \xi_2)c_1(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^{+\infty} M(-\xi_1, \xi_2)c_1(-\xi_1) d\xi_1 + \xi_2 \int_0^{+\infty} M(\xi_1, \xi_2)c_2(\xi_1) d\xi_1 + \\ + \xi_2 \int_0^{+\infty} M(-\xi_1, \xi_2)c_2(-\xi_1) d\xi_1 + d_1(\xi_2) &= \tilde{H}(\xi_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь преобразуем эту систему, увеличив число неизвестных и сделав все входящие функции и ядра определёнными только для положительных значений аргументов. Введём следующие обозначения для $\xi_1, \xi_2 > 0$:

$$c_{11}(\xi_1) = c_1(\xi_1), \quad c_{12}(\xi_1) = c_1(-\xi_1), \quad c_{21}(\xi_1) = c_2(\xi_1), \quad c_{22}(\xi_1) = c_2(-\xi_1),$$

$$d_{11}(\xi_2) = d_1(\xi_2), \quad d_{12}(\xi_2) = d_1(-\xi_2), \quad F_1(\xi_1) = \tilde{F}(\xi_1), \quad F_2(\xi_1) = \tilde{F}(-\xi_1),$$

$$G_1(\xi_1) = \tilde{G}(\xi_1), \quad G_2(\xi_1) = \tilde{G}(-\xi_1), \quad H_1(\xi_2) = \tilde{H}(\xi_2), \quad H_2(\xi_2) = \tilde{H}(-\xi_2).$$

По ядрам K , L , M определим новые ядра для положительных значений аргументов:

$$K_{11}(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_1, \xi_2), \quad K_{12}(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_1, -\xi_2),$$

$$K_{21}(\xi_1, \xi_2) = K(-\xi_1, \xi_2), \quad K_{22}(\xi_1, \xi_2) = K(-\xi_1, -\xi_2),$$

аналогично определяются $L_{ij}(\xi_1, \xi_2)$, $M_{ij}(\xi_1, \xi_2)$, $i, j = 1, 2$.

Система (9) примет вид 6×6 -системы линейных интегральных уравнений на положительной полуоси

$$c_{11}(\xi_1) + r_1 \xi_1 c_{21}(\xi_1) + \int_0^{+\infty} K_{11}(\xi_1, \xi_2) d_{11}(\xi_2) d\xi_2 + \int_0^{+\infty} K_{12}(\xi_1, \xi_2) d_{12}(\xi_2) d\xi_2 = F_1(\xi_1),$$

$$c_{11}(\xi_1) + q_1 \xi_1 c_{21}(\xi_1) + \int_0^{+\infty} L_{11}(\xi_1, \xi_2) d_{11}(\xi_2) d\xi_2 + \int_0^{+\infty} L_{12}(\xi_1, \xi_2) d_{12}(\xi_2) d\xi_2 = G_1(\xi_1),$$

$$\int_0^{+\infty} M_{11}(\xi_1, \xi_2) c_{11}(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^{+\infty} M_{21}(\xi_1, \xi_2) c_{12}(\xi_1) d\xi_1 + \xi_2 \int_0^{+\infty} M_{11}(\xi_1, \xi_2) c_{21}(\xi_1) d\xi_1 +$$

$$+ \xi_2 \int_0^{+\infty} M_{21}(\xi_1, \xi_2) c_{22}(\xi_1) d\xi_1 + d_{11}(\xi_2) = H_1(\xi_2),$$

$$c_{12}(\xi_1) + r_2 \xi_1 c_{22}(\xi_1) + \int_0^{+\infty} K_{21}(\xi_1, \xi_2) d_{11}(\xi_2) d\xi_2 + \int_0^{+\infty} K_{22}(\xi_1, \xi_2) d_{12}(\xi_2) d\xi_2 = F_2(\xi_1),$$

$$c_{12}(\xi_1) + q_2 \xi_1 c_{22}(\xi_1) + \int_0^{+\infty} L_{21}(\xi_1, \xi_2) d_{11}(\xi_2) d\xi_2 + \int_0^{+\infty} L_{22}(\xi_1, \xi_2) d_{12}(\xi_2) d\xi_2 = G_2(\xi_1),$$

$$\int_0^{+\infty} M_{12}(\xi_1, \xi_2) c_{11}(\xi_1) d\xi_1 + \int_0^{+\infty} M_{22}(\xi_1, \xi_2) c_{12}(\xi_1) d\xi_1 + \xi_2 \int_0^{+\infty} M_{12}(\xi_1, \xi_2) c_{21}(\xi_1) d\xi_1 +$$

$$+ \xi_2 \int_0^{+\infty} M_{22}(\xi_1, \xi_2) c_{22}(\xi_1) d\xi_1 + d_{12}(\xi_2) = H_2(\xi_2).$$

К этой системе можно применить преобразование Меллина [25]

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{\lambda-1} dt, \quad \lambda = s + i\sigma,$$

в результате чего получим с учётом свойства преобразования Меллина

$$\widehat{tf(t)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda + 1)$$

следующую систему разностных уравнений первого порядка:

$$\hat{c}_{11}(\lambda) + r_1 \hat{c}_{21}(\lambda + 1) + \hat{K}_{11}(\lambda) \hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{K}_{12}(\lambda) \hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{F}_1(\lambda),$$

$$\hat{c}_{12}(\lambda) + r_2 \hat{c}_{22}(\lambda + 1) + \hat{K}_{21}(\lambda) \hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{K}_{22}(\lambda) \hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{F}_2(\lambda),$$

$$\hat{c}_{11}(\lambda) + q_1 \hat{c}_{21}(\lambda + 1) + \hat{L}_{11}(\lambda) \hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{L}_{12}(\lambda) \hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{G}_1(\lambda),$$

$$\hat{c}_{12}(\lambda) + q_2 \hat{c}_{22}(\lambda + 1) + \hat{L}_{21}(\lambda) \hat{d}_{11}(\lambda) + \hat{L}_{22}(\lambda) \hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{G}_2(\lambda),$$

$$\hat{M}_{11}(\lambda) \hat{c}_{11}(\lambda) + \hat{M}_{21}(\lambda) \hat{c}_{12}(\lambda) + \hat{M}_{11}(\lambda + 1) \hat{c}_{21}(\lambda + 1) + \hat{M}_{21}(\lambda + 1) \hat{c}_{22}(\lambda + 1) + \hat{d}_{11}(\lambda) = \hat{H}_1(\lambda),$$

$$\hat{M}_{12}(\lambda) \hat{c}_{11}(\lambda) + \hat{M}_{22}(\lambda) \hat{c}_{12}(\lambda) + \hat{M}_{12}(\lambda + 1) \hat{c}_{21}(\lambda + 1) + \hat{M}_{22}(\lambda + 1) \hat{c}_{22}(\lambda + 1) + \hat{d}_{12}(\lambda) = \hat{H}_2(\lambda), \quad (10)$$

где под $\hat{K}_{ij}(\lambda)$, $\hat{L}_{ij}(\lambda)$ понимается преобразование Меллина функций $K_{ij}(t, 1)$, $L_{ij}(t, 1)$, а под $\hat{M}_{ij}(\lambda)$ – преобразование Меллина функций $M_{ij}(1, t)$, $i, j = 1, 2$.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Если функция обладает свойством обобщённой положительной однородности, т.е.

$$A_{\neq}(t\xi_1, t\xi_2) = t^{\alpha_1 + \alpha_2} A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)$$

при всех $t > 0$, то система интегральных уравнений (7) может быть сведена к 6×6 -системе разностных уравнений первого порядка (10).

Заключение. Описан простейший вариант краевой задачи в пространстве Соболева–Слободецкого с различной гладкостью по переменным. К сожалению, формула общего решения в многомерном случае слишком громоздка, чтобы записать и исследовать общую краевую задачу, однако в ряде случаев можно получить содержательные результаты. Авторы предполагают продолжать работу в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., 1973.
2. Ремпель Ш., Шульце Б.-В. Теория индекса краевых задач. М., 1986.
3. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Краевые задачи в областях с кусочно гладкой границей. М., 1991.
4. Vasil'ev V.B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-smooth Domains. Dordrecht; Boston; London, 2000.
5. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М., 2010.
6. Vasilyev V.B. On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2014. V. 9. № 2. P. 227–237.
7. Vasilyev V.B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.
8. Vasilyev V.B. Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. P. 9252–9263.
9. Васильев В.Б. Псевдодифференциальные уравнения в конусах с точками сопряжения на границе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 9. С. 1123–1135.
10. Vasilyev V.B. On some distributions associated to boundary value problems // Complex Var. Ell. Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 888–898.
11. Волевич Л.Р., Гундикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. М., 1994.
12. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
13. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М., 1986.
14. Nagel A., Ricci F., Stein E.M., Wainger S. Algebras of singular integral operators with kernels controlled by multiple norms // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2018. V. 256. № 1230.
15. Vasilyev V., Polunin V., Shmal I. On some solvability theorems for pseudo-differential equations // arXiv:2302.10054 [math.AP].

16. *Vasilyev V.B.* On the Dirichlet and Neumann problems in multi-dimensional cone // *Math. Bohem.* 2014. V. 139, № 2. P. 333–340.
17. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators on manifolds with a singular boundary // *Modern Problems in Applied Analysis* / Eds. P. Drygas, S. Rogosin. Cham, 2018. P. 169–179.
18. *Vasilyev V.B.* Asymptotical analysis of singularities for pseudo differential equations in canonical non-smooth domains // *Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects* / Eds. C. Constanda, P.J. Harris. Boston, 2011. P. 379–390.
19. *Vasilyev V.B.* On the asymptotic expansion of certain plane singular integral operators // *Bound. Value Probl.* 2017. V. 116. P. 1–13.
20. *Васильев В.Б.* Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2016. Т. 13. С. 1129–1149.
21. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе // *Сиб. журн. чистой и прикл. математики.* 2016. № 3. С. 3–14.
22. *Васильев В.Б.* Модельные эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях // *Тр. сем. им. И.Г. Петровского.* 2016. Т. 31. С. 22–37.
23. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения, сингулярные интегралы и распределения // *Прикл. математика и мат. физика.* 2015. Т. 1. № 1. С. 3–16.
24. *Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
25. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.

Белгородский государственный
национальный исследовательский университет

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.
После доработки 23.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2023 г. А. М. Денисов

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного начального условия по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Доказывается, что на основе использования разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру ε можно получить приближённые решения, аппроксимирующие решение обратной задачи с порядком $O(\varepsilon)$ или $O(\varepsilon^2)$.

DOI: 10.31857/S0374064123060055, EDN: FFQKXU

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных

$$\varepsilon \nu u_x(x, t) + u_t(x, t) + a_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \gamma u(x, t) - a(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5)$$

где $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T\}$, ε , ν , γ – положительные постоянные, ε – малый параметр, $\varepsilon < 1$.

Задачу (1)–(5) можно интерпретировать как математическую модель динамики сорбции [1, с. 174; 2, с. 5], когда эффекты процессов переноса и диффузии малы по сравнению с поглощением. Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(5) от параметра ε , далее будем обозначать его $u(x, t; \varepsilon)$, $a(x, t; \varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть постоянные ε , ν , γ заданы, а функция $\psi(x)$ неизвестна. Требуется определить $\psi(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(5)

$$u(x, T; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (6)$$

где $g(x; \varepsilon)$ – заданная функция.

Дадим определение решения обратной задачи. Так как при неизвестной $\psi(x)$ функции $u(x, t; \varepsilon)$, $a(x, t; \varepsilon)$ также неизвестны, то решением обратной задачи будем считать тройку функций $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$.

Определение. Функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ называются *решением обратной задачи*, если $\psi \in C[0, \pi]$, $u \in C^{2,1}(Q_T)$, $a, a_t \in C(Q_T)$ и $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3)–(6).

При выполнении ряда условий можно получить разложение функции $u(x, t; \varepsilon)$ по малому параметру ε . Цель данной работы состоит в использовании этого разложения для построения функций, аппроксимирующих неизвестную функцию $\psi(x)$ при малых ε . Подобный подход применялся для приближённого решения некоторых обратных задач в статьях [3, 4]. Другим аспектам исследования обратных задач для сингулярно возмущённых уравнений в частных производных посвящены работы [5–14].

Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon)(\gamma + 1)(1 - \exp(-(\gamma + 1)T))^{-1}. \tag{7}$$

Докажем, что при выполнении определённых условий она аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 1. Если функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи и $\psi \in C^3[0, \pi]$,

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \quad \psi''(0) - \nu\psi'(0) = \psi''(\pi) - \nu\psi'(\pi) = 0, \tag{8}$$

то

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_0(x; \varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon, \tag{9}$$

где c_1 – постоянная, не зависящая от x и ε .

Далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от x , t и ε .

Доказательство. Пусть функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи. Проинтегрировав уравнение (2) с начальным условием (5), имеем

$$a(x, t; \varepsilon) = \psi(x)e^{-t} + \gamma \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(x, \tau; \varepsilon) d\tau.$$

Из этого представления и уравнений (1), (2) следует, что $u(x, t; \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon \nu u_x + u_t + \gamma u - \psi(x)e^{-t} - \gamma \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(x, \tau; \varepsilon) d\tau = \varepsilon u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T. \tag{10}$$

Применив метод разделения переменных, получим представление

$$u(x, t; \varepsilon) = e^{\nu x/2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t; \varepsilon) \sin(nx), \tag{11}$$

справедливое для функции $u(x, t; \varepsilon)$, удовлетворяющей уравнению (10) и условиям (3), (4). Здесь функции $T_n(t; \varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$T'_n + \gamma T_n - \bar{\psi}_n e^{-t} - \gamma \int_0^t e^{-(t-\tau)} T_n(\tau; \varepsilon) d\tau = -\varepsilon(n^2 + \nu^2/4)T_n, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{12}$$

$$T_n(0; \varepsilon) = 0, \tag{13}$$

а

$$\bar{\psi}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\nu x/2} \psi(x) \sin(nx) dx.$$

С учётом условий (8) имеем

$$\bar{\psi}_n = -\frac{2}{\pi n^3} \int_0^{\pi} \alpha(x) \cos(nx) dx, \tag{14}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{d}{dx} (e^{-\nu x/2} [\psi''(x) - \nu\psi'(x) + \nu^2\psi(x)/4]).$$

Рассмотрим функции $\tilde{T}_{n0}(t)$, являющиеся решениями задачи Коши

$$\tilde{T}_{n0}'' + (\gamma - 1)\tilde{T}_{n0}' - \gamma\tilde{T}_{n0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{15}$$

$$\tilde{T}_{n0}(0) = 0, \quad \tilde{T}_{n0}'(0) = \bar{\psi}_n, \tag{16}$$

и функции $\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon)$ – решения задачи Коши

$$\hat{T}_{n1}'' + a_{n\varepsilon}\hat{T}_{n1}' - \gamma\hat{T}_{n1} = -(n^2 + (\nu^2)/4)\tilde{T}_{n0}', \quad 0 \leq t \leq T, \tag{17}$$

$$\hat{T}_{n1}(0) = 0, \quad \hat{T}_{n1}'(0) = 0, \tag{18}$$

где $a_{n\varepsilon} = \varepsilon(n^2 + (\nu^2)/4) + \gamma - 1$. Из уравнений (12), (15), (17) и начальных условий (13), (16), (18) следует, что

$$T_n(t; \varepsilon) = e^{-t}(\tilde{T}_{n0}(t) + \varepsilon\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon)). \tag{19}$$

Решение задачи (15), (16) определяется как

$$\tilde{T}_{n0}(t) = \bar{\psi}_n(\gamma + 1)^{-1}(e^t - e^{-\gamma t}), \tag{20}$$

а задачи (17), (18) – формулой

$$\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon) = -\frac{n^2 + \nu^2/4}{\lambda_1(n; \varepsilon) - \lambda_2(n; \varepsilon)} \int_0^t [\exp(\lambda_1(n; \varepsilon)(t - \tau)) - \exp(\lambda_2(n; \varepsilon)(t - \tau))] \tilde{T}_{n0}'(\tau) d\tau, \tag{21}$$

где

$$\lambda_1(n; \varepsilon) = \frac{-a_{n\varepsilon} + \sqrt{a_{n\varepsilon}^2 + 4\gamma}}{2}, \quad \lambda_2(n; \varepsilon) = \frac{-a_{n\varepsilon} - \sqrt{a_{n\varepsilon}^2 + 4\gamma}}{2}.$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\max_{[0, T]} |\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon)| \leq c_2(n^2 + \nu^2/4)|\bar{\psi}_n| \tag{22}$$

для любого n . Подстановка представления (19) в формулу (11) с учётом оценки (22) и формулы (14) даёт

$$u(x, t; \varepsilon) = \psi(x)(\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)t)) + \varepsilon u_0(x, t; \varepsilon), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{23}$$

где $\max_{Q_T} |u_0(x, t; \varepsilon)| \leq c_3$. Положив в формуле (23) $t = T$ и используя условие (6), получим

$$g(x; \varepsilon) = \psi(x)(\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)T)) + \varepsilon u_0(x, T; \varepsilon).$$

Из этой формулы и определения (7) функции $\psi_0(x)$ следует оценка (9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что при малых ε функция $\psi_0(x)$ аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon)$. Покажем, что при дополнительных предположениях можно построить приближённое решение $\psi_1(x; \varepsilon)$, которое аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon^2)$.

Введём функции

$$p_0(t) = (\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)t)),$$

$$p_1(t) = \frac{\exp(-t)}{(\gamma + 1)^2} \int_0^t [\exp(t - \tau) - \exp(-\gamma(t - \tau))] (\exp(\tau) + \gamma \exp(-\gamma\tau)) d\tau.$$

Пусть для параметра ε выполнены условия

$$p_0(T)(p_1(T))^{-1} - \varepsilon\nu^2/4 \geq c_4 > 0, \quad |\sin(\pi\sqrt{p_0(T)(\varepsilon p_1(T))^{-1} - \nu^2/4})| \geq c_5 > 0. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $\psi_1(x; \varepsilon)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\varepsilon p_1(T)\psi_1''(x; \varepsilon) - \varepsilon \nu p_1(T)\psi_1'(x; \varepsilon) + p_0(T)\psi_1(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{25}$$

$$\psi_1(0; \varepsilon) = 0, \quad \psi_1(\pi; \varepsilon) = 0. \tag{26}$$

Теорема 2. Пусть функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи, причём $\psi(x)$ такова, что $\psi \in C^6[0, \pi]$, выполнены условия (8) и

$$\psi^{(4)}(0) - 2\nu\psi^{(3)}(0) + \nu^2\psi''(0) = 0, \quad \psi^{(4)}(\pi) - 2\nu\psi^{(3)}(\pi) + \nu^2\psi''(\pi) = 0. \tag{27}$$

Тогда для ε , удовлетворяющих условиям (24), имеет место оценка

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_1(x; \varepsilon)| \leq c_6 \varepsilon^2. \tag{28}$$

Доказательство. Для функции $T_n(t; \varepsilon)$, являющейся решением задачи (12), (13), справедливо представление

$$T_n(t; \varepsilon) = e^{-t}(\tilde{T}_{n0}(t) + \varepsilon\tilde{T}_{n1}(t) + \varepsilon^2\tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon)), \tag{29}$$

где $\tilde{T}_{n1}(t) = \hat{T}_{n1}(t; 0)$, а $\tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon)$ – решение задачи Коши

$$\tilde{T}_{n2}'' + a_{n\varepsilon}\tilde{T}_{n2}' - \gamma\tilde{T}_{n2} = -(n^2 + \nu^2)/4\tilde{T}_{n1}', \quad 0 \leq t \leq T, \tag{30}$$

$$\tilde{T}_{n2}(0) = 0, \quad \tilde{T}_{n2}'(0) = 0. \tag{31}$$

Из формулы (21) следует, что

$$\tilde{T}_{n1}(t) = \hat{T}_{n1}(t; 0) = -(n^2 + \nu^2/4)(\gamma + 1)^{-2}\bar{\psi}_n h(t), \tag{32}$$

где

$$h(t) = \int_0^t [\exp(t - \tau) - \exp(-\gamma(t - \tau))](\exp(\tau) + \gamma \exp(-\gamma\tau)) d\tau.$$

Для решения задачи (30), (31) справедлива формула

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon) &= \frac{(n^2 + \nu^2/4)^2 \bar{\psi}_n}{(\gamma + 1)^2 (\lambda_1(n; \varepsilon) - \lambda_2(n; \varepsilon))} \times \\ &\times \int_0^t [\exp(\lambda_1(n; \varepsilon)(t - \tau)) - \exp(\lambda_2(n; \varepsilon)(t - \tau))] h'(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя условия (8) и (27), имеем

$$\bar{\psi}_n = -\frac{2}{\pi n^6} \int_0^\pi \alpha'''(x) \sin(nx) dx. \tag{34}$$

Следовательно, учитывая формулу (33), получаем, что функция

$$u_1(x, t; \varepsilon) = \exp(\nu x/2 - t) \sum_{n=1}^\infty \tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon) \sin(nx) \tag{35}$$

определена и непрерывна в прямоугольной области Q_T и имеет там непрерывную частную производную по x для всех $\varepsilon \in (0, 1)$. Из формул (34) и (35) следуют оценки

$$\max_{Q_T} |u_1(x, t; \varepsilon)| \leq c_7, \quad \max_{Q_T} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t; \varepsilon) \right| \leq c_8. \quad (36)$$

Учитывая определение коэффициентов $\bar{\psi}_n$, имеем

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \nu^2/4) \bar{\psi}_n \sin(nx) = \exp(-\nu x/2) (\psi''(x) - \nu \psi'(x)). \quad (37)$$

Подставляя представление (29) в формулу (11) и принимая во внимание формулы (20), (32), (35) и (37), получаем

$$u(x, t; \varepsilon) = p_0(t)\psi(x) - \varepsilon \nu p_1(t)\psi'(x) + \varepsilon p_1(t)\psi''(x) + \varepsilon^2 u_1(x, t; \varepsilon), \quad (x, t) \in Q_T.$$

Положив в этой формуле $t = T$ и используя условие (6), можем записать равенство

$$\varepsilon p_1(T)\psi''(x) - \varepsilon \nu p_1(T)\psi'(x) + p_0(T)\psi(x) = g(x; \varepsilon) - \varepsilon^2 u_1(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (38)$$

Рассмотрим функцию $z(x; \varepsilon) = \psi_1(x; \varepsilon) - \psi(x)$. Из уравнений (25), (38) и условий (8), (26) следует, что $z(x; \varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon p_1(T)z''(x; \varepsilon) - \varepsilon \nu p_1(T)z'(x; \varepsilon) + p_0(T)z(x; \varepsilon) &= \varepsilon^2 u_1(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ z(0; \varepsilon) &= 0, \quad z(\pi; \varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

которое определяется формулой

$$z(x; \varepsilon) = \varepsilon (p_1(T))^{-1} \int_0^{\pi} G(x, s; \varepsilon) \exp(\nu(x-s)/2) u_1(s, T; \varepsilon) ds, \quad (39)$$

где

$$G(x, s; \varepsilon) = \begin{cases} (b_\varepsilon \sin(b_\varepsilon \pi))^{-1} \sin(b_\varepsilon(x-\pi)) \sin(b_\varepsilon s), & s \leq x, \\ (b_\varepsilon \sin(b_\varepsilon \pi))^{-1} \sin b_\varepsilon(s-\pi) \sin(b_\varepsilon x), & x \leq s, \end{cases} \quad b_\varepsilon = \sqrt{p_0(T)(\varepsilon p_1(T))^{-1} - \nu^2/4}.$$

Интегрируя по частям интеграл в формуле (39) и используя оценку (36), получаем

$$\max_{[0, \pi]} |z(x; \varepsilon)| \leq c_6 \varepsilon^2.$$

Таким образом, оценка (28) справедлива. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос об оценке для приближённого решения обратной задачи в случае, когда дополнительная информация задана с погрешностью. Пусть функция $g(x; \varepsilon)$ в условии (6) неизвестна, а вместо неё задана непрерывная на отрезке $[0, \pi]$ функция $g_\delta(x)$ такая, что

$$\max_{[0, \pi]} |g(x; \varepsilon) - g_\delta(x)| \leq \delta.$$

Определим функцию

$$\psi_{0\delta}(x) = g_\delta(x)(\gamma + 1)(1 - \exp(-(\gamma + 1)T))^{-1}.$$

Простым следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_{0\delta}(x)| \leq c_1 \varepsilon + \delta(\gamma + 1)(1 - \exp(-(\gamma + 1)T))^{-1}.$$

Пусть для параметра ε выполнены условия (24). Рассмотрим функцию $\psi_{1\delta}$, являющуюся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon p_1(T) \psi_{1\delta}''(x; \varepsilon) - \varepsilon \nu p_1(T) \psi_{1\delta}'(x; \varepsilon) + p_0(T) \psi_{1\delta}(x; \varepsilon) &= g_\delta(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ \psi_{1\delta}(0; \varepsilon) &= 0, \quad \psi_{1\delta}(\pi; \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы 2 легко получить

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, то

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_{1\delta}(x)| \leq c_6 \varepsilon^2 + c_9 \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1999.
2. Денисов А.М., Лукилин А.В. Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. М., 1989.
3. Денисов А.М. Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040–2049.
4. Денисов А.М. Приближенное решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 795–802.
5. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.
6. Иванов В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2004.
8. Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Изв. Уральского ун-та. 2008. № 58. С. 78–87.
9. Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
10. Денисов А.М. Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
11. Belov Yu.Ya., Kopylova V.G. Determination of source function in composite type system of equations // Журн. Сибирского федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
12. Денисов А.М., Соловьева С.И. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
13. Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
14. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed equations of the reaction–diffusion–advection type with data on the position of reaction front // Comm. in Nonlin. Sci. Numer. Simulation. 2021. V. 99. P. 105824.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.
После доработки 17.04.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.

УДК 517.956.225

ПРИНЦИП МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ТИХОНОВА В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛА С ПОВЕРХНОСТИ

© 2023 г. Е. Б. Ланеев, Н. Ю. Черникова

Рассматривается некорректно поставленная задача продолжения потенциального поля в цилиндрическую область с поверхности в трёхмерном пространстве. Строится приближённое решение задачи, устойчивое по отношению к заданному полю. Продолжение поля потенциала осуществляется решением некорректно поставленной смешанной задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области прямоугольного сечения. Для построения устойчивого решения задачи используется метод регуляризации Тихонова.

DOI: 10.31857/S0374064123060067, EDN: FFWQYC

Введение. Обратная задача потенциала [1] имеет широкий круг приложений, чем и обусловлена её актуальность. Трудности при её решении, в частности, связаны с тем, что решение единственно в достаточно узких классах функций плотности потенциала. Тем не менее в задачах геофизики эффективным способом исследования и локализации аномалий плотности является изучение поля силы тяжести, продолженного на глубину в сторону возмущающих масс [2] с земной поверхности. В данной работе предлагается метод продолжения потенциального поля с поверхности, вообще говоря, не плоской. Продолжение поля осуществляется на основе решения некоторой краевой задачи для системы уравнений потенциального поля. Рассматриваемая задача некорректно поставлена, т.е. малым погрешностям в заданном поле могут соответствовать существенные погрешности в решении задачи о продолжении поля. Для построения её устойчивого приближённого решения используется метод регуляризации Тихонова [3, гл. IV, § 3].

1. Постановка задачи. В бесконечном цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad -\infty < z < \infty\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

рассмотрим следующую модель ньютоновского потенциала:

$$\begin{aligned} \Delta v(M) &= -4\pi\rho(M), \quad M \in D^\infty, \\ v|_{x=0, l_x} &= 0, \quad v|_{y=0, l_y} = 0, \\ v &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем считать, что носитель функции ρ расположен в области

$$D(H, \infty) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad H < z < \infty, \quad H = \text{const}\}.$$

Пусть $\varphi(M, P)$ – функция источника задачи (2) в области D^∞ , которая может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}|z_P - z_M|\}}{k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (3)$$

$$k_{nm} = \pi \left(\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Если точка $P \in D(H + \varepsilon, \infty)$, где ε меньше расстояния от носителя функции плотности ρ до плоскости $z = H$, а точка M принадлежит области

$$D(-\infty, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad -\infty < z < H\}, \tag{5}$$

то ряд (3) сходится равномерно.

В области $D(-\infty, H)$ решение задачи (2) может быть представлено в виде

$$v(M) = 4\pi \int_{\text{Supp } \rho} \rho(P) \varphi(M, P) dV_P = \frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{\text{Supp } \rho} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}(z_P - z_M)\}}{k_{nm}} \times \\ \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \tag{6}$$

При аналитическом продолжении на полупространство $z_M < H$ как гармонической функции такой потенциал соответствует ньютоновскому потенциалу с нечётно-периодической функцией плотности распределения источников ρ в пространстве \mathbb{R}^3 .

В области $D(-\infty, H)$ поле потенциала (6) имеет вид

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z = -\nabla v(M) = -\frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{\text{Supp } \rho} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}(z_P - z_M)\} \times \\ \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} + \right. \\ \left. + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \right). \tag{7}$$

Если в рамках модели (2) плотность потенциала ρ известна, то в области $D(-\infty, H)$ потенциал плотности ρ и поле потенциала могут быть найдены по формулам (6) и (7) соответственно.

Поставим следующую задачу.

Пусть в рамках модели (2) на расположенной внутри области D^∞ поверхности

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad z = F(x, y) < H\}, \tag{8}$$

где функция F непрерывно дифференцируема, поле \mathbf{E} вида (7) потенциала (6) задано как векторная функция \mathbf{E}^0 :

$$\mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0, \tag{9}$$

а плотность ρ потенциала неизвестна.

В области $D(-\infty, H)$ поле (7) является решением задачи

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ \mathbf{E}|_S = \mathbf{E}^0, \quad [\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{x=0, l_x} = 0, \quad [\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{y=0, l_y} = 0, \\ \mathbf{E} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \tag{10}$$

Будем считать, что каждая компонента поля \mathbf{E} принадлежит по крайней мере классу функций $C^2(D(-\infty, H)) \cap C^1(\overline{D(-\infty, H)})$. Решение задачи (10), очевидно, существует, если \mathbf{E}^0 – поле потенциала вида (7) с плотностью ρ , носитель которой лежит в области $D(H, \infty)$.

Как следует из (7), z -компонента поля \mathbf{E} может быть записана в виде равномерно сходящегося ряда Фурье

$$E_z(M) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{\text{Supp } \rho} dV_P \rho(P) \exp\{-k_{nm}(z_P - z_M)\} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} = \sum_{n,m=1}^{\infty} (E_z)_{nm}(z_M) \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad M \in D(-\infty, H). \quad (11)$$

При этом компоненты E_x и E_y поля в силу (7) выражаются через коэффициенты Фурье компоненты E_z :

$$E_x(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} (E_z)_{nm}(z_M) \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y},$$

$$E_y(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} (E_z)_{nm}(z_M) \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad M \in D(-\infty, H). \quad (12)$$

Таким образом, для решения задачи (10) достаточно, исходя из её условий, найти компоненту E_z поля.

2. Сведение поставленной задачи к краевой задаче для E_z . Отметим, что компонента E_z , как и каждая компонента поля в (10), есть гармоническая функция в области $D(-\infty, H)$. С учётом граничных условий в (10) E_z является решением задачи

$$\Delta E_z(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H),$$

$$E_z|_S = E_z^0,$$

$$E_z|_{x=0, l_x} = 0, \quad E_z|_{y=0, l_y} = 0,$$

$$E_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в области

$$D(-\infty, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad -\infty < z < F(x, y)\}$$

компонента E_z является единственным решением задачи Дирихле, совпадает с z -компонентой поля (7) и как аналитическая функция единственным образом продолжается в область $D(-\infty, H)$, совпадая с z -компонентой поля (7). Таким образом, задача (13) имеет единственное решение, а имея в виду связь компонент поля (12), единственно и решение задачи (10).

Для получения явного выражения для E_z , как решения задачи (13), дополним граничные условия в (13) на поверхности S условием на нормальную производную, используя условие (9) и уравнения потенциального поля в (10).

В самом деле, в области $D(-\infty, H)$ поле \mathbf{E} удовлетворяет уравнениям потенциального поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(M) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H).$$

Для нормальной производной компоненты E_z на поверхности S вида (8), задаваемой уравнением $z - F(x, y) = 0$, имеем

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = (\mathbf{n}_1, \nabla E_z)|_S = \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} F'_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} F'_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Big|_S, \quad (14)$$

где $\mathbf{n}_1 = (-F'_x, -F'_y, 1)$ – внешняя нормаль по отношению к области $D(-\infty, F)$, $n_1 = |\mathbf{n}_1|$. Тогда, выражая из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, имеющего место в точках поверхности $S \subset D(-\infty, H)$, производную по переменной z и подставляя её в (14), получаем

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = (\mathbf{n}_1, \nabla E_z)|_S = \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} F'_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} F'_y - \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Big|_S. \quad (15)$$

Из уравнений $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ в точках поверхности S , а именно

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_S = \frac{\partial E_x}{\partial z} \Big|_S, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_S = \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_S,$$

и из (15) следует равенство

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} F'_x + \frac{\partial E_y}{\partial z} F'_y + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \Big|_S. \tag{16}$$

Далее будем рассматривать поле \mathbf{E}^0 в (9), заданное на поверхности S , как функцию переменных x и y на прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y\}. \tag{17}$$

Дифференцируя компоненты поля \mathbf{E}^0 по аргументам x и y , получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_x^0 &= \frac{\partial}{\partial x} E_x(x, y, F(x, y)) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} F'_x \right) \Big|_S, \\ \frac{\partial}{\partial y} E_y^0 &= \frac{\partial}{\partial y} E_y(x, y, F(x, y)) = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} F'_y \right) \Big|_S, \end{aligned}$$

подставив которые в (16), найдём выражение нормальной производной через производные компонент вектора \mathbf{E}^0 :

$$n_1 \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = - \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} F'_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} F'_y \right) \Big|_S = - \frac{\partial}{\partial x} E_x^0 - \frac{\partial}{\partial y} E_y^0. \tag{18}$$

Добавив условие (18) в (13), видим, что компонента E_z поля (7) в области $D(-\infty, H)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta E_z(M) &= 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ E_z|_S &= E_z^0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial n} \Big|_S = - \frac{1}{n_1} \left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y} \right), \quad \mathbf{n}_1 = (-F'_x, -F'_y, -1), \\ E_z|_{x=0, l_x} &= 0, \quad E_z|_{y=0, l_y} = 0, \quad E_z \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как функция \mathbf{E}^0 в (10) задаётся как поле потенциала (7), то, таким образом, решение задачи (19) существует в классе $C^2(D(-\infty, H)) \cap C^1(\overline{D(-\infty, H)})$.

На границе $z = H$ области $D(-\infty, H)$ граничные условия не заданы, а значит, задача (19), как и задачи (11), не устойчива по отношению к погрешностям в данных, т.е. некорректно поставлена.

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Покажем, что, следуя методу [4], применённому для решения задачи Коши для уравнения Лапласа, задача (19) может быть сведена к интегральному уравнению.

Рассмотрим функцию источника $\varphi(M, P)$ задачи (2) в цилиндре D^∞ вида (1). Эта функция имеет вид

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M, P), \tag{20}$$

где r_{MP} – расстояние между точками $M \in D^\infty$ и $P \in D^\infty$, $W(M, P)$ – гармоническая по P функция. Функция источника, наряду с формулой (3), может быть получена методом отражений как сумма функций точечных источников с периодом $2l_x$ по переменной x и $2l_y$ по переменной y :

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{1, nm}} - \frac{1}{r_{2, nm}} - \frac{1}{r_{3, nm}} + \frac{1}{r_{4, nm}} \right),$$

где

$$r_{1, nm} = [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

$$r_{2,nm} = [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

$$r_{3,nm} = [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

$$r_{4,nm} = [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2},$$

так что $r_{1,00} = r_{MP}$ – расстояние между точками $M \in D^\infty$ и $P \in D^\infty$.

Пусть точка M лежит в области

$$D(R, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, R < z < F(x, y), R = \text{const}\}.$$

Применим формулы Грина в области $D(R, F)$ к решению $E_z(P)$ задачи (19) и к функциям $(4\pi r_{MP})^{-1}$ и $W(M, P)$ и получим

$$E_z(M) = \int_{\partial D(R, F)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n}(P) \frac{1}{4\pi r_{MP}} - E_z(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{4\pi r_{MP}}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F), \quad (21)$$

$$0 = \int_{\partial D(R, F)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n}(P) W(M, P) - E_z(P) \frac{\partial W}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F). \quad (22)$$

Здесь нормаль внешняя по отношению к области $D(R, F)$. Суммируя (21) и (22), учитывая (20), получаем

$$E_z(M) = \int_{\partial D(R, F)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n}(P) \varphi(M, P) - E_z(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F).$$

С учётом граничных условий для E_z в задаче (19) и φ запишем представление компоненты E_z поля как сумму интегралов

$$E_z(M) = \int_S \left[-\frac{1}{n_1} \left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x}(P) + \frac{\partial E_y^0}{\partial y}(P) \right) \varphi(M, P) - E_z^0(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P + \\ + \int_{\Pi(R)} \left[\frac{\partial E_z}{\partial n_P}(P) \varphi(M, P) - E_z(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(R, F), \quad (23)$$

где прямоугольник $\Pi(R)$ имеет вид

$$\Pi(R) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = R\}, \quad R < \min_{(x, y)} F(x, y). \quad (24)$$

Интеграл по прямоугольнику $\Pi(R)$, в силу представлений поля (7) и функции источника для фиксированной точки $z_M > z_P = R$ (в соответствии с (3))

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}(z_M - R)\}}{k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y},$$

сходится к нулю при $R \rightarrow -\infty$.

Интеграл по поверхности S в (23) сводится к интегралу по переменным x_P и y_P , учитывая, что $\partial \varphi(M, P)/\partial n = (\mathbf{n}, \nabla_P \varphi(M, P))$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1/n_1$, и $d\sigma_P = n_1 dx_P dy_P$, т.е.

$$E_z(M) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[- \left(\frac{\partial E_x^0}{\partial x}(x_P, y_P) + \frac{\partial E_y^0}{\partial y}(x_P, y_P) \right) \varphi(M, P) - \right. \\ \left. - E_z^0(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P)) \right]_{P \in S} dx_P dy_P, \quad M \in D(-\infty, F).$$

Интегрируя здесь по частям и учитывая граничные условия для φ , получаем

$$E_z(M) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[E_x^0(x_P, y_P) \frac{\partial \varphi(M, P)}{\partial x_P} \Big|_{P \in S} + E_y^0(x_P, y_P) \frac{\partial \varphi(M, P)}{\partial y_P} \Big|_{P \in S} - E_z^0(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P)) \Big|_{P \in S} \right] dx_P dy_P. \quad M \in D(-\infty, F). \quad (25)$$

Как уже обсуждалось при анализе задачи (13), в области $D(-\infty, F)$ компонента поля E_z вида (25) совпадает с представлением z -компоненты в (7) и, следовательно, может быть аналитически продолжена как z -компонента поля (7) в область $D(-\infty, H]$.

Введём обозначение

$$E_{z,H} = E_z|_{z=H}. \quad (26)$$

Компонента E_z в области $D(-\infty, H)$ может рассматриваться как решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta E_z(M) &= 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ E_z|_{z=H} &= E_{z,H}, \\ E_z|_{x=0, l_x} &= 0, \quad E_z|_{y=0, l_y} = 0, \\ E_z &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда функция E_z может быть выражена через функцию $E_{z,H}$ с использованием функции Грина задачи (27):

$$E_z(M) = - \int_{\Pi(H)} \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) E_{z,H}(P) dx_P dy_P, \quad M \in D(-\infty, H), \quad (28)$$

где нормальная производная функции Грина

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) \Big|_{P \in \Pi(H)} &= \frac{\partial G}{\partial z_P}(M, P) \Big|_{P \in \Pi(H)} = \\ &= -\frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{k_{nm}(-H + z_M)\} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}, \end{aligned} \quad (29)$$

$\Pi(H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = H\}$, а величина k_{nm} имеет вид (4).

Таким образом, если задача (19) имеет решение, то из (28) и (29) следует, что функция E_z в области $D(-\infty, H)$ может быть представлена в виде ряда Фурье

$$E_z(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (E_{z,H})_{nm} \exp\{k_{nm}(z - H)\} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \quad (30)$$

с коэффициентами

$$(E_{z,H})_{nm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} E_{z,H}(x', y') \sin \frac{\pi n x'}{l_x} \sin \frac{\pi m y'}{l_y} dx' dy'$$

по полной системе функций $\{\sin(\pi n x/l_x) \sin(\pi m y/l_y)\}_{n,m=1}^{\infty}$. Ряд (30) сходится равномерно в области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, так как справедлива оценка

$$\left| (E_{z,H})_{nm} \exp\{k_{nm}(z - H)\} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right| \leq |(E_{z,H})_{nm}| \exp\{-\varepsilon k_{nm}\}.$$

Из представления (28) решения задачи (19) и из (30) следует, что для получения явного выражения точного решения задачи (19) достаточно записать функцию (26) через вектор-функцию \mathbf{E}^0 .

Покажем, что функция $E_{z,H}$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Введём обозначение

$$\Phi(x_M, y_M) = E_z(M)|_{\Pi(a)}, \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \quad (31)$$

где

$$\Pi(a) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad z = a\}, \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \quad (32)$$

а E_z – функция вида (25). Поскольку поле \mathbf{E}^0 задано, а функция источника $\varphi(M, P)$ при $M \in \Pi(a)$ и $P \in S$ вида (8) может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда (3):

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{-k_{nm}(z_P - a)\}}{k_{nm}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}, \quad (33)$$

функцию Φ вида (31) можно также считать известной функцией. Тогда из (28) и (31) получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно искомой функции $E_{z,H}$

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} K(x_M, y_M, x, y) E_{z,H}(x, y) dx dy = \Phi(x_M, y_M), \quad (x_M, y_M) \in \Pi, \quad (34)$$

где ядро интегрального оператора, в соответствии с представлением (29), имеет вид

$$K(x_M, y_M, x, y) = \frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}(H - a)\} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}. \quad (35)$$

Из уравнения (34), используя разложение (35), получаем следующее соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения $E_{z,H}$ этого интегрального уравнения и коэффициентами Фурье правой части уравнения:

$$(E_{z,H})_{nm} \exp\{-k_{nm}(H - a)\} = \tilde{\Phi}_{nm}, \quad (36)$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}$ – коэффициенты Фурье функции Φ :

$$\tilde{\Phi}_{nm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi} \Phi(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy.$$

Заметим, что формула (36) характеризует убывание коэффициентов $\tilde{\Phi}_{nm}$ с ростом n и m , если для функции \mathbf{E}^0 существует решение задачи (19) и, следовательно, существует $E_{z,H}$, определяемая формулой (26). Выражая коэффициенты Фурье $(E_{z,H})_{nm}$ из (36) и подставляя их в ряд (30), получаем функцию E_z в области $D(-\infty, H)$:

$$E_z(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nm} \exp\{k_{nm}(z - a)\} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}, \quad M(x, y, z) \in D(-\infty, H). \quad (37)$$

Ряд (37), также как и ряд (30), сходится равномерно в области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, если существует решение задачи (19) для заданной функции \mathbf{E}^0 , соответствующей полю потенциала вида (7).

Формула (37) даёт представление точного решения задачи (19). Из этой формулы следует, что $(E_z)_{nm}(z) = \tilde{\Phi}_{nm} \exp\{k_{nm}(z - a)\}$. Подставив её в (12), получим компоненты E_x и E_y поля, которые вместе с (37) дают представление точного решения задачи (10).

4. Решение задачи в случае приближённо заданного поля \mathbf{E}^0 . Пусть вместо точной вектор-функции \mathbf{E}^0 в условии (9) задачи (10) известна приближённая функция $\mathbf{E}^{0,\delta} = (E_x^{0,\delta}, E_y^{0,\delta}, E_z^{0,\delta})$, заданная как функция на прямоугольнике Π вида (17), так что

$$\|\mathbf{E}^{0,\delta} - \mathbf{E}^0\|_{L_2(\Pi)} \leq \delta. \tag{38}$$

В этом случае правая часть $\Phi(M)$ вида (31) интегрального уравнения (34) будет вычисляться приближённо, в том числе на прямоугольнике (32) в соответствии с формулой (25) как функция

$$E_z^\delta(M) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[E_x^{0,\delta}(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial x_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} + E_y^{0,\delta}(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial y_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} - E_z^{0,\delta}(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S} \right] dx_P dy_P, \quad M \in \Pi(a), \tag{39}$$

где $\varphi(M, P)$ – функция источника вида (33) задачи (2).

Оценим погрешность в вычислении функции (39) по отношению к функции E_z вида (25) на прямоугольнике (32) – правой части интегрального уравнения (34), т.е. оценим разность

$$|E_z^\delta(M) - E_z(M)|_{M \in \Pi(a)} \leq \left| \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[(E_x^{0,\delta}(x_P, y_P) - E_x^0(x_P, y_P)) \left(\frac{\partial}{\partial x_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} \right) + (E_y^{0,\delta}(x_P, y_P) - E_y^0(x_P, y_P)) \left(\frac{\partial}{\partial y_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} \right) - (E_z^{0,\delta}(x_P, y_P) - E_z^0(x_P, y_P)) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S} \right] dx_P dy_P \right|.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, а также (38), отсюда получаем неравенства

$$\begin{aligned} |E_z^\delta(M) - E_z(M)|_{M \in \Pi(a)} &\leq \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_{\Pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_P}(M, P)|_{P \in S} \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|E_x^{0,\delta} - E_x^0\|_{L_2(\Pi)} \leq \\ &\leq \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_{\Pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y_P}(M, P)|_{P \in S} \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|E_y^{0,\delta} - E_y^0\|_{L_2(\Pi)} + \\ + \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_{\Pi} \left[(\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S} \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|E_z^{0,\delta} - E_z^0\|_{L_2(\Pi)} &\leq C_1 \|\mathbf{E}^{0,\delta} - \mathbf{E}^0\| \leq C_1 \delta. \end{aligned} \tag{40}$$

Обозначая аналогично (31) приближённую правую часть интегрального уравнения (34)

$$\Phi^\delta(x_M, y_M) = E_z^\delta(M)|_{M \in \Pi(a)}, \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \tag{41}$$

отсюда и из (40) в пространстве L_2 погрешности приближённой правой части интегрального уравнения (34) будем иметь оценку $\|\Phi^\delta - \Phi\|_{L_2(\Pi)} \leq C_2 \delta$, где C_2 – константа.

Построим теперь приближённое решение интегрального уравнения (34) с правой частью (41), применяя метод регуляризации Тихонова [3, гл. IV, § 3]. В качестве приближённого решения будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова

$$M[w] = \|Kw - \Phi^\delta\|_{L_2(\Pi)}^2 + \alpha \|w\|_{L_2(\Pi)}^2, \quad \alpha > 0, \tag{42}$$

где K – ядро интегрального оператора в (34). Она может быть найдена с использованием методов минимизации [5, 6]. Экстремаль также может быть получена как решение уравнения Эйлера $K^*Kw + \alpha w = K^*\Phi^\delta$ для функционала (42) и в коэффициентах Фурье \tilde{w}_{nm} искомой функции w имеет вид

$$\exp\{-2k_{nm}(H - a)\}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = \exp\{-k_{nm}(H - a)\}\tilde{\Phi}_{nm}^\delta.$$

Здесь $\tilde{\Phi}_{nm}^\delta$ – коэффициенты Фурье функции Φ^δ вида (41):

$$\tilde{\Phi}_{nm}^\delta = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Phi^\delta(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \tag{43}$$

Решая уравнение относительно коэффициентов Фурье экстремали w и подставляя их в (30) вместо $(\tilde{E}_{z,H})_{nm}$ в (28), найдём приближение $E_{z,\alpha}^\delta$ к функции E_z в области $D(-\infty, H)$:

$$E_{z,\alpha}^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^\infty \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta \exp\{k_{nm}(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \tag{44}$$

С учётом формул (12) получаем приближённое решение векторной задачи (10):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha^\delta(x, y, z) = & \sum_{n,m=1}^\infty \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta \exp\{k_{nm}(z - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} + \right. \\ & \left. + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right), \quad M(x, y, z) \in D(-\infty, H). \end{aligned} \tag{45}$$

Отметим, что члены ряда (44) отличаются от членов ряда (37) регуляризирующим множителем $(1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\})^{-1}$, который обеспечивает сходимость ряда.

Видно, что при $\delta = 0$ и $\alpha = 0$ формула (45) переходит в явное представление точного решения (37), (12) задачи (10). При $\delta > 0$ и $\alpha = 0$ ряд (45), вообще говоря, может расходиться. Для $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ сходимость обеспечивается регуляризирующим множителем $(1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\})^{-1}$.

Теорема. Пусть решение задачи (10) существует. Тогда для любого $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такого, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, функция $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta$ вида (45) сходится к точному решению задачи (10) равномерно при $\delta \rightarrow 0$ в области $D(-\infty, H - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ вида (5) оценим разность

$$|\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta - \mathbf{E}| \leq |\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta - \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}| + |\mathbf{E}_{\alpha(\delta)} - \mathbf{E}|, \tag{46}$$

где $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}$ – функция (45) при точной функции \mathbf{E}^0 и, соответственно, точной функции Φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}(M) = & \sum_{n,m=1}^\infty \frac{\tilde{\Phi}_{nm} \exp\{k_{nm}(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x k_{nm}} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} + \right. \\ & \left. + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y k_{nm}} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} + \mathbf{k} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \right). \end{aligned} \tag{47}$$

Оценим, используя (47), разность $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta - \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}$ в (46) при $z_M < H - \varepsilon$:

$$|\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^\delta(M) - \mathbf{E}_{\alpha(\delta)}(M)| \leq 12 \left| \sum_{n,m=1}^\infty \frac{\exp\{k_{nm}(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \right| \max_{P \in \Pi} |\Phi^\delta(P) - \Phi(P)| \leq$$

$$\leq 12C_1\delta \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\exp\{k_{nm}(H - \varepsilon - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \leq 12C_1\delta \max_x \left[\frac{e^x}{1 + \alpha e^{2x}} \right] \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}\varepsilon\} \leq C_3 \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}}. \tag{48}$$

Оценим теперь разность $\mathbf{E}_{\alpha(\delta)} - \mathbf{E}$ в (46) при $z_M < H - \varepsilon$, учитывая (47) и (37), (12):

$$|\mathbf{E}_{\alpha} - \mathbf{E}| \leq 3 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\} \exp\{k_{nm}(H - \varepsilon - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} |\tilde{\Phi}_{nm}|.$$

Используя (36) и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$|\mathbf{E}_{\alpha} - \mathbf{E}| \leq 3 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\} \exp\{-k_{nm}\varepsilon\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} |(E_{z,H})_{nm}| \leq \frac{6}{\sqrt{l_x l_y}} \left[\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2k_{nm}(H - a)\}} \right)^2 \exp\{-2k_{nm}\varepsilon\} \right]^{1/2} \|E_{z,H}\|_{L_2}.$$

Так как ряд, зависящий от параметра α , мажорируется сходящимся числовым рядом с коэффициентами $\exp\{-2\varepsilon k_{nm}\}$, то возможен предельный переход по α и, таким образом,

$$|\mathbf{E}_{\alpha} - \mathbf{E}| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \tag{49}$$

Из (46), (48) и (49) и условий теоремы следует, что $|\mathbf{E}_{\alpha(\delta)}^{\delta} - \mathbf{E}| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Таким образом, построенное приближённое решение (45) задачи (10) устойчиво к погрешностям в задании функции \mathbf{E}^0 .

5. Вычислительный эксперимент. Покажем практическую значимость и эффективность предложенного метода устойчивого приближённого решения задачи (10) на следующем модельном примере. Пусть в задаче (10) поверхность S – плоскость $\Pi(0)$. В этом случае для решения задачи (10) достаточно задать на плоскости $\Pi(0)$ одну компоненту E_z^0 , которая может непосредственно рассматриваться в качестве правой части интегрального уравнения (34). Значения параметров области задачи:

$$l_x = 60, \quad l_y = 30, \quad H = 1.68.$$

В качестве заданного будем рассматривать поле, соответствующее трём точечным источникам в точках плоскости $z = H + 0.02$: $(x_1, y_1) = (17.7, 8)$, $(x_2, y_2) = (19.7, 8)$, $(x_3, y_3) = (19.7, 9.7)$ мощности $q_1 = 200$, $q_2 = 100$, $q_3 = 100$ соответственно:

$$E_z^0(x, y) = \sum_{i=1}^4 q_i \sum_{n,m=1}^{\infty} \exp\{-k_{nm}(H + 0.02)\} \sin \frac{\pi n x_i}{l_x} \sin \frac{\pi m y_i}{l_y} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}, \tag{50}$$

где k_{nm} вычисляется по формуле (4).

При решении задачи (10) считаем функцию E_z^0 заданной как функцию переменных x и y при неизвестной функции плотности распределения источников. Для построения решения используются формулы (44) при $\Phi = E_z^0$.

Для получения численного результата проведена дискретизация задачи. На прямоугольниках $\Pi(0)$ и $\Pi(H)$ введена равномерная сетка из 181×91 точек. Для суммирования дискретных рядов Фурье используется алгоритм Хемминга [7, с. 83]. Результаты расчётов представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 приведены исходные данные, т.е. заданная компонента поля E_z^0 вида

(50) при добавленной относительной погрешности 2.8% в норме L_2 . Три источника поля воспринимаются как единое целое. На рис. 2 показан результат восстановления функции $E_{z,H}$ по формуле (44) при $z = H$. Отчетливо видны три источника. Поле вычислено при значении параметра регуляризации $\alpha = 10^{-8}$. При параметре регуляризации $\alpha = 0$ решение разрушается.

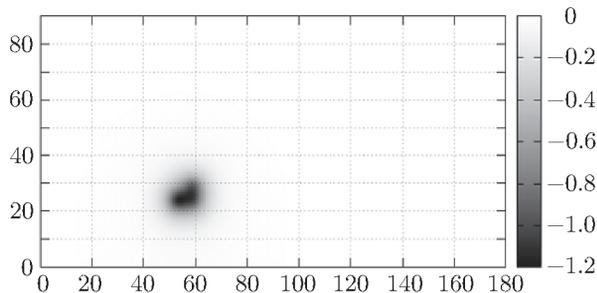


Рис. 1. Исходное поле E_z^0 на поверхности $z = 0$.

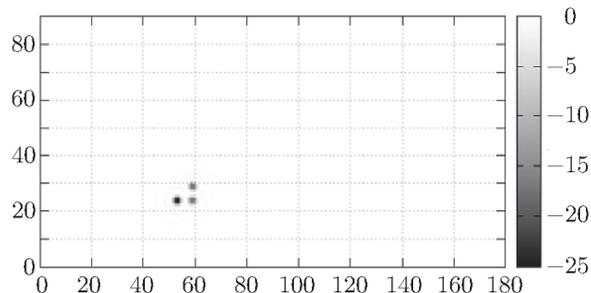


Рис. 2. Продолженное поле E_z .

Заключение. Устойчивое решение задачи (10), как показывает модельный пример, может быть использовано для решения обратной задачи потенциала продолжением поля потенциала в сторону носителя функции плотности источников и может применяться при решении различных прикладных задач, в частности, задач геофизики [2]. Так как функция $E_{z,H}$ представляет собой поле на плоскости более близкой к исследуемым источникам поля, чем исходная поверхность S , можно ожидать более точного воспроизведения изображения источников компонентой поля $E_{z,H}$. Аналогичный метод продолжения гармонической функции с поверхности может быть применён для математической обработки термографических изображений [8].

Результаты расчётов, проведённых на модельном примере, подтверждают эффективность предлагаемого метода, основанного на формулах (45), (43), (41) и (39).

Очевидно, что предложенный метод продолжения поля потенциала переносится и на случай потенциалов простого и двойного слоя и их комбинаций с объёмным потенциалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала // Мат. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
2. Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р. О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. № 1. С. 30–48.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
4. Ланеев Е.Б. О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 483–491.
5. Арутюнов А.В. Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67. № 3. С. 3–62.
6. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Нелокальные обобщённые теоремы о неявной функции в гильбертовых пространствах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1571–1584.
7. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. М., 1968.
8. Laneev E.B., Chernikova N.Y., Obaida Baa. Application of the minimum principle of a Tikhonov smoothing functional in the problem of processing thermographic data // Adv. in Syst. Sci. Appl. 2021. № 1. P. 139–149.

Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.
После доработки 17.04.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.

УДК 517.958+517.968.23

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

© 2023 г. В. Ф. Пивень

Исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения для комплексного потенциала двумерного фильтрационного течения в анизотропном и неоднородном (переменной проницаемости и толщины) пористом слое. Источники течения произвольные дискретные и могут располагаться в общем случае как на границах, так и вне границ. Границы моделируются произвольными гладкими (кусочно-гладкими) замкнутыми линиями, а источники течения – сингулярностями (изолированными особыми точками) комплексного потенциала. Наличие системы источников на границах приводит к принципиально новому обобщению (усложнению) граничных условий, которые характеризуются сингулярными функциями с изолированными особыми точками. В случае анизотропного однородного (постоянной проницаемости и толщины) слоя и прямолинейных границ решения задач представлены в конечном виде. В общем случае, когда произвольная гладкая замкнутая кривая моделирует границу с расположенными на ней источниками, использован обобщённый интеграл типа Коши для комплексного потенциала течения. Это позволило вторую краевую задачу и задачу сопряжения редуцировать к граничным сингулярным интегральным уравнениям. Исследованные задачи – математические модели двумерных фильтрационных процессов в слоистых пористых средах, представляющие интерес, например, для практики добычи флюидов (нефти, воды) из природных анизотропно-неоднородных пластов грунта.

DOI: 10.31857/S0374064123060079, EDN: FFZLVX

Введение. Известны граничные задачи аэродинамики и теории фильтрации, которые характеризуются сингулярными (негладкими) условиями на границах. Плоские и трёхмерные задачи обтекания непроницаемых профилей летательных аппаратов при наличии отсоса внешнего потока исследуются в работах [1, с. 164; 2; 3]. Поставленная в них краевая задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщённым краевым условием редуцируется к гиперсингулярному интегральному уравнению, которое решается численным методом дискретных вихрей. В работах [4, с. 87; 5; 6] изучаются плоские задачи фильтрации в однородной пористой среде (грунт) с источниками на непроницаемых границах, моделируемых отрезком прямой или окружностью. В статьях [7–9] исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения плоских и трёхмерных фильтрационных течений в однородной и неоднородной пористых средах, когда источники располагаются произвольно как на границах, так и вне границ. Решения задач представляются в конечном виде в случае канонических границ, а в общем случае произвольных гладких замкнутых границ задачи редуцируются к сингулярным (гиперсингулярным) интегральным уравнениям. Аналогичный подход используется в настоящей статье для исследования граничных задач двумерных течений в пористом слое с обобщёнными (усложнёнными) граничными условиями, которые характеризуются сингулярными (негладкими) функциями, причём, в отличие от статей [7–9], слой в общем анизотропный и неоднородный (переменной проницаемости и толщины), а источники течения произвольные дискретные и располагаются на границах и вне границ, которые моделируются произвольными гладкими замкнутыми кривыми (контурами).

1. Основные уравнения и граничные условия. Стационарное фильтрационное течение несжимаемой жидкости в анизотропной и неоднородной пористой среде характеризуют скорость фильтрации \vec{v} и обобщённый потенциал φ , которые удовлетворяют записанным в безразмерных величинах [10, с. 10] обобщённому закону Дарси

$$\vec{v} = K \cdot \nabla \varphi \quad \left(\varphi = -\frac{p + \rho\Pi}{\mu} \right) \quad (1.1)$$

и уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь K – проницаемость пористой среды (в общем несимметричный тензор второго ранга), p – давление, μ и ρ – вязкость и плотность жидкости соответственно, Π – потенциал массовых сил, ∇ – оператор Гамильтона.

Рассмотрим двумерное течение в тонком анизотропно-неоднородном пористом слое переменной толщины H и проницаемости K . Течение характеризуем, наряду с обобщённым потенциалом φ , также функцией тока ψ . Они, как функции декартовых координат x, y плоскости основания слоя, следующие из законов (1.1) и (1.2), определяют скорость $\vec{v} = (v_x, v_y)$ [11, с. 25]:

$$v_x = K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Из равенств (1.3) следует, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют всюду в области течения, за исключением сингулярностей (изолированных особых точек) этих функций, эллиптической системе уравнений

$$P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.4)$$

где P_{ij} – компоненты тензора проводимости слоя $P = HK$ ($P_{ij} = HK_{ij}$, $i, j = 1, 2$). Проводимость $P = (P_{ij})$ моделируется гладкими (непрерывно дифференцируемыми) функциями от x, y и удовлетворяет условиям

$$P_{11} > 0 \quad (P_{22} > 0), \quad D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 > 0, \quad (1.5)$$

$D(P_s)$ – определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора P , $P^T = (P_{ji})$ – транспонированный тензор.

Для исследования граничных задач воспользуемся согласно монографии [10, с. 75] физической комплексной плоскостью $z = x + iy$. Течение в области D этой плоскости характеризуем функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, $z \in D$, которые удовлетворяют уравнениям (1.4). Зададим для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ условия на границах, которые моделируем гладкими (кусочно-гладкими) замкнутыми кривыми без самопересечений.

Если на границе σ_1 области D задано давление $p = p_0(z)$, $z \in \sigma_1$, то для обобщённого потенциала φ имеем условие

$$\varphi^+(z) = \alpha_1(z) \quad (\alpha_1 = -(p_0 + \rho\Pi)/\mu), \quad z \in \sigma_1. \quad (1.6)$$

Здесь и далее знак “+” (“–”) обозначает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней. Орт нормали к границе σ_1 направлен внутрь области D . В случае напорной фильтрации, когда массовые силы пренебрежимо малы ($\rho|\nabla\Pi| \ll |\nabla p|$), а давление на границе σ_1 постоянно, $\varphi^+(z) = \text{const}$, $z \in \sigma_1$, и можно принять

$$\varphi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_1. \quad (1.6')$$

Когда граница σ_2 непроницаемая для жидкости, то на ней имеет место условие непротекания, которое для функции тока (граница σ_2 – линия тока) запишем как

$$\psi^+(z) = \alpha_2, \quad \alpha_2 = \text{const}, \quad z \in \sigma_2, \quad (1.7)$$

где орт нормали направлен в область D . Не нарушая общности, выберем $\alpha_2 = 0$ и тогда

$$\psi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_2. \quad (1.7')$$

Пусть кривая Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2 течения, проводимости слоя в которых P_1 и P_2 соответственно, причём $P_\nu = k_\nu P$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$, $P = HK$,

толщина H слоя непрерывна на Γ . Течение в областях D_1 и D_2 характеризуют функции φ_1, ψ_1 и φ_2, ψ_2 , для которых имеем условия, выражающие непрерывность давления и расхода жидкости (условия сопряжения):

$$\varphi_1^+(z) = \varphi_2^-(z), \quad \psi_1(z)^+ = \psi_2^-(z), \quad z \in \Gamma. \tag{1.8}$$

Здесь орт нормали к границе Γ направлен в область D_1 .

Если область течения ограничена сингулярной линией $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, на части σ_{01} которой проводимость слоя $P(z) = \infty$ (его проницаемость $K = \infty$, толщина H конечная) и на части σ_{02} $P = 0$ ($K = 0$ или $H = 0$), то должны выполняться условия

$$\varphi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{01}; \quad \psi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{02}. \tag{1.9}$$

Когда на границах $\sigma_1, \sigma_2, \Gamma$ и, возможно, на линии σ_0 заданы источники течения, то указанные для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ условия (1.6)–(1.9) должны выполняться всюду на границах, за исключением изолированных особых точек этих функций, моделирующих источники.

Если область течения содержит бесконечно удалённую точку и обобщённый потенциал $\varphi(z)$ (сопряжённая с ним функция тока $\psi(z)$) не имеет в бесконечности сингулярностей, то $\varphi(z)$ должен удовлетворять условиям

$$\varphi(z) = O(|z|^{-1}), \quad |P(z) \cdot \nabla \varphi(z)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \tag{1.10}$$

Таким образом, исследование граничных задач сводится к отысканию решений $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ системы уравнений (1.4) при заданных условиях (1.6)–(1.10). Тогда поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$ можно найти из равенств (1.3).

Исследование задач, особенно в случае заданной на границах системы источников течения, вызывает принципиальные трудности, обусловленные в первую очередь математической сложностью системы уравнений (1.4). Эти трудности в значительной мере можно преодолеть, если данную систему уравнений, а значит в целом граничные задачи, привести к каноническому (наиболее простому) виду.

2. Постановка граничных задач на вспомогательной плоскости. Для представления граничных задач в каноническом виде наряду с физической комплексной плоскостью $z = x + iy$ используем вспомогательную комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть область D плоскости z и область D' плоскости ζ взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно-однозначным и непрерывным) преобразованием $\zeta = \zeta(z)$ ($\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$), которое удовлетворяет уравнению Бельтрами [10, с. 90] вида

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_s)}}, \quad |\mu(z)| < 1 \right), \tag{2.1}$$

где

$$2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}.$$

В силу неравенства $|\mu(z)| < 1, z \in D$, следующего из условий (1.5), якобиан J преобразования $\zeta = \zeta(z)$ строго положителен:

$$J = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|^2 (1 - |\mu(z)|^2) > 0,$$

что обеспечивает сохранение ориентации областей (в том числе направления обхода кривых) при переходе с плоскости z на плоскость ζ и обратно. Полагаем, что преобразование $\zeta = \zeta(z)$ оставляет бесконечно удалённую точку неподвижной.

Используем в плоскости ζ комплексный потенциал течения $W = W(\zeta)$, который взаимосвязан с обобщённым потенциалом $\varphi = \varphi(\zeta)$ и функцией тока $\psi = \psi(\zeta)$:

$$W = \varphi + i \frac{\psi}{P'} \quad \left(\varphi = \frac{\operatorname{Re}(P'W)}{\operatorname{Re} P'}, \quad \psi = \frac{|P'|^2 \operatorname{Im} W}{\operatorname{Re} P'} \right). \tag{2.2}$$

Здесь $P' = P'(\zeta) = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$ – комплексная проводимость слоя, $D(P_a) = (P_{12} - P_{21})^2/4$ – определитель антисимметричной части $P_a = (P - P^T)/2$ тензора P .

Используя уравнение (2.1), запишем в плоскости ζ систему уравнений (1.4) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(W - \bar{W}) = 0, \quad (2.3)$$

где

$$A = \frac{\bar{P}'}{P' + \bar{P}'} \frac{\partial \ln P'}{\partial \bar{\zeta}}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Уравнение (2.3) – комплексное представление в плоскости ζ канонической системы уравнений того же эллиптического типа

$$\sqrt{D(P_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(P_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad -\sqrt{D(P_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(P_s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (2.4)$$

Пусть заданы источники течения, которые характеризуются в плоскости ζ комплексным потенциалом W_0 (обобщённым потенциалом φ_0 и функцией тока ψ_0):

$$W_0 = \varphi_0 + i \frac{\psi_0}{P'}. \quad (2.5)$$

Представим комплексный потенциал W_0 в виде

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta). \quad (2.6)$$

Здесь функция $f_0(\zeta)$ имеет сингулярности – систему изолированных особых точек*) $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0n}\}$, моделирующих точки расположения источников течения на кривых $\sigma'_1, \sigma'_2, \Gamma'$ и, возможно, на σ'_0 , которые представляют собой образы кривых $\sigma_1, \sigma_2, \Gamma$ и σ_0 относительно преобразования $\zeta = \zeta(z)$. Сингулярности функции $f(\zeta)$ лежат вне кривых.

Учтём заданные комплексным потенциалом (2.6) источники течения. Комплексный потенциал (2.2) для случая, когда область D' течения ограничена кривыми σ'_1 и σ'_2 , запишем как

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D'. \quad (2.7)$$

В случае кривой Γ' – границы сопряжения областей D'_1 и D'_2 слоя комплексной проводимости \tilde{P}'_1 и \tilde{P}'_2 ($\tilde{P}'_\nu = k_\nu P'$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$) – течение в этих областях характеризуем комплексными потенциалами

$$W_\nu = k_\nu \varphi_\nu + i \frac{\psi_\nu}{P'}, \quad \nu = 1, 2, \quad (2.8)$$

которые представим в виде

$$W_\nu(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D'_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (2.9)$$

В выражениях (2.7) и (2.9)

$$W_*(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + i \frac{\psi_*(\zeta)}{P'(\zeta)} \quad (2.10)$$

– комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta)$ – обобщённый потенциал, $\psi_*(\zeta)$ – функция тока) возмущений, обусловленных границами.

*) Точки $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0n}\}$ – образы изолированных особых точек $z_0 = \{z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n}\}$ расположения заданных на плоскости z источников, которые связаны гомеоморфным преобразованием $\zeta = \zeta(z_0)$.

Запишем условия (1.6)–(1.10) на плоскости ζ . Учтём, что они ковариантны (сохраняют форму записи) относительно преобразования $\zeta = \zeta(z)$. Используя представления (2.2) и (2.5)–(2.10) и учитывая заданные в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0n}\}$ граничные источники, запишем условия для комплексного потенциала W_* возмущения. Имеем условия на границах σ'_1 и σ'_2 :

$$\operatorname{Re} [P'(\zeta)W_*^+(\zeta)] = \alpha_1(\zeta) \operatorname{Re} P'(\zeta) - \operatorname{Re} [P'(\zeta)W_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma'_1, \quad \zeta \neq \zeta_0, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{Im} W_*^+(\zeta) = \frac{\alpha_2(\zeta) \operatorname{Re} P'(\zeta)}{|P'(\zeta)|^2} - \operatorname{Im} W_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_2, \quad \zeta \neq \zeta_0. \quad (2.12)$$

Здесь и далее в граничных условиях $W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta)$. В частности, при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ находим

$$\operatorname{Re} [P'(\zeta)W_*^+(\zeta)] = -\operatorname{Re} [P'(\zeta)W_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma'_1, \quad \zeta \neq \zeta_0, \quad (2.11')$$

$$\operatorname{Im} W_*^+(\zeta) = -\operatorname{Im} W_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_2, \quad \zeta \neq \zeta_0. \quad (2.12')$$

Учтём, что всюду на границе Γ' непрерывны проводимость $P'(\zeta)$ слоя и функция $f(\zeta)$ ($f^+(\zeta) = f^-(\zeta) = f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$). Функция $f_0(\zeta)$ также непрерывна на Γ' , за исключением её точек $\zeta = \zeta_0$ ($f_0^+(\zeta) = f_0^-(\zeta) = f_0(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$, $\zeta \neq \zeta_0$). Имеем условия на Γ' :

$$\operatorname{Re} [P'(\zeta)((1 - \lambda)W_*^+(\zeta) - (1 + \lambda)W_*^-(\zeta))] = 2\lambda W_0(\zeta),$$

$$\operatorname{Im} [W_*^+(\zeta) - W_*^-(\zeta)] = 0, \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$. Из второго равенства следует, что функция тока $\psi(\zeta)$ возмущений непрерывна на границе ($\psi_*^+(\zeta) = \psi_*^-(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$, $\zeta \neq \zeta_0$). Исключив $W_*^-(\zeta)$ из этих условий, получим

$$\begin{aligned} [(1 - \lambda)P'(\zeta) + (1 + \lambda)\overline{P'(\zeta)}]W_*^+(\zeta) - 2\lambda\overline{P'(\zeta)}\overline{W_*^+(\zeta)} - (1 + \lambda)[P'(\zeta) + \overline{P'(\zeta)}]W_*^-(\zeta) = \\ = 2\lambda[P'(\zeta)W_0(\zeta) + \overline{P'(\zeta)}\overline{W_0(\zeta)}], \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Согласно (1.9) полагаем, что заданные обобщённый потенциал $\varphi_0(\zeta)$ и функция тока $\psi_0(\zeta)$ удовлетворяют на сингулярных линиях σ'_{01} и σ'_{02} условиям

$$\varphi_0^+(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}, \quad \psi_0^+(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}, \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Тогда для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ запишем условия

$$\left[\frac{\operatorname{Re} (P'(\zeta)W_*(\zeta))}{\operatorname{Re} P'(\zeta)} \right]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}, \quad \left[\frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} W_*(\zeta)}{\operatorname{Re} P'(\zeta)} \right]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}, \quad \zeta \neq \zeta_0. \quad (2.14)$$

Так как заданные источники течения моделируют сингулярности комплексного потенциала W_0 , то комплексный потенциал W_* возмущений не имеет сингулярностей в бесконечности и для него согласно представлению (1.10) имеют место условия [10, с. 214]

$$\frac{\operatorname{Re} [P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\operatorname{Re} P'(\zeta)} = O(|\zeta|^{-1}), \quad \left| P'(\zeta) \cdot \nabla \frac{\operatorname{Re} [P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\operatorname{Re} P'(\zeta)} \right| = O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

которые выражают затухание возмущений на бесконечности.

Поставим для комплексного потенциала W_* первую и вторую краевые задачи и задачу сопряжения фильтрации в анизотропном неоднородном слое с произвольными дискретными источниками, расположенными на границах и вне границ. Заданы источники течения, которые моделируются в плоскости ζ сингулярностями комплексного потенциала W_0 течения в слое проводимости $P'(\zeta)$ (проводимости $P'_\nu = k_\nu P'(\zeta)$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$). Найти комплексный потенциал W_* , который удовлетворяет уравнению (2.3) и одному из следующих условий: условию (2.11) (первая краевая задача), условию (2.12) (вторая краевая задача) и

условию (2.13) (задача сопряжения). Если область течения ограничена сингулярной линией σ'_0 или/и содержит бесконечно удалённую точку, то W_* должен удовлетворять также условию (2.14) или/и условию (2.15). Тогда согласно представлениям (2.7) и (2.9) находим комплексные потенциалы W и W_ν (функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\varphi_\nu(\zeta)$, $\psi_\nu(\zeta)$, $\nu = 1, 2$) и согласно гомеоморфизму $\zeta = \zeta(z)$ искомые обобщённые потенциалы $\varphi(z)$, $\varphi_\nu(z)$ и функции тока $\psi(z)$, $\psi_\nu(z)$, $\nu = 1, 2$, течения.

Заметим, что для разрешимости второй внутренней краевой задачи согласно уравнению неразрывности (1.2) должен быть равен нулю поток жидкости через весь непроницаемый замкнутый контур σ'_2 , исключая его точки $\zeta = \zeta_0 \in \sigma'_2$. Это означает, что комплексный потенциал $W_0 = f_0(\zeta) + \bar{f}(\zeta)$, характеризующий заданные внутри и на контуре σ'_2 источники течения, должен согласно равенству

$$\int_{\sigma'_2} H v_n dl = 0$$

при учёте [10, с. 180] $H v_n = P'_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + P'_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial l}$ удовлетворять следующему условию:

$$\int_{\sigma'_2} \left(P'_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + P'_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial l} \right) dl = 0. \quad (2.16)$$

Здесь

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)(f_0(\zeta) + \bar{f}(\zeta))]}{P'_1(\zeta)}, \quad P' = P'_1 + iP'_2 = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}.$$

Решение поставленных граничных задач представим в конечном виде, когда анизотропный слой однороден, а границы моделируются прямой линией. Исследование задач в общем случае анизотропного неоднородного слоя с произвольными гладкими граничными кривыми редуцируем к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

3. Задачи в случае прямолинейных границ. Пусть анизотропный (кусочно-анизотропный) слой однородный и его проводимость $P = HK$ постоянная (кусочно-постоянная). На плоскости z каждую из границ σ_1 , σ_2 и Γ (граница σ_0 , естественно, отсутствует) моделируем прямой линией, проходящей через произвольную точку $z_0 = x_0 + iy_0$ под углом θ_0 к оси Ox . Её параметрическое уравнение ($t \in (-\infty, \infty)$ – параметр) имеет вид

$$z = z_0 + te^{i\theta_0} \quad (x = x_0 + t \cos \theta_0, \quad y = y_0 + t \sin \theta_0). \quad (3.1)$$

Поскольку проводимость слоя постоянная ($P_{ij} = \text{const}$, $i, j = 1, 2$), то находим частное решение уравнения (2.1) при $\mu = \text{const}$, представляющее прямое и обратное аффинное преобразование плоскостей $z = z + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$ [10, с. 218]:

$$\zeta = [z - z_0 + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)]e^{-i\theta_0}, \quad z - z_0 = \frac{\zeta e^{i\theta_0} - \mu\bar{\zeta}e^{-i\theta_0}}{1 - |\mu|^2}, \quad (3.2)$$

где $e^{i\theta_0} = e^{i\theta_0} + \mu e^{-i\theta_0}$, $e^{-i\theta_0} = e^{-i\theta_0} + \bar{\mu}e^{i\theta_0}$. Согласно преобразованию (3.2) прямая линия (3.1) преобразуется в прямую $\zeta = t$ ($\xi = t$, $\eta = 0$, $t \in (-\infty, \infty)$) – координатную ось $O\xi$, а точка $z = z_0$ – в точку $\zeta = 0$ ($\xi = 0$, $\eta = 0$) – начало координат плоскости ζ .

Решение задачи сопряжения даёт

Теорема 1 (сопряжения на прямой). Пусть заданные источники течения в анизотропном однородном слое постоянной проводимости $P = HK$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f_1(\zeta) + f_2(\zeta), \quad (3.3)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(\zeta)$ расположены на оси $O\xi$, а функций $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ – в полуплоскостях $\{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta > 0\}$ и $\{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta < 0\}$ соответственно, причём

$$f_j(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3.4}$$

если эти функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в областях $D'_1 = \{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta > 0\}$ и $D'_2 = \{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta < 0\}$, проводимости слоя в которых \tilde{P}'_1 и \tilde{P}'_2 ($\tilde{P}'_\nu = k_\nu P'$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$) соответственно, характеризуют комплексные потенциалы

$$\begin{aligned} W_1(\zeta) &= W_0(\zeta) + \Lambda[\overline{P'}(f_0(\bar{\zeta}) + f_1(\bar{\zeta})) + P'f_2(\zeta)], \quad \zeta \in D'_1, \\ W_2(\zeta) &= W_0(\zeta) - \bar{\Lambda}[P'f_1(\zeta) + \overline{P'}(f_0(\bar{\zeta}) + f_2(\bar{\zeta}))], \quad \zeta \in D'_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $W_0(\zeta)$ – комплексный потенциал (3.3),

$$\Lambda = \frac{2\lambda}{(1-\lambda)P' + (1+\lambda)\overline{P'}}, \quad \bar{\Lambda} = \frac{2\lambda}{(1-\lambda)\overline{P'} + (1+\lambda)P'}, \quad \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \lambda \in (-1, 1).$$

Доказательство. Поскольку проводимость слоя $P' = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{P(P_a)} = \text{const}$, то уравнение (2.3) принимает вид $\partial W / \partial \bar{\zeta} = 0$, характерный для аналитической функции*) $W(\zeta)$. Следовательно, заданный комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ – аналитическая функция всюду на плоскости, кроме особых точек. Убедимся, что аналитической функцией является комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$, который согласно формулам (2.9) и (3.5) представим в виде

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} AU_1(\zeta), & \zeta \in D'_1, \\ BU_2(\zeta), & \zeta \in D'_2. \end{cases}$$

Здесь $U_1(\zeta) = \overline{P'}(f_0(\bar{\zeta}) + f_1(\bar{\zeta})) + P'(\zeta)$, $U_2(\zeta) = P'f_1(\zeta) + \overline{P'}(f_0(\bar{\zeta}) + f_2(\bar{\zeta}))$, A и B – в общем случае комплексные постоянные.

По условию теоремы функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ имеют заданные сингулярности в областях D'_1 и D'_2 соответственно. Поэтому $f_1(\zeta)$, $\zeta \in D'_2$, и $f_2(\zeta)$, $\zeta \in D'_1$, – аналитические функции. Аналитически продолжим каждую из них соответственно в областях D'_1 и D'_2 . Получим функции $\overline{f_1(\bar{\zeta})}$, $\zeta \in D'_1$, и $\overline{f_2(\bar{\zeta})}$, $\zeta \in D'_2$, аналитические в областях D'_1 и D'_2 . Функции $f_0(\zeta)$, $\overline{f_0(\bar{\zeta})}$ аналитические всюду в областях D'_1 и D'_2 . Поэтому $U_1(\zeta)$, $\zeta \in D'_1$, и $U_2(\zeta)$, $\zeta \in D'_2$, – аналитические функции в областях D'_1 и D'_2 и, следовательно, комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ – аналитическая функция в этих областях.

Теперь найдём константы A и B из условия (2.13) на границе $\Gamma' = \{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta = 0\}$. Отметив, что на ней справедливы соотношения

$$\overline{U_1(\xi, 0)} = U_2(\xi, 0), \quad P'W_0(\xi, 0) + \overline{P'}W_0(\xi, 0) = U_1(\xi, 0) + U_2(\xi, 0),$$

имеем равенство

$$[((1-\lambda)P' + (1+\lambda)\overline{P'})A - 2\lambda]U_1(\xi, 0) - [2\lambda\overline{P'}\bar{A} - (1+\lambda)(P' + \overline{P'})B - 2\lambda]U_2(\xi, 0) = 0.$$

Оно обращается в тождество во всех точках оси $O\xi$, за исключением особых точек функции $f_0(\zeta)$ на этой оси, если

$$A = \Lambda = \frac{2\lambda}{(1-\lambda)P' + (1+\lambda)\overline{P'}}, \quad B = -\bar{\Lambda} = -\frac{2\lambda}{(1-\lambda)\overline{P'} + (1+\lambda)P'}.$$

*) Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ удовлетворяют системе уравнений (2.4) с заданными постоянными коэффициентами $\sqrt{D(P_s)}$ и $\sqrt{D(P_a)}$.

Тогда имеем комплексный потенциал возмущений

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} \Lambda U_1(\zeta), & \zeta \in D'_1, \\ -\bar{\Lambda} U_2(\zeta), & \zeta \in D'_2, \end{cases}$$

который удовлетворяет в силу условий (3.4) требованиям (2.15) в бесконечности.

Учитывая найденный комплексный потенциал $W_*(\zeta)$, согласно представлению (2.9) имеем искомые комплексные потенциалы (3.5). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда заданная уравнением (3.1) прямая моделирует каждую из границ σ_1 и σ_2 . Решение первой и второй краевых задач выражает

Теорема 2. Пусть заданные источники течения в изотропном однородном слое постоянной проводимости $P = HK$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta), \quad (3.6)$$

в котором сингулярности функции $f_0(\zeta)$ расположены на оси $O\xi$, а функции $f(\zeta)$ – в верхней координатной полуплоскости $\{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta > 0\}$, причём

$$f_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad f(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

если эти функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в области $D' = \{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta > 0\}$, ограниченной осью $O\xi$, которая моделирует границу σ'_1 или σ'_2 , описывает комплексный потенциал

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) - \frac{\bar{P}'}{P'} \overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D', \quad (3.8)$$

или

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + \overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D'. \quad (3.9)$$

Здесь $W_0(\zeta)$ – комплексный потенциал (3.6), а $\overline{W_0(\bar{\zeta})} = \overline{f_0(\bar{\zeta})} + \overline{f(\bar{\zeta})}$.

Доказательство. Функции $f_0(\zeta)$ и $\overline{f_0(\bar{\zeta})}$ – аналитические в области D' , а функция $f(\zeta)$ – аналитическая в нижней полуплоскости $\{(\xi, \eta) : \xi \in (-\infty, \infty), \eta < 0\}$. Аналитически продолжив функцию $f(\zeta)$ в верхнюю полуплоскость, получим аналитическую функцию $\overline{f(\bar{\zeta})}$, $\zeta \in D'$. Поэтому комплексные потенциалы возмущений

$$W_*(\zeta) = -\frac{\bar{P}'}{P'} \overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D', \quad (3.10)$$

и

$$W_*(\zeta) = \overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D', \quad (3.11)$$

являются аналитическими функциями в области D' .

Подставим комплексные потенциалы (3.10) и (3.11) в условия (2.11') и (2.12') соответственно. Нетрудно убедиться в том, что они выполняются во всех точках оси $O\xi$, моделирующей границы σ'_1 и σ'_2 , кроме заданных точек сингулярности функции $f_0(\zeta)$.

В силу условий (3.7) комплексные потенциалы (3.10) и (3.11) удовлетворяют условиям (2.15) в бесконечности.

Используя представление (2.7) и найденные комплексные потенциалы $W_*(\zeta)$, получаем искомые комплексные потенциалы (3.8) и (3.9). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи решений граничных задач, представленных теоремами 1 и 2 в общем виде. Если на границах источники течения отсутствуют ($f_0(\zeta) = 0$), то из выражений (3.5), (3.8) и (3.9) следуют при $W_0(\zeta) = f(\zeta)$ известные решения задач [10, с. 218]. Когда источники располагаются только на границах, вне границ источников нет, то в решениях (3.5), (3.8) и (3.9) следует положить $W_0(\zeta) = f_0(\zeta)$. Заданные конкретные источники течения характеризуются комплексным потенциалом $W_0(\zeta)$, который может иметь изолированные особые точки логарифмического типа и полюсы [10, с. 127].

4. Задачи с произвольными гладкими границами. Рассмотрим теперь общий случай фильтрации в анизотропном неоднородном слое, когда в плоскости ζ границы Γ' и σ'_2 моделируются замкнутой гладкой (кусочно-гладкой) кривой L' . В плоскости ζ комплексный потенциал $W(\zeta)$ представим обобщённым интегралом типа Коши [10, с. 185]

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} [\Omega_1^0(\zeta, \tau)f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta, \tau)\bar{f}(\tau)] dl_\tau, \quad \zeta \notin L'. \tag{4.1}$$

Здесь $\Omega_k^0(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$, – ядра интеграла, которые выражаются через фундаментальные решения $F_k(\zeta, \tau)$, $k = 1, 2$, уравнения (2.3) формулами

$$\begin{aligned} \Omega_1^0(\zeta, \tau) &= -2\pi P'(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial \lambda_\tau} = -2\pi i \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial \lambda_\tau}, \\ \Omega_2^0(\zeta, \tau) &= -2\pi \overline{P'}(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial \bar{\lambda}_\tau} = 2\pi i \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial \bar{\lambda}_\tau}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где комплексные операторы дифференцирования по $\lambda_\tau = l_\tau + in_\tau$ и $\bar{\lambda}_\tau = l_\tau - in_\tau$ по направлению ортов касательной \vec{l}_τ и нормали \vec{n}_τ кривой L' находятся как

$$2 \frac{\partial}{\partial \lambda_\tau} = \frac{\partial}{\partial l_\tau} - i \frac{\partial}{\partial n_\tau}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_\tau} = \frac{\partial}{\partial l_\tau} + i \frac{\partial}{\partial n_\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial l_\tau} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\tau} + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial n_\tau} = i \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_\tau} - \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_\tau} \right).$$

Пусть в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0n}\}$ кривой L' располагается система дискретных источников течения, которые моделируем сингулярностями (изолированными особыми точками) функции $f(\zeta)$, причём в этих точках функция $f(\zeta)$ должна удовлетворять условию интегрируемости

$$f(\zeta) = O(|\zeta - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0, 1) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \zeta_0, \quad \zeta, \zeta_0 \in L',$$

которое необходимо для существования (сходимости) интеграла (4.1).

Полагаем, что фундаментальные решения $F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$ удовлетворяют на сингулярных линиях σ'_{01} и σ'_{01} условиям

$$\left[\frac{\operatorname{Re}(P'(\zeta)F_1(\zeta, \tau))}{\operatorname{Re} P'(\zeta)} \right]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{01}, \quad \left[\frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} F_2(\zeta, \tau)}{\operatorname{Re} P'(\zeta)} \right]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma'_{02}, \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Тогда комплексный потенциал (4.1) будет удовлетворять условиям (2.14).

Поскольку комплексный потенциал (4.1) определяется обобщённым интегралом типа Коши, то согласно [10, с. 185; 12, с. 144] он удовлетворяет условию

$$W(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \rightarrow \infty.$$

Пусть $f(\zeta)$, $\zeta \in L'$, – функция класса Гёльдера всюду на L' , кроме точек $\zeta_0 \in L'$ сингулярности этой функции. Непрерывно продолжив комплексный потенциал (4.1) на кривую L' , получим его предельные значения

$$W^\pm(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} [\Omega_1^0(\zeta, \tau)f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta, \tau)\bar{f}(\tau)] dl_\tau \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0, \tag{4.3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Из представления (4.3) следуют эквивалентные ему равенства

$$\begin{aligned} W^+(\zeta) + W^-(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} [\Omega_1^0(\zeta, \tau)f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta, \tau)\bar{f}(\tau)] dl_\tau, \\ W^+(\zeta) + W^-(\zeta) &= f(\zeta), \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Полагая непрерывность проводимости $P'(\zeta)$ на кривой L' и учитывая предельные выражения комплексного потенциала

$$W^\pm(\zeta) = \varphi^\pm(\zeta) + i \frac{\psi^\pm(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

находим из равенств (4.4) разности предельных значений функций:

$$\begin{aligned} \varphi^+(\zeta) - \varphi^-(\zeta) &= \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)f(\zeta)]}{\operatorname{Re} P'(\zeta)}, \\ \psi^+(\zeta) - \psi^-(\zeta) &= \frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} f(\zeta)}{\operatorname{Re} P'(\zeta)}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Рассмотрим два возможных, физически обоснованных, случая равенств (4.5). В первом из них непрерывен в точках $\zeta \neq \zeta_0 \in L'$ кривой L' поток жидкости, т.е. непрерывна функция тока $\psi^+(\zeta) = \psi^-(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Тогда имеем $\operatorname{Im} f(\zeta) = 0$ и, следовательно, $f(\zeta) = G(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Вещественная функция $G(\zeta)$ определяет разрыв на кривой L' обобщённого потенциала (давления):

$$\varphi^+(\zeta) - \varphi^-(\zeta) = G(\zeta), \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

В этом случае комплексный потенциал (4.1) и его предельные значения (4.3) с учётом ядер (4.2) принимают вид

$$W(\zeta) = \int_{L'} \Omega(\zeta, \tau) G(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \neq L', \quad (4.6)$$

$$W^\pm(\zeta) = \int_{L'} \Omega(\zeta, \tau) G(\tau) dl_\tau \pm \frac{G(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0, \quad (4.7)$$

где

$$\Omega(\zeta, \tau) = P'_1(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} - P'_2(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = - \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}.$$

Во втором случае полагаем, что в точках $\zeta \neq \zeta_0 \in L'$ кривой L' непрерывен обобщённый потенциал (давление): $\varphi^+(\zeta) = \varphi^-(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Тогда имеем $\operatorname{Re}[P'(\zeta)f(\zeta)] = 0$ и, следовательно, $P'(\zeta)f(\zeta) = iH(\zeta)$, откуда $f(\zeta) = iH(\zeta)/P'(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Вещественная функция $H(\zeta)$ определяет разрыв на кривой L' функции тока (разрыв потока жидкости):

$$\psi^+(\zeta) - \psi^-(\zeta) = H(\zeta), \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

В этом случае комплексный потенциал (4.1) и его предельные значения (4.3) запишем в виде

$$W(\zeta) = \int_{L'} \Omega_*(\zeta, \tau) H(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \neq L', \quad (4.8)$$

$$W^\pm(\zeta) = \int_{L'} \Omega_*(\zeta, \tau) H(\tau) dl_\tau \pm i \frac{H(\zeta)}{2P'(\zeta)}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0, \quad (4.9)$$

где

$$\Omega_*(\zeta, \tau) = - \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = - \frac{1}{|P'(\zeta)|^2} \left(P'_1(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right).$$

Применим обобщённый интеграл типа Коши для решения поставленной задачи сопряжения и второй краевой задачи. Рассмотрим сначала задачу сопряжения, когда произвольный гладкий замкнутый контур L' моделирует граничную кривую Γ' ($L = \Gamma'$). Справедлива

Теорема 3 (сопряжения на произвольной гладкой кривой). Пусть заданные источники течения в слое проводимости $P = HK$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta), \tag{4.10}$$

в котором сингулярности функции $f_0(\zeta)$ расположены в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0n}\}$ кривой Γ' , а сингулярности функции $f(\zeta)$ – вне этой кривой, причём функция $f_0(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$|f_0(\zeta)| = O(|\zeta - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0, 1) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \zeta_0, \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma'. \tag{4.11}$$

Тогда течение в областях D'_1 и D'_2 , проводимости слоя в которых соответственно \tilde{P}'_1 и \tilde{P}'_2 ($\tilde{P}'_\nu = k_\nu P'(\zeta)$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$), характеризуют комплексные потенциалы $W_1(\zeta)$ и $W_2(\zeta)$:

$$W_\nu(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + \int_{\Gamma'} \Omega(\zeta, \tau) [2\lambda u_0(\tau) + g(\tau)] dl_\tau, \quad z \in D'_\nu, \quad \nu = 1, 2, \tag{4.12}$$

если функция $g(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(\zeta) - 2\lambda \int_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) g(\tau) dl_\tau + 4\lambda^2 \int_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta, \tau) u_0(\tau) dl_\tau = 2\lambda u(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{4.13}$$

Здесь

$$\Omega(\zeta, \tau) = P'_1(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} - P'_2(\tau) \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{\partial F_2}{\partial l_\tau},$$

$$\mathcal{K}(\zeta, \tau) = P'_1(\tau) \frac{\partial \Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} - P'_2(\tau) \frac{\partial \Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial l_\tau},$$

$$u(\zeta) = \frac{\text{Re}[P'(\zeta)f(\zeta)]}{P'_1(\zeta)}, \quad u_0(\zeta) = \frac{\text{Re}[P'(\zeta)f_0(\zeta)]}{P'_1(\zeta)},$$

орт нормали $n_\tau \in \Gamma'$ направлен в область D'_1 , $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$.

Доказательство. Учтём, что функция тока непрерывна всюду на кривой Γ' , кроме точек $\zeta_0 \in \Gamma'$, где заданы источники течения. Согласно представлениям (2.9) и (4.6) комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \int_{\Gamma'} \Omega(\zeta, \tau) G(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D'_\nu, \quad \nu = 1, 2, \tag{4.14}$$

где $G(\tau) = g_0(\tau) + g(\tau)$ – вещественная функция $\tau \in \Gamma'$. Функция $g_0(\tau)$ имеет в соответствии с условием (4.11) интегрируемые особенности в тех же точках $\tau = \zeta_0 \in \Gamma'$, что и функция $f_0(\tau)$, а функция $g(\tau)$ непрерывна на всей кривой Γ' .

Комплексный потенциал (4.14) – обобщённая аналитическая функция, которая удовлетворяет уравнению (2.3) и условиям (2.14) и (2.15), а также и условию (2.13) на кривой Γ' .

Пусть функция $g_0(\tau)$, $\tau \in \Gamma'$, – класса Гёльдера, за исключением точек $\tau = \zeta_0 \in \Gamma'$ сингулярности функции, а функция $g(\tau)$, $\tau \in \Gamma'$, – класса Гёльдера всюду на кривой Γ' . Тогда согласно представлению (4.7) имеем предельные значения комплексного потенциала (4.14):

$$W_*^\pm(\zeta) = \int_{\Gamma'} \Omega(\zeta, \tau) G(\tau) dl_\tau \pm \frac{G(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Подставив значения $W_*^\pm(\zeta)$ в условия (2.13), получим равенство

$$P_1(\zeta)G(\zeta) - \lambda \int_{\Gamma'} [P'(\zeta)\Omega(\zeta, \tau) + \overline{P'}(\zeta)\overline{\Omega}(\zeta, \tau)]G(\tau) dl_\tau = \\ = \lambda[P'(\zeta)W_0(\zeta) + \overline{P'}(\zeta)\overline{W_0}(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

которое с учётом выражения

$$P'(\zeta)\Omega(\zeta, \tau) + \overline{P'}(\zeta)\overline{\Omega}(\zeta, \tau) = P'_1(\zeta)\mathcal{K}(\zeta, \tau)$$

и представлений в заданном комплексном потенциале (4.10) функций

$$f(\zeta) = u(\zeta) + i\frac{v(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad f_0(\zeta) = u_0(\zeta) + i\frac{v_0(\zeta)}{P'(\zeta)}$$

обращается в тождество, если функция $G(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(\zeta) - 2\lambda \int_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta, \tau)G(\tau) dl_\tau = 2\lambda[u_0(\zeta) + u(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0. \quad (4.15)$$

Здесь $G(\zeta) = g_0(\zeta) + g(\zeta)$, $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$ – ядро уравнения, имеющее такой же вид, как и в уравнении (4.13).

Уравнение (4.13) принципиально усложнено тем, что функции $g_0(\zeta)$ и $u_0(\zeta)$ имеют в точках $\zeta = \zeta_0 \in \Gamma'$ сингулярности. Упростим его. Пусть функции $g_0(\zeta)$ и $u_0(\zeta)$ имеют в точках $\zeta = \zeta_0 \in \Gamma'$ сингулярности одного и того же типа (порядка). Положим $g_0(\zeta) = 2\lambda u_0(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$. Тогда, учитывая $G(\zeta) = 2\lambda u_0(\zeta) + g(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$, и представление (2.9), имеем искомые комплексные потенциалы (4.12) и интегральное уравнение (4.13). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.13), полагая, что кривая Γ' класса Ляпунова. Оценим его ядро

$$\mathcal{K}(\zeta, \tau) = P'_1(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} - P'_2(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}.$$

Согласно асимптотике [10, с. 112]

$$\Phi_1(\zeta, \tau) \sim \frac{1}{2\pi P'_1(\tau)} \ln \frac{1}{|\zeta - \tau|} \quad \text{при } \tau \rightarrow \zeta,$$

представим функцию $\Phi_1(\zeta, \tau)$ в следующем виде:

$$\Phi_1(\zeta, \tau) = \frac{a_1(\zeta, \tau)}{2\pi P'_1(\tau)} \ln \frac{1}{|\zeta - \tau|} + b_1(\zeta, \tau).$$

Здесь $a_1(\zeta, \tau)$, $b_1(\zeta, \tau)$ – гладкие функции от ζ и τ , причём $a_1(\zeta, \zeta) = 1$. Находим производные по ортам \vec{n}_τ и \vec{l}_τ , $\tau \in \Gamma'$:

$$\frac{\partial\Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} = \nabla_\tau\Phi_1(\zeta, \tau) \cdot \vec{n}_\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{a_1(\zeta, \tau)}{P'_1(\tau)} \frac{\cos(\widehat{R, \vec{n}_\tau})}{R} + \frac{\partial}{\partial n_\tau} \left(\frac{a_1(\zeta, \tau)}{P'_1(\tau)} \right) \ln \frac{1}{R} + \frac{\partial b_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} \right],$$

$$\frac{\partial\Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = \nabla_\tau\Phi_1(\zeta, \tau) \cdot \vec{l}_\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{a_1(\zeta, \tau)}{P'_1(\tau)} \frac{\cos(\widehat{R, \vec{l}_\tau})}{R} + \frac{\partial}{\partial l_\tau} \left(\frac{a_1(\zeta, \tau)}{P'_1(\tau)} \right) \ln \frac{1}{R} + \frac{\partial b_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right].$$

Здесь $R = |\zeta - \tau|$ – модуль вектора $\vec{R} = \zeta\vec{\tau}$ с направляющими косинусами $\cos(\widehat{\vec{R}, \vec{l}_\tau})$ и $\cos(\widehat{\vec{R}, \vec{n}_\tau})$ ($\cos^2(\widehat{\vec{R}, \vec{l}_\tau}) + \cos^2(\widehat{\vec{R}, \vec{n}_\tau}) = 1$) относительно ортогонального базиса ортов \vec{l}_τ и \vec{n}_τ . Поскольку [10, с. 409]

$$|\cos(\widehat{\vec{R}, \vec{n}_\tau})| \leq AR^\mu \quad \text{и} \quad |\cos(\widehat{\vec{R}, \vec{l}_\tau})| \leq 1 - \frac{A^2 R^{2\mu}}{2}, \quad \mu \in (0, 1], \quad A = \text{const} > 0,$$

то имеем неравенства

$$\left| \frac{\partial \Phi_1(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} \right| \leq \frac{A}{2\pi P'_1(\tau) R^{1-\mu}}, \quad \left| \frac{\partial \Phi_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right| \leq \frac{1}{2\pi P'_1(\tau) R} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \zeta \quad (R \rightarrow 0).$$

Тогда для ядра $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$ справедлива оценка

$$|\mathcal{K}(\zeta, \tau)| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{A}{R^{1-\mu}} + \frac{|P'_2(\tau)|}{P'_1(\tau) R} \right] \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \zeta \quad (R \rightarrow 0),$$

где $R = |\zeta - \tau|$, $\mu \in (0, 1]$.

Отсюда в общем случае анизотропного неоднородного слоя следует, что ядро $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$ имеет в точке $\tau = \zeta \in \Gamma'$ особенность $1/R$. Тогда с учётом, что $g(\tau)$ – функция Гёльдера, стоящий первым в уравнении (4.13) интеграл существует в смысле главного значения по Коши. В частности, когда анизотропный слой ортотропный ($P_{12} = P_{21}$, следовательно, $P'_2 = 0$), то ядро имеет слабую (интегрируемую) особенность $1/R^{1-\mu}$ и указанный интеграл существует.

Согласно условию (4.11)

$$u_0(\tau) = O(|\tau - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0, 1) \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma'.$$

Тогда, учитывая оценку (4.15) ядра $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$, находим

$$|\mathcal{K}(\zeta, \tau)u_0(\tau)| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{A}{R^{1-\mu+\varepsilon}} + \frac{|P'_2(\tau)|}{P'_1(\tau) R^{1+\varepsilon}} \right] \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \zeta = \zeta_0 \quad (R \rightarrow 0).$$

Поэтому стоящий вторым в уравнении (4.13) интеграл существует (сходится), исключая точки $\tau = \zeta_0 \in \Gamma'$. В случае ортотропного слоя ($P'_2 = 0$) этот интеграл существует всюду на границе Γ' , если $\varepsilon < \mu$.

Таким образом, исследование задачи сопряжения редуцируется к граничному сингулярному интегральному уравнению второго рода с заданной гладкой правой частью $u(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$.

Представление (4.12) задачи сопряжения получено в общем случае произвольно заданной системы источников течения. В частности, когда источники на границе Γ' отсутствуют ($f_0(\zeta) = 0$), то [10, с. 241]

$$W_0(\zeta) = f(\zeta) + \int_{\Gamma'} \Omega(\zeta, \tau)g(\tau) dl_\tau, \quad z \in D'_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

если функция $g(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(\zeta) - 2\lambda \int_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta, \tau)g(\tau) dl_\tau = 2\lambda u(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'.$$

Когда источники имеются только на границе Γ' , а вне её отсутствуют ($f(\zeta) = 0$), то находим

$$W_\nu(\zeta) = f_0(\zeta) + \int_{\Gamma'} \Omega(\zeta, \tau)[2\lambda u_0(\tau) + g(\tau)] dl_\tau, \quad \zeta \in D'_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

если функция $g(\zeta)$ – решение интегрального уравнения

$$g(\zeta) - 2\lambda \int_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta, \tau)g(\tau) dl_\tau + 4\lambda^2 \int_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta, \tau)u_0(\tau) dl_\tau = 0, \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Это уравнение неоднородное, поскольку его последнее слагаемое содержит только заданные функции.

Согласно условию (4.11) полученное представление (4.12) задачи сопряжения справедливо, когда заданные источники на границе Γ' моделируются изолированными особыми точками логарифмического типа. К таковым относится сток мощности $\Pi_0 > 0$ (источник мощности $\Pi_0 < 0$) и вихрь интенсивности Γ_0 , комплексные потенциалы которых соответственно $\Pi_0 F_1(\zeta, \tau)$ и $\Gamma_0 F_2(\zeta, \tau)$ ($F_1(\zeta, \tau)$ и $F_2(\zeta, \tau)$ – первое и второе фундаментальные решения), а также их наложение $\Pi_0 F_1(\zeta, \tau) + \Gamma_0 F_2(\zeta, \tau)$ – вихреисточник.

Перейдём теперь к исследованию второй краевой задачи, когда произвольная гладкая (кусочно-гладкая) замкнутая кривая L' моделирует контур σ'_2 непроницаемой границы ($L' = \sigma'_2$). Решение второй (внешней и внутренней) краевой задачи выражает

Теорема 4. Пусть течение в слое проводимости $P = НК$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta). \tag{4.16}$$

Здесь сингулярности функции $f_0(\zeta)$ моделируют систему заданных источников течения, которые расположены в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0n}\}$ контура σ'_2 , а сингулярности функции $f(\zeta)$ моделируют источники, не лежащие на σ'_2 , причём функция $f_0(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$|f_0(\zeta)| = O(|\zeta - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0, 1) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \zeta_0, \quad \zeta, \zeta_0 \in \sigma'_2. \tag{4.17}$$

Кроме того, функции $f_0(\zeta)$ и $f(\zeta)$ должны удовлетворять также условию (2.16) в случае второй внутренней краевой задачи.

Если контур σ'_2 непроницаемый для жидкости, то течение в области D' (вне или внутри контура σ'_2) характеризует комплексный потенциал

$$W(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + \int_{\sigma'_2} \Omega_*(\zeta, \tau)[h(\tau) - 2v_0(\tau)] dl_\tau, \quad \zeta \in D', \tag{4.18}$$

если функция $h(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(\zeta) + 2 \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)h(\tau) dl_\tau - 4 \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)v_0(\tau) dl_\tau = 2[\alpha_2 - v(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma'_2, \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{4.19}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_*(\zeta, \tau) &= \frac{\partial F_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{1}{|P'(\tau)|^2} \left[P'_1(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau) \frac{\partial F_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right], \\ \mathcal{K}_*(\zeta, \tau) &= \frac{\partial \Psi_1(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} = \frac{1}{|P'(\tau)|^2} \left[P'_1(\tau) \frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau) \frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right], \\ v(\zeta) &= \frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} f(\zeta)}{P'_1(\zeta)}, \quad v_0(\zeta) = \frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} f_0(\zeta)}{P'_1(\zeta)}, \end{aligned}$$

орт нормали $\vec{n}_\tau \in \sigma'_2$ направлен внутрь области D' и остаётся слева при обходе контура σ'_2 .

Доказательство. Учтём, что контур σ'_2 – линия тока и на нём заданы источники течения. Согласно представлениям (2.7) и (4.8) комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \int_{\sigma'_2} \Omega_*(\zeta, \tau)H(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \tag{4.20}$$

Здесь $H(\tau) = h_0(\tau) + h(\tau)$ – вещественная функция $\tau \in \sigma'_2$, причём функция $h_0(\tau)$ имеет согласно условию (4.17) интегрируемые особенности в тех же точках $\tau = \zeta_0 \in \sigma'_2$, что и функция $f_0(\tau)$, а функция $h(\tau)$ непрерывна на всём контуре σ'_2 .

Комплексный потенциал (4.20) – обобщённая аналитическая функция в области D' . Он удовлетворяет уравнению (2.3) и условиям (2.14) и (2.15). Удовлетворим его условию (2.12) на контуре σ'_2 .

Пусть $h_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma'_2$, – функция Гёльдера, кроме её точек $\zeta = \zeta_0 \in \sigma'_2$ сингулярности, а $h(\zeta)$, $\zeta \in \sigma'_2$, – функция Гёльдера на всём контуре σ'_2 . Согласно представлению (4.9) имеем предельные значения комплексного потенциала (4.20):

$$W_*^+(\zeta) = \int_{\sigma'_2} \Omega_*(\zeta, \tau)H(\tau) dl_\tau \pm i \frac{H(\zeta)}{2P'(\zeta)}, \quad \zeta \in \sigma'_2, \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

где интеграл понимается в случае главного значения по Коши. Подставим $W_*^+(\zeta)$ в условие (2.12) и учтём в заданном комплексном потенциале (4.16) представления функций

$$f_0(\zeta) = u_0\zeta + i \frac{v_0(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad f(\zeta) = u\zeta + i \frac{v(\zeta)}{P'(\zeta)}.$$

Получим равенство

$$\frac{P'_1(\zeta)}{|P'(\zeta)|^2} \left[\frac{H(\zeta)}{2} + \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)H(\tau) dl_\tau + v_0(\zeta) + v(\zeta) - \alpha_2 \right] = 0, \quad \zeta \in \sigma'_2, \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

которое обращается в тождество, если функция $H(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(\zeta) + 2 \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)H(\tau) dl_\tau = 2(\alpha_2 - v_0(\zeta) - v(\zeta)), \quad \zeta \in \sigma'_2, \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Здесь $H(\zeta) = h_0(\zeta) + h(\zeta)$, $\mathcal{K}_*(\zeta, \tau)$ – ядро уравнения, которое имеет такой же вид, что и в уравнении (4.19). Это уравнение усложнено тем, что функции $h_0(\zeta)$ и $v_0(\zeta)$ имеют в точках $\zeta = \zeta_0 \in \sigma'_2$ сингулярности. Упростим уравнение. Пусть функции $h_0(\zeta)$ и $v_0(\zeta)$ обладают в указанных точках сингулярностями одного и того же типа (порядка) и положим $h_0(\zeta) = -2v_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma'_2$. Тогда, учитывая $H(\zeta) = h(\zeta) - 2v_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma'_2$, и представления (2.7), (4.20), имеем искомый комплексный потенциал (4.18) и интегральное уравнение (4.19).

Поскольку согласно теореме функции $f_0(\zeta)$ и $f(\zeta)$ должны удовлетворять условию (2.16), то вторая внутренняя краевая задача разрешима (уравнение (4.19) имеет решение). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.19). Оценим его ядро

$$\mathcal{K}_*(\zeta, \tau) = \frac{1}{|P'(\tau)|^2} \left[P'_1(\tau) \frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P'_2(\tau) \frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau} \right].$$

Учитывая асимптотику [10, с. 114]

$$\Psi_2(\zeta, \tau) \sim \frac{|P'(\tau)|^2}{2\pi P'_1(\tau)} \ln \frac{1}{|\zeta - \tau|} \quad \text{при } \tau \rightarrow \zeta,$$

представим функцию $\Psi_2(\zeta, \tau)$ в следующем виде:

$$\Psi_2(\zeta, \tau) = \frac{|P'(\tau)|^2 a_2(\zeta, \tau)}{2\pi P'_1(\tau)} \ln \frac{1}{|\zeta - \tau|} + b_2(\zeta, \tau).$$

Здесь $a_2(\zeta, \tau)$, $b_2(\zeta, \tau)$ – гладкие функции ζ и τ , причём $a_2(\zeta, \zeta) = 1$.

Замечаем, что ядро $\mathcal{K}_*(\zeta, \tau)$ аналогично ядру $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$ уравнения (4.13). Поэтому, проведя оценку подобно тому как это сделано выше для ядра $\mathcal{K}(\zeta, \tau)$, находим

$$|\mathcal{K}_*(\zeta, \tau)| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{B}{R^{1-\mu}} + \frac{P'_2(\tau)}{P'_1(\tau)R} \right] \quad \text{при } \tau \rightarrow \zeta \quad (R \rightarrow 0),$$

где $B = \text{const} > 0$, $R = |\zeta - \tau|$, $\mu \in (0, 1]$.

Согласно условию (4.17)

$$v_0(\tau) = O(|\tau - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0, 1) \quad \text{при } \tau \rightarrow \zeta_0 \in \sigma'_2,$$

и, следовательно,

$$|\mathcal{K}_*(\zeta, \tau)v_0(\tau)| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{B}{R^{1-\mu+\varepsilon}} + \frac{P'_2(\tau)}{P'_1(\tau)R^{1+\varepsilon}} \right] \quad \text{при } \tau \rightarrow \zeta = \zeta_0 \quad (R \rightarrow 0).$$

Учитывая найденные оценки, видим, что стоящий первым в уравнении (4.19) интеграл существует в смысле главного значения по Коши, а второй интеграл существует, исключая точки $\zeta_0 \in \bar{\sigma}'_2$.

Таким образом, исследование второй внешней и внутренней краевых задач редуцируется к граничному сингулярному интегральному уравнению (4.19), правая часть которого моделируется заданной гладкой функцией $v(\zeta)$.

Рассмотрим частные случаи представления (4.18) второй краевой задачи. Когда на границе σ'_2 нет источников ($f_0(\zeta) = 0$), то имеем [10, с. 239]

$$W(\zeta) = f(\zeta) + \int_{\sigma'_2} \Omega_*(\zeta, \tau)h(\tau) dl_\tau, \quad \zeta \in D',$$

если функция $h(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(\zeta) + 2 \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)h(\tau) dl_\tau = 2(\alpha_2 - v(\zeta)), \quad \zeta \in \sigma_2.$$

Когда только на границе σ'_2 имеются источники, а вне σ'_2 они отсутствуют ($f(\zeta) = 0$), то находим

$$W(\zeta) = f_0(\zeta) + \int_{\sigma'_2} \Omega_*(\zeta, \tau)[h(\tau) - 2v_0(\zeta)] dl_\tau, \quad \zeta \in D',$$

если функция $h(\zeta)$ – решение интегрального уравнения

$$h(\zeta) + 2 \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)h(\tau) dl_\tau - 4 \int_{\sigma'_2} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau)v_0(\tau) dl_\tau = 2\alpha_2, \quad \zeta \in \sigma_2.$$

В этом случае имеем, например, течение – сток мощности $\Pi_0 > 0$ (источник мощности $\Pi_0 < 0$), который расположен в точке $\zeta_0 \in \sigma_2$ и характеризуется заданным комплексным потенциалом $W_0(\zeta) = f_0(\zeta) = \Pi_0 F_1(\zeta, \zeta_0)$, $F_1(\zeta, \zeta_0)$ – первое фундаментальное решение.

Заключение. Подводя итоги, отметим, что решения первой и второй краевых задач и задачи сопряжения с произвольно заданной системой дискретных источников в анизотропном однородном слое представлены в конечном виде в случае границ, моделируемых прямой линией. В общем случае, когда слой анизотропный неоднородный, а границы моделируются произвольными гладкими (кусочно-гладкими) замкнутыми кривыми, вторая краевая задача и задача сопряжения редуцированы к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

Эти уравнения могут быть решены, например, численными методами дискретных особенностей [1, с. 433]. Изученные задачи являются обобщением исследованных в монографии [13, с. 247] граничных задач фильтрации в изотропном слое, не имеющем источников на границах.

Исследованные граничные задачи – математические модели фильтрационных процессов, встречающихся при добыче флюидов (воды, нефти) из природных пластов грунта сложной геологической структуры. Предложенный метод решения задач может быть использован для исследования процессов иной физической природы (теплопроводность, электропроводность, электро- и магнитостатика), которые характеризуются законами, математически аналогичными законам фильтрации (1.1) и (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. *Dimitroglou M.G., Setukha A.V., Lifanov I.K.* On numerical modelling of a three-dimensional flow past a wing with external flow suction and on the effect of flow suction on trailing vortices // *Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model.* 2004. V. 19. № 2. P. 109–129.
3. *Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. № 9. С. 1227–1241.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.
5. *Пивень В.Ф., Костин О.В.* Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // *Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”.* Вып. 7. Орёл, 2009. С. 92–98.
6. *Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.* Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на окружности // *Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”.* Вып. 7. Орёл, 2009. С. 46–51.
7. *Пивень В.Ф.* Задачи о плоскопараллельных фильтрационных течениях с источниками на границах // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 9. С. 1214–1225.
8. *Пивень В.Ф.* Исследование трёхмерных задач фильтрации жидкости с источниками на границах // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 9. С. 1238–1254.
9. *Пивень В.Ф.* Двумерные граничные задачи фильтрационных течений с произвольно расположенными источниками в неоднородном пористом слое // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 8. С. 1132–1147.
10. *Пивень В.Ф.* Математические модели фильтрации жидкости. Орёл, 2015.
11. *Радыгин В.М., Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М., 1983.
12. *Векуа И.А.* Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
13. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл, 2006.

Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 04.03.2023 г.
После доработки 23.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

УДК 519.63

О КВАЗИАКУСТИЧЕСКОЙ СХЕМЕ А.П. ФАВОРСКОГО

© 2023 г. М. В. Абакумов, В. А. Исаков

Рассматривается явная консервативная квазимонотонная разностная схема второго порядка точности для численного решения уравнений газовой динамики, предложенная А.П. Фаворским. Приводятся обоснования основных методов и подходов, лежащих в основе её построения.

DOI: 10.31857/S0374064123060080, EDN: FGLOLL

Введение. Численным методам решения гиперболических уравнений и систем посвящено огромное количество работ (см., например, обзоры [1, 2]). Интерес к постоянному развитию этого направления прикладной математики обусловлен тем, что такие уравнения, в частности система уравнений Эйлера газовой динамики, являются базовой составляющей математических моделей, описывающих многие практически значимые задачи. При этом в силу нелинейности уравнений нахождение их решений аналитическими методами возможно лишь в редких частных случаях.

При построении разностных методов приближённого решения системы уравнений газовой динамики используются различные идеи и подходы, которые зачастую перекликаются между собой, однако имеют существенные отличия в определённых аспектах. В настоящей работе речь пойдет о так называемой квазиакустической разностной схеме, предложенной А.П. Фаворским, которую сам автор позиционировал как комбинацию консервативного метода Годунова [3] и сеточно-характеристического подхода [4]. Схема [5–9] является явной, имеет второй порядок точности на монотонных участках гладких решений, не содержит искусственных регуляризаторов и при этом сохраняет монотонность профиля решений, в том числе в окрестности разрывов. В указанных статьях основное внимание уделено численным исследованиям квазиакустической схемы. Чтобы дополнить эти исследования, в данной работе авторы постарались привести более детальные обоснования методов и подходов, использованных при построении вычислительного алгоритма, поскольку заложенные в них идеи по-прежнему представляются перспективными.

Работа посвящена памяти замечательного человека и талантливого ученого Антона Павловича Фаворского (29.08.1940–17.06.2013), который навсегда останется в сердцах его благодарных учеников, к которым, безусловно, относят себя и авторы статьи.

1. Разностная схема для уравнения переноса. Рассматривается начально-краевая задача для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Предполагается, что функция $u_0(x)$ является финитной на интервале $(0, l)$, а значение T таково, что решение $u(x, t)$, где t – время, x – пространственная переменная, остаётся финитным на том же интервале при всех $t \in (0, T]$. Это позволяет рассматривать однородные граничные условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Далее для определённости будем считать, что $a > 0$.

На отрезках $[0, l]$ и $[0, T]$ вводится равномерная сетка

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\}, \quad \omega_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, K, \quad K\tau = T\}.$$

Помимо узлов x_i пространственной сетки определяются границы разностных ячеек $x_{i+1/2} = (i + 1/2)h$. В соответствии с общей идеологией построения конечно-объёмных разностных схем [2] вводится сеточная функция $y_i^n = y(x_i, t_n)$, определяемая в узлах сетки как интегральное среднее по разностной ячейке при $t = t_n$:

$$y_i^n = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx. \tag{1}$$

Разностная схема строится интегро-интерполяционным методом [10, с. 114]. Для этого уравнение переноса интегрируется по пространственно-временной ячейке $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. В результате получается соотношение

$$h(y_i^{n+1} - y_i^n) + w_{i+1/2}^n - w_{i-1/2}^n = 0,$$

где $w_{i+1/2}^n = a \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x_{i+1/2}, t) dt$. Величины $w_{i+1/2}^n$ представляют собой интегральные потоки через границы ячеек за время $\tau = t_{n+1} - t_n$.

Поскольку решение $u(x, t)$, фигурирующее в подынтегральных выражениях для потоков, заранее неизвестно, для их приближённого вычисления в каждой ячейке сетки используется линейная реконструкция [2] функции $u(x, t)$ по значениям сеточной функции y_i^n . При $t = t_n$ реконструированная функция имеет вид

$$\tilde{u}_i^n(x, t_n) = y_i^n + (x - x_i)D_i^n, \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты D_i^n задают наклоны реконструкции и будут определены далее. Считая, что реконструированная функция удовлетворяет уравнению переноса, в соответствии с его характеристическими свойствами [10] при $t > t_n$ имеем

$$\tilde{u}_i^n(x, t) = y_i^n + (x - a(t - t_n) - x_i)D_i^n$$

и, в частности,

$$\tilde{u}_i^n(x_{i+1/2}, t) = y_i^n + (0.5h - a(t - t_n))D_i^n.$$

Последнее выражение справедливо при всех $t \in [t_n, t_{n+1}]$ при ограничении на число Куранта [11]

$$q = \frac{a\tau}{h} \leq 1.$$

Замена неизвестной функции $u_i^n(x_{i+1/2}, t)$ на $\tilde{u}_i^n(x_{i+1/2}, t)$ позволяет вычислить приближённые выражения для потоков

$$w_{i+1/2}^n \approx \tilde{w}_{i+1/2}^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a\tilde{u}(x_{i+1/2}, t) dt = a\tau(y_i^n + 0.5(h - a\tau)D_i^n).$$

В результате приближённое равенство

$$h(y_i^{n+1} - y_i^n) + \tilde{w}_{i+1/2}^n - \tilde{w}_{i-1/2}^n \approx 0$$

определяет семейство разностных схем

$$y_{t,i}^n + ay_{\bar{x},i}^n + \frac{a}{2}(h - a\tau)D_{\bar{x},i}^n = 0. \tag{3}$$

Здесь и далее используются краткие обозначения (см. [12]) для разностных производных $y_{t,i}^n = (y_i^{n+1} - y_i^n)/\tau$, $y_{\bar{x},i}^n = (y_i^n - y_{i-1}^n)/h$ и др. Различные схемы из этого семейства определяются

выбором коэффициентов наклона линейных реконструкций D_i^n . Так, например, при $D_i^n = 0$ получим схему первого порядка, монотонную [12] при $q \leq 1$, а при $D_i^n = y_{x,i}^n$ – схему Лакса–Вендроффа [13]

$$y_{t,i}^n + ay_{x,i}^n = a^2 \frac{\tau}{2} y_{\bar{x},i}^n$$

второго порядка аппроксимации, которая не является монотонной.

А.П. Фаворским была предложена разностная схема [6], которая может быть отнесена к описанному выше семейству, имеющая второй порядок аппроксимации на гладких монотонных участках решения исходной задачи, сохраняющая монотонность его профиля. В предложенной схеме наклоны линейных реконструкций выбираются следующим образом:

$$D_i^n = \frac{y_x |y_{\bar{x}}| + y_{\bar{x}} |y_x|}{|y_{\bar{x}}| + |y_x|}. \quad (4)$$

Здесь и далее индексы у разностных производных опущены. Как легко видеть, в точках локального экстремума численного решения, где знаки y_x , $y_{\bar{x}}$ различны, наклоны $D_i^n = 0$, как в схеме первого порядка. В противном случае

$$D_i^n = \frac{2y_{\bar{x}}y_x}{y_{\bar{x}} + y_x}.$$

При этом для гладкой функции $u(x)$, обозначая $u_i = u(x_i)$,

$$D_i(u) = \frac{2(u_i - u_{i-1})(u_{i+1} - u_i)}{h(u_{i+1} - u_{i-1})} = u'_x + \underline{O}(h^2),$$

т.е. разностное отношение аппроксимирует пространственную производную, что, как известно [2], приводит к повышению порядка аппроксимации схемы. Покажем, что схема аппроксимирует гладкое решение исходной задачи на его монотонном участке со вторым порядком. Далее будем обозначать $y_{\bar{x}} \equiv y_{\bar{x},i-1}$.

Теорема 1. Пусть в узле сетки (x_i, t_n) знаки разностных производных $y_{\bar{x}}$, y_x совпадают. Тогда погрешность аппроксимации схемы (3) с наклонами (4) на достаточно гладком решении исходной задачи $\Psi_i^n = \underline{O}(h^2 + \tau^2 + \tau h)$.

Доказательство. Запишем погрешность аппроксимации на решении $u(x, t)$ в узле (x_i, t_n) , опуская аргументы функции u и её производных:

$$\Psi_i^n = \left(u'_t + \frac{\tau}{2} u''_{tt} \right) + a \left(u'_x - \frac{h}{2} u''_{xx} \right) + \frac{a}{2} (h - a\tau) D_{\bar{x}}(u) + \underline{O}(h^2 + \tau^2).$$

Учитывая, что при условии теоремы (опуская выкладки)

$$D_{\bar{x}}(u) = 2 \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{u_i - u_{i-2}} \right) = u''_{xx} - \frac{h}{2} u'''_{xxx} + \underline{O}(h^2),$$

получим (с учётом равенства $u'_t + au'_x = 0$)

$$\begin{aligned} \Psi_i^n &= \frac{\tau}{2} u''_{tt} - \frac{ah}{2} u''_{xx} + \frac{a}{2} (h - a\tau) (u''_{xx} + \underline{O}(h)) + \underline{O}(h^2 + \tau^2) = \\ &= \frac{\tau}{2} (u''_{tt} - a^2 u''_{xx}) + \underline{O}(h^2 + \tau^2 + \tau h). \end{aligned}$$

Первое слагаемое обращается в нуль вследствие уравнения переноса.

Далее покажем, что схема удовлетворяет условиям принципа максимума (условиям положительности коэффициентов), что и обеспечивает сохранение монотонности профиля численного решения [12, с. 40].

Теорема 2. *Схема (3) с наклонами (4) удовлетворяет условиям принципа максимума.*

Доказательство. Сначала будем считать, что разностные производные $y_{\bar{x}}$, $y_{\bar{x}}$, y_x в узле (x_i, t_n) имеют одинаковые знаки. Тогда разностную схему можно записать в виде

$$y_i^{n+1} - y_i^n + q \left(y_i^n + (1 - q)h \frac{y_{\bar{x}}y_x}{y_{\bar{x}} + y_x} \right) - q \left(y_{i-1}^n + (1 - q)h \frac{y_{\bar{x}}y_{\bar{x}}}{y_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}} \right) = 0.$$

Учитывая равенство $hy_{\bar{x}} = y_i - y_{i-1}$ и вводя обозначения

$$\alpha = \frac{y_x}{y_{\bar{x}} + y_x}, \quad \beta = \frac{y_{\bar{x}}}{y_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}},$$

перепишем разностное уравнение в виде

$$y_i^{n+1} = (1 - q)(1 - q(\alpha - \beta))y_i^n + q(1 + (1 - q)(\alpha - \beta))y_{i-1}^n.$$

Учитывая, что $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $q \leq 1$, условия принципа максимума выполняются. Это остаётся верным, если при наличии локальных экстремумов численного решения $D_i^n = 0$ или(и) $D_{i-1}^n = 0$, соответственно $\alpha = 0$ или(и) $\beta = 0$.

Подводя промежуточные итоги, целесообразно отметить, что описанную схему А.П. Фаворского следует отнести к классу нелинейных монотонных разностных методов, в которых осуществляется “переключение” между аппроксимацией первого и второго порядков.

2. Разностная схема для квазилинейного уравнения переноса. Далее рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного уравнения переноса (уравнения Хопфа):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Здесь также считается, что функция $u_0(x)$ является финитной на интервале $(0, l)$, а решение $u(x, t)$ остаётся финитным на том же интервале при всех $t \in (0, T]$. Временно будем полагать, что $u_0(x) \geq 0$, т.е. перенос осуществляется в положительном направлении оси x .

В точности также, как и для линейного уравнения, на равномерной разностной сетке $\omega_h \times \omega_\tau$ введём сеточную функцию y_i^n вида (1), определим её линейную реконструкцию $\tilde{u}_i^n(x, t_n)$ вида (2) и рассмотрим разностную схему

$$h(y_i^{n+1} - y_i^n) + \tilde{w}_{i+1/2}^n - \tilde{w}_{i-1/2}^n = 0.$$

Отличие состоит в том, что выражение для приближённых интегральных потоков теперь примет вид

$$\tilde{w}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{u}^2(x_{i+1/2}, t) dt.$$

Записав уравнение прямой, проходящей через точки B и E (рис. 1), несложно построить автомодельное решение квазилинейного уравнения

$$\tilde{u}(x, t) = D_i^n \frac{x - x_{i-1/2} - u_L(t - t_n)}{1 + D_i^n(t - t_n)} + u_L, \tag{5}$$

где $u_{L,R} = y_i^n \pm hD_i^n/2$, совпадающее с реконструированной функцией $\tilde{u}_i^n(x, t_n)$ при $t = t_n$. В частности,

$$\tilde{u}(x_{i+1/2}, t) = \frac{u_R}{1 + D_i^n(t - t_n)}.$$

Слагаемые под знаком суммы, в свою очередь, можно интерпретировать как площади тех частей соответствующих прямоугольных возмущений, которые, двигаясь со скоростью $(u_m + u_{m-1})/2$, пересекли границу ячейки $x_{i+1/2}$ за время τ . Важно отметить, что в точном решении квазилинейного уравнения переноса с начальными данными $u(x, 0) = u_m$ при $x < x_{i+1/2}$ и $u(x, 0) = u_{m-1}$ при $x > x_{i+1/2}$ разрыв перемещается со временем как раз с указанной скоростью [14, с. 510]. Равенство (7) по сути определяет выражение для точной (в рассматриваемом случае $D_i^n = 0$) декомпозиции интегрального потока $\tilde{w}_{i+1/2}^n$, который, как уместно напомнить, сам по себе точным не является. Далее получим приближённый аналог этого равенства иным способом, который более удобен для обобщения декомпозиции на случай уравнений газовой динамики.

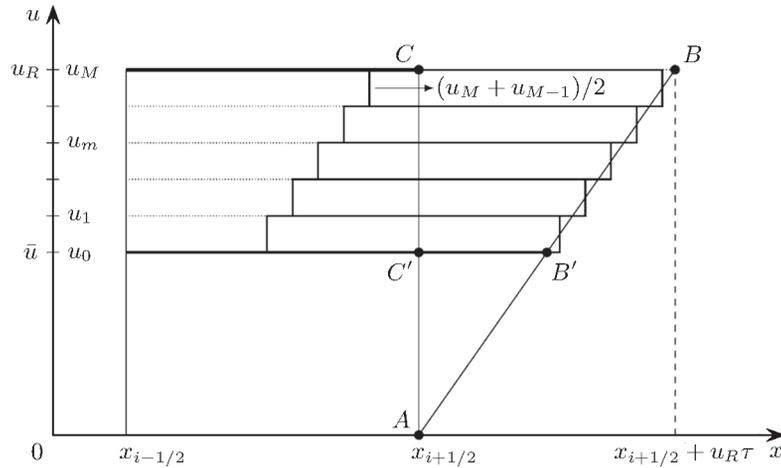


Рис. 2. Точная декомпозиция потока при $D_i^n = 0$.

Пусть \bar{u} – некоторое постоянное фоновое значение, а δu – его малое возмущение. Представим потоковую комбинацию W в виде

$$W = \frac{1}{2}(\bar{u} + \delta u)^2 \approx \frac{\bar{u}^2}{2} + \bar{u}\delta u = \bar{W} + \delta W.$$

Здесь отброшено слагаемое второго порядка малости относительно δu . Считая, что δu удовлетворяет линеаризованному уравнению

$$\frac{\partial(\delta u)}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} = 0,$$

приходим к тому, что вклад возмущения в потоковый интеграл равен площади части профиля δu , которая пересекла границу ячейки, двигаясь с постоянной скоростью \bar{u} за время τ . Для набора прямоугольных возмущений, введённого выше, приходим к следующей формуле декомпозиции потока:

$$\tilde{w}_{i+1/2}^n \approx \bar{W}\tau + \sum_{m=1}^M \int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta W_m dt = \frac{\bar{u}^2}{2}\tau + \sum_{m=1}^M (u_m - u_{m-1})u_{m-1}\tau. \tag{8}$$

Здесь слагаемые под знаком суммы соответствуют перемещениям каждого прямоугольного возмущения по индивидуальному фону u_{m-1} с той же (акустической) скоростью.

Заметим, что приближённое выражение (8) для $\tilde{w}_{i+1/2}^n$ отличается от точного (7) на величину $\tau(\Delta u)^2/(2M)$, где Δu – длина отрезка u , разбиваемого значениями u_m . Общее фоновое значение \bar{u} выбирается (см. далее) таким образом, что значения Δu сравнимы с величиной $D_i^n h$, поэтому выражение обеспечивает достаточную для схемы второго порядка точность даже при небольших значениях M .

Вернёмся к более общему случаю $D_i^n \neq 0$. Отметим, что значение полученного ранее точного выражения (6) для $\tilde{w}_{i+1/2}^n$ по-прежнему совпадает с площадью треугольника ABC при $t = t_{n+1}$, который теперь не является прямоугольным (см. рис. 1). В качестве фонового значения выберем $\bar{u} = u_R$ (при положительном наклоне $\bar{u} = u_L$). Отрезок $[u_R, u_L]$, как и ранее, разобьём на одинаковые промежутки (слои) значениями u_0, u_1, \dots, u_M . В пределах каждого слоя заменим трапецевидную (или треугольную) часть профиля реконструированной функции прямоугольником той же площади (см. рис. 1). Декомпозиция потока осуществляется аналогично предыдущему. Фоновая составляющая $\bar{u}^2/2$ соответствует площади треугольника ABC' . А площадь треугольника BCC' представляется (точно или приближённо) суммой тех частей прямоугольников (прямоугольных возмущений), которые, двигаясь со своими скоростями, пересекли границу ячейки $x_{i+1/2}$ за время τ . При этом, как уже отмечалось, в качестве скорости на слое с номером m можно выбирать как значение $(u_m + u_{m-1})/2$, так и значение u_{m-1} (акустическая скорость).

Как уже отмечалось, проведённые построения справедливы в предположении, что линейный профиль автомодельного решения (5) на промежутке времени $t \in [t_n, t_{n+1}]$ не искажается вследствие влияния данных соседней слева (относительно рассматриваемой $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$) ячейки. Чтобы исключить подобное влияние, достаточно проводить те же построения не на целых ячейках, а на их половинах $[x_i, x_{i+1/2}]$. Дополнительно необходимо потребовать выполнения условия

$$\tau \leq 0.5h / \max |\tilde{u}|,$$

где максимум берётся по всем значениям реконструированных функций во всех ячейках.

И, наконец, в наиболее общем случае (не предполагая, что $u_0(x) \geq 0$) может оказаться, что реконструированные функции в соседних ячейках принимают значения разных знаков. Тогда необходимо рассматривать две “полуячейки”, примыкающие к общей границе $x_{i+1/2}$, т.е. отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 3).

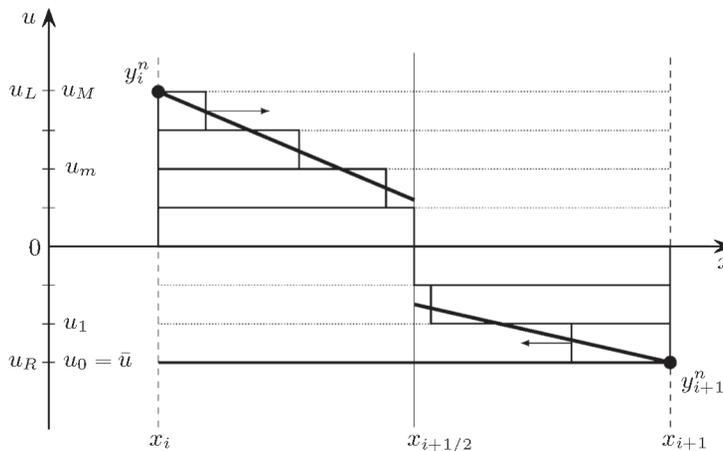


Рис. 3. Случай различных знаков реконструированных функций.

Общее фоновое значение \bar{u} можно выбирать различными способами. Например, в качестве такового может выступать минимальное из значений двух реконструированных функций, определённых на соответствующих полуячейках. Далее промежуток между общим минимумом и максимумом двух функций ($[u_R, u_L]$ для профилей, представленных на рис. 3) разбивается на слои значениями u_0, u_1, \dots, u_M , и в каждой полуячейке определяются прямоугольные возмущения аналогично описанному выше. Фоновая составляющая интегрального потока $\tilde{w}_{i+1/2}^n$ по-прежнему равна $\bar{u}^2/2$. Вклады прямоугольных возмущений учитываются так же, как описано ранее, только площади частей прямоугольников, пересекающих границу $x_{i+1/2}$ в отрицательном направлении оси x , не суммируются, а вычитаются.

3. Схема для уравнений газовой динамики. Рассмотрим систему уравнений газовой динамики [15] в пространственно одномерном приближении совместно с уравнением состояния идеального газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u e + up)}{\partial x} = 0,$$

$$e = \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon. \quad (9)$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, ρ – плотность газа, u – скорость, p – давление, ε – удельная внутренняя энергия, e – полная удельная энергия, γ – показатель адиабаты.

Система уравнений (9), записанная в консервативной форме, может быть преобразована к следующему виду, содержащему исключительно “примитивные” переменные ρ , u , p и их производные:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{q} = (\rho, u, p)^T, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Здесь $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ – скорость звука. Несложно проверить, что матрица A имеет собственные значения $\lambda_{\pm} = u \pm c$, $\lambda_0 = u$ и отвечающие им собственные векторы

$$\mathbf{l}_{\pm} = (0, \pm 1, 1/(c\rho)), \quad \mathbf{l}_0 = (1, 0, -1/c^2),$$

определённые с точностью до нормирующих множителей.

Наряду с “примитивными”, также будем использовать характеристические переменные

$$r_{\pm} = \mathbf{l}_{\pm} \mathbf{q} = \pm u + p/(c\rho), \quad r_0 = \mathbf{l}_0 \mathbf{q} = \rho - p/c^2.$$

Обратное преобразование, как легко видеть, даёт равенства

$$\rho = \frac{\rho}{2c}(r_+ + r_-) + r_0, \quad u = \frac{1}{2}(r_+ - r_-), \quad p = \frac{c\rho}{2}(r_+ + r_-).$$

В предположении, что решение системы (10) имеет вид

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad u = \bar{u} + \delta u, \quad p = \bar{p} + \delta p,$$

где $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{p} – постоянные значения, а $\delta\rho$, δu , δp – функции малых возмущений, получим систему линеаризованных уравнений

$$\frac{\partial(\delta \mathbf{q})}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial(\delta \mathbf{q})}{\partial x} = 0, \quad \delta \mathbf{q} = (\delta\rho, \delta u, \delta p)^T, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho} \bar{c}^2 & \bar{u} \end{bmatrix},$$

где $\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p}/\bar{\rho}}$. Отметим, что матрица \bar{A} получается из матрицы A системы (10) заменой функций ρ , u , p на постоянные $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{p} . Поэтому выражения для характеристических переменных получаются из записанных ранее путём аналогичных модификаций.

В характеристических переменных

$$\delta r_{\pm} = \pm \delta u + \delta p/(\bar{c}\bar{\rho}), \quad \delta r_0 = \delta\rho - \delta p/\bar{c}^2$$

линеаризованная система распадается на три независимых друг от друга уравнения переноса

$$\frac{\partial(\delta r_{\pm})}{\partial t} + \bar{\lambda}_{\pm} \frac{\partial(\delta r_{\pm})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\delta r_0)}{\partial t} + \bar{\lambda}_0 \frac{\partial(\delta r_0)}{\partial x} = 0,$$

где $\bar{\lambda}_{\pm} = \bar{u} \pm \bar{c}$, $\bar{\lambda}_0 = \bar{u}$. Это позволяет записать известное решение задачи Коши для линеаризованной системы с начальными данными $\delta\rho^0(x)$, $\delta u^0(x)$, $\delta p^0(x)$ и отвечающими им начальными распределениями характеристических переменных $\delta r_{\pm}^0(x)$, $\delta r_0^0(x)$:

$$\delta\rho(x, t) = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(\delta r_+^0(\bar{\xi}_+) + \delta r_-^0(\bar{\xi}_-)) + \delta r_0^0(\bar{\xi}_0),$$

$$\delta u(x, t) = \frac{1}{2}(\delta r_+^0(\bar{\xi}_+) - \delta r_-^0(\bar{\xi}_-)), \quad \delta p(x, t) = \frac{\bar{c}\bar{\rho}}{2}(\delta r_+^0(\bar{\xi}_+) + \delta r_-^0(\bar{\xi}_-)),$$

где $\bar{\xi}_{\pm} = x - (\bar{u} \pm \bar{c})t$, $\bar{\xi}_0 = x - \bar{u}t$. Отметим, что выражения в правых частях равенств несложно записать через функции $\delta\rho^0$, δu^0 и δp^0 .

Как вытекает из результатов предыдущего пункта, для построения разностной схемы необходимо записать приближённые выражения для потоков массы, импульса и энергии, фигурирующих в исходной системе (9). Для этого также воспользуемся процедурой расщепления потоков на общую фоновую составляющую и вклады малых прямоугольных возмущений, которые А.П. Фаворский для краткости именовал “кирпичами”. Чтобы получить формулы приближённого вычисления вкладов возмущений в подынтегральные выражения для потоков, как и ранее представим потоковые комбинации в виде (на примере потока импульса)

$$W^I = \rho u^2 + p = (\bar{\rho} + \delta\rho)(\bar{u} + \delta u)^2 + \bar{p} + \delta p \approx \bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p} + \bar{u}^2\delta\rho + 2\bar{\rho}\bar{u}\delta u + \delta p = \bar{W}_I + \delta W^I.$$

Выражение для вклада возмущений, в котором отброшены слагаемые второго и третьего порядка малости относительно $\delta\rho$ и δu , запишем на основе известного решения линеаризованной системы:

$$\delta W^I = \bar{u}^2\delta\rho + 2\bar{\rho}\bar{u}\delta u + \delta p = \bar{u}^2\frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(\delta r_+^0 + \delta r_-^0) + \bar{u}^2\delta r_0^0 + \bar{\rho}\bar{u}(\delta r_+^0 - \delta r_-^0) + \frac{\bar{c}\bar{\rho}}{2}(\delta r_+^0 + \delta r_-^0) =$$

$$= \frac{\bar{\rho}(\bar{u} + \bar{c})^2}{2\bar{c}}\delta r_+^0 + \frac{\bar{\rho}(\bar{u} - \bar{c})^2}{2\bar{c}}\delta r_-^0 + \bar{u}^2\delta r_0^0.$$

Здесь аргументы $\bar{\xi}_{\pm}$ и $\bar{\xi}_0$ функций δr_{\pm}^0 и δr_0^0 , отвечающих начальным возмущениям примитивных переменных, опущены. Аналогично получаются формулы приближённого вычисления вкладов возмущений в подынтегральные выражения для потоков массы и энергии:

$$\delta W^M = \frac{\bar{\rho}(\bar{u} + \bar{c})}{2\bar{c}}\delta r_+^0 + \frac{\bar{\rho}(\bar{u} - \bar{c})}{2\bar{c}}\delta r_-^0 + \bar{u}\delta r_0^0,$$

$$\delta W^E = \frac{\bar{\rho}(\bar{u} + \bar{c})}{2\bar{c}}\left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \bar{u}\bar{c} + \frac{\bar{c}^2}{\gamma - 1}\right)\delta r_+^0 + \frac{\bar{\rho}(\bar{u} - \bar{c})}{2\bar{c}}\left(\frac{\bar{u}^2}{2} - \bar{u}\bar{c} + \frac{\bar{c}^2}{\gamma - 1}\right)\delta r_-^0 + \frac{\bar{u}^3}{2}\delta r_0^0.$$

Отметим, что полученные выражения для вкладов возмущений несложно записать через функции $\delta\rho^0$, δu^0 и δp^0 . Так, например,

$$\delta W^I = \delta W_+^I + \delta W_-^I + \delta W_0^I, \quad W_{\pm}^I = \frac{\bar{\rho}(\bar{u} \pm \bar{c})^2}{2\bar{c}}\left(\pm\delta u^0(\bar{\xi}_{\pm}) + \frac{\delta p^0(\bar{\xi}_{\pm})}{\bar{c}\bar{\rho}}\right),$$

$$W_0^I = \bar{u}^2\left(\delta\rho^0(\bar{\xi}_0) - \frac{\delta p^0(\bar{\xi}_0)}{\bar{c}^2}\right). \tag{11}$$

Это может быть удобным, поскольку в оригинальной схеме А.П. Фаворского реконструируются функции примитивных переменных.

Сама же схема строится аналогично описанному выше. На той же равномерной пространственно-временной сетке определяется векторная сеточная функция

$$\mathbf{y}_i^n = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t_n) dx, \quad \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho e)^T.$$

В точном интегральном соотношении

$$h(\mathbf{y}_i^{n+1} - \mathbf{y}_i^n) + \mathbf{w}_{i+1/2}^n - \mathbf{w}_{i-1/2}^n = 0,$$

где

$$\mathbf{w}_{i+1/2}^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{W}(x_{i+1/2}, t) dt, \quad \mathbf{W} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u e + up),$$

интегральные по времени потоки $\mathbf{w}_{i+1/2}^n$ заменяются на их приближённые выражения $\tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2}^n$. Эти выражения получаются путём реконструкции каждой из примитивных переменных $f \in \{\rho, u, p\}$ в ячейках сетки:

$$\tilde{f}_i^n(x, t_n) = f_i^n + (x - x_i)D_i^n, \quad D_i^n = \frac{f_x|f_{\bar{x}}| + f_{\bar{x}}|f_x|}{|f_{\bar{x}}| + |f_x|}.$$

Здесь f_i^n выражаются через известные значения компонент \mathbf{y}_i^n . Далее для каждой переменной выбирается фоновое значение $f_{i+1/2}^n$ и разбиваются реконструированные профили по разные стороны от границы ячеек $x_{i+1/2}$ на малые прямоугольные возмущения так же, как описано в п. 2. Важно отметить, что количество слоёв разбиения M для всех переменных одно и то же. Приближённые выражения для интегральных потоков в соответствии с проведёнными выше построениями имеют вид

$$\tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2}^n = \bar{\mathbf{W}}_{i+1/2}^n \tau + \sum_{m=1}^M \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\delta \mathbf{W}_+ + \delta \mathbf{W}_- + \delta \mathbf{W}_0)_{m,i+1/2}^n dt,$$

$$\bar{\mathbf{W}}_{i+1/2}^n = (\bar{\rho} \bar{u}, \bar{\rho} \bar{u}^2 + \bar{p}, \gamma \bar{u} \bar{p} / (\gamma - 1) + \bar{\rho} \bar{u}^3 / 2)_{i+1/2}^n.$$

Здесь индекс m по-прежнему обозначает номер слоя разбиения. Интегрирование сводится к нахождению площадей тех частей прямоугольных возмущений, которые, двигаясь с соответствующей характеристической скоростью по своему индивидуальному фону (т.е. значения $\bar{\rho}$, \bar{u} , \bar{c} , $\bar{\xi}$ в выражениях (11) различны для разных номеров m), пересекли границу ячейки $x_{i+1/2}$ за время $\tau = t_{n+1} - t_n$.

Заключение. В работе приведены обоснования основных подходов, использованных при построении квазиакустической разностной схемы для уравнений газовой динамики, предложенной А.П. Фаворским. Результаты численных расчётов (некоторые содержатся в работах А.П. Фаворского, перечисленных во введении), а также возможные модификации описанной схемы в рамках данной статьи не обсуждаются. Указанные вопросы предполагается рассмотреть в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin, 1999.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., 2001.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
4. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М., 1988.
5. Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрин Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А. Численное моделирование распространения акустических импульсов в гемодинамике // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1179–1187.
6. Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрин Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А. Численное моделирование распространения гемодинамических импульсов // Мат. моделирование. 2009. Т. 21. № 12. С. 21–34.

7. Абакумов М.В., Галанина А.М., Исаков В.А., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 8. С. 1092–1098.
8. Исаков В.А., Фаворский А.П. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики в случае двух пространственных измерений // Мат. моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 55–59.
9. Галанина А.М., Исаков В.А., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П. Конструктивный подход к численному решению квазилинейных уравнений переноса // Мат. моделирование. 2013. Т. 25. № 8. С. 80–88.
10. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 2004.
11. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Uber die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik // Mathematische Annalen. 1928. Bd. 100. № 1. S. 32–74.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.
13. Lax P.D., Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // Comm. on Pure and Appl. Math. 1964. V. 17. № 3. P. 381–398.
14. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1978.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 4. Гидродинамика. М., 1986.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
После доработки 30.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

УДК 519.63

ЗАДАЧА О НЕИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ КОНТАКТЕ

© 2023 г. М. П. Галанин, А. С. Родин

Рассмотрена задача определения термомеханического состояния твэла в ядерном реакторе. Описан конечно-элементный алгоритм решения тепловой задачи совместно с задачей о механическом контакте, для выяснения основных особенностей и численного алгоритма решения которой исследована модельная одномерная задача. Построены главный член асимптотического разложения решения такой задачи и разностная схема для её решения, в том числе итерационные методы. Выполнен цикл тестовых расчётов, подтверждающих теоретические оценки. Сопоставление расчётов реальных задач с теоретическими предсказаниями показало, что алгоритм решения многомерной нелинейной задачи качественно соответствует поведению одномерных вычислений.

DOI: 10.31857/S0374064123060092, EDN: FHVDJZ

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим в многомерном пространстве конструкцию из N тел, занимающую область $G = \bigcup_{\alpha=1}^N G_\alpha$ с границей ∂G ($\bar{G} = G \cup \partial G$). Нас интересует температура этих тел.

Начально-краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности задана следующими соотношениями [1, с. 159]:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}, T) \frac{\partial T}{\partial t} &= (\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j})_{,i} + \phi(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in G \times (0, t_M], \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G}, \\ T(\mathbf{x}, t)|_{S_1} &= T_w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_1 \subset \partial G, \quad t > 0, \\ -n_i \lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_2} &= q_w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_2 \subset \partial G, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x_i – компоненты радиус-вектора \mathbf{x} , t – время, $T(\mathbf{x}, t)$ – температура, $T_{,j} = \partial T / \partial x_j$, $T_0(\mathbf{x})$ – начальная температура, $\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T)$ – компоненты тензора теплопроводности среды (для изотропного случая $\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) = \lambda(\mathbf{x}, T) \delta_{ij}$), $\phi(\mathbf{x}, t)$ – мощность внутренних источников (стоков) тепла, $c(\mathbf{x}, T)$ – объёмная теплоёмкость среды, $T_w(\mathbf{x}, t)$ – температура поверхности S_1 , на которой задано условие первого рода, $q_w(\mathbf{x}, t)$ – плотность теплового потока на поверхности S_2 , на которой задано условие второго рода, n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ к границе ∂G .

На поверхности S_3 заданы условия третьего рода

$$-n_i \lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_3} = \alpha(\mathbf{x}, T, \chi)(T(\mathbf{x}, t) - T_f(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S_3 \subset \partial G, \quad t > 0, \quad (2)$$

где $\alpha(\mathbf{x}, T, \chi)$ – коэффициент теплоотдачи, $T_f(\mathbf{x}, t)$ – температура среды у поверхности S_3 .

При решении тепловой контактной задачи в качестве температуры среды $T_f(\mathbf{x}, t)$ будем рассматривать температуру в противоположащей точке $\bar{\mathbf{x}}$ соседнего контактирующего тела. Коэффициент теплоотдачи α может зависеть от ряда дополнительных параметров, обозначенных χ (в роли подобных параметров выступают величина зазора между телами, контактное давление, размер шероховатости поверхности и т.д.).

Наряду с неидеальным тепловым контактом между телами, также рассмотрим ситуацию идеального теплового контакта на поверхности, когда в противоположащих точках контактирующих поверхностей должны совпадать и температуры, и тепловые потоки [2]:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, t) &= T(\bar{\mathbf{x}}, t) = T_{\text{cont}}(\mathbf{x}, t), \\ -n_i \lambda_{ij}(\mathbf{x}, T) T_{,j}|_{S_3} &= n_i \lambda_{ij}(\bar{\mathbf{x}}, T) T_{,j}|_{S_3} = q_{\text{cont}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_3 \subset \partial G, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины T_{cont} и q_{cont} в условиях (3) заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи. В случае неидеального контакта неизвестны температуры на обеих контактных поверхностях, а тепловой поток связан с температурами соотношением (2).

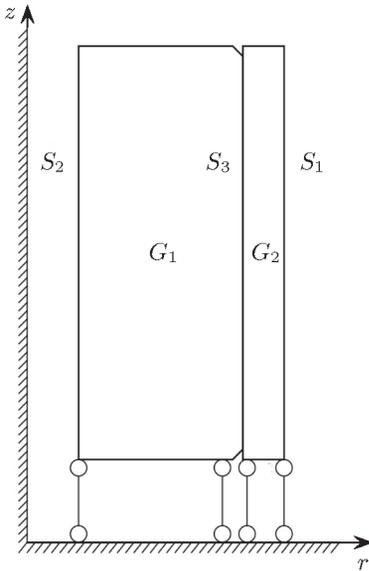


Рис. 1. Схема участка твэла с одной таблеткой.

В дальнейшем нас будет интересовать задача моделирования термомеханического состояния участка тепловыделяющего элемента (твэла). Область моделирования представляет собой участок цилиндрической оболочки G_N , внутри которой расположен столб из одинаковых цилиндрических топливных таблеток G_1, \dots, G_{N-1} , имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. Задача часто решается в осесимметричной постановке. Пример расчётной области для случая $N = 2$ (половина продольного сечения) показан на рис. 1. При моделировании твэла важную роль играет учёт тепловыделения в топливных таблетках и процесс теплообмена между таблетками и оболочкой (на рис. 1 соответствующие поверхности обозначены S_3), а также между оболочкой и теплоносителем, находящимся снаружи элемента. Теплофизические характеристики материалов топливной таблетки и оболочки существенно зависят от температуры. При определённых допущениях можно считать, что температура теплоносителя является постоянной (и известной) и совпадает с температурой внешней поверхности оболочки (обозначена S_1 на рис. 1). На других поверхностях таблеток, кроме внешней, обычно ставятся условия теплоизоляции (нулевого потока).

В начальной конфигурации твэла между таблетками и оболочкой, как правило, существует зазор. При нагревании таблетки расширяются, зазор уменьшается, а затем чаще всего происходит механический контакт между таблетками и оболочкой. Значения коэффициента теплоотдачи для случая, когда механического контакта нет, и случая, когда он есть, могут отличаться на два порядка. Поэтому тепловая и механическая задачи являются связанными и их нужно решать вместе. В данной работе основное внимание будет уделено решению тепловой задачи. Постановка механической задачи контактного взаимодействия элементов твэла и описание различных численных методов решения поставленной задачи приведены в статьях [3, 4].

Целью работы является исследование решения задачи о неидеальном тепловом контакте, разработка и применение методов её численного решения.

2. Численная модель. Для дискретизации задачи (1), (2) по пространству используем метод конечных элементов (МКЭ) [5]. Построим в расчётной области четырёхугольную сетку и каждому узлу p (в глобальной нумерации) поставим в соответствие финитную функцию N_p , $p = \overline{1, K_u}$, K_u – глобальное число узлов сетки конечно-элементной модели. Тогда температуру и её производные по координатам и времени (\tilde{T} , $\tilde{T}_{,i}$, $\dot{\tilde{T}}$) на сетке можно интерполировать с помощью следующих соотношений:

$$\tilde{T} = [N]\{T\}, \quad \tilde{T}_{,i} = [N_{,i}]\{T\}, \quad \dot{\tilde{T}} = [N]\{\dot{T}\}.$$

Здесь $[N]$ – матрица-строка, составленная из финитных функций N_p , $p = \overline{1, K_u}$; $\{T\}$ – вектор-столбец, составленный из узловых значений температуры T_p ; $\{\dot{T}\}$ – вектор-столбец, составленный из узловых значений производных температуры по времени \dot{T}_p , $p = \overline{1, K_u}$.

После дискретизации по пространству задачу (1) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [5]

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{R\} \quad (4)$$

с начальным условием

$$\{T\}|_{t=0} = \{T_0\}.$$

Здесь использованы следующие стандартные обозначения [5]: $[C]$ – глобальная матрица теплоёмкости, $[K]$ – глобальная матрица теплопроводности, $\{R\}$ – глобальный вектор узловых тепловых усилий.

Для решения системы (4) выберем неявную схему дискретизации по времени:

$$[\hat{C}] \left\{ \frac{\hat{T} - T}{\tau} \right\} + [\hat{K}] \{\hat{T}\} = \{\hat{R}\}, \tag{5}$$

где величины с “крышкой” относятся к новому шагу по времени, а величины без “крышки” – к предыдущему.

Система уравнений (5) является нелинейной из-за зависимости характеристик материала от температуры. Для линеаризации применим метод простой итерации [6, с. 88].

При наличии теплового контакта значения величины T_f в точках численного интегрирования поверхностного элемента соответствуют значениям температуры в противоположащих точках, относящихся к другим телам. Возможны два алгоритма учёта теплового контакта. В первом алгоритме значения T_f берутся из новой итерации, поэтому соответствующие слагаемые войдут в матрицу системы (5), при этом получается одна система линейных уравнений для всей конструкции (блоки, относящиеся к разным телам, будут взаимно связаны). Во втором алгоритме значения T_f берутся из предыдущей итерации, тогда итоговая система линейных уравнений на $(s + 1)$ -й итерации принимает вид

$$[\hat{C}]^{(s)} \left\{ \frac{\hat{T}^{(s+1)} - T}{\tau} \right\} + [\hat{K}]^{(s)} \{\hat{T}\}^{(s+1)} = \{\hat{R}\}^{(s)}. \tag{6}$$

Система (6) разбивается на N независимых подсистем уравнений (для каждого тела), которые можно решать отдельно друг от друга. Для конструкций, которые включают в себя большое количество тел (например, для твэла количество топливных таблеток достигает нескольких сотен), данное свойство второго алгоритма представляется весьма перспективным, но эффективность его применения зависит от особенностей сходимости итерационного процесса.

При численном решении задачи с идеальным тепловым контактом (1), (3) можно использовать итерационные алгоритмы, являющиеся аналогами методов декомпозиции области (МДО) [7]. В МДО единое тело разбивается на ряд непересекающихся подобластей (есть варианты и для случаев пересекающихся подобластей), исходное уравнение в частных производных решается отдельно в каждой подобласти, а граничные условия на внутренних границах подобластей корректируются на каждой итерации таким образом, чтобы общее решение задачи и его производные по нормали к данным границам менялись непрерывным образом при переходе из одной подобласти в другую.

В качестве подобного метода используем аналог метода Дирихле–Неймана, который заключается в том, что на $(s + 1)$ -й итерации для пары контактирующих тел последовательно решаются следующие задачи:

а) для первого тела

$$[\hat{C}_1]^{(s)} \left\{ \frac{\hat{T}_1^{(s+1)} - T_1}{\tau} \right\} + [\hat{K}_1]^{(s)} \{\hat{T}_1\}^{(s+1)} = \{\hat{R}_1\}^{(s)} \tag{7}$$

с условием, что в узлах на поверхности S_3 первого тела выполнены равенства $(\bar{T}_{2,i}^{(s)})$ – температура второго тела в точке, противоположащей узлу с номером i

$$\hat{T}_{1,i}^{(s+1)} = \bar{T}_{2,i}^{(s)}; \tag{8}$$

б) для второго тела

$$[\hat{C}_2]^{(s)} \left\{ \frac{\hat{T}_2^{(s+1)} - T_2}{\tau} \right\} + [\hat{K}_2]^{(s)} \{\hat{T}_2\}^{(s+1)} = \{\hat{R}_2\}^{(s)} + \{\hat{R}_{\text{cont}}\}^{(s+1)}, \tag{9}$$

где $\{\hat{R}_{\text{cont}}\}^{(s+1)}$ – глобальный вектор узловых контактных тепловых усилий, учитывающий интеграл от теплового потока $\hat{q}_{\text{cont}}^{(s+1)}$ по поверхностным элементам, относящимся к контактной поверхности S_3 второго тела.

В узлах численного интегрирования поверхностного элемента с номером (e) тепловой поток равен (с обратным знаком) значению теплового потока в противолежащей точке первого тела:

$$\hat{q}_{\text{cont},i}^{(e),(s+1)} = -\hat{q}_{1,i}^{(s+1)}. \quad (10)$$

Таким образом, на поверхности S_3 всегда выполнено второе условие (3), а в ходе итерационного процесса с нужной точностью достигается и выполнение первого условия (3) (равенство температур).

Аналогичный итерационный алгоритм применён в статье [2] для решения задачи об идеальном тепловом контакте между летательным аппаратом и газовой средой. В расчётах использовались линейные конечные элементы на четырёхугольной сетке.

Для изучения особенностей задачи (1), (2) рассмотрим более простую модельную задачу.

3. Модельная одномерная задача. Рассмотрим следующую одномерную задачу о теплообмене между двумя областями:

$$\begin{aligned} c_1 T_{1,t} &= \lambda_1 T_{1,xx}, & -l < x < 0, & \quad t > 0, \\ T_1(x, 0) &= T_{10}(x), & T_{1,x}(-l, t) &= 0, \\ c_2 T_{2,t} &= \lambda_2 T_{2,xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ T_2(x, 0) &= T_{20}(x), & T_{2,x}(L, t) &= 0, \\ \lambda_1 T_{1,x}(0, t) &= \lambda_2 T_{2,x}(0, t) = \alpha(T_2(0, t) - T_1(0, t)). \end{aligned} \quad (11)$$

Далее участок $x \in (-l, 0)$ будем называть *областью 1*, а участок $x \in (0, L)$ – *областью 2*. Все теплофизические параметры (c_i , λ_i , $i = 1, 2, \alpha$) постоянны. Делаем допущение, что коэффициент теплообмена $\alpha = 1/\varepsilon$ велик, т.е. ε мало. Все величины считаем безразмерными.

Решение задачи (11) для произвольных начальных данных может быть получено методом Фурье в виде бесконечных рядов по системе собственных функций. Однако анализ этого решения и его применение для численного решения более сложных задач представляется затруднительным, поэтому воспользуемся асимптотическими методами [8] с учётом малости ε .

Дальнейшее изложение будем вести в основном (по возможности) в терминах задачи (11) в области 1.

Введём новые переменные:

$$\tau = t/\varepsilon^2, \quad \xi = x/\varepsilon, \quad \xi_l = (l+x)/\varepsilon, \quad \xi_L = (L-x)/\varepsilon.$$

Будем искать T_1 – часть решения задачи (11) в области 1 – в виде

$$T_1(x, t) = U_1(x, \tau) + \Pi_1(\xi, \tau) + P_1(\xi_l, \tau). \quad (12)$$

Аналогичное представление будем использовать для части решения T_2 с заменой индекса 1 на 2 и ξ_l на ξ_L .

Подставив такие решения в (11) и разделив соответствующие выражения по переменным, от которых зависят части решения (12), получим задачи

$$\begin{aligned} c_1 U_{1,\tau} &= \varepsilon^2 \lambda_1 U_{1,xx}, & -l < x < 0, & \quad \tau > 0, \\ U_1(x, 0) &= T_{10}(x); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} c_1 \Pi_{1,\tau} &= \lambda_1 \Pi_{1,\xi\xi}, & -\infty < \xi < 0, & \quad \tau > 0, \\ \Pi_1(\xi, 0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\varepsilon \lambda_1 U_{1,x}(0, \tau) + \lambda_1 \Pi_{1,\xi}(0, \tau) = U_2(0, \tau) + \Pi_2(0, \tau) - U_1(0, \tau) - \Pi_1(0, \tau); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} c_1 P_{1,\tau} &= \lambda_1 P_{1,\xi_l \xi_l}, & 0 < \xi_l < \infty, & \quad \tau > 0, \\ P_1(\xi_l, 0) &= 0, & \varepsilon U_{1,x}(-l, \tau) + P_{1,\xi_l}(0, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Погранслойные функции Π_1 и P_1 появились в (12) вследствие необходимости обеспечить условия (11) на границах $x = -l$ и $x = 0$. Задача (14) должна решаться одновременно с соответствующей задачей в области 2, поскольку функции $\Pi_1(0, \tau)$ и $\Pi_2(0, \tau)$ фигурируют в условии теплообмена на границе $\xi = 0$.

Будем далее искать решения задач (13)–(15) в виде

$$U_1 = \sum_{i=0}^{\infty} U_1^i \varepsilon^i, \quad \Pi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_1^i \varepsilon^i, \quad P_1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_1^i \varepsilon^i. \tag{16}$$

Решение в области 2 представим аналогичным образом.

Как и в работе [8], от погранслойных функций потребуем стремления к нулю на бесконечности (по ξ , ξ_l и ξ_L).

Для коэффициентов при $i = 0$ из (13)–(16) получим

$$U_1^0(x, \tau) = T_{10}(x), \quad P_1^0(\xi_l, \tau) = 0.$$

Условие на границе раздела областей 1 и 2 из (14) запишется в виде

$$\lambda_1 \Pi_{1,\xi}^0(0, \tau) = T_{20}(0) + \Pi_2^0(0, \tau) - T_{10}(0) - \Pi_1^0(0, \tau). \tag{17}$$

Аналогичное условие можно записать и для Π_2^0 .

Обе функции Π_1^0 и Π_2^0 удовлетворяют однородным уравнениям теплопроводности с нулевыми начальными условиями. Решения этих задач могут быть получены, например, с помощью преобразования Лапласа либо взяты в готовом виде из [9, с. 27]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_1^0(\xi, \tau) &= \frac{T_{20}(0) - T_{10}(0)}{1 + \kappa} \left[\operatorname{erfc} \left(-\frac{k_1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) - \exp(-\beta k_1 \xi + \beta^2 \tau) \operatorname{erfc} \left(\beta \sqrt{\tau} - \frac{k_1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) \right], \\ \Pi_2^0(\xi, \tau) &= -\kappa \frac{T_{20}(0) - T_{10}(0)}{1 + \kappa} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{k_2}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) - \exp(-\beta k_2 \xi + \beta^2 \tau) \operatorname{erfc} \left(\beta \sqrt{\tau} + \frac{k_2}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь использованы обозначения функции из [10] и

$$\kappa = \sqrt{\frac{c_1 \lambda_1}{c_2 \lambda_2}}, \quad \beta = \frac{1 + \kappa}{\sqrt{c_1 \lambda_1}}, \quad k_i = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda_i}}, \quad i = 1, 2, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Для коэффициентов при $i = 1$ из (16) получим, что $U_1^1(x, \tau) = 0$, $P_1^1(\xi_l, \tau)$ – решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечном участке. Оно определяется значением $T_{10,x}(-l)$ и может быть легко получено. Коэффициенты Π_1^1 и Π_2^1 находятся совместно из решения задач на бесконечном участке. При этом на границе областей будет выполнено условие типа (17). Решение этой задачи весьма громоздко, поэтому мы его не приводим.

Справедливо следующее

Утверждение 1. Для задачи теплообмена между двумя полубесконечными участками ($l \rightarrow +\infty$, $L \rightarrow +\infty$) с постоянными начальными данными ($T_{10}(x) = T_1^0$, $T_{20}(x) = T_2^0$) точное решение задачи (11) задаётся формулами

$$T_1(x, t) = T_1^0 + \Pi_1^0(\xi, \tau), \quad T_2(x, t) = T_2^0 + \Pi_2^0(\xi, \tau). \tag{19}$$

Как упоминалось ранее, решение задачи (11) для произвольных начальных данных может быть получено методом Фурье в виде бесконечных рядов по системе собственных функций. Для специально подобранных начальных условий решение можно представить в компактной форме.

Утверждение 2. Для задачи (11) с начальными условиями

$$T_{10}(x) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\omega(x+l)\right), \quad T_{20}(x) = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_2}}\omega(L-x)\right)$$

точное решение задаётся формулами

$$T_1(x,t) = A_1 e^{-\omega^2 t} \cos\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\omega(x+l)\right), \quad T_2(x,t) = A_2 e^{-\omega^2 t} \cos\left(\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_2}}\omega(L-x)\right). \quad (20)$$

В (20) коэффициенты A_1 и A_2 связаны соотношением

$$A_2 = -A_1 \sqrt{\lambda_1} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\omega l\right) / \sin\left(\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_2}}\omega L\right),$$

а ω – это решение уравнения, являющегося условием нетривиальности решения (20). Оно есть следствие подстановки (20) в граничное условие (11) в точке контакта.

Исследуем алгоритм численного решения модельной задачи, чтобы оценить его особенности. Применим метод конечных разностей [11]. Используем следующие обозначения для i -го тела [8]: τ – шаг сетки по времени, h_i – постоянный шаг пространственной сетки, $\hat{y}_{i,0}$ – значение сеточной функции для температуры в узле с номером 0, относящееся к новому временному слою, $y_{i,0}$ – аналогичное значение сеточной функции, относящееся к предыдущему временному слою. Обозначения сеточных функций и операторов соответствуют [11].

Возьмём полностью неявную разностную схему, записав её интегро-интерполяционным способом в граничных точках. Уравнения в нулевых точках областей 1 и 2 имеют вид

$$\begin{aligned} 0.5h_1c_1y_{1,0,t} &= \alpha(\hat{y}_{2,0} - \hat{y}_{1,0}) - \lambda_1(\hat{y}_{1,0} - \hat{y}_{1,1})/h_1, \\ 0.5h_2c_2y_{2,0,t} &= -\alpha(\hat{y}_{2,0} - \hat{y}_{1,0}) + \lambda_2(\hat{y}_{2,0} - \hat{y}_{2,1})/h_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Справедливо следующее

Утверждение 3. Построенная разностная схема (21) удовлетворяет условиям принципа максимума [11, с. 226] со строгим диагональным преобладанием коэффициентов. Её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных.

В ситуации, когда численное решение для каждого тела находится по отдельности, необходимо проводить итерационный учёт условия неидеального теплового контакта (21). Обозначим индексом s сверху итерационные приближения для \hat{y}_1 , \hat{y}_2 на s -й итерации. Во всех уравнениях разностной схемы (21), кроме граничных условий, будем разыскивать y_1^{s+1} , y_2^{s+1} . Первое уравнение (21) заменим на следующее:

$$0.5h_1c_1(y_{1,0}^{s+1} - y_{1,0})/\tau = \alpha(y_{2,0}^s - y_{1,0}^{s+1}) - \lambda_1(y_{1,0}^{s+1} - y_{1,1}^{s+1})/h_1. \quad (22)$$

Аналогичным образом заменим второе уравнение в (21).

Введём обозначения:

$$\delta y_i^s = \hat{y}_i - y_i^s, \quad \|\delta y_i^s\|_c = \max_{0 \leq j \leq n_i} \{|\delta y_{i,j}^s|\}, \quad \|\delta y^s\|_c = \max\{\|\delta y_1^s\|_c, \|\delta y_2^s\|_c\}.$$

Вычитая из (21) уравнение (22) (и так же для второго тела) и поступая аналогично с другими уравнениями схемы, получаем следующее

Утверждение 4. Имеет место оценка

$$\|\delta y^{s+1}\|_c \leq q_1 \|\delta y^s\|_c, \quad q_1 = \max\left\{\frac{\alpha}{\alpha + 0.5h_1c_1/\tau}, \frac{\alpha}{\alpha + 0.5h_2c_2/\tau}\right\}. \quad (23)$$

Из данной оценки следует сходимость алгоритма для любых значений параметров. Однако для больших значений α сходимость будет медленной, если только τ не берётся достаточно малым.

Можно рассмотреть ситуацию, когда тепловой поток между телами в уравнении (22) полностью берётся из предыдущей итерации. Тогда (22) принимает вид (для второго тела аналогично)

$$0.5h_1c_1(\overset{s+1}{y}_{1,0} - y_{1,0})/\tau = \alpha(\overset{s}{y}_{2,0} - \overset{s}{y}_{1,0}) - \lambda_1(\overset{s+1}{y}_{1,0} - \overset{s+1}{y}_{1,1})/h_1. \tag{24}$$

Для подобного алгоритма справедливо

Утверждение 5. *Имеет место оценка*

$$\|\delta \overset{s+1}{y}\|_c \leq q_2 \|\delta \overset{s}{y}\|_c, \quad q_2 = \max \left\{ \frac{4\alpha\tau}{h_1c_1}, \frac{4\alpha\tau}{h_2c_2} \right\}. \tag{25}$$

Из этой оценки следует очень жёсткое условие на сходимость итерационного процесса ($q_2 < 1$), которое при больших значениях α , скорее всего, не позволит проводить расчёт с желаемыми значениями шагов по времени.

В [6] отмечено, что для случаев простых областей и регулярных сеток численные схемы, полученные на основе применения МКЭ, аналогичны соответствующим численным схемам, полученным на основе конечно-разностного подхода. Можно ожидать, что на качественном уровне утверждения о сходимости итерационных алгоритмов (23) и (25) будут справедливы и для конечно-элементного алгоритма, изложенного в п. 2.

4. Результаты расчётов.

4.1. Решение тестовых задач. Рассмотрим решение задачи теплообмена между одной топливной таблеткой (тело 1) и участком оболочки (тело 2), имеющим такую же высоту, что и таблетка (см. рис. 1). Считаем, что на всех участках поверхности задан нулевой поток, кроме внешней поверхности таблетки и внутренней поверхности оболочки, на которых поставлено условие теплообмена (2). Для сравнения с аналитическими решениями, полученными в п. 3, полагаем, что у таблетки нет фасок, мощность тепловыделения равна нулю, тепловые характеристики не зависят от температуры ($c_i(T) = c_i(T_0)$, $\lambda_i(T) = \lambda_i(T_0)$), коэффициент теплоотдачи является постоянным, а вся задача рассматривается в плоской постановке. С принятыми допущениями полученное численное решение не зависит от второй координаты и соответствует модельной одномерной задаче (11).

Тест 1. Выполним серию расчётов на различных сетках, чтобы исследовать поведение погрешности численного решения относительно аналитического решения, заданного в (18), (19). Значения параметров, использованных в расчётах (в безразмерных величинах): протяжённость первого тела $l = 3.0$, протяжённость второго тела $L = 0.7$, $c_1 = 2467$, $\lambda_1 = 8380$, $c_2 = 20960$, $\lambda_2 = 17600$, начальные температуры $T_0^1 = 300$, $T_0^2 = 623$. Моделировался интервал времени продолжительностью 0.02, существенно меньший, чем характерное время, за которое изменение температуры доходит от левого края оболочки до правого ($L^2c_2/\lambda_2 \approx 0.58$). Можно считать, что задача для областей конечных размеров на рассматриваемых временах соответствует задаче о теплообмене между двумя полубесконечными областями.

Были использованы сетки:

расчёт 1 ($h_1 = h_2 = 0.1$, $\tau = 10^{-3}$);

расчёт 2 ($h_1 = h_2 = 0.05$, $\tau = 2.5 \cdot 10^{-4}$);

расчёт 3 ($h_1 = h_2 = 0.025$, $\tau = 6.25 \cdot 10^{-5}$).

В табл. 1 приведены абсолютные погрешности решения в момент времени $t = 0.02$ для разных сеток и разных значений коэффициента теплоотдачи α .

Таблица 1. Погрешности численного решения. Тест 1

α	Расчёт 1 (error ₁)	Расчёт 2 (error ₂)	Расчёт 3 (error ₃)	error ₁ /error ₂	error ₂ /error ₃
$2.5 \cdot 10^4$	1.050	0.245	0.062	4.28	3.95
$2.5 \cdot 10^6$	1.502	0.330	0.085	4.54	3.88

Из приведённых в табл. 1 ошибок для разных расчётов видно, что погрешность численного решения убывает по зависимости, близкой к $O(h^2 + \tau)$. Это соответствует теоретическим представлениям о схеме с использованием линейных конечных элементов для дискретизации по пространству и схеме 1 порядка для дискретизации по времени.

Тест 2. Выполним серию расчётов на различных сетках, чтобы исследовать поведение погрешности численного решения относительно аналитического решения, заданного (20). Параметры расчётов и использованные сетки соответствуют тесту 1. В аналитическом решении выбрано значение свободного параметра $A_1 = 1$. Моделировался интервал времени продолжительностью 0.05, за это время максимальное значение температуры в областях уменьшилось примерно в 7 раз. В табл. 2 приведены абсолютные погрешности решения в момент времени $t = 0.05$ для разных сеток и разных значений α .

Из приведённых в табл. 2 соотношений ошибок для разных расчётов видно, что для значения $\alpha = 2.5 \cdot 10^4$ погрешность численного решения по-прежнему убывает по зависимости, близкой к $O(h^2 + \tau)$, но для $\alpha = 2.5 \cdot 10^6$ скорость уменьшения ошибки замедляется.

Таблица 2. Погрешности численного решения. Тест 2

α	Расчёт 1 (error ₁)	Расчёт 2 (error ₂)	Расчёт 3 (error ₃)	error ₁ /error ₂	error ₂ /error ₃
$2.5 \cdot 10^4$	$8.07 \cdot 10^{-3}$	$2.03 \cdot 10^{-3}$	$5.09 \cdot 10^{-4}$	3.97	3.99
$2.5 \cdot 10^6$	$1.21 \cdot 10^{-2}$	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$3.61 \cdot 10^{-3}$	2.39	1.41

Тест 3. Выполним серию расчётов, чтобы исследовать характер сходимости итерационного процесса, учитывающего условия неидеального теплового контакта между двумя телами. Считаем, что на внешней поверхности оболочки поставлено условие первого рода ($T = 623$), мощность тепловыделения в таблетке постоянна по пространству, по времени меняется по линейному закону от нуля до номинального значения за интервал времени, равный 3600, а затем остаётся постоянной. Моделировался интервал времени продолжительностью 3600. Задача решалась в осесимметричной постановке, все остальные параметры такие же, как в тесте 1.

В расчётах применялась сетка с шагами $h_1 = h_2 = 0.1$, $\tau = 360$. Для контроля сходимости использовалась оценка $\|\hat{T}^{s+1} - \hat{T}^s\|_c \leq \varepsilon_0$.

В табл. 3 приведено характерное количество итераций за один шаг по времени для различных значений ε_0 и α .

Таблица 3. Количество итераций в тепловой задаче за один шаг по времени. Тест 3

ε_0	$\alpha = 10^4$	$\alpha = 10^5$	$\alpha = 10^6$
10^{-2}	12	46	236
10^{-3}	16	66	414
10^{-4}	20	86	594

Выясним, как в проведённых расчётах при увеличении α меняется количество итераций, необходимых для уменьшения величины $\|\hat{T}^{s+1} - \hat{T}^s\|_c$ в 10 раз. Сравним полученный результат с теоретической оценкой, приведённой в (23). Согласно (23) нас интересует количество итераций k такое, что $q_1^k = 10^{-1}$, т.е. $k = -(\lg q_1)^{-1}$. Для использованных параметров задачи при увеличении коэффициента α от 10^4 до 10^5 количество итераций из оценки (23) должно возрасти примерно в 10 раз. Аналогичная ситуация наблюдается при увеличении коэффициента α от 10^5 до 10^6 . В проведённых расчётах при повышении коэффициента α от 10^4 до 10^5 количество итераций изменилось с 4 до 20, т.е. возросло в 5 раз. При изменении коэффициента α от 10^5 до 10^6 количество итераций увеличилось в 9 раз – с 20 до 180. Таким образом, на качественном уровне зависимость скорости сходимости алгоритма от коэффициента α соответствует формуле (23), полученной для тестовой одномерной задачи.

При попытке решить задачу по алгоритму, в котором тепловой поток целиком брался из предыдущей итерации (аналогично (24)), численное решение разваливалось. Это соответствует оценке сходимости (25), поскольку в таком случае коэффициент q_2 значительно больше единицы.

Если решать задачу с условием идеального теплового контакта с использованием итерационного алгоритма (7)–(10), то для достижения точности, соответствующей величине $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, требовалось 6 итераций.

В табл. 4 приведены значения следующих характеристик расчётов с неидеальным тепловым контактом (для различных α) и с идеальным тепловым контактом в момент времени $t = 3600$: температура на внешней поверхности таблетки (T_p), температура на внутренней поверхности оболочки (T_c), значение модуля теплового потока (для неидеального контакта он равен $\alpha|T_p - T_c|$). Из табл. 4 следует, что для рассмотренного интервала времени при условии неидеального теплового контакта значение теплового потока между таблеткой и оболочкой, а также значение температуры на внутренней поверхности оболочки практически не зависят от коэффициента α и отличаются от соответствующих значений, полученных для условия идеального теплового контакта, не более чем на 0.013 % (для потока) и на 0.0016 % (для температуры). В то же время температура внешней поверхности таблетки при уменьшении значения α может существенно отличаться от температуры оболочки.

Таблица 4. Результаты расчётов с неидеальными и с идеальными тепловыми контактами

Тепловой контакт	α	T_p	T_c	$ q_{cont} $
Неидеальный	10^4	884.6825	696.2676	$1.88416 \cdot 10^6$
Неидеальный	10^5	715.1190	696.2754	$1.88436 \cdot 10^6$
Неидеальный	10^6	698.1606	696.2762	$1.88438 \cdot 10^6$
Идеальный	–	696.2767	696.2767	$1.88439 \cdot 10^6$

Выполненный анализ позволяет сделать вывод, что при моделировании твэла в определённых ситуациях для больших значений коэффициента α с вычислительной точки зрения более предпочтительным является расчёт с идеальным тепловым контактом по алгоритму (7)–(10), чем расчёт с неидеальным тепловым контактом по алгоритму (5).

4.2. Результаты моделирования участка твэла. Рассмотрим решение связанной термомеханической задачи взаимодействия элементов твэла. В расчётную область (см. рис. 1) входят M топливных таблеток с фасками и находящийся напротив них участок оболочки ($N = M + 1$). Считаем, что между внешними поверхностями таблеток и внутренней поверхностью оболочки происходит теплообмен. Коэффициент теплоотдачи α зависит от величины зазора, разности температур в двух противолежащих точках, контактного давления и ряда иных факторов. Другие тепловые характеристики зависят от температуры ($c_i(T), \lambda_i(T)$). Соответствующие зависимости взяты из библиотеки MATPRO [12]. Остальные тепловые условия задачи такие же, как в тесте 3. Моделировался интервал времени продолжительностью 3600.

Для решения механической задачи контактного взаимодействия таблеток друг с другом и с оболочкой использован метод Дирихле–Неймана [3].

В первой серии расчётов полагалось, что в начальный момент времени между таблетками и оболочкой существует зазор $\delta_0 = 0.04$. В результате нагрева в таблетках образуются тепловые деформации и зазор уменьшается (это происходит неравномерно относительно оси z), но механического контакта между таблетками и оболочкой нет (в расчётах учитывается механический контакт между таблетками). Выполнены расчёты для случаев $M = 1, 4, 10$. На каждом шаге по времени итерационный процесс продолжался до выполнения критерия

$$\|\hat{T}^{s+1} - \hat{T}^s\|_c \leq 10^{-2}.$$

В табл. 5 приведены значения следующих характеристик расчёта с одной таблеткой в четыре момента времени: количество итераций в тепловой задаче (в скобках указано количество итераций для расчёта с десятью таблетками), величина зазора, коэффициент теплоотдачи и разность температур между двумя противолежащими точками на двух поверхностях для узла сетки, расположенного вблизи центра боковой поверхности таблетки.

Видно, что с уменьшением зазора значение коэффициента теплоотдачи увеличивается, но температуры в противолежащих точках могут значительно отличаться. Таким образом, тепловой контакт остаётся существенно неидеальным. Количество итераций в тепловой задаче для различного количества таблеток изменялось незначительно.

Таблица 5. Характеристики первой серии расчётов

Время	Количество итераций	Величина зазора	Коэффициент теплоотдачи	Разность температур
720	10(10)	0.029	$7.61 \cdot 10^3$	48.83
1800	12(12)	0.022	$9.93 \cdot 10^3$	93.37
2880	13(13)	0.014	$1.39 \cdot 10^4$	106.14
3600	17(18)	0.009	$1.90 \cdot 10^4$	97.44

На рис. 2 приведены графики изменения температуры вдоль поперечного сечения, соответствующего половине высоты таблетки: три для таблетки (T_p , область $r < 3.9$) и три для оболочки (T_c , область $r \geq 3.9$). Хорошо заметен разрыв по температуре между внешней поверхностью таблетки и внутренней поверхностью оболочки вследствие использования условий неидеального теплового контакта между телами.

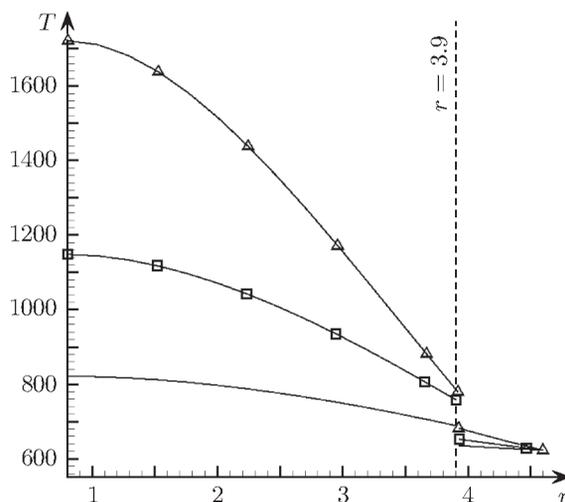


Рис. 2. Изменение температуры таблеток T_p (в области $r < 3.9$) и оболочек T_c (в области $r \geq 3.9$) вдоль поперечного сечения для разных моментов времени: $t = 720$ (графики без маркера), $t = 1800$ (графики с квадратным маркером) и $t = 3600$ (графики с треугольным маркером).

Во второй серии расчётов полагалось, что в начальный момент времени зазор между таблетками и оболочкой равен нулю. В результате нагрева таблетки вступают в механический контакт с оболочкой. Выполнены расчёты для случаев $M = 1, 4, 10$.

В табл. 6 приведены значения следующих характеристик расчёта с одной таблеткой в четыре момента времени: количество итераций в тепловой задаче (в скобках указаны количества итераций для расчётов с четырьмя и десятью таблетками), контактное давление, коэффициент теплоотдачи и разность температур между двумя противоположными точками на двух поверхностях для узла сетки, расположенного вблизи центра боковой поверхности таблетки.

Таблица 6. Характеристики второй серии расчётов

Время	Количество итераций	Контактное давление	Коэффициент теплоотдачи	Разность температур
720	387(393, 393)	26.43	$1.04 \cdot 10^6$	0.36
1800	196(262, 498)	38.07	$1.44 \cdot 10^6$	0.64
2880	249(398, 701)	52.47	$1.94 \cdot 10^6$	0.75
3600	297(438, 499)	64.02	$2.33 \cdot 10^6$	0.78

Из проведённых расчётов следует, что с увеличением контактного давления значение коэффициента теплоотдачи возрастает, при этом температуры в противоположащих точках поверхностей практически не отличаются друг от друга, т.е. фактически реализуется случай идеального теплового контакта. Количество итераций в тепловой задаче в расчётах для одной таблетки и для десяти таблеток отличалось в среднем в 2–2.5 раза.

Если решать задачу с условием идеального теплового контакта с использованием итерационного алгоритма (7)–(10), то для достижения точности, соответствующей величине $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, в расчётах с $M = 1, 4, 10$ требовалось от 14 до 16 итераций на каждом шаге по времени. Значения температур в узлах на внутренней поверхности оболочки и тепловых потоков между таблетками и оболочкой в расчётах с разными условиями теплового контакта практически не отличаются друг от друга на участках вблизи центров поверхностей таблеток. На участках, расположенных ближе к фаскам таблеток, температуры в разных расчётах отличаются на 2–3 %.

Приведённые в табл. 5 и 6 данные свидетельствуют, что и для более сложной задачи характер зависимости сходимости итерационного процесса от величины коэффициента теплоотдачи качественно соответствует оценке (23).

Заключение. Представлена нелинейная задача о тепловом взаимодействии системы тел. В качестве граничных условий на противоположащих поверхностях контактирующих тел рассмотрены условия как неидеального, так и идеального теплового контакта. Для дискретизации задачи по пространству использован метод конечных элементов, для дискретизации по времени применена полностью неявная конечно-разностная схема. Представлены итерационные алгоритмы, позволяющие свести решение общей задачи к решению систем линейных уравнений для каждого тела по отдельности. Для выяснения основных особенностей решения и численного алгоритма для случая неидеального теплового контакта рассмотрена модельная одномерная задача, для которой построен главный член асимптотического разложения и исследована разностная схема, в том числе получены оценки скорости сходимости различных итерационных алгоритмов. Выполнена серия тестовых расчётов на сгущающихся сетках по пространству и времени. Полученные результаты подтвердили, что численное решение сходится к выведенным точным решениям с ожидаемой скоростью. При увеличении значения коэффициента теплоотдачи наблюдается кратное увеличение количества итераций, нужное для достижения требуемой точности. В то же время значения температур и тепловых потоков на контактирующих поверхностях стремятся к значениям соответствующих величин в задаче с идеальным тепловым контактом.

С помощью построенных численных алгоритмов решена связанная термомеханическая задача взаимодействия элементов в участке твэла в ядерном реакторе в осесимметричной постановке с использованием реалистичных зависимостей для теплофизических характеристик материалов топливной таблетки и оболочки, взятых из библиотеки MATPRO. Проведена серия расчётов, в которых рассматривался участок, включающий в себя от одной до десяти таблеток. Сопоставление расчётов реальных задач с теоретическими предсказаниями показало, что алгоритм решения многомерной нелинейной задачи качественно соответствует поведению одномерных вычислений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., 2008.
2. Galanin M.P., Zhukov V.T., Klyushev N.N. Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // *Computers and Fluids*. 2018. V. 172. P. 483–491.
3. Галанин М.П., Родин А.С. Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента // *Журн. вычислит. математики и мат. физики*. 2022. Т. 62. № 4. С. 659–676.

4. *Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С.* Численное решение задачи контактного взаимодействия элементов твэла с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 3. С. 4–22.
5. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М., 2010.
6. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М., 2010.
7. *Toselli A., Widlund O.* Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory. Berlin; Heidelberg, 2005.
8. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы теории сингулярных возмущений. М., 1990.
9. *Беляков Н.С., Носко А.П.* Неидеальный тепловой контакт тел при трении. М., 2010.
10. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М., 1979.
11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
12. *Haagman D.L., Reutmann G.A.* A Handbook of Materials Properties for Use in the Analysis of Lightwater Reactor Fuel Rod Behavior. Idaho, 1979.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.02.2023 г.
После доработки 22.02.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

УДК 519.633

ЯВНО-НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЁТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С МАЛЫМ ВРЕМЕНЕМ РЕЛАКСАЦИИ

© 2023 г. В. И. Голубев, И. С. Никитин,
Н. Г. Бурого, Ю. А. Голубева

Рассматривается динамическое поведение упруговязкопластических сред под действием внешней нагрузки. Для общего случая нелинейной функции вязкости, описывающей скоростное упрочнение, строится явно- неявная расчётная схема второго порядка аппроксимации, позволяющая получать численное решение исходной полулинейной гиперболической задачи. Отличительной особенностью данного подхода является не использование метода расщепления по физическим процессам. Несмотря на это, был получен явный вычислительный алгоритм, допускающий эффективную реализацию на современных вычислительных системах.

DOI: 10.31857/S0374064123060109, EDN: FHXWZC

Введение. Дифференциальная часть систем уравнений, описывающих динамику упруговязкопластических сред [1–4], совпадает с системой уравнений динамической теории упругости, однако в эти системы входят уравнения (для девиаторных или касательных напряжений, соответственно), содержащие сильно нелинейный свободный член с характерным временем релаксации τ в знаменателе.

В нестационарных (и тем более квазистатических) процессах с характерным временем много большим чем τ упруговязкопластические (УВП) среды ведут себя как упругопластические (УП), т.е. при $\tau \rightarrow 0$ УВП системы уравнений переходят в системы типа Прандтля–Рейса [5–7]. Этот факт отмечается во многих работах на физико-механическом [6, 7] или математическом [8, 9] уровне строгости.

Однако для сильно динамических процессов с характерными временами ($\leq \tau$) эффекты скоростного упрочнения и резкого роста динамического предела текучести проявляют себя в полной мере [4, 7]. Для их описания требуется использовать полную УВП систему того или иного типа. Кроме того, УВП системы по своей дифференциальной части заведомо являются гиперболическими, приводимыми к дивергентному виду, и допускают численное решение сеточно-характеристическими [10] или конечно-объёмными [11] методами. В то же время УП системы, к которым сводятся теории пластического течения, не являются дивергентными и для построения решений, допускающих сильные разрывы, приходится расширять формулировки и классы решений [9, 12], в частности, использовать предельные переходы от УВП к УП обобщённому решению, при этом результат зависит от выбора “переходной” УВП модели [12, 13]. Таким образом, УВП системы уравнений, с одной стороны, отражают физику динамических процессов деформирования, а с другой – обеспечивают регуляризацию недивергентных УП систем уравнений.

Устойчивое интегрирование определяющих соотношений связи напряжений и деформаций в УВП системах уравнений по явной схеме для малых времен релаксации τ требует более сильного ограничения величины временного шага, чем обычное курантовское ограничение. Устранить это дополнительное ограничение можно с помощью неявных схем расчёта определяющих соотношений (“жёсткой” части общей УВП системы уравнений). Важно, что описываемые ниже неявные схемы расчёта определяющих уравнений для УВП сред не требуют решения систем алгебраических уравнений, и расчёт каждого шага по времени проводится явно с обычным курантовским шагом по времени.

1. Изотропные и анизотропные модели упруговязкопластических сплошных сред.

1.1. Система уравнений изотропной упруговязкопластической среды. В декартовой прямоугольной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, система уравнений изотропной УВП среды при малых деформациях имеет вид [1, 4]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = 2\mu e'_{ij} - 2\mu \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{\tau}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{kk}/3, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

v_i – компоненты вектора скорости, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, s_{ij} – компоненты девиатора напряжений, σ – среднее напряжение, e_{ij} – компоненты тензора скорости деформации, e'_{ij} – компоненты девиатора скорости деформации, $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ – второй инвариант девиатора напряжений, σ_s – предел текучести, $F(\sqrt{s_{kl}s_{kl}}/\sigma_s - 1)$ – нелинейная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(F)$, $H(F)$ – функция Хевисайда, τ – характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести, ρ – плотность среды, λ и μ – модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

1.2. Система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды. Система уравнений анизотропной УВП среды, описывающая динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, перпендикулярных оси x_3 , имеет вид [2, 3]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j \neq 3, \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial t} &= 2\mu e_{3j} - 2\mu \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{\tau}, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Обе УВП системы уравнений (1) и (2) являются полулинейными гиперболическими системами первого порядка дивергентного вида. Вся характерного вида нелинейность сосредоточена в свободных не дифференциальных членах уравнений для компонент девиаторов или касательных напряжений.

2. Общие построения неявных аппроксимаций второго порядка для полулинейных уравнений. Обоснуем аппроксимации второго порядка для полулинейных уравнений систем, описывающих динамику изотропной и анизотропной упруговязкопластической сред и содержащих нелинейные свободные члены. В обоих случаях эти выделенные уравнения из общей системы в векторной записи имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = L_x \mathbf{V} - \mathbf{S}F(|\mathbf{S}|), \quad (3)$$

где \mathbf{S} – вектор-столбец неизвестных девиаторных или касательных компонент напряжений S_k и $|\mathbf{S}| = \sqrt{S_k S_k}$, \mathbf{V} – вектор скорости, L_x – линейный матричный оператор пространственного дифференцирования, соответствующий закону Гука для упругой среды. В дальнейшем также понадобится эта совокупность уравнений, продифференцированная по времени:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} = L_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \frac{\partial (\mathbf{S}F(|\mathbf{S}|))}{\partial t}.$$

Индексами $n+1$ и n будем помечать значения искомым величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt – шаг по времени. Запишем неявную разностную аппроксимацию вида

$$\frac{\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{S}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}L_h(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n) - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{n+1}F^{n+1} + \mathbf{S}^nF^n)$$

или

$$\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{S}^n = \frac{1}{2}L_h(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n)\Delta t - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{n+1}F^{n+1} + \mathbf{S}^nF^n)\Delta t. \tag{4}$$

Утверждение 1. *Разностная задача (4) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (3) со вторым порядком малости по временному шагу.*

Доказательство. Пусть оператор пространственного дифференцирования L_x аппроксимирован со вторым порядком по пространственному шагу разностным оператором L_h , не уточняя конкретный вид этой аппроксимации и оставляя для неё свободу выбора, т.е.

$$L_h\mathbf{V}^n = L_x\mathbf{V}^n + O(\Delta x^2).$$

Для решений исходной дифференциальной системы уравнений на $(n+1)$ -м шаге по времени справедливы разложения

$$\mathbf{S}^{n+1} = \mathbf{S}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \right|_{t_n} \Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2), \quad F^{n+1} = F^n + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2).$$

Подставив эти разложения в разностные уравнения с неявной аппроксимацией, получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \right|_{t_n} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) &= \frac{1}{2}L_h \left(\mathbf{V}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) + \mathbf{V}^n \right) \Delta t - \\ &- \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{S}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \left(F^n + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) + \mathbf{S}^n F^n \right) \Delta t. \end{aligned}$$

Применяя формулу для разностного оператора пространственного дифференцирования

$$L_h\mathbf{V}^n = L_x\mathbf{V}^n + O(\Delta x^2),$$

после выкладок и приведения подобных слагаемых получим равенство

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) &= \\ &= L_x\mathbf{V}^n + \frac{1}{2}L_x \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta x^2) - \mathbf{S}^n F^n - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial(\mathbf{S}F)}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

С учётом исходной полулинейной системы и её продифференцированного по времени следствия получаем, что рассмотренная неявная разностная схема выполняется на решении этой системы со вторым порядком аппроксимации. Утверждение доказано.

3. Неявная схема второго порядка аппроксимации для определяющих уравнений упруговязкопластической среды с нелинейными свободными членами. Поскольку системы (1) и (2), по существу, аналогичны друг другу, будем вести построение численной схемы на примере изотропной УВП системы (1). Особый интерес представляет схема расчёта части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Что касается остальных уравнений системы (1) – линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнений для среднего напряжения,

то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого (второго) порядка не вызывает затруднений [14]. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учётом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

Построим неявную аппроксимацию второго порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы (1) указанного выше типа:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = 2\mu \frac{e'_{ij}{}^{n+1} + e'_{ij}{}^n}{2} - \frac{2\mu}{\tau} \left(\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle + \frac{s_{ij}^n}{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \right) \frac{1}{2}.$$

Эту нелинейную систему уравнений для s_{ij}^{n+1} можно записать в виде

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\bar{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1 \right) \right\rangle + \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1 \right) \right\rangle \right).$$

Здесь введены безразмерные компоненты $\bar{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1}/\sigma_s$, $\bar{s}_{ij}^n = s_{ij}^n/\sigma_s$, $\bar{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1}/\sigma_s$, где $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^n + \mu(e'_{ij}{}^{n+1} + e'_{ij}{}^n)\Delta t$ – компоненты девиатора после “упругого” шага по времени, $\delta = \tau\sigma_s/(\mu\Delta t)$ – безразмерный малый параметр системы уравнений.

Отметим, что с учётом проведённого ранее расчёта значений компонент скорости на верхнем временном слое компоненты “упругого” девиатора \bar{s}_{ije}^{n+1} также можно считать известными, как и значения \bar{s}_{ij}^n на n -м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора на верхнем слое \bar{s}_{ij}^{n+1} , можно записать следующим образом:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta + \frac{1}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1 \right) \right\rangle \right) + \bar{s}_{ij}^n \frac{\left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1 \right) \right\rangle}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} = \delta \bar{s}_{ije}^{n+1}. \tag{5}$$

Свернём эти уравнения последовательно с \bar{s}_{ij}^{n+1} , \bar{s}_{ij}^n , \bar{s}_{ije}^{n+1} и введём обозначения для возникающих сверток с неизвестными значениями

$$X = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Y = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^n}, \quad Z = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}$$

и с уже вычисленными значениями

$$T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}, \quad S = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kle}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\bar{s}_{kle}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}.$$

Получим нелинейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} X^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + Y^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta Z^2, \\ Y^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + T^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta S^2, \\ Z^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + S^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta \Sigma^2. \end{aligned}$$

Исключив неизвестные Y и Z , запишем уравнение для X^2 :

$$X^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right)^2 = \Delta P^2,$$

где

$$\Delta P^2 = \delta^2 \bar{s}_{ije}^{n+1} \tilde{s}_{ije}^{n+1} - 2\delta \bar{s}_{ije}^{n+1} \bar{s}_{ij}^n \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} + \bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n \left(\frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} \right)^2 = \delta^2 \tilde{S}^2 \geq 0,$$

$$\tilde{S}^2 = \tilde{s}_{ij}^{n+1} \tilde{s}_{ij}^{n+1}, \quad \tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n \langle F(T-1) \rangle}{T \delta}, \quad T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}.$$

Нетрудно видеть, что промежуточный девиатор \bar{s}_{ij}^{n+1} и его свёртка \tilde{S} вычисляются по результатам “упругого” шага по времени.

Поскольку для свёртки \tilde{S}^2 всегда выполняется $\tilde{S}^2 \geq 0$, получаем окончательное уравнение для неизвестной свёртки X :

$$\delta X + \langle F(X-1) \rangle = \delta \tilde{S}. \tag{6}$$

Отметим, что из (5) следует формула для искомым компонент девиатора на верхнем временном слое в следующем виде:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \delta \bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right)^{-1} = \frac{\delta \tilde{s}_{ij}^{n+1} X}{\delta X + \langle F(X-1) \rangle} = \tilde{s}_{ij}^{n+1} \frac{X}{\tilde{S}}. \tag{7}$$

Таким образом, для полного определения величин \bar{s}_{ij}^{n+1} следует решить уравнение (6) и подставить результат в (7). Уточним диапазоны допустимых значений для X . При $X < 1$ решение (6) тривиально: $X = \tilde{S}$. Следовательно, $\bar{s}_{ij}^{n+1} = \tilde{s}_{ij}^{n+1}$ с критерием применимости $\tilde{S} < 1$ после “упругого” шага. При $X \geq 1$ следует решить уравнение

$$\delta X + F(X-1) = \delta \tilde{S}. \tag{8}$$

Для этого нужно конкретизировать функцию вязкости с учётом её упомянутых выше свойств $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(F)$.

4. Неявная схема второго порядка аппроксимации для определяющих уравнений УВП среды с нелинейными свободными членами. Как правило, для функции вязкости используются степенные или полиномиальные аппроксимации, построенные по результатам экспериментальных исследований [4, 7, 15].

Утверждение 2. Для случая линейной функции вязкости $F(x) = x$ уравнение (8) имеет точное аналитическое решение.

В этом случае решение уравнения (8), условие $X \geq 1$ и искомые компоненты девиатора соответственно имеют вид

$$X = \frac{1 + \delta \tilde{S}}{1 + \delta}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{1 + \delta \tilde{S}}{1 + \delta}.$$

При малых δ

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta(\tilde{S} - 1)). \tag{9}$$

Утверждение 3. Для случая квадратичной функции вязкости $F(x) = x^2$ уравнение (8) имеет точное аналитическое решение.

Уравнение (8) выглядит следующим образом:

$$\delta X + (X-1)^2 = \delta \tilde{S}.$$

Его решение, дополнительное условие и девиатор напряжения на верхнем слое определяются соотношениями

$$X = 1 - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\delta(\tilde{S} - 1) + \frac{\delta^2}{4}}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\delta(\tilde{S} - 1) + \frac{\delta^2}{4}} \right).$$

При малых δ

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 + \sqrt{\delta(\tilde{S} - 1)} \right). \tag{10}$$

Утверждение 4. Для случая корневой функции вязкости $F(x) = \sqrt{x}$ уравнение (8) имеет точное аналитическое решение.

Решим уравнение $\delta X + \sqrt{X - 1} = \delta \tilde{S}$ с дополнительными условиями $\tilde{S} \geq X \geq 1$. Опуская выкладки и проверку условий, запишем результат:

$$X = \frac{2(1 + \delta^2 + \tilde{S}^2)}{1 + 2\delta^2\tilde{S} + \sqrt{1 + 4\delta^2(\tilde{S} - 1)}}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{2(1 + \delta^2 + \tilde{S}^2)}{1 + 2\delta^2\tilde{S} + \sqrt{1 + 4\delta^2(\tilde{S} - 1)}}.$$

При малых δ справедливо

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta^2(\tilde{S} - 1)^2). \tag{11}$$

Если уравнение (4) не имеет аналитического решения, то его можно решить в предположении, что параметр δ является малым ($\delta \ll 1$), и воспользовавшись методом разложения по малому параметру. Достаточно общим примером может служить степенное представление функции $F(x) = x^q$. Необходимо при $\delta \ll 1$ решить уравнение

$$\delta X + (X - 1)^q = \delta \tilde{S}, \quad X \geq 1, \quad q > 0.$$

Будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням $\delta^{1/q}$ с точностью до первого малого члена: $X = 1 + C_1\delta^{1/q} + \dots$. Подставляя это разложение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q , получаем значение неизвестного коэффициента разложения

$$C_1 = (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad X \approx 1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad \tilde{S} \geq 1.$$

Отсюда следует решение для девиаторов при произвольном положительном q :

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta^{1/q}(\tilde{S} - 1)^{1/q}). \tag{12}$$

Легко видеть, что рассмотренные выше частные точные решения δ совпадают с полученным приближённым решением. Обсудим также вопрос предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$, поскольку формула для промежуточного девиатора \bar{s}_{ij}^{n+1} содержит малый параметр в знаменателе:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} - \frac{\tilde{s}_{ij}^n \langle F(T - 1) \rangle}{T \delta}. \tag{13}$$

Утверждение 5. *Корректировочная формула (13) при $\delta \rightarrow 0$ допускает представление в форме, не содержащей в явном виде параметр δ .*

Доказательство. Уравнение (8), справедливое на $(n + 1)$ -м слое по времени, запишем для n -го слоя:

$$\delta T + \langle F(T - 1) \rangle = \delta \sqrt{\bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n}.$$

Отсюда имеем

$$\langle F(T - 1) \rangle = \delta \left\langle \sqrt{\bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n} - \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} \right\rangle,$$

и в формуле для промежуточного девиатора удаётся снять особенность при $\delta \rightarrow 0$:

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle \sqrt{\tilde{s}_{ij}^n \tilde{s}_{ij}^n} - \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} \right\rangle, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}}. \quad (14)$$

Утверждение доказано.

Что касается системы уравнений (2) для анизотропной УВП среды, описывающей динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, то для её численного решения корректировку касательных напряжений, например, аналог формулы (12), можем записать следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{3j}^{n+1} \approx \frac{\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}}} \left(1 + \left(\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}} \right)^{1/q} \delta^{1/q} \right), \quad \tilde{\sigma}_{3j}^{n+1} = \bar{\sigma}_{3je}^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_{3j}^n}{\sqrt{\bar{\sigma}_{3k}^n \bar{\sigma}_{3k}^n}} \frac{\langle F(\sqrt{\bar{\sigma}_{3k}^n \bar{\sigma}_{3k}^n} - 1) \rangle}{\delta}.$$

Аналогичные замены следует произвести и для всех остальных рассмотренных случаев (9)–(11) и (14).

Таким образом, показано, что полученные решения неявной аппроксимации второго порядка для девиаторов напряжений УВП системы уравнений допускают предельный переход при малом времени релаксации. Следовательно, формулы (9)–(12) для различных представлений функций вязкости при малых δ можно трактовать как регуляризаторы численных решений УП систем. Сами эти формулы представляют собой алгебраические корректировки компонент девиаторов напряжений, полученных в результате расчёта “упругого” шага по времени.

Этот приём, предложенный в работах [16, 17], широко использовался в вычислительной практике (см., например, [18–20]), но трактовался как корректировка первого порядка в процессе физического расщепления упругопластического процесса на упругий шаг и приведение девиаторов напряжений на круг текучести, которая имеет вид

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ije}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{s}_{kle}^{n+1} \tilde{s}_{kle}^{n+1}}}.$$

В данной статье специфические корректировки девиаторов напряжений за пределом текучести второго порядка возникают как обоснованный результат построения явно-неявной схемы второго порядка для УВП системы уравнений, а корректировка (14) – для УП системы уравнений.

5. Численная схема для нестационарной упругой системы. В прямоугольной системе координат (x, y, z) система уравнений линейной изотропной теории упругости является гиперболической и может быть записана в каноническом виде

$$\mathbf{q}_t + A_x \mathbf{q}_x + A_y \mathbf{q}_y + A_z \mathbf{q}_z = \mathbf{f}.$$

Здесь вектор $\mathbf{q} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy})^T$ содержит компоненты тензора напряжений и вектора скорости смещений точек среды, \mathbf{f} – вектор внешних сил. Матрицы A_x , A_y и A_z разреженные и зависят от параметров среды λ , μ и ρ . С помощью метода расщепления по физическим процессам решение исходной задачи сводится к последовательному решению однородной линейной гиперболической системы уравнений и последующему решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Дальнейшее применение метода расщепления по пространственным направлениям приводит к набору из трёх одномерных гиперболических систем уравнений [21]

$$\mathbf{q}_t + A_x \mathbf{q}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_t + A_y \mathbf{q}_y = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_t + A_z \mathbf{q}_z = \mathbf{0}.$$

Для определённости рассмотрим первую из них. Ввиду гиперболичности матрицы A_x , она может быть представлена в виде

$$A_x = \Omega_x^{-1} \Lambda \Omega_x,$$

где матрица Ω_x^{-1} состоит из правых собственных векторов, матрица Ω_x – обратная к ней, а матрица Λ – диагональная, состоящая из собственных значений матрицы A_x . Опустим далее индекс x и введём обозначение $\omega = \Omega \mathbf{q}$. Умножение одномерной системы уравнений на матрицу Ω и внесение её под операторы дифференцирования по времени и по координате приводит к набору независимых линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами

$$\omega_t + \Lambda \omega_x = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Для каждой компоненты вектора ω справедливы соотношения

$$\omega_i(t + \Delta t, x, y, z) = \omega_i(t, x - \lambda_i \Delta t, y, z).$$

С использованием пространственной интерполяции заданного порядка на выбранном сеточном шаблоне получается восстановить значения $\omega_i(t, x - \lambda_i \Delta t, y, z)$. В дальнейшем, с учётом невырожденности матрицы Ω , восстанавливаются значения искомым функций задачи на следующем временном слое $\mathbf{q}^{n+1} = \Omega^{-1} \omega^{n+1}$.

При использовании пространственного шаблона $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$ для решения линейного одномерного уравнения переноса возможно построить схему третьего порядка аппроксимации по времени и по пространству. Однако, как известно, невозможно построить линейную монотонную схему выше первого порядка аппроксимации. Преимуществом применяемой в работе схемы является её квазимонотонность. В статье [22] показано, что её близость к области монотонных по Фридрихсу схем в пространстве неопределённых коэффициентов приводит к наименьшему развитию осцилляций на разрывных решениях. Таким образом, для решения уравнения (15) на компоненте ω_i использовалось выражение

$$\begin{aligned} \omega_m^{n+1} = & \omega_m^n - \frac{\sigma}{2}(\omega_{m+1}^n - \omega_{m-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(\omega_{m-1}^n - 2\omega_m^n + \omega_{m+1}^n) + \\ & + \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{6}(\omega_{m-2}^n - 3\omega_{m-1}^n + 3\omega_m^n - \omega_{m+1}^n), \end{aligned}$$

где $\sigma = \lambda_i \Delta t / h < 1$ – число Куранта, h – пространственный шаг расчётной сетки. Отметим, что сеточно-характеристический метод ранее успешно применялся для решения ряда динамических задач деформируемого твёрдого тела [23–25].

6. Примеры расчётов. На примерах расчётов покажем, что полученные универсальные формулы корректировки девиаторов напряжений при различных значениях времени релаксации, сравнимых или меньших шага по времени, могут быть успешно использованы для моделирования быстропротекающих процессов в упруговязкопластической среде. Применение обычных явных схем при малых значениях времени релаксации для численного решения полунелинейных упруговязкопластических систем уравнений привело бы к неустойчивости решения.

В настоящей работе был проведён расчёт процесса нагружения изотропной упруговязкопластической среды. Рассматривалась полная трёхмерная постановка. Область интегрирования имела размеры $50 \times 50 \times 10000$ м и покрывалась кубической расчётной сеткой с шагом 5 м. Для задания упругих констант среды использовались следующие физические параметры: скорость продольных волн $C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500$ м/с, $C_s = \sqrt{\mu/\rho} = 2250$ м/с, плотность $\rho = 2500$ кг/м³, $\sigma_s = 112\,500$ Па. Исходя из условия устойчивости Куранта для сеточно-характеристической схемы, используемой для решения линейной упругой задачи, шаг по времени задавался равным 1 мс. При этом общее время расчёта составляло 2 с. К нижней части области равномерно по всей поверхности прикладывалось постоянное внешнее давление в 337 500 Па. Согласно аналитическому исследованию исходных определяющих уравнений, в среде при данном типе нагружения распространяются упругая волна сжатия со скоростью C_p и пластическая волна со скоростью

$$C_f = \sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu/3)} \approx 3674 \text{ м/с}.$$

Аналитически значение напряжения σ_1^* на полке между волнами сильных разрывов можно вычислить из условия текучести Мизеса при определённом соотношении между компонентами напряжений $\sigma_2 = \sigma_3 = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\sigma_1$:

$$\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 = \sigma_s^2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\sigma_1.$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\sigma_1^* = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\sqrt{6}}{4} \sigma_s.$$

На рис. 1 представлены численные решения, полученные для линейной упругой среды (сплошная линия), а также для изотропной упругопластической среды по схеме Wilkins [17] (штриховая линия) и по предложенной в работе явно-неявной схеме (пунктирная линия). Его анализ показывает, что во всех трёх случаях корректно воспроизводится процесс распространения продольной волны нагружения. Расчётная скорость распространения этой волны в среде совпадает с аналитическими оценками. Отметим также, что не возникают численные осцилляции на разрывах решения. На обоих численных решениях для упругопластической среды чётко прослеживается пластическая волна. Скорость её распространения, измеренная по точке перегиба на фронте, совпадает с аналитическими оценками. При этом предложенная в настоящей работе схема гораздо точнее разрешает сам волновой фронт (разрыв решения).

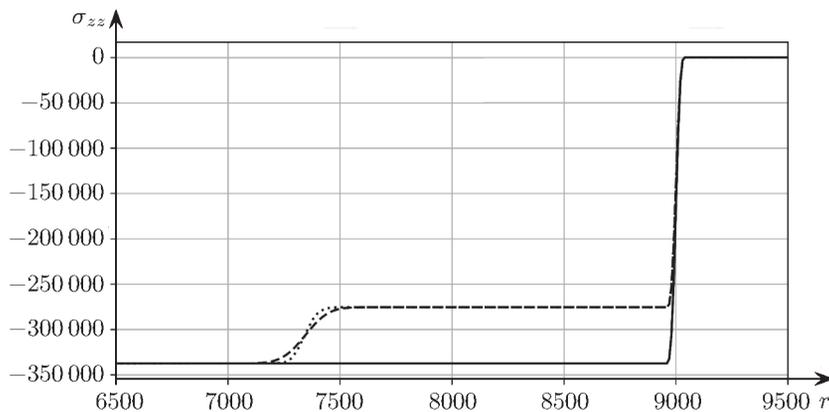


Рис. 1. Пространственное распределение вертикальной компоненты тензора напряжений σ_{zz} в момент времени $t = 2$ с (r – расстояние вдоль оси Oz).

На рис. 2 приведены численные решения, полученные для линейной упругой среды с линейной функцией вязкости при различных значениях параметра $\delta \in [0.01, 10]$. Все остальные значения характеристик рассматриваемой среды и параметры вычислительного алгоритма оставались без изменений. Видно, что увеличение характерного времени релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести размывает фронт пластической волны.

Заключение. Для устойчивого численного решения определяющей системы упруговязкопластической модели сплошной среды предложена явно-неявная схема второго порядка с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов. Для согласования порядков аппроксимации явного упругого и неявного корректировочного шагов построена неявная аппроксимация второго порядка для изотропной и анизотропной моделей упруговязкопластической модели сплошной среды. Получены уточнённые корректировочные формулы после “упругого” шага расчёта.

Найденные решения неявной аппроксимации второго порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении

времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем. Поскольку упруговязкопластические системы уравнений по своей дифференциальной части заведомо являются гиперболическими, приводимыми к дивергентному виду, предложенный численный алгоритм в указанном выше смысле обеспечивает консервативность сеточно-характеристических и конечно-объемных методов при расчёте разрывных решений, в том числе и недивергентных упругопластических систем уравнений.

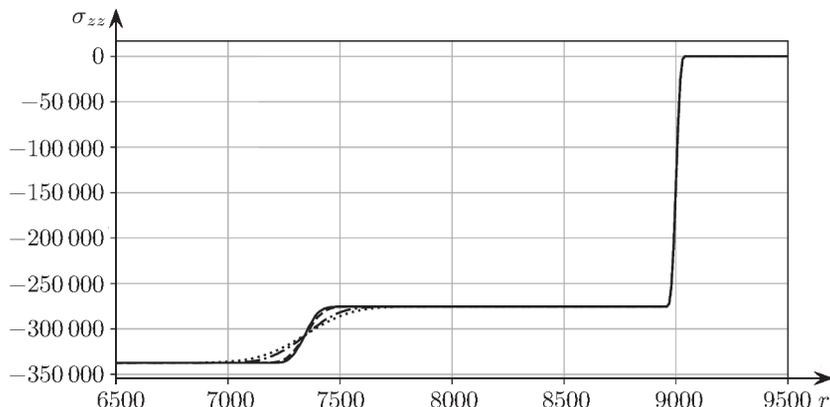


Рис. 2. Пространственное распределение вертикальной компоненты тензора напряжений σ_{zz} в момент времени $t = 2$ с при $\delta = 10$ (пунктирная линия), $\delta = 1$ (штрихпунктирная), $\delta = 0.1$ (штриховая) и $\delta = 0.01$ (сплошная).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-71-10060).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М., 2008.
2. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 154–165.
3. *Никитин И.С.* Теория неупругих слоистых и блочных сред. М., 2019.
4. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М., 1978.
5. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., 1962.
6. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 5. С. 96–111.
7. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М., 1979.
8. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М., 1980.
9. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М., 1997.
10. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B., Malovichko M.S.* Compact grid-characteristic scheme for the acoustic system with the piece-wise constant coefficients // Int. J. of Appl. Mech. 2022. P. 2250002.
11. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge, 2002.
12. *Dal Maso G., LeFloch P.G., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // J. de Math. Pur. et Appl. 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
13. *Pares C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // SIAM J. on Numer. Anal. 2006. V. 44. № 1. P. 300–321.
14. *Куликковский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., 2001.
15. *Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 4. С. 21–65.
16. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М., 1967.

17. *Wilkins M.L.* Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin; Heidelberg; New York, 1999.
18. *Кужуджанов В.Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 98–108.
19. *Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л. и др.* Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
20. *Бураго Н.Г.* Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислит. механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 4. С. 5–20.
21. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B.* Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. 2022. V. 14. № 4. P. 899–910.
22. *Kholodov A.S., Kholodov Ya.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. Math. Phys. 2006. V. 46. С. 1560–1588.
23. *Golubev V.I., Nikitin I.S., Vasyukov A.V., Nikitin A.D.* Fractured inclusion localization and characterization based on deep convolutional neural networks // Procedia Structural Integrity. 2023. V. 43. P. 29–34.
24. *Golubev V., Vasyukov A., Nikitin I. et al.* Continuum model of fractured media in direct and inverse seismic problems // Continuum Mech. Thermodyn. 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01149-w>.
25. *Guseva E.K., Beklemysheva K.A., Golubev V.I., Epifanov V.P., Petrov I.B.* Investigation of ice rheology based on computer simulation of low-speed impact // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2022. Communications in Computer and Information Science / Eds. D. Balandin, K. Barkalov, I. Meyerov. Cham, 2022. V. 1750. P. 176–184.

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва,
Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.
После доработки 27.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

УДК 519.622.2+681.5.015

АЛГОРИТМ ПОДВИЖНОГО ОКНА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ И ЭЛЛИпсоИДНЫМИ ОБЛАСТЯМИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПАРАМЕТРОВ

© 2023 г. А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

Решена задача параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров для случая, когда экспериментальные данные заданы в виде интервалов. Состояние рассматриваемых динамических систем в каждый момент времени является параметрическим множеством. Построена целевая функция в пространстве областей неопределённости параметров, характеризующая степень отклонения параметрических множеств состояний от экспериментальных интервальных оценок. Для минимизации целевой функции разработан алгоритм подвижного окна, относящийся к градиентным методам. В его основе лежит алгоритм адаптивной интерполяции, позволяющий в рамках заданной области неопределённости параметров (окна) в явном виде получать параметрические множества состояний динамической системы. Продемонстрирована эффективность и работоспособность предлагаемого алгоритма.

DOI: 10.31857/S0374064123060110, EDN: FIELWZ

Введение. Как правило, для получаемых экспериментальных данных характерно наличие разброса в значениях [1, 2]. В основном это связано с погрешностями проводимых измерений или с внешними факторами, влияние которых нельзя исключить. Обычно эксперимент повторяется несколько раз с целью получения дополнительной информации относительно неоднозначности в данных. Наиболее простым описанием неопределённости является интервальная оценка возможных значений.

Задача параметрической идентификации возникает, когда математическая модель исследуемого процесса уже определена, но неизвестными остаются параметры, которые подбираются таким образом, чтобы модель наилучшим образом воспроизводила эксперимент. Традиционно здесь применяются методы, минимизирующие среднеквадратическое отклонение модельной кривой от экспериментальных точек.

Применение интервального аппарата [3–6] в задачах параметрической идентификации связано с предположением, что параметры модели могут быть интервальными. Преимущество в использовании интервальных моделей заключается в том, что они дают ограничения на интересующие величины, в отличие от классических моделей, которые аппроксимируют их. В работе [7] представлен итеративный интервальный метод для прогнозирования границ параметров заданной модели в условиях неопределённости измеренных данных. В исследовании [8] предлагается структурно-параметрическая идентификация линейных, либо допускающих линеаризацию, динамических объектов по интервальным исходным данным. Статья [9] посвящена развитию методов параметрической идентификации на основе нейронных сетей, применяемых для решения обратных задач теплофизики в условиях интервальной неопределённости параметров.

Ранее авторами был разработан интерполяционный подход к решению задачи интервальной параметрической идентификации для случая точечных экспериментальных данных [10]. В данной работе выполнено обобщение подхода на случай интервальных экспериментальных данных и различных форм области неопределённости параметров динамической системы; рассмотрены динамические системы с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров. Будет показано, что данные системы можно представить как системы с интервальными параметрами. Состояние такой динамической системы в каждый момент времени

является параметрическим множеством. Задача параметрической идентификации заключается в нахождении такой области неопределённости параметров, в которой параметрические множества состояний будут содержать соответствующие экспериментальные интервальные оценки или минимизировать отклонение от них.

Как и при обычной параметрической идентификации, здесь составляется целевая функция в пространстве областей неопределённости параметров, характеризующая степень отклонения модельных множеств от экспериментальных данных. Для минимизации целевой функции разработан алгоритм подвижного окна, относящийся к градиентным методам. В его основе лежит алгоритм адаптивной интерполяции [11, 12], позволяющий в рамках заданной области неопределённости параметров (окна) в явном виде получать параметрические множества состояний динамической системы. Ключевое преимущество алгоритма подвижного окна заключается в том, что он стремится получить область неопределённости параметров как можно меньшего объёма, что является важным на практике.

В п. 1 работы рассматривается прямая задача моделирования динамической системы с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров. Наиболее часто математические модели динамических систем задаются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), поэтому рассматриваются именно они. В п. 2 формулируется задача параметрической идентификации для случая, когда экспериментальные данные заданы в виде интервалов, и в общем виде строится целевая функция. В следующем пункте анализируется целевая функция и доказывается утверждение о том, что при определённых свойствах параметрического множества состояний вместо экспериментальных интервальных оценок можно рассматривать только их крайние точки. Описанию алгоритма подвижного окна посвящён п. 4. В процессе работы алгоритма на каждой итерации необходимо решать задачу построения эллипсоида или прямоугольного параллелепипеда, включающего заданное множество точек. Данный вопрос рассматривается в п. 5. Результаты применения разработанного алгоритма для нескольких задач параметрической идентификации приведены в п. 6.

1. Прямая задача. Рассматривается задача Коши для системы ОДУ, состоящей из n уравнений с m -мерной областью неопределённости Ω в начальных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_N], \\ (y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_m(t_0))^T &\in \Omega, \quad y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t_0 – начальный момент времени; t_N – конечный момент времени; вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим единственность и существование решения при всех $(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_m(t_0))^T \in \Omega$. Любую неавтономную систему ОДУ с параметрами можно преобразовать к виду (1) путём добавления фиктивных уравнений.

В качестве области неопределённости Ω рассматривается или прямоугольный параллелепипед, или эллипсоид, которые могут быть сориентированы определённым образом в пространстве. Область Ω задаётся в параметрическом виде

$$\Omega = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T : \mathbf{z} = \mathbf{z}^c + \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m \mathbf{R}_{\varphi_{i,j}} \mathbf{S} \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{E} \right\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{z}^c = (z_1^c, z_2^c, \dots, z_m^c)^T$ – центр области; $\mathbf{R}_{\varphi_{i,j}}$ – матрица поворота на угол $\varphi_{i,j}$ относительно плоскости, образованной осями i и j ; $\mathbf{S} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ – диагональная матрица масштабирования; $\mathbf{E} = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T : \xi_i \in [0, 1]\}$ – единичный куб; $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = (g_1(\boldsymbol{\xi}), g_2(\boldsymbol{\xi}), \dots, g_m(\boldsymbol{\xi}))^T$ – отображение единичного куба в куб с центром в начале координат и длиной стороны 2 (тогда $g_i(\boldsymbol{\xi}) = 2\xi_i - 1$, $i = \overline{1, m}$) или в единичный шар. В последнем случае в качестве $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ удобно использовать переход из сферической системы координат в декартову систему координат [13]:

$$g_1(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \cos(2\pi\xi_2) \prod_{j=3}^m \sin(\pi\xi_j), \quad g_2(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \sin(2\pi\xi_2) \prod_{j=3}^m \sin(\pi\xi_j),$$

$$g_i(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1 \cos(\pi \xi_i) \prod_{j=i+1}^m \sin(\pi \xi_j), \quad i = \overline{3, m}.$$

Систему (1) можно записать в виде системы ОДУ с интервальными параметрами

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_N], \\ y_i(t_0) &= z_i(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}), \quad i = \overline{1, m}, \\ y_i(t_0) &= y_i^0, \quad i = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m$; $\mathbf{z}(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) = (z_1(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}), \dots, z_m(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}))^T = \mathbf{z}^c + \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m \mathbf{R}_{\varphi_{i,j}} \mathbf{S} \times \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ – преобразование единичного куба в область определённой формы; $\mathbf{z}^c = (z_1^c, z_2^c, \dots, z_m^c)^T$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{1,2}, \dots, \varphi_{i,j}, \dots, \varphi_{m-1,m})$, $i < j$, – параметры, полностью задающие область неопределённости. Для сокращения записи обозначим наборы параметров \mathbf{z}^c , \mathbf{s} и $\boldsymbol{\varphi}$ через $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_p})^T$, $n_p = 2m + (m-1)m/2$.

Решение системы (3) в каждый момент времени t_k является параметрическим множеством

$$Y^k = \{\mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) : \xi_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, m}\}. \quad (4)$$

Отметим, что на практике часто используется внешняя интервальная оценка множества (4), которую можно рассматривать как одномерные проекции Y^k на каждое фазовое измерение:

$$\begin{aligned} W^k &= [\underline{w}_1^k, \overline{w}_1^k] \times [\underline{w}_2^k, \overline{w}_2^k] \times \dots \times [\underline{w}_n^k, \overline{w}_n^k], \quad \underline{w}_i^k = \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m} [y_i^k(\boldsymbol{\xi})], \\ \overline{w}_i^k &= \max_{\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m} [y_i^k(\boldsymbol{\xi})], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что Y^k в общем случае зависит от параметров $\boldsymbol{\theta}$:

$$Y^k(\boldsymbol{\theta}) = \{\mathbf{y}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) : \boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m\}.$$

В дальнейшем эти параметры могут опускаться.

Цель алгоритма адаптивной интерполяции заключается в построении для каждого момента времени t_k вектор-функции $\mathbf{P}^k(\boldsymbol{\xi})$, интерполирующей $\mathbf{y}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}))$, $\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m$. В начальный момент времени \mathbf{P}^0 определяется явным образом:

$$\mathbf{P}^0(\boldsymbol{\xi}) = (z_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), z_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), \dots, z_m(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), y_{m+1}^0, \dots, y_n^0)^T.$$

Построение \mathbf{P}^{k+1} по \mathbf{P}^k сводится к интерполяции неявной функции

$$\mathbf{F}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (y_1(t_{k+1}), y_2(t_{k+1}), \dots, y_n(t_{k+1}))^T,$$

заданной в виде системы ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \\ y_i(t_k) &= P_i^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Интерполяционный полином строится по некоторому набору узлов, образующих интерполяционную сетку. При построении \mathbf{P}^{k+1} сначала выполняется перенос решений, находящихся в узлах сетки, с k -го слоя на $(k+1)$ -й слой. Далее в зависимости от погрешности интерполяции происходит адаптация сетки путём добавления или удаления узлов. Интерполяционный полином \mathbf{P} может быть любым, только необходимо, чтобы была возможность контролировать погрешность интерполяции. В приведённых далее численных примерах использовалась

интерполяция на адаптивных разреженных сетках с нелинейным базисом [14–16] (подробное описание см. в работах [17–19]).

Задание области неопределённости Ω в параметрическом виде (2) необходимо для удобства применения алгоритма адаптивной интерполяции, так как в этом случае интерполяционная сетка всегда строится над единичным кубом.

Отметим, что так как $P^k(\xi)$ является явной функцией, то можно аналитически вычислить производные решения по ξ , а также по z и θ . Для определения $dy_i^k(z(\theta, \xi))/dz_j$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, необходимо решить n систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с одинаковой матрицей коэффициентов, которая является матрицей Якоби преобразования $z(\theta, \xi)$ относительно ξ :

$$\frac{dP_i^k(\xi)}{d\xi_j} = \sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\theta, \xi))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta, \xi)}{d\xi_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

а производные по θ уже вычисляются через $dy_i^k(z(\theta, \xi))/dz_j$:

$$\frac{dy_i^k(z(\theta, \xi))}{d\theta_j} = \sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\theta, \xi))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta, \xi)}{d\theta_j}, \quad j = \overline{1, n_p}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Выражения для производных являются явными функциями, что позволяет выполнять анализ исходной системы (3) в области неопределённости без дополнительного интегрирования систем ОДУ для вычисления градиента.

2. Интервальная задача параметрической идентификации. Пусть известны N экспериментальных оценок фазовых переменных для различных моментов времени t_k , $k = \overline{1, N}$:

$$\hat{Y}^k = [\hat{y}_1^k, \overline{\hat{y}_1^k}] \times [\hat{y}_2^k, \overline{\hat{y}_2^k}] \times \dots \times [\hat{y}_n^k, \overline{\hat{y}_n^k}].$$

С геометрической точки зрения множество \hat{Y}^k является n -мерным прямоугольным параллелепипедом (или, по-другому, бруском). Интервальная задача параметрической идентификации заключается в определении таких параметров θ области неопределённости Ω начальных условий системы (3), чтобы $\hat{Y}^k \subset Y^k$, $k = \overline{1, N}$, или чтобы степень непересечения множеств \hat{Y}^k и Y^k , $k = \overline{1, N}$, была минимальна. Если экспериментальная информация о диапазонах значений известна не для всех фазовых переменных, то при поиске неизвестных параметров такие фазовые переменные не учитываются.

Сформулируем задачу минимизации отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизируется следующая целевая функция:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N \rho(Y^k(\theta), \hat{Y}^k),$$

где $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ характеризует степень непересечения множеств \hat{Y}^k и Y^k , и если $\hat{Y}^k \subset Y^k$, то $\rho(Y^k, \hat{Y}^k) = 0$. В частности, $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ может соответствовать квадрату расстояния между множеством Y^k и самой удалённой от него точкой множества \hat{Y}^k

$$\rho(Y^k, \hat{Y}^k) = \max_{\hat{y}^k \in \hat{Y}^k} \rho_{\text{sp}}(Y^k, \hat{y}^k) \quad (8)$$

или, например, являться интегральной характеристикой

$$\rho(Y^k, \hat{Y}^k) = \int_{\hat{y}_1^k}^{\overline{\hat{y}_1^k}} \int_{\hat{y}_2^k}^{\overline{\hat{y}_2^k}} \dots \int_{\hat{y}_n^k}^{\overline{\hat{y}_n^k}} \rho_{\text{sp}}(Y^k, \hat{y}^k) d\hat{y}_n^k d\hat{y}_{n-1}^k \dots d\hat{y}_1^k, \quad (9)$$

где $\hat{\mathbf{y}}^k = (\hat{y}_1^k, \hat{y}_2^k, \dots, \hat{y}_n^k)^\top$, $\rho_{\text{sp}}(Y^k, \hat{\mathbf{y}}^k) = \min_{\mathbf{y}^k \in Y^k} \|\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}}^k\|^2$ – квадрат расстояния между множеством Y^k и точкой $\hat{\mathbf{y}}^k$. Традиционно в качестве нормы $\|\cdot\|$ используется взвешенная евклидова норма

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^n p_i a_i^2,$$

где p_i – веса, которые позволяют учесть разную природу фазовых переменных (для удобства изложения будем полагать $p_i = 1$). С учётом этого ρ_{sp} можно записать следующим образом:

$$\rho_{\text{sp}}(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{\mathbf{y}}^k) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [y_i^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) - \hat{y}_i^k]^2. \quad (10)$$

Отметим, что в данной постановке задачи не требуется, чтобы получающаяся область неопределённости Ω была минимальной. Тем не менее если очевидным образом Ω можно уменьшить, то эта процедура будет выполняться.

3. Построение целевой функции. Рассмотрим вопрос вычисления $\rho(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{Y}^k)$. В случае с (8) необходимо решать максиминную задачу:

$$\rho(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{Y}^k) = \max_{\hat{\mathbf{y}}^k \in \hat{Y}^k} \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [y_i^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) - \hat{y}_i^k]^2. \quad (11)$$

Решение подобных задач требует применения специального математического аппарата [20, 21]. Однако за счёт того, что Y^k и \hat{Y}^k могут обладать определёнными свойствами, задачу (11) можно упростить.

Теорема. Если множество Y^k является выпуклым, то максимум по $\hat{\mathbf{y}}^k$ в задаче (11) будет достигаться в одной из вершин прямоугольного параллелепипеда \hat{Y}^k :

$$V(\hat{Y}^k) = \{(\underline{\hat{y}}_1^k + (\overline{\hat{y}}_1^k - \underline{\hat{y}}_1^k)j_1, \underline{\hat{y}}_2^k + (\overline{\hat{y}}_2^k - \underline{\hat{y}}_2^k)j_2, \dots, \underline{\hat{y}}_n^k + (\overline{\hat{y}}_n^k - \underline{\hat{y}}_n^k)j_n) : j_i \in \{0, 1\}\}. \quad (12)$$

Доказательство. От противного предположим, что максимум достигается в точке $\mathbf{a} \in \hat{Y}^k \setminus V(\hat{Y}^k)$. Возьмём две любые диаметрально противоположные точки $\mathbf{b} \in \hat{Y}^k$ и $\mathbf{c} \in \hat{Y}^k$ относительно точки \mathbf{a} : $\mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c})/2$, в которых максимум не достигается. Отметим частные случаи: если одна из точек \mathbf{b} или \mathbf{c} , также как и \mathbf{a} , является точкой максимума, то дальнейшие рассуждения будут аналогичными, а если абсолютно во всех диаметрально противоположных точках достигается максимум, то он будет достигаться и в граничных точках $V(\hat{Y}^k)$.

Обозначим через \mathbf{b}' и \mathbf{c}' точки множества Y^k , ближайšie к соответствующим точкам \mathbf{b} и \mathbf{c} :

$$\mathbf{b}' = \arg \min_{\mathbf{y}^k \in Y^k} \|\mathbf{y}^k - \mathbf{b}\|^2, \quad \mathbf{c}' = \arg \min_{\mathbf{y}^k \in Y^k} \|\mathbf{y}^k - \mathbf{c}\|^2,$$

а через \mathbf{a}' их линейную комбинацию $\mathbf{a}' = (\mathbf{b}' + \mathbf{c}')/2$, которая тоже принадлежит Y^k по свойству выпуклости. Так как \mathbf{a} – точка максимума, то $\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\|^2 < \rho_{\text{sp}}(Y^k, \mathbf{a})$ и $\|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\|^2 < \rho_{\text{sp}}(Y^k, \mathbf{a})$; кроме того, по определению расстояния между множеством и точкой как минимального имеем дополнительное неравенство $\|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\|^2 \geq \rho_{\text{sp}}(Y^k, \mathbf{a})$. Таким образом,

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\| \quad \text{и} \quad \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\|.$$

Подставим выражения для \mathbf{a} и \mathbf{a}' :

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| < \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{b}' + \mathbf{c}') - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \right\|, \quad \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{b}' + \mathbf{c}') - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \right\|,$$

далее перегруппируем слагаемые

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| < \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\|, \quad \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\|$$

и сложим неравенства

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \|(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\|.$$

В результате получаем противоречие с неравенством треугольника. Следовательно, в окрестности точки максимума \mathbf{a} не может существовать диаметрально противоположных точек \mathbf{b} и \mathbf{c} , в которых максимум не достигается. Такое может быть только в случае, если $\mathbf{a} \in V(\hat{Y}^k)$. Теорема доказана.

Количество точек в множестве $V(\hat{Y}^k)$ конечно и равно 2^n , т.е. если множество Y^k выпуклое, то вычисление (11) сводится к решению 2^n задач минимизации. Требование выпуклости Y^k не всегда может выполняться, однако если множество Ω изначально является эллипсоидом, то в большинстве практических задач это выполняется. Рассмотрим пример простого преобразования

$$y_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad y_2 = x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

для квадрата и круга с центром в начале координат. Образ квадрата не будет являться выпуклым, а круг преобразуется в круг другого радиуса и останется выпуклым.

В случае с (9) вычисление $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ также будет сводиться к решению определённого числа задач минимизации в зависимости от схемы численного интегрирования. Поэтому в качестве $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ для практических задач предлагается использовать некоторый компромисс между (8) и (9):

$$\rho(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{Y}^k) = \sum_{\hat{\mathbf{y}}^k \in V(\hat{Y}^k)} \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [y_i^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) - \hat{y}_i^k]^2. \quad (13)$$

С учётом (12) и (13), а также замены $\mathbf{y}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}))$ на $\mathbf{P}^k(\boldsymbol{\xi})$, целевая функция примет вид

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}) - \hat{y}_{\mathbf{j},i}^k]^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ – мультииндекс, состоящий из 0 и 1, $\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{j}}^k = (\hat{y}_{\mathbf{j},1}^k, \hat{y}_{\mathbf{j},2}^k, \dots, \hat{y}_{\mathbf{j},n}^k)^T$ – \mathbf{j} -я вершина прямоугольного параллелепипеда \hat{Y}^k , $\hat{y}_{\mathbf{j},i}^k = (1 - j_i)\hat{y}_i^k - j_i\bar{y}_i^k$, $i = \overline{1, n}$.

4. Алгоритм подвижного окна. Рассмотрим вопрос минимизации целевой функции (14). Для вычисления её значения необходимо решить набор задач минимизации по $\boldsymbol{\xi}$ для явных функций:

$$J_{\mathbf{j}}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}) - \hat{y}_{\mathbf{j},i}^k]^2, \quad \mathbf{j} \in \{0,1\}^n, \quad k = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Здесь удобно применить градиентные методы [22, 23], так как аналитически возможно построить выражение для градиента:

$$\frac{dJ_{\mathbf{j}}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}))}{d\xi_p} = 2 \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}) - \hat{y}_{\mathbf{j},i}^k] \frac{dP_i^k(\boldsymbol{\xi})}{d\xi_p}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{j}}^k$ точку минимума (15):

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{j}}^k = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} J_{\mathbf{j}}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})).$$

С учётом соотношений (6) и (7) можно также построить градиент для основной целевой функции (14):

$$\frac{dJ(\theta)}{d\theta_p} = 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j \in \{0,1\}^n} \sum_{i=1}^n [P_i^k(\xi_j^k) - \hat{y}_{j,i}^k] \sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\theta, \xi_j^k))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta, \xi_j^k)}{d\theta_p}, \quad p = 1, \dots, n_p,$$

где $dy_i^k(z(\theta, \xi_j^k))/dz_l$, $l = \overline{1, m}$, находятся из решения СЛАУ

$$\sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\theta, \xi_j^k))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta, \xi_j^k)}{d\xi_p} = \frac{dP_i^k(\xi_j^k)}{d\xi_p}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Однако, как было отмечено ранее при постановке задачи, размер получающейся области Ω никак не учитывается в целевой функции. Применение классического метода градиентного спуска, как правило, будет приводить к постоянному увеличению Ω на каждой итерации оптимизации, что уменьшает практическую ценность найденного таким образом решения. В связи с этим предлагается алгоритм подвижного окна, который улучшает данную ситуацию и может рассматриваться как градиентный метод.

Решение задачи интервальной параметрической идентификации можно рассматривать как поиск для каждой точки \hat{y}_j^k прообраза в пространстве начальных условий системы (1) и нахождение множества Ω , включающего все эти прообразы. Под прообразом подразумевается такая точка в пространстве начальных условий, для которой решение соответствующей системы ОДУ будет проходить через точку \hat{y}_j^k или минимизировать отклонение от неё. Необходимо дополнительно отметить, что \hat{y}_j^k обычно содержит информацию не обо всех фазовых переменных, поэтому нельзя проинтегрировать систему ОДУ по времени в обратную сторону, чтобы найти прообразы.

Идея алгоритма подвижного окна заключается в последовательном восстановлении явной зависимости решения системы ОДУ от начальных условий в некоторой области (в окне). В рамках окна для каждой точки \hat{y}_j^k определяется прообраз, а также выполняется оценка, куда этот прообраз должен переместиться далее, чтобы ещё более уменьшить соответствующее отклонение. Следующее окно строится исходя так, чтобы оно включало в себя найденные прообразы и оценки, куда эти прообразы могут переместиться. Алгоритм останавливается тогда, когда окно перестаёт перемещаться.

Выполним формальное описание алгоритма. Пусть $\Omega^{(0)}$ – начальное окно, которое задаётся с помощью параметров $z^{c(0)}$, $s^{(0)}$ и $\varphi^{(0)}$; h – параметр расширения окна; ε – параметр остановки; $s^{\min} = (s_1^{\min}, s_2^{\min}, \dots, s_m^{\min})$, $s^{\max} = (s_1^{\max}, s_2^{\max}, \dots, s_m^{\max})$ – минимальный и максимальный размеры окна. Рассмотрим один шаг алгоритма подвижного окна.

1. С помощью алгоритма адаптивной интерполяции выполняется интегрирование системы (3) с параметрами $z^{c(it)}$, $s^{(it)}$, $\varphi^{(it)}$, $(\theta^{(it)})$ и строятся соответствующие вектор-функции $P^k(\xi)$.

2. Для каждой точки \hat{y}_j^k определяется прообраз в пространстве начальных условий $z_j^k = z(\theta^{(it)}, \xi_j^k)$, где $\xi_j^k = \arg \min_{\xi \in [0,1]^m} J_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi))$.

3. Для нахождения направления перемещения прообраза z_j^k вычисляются производные $dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))/dz_l$, $l = \overline{1, m}$, с помощью решения СЛАУ

$$\sum_{l=1}^m \frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta^{(it)}, \xi_j^k)}{d\xi_p} = 2 \sum_{i=1}^n [P_i^k(\xi_j^k) - \hat{y}_{j,i}^k] \frac{dP_i^k(\xi_j^k)}{d\xi_p}, \quad p = \overline{1, m}.$$

4. Определяются точки zn_j^k , в направлении которых могут переместиться прообразы:

$$zn_j^k = z_j^k + h \Delta z_j^k \begin{cases} \|\Delta z_j^k\|^{-1}, & \text{если } \|\Delta z_j^k\| > \varepsilon, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\Delta z_j^k = \left(-\frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_1}, -\frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_2}, \dots, -\frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_m} \right)^T.$$

5. Определяются параметры $z^{c(it+1)}$, s^{next} и $\varphi^{(it+1)}$ окна, которое содержит все точки z_j^k и zn_j^k , $j \in \{0, 1\}^n$, $k = \overline{1, N}$.
6. Применяются ограничения на размер окна:

$$s^{(it+1)} = \min(s^{\text{max}}, \max(s^{\text{min}}, s^{\text{next}})),$$

где \min , \max – поэлементные операции. Получается новое окно $\Omega^{(it+1)}$.

7. Алгоритм останавливается, когда $\Omega^{(it+1)} = \Omega^{(it)}$.

Отметим несколько важных практических моментов в алгоритме.

1. Если для нахождения ξ_j^k применяются итерационные методы, то в качестве стартового значения поиска на новом шаге алгоритма можно использовать точку, в которой поиск завершился на предыдущем шаге: $\xi_{\text{start}}^{(it+1)} = z^{-1}(\theta^{(it+1)}, z_j^{k(it)})$, где $z^{-1}(\theta, z)$ – обратная функция к $z(\theta, \xi)$.

2. Окна, полученные на двух подряд идущих итерациях, имеют не пустое пересечение: $\Omega^{(it+1)} \cap \Omega^{(it)} \neq \emptyset$. Для уменьшения вычислительных затрат при построении $P^{k(it+1)}$, вместо интегрирования системы ОДУ (5) в точках, которые попадают в пересечение, можно использовать $P^{k(it)}$.

3. Модуль антиградиента $\|\Delta z_j^k\|$ отличен от нуля только для точек, находящихся на границе окна, при этом антиградиент всегда будет направлен от окна, перпендикулярно границе.

4. Параметр s^{min} отвечает за то, чтобы окно не становилось вырожденным, а параметр s^{max} , в большей степени, требуется для контроля вычислительных ресурсов в рамках одного шага алгоритма.

5. Использование окна в форме эллипсоида связано с дополнительными вычислительными затратами. Поэтому алгоритм можно применять следующим образом: сначала ищется окно прямоугольной формы, а на последнем шаге найденные прообразы заключаются в окно уже эллипсоидной формы.

6. Если решение задачи $\arg \min_{\xi \in [0,1]^m} J_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi))$ не единственное, то в качестве ξ_j^k имеет смысл брать точку, находящуюся ближе к центру области: $(0.5, 0.5, \dots, 0.5)^T$, что позволит дополнительно уменьшить размер окна. Однако такая ситуация приводит к некоторой неоднозначности при построении Ω , и в этом случае критерием остановки алгоритма может выступать ограничение на модули градиентов: $\|\Delta z_j^k\| \leq \varepsilon$, $j \in \{0, 1\}^n$, $k = \overline{1, N}$.

Основной интерес с позиции размера получающегося окна Ω представляют результаты п. 5.

5. Построение окна. Рассмотрим задачу построения эллипсоида или бруса, содержащего заданное множество точек. Известны постановки такой задачи с условием минимальности объёма соответствующей фигуры: задача Сильвестра [24] (найти наименьший по объёму шар), задача о минимальном эллипсоиде, задача о минимальном прямоугольном параллелепипеде [25] и т.д. Алгоритмы их решения (см. [26, 27]) зачастую обладают высокой вычислительной сложностью и носят итеративный характер.

В качестве альтернативны решения экстремальной задачи предлагается подход, основанный на статистическом анализе исходного множества точек, который даёт приемлемые результаты и при этом не является ресурсоёмким в плане вычислительных затрат.

Пусть исходное множество состоит из N точек $z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_m^k)^T$, $k = \overline{1, N}$. Построим выборочную матрицу ковариации

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (z^k - \mu)(z^k - \mu)^T,$$

где $\boldsymbol{\mu} = N^{-1} \sum_{k=1}^N \mathbf{z}^k$ – выборочное математическое ожидание.

Обозначим через $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ матрицу, составленную из нормированных собственных векторов матрицы ковариации Σ . Для определения углов $\boldsymbol{\varphi}$ выполняется последовательное обнуление недиагональных элементов матрицы $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{U}^{-1}, \\ \text{for } i &= \overline{1, m}: \\ \text{for } j &= (i+1), \dots, m: \\ \varphi_{i,j} &= \operatorname{arctg}(v_{i,j}/v_{i,i}), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V} \mathbf{R}_{\varphi_{i,j}}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{R}_{\varphi_{i,j}}$ – матрица поворота.

Масштабные коэффициенты \mathbf{s} и центр области \mathbf{z}^c вычисляются по следующим формулам:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}^{\max} - \mathbf{d}^{\min}), \quad \mathbf{z}^c = \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{U}(\mathbf{d}^{\min} + \mathbf{d}^{\max}),$$

где $\mathbf{d}^{\min} = \min_k [\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu})]$ и $\mathbf{d}^{\max} = \max_k [\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{z}^k - \boldsymbol{\mu})]$ – предельные отклонения централизованных точек исходного множества от начала координат в базисе \mathbf{U} ; \min и \max – поэлементные операции.

В случае с эллипсоидом масштабные коэффициенты дополнительно умножаются на корректирующее значение η , равное максимальному среди всех точек расстоянию от центра координат в базисе \mathbf{U} с учётом уже найденных \mathbf{s} и \mathbf{z}^c :

$$\eta = \max_k \|\operatorname{diag}\{\mathbf{s}\}^{-1} \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^c)\|,$$

где $\operatorname{diag}\{\mathbf{s}\}$ – диагональная матрица, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Данный подход можно использовать на промежуточных шагах алгоритма подвижного окна, а на последнем шаге – решать непосредственно экстремальную задачу с требованием минимальности объёма. Это позволит уменьшить вычислительные затраты.

Важно отметить, что если для каждой экспериментальной точки существует единственный прообраз в пространстве начальных условий и параметров, то верно утверждение о том, что решение, полученное с помощью алгоритма подвижного окна, будет наилучшим с точки зрения объёма полученной области неопределённости. Кроме того, алгоритм даёт некоторые вероятностные оценки неопределённых величин.

6. Результаты. Приведём результаты решения нескольких задач параметрической идентификации динамических систем с помощью представленного алгоритма подвижного окна. Вместо экспериментальных интервальных оценок фазовых переменных использовались квазиэкспериментальные: задавались параметры области неопределённости \mathbf{z}^c , \mathbf{s} , $\boldsymbol{\varphi}$ и решалась прямая задача; в каждый заданный момент времени из полученного параметрического множества решений Y^k брался случайный прямоугольный параллелепипед \hat{Y}^k . Для всех вершин \hat{Y}^k , $k = \overline{1, N}$, вычислялись прообразы в пространстве начальных условий и определялись эталонные (исходные) значения параметров \mathbf{z}^c , \mathbf{s} и $\boldsymbol{\varphi}$. Во всех примерах значение параметра остановки $\varepsilon = 10^{-10}$.

Рассмотрим систему ОДУ с двумя неизвестными параметрами, которая соответствует модели Лотки–Вольтерры:

$$u' = \alpha u - 2uv, \quad v' = -v + \beta uv, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 3,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_\alpha g_1(\xi_1, \xi_2) \\ s_\beta g_2(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}, \quad \xi_1 \in [0, 1], \quad \xi_2 \in [0, 1], \quad t \in [0, 2.5], \quad (16)$$

где g_1 , g_2 определяют преобразование единичного квадрата или в квадрат с длиной стороны 2 и центром в начале координат: $g_1(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 - 1$, $g_2(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_2 - 1$, или в единичный круг: $g_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \cos(2\pi\xi_2)$, $g_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \sin(2\pi\xi_2)$. Параметры области неопределённости: α_0 , β_0 , s_α , s_β , φ .

На рис. 1 показаны сгенерированные квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных \hat{Y}^k , $k = \overline{1, 20}$, в равномерно расположенных точках на интервале интегрирования: $t_k = k/8$. Исходные значения параметров в случае с прямоугольным параллелепипедом: $\alpha_0 = 2.00$, $\beta_0 = 0.98$, $s_\alpha = 0.21$, $s_\beta = 0.39$, $\varphi = -0.67$, в случае с эллипсоидом: $\alpha_0 = 2.00$, $\beta_0 = 0.98$, $s_\alpha = 0.28$, $s_\beta = 0.52$, $\varphi = -0.67$. Заметим, что площадь соответствующего прямоугольника ($S = 4s_\alpha s_\beta = 0.33$) меньше, чем площадь эллипса ($S = \pi s_\alpha s_\beta = 0.46$), это связано с тем, что при генерации изначально использовалась прямоугольная область Ω .

Выполняется решение задачи параметрической идентификации. Шаг расширения окна $h = 0.2$; начальные значения параметров: $\alpha_0^{(0)} = 2.50$, $\beta_0^{(0)} = 0.50$, $s_\alpha^{(0)} = 0.05$, $s_\beta^{(0)} = 0.05$, $\varphi^{(0)} = 0.00$; ограничения на размер окна s^{\min} и s^{\max} не задаются. На рис. 2 и 3 проиллюстрирован процесс работы алгоритма в случаях прямоугольной и эллипсоидной областей Ω .

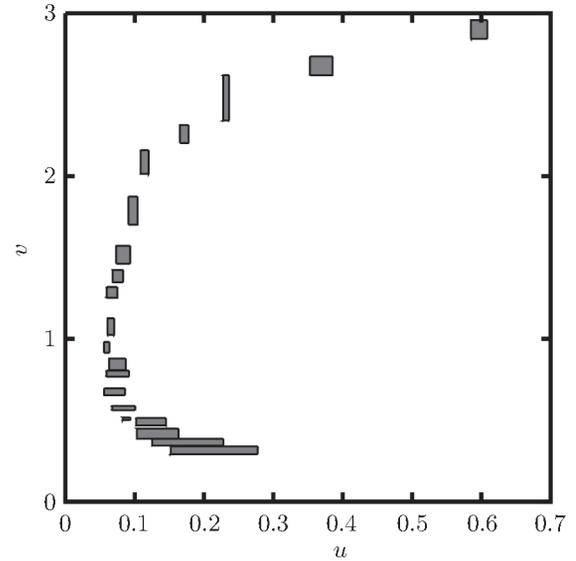


Рис. 1. Квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных системы (16) в различные моменты времени.

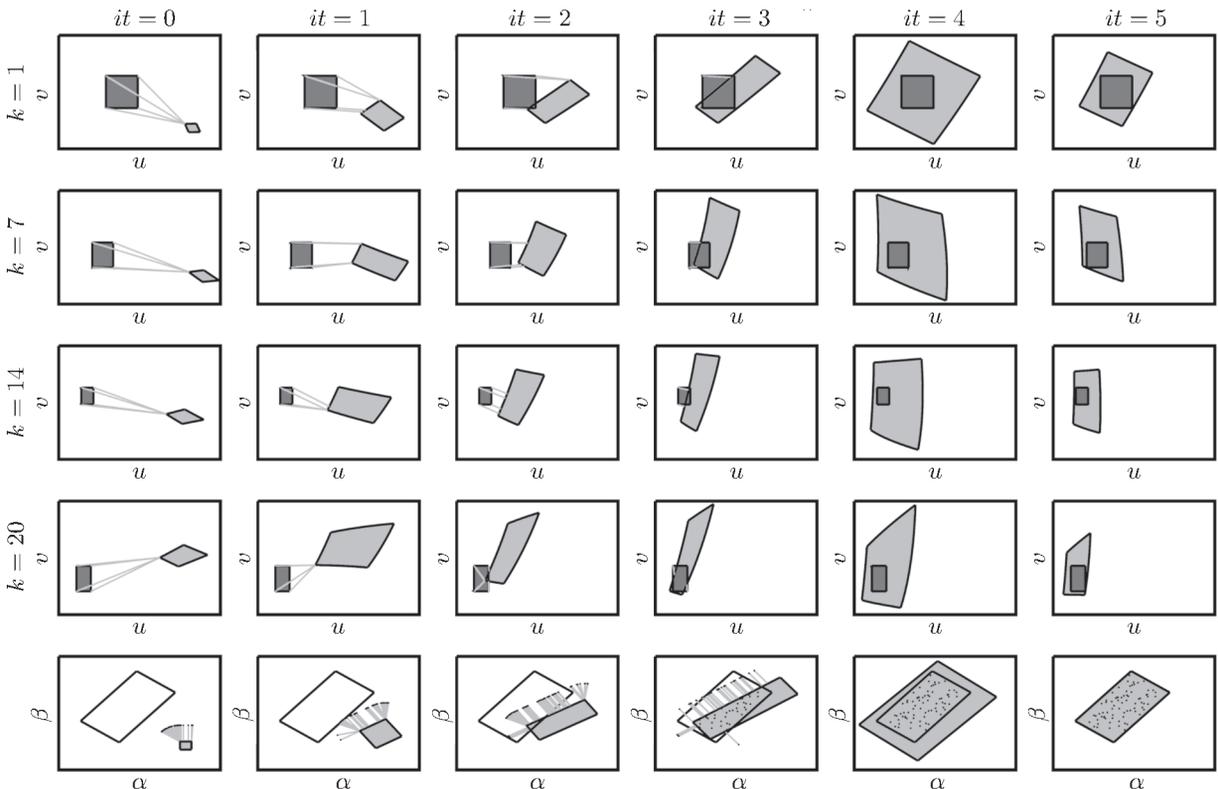


Рис. 2. Иллюстрация решения задачи параметрической идентификации системы (16) в случае прямоугольной области Ω .

В верхних четырёх строках на рис. 2 и 3 показаны квазиэкспериментальные оценки фазовых переменных \hat{Y}^k (темно-серый цвет) для $k = 1, 7, 14, 20$ и соответствующие модельные множества Y^k (светло-серый цвет) на всех итерациях алгоритма подвижного окна. Серые ли-

нии соединяют каждую вершину \hat{Y}^k с ближайшей точкой в Y^k . Сумма квадратов длин этих линий по всем k фактически определяет значение целевой функции (14).

В нижней строке на рис. 2 и 3 демонстрируется движение окна $\Omega^{(it)}$ (закрашенная фигура) в пространстве параметров $\alpha \times \beta$. Исходное множество показано незакрашенной фигурой (точное решение). Серые линии соединяют точки z_j^k и zn_j^k . Каждое окно покрывает линии, полученные на предыдущем шаге. Со 2-й итерации линии начинают вырождаться, это говорит о том, что для соответствующей экспериментальной точки найдены значения α и β , при которых отклонение от модельного решения будет минимальным (в данном примере равно нулю). На 4-й итерации все z_j^k стали равны zn_j^k , и после 5-й итерации окно более не будет перемещаться.

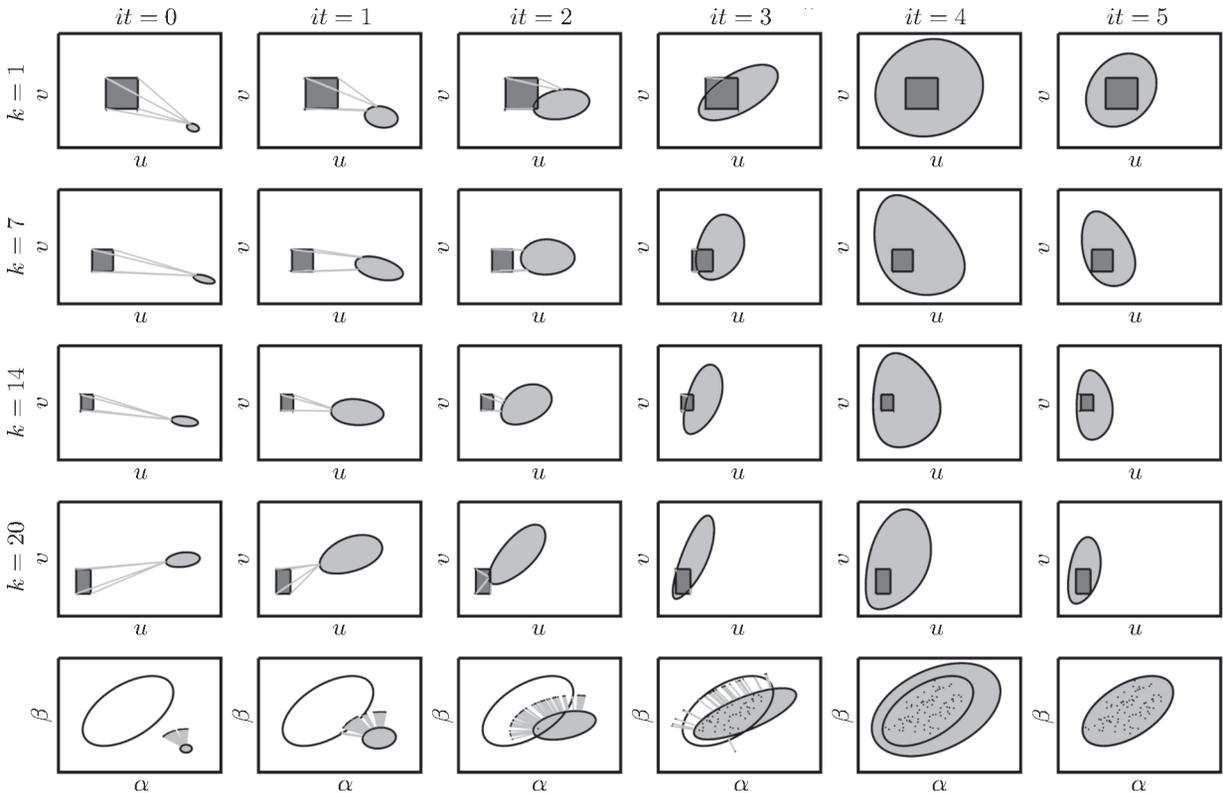


Рис. 3. Иллюстрация решения задачи параметрической идентификации системы (16) в случае эллипсоидной области Ω .

Найденные значения $\alpha_0, \beta_0, s_\alpha, s_\beta, \varphi$ на последней итерации алгоритма совпадают с исходными значениями. Модельные множества полностью содержат в себе интервальные оценки фазовых переменных. Отметим, что полученные множества Y^k в случае прямоугольной формы окна не являются выпуклыми (левая сторона множеств имеет вогнутость), таким образом, в конкретных примерах выпуклость может быть не обязательной.

Далее рассмотрим задачу с трёхмерной областью неопределённости:

$$u' = \alpha u - \frac{5}{4}uv + \frac{1}{10}u^2, \quad v' = -2v + \frac{1}{2}uv + \frac{1}{10}v^2,$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\varphi_{1,2}} \mathbf{R}_{\varphi_{1,3}} \mathbf{R}_{\varphi_{2,3}} \begin{pmatrix} s_u g_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ s_v g_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ s_\alpha g_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4], \quad (17)$$

где $\xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [0, 1], \xi_3 \in [0, 1]$; $\mathbf{R}_{\varphi_{1,2}}, \mathbf{R}_{\varphi_{1,3}}, \mathbf{R}_{\varphi_{2,3}}$ – 3×3 -матрицы поворота; g_1, g_2, g_3 задают преобразование единичного куба в куб с длиной стороны 2 и центром в начале

координат или в шар единичного радиуса. Параметры области неопределённости: $u_0, v_0, \alpha_0, \alpha_0, s_v, s_\alpha, \varphi_{1,2}, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,3}$.

На рис. 4 тёмно-серым цветом показаны сгенерированные квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных $\hat{Y}^k, k = \overline{1, 20}$, в равномерно расположенных точках $t_k = k/5$ на интервале интегрирования. При генерации использовалась прямоугольная область неопределённости со следующими значениями параметров: $u_0 = 4.5, v_0 = 3.0, \alpha_0 = 4.0, s_u = 0.1, s_v = 0.1, s_\alpha = 0.1, \varphi_{1,2} = -\pi/6, \varphi_{1,3} = \pi/3, \varphi_{2,3} = \pi/4$.

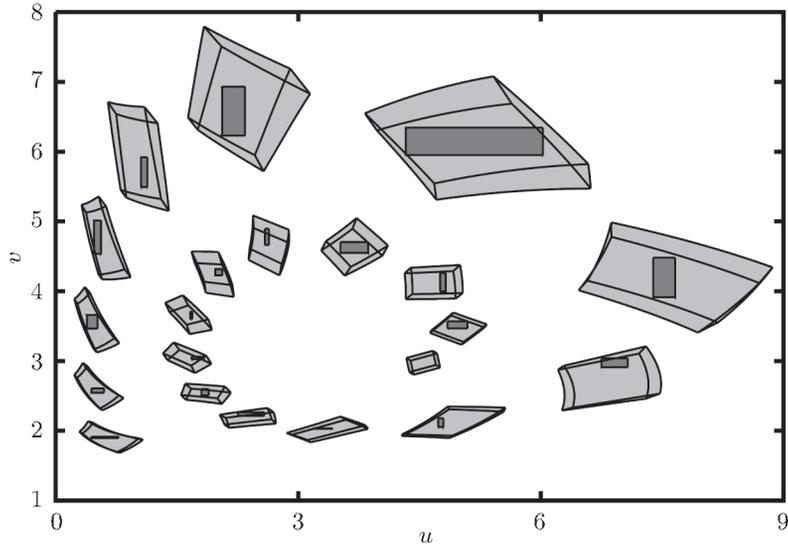


Рис. 4. Квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных системы (17) в различные моменты времени (темно-серый цвет) и полученные множества Y^k на последней итерации алгоритма в случае области неопределённости в форме прямоугольного параллелепипеда (светло-серый цвет).

Выполняется решение задачи параметрической идентификации с помощью алгоритма подвижного окна. Шаг расширения $h = 0.1$; начальные значения параметров: $u_0^{(0)} = 3.5, v_0^{(0)} = 4.0, \alpha_0^{(0)} = 3.5, s_u^{(0)} = 0.1, s_v^{(0)} = 0.1, s_\alpha^{(0)} = 0.1, \varphi_{1,2}^{(0)} = 0, \varphi_{1,3}^{(0)} = 0, \varphi_{2,3}^{(0)} = 0$; ограничения на размер окна: $s_u^{\max} = 0.2, s_v^{\max} = 0.2, s_\alpha^{\max} = 0.2$. Алгоритм завершил работу за 20 итераций. На рис. 5 показаны получающиеся окна в процессе работы алгоритма для каждой 4-й итерации.

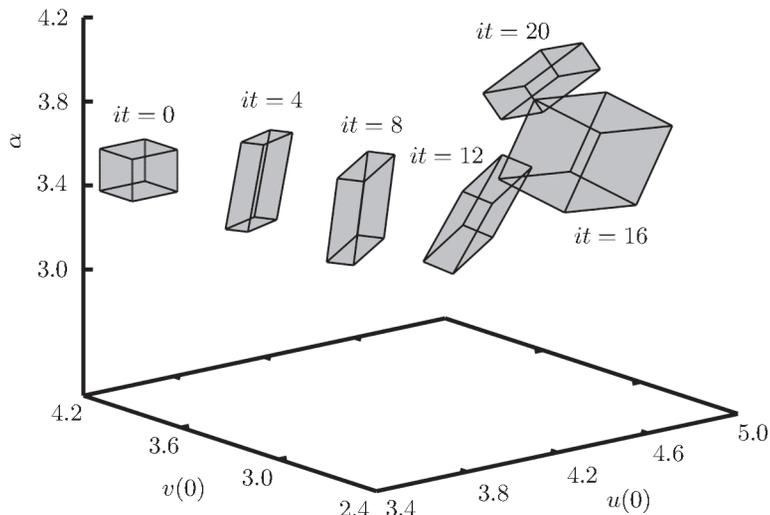


Рис. 5. Иллюстрация перемещения окна в процессе работы алгоритма при решении задачи параметрической идентификации системы (17).

Получены значения для прямоугольной области неопределённости: $u_0^{(20)} = 4.55$, $v_0^{(20)} = 2.98$, $\alpha_0^{(20)} = 3.94$, $s_u^{(20)} = 0.11$, $s_v^{(20)} = 0.11$, $s_\alpha^{(20)} = 0.07$, $\varphi_{1,2}^{(20)} = 0.30$, $\varphi_{1,3}^{(20)} = 0.29$, $\varphi_{2,3}^{(20)} = -0.37$. Они не совпадают со значениями, используемыми при генерации.

Ключевое отличие данного примера от предыдущего заключается в том, что здесь каждой точке на фазовой плоскости соответствует множество точек в пространстве $u(0) \times v(0) \times \alpha$. В связи с этим решение задачи параметрической идентификации является не единственным. На рис. 4 показана фазовая плоскость на последней итерации алгоритма: все модельные множества Y^k (светло-серый цвет) полностью содержат в себе квазиэкспериментальные интервальные оценки \hat{Y}^k (темно-серый цвет). Множества Y^k являются проекцией трёхмерного деформирующегося прямоугольного параллелепипеда. Каждая точка на такой проекции будет соответствовать кривой в пространстве $u(0) \times v(0) \times \alpha$.

На последней итерации алгоритма была построена также область неопределённости в форме эллипсоида: $u_0^{(20)} = 4.55$, $v_0^{(20)} = 2.98$, $\alpha_0^{(20)} = 3.94$, $s_u^{(20)} = 0.25$, $s_v^{(20)} = 0.15$, $s_\alpha^{(20)} = 0.1$, $\varphi_{1,2}^{(20)} = 0.30$, $\varphi_{1,3}^{(20)} = 0.29$, $\varphi_{2,3}^{(20)} = -0.37$. В этом случае все множества Y^k будут являться выпуклыми, в отличие от множеств на рис. 4.

Представленный в работе алгоритм успешно справился с данными задачами: во всех случаях найдены такие параметры области неопределённости, при которых соответствующее решение системы ОДУ полностью содержит интервальные оценки фазовых переменных.

Заключение. В работе рассмотрена задача параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров в случае, когда результаты экспериментов заданы в виде интервалов. Решение данной задачи сводится к минимизации целевой функции, которая характеризует суммарное отклонение между параметрическими множествами состояний системы и экспериментальными данными. Сформулировано и доказано утверждение о том, что если модельные множества являются выпуклыми, то вместо экспериментальных интервальных оценок можно рассматривать только крайние точки этих оценок. Для эффективной минимизации целевой функции разработан алгоритм подвижного окна, относящийся к градиентным методам. В его основе лежит алгоритм адаптивной интерполяции, который позволяет в рамках определённого окна в пространстве неизвестных параметров для каждого момента времени построить полином, интерполирующий зависимость состояния динамической системы от параметров. Выполнена апробация предложенного алгоритма на нескольких задачах, содержащих разное количество неизвестных величин. Для всех задач успешно получены области значений неизвестных параметров, при которых параметрические множества состояний системы полностью содержат интервальные экспериментальные данные, что демонстрирует эффективность разработанного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. М., 1972.
2. Martyshov M.N., Emelyanov A.V., Demin V.A. et al. Multifilamentary character of anticorrelated capacitive and resistive switching in memristive structures based on (Co-Fe-B)x(LiNbO3)100-x nanocomposite // Phys. Rev. Appl. 2020. V. 14. № 3. P. 034016.
3. Moore R. Interval Analysis. Englewood Cliffs, 1966.
4. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis. Philadelphia, 2009.
5. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск, 2019.
6. Добравец Б.С. Интервальная математика. Красноярск, 2007.
7. Xiao N., Fedele F., Muhanna R.L. Inverse problems under uncertainties-an interval solution for the beam finite element // 11th Intern. Conf. on Structural Safety & Reliability. New York, 2013. P 1–8.
8. Петрикевич Я.И. Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. ... канд. техн. наук. М., 2006.
9. Диллигенская А.Н., Самокиш А.В. Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределённости на основе нейронных сетей // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. 2020. Т. 28. № 4 (68). С. 6–18.

10. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 962–976.
11. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 963–974.
12. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гудаснов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Мат. моделирование. 2018. Т. 30. № 12. С. 129–144.
13. Морозов А.Ю. Интерполяционный подход в задачах моделирования динамических систем с эллипсоидными оценками параметров // Тр. МАИ. 2022. № 124. С. 1–24.
14. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
15. Bungartz H.-J., Griebel M. Sparse grids // Acta Numerica. 2004. V. 13. № 1. P. 147–269.
16. Gerstner T., Griebel M. Sparse grids // Encyclopedia of Quantitative Finance / Ed. R. Cont. New York, 2010.
17. Morozov A.Yu., Zhuravlev A.A., Reviznikov D.L. Sparse grid adaptive interpolation in problems of modeling dynamic systems with interval parameters // Mathematics. 2021. V. 9. P. 298.
18. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределённостями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 976–987.
19. Морозов А.Ю. Параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Программная инженерия. 2021. Т. 12. № 8. С. 395–403.
20. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М., 1972.
21. Евтушенко Ю.Г. Некоторые локальные свойства минимаксных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 3. С. 669–679.
22. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985.
23. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М., 2005.
24. Sylvester J. J. A question in the geometry of situation // Quarterly J. of Math. 1857. V. 1. P. 79.
25. Васильев Н.С. О численном решении экстремальных задач построения эллипсоидов и параллелепипедов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 3. С. 340–348.
26. Шор Н.З., Стеценко С.И. Алгоритм последовательного сжатия пространства для построения описанного эллипсоида минимального объёма // Исследование методов решения экстремальных задач. Киев, 1990. С. 25–29.
27. Khachiyan L.G. Rounding of polytopes in the real number model of computation // Math. of Operations Research. 1996. V. 21. № 2. P. 307–320.

Федеральный исследовательский центр
 “Информатика и управление” РАН, г. Москва,
 Московский авиационный институт
 (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
 После доработки 20.02.2023 г.
 Принята к публикации 18.04.2023 г.

УДК 519.653+519.644

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. А. В. Сетуха

Представлены интегральные формулы для аппроксимации поверхностных градиента (от скалярной функции, заданной на поверхности) и дивергенции (от касательного векторного поля, заданного на поверхности), являющиеся аналогами известных формул для производных функции на плоскости. Получены оценки погрешности аппроксимации этих величин. Также рассмотрен вопрос о последующей аппроксимации интегралов, дающих выражение для поверхностных градиента и дивергенции, квадратурными суммами по значениям исследуемой функции в узлах, выбираемых на ячейках неструктурированной сетки, аппроксимирующей поверхность.

DOI: 10.31857/S0374064123060122, EDN: FIJMZL

Введение. В математической физике представляет интерес задача дифференцирования функций, заданных на поверхности. Так для скалярной функции, заданной на поверхности, важной характеристикой является вектор поверхностного градиента, который характеризует скорость изменения функции вдоль поверхности и является величиной, инвариантной по отношению к способу параметризации поверхности. В частности, поверхностный градиент возникает в теории потенциала: здесь известно интегральное представление для градиента потенциала двойного слоя, причём скачок градиента такого потенциала на поверхности в точности равен поверхностному градиенту от плотности этого потенциала [1, с. 68]. Выражение полей скоростей через градиент потенциала двойного слоя используется в панельных и вихревых методах аэродинамики [2, с. 175].

В интегральных уравнениях электродинамики существует выражение для электрического и магнитного полей через поверхностные токи, которые представляют собой касательные векторные поля на поверхностях облучаемых тел. При этом имеются варианты записи интегральных представлений для электромагнитного поля, в которые входит поверхностная дивергенция от этих токов [3, с. 29 и уравнение (3.42а), с. 107].

Отметим работы [4, 5], в которых рассматривалось применение метода снесения граничного условия на серединную поверхность к краевым задачам аэродинамики и электродинамики. В [4] изучалось потенциальное обтекание крыла малой толщины, которое аппроксимировалось серединной поверхностью. При этом исходная форма крыла учитывалась постановкой специальных граничных условий. Задача сводилась к решению граничных интегральных уравнений на серединной поверхности, куда входил оператор поверхностного градиента. Аналогичный подход был применён в статье [5] к решению задачи рассеяния электромагнитной волны на теле малой толщины. В результате задача сводилась к системе граничных интегральных уравнений, записанных на серединной поверхности тела, в которую входил оператор поверхностной дивергенции от неизвестных поверхностных токов.

Таким образом, необходимость аппроксимации поверхностных производных возникает при численном решении прикладных задач как на этапе обработки результатов, когда нужно по найденным на поверхности неизвестным функциям найти какие-либо характеристики, так и на этапе решения граничных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих поверхностные производные. Здесь могут быть использованы формулы разностного типа. Такие формулы для поверхностного градиента записаны, например, в работе [6] (формулы (3.3)–(3.5) из [6] по сути есть формулы для скачка градиента потенциала двойного слоя, который равен поверхностному градиенту его плотности). В [5] были получены аналогичные формулы для поверхностной

дивергенции. Однако в основе этих формул лежит гипотеза о том, что поверхностная сетка является регулярной, полученной при гладком отображении прямоугольника, разбитого на прямоугольные ячейки.

На неструктурированных сетках, в частности на широко используемых в современных методах моделирования треугольных сетках, для вычисления поверхностных производных необходимо применять другие подходы. В настоящей работе предлагается использовать для этих целей интегральные формулы, развитые в методе частиц для вычисления частных производных функций, определённых на плоскости [7], где частные производные функции представляются в виде интегрального оператора с ядром типа свёртки, причём это ядро мало вне круга малого радиуса, окружающего точку, в которой вычисляется производная. Поэтому применяемая идея проста. Если предположить, что наша поверхность есть плоскость, помещённая в пространство, то можно приближённо представить поверхностный градиент на этой плоскости (являющийся обычным двумерным градиентом) в виде интеграла по малой окрестности рассматриваемой точки. Если же работать на произвольной гладкой поверхности, то можно записать аналогичный интеграл по окрестности точки на поверхности, понимая, что он близок к интегралу по касательной плоскости. Собственно эта идея и реализована в настоящей работе путём получения строгих оценок для интегралов на поверхности и касательной плоскости.

1. Основные исходные формулы. Введём следующие обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

(считаем, что $D^\alpha f(x) = f(x)$ при $\alpha = (0, 0)$); $\bar{C}^k(\mathbb{R}^2)$ – пространство функций класса $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$, для которых ограничена норма

$$\|f\|_k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2 \\ 0 \leq |\alpha| \leq k}} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D^\alpha f(x)|$$

(пространство функций с непрерывными ограниченными производными до порядка k).

Пусть $f(x) \in \bar{C}^k(\mathbb{R}^2)$, $x = (x_1, x_2)$, $k \geq 1$. Тогда частные производные $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, 2$, этой функции можно аппроксимировать формулой [7]

$$D_i^\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{y \in \mathbb{R}^2} (f(y) - f(x)) \eta_i \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) dy, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где $\eta_i(x)$ – некоторая функция специального вида.

Относительно функций $\eta_i(x)$, $i = 1, 2$, делаются следующие предположения:

$$\eta_i \in L_1(\mathbb{R}^2), \quad \eta_i(-x) = -\eta_i(x), \quad x \in (\mathbb{R}^2). \tag{2}$$

Далее предположим, что для некоторого целого $p \geq 1$ выполнены условия:

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^\alpha \eta_i(x) dx = \begin{cases} 0, & |\alpha| \leq p, \quad \alpha \neq e_i, \\ -1, & \alpha \neq e_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1), \tag{3}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{p+1} \eta_i(x) dx \right| \leq M, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Тогда найдётся константа A , зависящая от константы M из оценок (4), такая, что

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - D_i^\varepsilon f(x) \right| \leq A \varepsilon^p \|f\|_{p+1}. \tag{5}$$

Для доказательства оценки (5) достаточно записать разложение в ряд Тейлора для функции f в окрестности точки x в виде

$$f(y) - f(x) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq p} \frac{1}{|\alpha|!} D^\alpha f(x) (y - x)^\alpha + r_p(x, y),$$

где остаточный член представляется как [8, с. 453]

$$r_p(x, y) = \sum_{|\alpha|=p+1} (y - x)^\alpha r_{p,\alpha}(x, y), \quad r_{p,\alpha}(x, y) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1 - t)^p D^\alpha f(x + t(y - x)) dt.$$

Тогда

$$D_i^\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{y \in \mathbb{R}^2} (f(y) - f(x)) \eta_i \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) dy = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon^3} D^{e_i} f(x) \int_{y \in \mathbb{R}^2} (y - x)^{e_i} \eta_i \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) dy, \quad I_2 = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{|\alpha|=p+1} \int_{y \in \mathbb{R}^2} (y - x)^\alpha r_{p,\alpha}(x, y) \eta_i \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) dy.$$

Сделав замену $z = (y - x)/\varepsilon$, с учётом формул (2) имеем

$$I_1 = -D^{e_i} f(x) \int_{z \in \mathbb{R}^2} z_i \eta_i(z) dz = D^{e_i} f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{|\alpha|=p+1} \int_{y \in \mathbb{R}^2} \varepsilon^{p+1} z^\alpha r_{p,\alpha}(x, y + \varepsilon z) \eta_i(z) \varepsilon^2 dz \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{p!} \sum_{|\alpha|=p+1} \left| \int_{y \in \mathbb{R}^2} z^\alpha \eta_i(z) dz \right| \leq \frac{2^{p+1} M}{p!} \varepsilon^p \|f\|_{p+1}. \end{aligned}$$

В качестве функций $\eta_i(x)$ можно выбрать, например, следующие [7]:

$$\eta_i(x) = \frac{x_i}{\pi} e^{-|x|^2} \cdot \begin{cases} -2, & p = 2, \\ (-6 + 2|x|^2), & p = 4, \\ (-12 + 8|x|^2 - |x|^4), & p = 6, \\ (-20 + 20|x|^2 - 5|x|^4 + 0.5|x|^6), & p = 8, \end{cases} \tag{6}$$

где p – порядок формулы (т.е. условия (3) и (4), а следовательно и оценка (5), выполнены с указанным значением параметра p).

2. Аппроксимация поверхностных производных. Пусть Σ – некоторая гладкая, измеримая, ориентированная поверхность класса C^q , $q \geq 2$, замкнутая или нет, с краем $\partial\Sigma$.

Пусть $y \in \Sigma$, $\vec{n}(y)$ – орт положительного вектора нормали к поверхности Σ в точке y . Каждой точке $z \in \Sigma$ и действительному числу δ можно поставить в соответствие точку

$$y = y_\delta(z) = z + \delta \vec{n}(z).$$

Обозначим

$$\Omega(r, \Sigma) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = y_\delta(z), \quad z \in \Sigma, \quad \delta \in [-r/2, r/2]\}. \tag{7}$$

Предположение 1. Существует число $r_0 > 0$ такое, что отображение между точками y множества $\Omega(r, \Sigma)$ и парами $(z, \delta) \in \Sigma \times [-r/2, r/2]$ при $r = r_0$ является взаимно-однозначным.

С геометрической точки зрения сделанное предположение означает, что любая точка y множества $\Omega(r, \Sigma)$ представляется в виде (7), где z есть ближайшая к точке y точка на поверхности Σ ; прямая, проведённая через точки z и y , не имеет других пересечений с поверхностью Σ в окрестности точки z радиуса $r/2$.

Пусть $x \in \Sigma$, $\pi(x)$ – касательная плоскость к поверхности Σ в точке x . Обозначим через $\mathbf{C}(x, R)$, $x \in \Sigma$, $R > 0$, цилиндр, состоящий из точек $y \in \mathbb{R}^3$ таких, что $|y^* - x| \leq R$ и $|y^* - y| \leq R$, где y^* – ортогональная проекция точки y на плоскость $\pi(x)$. ($\mathbf{C}(x, R)$ – цилиндр, в сечении которого круг радиуса R , параллельный касательной плоскости $\pi(x)$, высотой $2R$ и центром в точке x .) Обозначим $\Sigma(x, R) = \Sigma \cap \mathbf{C}(x, R)$.

В каждой точке $x \in \Sigma$ можно ввести декартову систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке $x = O$ и осью $O\xi_3$, сонаправленной с вектором $\vec{n}(x)$ (две другие оси лежат в касательной плоскости $\pi(x)$ произвольным образом и являются ортогональными). Такую систему координат назовём *специальной системой координат*.

Обозначим через $V(x, R)$ множество точек $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ таких, что точка y^* , имеющая в специальной системе координаты $(\xi_1, \xi_2, 0)$, является ортогональной проекцией некоторой точки $y \in \Sigma(x, R)$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – некоторая точка, а $G \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое множество. Через $\rho(x, G)$ будем обозначать расстояние от точки x до множества G .

Предположение 2. Существует такое $R_0 > 0$, что для любой точки $x \in \Sigma$ участок $\Sigma(x, R)$ поверхности Σ , где $0 < R \leq R_0$, может быть представлен в введённой специальной системе координат уравнением $\xi_3 = \psi(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, ψ – q раз непрерывно дифференцируемая функция на множестве $V(x, R)$, причём $V(x, R) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \leq R\}$ при $R \leq \rho(x, \partial\Sigma)$ и $V(x, R)$ есть измеримое подмножество круга $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \leq R\}$ в ином случае. При этом функция ψ и все её частные производные вплоть до порядка q включительно на всём множестве $V(x, R)$ ограничены по модулю некоторой константой, не зависящей от выбранной точки x .

Заметим при этом, что для любой точки $z \in \Sigma$ с координатами в специальной системе координат $(\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2))$ справедливы условия

$$|\partial\psi/\partial\xi_i| \leq C|\xi|, \quad |\psi| \leq C|\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in V(x, R_0), \tag{8}$$

выполненные с некоторой константой C , зависящей только от выбора поверхности Σ .

Пусть f – функция класса $C^{p+1}(\Sigma)$, заданная на поверхности Σ , $p \in \mathbb{Z}_+$, $p + 1 \leq q$ (q – класс гладкости поверхности, $q \geq 2$). Для каждой точки $x \in \Sigma$ можно построить цилиндр $\mathbf{C}(x, R_0)$ и выделить участок $\Sigma(x, R) = \Sigma \cap \mathbf{C}(x, R)$. На этом участке можно ввести функцию

$$f'(\xi) = f(y(\xi)), \quad y(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2)) \in \Sigma, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in V(x, R_0). \tag{9}$$

Условие “ f – функция класса $C^m(\Sigma)$ ” можно трактовать как условие того, что $f'(\xi) \in C^m(V(x, R_0))$ для любой точки $x \in \Sigma$. Для функции $f \in C^m(\Sigma)$, $m \leq q$, введём норму следующим образом. Для каждой точки $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ введём всевозможные специальные системы координат. Каждая такая система, в действительности полностью определяемая ортом $\vec{e}_1 = \vec{e}_1(x)$, ортогональным вектору $\vec{n}(x)$, порождает функцию $f'(\xi)$ по формуле (9). Положим

$$\|f\|_m = \sup_{x, \vec{e}_1} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha f'(0)|.$$

Далее рассмотрим оператор “поверхностный градиент” функции, заданной на поверхности. Этот оператор можно ввести следующим образом. Построим функцию f^* , являющуюся продолжением функции f на множество $\Omega(r, \Sigma)$ вида (7), по формуле

$$f^*(y) = f(x) \quad \text{при} \quad y = x + \delta\vec{n}(x), \quad x \in \Sigma.$$

Тогда определим поверхностный градиент как

$$\text{Grad } f(x) = \text{grad } f^*(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma, \tag{10}$$

$\text{grad } f^*$ – обычный градиент функции трёх переменных.

Учитывая, что $\partial f^*/\partial n = 0$ на поверхности Σ , легко увидеть, что вектор $\text{Grad } f(x)$ определён тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема в точке x , т.е. представляется в окрестности этой точки в виде

$$f(y) = f(x) + (\vec{A}, y - x) + o(|y - x|),$$

$y \in \Sigma \cap U(x)$, $U(x)$ – некоторая трёхмерная окрестность точки x , $o(r)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем r при $r \rightarrow 0$, \vec{A} – некоторый вектор. При этом вектор \vec{A} определён с точностью до слагаемого вида $\lambda \vec{n}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и существует единственный вектор \vec{A} , удовлетворяющий условию $(\vec{A}, \vec{n}(x)) = 0$, который совпадает с вектором $\text{Grad } f(x)$, определяемым формулой (10).

Теперь пусть $\vec{f}(x)$ – касательное векторное поле на поверхности, т.е. для каждой точки $x \in \Sigma$ значение $\vec{f}(x)$ есть трёхмерный вектор, удовлетворяющий условию $(\vec{f}(x), \vec{n}(x)) = 0$. Введём опять продолжение поля $\vec{f}(x)$ по формуле

$$\vec{f}^*(y) = \vec{f}(x) \quad \text{при} \quad y = x + \delta \vec{n}(x), \quad y \in \Omega(r, \Sigma),$$

и определим поверхностную дивергенцию векторного поля $\vec{f}(x)$:

$$\text{Div } \vec{f}(x) = \text{div } \vec{f}^*(x), \quad x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma, \tag{11}$$

где div – обычная трёхмерная дивергенция.

Как показано в [9], определение по формуле (11) равносильно другому классическому определению

$$\text{Div } \vec{f}(x) = \lim_{d(\sigma) \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(\sigma)} \int_{\partial \sigma} \vec{f}(y) \vec{\nu}(y) ds_y,$$

где σ – измеримая часть поверхности Σ с гладким краем $\partial \sigma$ такая, что $x \in \sigma$, $x \notin \partial \sigma$, $\mu(\sigma)$ – площадь поверхности σ , $d(\sigma)$ – диаметр поверхности σ , $\vec{\nu}(y)$ – вектор нормали к контуру $\partial \sigma$, лежащий в касательной плоскости к поверхности и направленный наружу от участка поверхности σ .

Введём в точке $x \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Тогда в окрестности точки $x \in \Sigma$ заданная на поверхности функция f (касательное векторное поле \vec{f}) порождает функцию $f'(\xi) = f(y(\xi))$ (векторное поле $\vec{f}'(\xi) = \vec{f}(y(\xi))$), где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $y(\xi)$ – точка на поверхности Σ с координатами в специальной системе $(\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2))$. При этом из равенств (10) и (11) следуют формулы

$$\text{Grad } f(x) = \left(\frac{\partial f'}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f'}{\partial \xi_2}, 0 \right), \quad \text{Div } \vec{f}(x) = \frac{\partial f'_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f'_2}{\partial \xi_2},$$

здесь f'_1, f'_2, f'_3 – координаты вектора \vec{f}' в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, производные берутся в точке $\xi = (0, 0)$.

Пусть $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, – орты осей специальной системы координат, $\vec{e}_3 = \vec{n}(x)$. Тогда

$$\text{Grad } f(x) = L_1 f(x) \vec{e}_1 + L_2 f(x) \vec{e}_2, \quad \text{Div } \vec{f}(x) = L_1 f_1(x) \vec{e}_1 + L_2 f_1(x) \vec{e}_2, \quad f_i = (\vec{f}, \vec{e}_i),$$

где

$$L_i f(x) = (\text{Grad } f(x), \vec{e}_i) = \frac{\partial f'}{\partial \xi_i}(0), \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

О векторном поле $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, где $f_i \in C^m(\Sigma)$, $i = 1, 2, 3$, будем говорить, что $\vec{f} \in C^m(\Sigma)$. Определим его норму

$$\|\vec{f}\|_m = \sum_{i=1}^3 \|f_i\|_m.$$

Перейдём к интегральной аппроксимации поверхностных операторов: градиент и дивергенция. Обратим внимание, что в формуле (6) функции η_i имеют вид

$$\eta_i(x) = x_i \eta(|x|), \quad i = 1, 2.$$

При этом условия (2)–(4) записываются в виде условий на функцию $\eta(r)$, $r \in [0, \infty)$:

$$r\eta \in L_1(R), \tag{13}$$

$$\int_0^\infty r^{m+2} \eta(r) dr = \begin{cases} -1/\pi, & m = 1, \\ 0, & 3 \leq m \leq p, \end{cases} \tag{14}$$

$$\int_0^\infty r^{p+1} |\eta(r)| dr \leq \infty. \tag{15}$$

Тогда в плоском случае для функции $f(x)$ и векторного поля $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, из (1) следуют формулы, аппроксимирующие градиент и дивергенцию:

$$\text{grad}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{y \in \Sigma} (f(y) - f(x)) \frac{x-y}{\varepsilon} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy, \tag{16}$$

$$\text{div}_\varepsilon \vec{f}(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{y \in \Sigma} (\vec{f}(y) - \vec{f}(x)) \frac{x-y}{\varepsilon} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy. \tag{17}$$

Теперь вернёмся к случаю, когда функция $f(x)$ и векторное поле $\vec{f}(x) = (f_1, f_2, f_3)$ заданы на поверхности, причём поле является касательным. По аналогии с формулами (16) и (17) запишем операторы, аппроксимирующие поверхностные градиент и дивергенцию, в виде

$$\text{Grad}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \Pi_{\pi(x)} \left[\int_{y \in \Sigma} (f(y) - f(x)) \frac{x-y}{\varepsilon} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy \right], \tag{18}$$

$$\text{Div}_\varepsilon \vec{f}(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{y \in \Sigma} (\Pi_{\pi(x)}[\vec{f}(y)] - \vec{f}(x)) \frac{x-y}{\varepsilon} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy, \tag{19}$$

здесь $\Pi_{\pi(x)} \vec{a}$ – ортогональная проекция вектора \vec{a} на плоскость $\pi(x)$, касательную к поверхности Σ в точке x , величина $x - y$ трактуется как вектор.

Далее получим оценку для погрешности аппроксимации величин $\text{Grad} f(x)$ и $\text{Div} \vec{f}(x)$ с применением формул (18), (19).

3. Погрешность интегральных формул. Предположим дополнительно, что функция $\eta(r)$ удовлетворяет оценкам

$$|\eta(r)| \leq \frac{C_m}{1+r^m}, \quad \left| \frac{d\eta(r)}{dr} \right| \leq \frac{C_m}{1+r^{m+1}} \tag{20}$$

для некоторого $m \geq 7$ с некоторой константой C_m . Заметим, что для функций вида (6) это условие выполнено при любом натуральном m .

Пусть $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Равенства (18) и (19) в специальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ принимают вид

$$\text{Grad}_\varepsilon f(x) = (L_1^\varepsilon f(x), L_2^\varepsilon f(x), 0), \quad \text{Div}_\varepsilon \vec{f}(x) = L_1^\varepsilon f_1(x) + L_2^\varepsilon f(x), \tag{21}$$

$$L_i^\varepsilon f(x) = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int_{y \in \Sigma} (f(y) - f(x)) \frac{y_i}{\varepsilon} \eta(|y|/\varepsilon) d\sigma_y, \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

(y_1, y_2, y_3) – координаты точки y в специальной системе координат, при этом $x = (0, 0, 0)$ в этой же системе.

Лемма. Пусть Σ – гладкая поверхность класса C^q , $q \geq 2$; $f \in C^{p+1}(\Sigma)$, $p+1 \leq q$; $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (13)–(15) и условию (20) с $m \geq 7$; $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$; и пусть $L_i f(x)$ – операторы, определяемые формулой (12). Тогда найдётся константа C , зависящая только от поверхности Σ , функции η и параметра p , такая, что справедливо неравенство

$$|L_i^\varepsilon f(x) - L_i f(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_1 \varepsilon^2 \right], \tag{23}$$

где $R = \min\{R_0/2, \rho(x, \partial\Sigma)\}/2$, R_0 – константа из предположения 2, m – параметр из оценки (20).

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие только от поверхности Σ , функции η и параметра p , причём в различных оценках значение константы C , вообще говоря, различно.

Построим цилиндры $\mathbf{C}(x, R)$ и $\mathbf{C}(x, R_0)$, и пусть $\Sigma_1 = \Sigma(x, R) \equiv \Sigma \cap \mathbf{C}(x, R)$, $\Sigma_2 = (\Sigma \cap \mathbf{C}(x, R_0)) \setminus \Sigma_1$, $\Sigma_3 = \Sigma \setminus (\Sigma_2 \cup \Sigma_1)$.

Рассмотрим одну из величин $L_i^\varepsilon f(x)$, $i = 1, 2$. Представим её в виде

$$L_1^\varepsilon f(x) = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_n = \int_{y \in \Sigma_n} F(x, y, \varepsilon) d\sigma_y, \quad n = 1, 2, 3, \quad F(x, y, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^3} (f(y) - f(x)) \frac{y_i}{\varepsilon} \eta(|y|/\varepsilon).$$

Оценим интегралы I_2 и I_3 . Заметим, что участок поверхности $\Sigma_2 \subset (\mathbf{C}(x, R_0) \cap \Sigma)$ за­даётся уравнением $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$. Координаты точки $y \in \Sigma_2$ имеют вид $y = (\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2))$, причём $R \leq |\xi| \leq R_0$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Учитывая неравенство $|f(y) - f(x)| \leq \|f\|_1 |y|$ и оценки (8) и (20), имеем

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{y \in \Sigma_2} \frac{1}{\varepsilon^3} (f(y) - f(x)) \frac{y_i}{\varepsilon} \eta(|y|/\varepsilon) d\sigma_y \right| \leq C \frac{\|f\|_1}{\varepsilon^4} \int_{y \in \Sigma_2} \frac{|y|^2}{1 + (|y|/\varepsilon)^m} d\sigma_y \leq \\ &\leq C \frac{\|f\|_1}{\varepsilon^4} \int_R^{R_0} \frac{r^3}{1 + (r/\varepsilon)^m} dr \leq C \|f\|_1 \int_{R/\varepsilon}^\infty \frac{\rho^3}{1 + \rho^m} d\rho. \end{aligned}$$

Тогда

$$|I_2| \leq C \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-4}}. \tag{24}$$

Для интеграла I_3 ввиду оценки (20) и того, что при $y \in \Sigma_3$ выполнено неравенство $|y| \geq R_0$, где константа R_0 определяется только свойствами поверхности и не зависит от выбора точки x , получим неравенства

$$|I_3| \leq \frac{C \|f\|_0}{\varepsilon^3} \int_{y \in \Sigma_3} \frac{\varepsilon^m}{\varepsilon^m + R_0^m} d\sigma_y \leq C \|f\|_0 \varepsilon^{m-3}. \tag{25}$$

Перейдём к анализу интеграла I_1 . Построим ещё один цилиндр $\mathbf{C}(x, 2R)$ и выделим на поверхности Σ участок $\Sigma(x, 2R) \equiv \Sigma \cap \mathbf{C}(x, 2R)$. По предположению 2 участок $\Sigma(x, 2R)$ за­даётся уравнением $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$. Введём функцию $f'(\xi)$ по формуле (9), $|\xi| \leq 2R$.

Далее построим функцию $\theta_R(r)$ такую, что $\theta_R \in C^\infty[0, \infty)$, $\theta_R(r) = 0$ при $r > 2R$, $\theta_R(r) = 1$ при $r < R$. Эту функцию можно построить в виде $\theta_R(r) = \theta(r/R)$, $\theta \in C^\infty[0, \infty)$, $\theta(r) = 0$ при $r > 2$, $\theta(r) = 1$ при $r < 1$. Тогда

$$\|\theta_R(r)\|_k \leq \frac{C(k)}{R^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \|\theta_R(r)\|_k = \sum_{i=0}^k \max_{r \in [0, \infty)} \left| \frac{d^i \theta_R(r)}{dr^i} \right|.$$

Далее рассмотрим функцию $f''(\xi) = f'(\xi)\theta_R|\xi|$, для которой

$$\|f''\|_k \leq \frac{C}{R^k} \|f\|_k, \quad 0 \leq k \leq p + 1. \tag{26}$$

Заметим, что

$$L_i f(x) = \frac{\partial f''(\xi)}{\partial \xi_i}$$

при $\xi = 0$, $i = 1, 2$, и в силу оценки (5) имеем

$$|L_i f(x) - D_i^\varepsilon f''(0)| \leq C \frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}}, \tag{27}$$

D_i^ε – интегральный оператор (1) на плоскости $O\xi_1\xi_2$, который запишем в виде

$$D_i^\varepsilon f''(0) = J \equiv -\frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\xi \in \mathbb{R}^2} (f''(\xi) - f''(0)) \xi_i \eta(|\xi|/\varepsilon) d\xi.$$

Представим интеграл J как $J = J_1 + J_2$, где в J_1 указанный для J интеграл берётся по множеству $|\xi| \leq R$, а в J_2 – по множеству $|\xi| > R$. При этом

$$|J_2| \leq \frac{C \|f''\|_1}{\varepsilon^4} \int_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^2 \\ |\xi| \geq R}} |\xi|^2 |\eta(|\xi|/\varepsilon)| d\xi \leq \frac{C \|f''\|_1}{\varepsilon^4} \int_R^\infty \frac{r^3}{1 + (r/\varepsilon)^m} dr = C \|f''\|_1 \int_{R/\varepsilon}^\infty \frac{\rho^3}{1 + \rho^m} d\rho,$$

откуда, с учётом оценки (26), получим

$$|J_2| \leq C \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}. \tag{28}$$

Наконец, сравним интегралы I_1 и J_1 . Переходя к интегрированию по параметру $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, интеграл I_1 представим в виде

$$I_1 = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\xi: |\xi| \leq R} (f'(\xi) - f'(0)) \frac{\xi_i}{\varepsilon} \eta(|y(\xi)|/\varepsilon) J(\xi) d\xi,$$

$$J(\xi) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}\right)^2}, \quad |y| = \sqrt{|\xi|^2 + |\psi(\xi)|^2}.$$

Из оценок (8) легко показать, что $|J(\xi) - 1| \leq C|\xi|^2$, $\|y\| - |\xi| \leq C|\xi|^3$. Следовательно,

$$I_1 - J_1 = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\xi: |\xi| \leq R} (f'(\xi) - f'(0)) \frac{\xi_i}{\varepsilon} [\eta(|y(\xi)|/\varepsilon) J(\xi) - \eta(|\xi|/\varepsilon)] d\xi.$$

В силу оценок (20)

$$|\eta(|y(\xi)|/\varepsilon) - \eta(|\xi|/\varepsilon)| \leq C \frac{|\xi|^3}{\varepsilon} \frac{1}{1 + (|\xi|/\varepsilon)^{m+1}},$$

тогда

$$\begin{aligned} |I_1 - J_1| &\leq \frac{C\|f\|_1}{\varepsilon^4} \int_{\xi:|\xi|\leq R} |\xi|^2 \left[\frac{|\xi|}{\varepsilon} \frac{|\xi|^2}{1 + (|\xi|/\varepsilon)^{m+1}} + \frac{|\xi|^2}{1 + (|\xi|/\varepsilon)^m} \right] d\xi = \\ &= \frac{C\|f\|_1}{\varepsilon^4} \int_0^R r^3 \left[\frac{r}{\varepsilon} \frac{r^2}{1 + (r/\varepsilon)^{m+1}} + \frac{r^2}{1 + (r/\varepsilon)^m} \right] dr \leq C\|f\|_1 \int_0^\infty \rho^3 \left[\rho \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{1 + \rho^{m+1}} + \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{1 + \rho^m} \right] d\rho, \\ |I_1 - J_1| &\leq C\|f\|_1 \varepsilon^2 \quad \text{при } m \geq 7. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (24)–(29) получаем оценку (23). Лемма доказана.

Из леммы и формул (21), (22) следует

Теорема 1. Пусть поверхность Σ и функция $\eta(r)$ удовлетворяют условиям леммы.

Тогда:

1) если $f \in C^{p+1}(\Sigma)$, то

$$|\text{Grad}_\varepsilon f(x) - \text{Grad} f(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_1 \varepsilon^2 \right], \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma;$$

2) если $\vec{f} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ – касательное векторное поле с компонентами $f_i \in C^{p+1}(\Sigma)$, $i = 1, 2, 3$, то

$$|\text{Div}_\varepsilon \vec{f}(x) - \text{Div} \vec{f}(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|\vec{f}\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|\vec{f}\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|\vec{f}\|_1 \varepsilon^2 \right], \quad x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma.$$

Здесь, как и в лемме, $R = \min\{R_0, \rho(x, \partial\Sigma)\}/2$, R_0 – константа из предположения 2, m – параметр из оценок (20), C – константа, зависящая только от поверхности Σ , функции η и параметра p .

4. Дискретная аппроксимация интегральных операторов для поверхностных производных.

4.1. Аппроксимация по поверхностным ячейкам. Предположим, что система ячеек σ_j , $j = \overline{1, N}$, образует разбиение поверхности Σ . Это означает, что $\Sigma = \bigcup_{j=1}^N \sigma_j$, каждая ячейка σ_j есть измеримая часть поверхности Σ с площадью $\mu(\sigma_j) > 0$ и при этом $\mu(\sigma_j \cap \sigma_k) = 0$ при $k \neq j$.

Возьмём в каждой ячейке узел $y^j \in \sigma_j$, $j = \overline{1, N}$, и пусть h – диаметр разбиения ($h = \max_{j=\overline{1, N}} \sup_{x, y \in \sigma_j} |x - y|$).

Численно аппроксимируем поверхностные градиент и дивергенцию формулами

$$\text{Grad}_\varepsilon^h f(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \Pi_{\pi(x)} \left[\sum_{j=1}^N (f(y^j) - f(x)) \frac{x - y^j}{\varepsilon} \eta \left(\frac{|x - y^j|}{\varepsilon} \right) \mu(\sigma_j) \right], \tag{30}$$

$$\text{Div}_\varepsilon \vec{f}(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{j=1}^N (\Pi_{\pi(x)} \vec{f}(y^j) - \vec{f}(x)) \frac{|x - y^j|}{\varepsilon} \eta \left(\frac{|x - y^j|}{\varepsilon} \right) \mu(\sigma_j). \tag{31}$$

Заметим, что мы не требуем, чтобы точка x , в которой осуществляется аппроксимация, была одним из узлов.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Считаем, что существует константа $B > 0$ такая, что $h < R_0/3$ и $h \leq B\varepsilon$. Тогда найдётся константа C , зависящая только от поверхности Σ , функции η и параметров p и B , такая, что

$$|\text{Grad}_\varepsilon^h f(x) - \text{Grad}_\varepsilon f(x)| \leq C \left[\|f\|_0 \varepsilon^m + \|f\|_1 \frac{h}{\varepsilon} \right], \tag{32}$$

$$|\text{Div}_\varepsilon^h \vec{f}(x) - \text{Div}_\varepsilon \vec{f}(x)| \leq C \left[\|\vec{f}\|_0 \varepsilon^m + \|\vec{f}\|_1 \frac{h}{\varepsilon} \right], \tag{33}$$

где в формуле (32) $f \in C^1(\Sigma)$ – функция на поверхности, в формуле (33) $\vec{f} \in C^1(\Sigma)$ – касательное векторное поле на поверхности, m – параметр из оценок (20).

Доказательство. Построим специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке $x = O$ и осью $O\xi_3$, сонаправленной с вектором $\vec{n}(x)$. Интегралы $L_i^\varepsilon f(x)$, $x \in \Sigma^{in}$, определяемые формулой (22), аппроксимируем интегральной суммой

$$L_i^{\varepsilon,h} f(x) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varepsilon^3} (f(y^j) - f(x)) \eta_i \left(\frac{x - y^j}{\varepsilon} \right) \mu(\sigma_j). \tag{34}$$

Выделим цилиндр $C(x, R_0)$, R_0 – константа из предположения 2. Для каждой точки $y^j \in C(x, R_0)$ построим её проекцию \tilde{y}^j на плоскость $O\xi_1\xi_2$.

Разобьём поверхность Σ на три части $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ следующим образом: Σ_0 – объединение тех ячеек σ_j , для которых $|\tilde{y}^j - x| \leq 2h$; Σ_1 – объединение тех ячеек σ_j , для которых $2h < |\tilde{y}^j - x| \leq R_0 - h$; Σ_2 – оставшаяся часть поверхности Σ . Это разделение поверхности произведено так, что выполнены условия:

$$y \in C(x, 3h) \text{ при } y \in \Sigma_0;$$

$$y \in C(x, R_0) \text{ и } y \notin C(x, h) \text{ при } y \in \Sigma_1;$$

$$|x - y| > R_0/3 \text{ при } y \in \Sigma_2.$$

Величину $L_i^\varepsilon f(x)$ представим в виде

$$L_i^\varepsilon f(x) = I_0 + I_1 + I_2, \quad I_k = \int_{\Sigma_k} \varphi(y) d\sigma, \quad k = 1, 2, 3, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\varepsilon^3} (f(y) - f(x)) \eta_i \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right).$$

Аналогично

$$L_i^{\varepsilon,h} f(x) = I_0^h + I_1^h + I_2^h, \quad I_k^h = \sum_{j: y^j \in \Sigma_k} \varphi(y^j) \mu(\sigma_j).$$

При этом с учётом (20) сразу можем записать

$$|I_2| \leq C \|f\|_0 \varepsilon^m, \quad |I_2^h| \leq C \|f\|_0 \varepsilon^m, \quad |I_0| \leq C \|f\|_1 \frac{h^3}{\varepsilon^3}, \quad |I_0^h| \leq C \|f\|_1 \frac{h^3}{\varepsilon^3}. \tag{35}$$

Оценим разность

$$I_1^h - I_1 = \sum_{j: \sigma_j \subset \Sigma_1} \int_{\sigma_j} (\varphi(y^j) - \varphi(y)) d\sigma.$$

Заметим, что

$$\varphi(y^j) - \varphi(y) = \frac{1}{\varepsilon^3} (f(y^j) - f(y)) \eta_i \left(\frac{x - y^j}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon^3} (f(y) - f(x)) \left(\eta_i \left(\frac{x - y^j}{\varepsilon} \right) - \eta_i \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right),$$

$$|\varphi(y^j) - \varphi(y)| \leq \frac{C\|f\|_1 h}{\varepsilon^3} \frac{1}{1 + (|y - x|/\varepsilon)^m} \left(1 + \frac{|y - x|}{\varepsilon}\right).$$

Тогда

$$|I_1^h - I_1| \leq \frac{C\|f\|_1 h}{\varepsilon^3} \int_{\xi: h < |\xi| < R_0} \frac{1}{1 + (|\xi|/\varepsilon)^m} \left(1 + \frac{|\xi|}{\varepsilon}\right) d\sigma \leq \frac{C\|f\|_1 h}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Из оценок (35) и (36) с учётом формул (21) и (22) следует утверждение теоремы.

4.2. Аппроксимация по треугольным ячейкам. Теперь рассмотрим случай аппроксимации поверхностных производных на основании триангуляции поверхности. Пусть $\tilde{\Sigma} = \bigcup_{j=1}^N \sigma_j$, где σ_j – треугольники, построенные так, что у каждого треугольника σ_j все вершины лежат на поверхности и при этом все треугольники вместе образуют разбиение поверхности $\tilde{\Sigma}$. Пусть h – диаметр этого разбиения. Возьмём в каждой ячейке узел $y^j \in \sigma_j$, $j = \overline{1, N}$.

Сделаем следующие предположения относительно свойств триангуляции.

Предположение 3. Для любой точки $x \in \Sigma$ такой, что $\rho(x, \partial\Sigma) \geq h$, построим касательную плоскость $\pi(x)$, цилиндр $C(x, R)$, $R = \min\{R_0, \rho(x, \Sigma)\}$ и участок поверхности $\Sigma(x, R) = \Sigma \cap C(x, R)$. Далее выделим участок $\tilde{\Sigma}(x, R)$ поверхности $\tilde{\Sigma}$, состоящий из всех тех и только тех ячеек, все три вершины которых лежат на участке $\Sigma(x, R)$. Должно выполняться условие, что проекция участка $\tilde{\Sigma}(x, R)$ на касательную плоскость $\pi(x)$ содержит круг с центром в точке x радиуса $R - h$, лежащий на этой плоскости.

Смысл предположения 1 состоит с том, что приближённая поверхность $\tilde{\Sigma}$ аппроксимирует всю поверхность Σ без “дыр” и больших отступов от края.

Предположение 4. Существует константа C_n такая, что для любой ячейки σ_j с вершинами A_j^1, A_j^2, A_j^3 вектор \vec{n}_j (орт вектора нормали к этой ячейке) подчинён оценке

$$|\vec{n}(A_j^k) - \vec{n}_j| \leq C_n h, \quad k = 1, 2, 3.$$

Это условие не позволит при вычислении интегралов проявиться эффекту “сапога Шварца”. С другой стороны, как показано в работе [10], предположение 4 выполнено, если при сгущении треугольной сетки поставить ограничение на минимальный угол в треугольниках.

Если диаметр разбиения достаточно мал, то для каждой узловой точки y^j , $j = \overline{1, N}$, можно построить точку $z^j \in \Sigma$, которая является ближайшей к точке y^j точкой поверхности, причём $y^j = z^j + \delta \vec{n}(z^j)$ – это следует из предположения 1. Теперь если f – функция, заданная на поверхности, то определим эту функцию в точке y^j значением $f(z^j)$. При этом найдётся константа C , определяемая поверхностью Σ , такая, что $|y^j - z^j| \leq h^2$. Это легко показать, построив специальную систему координат с центром в точке z^j . Тогда из предположения 2 следует, что все вершины ячейки σ_j , а значит и все её точки, отстоят от касательной плоскости, проведённой в точке z^j , на расстояние не более величины порядка h^2 .

Будем аппроксимировать поверхностные градиент и дивергенцию формулами (30) и (31), полагая, что $f(y^j) = f(z^j)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Считаем, что существует константа $B > 0$ такая, что $h < R_0/3$ и $h \leq B\varepsilon$. Пусть $x \in \Sigma$, $\rho(x, \partial\Sigma) \geq h$. Тогда найдётся константа C , зависящая только от поверхности Σ , функции η и параметров p, m, B, C_n (из предположения 4), такая, что:

1) выполнены оценки

$$|\text{Grad}_\varepsilon^h f(x) - \text{Grad} f(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_1 \frac{h}{\varepsilon} \right], \tag{37}$$

$$|\text{Div}_\varepsilon^h \vec{f}(x) - \text{Div} \vec{f}(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|\vec{f}\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|\vec{f}\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|\vec{f}\|_1 \frac{h}{\varepsilon} \right], \tag{38}$$

где в формуле (37) $f \in C^{p+1}(\Sigma)$ – функция на поверхности, в формуле (38) $\vec{f} \in C^{p+1}(\Sigma)$ – касательное векторное поле на поверхности, $p \geq 0$;

2) если y^j есть центры ячеек σ_j (точки пересечения медиан), то

$$|\text{Grad}_\varepsilon^h f(x) - \text{Grad} f(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_2 \frac{h^2}{\varepsilon^2} \right],$$

$$|\text{Div}_\varepsilon^h \vec{f}(x) - \text{Div} \vec{f}(x)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|\vec{f}\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|\vec{f}\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|\vec{f}\|_2 \frac{h^2}{\varepsilon^2} \right],$$

где $f \in C^{p+1}(\Sigma)$ – функция на поверхности, $\vec{f} \in C^{p+1}(\Sigma)$ – касательное векторное поле на поверхности, $p \geq 1$.

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие только от поверхности Σ , функции η и параметров k, m, B и C_n , причём в различных оценках значение константы C , вообще говоря, различно. Также будем предполагать, что $h^2 \ll h$ (т.е. если некоторая величина не превосходит h^2 , то считаем, что эта величина меньше h).

Опять построим специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Пусть $\pi = O\xi_1\xi_2$ – касательная плоскость к поверхности Σ в точке x .

Интегралы $L_i^\varepsilon f(x)$, $x \in \Sigma^{in}$, определяемые формулой (22), аппроксимируем интегральной суммой (34).

Разобьём поверхность $\tilde{\Sigma}$ на четыре части по положению лежащих на них узлов: $\tilde{\Sigma}_0$ – объединение ячеек σ_j таких, что $y^j \in C(x, 2h)$; $\tilde{\Sigma}_1$ – объединение ячеек σ_j таких, что $y^j \in C(x, R-h)$ и при этом $\sigma_j \notin \tilde{\Sigma}_0$; $\tilde{\Sigma}_2$ – объединение ячеек σ_j таких, что $y^j \in C(x, R_0-h)$ и при этом $\sigma_j \notin \tilde{\Sigma}_0$, $\sigma_j \notin \tilde{\Sigma}_1$; $\tilde{\Sigma}_4$ – оставшаяся часть поверхности $\tilde{\Sigma}$ (случай $\tilde{\Sigma}_k = \emptyset$ для некоторых k возможен).

Если $\sigma_j \in \tilde{\Sigma}_k$, $k \leq 2$, то построим: ячейку $\sigma_j^0 \subset \pi$ – проекцию ячейки σ_j на плоскость π ; точки $\tilde{y}^j \in \pi$ и $\tilde{z}^j \in \pi$ – проекции на плоскость π точек $y^j \in \tilde{\Sigma}$ и $z^j \in \Sigma$ соответственно; а также ячейку $\sigma_j^* \subset \Sigma$ такую, что её проекция на плоскость π есть ячейка $\sigma_j^0 \subset \pi$. При этом

$$|\tilde{z}^j - \tilde{y}^j| \leq Ch^2.$$

Также разобьём плоскость π на части Σ_k^0 , $k = \overline{0,3}$ (Σ_k^0 – проекция поверхности $\tilde{\Sigma}_k$ на плоскость π для $k = 1, 2, 3$), Σ_4^0 – оставшаяся часть плоскости π .

Рассмотрим разности $L_i f(x) - L_i^{\varepsilon, h} f(x)$, $i = 1, 2$, представив их в виде

$$L_i f(x) - L_i^{\varepsilon, h} f(x) = (L_i f(x) - D_i^\varepsilon f''(0)) + (D_i^\varepsilon f''(0) - L_i^{\varepsilon, h}(x)).$$

Для первой разности в правой части последнего выражения из оценки (5) и леммы имеем

$$|L_i f(x) - D_i^\varepsilon f''(0)| \leq C \left[\frac{\varepsilon^p \|f\|_{p+1}}{R^{p+1}} + \|f\|_1 \frac{\varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}} + \|f\|_1 \varepsilon^2 \right].$$

Далее оценим разности $D_i^\varepsilon f''(0) - L_i^{\varepsilon, h}(x)$. Представим величины $D_i^\varepsilon f''(0)$ и $L_i^{\varepsilon, h} f(x)$ в виде

$$D_i^\varepsilon f''(0) = I_0 + I_1 + I_2 + I_3, \quad I_k = - \int_{\xi \in \Sigma_k^0} \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^3} (f''(\xi) - f''(0)) \eta_i(\xi/\varepsilon),$$

$$L_i^{\varepsilon, h} f(x) = J_0 + J_1 + J_2 + J_3, \quad J_k = - \sum_{j: \sigma_j \subset \tilde{\Sigma}_k} \varphi_j \mu(\sigma_j), \quad \varphi_j = \frac{1}{\varepsilon^3} (f(z^j) - f(x)) \eta_i \left(\frac{y^j - x}{\varepsilon} \right).$$

Оценим интегралы I_2, I_3, J_2, J_3 по аналогии с рассуждениями в сформулированной лемме. При $\xi \in \Sigma_3^0 \cup \Sigma_4^0$ имеем

$$|\varphi(\xi)| \leq C \frac{\|f''\|_1}{\varepsilon^3} |\xi| \left| \frac{\xi}{\varepsilon} \right| \frac{1}{1 + |\xi/\varepsilon|^m}, \quad |\xi| > \max\{R - h, h\},$$

причём $\|f''\|_1 \leq \|f\|_1/R$. Тогда

$$|I_2 + I_3| \leq C \frac{\|f\|_1}{R} \int_{R/\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{1 + \rho^{m-3}} d\rho \leq C \frac{\|f\|_1 \varepsilon^{m-4}}{R^{m-3}}.$$

Можно показать, что

$$|\varphi_j| \leq C \frac{\|f\|_1}{\varepsilon^3} |y_0^j - x| \left| \frac{y_0^j - x}{\varepsilon} \right| \frac{1}{1 + |(y_0^j - x)/\varepsilon|^m} \text{ при } \sigma_j \in \tilde{\Sigma}_2, \quad |\varphi_j| \leq C \|f\|_0 \varepsilon^{m-3} \text{ при } \sigma_j \in \tilde{\Sigma}_3.$$

Следовательно,

$$|J_2| \leq C \|f\|_1 \int_{R/\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{1 + \rho^{m-3}} d\rho \leq C \frac{\|f\|_1 \varepsilon^{m-4}}{R^{m-4}}, \quad |J_3| \leq C \|f\|_0 \varepsilon^{m-3}.$$

Также сразу видно, что $|I_0| \leq C \|f\|_0 h^2, |J_0| \leq C \|f\|_0 h^2$.

Пусть

$$\varphi_j^0 = -\frac{1}{\varepsilon^3} (f'(\xi^j) - f'(0)) \eta_i(\xi^j/\varepsilon),$$

где $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j)$ – первые две координаты точки y^j в специальной системе координат. Обозначим $\xi_\varepsilon^j = \xi^j/\varepsilon, \xi_\varepsilon = \xi/\varepsilon$.

Рассмотрим разность

$$\varphi_j \mu(\sigma_j) - \varphi_j^0 \mu(\sigma_j^0) = \frac{1}{\varepsilon^3} (f(z^j) - f(x)) \eta_i \left(\frac{y^j - x}{\varepsilon} \right) \mu(\sigma_j) - \frac{1}{\varepsilon^3} (f'(\xi^j) - f'(0)) \eta_i(\xi_\varepsilon^j) \mu(\sigma_j^0).$$

При $\sigma_j \in \tilde{\Sigma}_1, |\xi_j| > h$ имеем оценки

$$|\mu(\sigma_j) - \mu(\sigma_j^0)| \leq C |\xi^j|^2 \mu(\sigma_j^0), \quad |f(z^j) - f'(\xi^j)| \leq C \|f\|_1 h^2,$$

$$\left| \eta_i \left(\frac{y^j - x}{\varepsilon} \right) \right| + |\eta_i(|\xi_\varepsilon^j|)| \leq |\xi_\varepsilon^j| \frac{C}{1 + |\xi_\varepsilon^j|^m},$$

$$\left| \eta_i \left(\frac{y^j - x}{\varepsilon} \right) - \eta_i(|\xi_\varepsilon^j|) \right| \leq C |\xi^j|^2 |\xi_\varepsilon^j|^2 \frac{1}{1 + |\xi_\varepsilon^j|^{m+1}}.$$

Тогда

$$|\varphi_j \mu(\sigma_j) - \varphi_j^0 \mu(\sigma_j^0)| \leq \frac{C}{\varepsilon^3} \left(\frac{\|f\|_1 h^2 + \|f\|_1 |\xi^j|^3}{1 + |\xi_\varepsilon^j|^m} |\xi_\varepsilon^j| + \|f\|_1 |\xi_\varepsilon^j|^2 |\xi^j|^3 \frac{1}{1 + |\xi_\varepsilon^j|^{m+1}} \right) \mu(\sigma_j^0).$$

Значит,

$$J_1 = J_1' + \Delta J_1, \quad \Delta J_1 = - \sum_{j: \sigma_j \in \tilde{\Sigma}_1} (\varphi_j \mu(\sigma_j) - \varphi_j^0 \mu(\sigma_j^0)),$$

$$|\Delta J_1| \leq \sum_{j: \sigma_j \subset \tilde{\Sigma}_1} C \|f\|_1 \int_{\xi \in \mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3} + |\xi_\varepsilon|^4 \right) \frac{1}{1 + |\xi_\varepsilon|^m} + |\xi_\varepsilon|^5 \frac{1}{1 + |\xi_\varepsilon|^{m+1}} \right] d\xi \leq C \|f\|_1 \left[\frac{h^2}{\varepsilon} + \varepsilon^2 \right].$$

Величина J'_1 есть интегральная сумма для интеграла I_1 , и мы можем записать

$$I_1 - J'_1 = - \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_j^0} \int_{\sigma_j} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^j)) d\sigma.$$

Если точки y^j выбирались на ячейках произвольным образом, то при $\xi^j \in \sigma_j^0$ имеем

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi^j)| \leq Ch \|\varphi\|_{1, \sigma_j}, \quad \|\varphi\|_{1, \sigma_j} = \sup_{\xi \in \sigma_j^0} \max_{|\alpha|=1} |D^\alpha \varphi(\xi)|,$$

причём

$$\|\varphi\|_{1, \sigma_j} \leq C(1 + |\xi_\varepsilon| + |\xi_\varepsilon|^2) \frac{\|f\|_1}{1 + |\xi_\varepsilon|^m}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|I_1 - J'_1| \leq C \|f\|_1 \frac{h}{\varepsilon^3} \sum_{\xi \in \mathbb{R}^2} \int_{\sigma_j} (1 + |\xi_\varepsilon| + |\xi_\varepsilon|^2) \frac{1}{1 + |\xi_\varepsilon|^m} d\xi \leq C \|f\|_1 \frac{h}{\varepsilon}.$$

Если y^j – центры треугольников σ_j , то ξ^j – центры треугольников σ_j^0 . Тогда при $\xi_j \in \sigma_j$ имеем

$$\varphi(\xi) - \varphi(\xi^j) = (\text{grad } \varphi(\xi^j), \xi - \xi_j) + \alpha(\xi, \xi_j),$$

где $|\alpha(\xi, \xi_j)| \leq Ch^2 \|\varphi\|_{2, j}$, $\|\varphi\|_{1, \sigma_j} = \sup_{\xi \in \sigma_j^0} \max_{|\alpha|=2} |D^\alpha \varphi(\xi)|$, причём

$$\|\varphi\|_{1, \sigma_j} \leq C \frac{1}{\varepsilon} (1 + |\xi_\varepsilon^j| + |\xi_\varepsilon^j|^2) \frac{\|f\|_2}{1 + |\xi_\varepsilon^j|^m}.$$

Поскольку

$$\int_{\sigma_j} (\xi - \xi^j) d\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\sigma_j} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^j)) d\sigma \leq Ch^2 \|\varphi\|_{2, j} \mu(\sigma_j),$$

то имеем

$$|I_1 - J'_1| \leq C \|f\|_2 \frac{h^2}{\varepsilon^4} \sum_{\xi \in \mathbb{R}^2} \int_{\sigma_j} (1 + |\xi_\varepsilon| + |\xi_\varepsilon|^2) \frac{1}{1 + |\xi_\varepsilon|^m} d\sigma \leq C \|f\|_2 \frac{h^2}{\varepsilon^2}.$$

Собрав все оценки, получим утверждение теоремы.

Заключение. Получены формулы для аппроксимации поверхностных градиента и дивергенции с применением интегральных операторов (теорема 1). Обратим внимание, что для точек, удалённых от края, и в случае, когда поверхность и функция достаточно гладкие, мы имеем аппроксимацию порядка ε^2 , где ε – параметр, интерпретируемый как характерный радиус области сосредоточения ядра интегрального оператора. Здесь есть отличие от плоского случая, где указанный порядок аппроксимации может быть высоким (оценка (5)). Причина такого отличия состоит в том, что в предложенных формулах точность аппроксимации определяется в том числе и погрешностью, возникающей из-за отклонения поверхности от касательной плоскости. Формулы более высокого порядка точности, по-видимому, могут быть получены с учётом кривизны поверхности.

Также заметим, что при аппроксимации интегральных операторов дискретными суммами дополнительная погрешность имеет порядок h/ε для произвольного выбора узлов и h^2/ε^2 в случае триангуляции поверхности и выборе узлов в центрах ячеек (см. теоремы 2 и 3). Отметим, что в статье [7] для плоского случая приводится оценка, в которой дополнительная погрешность при дискретизации может определяться величиной h^m/ε^m , параметр m определяется видом ядра аппроксимации и гладкостью функции и может принимать большие значения. Однако такие оценки справедливы при регулярном расположении узлов. В данной же работе ставилась цель получить оценки для случая произвольного неструктурированного разбиения поверхности или её триангуляции достаточно общего вида (отметим, что при этом мы не требовали свойства конформности от поверхностной сетки).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. Volakis J.L., Sertel K. Integral Equation Methods for Electromagnetics. Raleigh, 2012.
4. Писарев И.В., Сету́ха А.В. Снесение граничного условия на срединную поверхность при численном решении краевой задачи линейной теории крыла // Вычислит. методы и программирование. 2014. Т. 15. Вып. 1. С. 109–120.
5. Setukha A., Fetisov S. The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects // J. of Comput. Phys. 2018. V. 373. P. 631–647.
6. Гутников В.А., Лифанов И.К., Сету́ха А.В. О моделировании зданий и сооружений методом дискретных вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 78–92.
7. Eldredge J.D., Leonard A., Colonius T. A general deterministic treatment of derivatives in particle methods // J. of Comput. Phys. 2002. V. 180. P. 686–709.
8. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. М., 1997.
9. Захаров Е.В., Рыжачков Г.В., Сету́ха А.В. Численное решение трёхмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1253–1263.
10. Рыжачков Г.В., Сету́ха А.В. О сходимости численной схемы типа метода вихревых рамок на замкнутой поверхности с аппроксимацией формы поверхности // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1327–1336.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.
После доработки 23.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

УДК 517.913

НЕАНАЛИТИЧЕСКИЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

© 2023 г. В. В. Козлов

Приведены примеры аналитических систем дифференциальных уравнений в чётномерных фазовых пространствах с изолированными положениями равновесия, которые допускают неаналитические первые интегралы. Эти интегралы положительно определены в окрестности равновесий, что доказывает их устойчивость (на всей оси времени). Однако такие системы дифференциальных уравнений вообще не допускают нетривиальных первых интегралов в виде формальных степенных рядов. В частности, из устойчивости по Ляпунову равновесий аналитических систем не вытекает их формальная устойчивость. В случае нечётной размерности фазового пространства все изолированные состояния равновесия, по-видимому, неустойчивы.

DOI: 10.31857/S0374064123060134, EDN: FIKMPW

1. Теорема Ляпунова. Напомним классический результат Ляпунова в проблеме центра для аналитических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Если система

$$\dot{x} = \omega y + \dots, \quad \dot{y} = -\omega x + \dots, \quad \omega \neq 0 \quad (1)$$

(многоточие обозначает совокупность слагаемых по x , y степени не меньшей двух) с аналитическими правыми частями допускает интеграл в виде формального степенного ряда

$$H = x^2 + y^2 + \dots,$$

то этот ряд сходится при малых x , y и положение равновесия $x = y = 0$ будет *центром* (в частности, оно устойчиво на всей оси времени). Доказательство и обсуждение можно найти в монографиях [1, п. 38; 2, § 27].

В частности, в рассматриваемой задаче *формальная устойчивость* положения равновесия совпадает с устойчивостью по Ляпунову. Однако для сильно нелинейных систем (когда в (1) $\omega = 0$) это не так. Вот пример системы из [3, с. 131]:

$$\dot{x} = y[2x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2], \quad \dot{y} = -x[2x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2)^2], \quad (2)$$

которая допускает *неаналитический* первый интеграл

$$H = (2x^2 + y^2)e^{-1/(x^2+y^2)}, \quad (3)$$

и изолированное равновесие системы (2) также будет центром.

Если функцию H доопределить нулём в начале координат, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией на фазовой плоскости и её можно принять за функцию Ляпунова. Её ряд Маклорена будет нулевым; он сходится, но не к функции (3). Таким образом, мы имеем пример аналитической системы дифференциальных уравнений с устойчивым, но не формально устойчивым положением равновесия.

В следующем пункте этот пример будет распространён на фазовые пространства любой *чётной* размерности $n \geq 2$. Там же будут указаны условия отсутствия нетривиальных интегралов в виде формальных степенных рядов. Всё это показывает, что интерес к сходимости

формальных рядов для первых интегралов в проблеме устойчивости равновесных состояний является несколько преувеличенным (поучительное обсуждение см. в [2, гл. III]). Что касается аналитических систем в нечётномерном фазовом пространстве, то, по-видимому, все их *изолированные* равновесия неустойчивы на всей оси времени. Для $n = 1$ это очевидно. При $n = 3$ неустойчивость доказана в работе [4]. Статьи [5, 6] содержат некоторые результаты в подтверждение этой гипотезы для нечётных $n \geq 5$. Интересно отметить, что в гладком (бесконечно дифференцируемом) случае гипотеза неверна: в [5] приведён пример гладкой системы в трёхмерном пространстве с устойчивым изолированным равновесием.

2. Неаналитические функции Ляпунова. Пусть $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ – декартовы координаты фазового пространства \mathbb{R}^{2n} . Рассмотрим две функции f и g , аналитические в окрестности U начала координат $x = y = 0$ и положительные в области $U \setminus \{0, 0\}$. Предположим, что ряд Маклорена функции g начинается с положительно определённой однородной формы степени $2s$ ($s \geq 1$). Для нас наиболее важен случай $s = 1$.

Сопоставим этим функциям следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_k = f \frac{\partial g}{\partial y_k} + g^2 \frac{\partial f}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -f \frac{\partial g}{\partial x_k} - g^2 \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4)$$

Начало координат – положение равновесия. Правые части (4) аналитичны в U -окрестности этой точки.

Если, например, $f \equiv 1$, то (4) – каноническая гамильтонова система с гамильтонианом g . Таким образом, систему вида (4) можно рассматривать как некоторое расширение гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.

Введём функцию

$$H(x, y) = f e^{-1/g}, \quad H(0, 0) = 0.$$

Несложно проверить, что эта функция бесконечно дифференцируема в начале координат и все её производные в этой точке равны нулю. Следовательно, её ряд Маклорена *нулевой*. Функция

$$F(x, y) = g^2 e^{-1/g}, \quad F(0, 0) = 0,$$

обладает тем же свойством.

Теорема 1. *Справедливы следующие заключения:*

- 1) функция H – первый интеграл системы (4);
- 2) она положительно определена в окрестности начала координат;
- 3) замена времени $d\tau = F(x, y) dt$ переводит систему (4) в каноническую гамильтонову систему

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5)$$

В частности, равновесие $x = y = 0$ устойчиво: в качестве функции Ляпунова можно принять H . Гамильтонова система (5) гладкая и аналитическая в проколотой окрестности начала координат.

Заключение 2) очевидно, а заключения 1) и 3) проверяются прямыми вычислениями.

3. Формальные интегралы. Пусть теперь f и g – две квадратичные формы:

$$\sum (x_j^2 + y_j^2)/2 \quad \text{и} \quad \sum (\mu_j x_j^2 + y_j^2)/2,$$

где μ_1, \dots, μ_n – положительные числа, не равные единице. В этом случае систему (4) следует отнести к строго нелинейным системам дифференциальных уравнений: матрица её линеаризации в положении равновесия будет нулевой. Положим $\mu_j = \omega_j^2$ ($1 \leq j \leq n$).

Теорема 2. *Если числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ линейно независимы над полем \mathbb{Q} , то система (4) не имеет нетривиальных формальных интегралов.*

Другими словами, любой первый интеграл в виде формального степенного ряда относительно x_1, \dots, y_n сводится к свободному члену (т.е. к константе). Таким образом, мы имеем

пример полиномиальной системы дифференциальных уравнений в \mathbb{R}^{2n} , $n \geq 1$, с изолированным и устойчивым по Ляпунову равновесием, которое формально неустойчиво. В противном случае существовал бы формальный интеграл такой, что конечное число его однородных форм наименьшей степени представляло бы определённо положительную функцию от $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Ранее высказывалось мнение, что из устойчивости по Ляпунову обязательно вытекает формальная устойчивость (см., например, [7, с. 91]).

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$H_k + H_{k+1} + \dots, \quad k \geq 1, \tag{6}$$

– формальный первый интеграл системы (4); H_s – однородный многочлен относительно $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ степени s (его коэффициенты могут быть комплексными числами).

Лемма 1. Если k нечётно, то $H_k = 0$; если $k = 2l$ (l целое и $l \geq 1$), то

$$H_{2l} = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_n \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_n = l}} h_{l_1 \dots l_n} (\mu_1 x_1^2 + y_1^2)^{l_1} \dots (\mu_n x_n^2 + y_n^2)^{l_n}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $f \neq 0$ в проколотой окрестности начала координат, то первая форма H_k из (6) является первым интегралом линейной гамильтоновой системы

$$\dot{x}_k = y_k, \quad \dot{y}_k = -\omega_k^2 x_k, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$u_k = x_k + iy_k/\omega_k, \quad v_k = x_k - iy_k/\omega_k, \quad i^2 = -1.$$

В этих переменных уравнения (8) примут вид

$$\dot{u}_k = -i\omega_k u_k, \quad \dot{v}_k = i\omega_k v_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пусть

$$H_k = \sum \tilde{h}_{k_1 \dots k_n} h_{l_1 \dots l_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n} v_1^{l_1} \dots v_n^{l_n}.$$

Тогда

$$\dot{H}_k = \sum \tilde{h}_{k_1 \dots k_n} [(l_1 - k_1)\omega_1 + \dots + (l_n - k_n)\omega_n] u_1^{k_1} \dots v_n^{l_n} = 0.$$

Следовательно, если $\tilde{h}_{k_1 \dots k_n} \neq 0$, то $k_1 = l_1, \dots, k_n = l_n$ (ввиду предположения о независимости $\omega_1, \dots, \omega_n$). Так как

$$u_j v_j = x_j^2 + y_j^2/\omega_j^2,$$

то степень H_k чётная и эта форма имеет вид (7). Лемма доказана.

Итак, формальный интеграл имеет вид

$$H_{2l} + H_{2l+1} + H_{2l+2} + \dots$$

Лемма 2. Справедливо равенство $H_{2l+1} = 0$.

Действительно, согласно лемме 1, производная H_{2l} в силу системы (4) будет однородной формой степени $2l+4$. С другой стороны, производная от H_{2l+1} в силу той же системы будет суммой двух однородных форм со степенями $2l+3$ и $2l+5$ соответственно. Значит, H_{2l+1} – первый интеграл линейной системы (8). Но тогда (по лемме 1) $H_{2l+1} = 0$.

Далее производная от $H_{2l} + H_{2l+2} + \dots$ в силу системы (4) представляет собой формальный степенной ряд, начинающийся с однородной формы степени $2l+4$. Приравнивая её к нулю (с учётом формулы (7)), приходим к равенству

$$2g^2 \sum_{l_j \neq 0} \sum h_{l_1 \dots l_n} l_j (\mu_1 x_1^2 + y_1^2)^{l_1} \dots (\mu_j x_j^2 + y_j^2)^{l_j-1} \dots$$

$$\dots (\mu_n x_n^2 + y_n^2)^{l_n} (\mu_j - 1) x_j y_j + f \sum \left[\frac{\partial H_{2l+2}}{\partial x_j} y_j - \frac{\partial H_{2l+2}}{\partial y_j} \mu_j x_j \right] = 0. \quad (9)$$

Полагаем теперь, что

$$y_k = i x_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда, очевидно, $f = 0$, но

$$g = \sum (\mu_j - 1) x_j^2 / 2. \quad (10)$$

Согласно предположению, все μ_j отличны от единицы. Следовательно, форма (10) ненулевая. Поскольку в кольце многочленов нет делителей нуля, то из (9) вытекает равенство

$$\sum_{l_j \neq 0} \sum h_{l_1 \dots l_n} l_j (\mu_1 - 1)^{l_1} \dots (\mu_n - 1)^{l_n} x_1^{2l_1} \dots x_n^{2l_n} \equiv 0$$

для всех x_1, \dots, x_n . Так как $\mu_1 \neq 1, \dots, \mu_n \neq 1$, то все коэффициенты

$$(l_1 + \dots + l_n) h_{l_1 \dots l_n} = l h_{l_1 \dots l_n}$$

равны нулю, и поэтому $H_{2l} = 0$. Значит, формальный ряд (6) нулевой. Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорема 2 справедлива и в более общем случае, когда к квадратичным формам f и g добавляются степенные ряды, начинающиеся с членов степени не меньшей пяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. М.; Ижевск, 2001.
3. *Немьцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.
4. *Brunella M.* Instability of equilibria in dimension three // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1998. V. 48. № 5. P. 1345–1357.
5. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* О неустойчивости изолированных равновесий динамических систем с инвариантной мерой в нечётномерном пространстве // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 5. С. 674–680.
6. *Козлов В.В.* Первые интегралы и асимптотические траектории // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 1. С. 32–59.
7. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.

Математический институт
имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 30.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2022. Т. 58. № 11).

DOI: 10.31857/S0374064123060146, EDN: FISJXL

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “Об оценках сверху управляющей функции в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (17 февраля 2023 г.).

Рассматривается краевая задача для параболического уравнения

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + h(x, t)u, \quad (x, t) \in Q_T \equiv (0, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

где $a, b, h, a_t, b_x \in C(\overline{Q}_T)$, $0 < a_1 \leq a(x, t) \leq a_2 < +\infty$, $\varphi, \psi \in W_2^1(0, T)$ и $\xi \in L_2(0, 1)$. Изучается следующая задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ при фиксированных ξ и ψ , требуется сделать температуру $u(x_0, t)$ в данной точке $x_0 \in (0, 1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ при всех $t \in (0, T)$. Задачи управления и экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2], причём наиболее изучены задачи с финальным или распределённым наблюдением. Продолжая исследования [3, 4], мы получаем оценки нормы управляющей функции через значение функционала качества: ранее найдены оценки снизу [5–7], а здесь получена оценка сверху, применимая для доказательства существования решения экстремальной задачи на неограниченных множествах управлений.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$, действующее по правилу $t \mapsto u(\cdot, t)$, непрерывно [8, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – подпространство функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = \eta(0, t) = 0$. Слабым решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0, \cdot) = \varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (au_x \eta_x - bu_x \eta - hu \eta - u \eta_t) dx dt = \int_0^1 \xi \eta(x, 0) dx + \int_0^T a(1, t) \psi \eta(1, t) dt.$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллиончиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

Теорема 1 [7, 9]. Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём для некоторой константы C_1 (не зависящей от φ , ψ и ξ) имеет место оценка

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ – множество управляющих функций φ , а $Z \subset L_2(0, T)$ – множество целевых функций z . Рассмотрим функционал

$$J[z, \rho, \varphi] \equiv \int_0^T (u_\varphi(x_0, t) - z(t))^2 \rho(t) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1), (2) с управляющей функцией φ , а $\rho \in L_\infty(0, T)$ – весовая функция ($\text{ess inf}_{t \in (0, T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$), задающая в $L_2(0, T)$ норму $\|f\|_{L_{2,\rho}} \equiv (\int_0^T f^2(t)\rho(t) dt)^{1/2}$.

Теорема 2 [5–7]. Если $a_t(x, t) \geq 0$, $b_x(x, t) \geq h(x, t)$ при $(x, t) \in Q_T$, $b(x, t) \geq 0$ при $(x, t) \in [0, x_0] \times [0, T]$ ($x_0 \in (0, 1]$) и $b(1, t) \leq 0$ при $t \in [0, T]$, то справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geq \|z\|_{L_1(0,T)} - (TJ[\varphi, \rho, z]/\rho_1)^{1/2} - x_0(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)})/a_1.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 при $\psi = 0 = \xi$ выполнена оценка

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geq \|z\|_{L_1(0,T)} - (TJ[\varphi, \rho, z]/\rho_1)^{1/2}.$$

Теорема 3. Если $\psi = 0 = \xi$, $\varphi = \gamma\varphi_1 + \varphi_2$, где $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\|\varphi_1\|_{W_2^1(0,T)} = 1$, то имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} \leq ((J[z, \rho, \varphi])^{1/2} + \|u_{\varphi_2}(x_0, t)\|_{L_{2,\rho}} + \|z(x_0, \cdot)\|_{L_{2,\rho}}) / \|u_{\varphi_1}(x_0, \cdot)\|_{L_{2,\rho}} + \|\varphi_2\|_{W_2^1(0,T)}.$$

Для фиксированных функций z и ρ рассмотрим задачу минимизации

$$m[z, \rho, \Phi] = \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \rho, \varphi].$$

Определение. Множество $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ назовём конечномерно аппроксимируемым, если существуют такая конечная система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \Phi$ и константа M , что для любой функции $\varphi \in \Phi$ при некоторых $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ выполнена оценка $\|\varphi - \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j\|_{W_2^1(0,T)} \leq M$.

Теорема 4. Если множество Φ непусто, замкнуто, выпукло и конечномерно аппроксимируемо, то для любой функции $z \in L_2(0, T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой

$$m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0].$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications, Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 5. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 6. Astashova I.V., Filinovskiy A.V., Lashin D.A. On properties of the control function in an control problem with a point observation for a parabolic equation // Funct. Diff. Equ. 2021. V. 28. № 3–4. P. 99–102. 7. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. С. 28–31. 8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралыцева Н.Н. Линейные

и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 9. Асташова И.В., Лапин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274.

М. И. Бесова (Москва) “Голоморфная регуляризация сингулярно возмущённых уравнений высшего порядка” (3 марта 2023 г.).

Одним из приоритетных направлений развития метода регуляризации С.А. Ломова [1, гл. I, § 4] является построение теории сходимости рядов (обычной, не асимптотической) по степеням малого параметра, представляющих решение сингулярно возмущённых задач. Рассмотрим семейство (с параметром $\varepsilon > 0$) задач Коши

$$\varepsilon \dot{y} = f(t, y, \dot{y}), \quad t \in [0, T], \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad \dot{y}(0, \varepsilon) = v^0, \quad (1)$$

где функция $f(t, y, v)$ отлична от нуля внутри области $\Omega_{tyv} \subset \mathbb{R}^3$ (содержащей точку $M_0 = (0, y^0, v^0)$) и аналитична в замыкании этой области. Запишем уравнение (1) в виде системы с “медленной” и “быстрой” переменными

$$\dot{y} = v, \quad \varepsilon \dot{v} = f(t, y, v), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad v(0, \varepsilon) = v^0. \quad (2)$$

Теорема 1. Система (2) при выполнении условий теоремы Тихонова о предельном переходе [2, § 7] имеет два независимых интеграла, голоморфных в точке $\varepsilon = 0$.

Определение. Решение $(y(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon))$ системы (2) называется псевдоаналитическим в точке $\varepsilon = 0$, если для некоторой регуляризирующей [1, гл. 2, § 2; 3] функции $\varphi(t)$ и для любого малого $\varepsilon > 0$ на некотором отрезке $[0, T_\varepsilon]$ равномерно сходятся представляющие это решение ряды

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n Y_n(t, \varphi(t)/\varepsilon), \quad v(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n V_n(t, \varphi(t)/\varepsilon). \quad (3)$$

Достаточное условие существования таких решений представляет

Теорема 2. Если функция $\varphi(t)$ аналитична на отрезке $[0, T]$, причём $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(t) < 0$ при $t \in [0, T]$ и уравнение

$$\dot{\varphi}(t) \int_{v^0}^v \frac{dv_1}{f(t, y^0, v_1)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$$

имеет решение вида $v = V_0(t, y^0, v^0, \Phi(\varphi(t)/\varepsilon))$, где $\Phi(\eta)$ – возрастающая на \mathbb{R} целая функция с наименьшим (асимптотическим) значением a , а функция $V_0(t, y^0, v^0, q)$ ограничена на множестве $T_{tyv}^0 \times (a, \Phi(0)]$, где $T_{tyv}^0 \subset \Omega_{tyv}$ – некоторый компакт, то решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (1) псевдоаналитическое в точке $\varepsilon = 0$.

В формулах (3) члены до первого порядка включительно при $L \equiv \partial_t + v \partial_y$ имеют вид

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t) + \varepsilon \int_{v^0}^v \frac{L(y - \bar{y}(t)) dv_1}{f(t, y, v_1)} \Bigg|_{v=V_0(t, y^0, v^0, \varphi(t)/\varepsilon)}^{y=\bar{y}(t)} + \dots,$$

$$v(t, \varepsilon) = V_0(t, \varphi(t)/\varepsilon) + \varepsilon \frac{f(t, y, v)}{\varphi'(t)} \times$$

$$\times \left[\int_{v^0}^v \left(L \int_{v^0}^{v_1} \frac{\dot{\varphi}(t) dv_2}{f(t, y, v_2)} \right) \frac{dv_1}{f(t, y, v_1)} - \int_{v^0}^v \frac{L(y - \bar{y}(t)) dv_1}{f(t, y, v_1)} \frac{\partial}{\partial y} \int_{v^0}^v \frac{\dot{\varphi}(t) dv_1}{f(t, y, v_1)} \right] \Bigg|_{v=V_0(t, y^0, v^0, \varphi(t)/\varepsilon)}^{y=\bar{y}(t)} + \dots$$

Для краевых задач применяется алгоритм псевдоаналитического продолжения [4].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00496).

Литература. 1. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011. 2. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М., 1973. 3. Качалов В.И. Об одном методе решения сингулярно возмущённых систем тихоновского типа // Изв. вузов. Математика. 2018. № 6. С. 25–30. 4. Besova M., Kachalov V. Analytical aspects of the theory of Tikhonov systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 1. Art. 72.

А. В. Тюленев (Москва) “Пример невычислимых решений задачи Коши для волнового уравнения с вычислимыми начальными условиями” (3 марта 2023 г.).

При $n = 2$ и $n = 3$ рассматривается задача Коши для *волнового* уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в пространстве \mathbb{R}^n , а *начальная* функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель. Решение задачи (1) понимается в обобщённом смысле (оно существует и единственно [1, § 12]) и определяется как равномерный предел последовательности решений u_k задачи (1) с начальными функциями $\varphi_k \in C^3(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющими условиям $\varphi_k \rightarrow \varphi$ и $(\varphi_k)' \rightarrow \varphi'$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ при $k \rightarrow +\infty$.

Определение 1. *Вычислимыми* называются:

1) функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (возможно, не являющаяся *тотальной*, т.е. определённой при всех $m \in \mathbb{N}$), если существует алгоритм, который её *вычисляет*, т.е. останавливается на тех и только тех $m \in \mathbb{N}$, для которых значение $f(m)$ определено, и выдаёт это значение;

2) последовательность рациональных чисел r_k , если для некоторых вычислимых *тотальных* функций $a, b, s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ верны равенства

$$r_k = (-1)^{s(k)} a(k)/b(k), \quad k \in \mathbb{N};$$

3) действительное число x , если для некоторых вычислимых последовательности рациональных чисел r_k и *тотальной* функции $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ верны оценки

$$|r_k - x| \leq 2^{-m}, \quad k \geq \beta(m), \quad m \in \mathbb{N};$$

4) последовательность действительных чисел x_m , если для некоторой вычислимой последовательности рациональных чисел r_{mk} верны оценки

$$|r_{mk} - x_m| \leq 2^{-k}, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Определение 2. Для *вычислимого* (т.е. имеющего вычислимые границы) отрезка I функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется *вычислимой*, если выполнены следующие условия:

1) для любой вычислимой последовательности чисел $x_m \subset I$ последовательность значений $f(x_m)$ *вычислима* (*секвенциальная вычислимость*);

2) для некоторой вычислимой функции $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ верны импликации

$$|x - y| \leq 1/\beta(m) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-m}, \quad x, y \in I, \quad m \in \mathbb{N}$$

(*эффективная равномерная непрерывность*).

Понятия вычислимых чисел, последовательностей и функций естественным образом распространяются на многомерный случай [2, гл. 0, п. 3].

Возникает вопрос о вычислимости решения задачи (1) с вычислимой функцией φ . Известно [2, гл. 1, п. 1], что если $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^n)$, то решение (классическое) задачи (1) вычислимо в любом вычислимом параллелепипеде $[0, T] \times I^n$. В случае $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ это, вообще говоря, уже не так, а именно: при $n = 3$ существует [3] вычислимая начальная функция с компактным носителем, для которой решение (уже обобщённое) u задачи (1) непрерывно, единственно и секвенциально вычислимо, но функция $u(1, \cdot)$ не вычислима. Доказательство этого результата не распространяется автоматически на меньшие размерности. Более того, при $n = 1$ он уже неверен, а ответ на вопрос о его справедливости в случае $n = 2$ даёт

Теорема. Существует вычислимая функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, для которой решение и задачи (1) существует, непрерывно и секвенциально вычислимо, но функция $u(1, \cdot)$ не вычислима.

Литература. 1. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961. 2. Pour-El M.B., Richards J.I. Computability in Analysis and Physics. Berlin; Heidelberg, 1989. 3. Pour-El M.B., Richards J.I. The wave equation with computable initial data such that its unique solution is not computable // Adv. in Math. 1981. V. 39. P. 215–239.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (10 марта 2023 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \quad (1)$$

Положим $B_\rho = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| < \rho\}$ и $\rho_0 \equiv \sup\{\rho : B_\rho \subset G\}$, а через $x(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 1. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение, о чём мы в дальнейшем больше не будем упоминать) обладает следующим свойством *ляпуновского, перроновского* или *верхнепредельного* типа (отмечается ниже индексом $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно):

1) *устойчивостью* [1, 2], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon; \quad (2)$$

2) *полной неустойчивостью* [1, 2], если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ не удовлетворяет соответствующему требованию (2) (в частности, возможно, решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче \mathbb{R}_+);

3) *почти устойчивостью* [2], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры (здесь и ниже – Лебега);

4) *почти полной неустойчивостью* [2], если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры;

5) *μ -устойчивостью* при данном $\mu \in [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в шаре B_ρ подмножество *относительной меры* $M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ (т.е. долей от меры B_ρ) не меньшей μ ;

6) *ν -неустойчивостью* при данном $\nu \in [0, 1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_ρ подмножество *относительной меры* $N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$, не меньшей ν .

Корректность определения 1 обосновывает

Теорема 1. Для любой системы (1), любого $\varepsilon > 0$ и каждого из требований (2) множества всех точек $x_0 \in G$, как удовлетворяющих этому требованию, так и не удовлетворяющих ему, измеримы.

Правомерность следующего ниже определения 2 обеспечивает

Теорема 2. Для любой системы (1) множество всех значений $\mu \in [0, 1]$ (равно как и всех значений $\nu \in [0, 1]$), для которых она обладает *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной μ -устойчивостью* (соответственно, *ν -неустойчивостью*), заведомо содержит точку 0 и представляет собой промежуток, возможно, вырождающийся в точку.

Определение 2. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовём *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ система (1) обладает μ -устойчивостью, а для каждого $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ – нет;

б) мерой неустойчивости такое число $\nu_{\varkappa}(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_{\varkappa}(f))$ система (1) обладает ν -неустойчивостью, а для каждого $\nu \in (\nu_{\varkappa}(f), 1]$ – нет.

Конкретные формулы для мер устойчивости и неустойчивости предлагает

Теорема 3. Для каждой системы (1) однозначно определена шестёрка её ляпуновских, перроновских и верхнепределённых мер устойчивости или неустойчивости, которые соответственно задаются формулами

$$\mu_{\varkappa}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\rho \rightarrow +0} M_{\varkappa}(f, \varepsilon, \rho), \quad \nu_{\varkappa}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\rho \rightarrow +0} N_{\varkappa}(f, \varepsilon, \rho), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma,$$

причём пределы в них при $\varepsilon \rightarrow +0$ могут быть заменены точной нижней или, соответственно, верхней гранью по $\varepsilon > 0$.

Набор основных соотношений, связывающих различные меры устойчивости и неустойчивости, задаёт

Теорема 4. Для любой системы (1) выполнены неравенства

$$0 \leq \mu_{\lambda}(f) \leq \mu_{\sigma}(f) \leq \mu_{\pi}(f) \leq 1, \quad 0 \leq \nu_{\pi}(f) \leq \nu_{\sigma}(f) \leq \nu_{\lambda}(f) \leq 1,$$

$$0 \leq \mu_{\varkappa}(f) + \nu_{\varkappa}(f) \leq 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Естественную связь свойств почти устойчивости и почти полной неустойчивости с единичными значениями соответствующих мер раскрывает

Теорема 5. Система (1) обладает почти устойчивостью или почти полной неустойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает 1-устойчивостью или, соответственно, 1-неустойчивостью этого типа, и тогда её мера устойчивости того же типа равна 1, а неустойчивости – 0, или наоборот.

Указанная в теореме 5 логическая связь между конкретными свойствами и мерами оказывается лишь односторонней, что и подтверждает

Теорема 6. При $n = 2$ существуют две автономные системы вида (1), не обладающие ни почти устойчивостью, ни почти полной неустойчивостью ни одного из трёх типов: у одной из них меры устойчивости или неустойчивости всех трёх типов равны соответственно 1 или 0, а у другой – наоборот.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепределённой устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

Е. А. Барабанов (Минск), **В. В. Быков** (Москва) “Коэффициент неправильности Ляпунова и индекс экспоненциальной устойчивости линейной параметрической системы как вектор-функция параметра” (17 марта 2023 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через \mathcal{M}^n обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, с которой мы далее отождествляем саму систему (1). Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ через $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ обозначим её показатели Ляпунова, через $\text{es}(A)$ – её индекс экспоненциальной устойчивости (т.е. размерность линейного подпространства решений системы (1) с отрицательными показателями Ляпунова), а через $\sigma_{\text{л}}(A)$ – коэффициент неправильности Ляпунова [1, с. 19], с помощью которого формулируются достаточные условия, характеризующие реакцию системы $A \in \mathcal{M}^n$ как на её линейные экспоненциально убывающие возмущения [2], так и на её нелинейные возмущения высшего порядка малости [1, с. 275].

Долгое время держалась гипотеза (основанная на результате Ляпунова об условной устойчивости по правильному первому приближению) о том, что показатели Ляпунова правильных

систем не меняются при убывающих к нулю возмущениях. Однако Р.Э. Виноград привёл пример правильных систем $A, B \in \mathcal{M}^2$ (см. [3]), удовлетворяющих соотношениям

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0, \quad \lambda_1(B) = -1, \quad \lambda_2(B) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0.$$

Поэтому индекс экспоненциальной устойчивости es , принимающий ровно $n + 1$ значение, не полунепрерывен даже на множестве \mathcal{R}^n правильных систем с равномерной топологией.

Для заданного метрического пространства M рассмотрим параметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

для которого при каждом фиксированном $\mu \in M$ система (2) принадлежит классу \mathcal{M}^n – её индекс экспоненциальной устойчивости и коэффициент неправомерности Ляпунова обозначим через $es(\mu, A)$ и $\sigma_{\text{л}}(\mu, A)$. Класс семейств (2) (отождествляемых с задающими их функциями A), непрерывных на пространстве \mathcal{M}^n с компактно-открытой топологией, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а с равномерной топологией – через $\mathcal{U}^n(M)$. Введём и подкласс $\mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M) \subset \mathcal{U}^n(M)$ семейств, задаваемых функциями вида $A(t, \mu) = (B(t) + Q(t, \mu))x$, где $B \in \mathcal{R}^n$, а непрерывная функция $Q : \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\mu \in M} \|Q(t, \mu)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Задача. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M дать полное дескриптивно-функциональное описание каждого из классов пар функций

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}[\mathcal{C}^n(M)] &\equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot, A), es(\cdot, A)) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}, & \mathfrak{T}[\mathcal{U}^n(M)] &\equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot, A), es(\cdot, A)) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}, \\ \mathfrak{T}[\mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)] &\equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot, A), es(\cdot, A)) : A \in \mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)\}. \end{aligned}$$

Напомним [4, с. 223–224], что функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $(*, G_{\delta})$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r, +\infty))$ является G_{δ} -множеством в метрическом пространстве M . В частности, класс $(*, G_{\delta})$ – собственный подкласс второго класса Бэра [4, с. 249]. Полное описание классов

$$\mathfrak{S}[\mathcal{U}^n(M)] \equiv \{\sigma_{\text{л}}(\cdot, A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}, \quad \mathfrak{S}[\mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)] \equiv \{\sigma_{\text{л}}(\cdot, A) : A \in \mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)\}$$

заключается в следующем [5]: они совпадают и состоят из функций $M \rightarrow \mathbb{R}_+$ класса $(*, G_{\delta})$, имеющих непрерывную мажоранту. Описание класса $\mathfrak{S}[\mathcal{C}^n(M)] \equiv \{\sigma_{\text{л}}(\cdot, A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ вытекает из [6]: для каждых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M он состоит из всех функций $M \rightarrow \mathbb{R}_+$ класса $(*, G_{\delta})$. Это следует и из более общего результата [7] с полным описанием класса вектор-функций $\{(\sigma_{\text{л}}(\cdot, A), \sigma_{\text{п}}(\cdot, A)) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$, составленных из коэффициентов неправомерности Ляпунова $\sigma_{\text{л}}$ и Перрона $\sigma_{\text{п}}$ [1, с. 19]. Описание классов $\{es(\cdot, A) : A \in \mathcal{C}^n(M)\}$ и $\{es(\cdot, A) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}$ получено в работе [8]: оба они состоят из функций $f : M \rightarrow \{0, \dots, n\}$, для которых функция $(-f)$ принадлежит классу $(*, G_{\delta})$.

Теорема 1. Для любых $n \geq 1$ и метрического пространства M пара функций (σ, τ) , где $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\tau : M \rightarrow \{0, \dots, n\}$, принадлежит классу $\mathfrak{T}[\mathcal{C}^n(M)]$ тогда и только тогда, когда функции σ и $(-\tau)$ принадлежат классу $(*, G_{\delta})$.

Полностью решить поставленную выше задачу описания классов $\mathfrak{T}[\mathcal{U}^n(M)]$ и $\mathfrak{T}[\mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)]$ пока не удалось. Рассмотрим упрощённый её вариант. Следуя [9], назовём символом полной экспоненциальной неустойчивости системы (1) величину

$$ti(A) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_1(A) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1(A) < 0. \end{cases}$$

Следующая теорема полностью описывает классы пар функций

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}[\mathcal{U}^n(M)] &\equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot, A), ti(\cdot, A)) : A \in \mathcal{U}^n(M)\}, \\ \mathfrak{U}[\mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)] &\equiv \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot, A), ti(\cdot, A)) : A \in \mathcal{UZ}_{\mathcal{R}}^n(M)\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Для любых $n \geq 2$ и метрического пространства M справедливо равенство классов $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^n(M)] = \mathfrak{U}[\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}^n(M)]$, а пара функций (σ, τ) , где $\sigma: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\tau: M \rightarrow \{0, 1\}$, принадлежит этим классам тогда и только тогда, когда функции σ и τ принадлежат классу $(*, G_\delta)$, а функция σ имеет непрерывную мажоранту.

Литература. 1. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск, 2006. 2. Богданов Ю.С. К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814. 3. Виноград Р.Э. Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17. № 6. С. 645–650. 4. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937. 5. Барабанов Е.А., Быков В.В. Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временной полуоси, как функция параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1587–1599. 6. Карпук М.В. Показатели Ляпунова семейств морфизмов метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1332–1338. 7. Войделевич А.С. Полное описание коэффициентов неправильности Ляпунова и Перрона линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 322–327. 8. Барабанов Е.А., Быков В.В., Карпук М.В. Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. 9. Миллионщиков В.М. Указатели и символы условной устойчивости линейных систем // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464.

А. Н. Ветохин (Москва) “О некоторых свойствах топологической энтропии на пространстве непрерывных отображений множества Кантора” (24 марта 2023 г.).

Пусть на компактном метрическом пространстве X задано непрерывное отображение

$$f: X \rightarrow X. \quad (1)$$

Тогда, наряду с исходной метрикой d , определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) \equiv \max_{0 \leq i < n} d(f^i(x), f^i(y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f^0 \equiv \text{id}_X$, а если $i \in \mathbb{N}$, то f^i – i -я итерация отображения f . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f, \varepsilon, n)$ максимальное число точек в X , попарные d_n^f -расстояния между которыми больше ε . Топологическую энтропию отображения f определяем [1] формулой

$$h_{\text{top}}(f) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n) \quad (2)$$

(отметим, что величина (2) не изменится, если в её определении метрику d заменить любой другой, задающей на X ту же, что и d , топологию).

На пространстве $C(X, X)$ непрерывных отображений (1) с равномерной метрикой

$$\rho(f, g) \equiv \max_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

рассмотрим функцию

$$f \mapsto h_{\text{top}}(f). \quad (3)$$

Известно [2, 3], что функция (3) принадлежит второму классу Бэра, а точки пространства $C(X, X)$, в которых она полунепрерывна снизу, образуют в нём всюду плотное множество типа G_δ . Кроме того [3], если X – канторово совершенное множество на отрезке $[0, 1]$ (здесь и ниже – с естественной метрикой вещественной прямой), то функция (3) всюду разрывна, а полунепрерывна снизу она только в тех точках, где равна нулю. Более того [4], функция (3) не принадлежит первому классу Бэра даже на подпространстве гомеоморфизмов, удовлетворяющих условию Липшица. Точки же полунепрерывности сверху функции (3) образуют множество типа $F_{\sigma\delta}$ [3], а сужение $h_{\text{top}}|_K$ на некоторое совершенное множество $K \subset C(X, X)$ не имеет таких точек совсем [5].

Рассмотрим множество *предельно реализуемых* значений топологической энтропии

$$E_h(f) \equiv \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{h_{\text{top}}(g) : \rho(f, g) < 1/n\},$$

т.е. принимаемых ею при равномерно сколь угодно малых возмущениях отображения f .

Теорема 1. *Если X – канторово совершенное множество на отрезке $[0, 1]$, то для любого отображения $f \in C(X, X)$ выполнено равенство $E_h(f) = [0, +\infty]$.*

Теорема 2. *Если X – канторово совершенное множество на отрезке $[0, 1]$, то множество точек полунепрерывности сверху функции (3) совпадает с множеством тех отображений f , для которых $h_{\text{top}}(f) = +\infty$.*

Литература. 1. Динабург Е.И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35. № 2. С. 324–366. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 3. Ветохин А.Н. Структура множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 4. С. 69–72. 4. Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 64–67. 5. Ветохин А.Н. Пустота множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии одного семейства динамических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1152–1153.

И. Н. Сергеев, К. В. Уманский (Москва) “Совпадающие критерии ляпуновской и периодической приводимости линейной автономной системы к линейному автономному уравнению” (24 марта 2023 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ и евклидова координатного векторного пространства \mathbb{R}^n рассмотрим множество \mathcal{M}^n линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \equiv (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

задаваемых каждая своей непрерывной ограниченной матричной функцией

$$A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \|A\| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{|x|=1} |A(t)x| < +\infty,$$

с которой в дальнейшем и будем отождествлять саму систему.

Определение 1. В множестве \mathcal{M}^n выделим:

- 1) подмножество \mathcal{C}^n автономных систем, т.е. систем $A \in \mathcal{M}^n$ с постоянными коэффициентами или, что то же, задаваемых постоянными матричными функциями $A(\cdot) = \text{const}$;
- 2) подмножество \mathcal{E}^n систем, отвечающих уравнению, т.е. задаваемых матричными функциями A специального вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

называемого *клеткой Фробениуса* и обеспечивающего возможность однозначно записывать каждую из таких систем всего лишь одним линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка для первой координаты $y \equiv x_1$ её решения x

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с которым в дальнейшем также будем отождествлять такую систему.

Определение 2. Скажем, что система $A \in \mathcal{M}^n$:

- а) *ляпуновски приводима* к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если существует линейное невырожденное преобразование координат $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, которое, во-первых, является *ляпуновским*, т.е.

удовлетворяет условиям $L \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\|L\| + \|L^{-1}\| + \|\dot{L}\| < +\infty$, а во-вторых, *приводит* систему A к системе

$$B(t) = A_L(t) \equiv L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

б) T -периодически приводима к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если она приводима к системе B некоторым периодическим преобразованием L с периодом $T > 0$.

Приводимость линейной дифференциальной системы к более простому виду с сохранением существенных свойств её решений изучалась уже давно [1, § 8; 2, гл. III, § 8]. Для приложений, в частности, интересна задача о ляпуновской приводимости системы именно к одному уравнению [3] – серьёзное продвижение в ней получено в работах [4, 5].

Однако вопрос о возможности сохранить при указанном переходе ещё и свойство автономности, при его наличии, у исходной системы оставался открытым. Известно [5], что любая система (1) ляпуновски приводима к некоторому уравнению, причём T -периодическая система T -периодически же приводима к T -периодическому уравнению, а если расширить фазовое пространство до комплексного, то к таким автономным уравнениям периодически (с произвольным периодом) приводима уже всякая автономная система (1). Вопрос о ляпуновской приводимости автономной системы (1) именно к действительному автономному уравнению оказался сложнее, хотя в маломерных случаях, т.е. при $n \leq 2$, он решается положительно, но в случаях большей размерности, вообще говоря, отрицательно.

Для упрощения формулировки основного результата, опирающегося на специфическое свойство жордановой нормальной формы матрицы системы, дадим следующее

Определение 3. Матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ назовём *жорданово почти парной*, если каждому её действительному собственному значению отвечает такой набор жордановых клеток, что все они, кроме, быть может, одной, разбиваются на пары клеток одинакового порядка.

Критерий приводимости автономной системы к автономному уравнению представляет

Теорема [6]. Для любой автономной системы следующие четыре свойства равносильны:

- 1) система ляпуновски приводима к автономному уравнению;
- 2) для некоторого $T > 0$ система T -периодически приводима к автономному уравнению;
- 3) для любого $T > 0$ система T -периодически приводима к автономному уравнению;
- 4) матрица системы жорданово почти парна.

Литература. 1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950. 2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 3. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. 2003. № 1. С. 31–62. 4. Сергеев И.Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 25–33. 5. Сергеев И.Н. О приводимости линейных дифференциальных систем к линейным дифференциальным уравнениям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 39–44. 6. Сергеев И.Н., Уманский К.В. Критерий ляпуновской приводимости линейной автономной дифференциальной системы к линейному автономному уравнению // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2022. № 5. С. 41–44.

И. В. Асташова, В. А. Никишов (Москва) “О продолжаемости и асимптотике решений уравнения Риккати с вещественными корнями правой части” (31 марта 2023 г.).

Уравнение Риккати с непрерывными и ограниченными коэффициентами

$$y' = P(x) + Q(x)y + y^2 \quad (1)$$

изучалось в многочисленных работах (см., например, [1–3; 4, гл. XI, § 7]). Ниже предполагаем, что $Q^2 - 4P \geq 0$, поэтому правая часть уравнения (1) как функция от y имеет при всех $x \in \mathbb{R}$ вещественные нули $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$, а уравнение записывается в виде

$$y' = (y - \alpha_1(x))(y - \alpha_2(x)), \quad -\infty < m \leq \alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq M < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Считаем, что либо $\alpha_1 < \alpha_2$, либо $\alpha_1 = \alpha_2$, а также всюду (за исключением теорем 2 и 3) дополнительно предполагаем, что $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(\mathbb{R})$. Исследуем продолжаемость и асимптотику решений уравнения (2) в зависимости от начальных значений и свойств функций α_1, α_2 .

Лемма [5]. Если некоторое решение уравнения (2) определено на интервале (α, ω) , где $\omega \leq +\infty$, то существует такое решение y_* уравнения (2), определённое на некотором интервале (S_*, ω) , что для любого решения $y(\cdot)$ уравнения (2), определённого на каком-либо интервале (S, ω) , выполнены неравенства $S \geq S_*$, $y \leq y_*$.

Определение 1. Решение y_* уравнения (2) из леммы выше назовём *главным* на (x_0, ω) .

Определение 2. Решение y уравнения (2) назовём *стабилизирующимся* [1], если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \equiv y_+ \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) \equiv y_- \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. Если $Q'(x) < Q^2(x)/2 - 2P(x)$ при $x \geq x_0$, а решение y уравнения (2) удовлетворяет условию $y(x_0) \leq -Q(x_0)/2$, то $y(x) < -Q(x)/2$ при $x > x_0$.

Следствие. Если $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) \equiv \alpha(x)$ и $\alpha'(x) > 0$ при $x \geq x_0$, а решение y уравнения (2) удовлетворяет условию $y(x_0) \leq \alpha(x_0)$, то $y(x) < \alpha(x)$ при $x > x_0$.

Теорема 2. Если решение y уравнения (2) определено в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то оно ограничено снизу при $x \geq x_0$.

Теорема 3. Если решение y уравнения (2) удовлетворяет условию $y(x_0) > M$, то при $x > x_0$ оно возрастает и существует такое x^* , что

$$x_0 < x^* < x_0 + \frac{1}{y(x_0) - M}, \quad \lim_{x \rightarrow x^* - 0} y(x) = +\infty,$$

а если – условию $y(x_0) < m$, то при $x < x_0$ оно возрастает и существует такое x_* , что

$$x_0 - \frac{1}{m - y(x_0)} < x_* < x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_* + 0} y(x) = -\infty.$$

Теорема 4. Если решения $y_3 < y_2 < y_1$ уравнения (2) определены в точке x_0 , а решение y_1 продолжается на луч $[x_0, +\infty)$, то и решения y_3, y_2 продолжаютя на тот же луч, причём на нём функция $(y_1(x) - y_3(x))/(y_1(x) - y_2(x)) \geq 1$ убывает и имеет при $x \rightarrow +\infty$ конечный предел, который в случае когда решение y_1 главное на $(x_0, +\infty)$ равен единице.

Теорема 5. Если два решения уравнения (2) определены на луче $[x_0, +\infty)$ и имеют разные конечные пределы при $x \rightarrow +\infty$, то любое решение, определённое на том же луче, также имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 6. Если решения $y_2 < y_1$ уравнения (2) определены на луче $[x_0, +\infty)$ и имеют конечные (возможно, совпадающие) пределы при $x \rightarrow +\infty$, то любое решение y со значением $y(x_0) \leq y_1(x_0)$ продолжается на тот же луч и имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 7. Если решения $y_2 < y_1$ уравнения (2) определены на луче $[x_0, +\infty)$ и имеют конечные пределы при $x \rightarrow +\infty$, причём решение y_1 главное на $(x_0, +\infty)$, то всякое решение $y \neq y_1$, определённое на $[x_0, +\infty)$, имеет при $x \rightarrow +\infty$ тот же предел, что и y_2 .

Пусть далее $\alpha_1 < \alpha_2$ и для некоторого $a > 0$ выполнены дополнительные условия

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha_j(x) \equiv \alpha_j^\pm \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \quad \alpha_1'(x) \neq 0 \neq \alpha_2'(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]. \quad (3)$$

Тогда [1] все ограниченные решения – стабилизирующиеся, а все стабилизирующиеся решения в окрестности ∞ имеют ненулевую производную и разбиваются на следующие четыре типа:

$$\begin{array}{ll} \text{I тип: } y_- = \alpha_1^-, & y_+ = \alpha_1^+; \\ \text{II тип: } y_- = \alpha_2^-, & y_+ = \alpha_1^+; \\ \text{III тип: } y_- = \alpha_2^-, & y_+ = \alpha_2^+; \\ \text{IV тип: } y_- = \alpha_1^-, & y_+ = \alpha_2^+. \end{array}$$

Теорема 8. Если при условиях (3) уравнение (2) имеет стабилизирующееся решение II типа, то существуют и единственные решения y_I и y_{III} , соответственно, I и III типов, причём для любого решения y имеем:

1) если $y_I < y < y_{III}$, то y – стабилизирующееся решение II типа;

2) если $y > y_{II}$, то для некоторого $x^* \in \mathbb{R}$ решение y продолжаемо на луч $(-\infty, x^*)$, причём $y_- = \alpha_2^-$ и $\lim_{x \rightarrow x^*-0} y(x) = +\infty$;

3) если $y < y_I$, то для некоторого $x_* \in \mathbb{R}$ решение y продолжаемо на луч $(x_*, +\infty)$, причём $y_+ = \alpha_1^+$ и $\lim_{x \rightarrow x_*+0} y(x) = -\infty$.

Теорема 9. При условиях (3) уравнение (2) имеет стабилизирующееся решение II типа, если и только если оно имеет стабилизирующиеся решения I и III типов.

Теорема 10. При условиях (3) для уравнения (2) верно ровно одно из следующих взаимно исключающих друг друга утверждений:

- 1) существует стабилизирующееся решение II типа;
- 2) существует единственное стабилизирующееся решение и оно относится к IV типу;
- 3) стабилизирующихся решений нет.

Замечание. Теоремы 1–3 дополняют результаты работы [2]. Более того, теорема 3 опровергает утверждение теоремы 5.7 [2, с. 150] об ограниченности решения на всей числовой прямой. Теоремы 8–10 дополняют теоремы 2.1–2.4 [1].

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Палин В.В., Радкевич Е.В. О поведении стабилизирующихся решений для уравнения Риккати // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 110–133. 2. Егоров А.И. Уравнение Риккати. М., 2001. 3. Astashova I. Remark on continuous dependence of solutions to the Riccati equation on its righthand side // Int. Workshop QUALITDE–2021. Tbilisi, Georgia, 2021. P. 1–4. 4. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York, 1964. 5. Hartman P. On an ordinary differential equation involving a convex function // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1969. V. 146. P. 179–202.

И. Н. Сергеев (Москва) “Определение свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы” (7 апреля 2023 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \ni 0$ пространства \mathbb{R}^n с евклидовой нормой $|\cdot|$ и метрикой $d(\cdot, \cdot)$ рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \quad (1)$$

Через $S_*(f)$ и $S_\delta(f)$ будем обозначать множество всех непродолжаемых решений системы (1) с начальными условиями $|x(0)| > 0$ и $0 < |x(0)| < \delta$ соответственно.

Определение. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение, о чём мы в дальнейшем больше не будем упоминать) обладает *ляпуновской*, *перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *полной неустойчивостью* [1, 2], если существуют такие $\varepsilon, \delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| > \varepsilon \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| > \varepsilon, \quad (2)$$

причём в случае $D(x) \neq \mathbb{R}_+$ требование (2) (как и (3) ниже) также считаем выполненным;

2) *глобальной неустойчивостью* [1, 2], если существует такое $\varepsilon > 0$, что любое решение $x \in S_*(f)$ удовлетворяет соответствующему требованию (2);

3) *крайней неустойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta(f)$ удовлетворяет соответствующему требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)|_G > \varepsilon^{-1}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)|_G > \varepsilon^{-1} \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)|_G > \varepsilon^{-1}, \quad (3)$$

где для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначено

$$|x|_G \equiv \max\{|x|, d^{-1}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)\} \quad (\text{здесь } 0^{-1} \equiv +\infty, \quad +\infty^{-1} \equiv 0).$$

Для решения $x \in S_*(f)$ с ограниченной областью определения $D(x) \equiv [0, T)$, в силу асимптотической продолжаемости его графика до границы области $\mathbb{R}_+ \times G$, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow T-0} |x(t)|_G = +\infty.$$

Если же, к примеру, $G = \mathbb{R}^n$, то справедливы равенства

$$|x|_{\mathbb{R}^n} = \max\{|x|, d^{-1}(x, \emptyset)\} = \max\{|x|, 0\} = |x|.$$

Из определения следует, что не только глобальная, но и крайняя неустойчивость влечёт за собой полную неустойчивость того же типа (причём ляпуновская глобальная неустойчивость даже неразличима с полной [3]), а любая верхнепредельная неустойчивость влечёт за собой одноимённую ляпуновскую, но вытекает из перроновской. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Если система (1) обладает крайней неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и полной неустойчивостью того же типа (и обязательно ляпуновской, причём глобальной).*

Сузив фазовую область, можно превратить полную неустойчивость в крайнюю, т.е. верна

Теорема 2. *Если система (1) обладает полной неустойчивостью какого-либо типа, то её сужение на некоторую фазовую подобласть $G' \subset G$ обладает крайней (а также глобальной) неустойчивостью всех трёх типов сразу.*

В одномерном случае полные и глобальные (одного типа), а также ляпуновские и верхнепредельные (одноимённые) неустойчивости неразличимы, поэтому из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. *Если при $n = 1$ система (1) обладает крайней неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и глобальной неустойчивостью того же типа (и обязательно верхнепредельной).*

В автономном же случае неразличимыми являются вообще все шесть видов неустойчивости [3]: ляпуновской, перроновской и верхнепредельной – полной и глобальной.

Теорема 4. *Если автономная система (1) обладает крайней неустойчивостью какого-либо типа, то она обладает и глобальной неустойчивостью всех трёх типов сразу.*

Заключение теоремы 1 не распространяется на глобальную неустойчивость, отличную от ляпуновской, а именно, из теоремы 2 (и доказательства теоремы 1 [4]; см. её усиление в докладе [5]) следует

Теорема 5. *При $n = 2$ существует система (1), обладающая крайней неустойчивостью всех трёх типов сразу, но не обладающая ни верхнепредельной, ни перроновской глобальной неустойчивостью.*

Ни полная, ни глобальная неустойчивости не влекут за собой крайнюю, причём даже в автономном случае, как показывает

Теорема 6. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $G = \mathbb{R}^n$ существует автономная система (1), обладающая глобальной неустойчивостью всех трёх типов сразу, но не обладающая крайней неустойчивостью никакого типа.*

Наконец, верхнепредельная крайняя неустойчивость не влечёт за собой никакую перроновскую неустойчивость вообще – ни даже самую слабую, частную, представляющую собой отрицание глобальной устойчивости [2], причём даже в линейном случае, что и подтверждает

Теорема 7. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ и $G = \mathbb{R}^n$ существует ограниченная (на \mathbb{R}_+) линейная система (1), обладающая ляпуновской и верхнепредельной крайней неустойчивостью, но не обладающая частной (а тем более крайней) перроновской неустойчивостью.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Сергеев И.Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831. 4. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. 5. Бондарев А.А. Два примера неоднородных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 859–861.

А. А. Бондарев (Москва) “Два примера неоднородных дифференциальных систем, обладающих ляпуновской крайней неустойчивостью” (7 апреля 2023 г.).

При $n \in \mathbb{N}$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n (с нормой $|\cdot|$) рассматриваем системы вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

обеспечивающим существование и единственность решений задач Коши и наличие нулевого решения. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ и $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1) и, соответственно, удовлетворяющих начальному условию $|x(0)| \leq \delta$.

В дополнение к определению ляпуновской, перроновской и верхнепредельной полной, глобальной и крайней неустойчивости системы (1), содержащемуся в докладе [1], дадим

Определение [2–4]. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение) обладает *перроновской* или *верхнепредельной*:

1) *глобальной устойчивостью*, если любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяет требованию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0; \quad (3)$$

2) *массивной частной устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f) \setminus \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию (3).

Ниже приводятся усиленные варианты первых двух результатов работы [4], а именно утверждается существование неодномерных систем (1) произвольной размерности теперь уже не только двумерных, с нулевым первым приближением, обладающих перроновскими и верхнепредельными свойствами, контрастирующими с ляпуновскими, а ещё и с ляпуновской крайней неустойчивостью. Так, в следующей теореме 1 система обладает одновременно:

- и крайней, и глобальной ляпуновской неустойчивостью (первое свойство);
- и перроновской, и верхнепредельной полной неустойчивостью (первое свойство);
- и перроновской, и верхнепредельной массивной частной устойчивостью (второе свойство).

Теорема 1. Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и

$$f'_x(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

а также обладает следующими двумя свойствами:

1) все решения $x \in \mathcal{S}_1(f)$ удовлетворяют равенству

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty;$$

2) для всех решений $x \in \mathcal{S}_*(f) \setminus \mathcal{S}_1(f)$ верно второе (а значит, и первое) равенство (3).

В следующей теореме 2 система обладает одновременно:

- и крайней, и глобальной ляпуновской неустойчивостью (первое свойство, с учётом теоремы 1 из [1]);
- и перроновской, и верхнепредельной глобальной устойчивостью (второе свойство).

Теорема 2. Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и (4), а также обладает следующими двумя свойствами:

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что все решения $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяют неравенству

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon^{-1};$$

2) для всех решений $x \in \mathcal{S}_*(f)$ верно второе (а значит, и первое) равенство (3).

Замечание. Системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, неавтономны, неодномерны и нелинейны. Более того:

– полученные результаты не распространяются на автономные системы, поскольку для них полная и глобальная неустойчивости сразу всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) логически неразличимы [5];

– ни одномерных, ни линейных (однородных) систем с такими наборами свойств не существует, поскольку для них ляпуновская полная (а значит, и глобальная) неустойчивость эквивалентна верхнепредельной глобальной неустойчивости [2].

Исследование выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение свойства крайней неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 858–859. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Сергеев И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578. 4. Бондарев А.А., Сергеев И.Н. Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29. 5. Сергеев И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

А. Х. Сташ (Майкоп) “О нулевых спектрах показателей колеблемости и вращаемости треугольных дифференциальных систем” (14 апреля 2023 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными матричными функциями $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, состоящее из *треугольных* систем, обозначим через \mathcal{T}^n . Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ и положим $\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A)$ (далее звёздочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль).

Определение 1 [1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая (нестрогая) смена знака* функции $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 [1–3]. Для момента $t > 0$ и функции $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ – число точек её *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ – число точек её *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ – число её *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ – число её *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, t)$ – число её *гиперкорней* на промежутке $(0, t]$: при его подсчёте каждый некрatный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз.

Далее для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ введём обозначение $\nu^\alpha(x, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle x, m \rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Определение 3 [2, 3]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right),$$

$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \quad \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(x) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right).$$

Определение 4 [4]. Для функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ и конечного момента времени $t > 0$ определим функционал $\Theta(x, t)$ как такую непрерывную ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, что $\Theta(x, 0) = 0$, но если в некоторый момент $\tau \in [0, t]$ выполнено равенство $x(\tau) = 0$, то по определению (в ущерб непрерывности) считаем $\Theta(x, t) = +\infty$.

Определение 5 [4]. Нижние (верхние) сильный и слабый показатели ориентированной вращаемости вектор-функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ зададим соответственно формулами

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} |\Theta(Lx, t)| \quad \left(\hat{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} |\Theta(Lx, t)| \right),$$

$$\check{\theta}^\circ(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(Lx, t)| \quad \left(\hat{\theta}^\circ(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{End}_2 \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} |\Theta(Lx, t)| \right),$$

где $\text{End}_2 \mathbb{R}^n$ – подмножество множества $\text{End} \mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2.

В тезисах доклада [5] анонсирована теорема о нулевом спектре показателей колеблемости нулей решений линейных однородных треугольных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами. Подобный результат для показателей блуждаемости (отличных от верхнего сильного) двумерных треугольных систем с ограниченными коэффициентами установлен в статье [6], а спектры показателей вращаемости треугольных систем не исследованы вовсе.

Ниже полностью описаны спектры всех показателей колеблемости и вращаемости треугольных систем (состоящие, как оказалось, только из одного нулевого значения).

Теорема. Для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ любой системы $A \in \mathcal{T}^n$ верны равенства

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \hat{\theta}^\bullet(x) = \check{\theta}^\circ(x) = \hat{\theta}^\circ(x) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) = \check{\nu}_\bullet^\alpha(x) = \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \check{\nu}_\circ^\alpha(x) = 0, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}.$$

Следствие. Спектры всех показателей ориентированной вращаемости и показателей колеблемости треугольных дифференциальных систем состоят из одного нулевого значения.

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. имени И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейной системы // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 908. 3. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. 4. Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1501–1503. 5. Сташ А.Х. Спектры полных и векторных частот линейных дифференциальных систем // Мат. моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: матер. Второй междунар. конф. молодых учёных. Терскол, 28 ноября – 1 декабря 2012 г. Нальчик, 2012. С. 211–212. 6. Миценко В.В. Блуждаемость решений двумерных треугольных и диагональных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 907–908.

Н. А. Лобода, А. Х. Сташ (Майкоп) “Об управлении конечными спектрами показателей колеблемости гиперкорней двумерных дифференциальных систем” (14 апреля 2023 г.).

Для заданного натурального n обозначим через \mathcal{M}^n множество линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End} \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ и положим $\mathcal{S}_*^n \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n$, вектор-функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ и момента времени $t > 0$ через $\nu^*(x, m, t)$ обозначим число гиперкорней скалярного произведения $\langle x, m \rangle$ на промежутке $(0, t]$: при его подсчёте каждый некратный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз.

Определение 1 [1]. Верхние сильный и слабый показатели колеблемости функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t), \quad \hat{\nu}_\circ(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t),$$

а соответствующие нижние – теми же формулами с заменой в них верхних пределов нижними.

Определение 2. Множество $\text{Sp}_{\varkappa}(A)$ всех значений показателя $\varkappa : \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}$ назовём спектром этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, а значение показателя \varkappa , принадлежащее спектру системы A , назовём:

а) метрически существенным [2], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, начальные значения $x(0) \in \mathbb{R}^n$ которых заполняют множество положительной меры в \mathbb{R}^n ;

б) *топологически существенным* [3], если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество начальных значений $x(0) \in \mathbb{R}^n$ которых, пересечённое с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Через $\text{ess Spec}_\varkappa(A)$ обозначим множество всех метрически и топологически существенных значений показателя \varkappa для системы A .

В работе [4] доказано существование двумерной периодической системы (1), спектры показателей колеблемости нулей которой содержат любое наперёд заданное число метрически и топологически существенных значений. Известно [5], что для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная система (1) (периодическая, если все эти числа попарно соизмеримы), у которой все значения спектров показателей блуждаемости метрически существенны и заполняют в точности это множество. Оказалось, что все эти свойства переносятся и на показатели колеблемости гиперкорней.

Теорема. *Для любого конечного множества неотрицательных чисел X , содержащего нуль, существует такая система $A \in \mathcal{M}^2$ (периодическая, если все элементы множества X попарно соизмеримы), что при любом $\varkappa = \hat{\nu}_\bullet, \check{\nu}_\bullet, \hat{\nu}_\circ, \check{\nu}_\circ$ справедливы равенства*

$$\text{Spec}_\varkappa(A) = \text{ess Spec}_\varkappa(A) = X.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. 204. № 1. С. 119–138. 2. Сергеев И.Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1661–1662. 3. Сергеев И.Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1567–1568. 4. Сташ А.Х. О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2014. Вып. 1 (133). С. 30–36. 5. Шишляников Е.М. Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 5. С. 14–21.

А. Е. Троскина (Кострома) “О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы” (21 апреля 2023 г.).

Для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}^+, \text{End } \mathbb{R}^n), \quad (1)$$

старший показатель Ляпунова [1, гл. 3, § 4] задаётся формулой

$$\lambda_1(A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_A(t, 0)\|,$$

а верхние центральный и особый показатели определяются дискретным способом [2, гл. 3, § 8] соответственно как

$$\Omega(A) = \inf_{T>0} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} (kT)^{-1} \sum_{j=1}^k \ln \|X_A(jT, (j-1)T)\|, \quad (2)$$

$$\Omega^0(A) = \inf_{T>0} \sup_{k \in \mathbb{N}} T^{-1} \ln \|X_A(kT, (k-1)T)\|, \quad (3)$$

где X_A – оператор Коши системы (1). Из формул (2) и (3) сразу следует, что $\Omega(A) \leq \Omega^0(A)$. Кроме того [2, гл. 3, §§ 7, 8], для систем с ограниченными коэффициентами справедлива цепочка неравенств

$$\lambda_1(A) \leq \Omega(A) \leq \Omega^0(A),$$

в которой любая комбинация равенств и строгих неравенств (вместо нестрогих) реализуется на некоторой ограниченной системе (1).

Теорема. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует система (1), удовлетворяющая неравенствам*

$$\Omega(A) < \Omega^0(A) < \lambda_1(A).$$

Литература. 1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

Р. Г. Алимуратов, Н. Л. Марголина, А. Е. Троскина, К. Е. Ширяев (Кострома) “Об отношении порядка между ляпуновским старшим, центральным и особым верхними показателями неограниченной системы” (21 апреля 2023 г.).

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in C(\mathbb{R}^+, \text{End } \mathbb{R}^n). \quad (1)$$

В докладе [1] приведены формулы, задающие старший показатель Ляпунова и определяемые дискретно верхние центральный и особый показатели, а также приведены соотношения между этими показателями при условии ограниченности системы и установлено существование системы любой размерности вида (1) с неограниченными коэффициентами, особый показатель которой строго меньше старшего показателя Ляпунова, но больше центрального.

Теорема. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует система (1), удовлетворяющая неравенствам

$$\Omega(A) < \lambda_1(A) < \Omega^0(A).$$

Литература. 1. Троскина А.Е. О ляпуновском старшем, центральном и особом верхних показателях неограниченной системы // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 6. С. 863–864.